54 F 0348.
1000567973

FRANT. MÁCHOVEC

ALGEBRA

VYDÁNÍ PRO REÁLKY

ALGEBRA

PRO

VYŠŠÍ TŘÍDY ŠKOL STŘEDNÍCH.

Sepsal

FRANT. MACHOVEC,
professor při c. k. české vyšší reálce karlínské.

VEŘEJNÁ A UNIVERSITNÍ KNIHOVNA V PRAZE

Vydání pro reálky.

S 10 dřevorytinami.

Schváleno výnosem vys. c. k. min. ze dne 1. května 1887, č. 7853.

Cena 1 zl. 40 kr., váz. 1 zl. 60 kr.

V PRAZE 1887.
Nákladem F. Tempského.

159149

SIXTA

F 6348

C. k. dvorní knihtiskárna A. Haase v Praze.

Předmluva.

Učebnice tato povstala z původního vydání mé Algebry pro reálky zjednodušením několika oddílův a vynecháním částí, které učebnou osnovou a instrukcemi nejsou výslovně předepsány.

Zjednodušeny byly značně výklady o veličinách, o číslech irracionálných, o zákonech úměrnosti, o rovnicích lineárných, o rovnicích neurčitých, o výpočtu oddvojmocí a odtrojmocí čísel soustavy desítkové.

Poněkud zjednodušeny výklady o čtyřech základních výkonech početních, o umocňování rovnic a nerovností, o číselných hodnotách odmocnin, o řetězcích, o rovnicích kvadratických a binomických, o řadách, o kombinacích a j.

Vynechány byly — kromě několika menších odstavců — odstavce tyto: O sčítání, odčítání, násobení a dělení nerovností, Hornerova methoda dělení a na ní se zakládající výklady při dělitelnosti, arithmetické poměry a úměry, Lejeune-Dirichletův způsob vypočísti hodnotu řetězce, Longův způsob vypočísti obyčejné logarithmy, o maximech a minimech, řešení rovnic kvadratických užitím goniometrických funkcí, odstavce o všeobecných vlastnostech rovnic algebraických, o rovnicích goniometrických, o řadách harmonických, o řadách arithmetických vyšších stupňův, o číslech obrazcových, o poučce polynomické a Fermatově, skoro všecky příklady ke cvičení,*) poznámky historické a některé jiné.

Tím stalo se, že kniha proti dřívějším 423 str. má nyní jen 298 stran, z nichž str. 1—125 obsahují učivo pro třídu IV., str. 126—220 určeny jsou pro třídu V., 221—278 pro VI. a strany 279—298 pro VII.

Ježto pak dle pětiletého průměru učilo se na př. na našem ústavě algebře ve třídě IV. ve 143 hod., v V. v 90, v VI. v 72 a v VII. ve 22, připadá učiva i s příklady za vzor vypočtenými na každou hodinu asi strana a tolik zajisté lze vyložiti, aniž žáci budou přetíženi.

Kollegovi p. prof. Al. J. Hofmanovi vyslovuji díky za pomoc, kterou přispěl ke zdokonalení původního a tím i tohoto vydání mé Algebry po stránce jazykové.

V Karlíně dne 1. dubna 1887.

Frant. Machovec.

*) V instrukcích pro školy reálné předpokládá se, že jest v rukou žáků kromě učebné knihy mathematické i kniha cvičebná (str. 144. a 145.). Ještě určitěji vyslovují se v téže příčině instrukce pro gymnasia (str. 218).

159149

SIXTA

F 6348

C. k. dvorní knihtiskárna A. Haase v Praze.

Předmluva.

Učebnice tato povstala z původního vydání mé Algebry pro reálky zjednodušením několika oddílův a vynecháním částí, které učebnou osnovou a instrukcemi nejsou výslovně předepsány.

Zjednodušeny byly značně výklady o veličinách, o číslech irracionálných, o zákonech úměrnosti, o rovnicích lineárných, o rovnicích neurčitých, o výpočtu oddvojmocí a odtrojmocí čísel soustavy desítkové.

Poněkud zjednodušeny výklady o čtyřech základních výkonech početních, o umocňování rovnic a nerovností, o číselných hodnotách odmocnin, o řetězcích, o rovnicích kvadratických a binomických, o řadách, o kombinacích a j.

Vynechány byly — kromě několika menších odstavců — odstavce tyto: O sčítání, odčítání, násobení a dělení nerovností, Hornerova methoda dělení a na ní se zakládající výklady při dělitelnosti, arithmetické poměry a úměry, Lejeune-Dirichletův způsob vypočísti hodnotu řetězce, Longův způsob vypočísti obyčejné logarithmy, o maximech a minimech, řešení rovnic kvadratických užitím goniometrických funkcí, odstavce o všeobecných vlastnostech rovnic algebraických, o rovnicích goniometrických, o řadách harmonických, o řadách arithmetických vyšších stupňův, o číslech obrazcových, o poučce polynomické a Fermatově, skoro všecky příklady ke cvičení,*) poznámky historické a některé jiné.

Tím stalo se, že kniha proti dřívějším 423 str. má nyní jen 298 stran, z nichž str. 1—125 obsahují učivo pro třídu IV., str. 126—220 určeny jsou pro třídu V., 221—278 pro VI. a strany 279—298 pro VII.

Ježto pak dle pětiletého průměru učilo se na př. na našem ústavě algebře ve třídě IV. ve 143 hod., v V. v 90, v VI. v 72 a v VII. ve 22, připadá učiva i s příklady za vzor vypočtenými na každou hodinu asi strana a tolik zajisté lze vyložiti, aniž žáci budou přetíženi.

Kollegovi p. prof. Al. J. Hofmanovi vyslovuji díky za pomoc, kterou přispěl ke zdokonalení původního a tím i tohoto vydání mé Algebry po stránce jazykové.

V Karlíně dne 1. dubna 1887.

Frant. Machovec.

*) V instrukcích pro školy reálné předpokládá se, že jest v rukou žáků kromě učebné knihy mathematické i kniha cvičebná (str. 144. a 145.). Ještě určitěji vyslovují se v téže příčině instrukce pro gymnasia (str. 218).

O b s a h.

Úvod.

Str.

§ 1—3. Pojmy základní 1

Část prvá.

O čtyřech základních výkonech početních abstraktními čísly celými.

I. O sčítání.

§ 4. Výměry 2
§ 5. Výsledky 3

II. O odčítání.

§ 6. Výměry 3
§ 7. Výsledky 4
§ 8. Poučky o sčítání a odčítání rozdílův a součtů 5
§ 9. Rozšíření řady číselné o nullu a o čísla záporná 6
§ 10. O významu záporných výsledků v několika případech. Znázornění čísel . . . 9
§ 11. O sčítání a odčítání čísel algebraických 11
§ 12. Rozšíření vět o sčítání a odčítání rozdílů 12
§ 13. O mnohočlenech 13
§ 14. O algebraickém sčítání 15

III. O násobení.

§ 15. Výměry 16
§ 16. Výsledky 17
§ 17. Násobení součtů, součinů, mocnin a mnohočlenů 18
§ 18. Rozšíření pojmu násobení na násobitele rovného nulle a na násobitele algebraické 21
§ 19. Rozšíření pravidla pro násobení rozdílem a vůbec mnohočlenem 24
§ 20. O vytčení společného činitele mimo závorku 24
§ 21. O členech stejnojmenných a různojmenných. O upravení mnohočlenů. O výhodách při násobení některých mnohočlenů. Důležité příklady 25

IV. O dělení.

§ 22. Výměry 27
§ 23. Výsledky 27
§ 24. Rozšíření řady číselné o čísla lomená 30
§ 25. Sčítání a odčítání podílů. Dělení mnohočlenu jednočlenem 32
§ 26. Dělení součinův a podílů. Násobení podílem 35
§ 27. Dělení mnohočlenu mnohočlenem. 36

Část druhá.

O soustavách číselných vůbec a o soustavě desítkové zvláště.

§ 28. Vysvětlení 39
§ 29. Převod čísel z jedné soustavy na soustavu jinou 41

Část třetí.

Dělitelnosť čísel.

Str.
§ 30. Výměry . . . 42
§ 31. Výsledky . . . 43
§ 32. Rozklad čísel složených na prvočísla. Základní poučky o dělitelnosti . . . 43
§ 33. Pravidla dělitelnosti pro čísla soustavy desítkové . . . 46
§ 34. O algebraických výrazech kmenných a složených. Rozklad výrazů složených na výrazy kmenné . . . 48
§ 35. O největší společné míře čísel a výrazův algebraických . . . 49
§ 36. Jak vypočteme největší spol. míru čísel a alg. výrazů . . . 50
§ 37. O společném násobku čísel a alg. výrazů vůbec a o jich nejmenším společném násobku zvláště . . . 53
§ 38. Jak vypočteme nejmenší společný násobek . . . 54

Část čtvrtá.

O zlomcích.

I. Všeobecné vlastnosti zlomků.

§ 39. Výměry . . . 55
§ 40. Výsledky . . . 56
§ 41. Krácení zlomků . . . 58
§ 42. Rozšiřování zlomků. Jak uvedeme zlomek na jiného jmenovatele . . . 60

II. Početní výkony zlomky.

§ 43. Sčítání zlomkův . . . 60
§ 44. Odčítání zlomkův . . . 61
§ 45. Násobení zlomku číslem celým . . . 62
§ 46. Dělení zlomku číslem celým . . . 62
§ 47. Násobení zlomkem . . . 63
§ 48. Dělení zlomkem . . . 64
§ 49. O zlomcích složených. Rozšíření pouček o počítání zlomky . . . 65
§ 50. O výrazech $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{a}{o}$, $\infty . o$, $\frac{o}{o}$, $\infty - \infty$ a $\frac{\infty}{\infty}$ . . . 67

III. O zlomcích desetinných.

§ 51. Výměr zlomků desetinných a jich písemné označování . . . 68
§ 52. O počítání zlomky desetinnými . . . 70
§ 53. Proměna zlomku obecného v desetinný. O periodických zlomcích desetinných . 73
§ 54. Proměna zlomku desetinného v obecný . . . 75

Část pátá.

O veličinách. O číslech neúplných. O zkráceném počítání čísly soustavy desítkové.

§ 55. O veličinách a jich měření . . . 76
§ 66. O číslech neúplných . . . 77
§ 57. Jak vypočteme chyby výsledků při čtyřech základních výkonech početních čísly neúplnými . . . 78
§ 58. O zkráceném počítání čísly soustavy desítkové . . . 81

Část šestá.

O poměrech a úměrách.

I. O poměrech.

Str.
§ 59. Výměry 89
§ 60. Výsledky 89
§ 61. Vlastnosti poměrův geometrických 90

II. O úměrách.

§ 62. Výměr a vlastnosti úměr 92
§ 63. O úměrách postupných 96

III. Užití úměr.

§ 64. O zákonech úměrnosti 98
§ 65. O počtu trojčlenném 100
§ 66. O počtu úrokovém 101
§ 67. O počtu spolkovém 102

Část sedmá.

O rovnicích stupně prvého.

I. O rovnicích vůbec.

§ 68. Vysvětlení 103
§ 69. O dovolených změnách rovnice 106
§ 70. O normálném tvaru rovnice. O upravení rovnice 110

II. O řešení rovnic 1ho stupně.

§ 71. Řešení rovnic 1ho stupně (lineárných) o jedné neznámé 111
§ 72. Řešení rovnic 1ho stupně o dvou neznámých 111
§ 73. Řešení rovnic 1ho stupně o třech neznámých 115
§ 74. Řešení *n* lineárných rovnic o *n* neznámých. O určitých, neurčitých a přeurčitých soustavách rovnic 119
§ 75. Jak užíváme rovnic k řešení úloh 121

Část osmá.

O zlomcích řetězových.

§ 76. Výměry 125
§ 77. Jak proměňujeme zlomek obecný na řetězec 126
§ 78. O sblížených hodnotách řetězců 127
§ 79. O vlastnostech sblížených hodnot řetězců 129
§ 80. Užití řetězců 135

Část devátá.

O rovnicích neurčitých.

§ 81. Vysvětlení 136
§ 82. O neurčitých rovnicích stupně 1ho (lineárných) s dvěma neznámými 136
§ 83. Jak řešíme neurčité rovnice lineárné o dvou i více neznámých 138

Část desátá.

O mocninách, odmocninách a logarithmech.

I. O mocninách.

Str.
§ 84. Výměr mocniny a výsledky z něho plynoucí 141
§ 85. O umocňování jednočlenův. O počítání mocninami 142
§ 86. Rozšíření pojmu mocniny na mocniny s mocnitelem 0 a na mocniny s mocniteli zápornými 143
§ 87. Zdvojmocňování dvojčlenův a mnohočlenův 144
§ 88. O vyšších mocninách dvojčlenův a mnohočlenův 147
§ 89. O závislosti absolutní hodnoty mocniny na jejím mocněnci a mocniteli . . . 149
§ 90. Jak zdvojmocňujeme čísla soustavy desítkové 151
§ 91. Jak ztrojmocňujeme čísla soustavy desítkové 153
§ 92. O inversních výkonech umocňování 154

II. O odmocninách.

§ 93. Výmér odmocniny a výsledky z něho plynoucí 155
§ 94. O početních výkonech odmocninami 156
§ 95. Rozšíření pojmu mocniny na mocniny s lomenými mocniteli 160
§ 96. O odmocňování rovnic a nerovností. Závislosť hodnoty odmocniny na jejím odmocněnci a odmocniteli 162
§ 97. O číselných hodnotách odmocnin 164
§ 98. O určování druhého a třetího kořene z výrazů mnohočlenných 169
§ 99. Vypočítávání druhého a třetího kořene čísel soustavy desítkové 172
§ 100. O výrazech surdických 179
§ 101. Jak lze odstraniti odmocniny ze jmenovatele zlomku 180
§ 102. O číslech imaginárných 182
§ 103. Dodatky o poměrech a úměrách geometrických a o rovnicích vůbec 186

III. O logarithmech.

§ 104. Vysvětlení 191
§ 105. Výsledky 192
§ 106. O logarithmu součinu, podílu, mocniny a odmocniny 193
§ 107. Logarithmování rovnic a nerovností 195
§ 108. O soustavách logarithmických 195
§ 109. Jak na sobě závisejí logarithmy čísel ve dvou různých soustavách logarithmických 198
§ 110. O soustavě logarithmův obyčejných 199
§ 111. Jak lze vypočísti obyčejné logarithmy 200
§ 112. Jak jsou zařízeny tabulky logarithmické a jak se jich užívá 201
§ 113. Řešení některých rovnic exponenciálních a logarithmických 210

Část jedenáctá.

O rovnicích stupně druhého a vyššího.

I. Rovnice stupně druhého (kvadratické) o jedné neznámé.

§ 114. Vysvětlení 211
§ 115. Jak řešíme rovnici kvadratickou ryzí 212
§ 116. Jak řešíme rovnici kvadratickou smíšenou 212
§ 117. Vlastnosti kořenů rovnice kvadratické 215

Str.

II. Rovnice, jež lze řešiti na základě rovnic kvadratických.

§ 118. O rovnicích převratných (reciprokých) 221
§ 119. O rovnicích binomických 225
§ 120. Řešení některých rovnic trinomických 230

III. Rovnice stupně druhého i vyššího o dvou i více neznámých.

§ 121. Řešení rovnic kvadratických o dvou i více neznámých 231
§ 122. Řešení rovnic stupně vyššího než druhého o několika neznámých 236
§ 123. O neurčitých rovnicích stupně druhého 239

Část dvanáctá.

O řadách.

§ 124. Vysvětlení 241
§ 125. Řady arithmetické 242
§ 126. Řady geometrické 242
§ 127. Řady složené 250
§ 128. O složeném úrokování 251
§ 129. O vypočítání úspory, důchodu, úmoru a výkupného 255

Část třináctá.

O skupinách. O poučce binomické.

§ 130. Vysvětlení 260
§ 131. O přestavách čili permutacích 261
§ 132. O sestavách čili kombinacích 264
§ 133. O nástavách čili variacích 271
§ 134. O variacích ve smyslu širším 273
§ 135. O poučce binomické 276

Část čtrnáctá.

O počtu pravděpodobnosti.

§ 136. Vysvětlení 278
§ 137. Poučky 280
§ 138. Jak jsou zařízeny tabulky úmrtnosti a jak se jich užívá 283
§ 139. O sázce a výhře při spravedlivé hře 285
§ 140. Příklady výpočtů, které závisejí na úmrtnosti 288

Dodatek o výrazech soujemných.

§ 141. O kanonickém tvaru výrazů soujemných 292
§ 142. Násobení a dělení výrazů soujemných ve tvaru kanonickém 293
§ 143. O poučce Moivreově 294
§ 144. O znázornění čísel soujemných 296

ÚVOD.

Pojmy základní.

§ 1. Utvoříme-li si představu o nějaké věci, po ní o věci jiné, po té zas o jiné a t. d. a shrneme-li pokaždé tyto představy, hledíce k některému jich společnému znaku, v jedinou, nabýváme ponětí o určitých množstvích (kolikostech). Výkon, který při tom duch náš koná, jmenujeme *čítáním* a jím nabyté ponětí o určitém množství nazýváme *číslem*. Věci, jež čítáme, jmenujeme *jednotkami*. Číslo jest na druhu jednotek nezávislé.

Skládá-li se udání nějaké nejen z čísla, ale i ze jména, kterým jsou určeny jednotky čítané, jmenujeme udání to *číslem pojmenovaným* čili *konkretním*, jako na př. 3 *kg*, 5 *zl.* a t. d. Na rozdíl od čísel pojmenovaných jmenujeme čísla vlastní (ponětí o kolikosti) *čísly nepojmenovanými* čili *abstraktními*; jich základem jest *jednotka abstraktní*.

Čítáním vznikne z jednotek abstraktních řada čísel abstraktních jedna, dvě, tři, čtyři....., kterou nazýváme *řadou číselnou přirozenou*.

Poněvadž můžeme v mysli své ke každému množství jednotek přiřaditi jednotky další, *jest řada číselná nekonečná*. Čísla řady číselné pokračují od čísel *menších* k *větším* a vzrůstání jich *nemá meze*.

Myslíme-li si několik jednotek abstraktních, dospějeme vždy k témuž číslu, čítejmež tyto jednotky v jakémkoli pořádku. Z té příčiny pravíme, že čítání jest *výkonem záměnným* (kommutativním).

Chtějíce vyznačiti libovolné číslo z řady číselné označujeme je *písmeny*, na př. a, b, c... α, β, γ... Čísla označená písmeny jmenujeme *čísly obecnými*, kdežto čísla vyznačená zvláštními znaky — *číslicemi* — jmenujeme čísly *zvláštními*.

§ 2. Srovnávajíce dvě čísla abstraktní a a b shledáváme, že udávají buď *stejný* nebo *nestejný* počet jednotek. V prvním případě pravíme, že číslo a *jest rovno* číslu b, a vyznačujeme to písemně *rovnicí* $a = b$.

Ve případě druhém

buď jest číslo a větší než číslo b, což vyznačujeme *nerovností* $a > b$,

nebo jest číslo a menší než číslo b, což vyznačujeme *nerovností* $a < b$.

Je-li číslo $a = b$,

„ $b = c$,

„ $c = d$,

„ $d = e$,

. . .

. . .,

píšeme kratšeji $a = b = c = d = e$ ... a nazýváme tento výraz *rovnicí složenou*.

Podobně píšeme místo nerovností

$$\begin{array}{ll} a > b, & \alpha < \beta, \\ b > c, & \beta < \gamma, \\ c > d, & \gamma < \delta, \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \hline \text{nerovnosti složené } a > b > c > d \ldots & \alpha < \beta < \gamma < \delta \ldots \end{array}$$

§ 3. Každý výkon, jímž ze dvou nebo několika čísel nabýváme čísla nového, jmenujeme *výkonem početním*. Provádějíce výkony početní *počítáme*. Nauku o vlastnostech čísel a o výkonech početních nazýváme *počtářstvím* čili *arithmetikou*. Pokud se arithmetika zanáší jen čísly zvláštními, jest *arithmetikou zvláštní* čili prostě *arithmetikou*; jsou-li jejím předmětem i čísla obecná, sluje *arithmetikou obecnou* čili *algebrou*. *Arithmetika* i *algebra* jsou větvemi vědy, již *mathematikou* nazýváme.

Část prvá.

O čtyřech základních výkonech početních abstraktními čísly celými.

O sčítání.

§ 4. **Výměry.**

1) *Sčítati čísla* **a** *a* **b** *znamená vyhledati číslo* **c**, *které má tolik jednotek, kolik čísla* **a** *a* **b** *dohromady.*

Čísla *a* a *b* slovou *sčítanci* (summandy), číslo *c* *součet* (summa) a *výkon početní*, kterým ze sčítanců nabýváme součtu, nazýváme *sčítání.*

Abychom vyznačili, že čísla *a* a *b* mají býti sčítána, klademe mezi ně znaménko + a čteme *a* více *b* nebo *a* plus *b*. Rovnicí

$$a + b = c$$

jest vyjádřeno, že *c* jest *součtem* čísel *a* a *b*.

2) $a + b$ znamená, že k číslu *a* má býti připočteno číslo *b*,
$(a + b)$ znamená součet složený ze sčítanců *a* a *b*.

3) $a + b + c + d$ znamená, že nejprve vytvořiti jest součet $(a + b)$, k tomuto součtu částečnému že připočísti jest *c*, čímž povstane součet $[(a + b) + c]$, kterýž zvětšiti jest o *d*, t. j. vytvořiti

$$\{[(a + b) + c] + d\}.$$

Tato souvislosť vyjádřena jest rovnicí

$$a + b + c + d = \{[(a + b) + c] + d\}.$$

Znamení ( ), [ ], { } jmenujeme, jak po sobě jdou, závorky první, druhé, třetí.

§ 5. **Výsledky.**

1) *Závorka, která jest před znaménkem* $+$ *jen za tím účelem, aby jí bylo vyznačeno, k čemu má býti připočteno číslo po onom znaménku následující, může býti vynechána.*

Neboť dle 3) značí

$$(a + b) + c \text{ totéž jako } a + b + c.$$

2) *Součet jest nezávislý na pořádku, ve kterém sčítance po sobě sčítáme,* neboť pokaždé má součet tolik jednotek, co oba sčítanci dohromady (§ 4. 1.).

Jesti tudíž $a + b = b + a$,

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = c + a + b = c + b + a.$$

Z příčiny v tomto odstavci vytčené jmenujeme sčítání *výkonem záměnným.*

3) *Součet připočteme k nějakému číslu, připočteme-li k němu po sobě každého sčítance onoho součtu.*

Tvrzení. $$a + (b + c) = a + b + c.$$

Důkaz. Připočteme-li k číslu a napřed b jednotek a potom c jednotek, zvětšíme je dohromady o $(b + c)$ jednotek. Podobně soudíme, je-li připočísti součet více než dvou sčítanců.

Povšimnutí zasluhuje, že dle rovnice

$$a + (b + c) = a + b + c$$

lze položiti za spojení $+ (b + c)$ spojení $+ b + c$ a všeobecněji za spojení $+ (b + c + d + e)$ spojení $+ b + c + d + e$ a naopak, tedy na př. $+ 5 + 3 + 4 = + (5 + 3 + 4) = + 12$, což nic jiného nepraví, než že připočísti po sobě 5, 3 a 4 jest tolik, co připočísti 12.

4) *Sečtením rovnic povstane opět rovnice,*

t. j., je-li $a = \alpha$,

$b = \beta$,

jest $a + b = \alpha + \beta$,

neboť rovné za rovné lze položiti, tudíž α lze klásti za a a β za b.

O odčítání.

§ 6. **Výměry.**

1) *Od čísla* **a** *odečísti číslo* **b** *znamená vyhledati číslo* **c**, *které k* **b** *připočteno jsouc dá* **a**.

Číslo a sluje *menšenec* (minuend), číslo b *menšitel* (subtrahend) a číslo c *rozdíl* čili *zbytek* (difference). Výkon početní, kterým z menšence a menšitele nabýváme zbytku, nazýváme *odčítáním.*

Znaménko odčítání jest — a čte se *„méně“* čili *„minus“.*

Rovnicí

$$a - b = c \qquad (1)$$

jest vyjádřeno, že c jest rozdílem čísel a a b.

2) $a - b$ značí, že od a má býti odečteno b,
$(a - b)$ značí rozdíl, jehož tím nabudeme.

3) $a + b - c + d$ značí, že vytvořiti jest $(a + b)$, od čehož odečísti jest číslo c, čímž povstane $[(a + b) - c]$, kterýž výraz zvětšiti jest o číslo d, takže povstane $\{[(a + b) - c] + d\}$.

§ 7. Výsledky.

1) Definice odčítání praví, že o číslech a, b a c, která se vyskytují v rovnici

$$a - b = c, \tag{1}$$

platí rovnice $b + c = a$, (2)

t. j.: *Menšitel zvětšený o zbytek dá menšence.*

2) Poněvadž $b + c = c + b$ (§ 5., 2), jest i

$c + b = a$, s kterouž rovnicí

jest rovnice $a - c = b$ (3)

v téže souvislosti jako rovnice 1. s 2.

V rovnici 3. obsažena jest věta:
Menšenec zmenšený o zbytek dá menšitele.

3) Vložíce do rovnice 1. za a součet $(b + c)$, obdržíme

$$(b + c) - b = c$$
$$\text{čili} \quad (c + b) - b = c, \tag{4}$$

a dosadíme-li za c rozdíl $(a - b)$ do rovnice 2., vznikne rovnice

$$b + (a - b) = a$$
$$\text{čili} \quad (a - b) + b = a. \tag{5}$$

Z rovnice 4. jest patrna věta:

Odečteme-li od součtu jednoho jeho sčítance, obdržíme za rozdíl sčítance druhého.

Tytéž rovnice zároveň s rovnicí 5. praví:

Zvětšíme-li / Zmenšíme-li číslo **a** *o libovolné číslo* **b** *a* *zmenšíme-li součet / zvětšíme-li rozdíl* *tím povstalý o totéž číslo* **b**, *nabudeme původního čísla* **a**.

Místo toho pravíme, že výkony sčítání a odčítání provedené týmž číslem na vzájem *se ruší.*

Z té příčiny nazýváme tyto výkony *na vzájem protivnými* a přenášíme název ten i na znaménka + a — oněch výkonů.

4) *Závorka, která jest před znaménkem — jen proto, aby jí bylo vyznačeno, od čeho má býti odečteno číslo za tím znaménkem stojící, může býti vynechána.*

Neboť dle § 6., 3) značí $(a + b) - c$ totéž co $a + b - c$
a podobně jest $(a - b) - c = a - b - c$.

5) *Odečtením jedné rovnice od druhé povstane zase rovnice,*
t. j., je-li $a = \alpha,$
$b = \beta,$
jest $a - b = \alpha - \beta$
neboť rovné za rovné lze položiti, tudíž α může býti položeno za a a β za b.

6) *Aby bylo lze vyjádřiti rozdíl* $(a - b)$ *číslem řady číselné* 1, 2, 3, 4..., *musí býti menšencem* **a** *vyjádřen větší počet jednotek než menšitelem* **b**, t. j. *musí býti vyhověno podmínce*

$$a > b.$$

V následujícím vyšetřování budeme tuto podmínku předpokládati dotud, dokud nic jiného ustanoveno nebude.

7) *Součet zmenší se o tolik jednotek, o kolik jednotek zmenšíme kteréhokoli jeho sčítance.* Jeli tedy $(a + b)$ původní součet,
jest $(a - c) + b = a + (b - c) = (a + b) - c$
čili dle § 5., 1. a § 7, 4. $a - c + b = a + (b - c) = a + b - c.$ (6)

Rozdíl $\begin{matrix}\text{zvětší}\\ \text{zmenší}\end{matrix}$ *se o tolik jednotek, o kolik jednotek* $\begin{matrix}\text{zvětšíme}\\ \text{zmenšíme}\end{matrix}$ *jeho menšence.* Je-li tedy $(a - b)$ původní rozdíl,
jest $(a + c) - b = (a - b) + c$ čili $a + c - b = a - b + c$ (7)
a $(a - c) - b = (a - b) - c$ „ $a - c - b = a - b - c.$ (8)

Rozdíl $\begin{matrix}\text{zvětší}\\ \text{zmenší}\end{matrix}$ *se o tolik jednotek, o kolik jednotek* $\begin{matrix}\text{zmenšíme}\\ \text{zvětšíme}\end{matrix}$ *jeho menšitele.* T. j., je-li $(a - b)$ původní rozdíl,
jest $a - (b - c) = (a - b) + c$ čili $a - (b - c) = a - b + c$ (9)
$a - (b + c) = (a - b) - c$ „ $a - (b + c) = a - b - c$
$= a - c - b.$ (10)

§ 8. Poučky o sčítání a odčítání součtů a rozdílů.

1) Z rovnice
$$a - (b + c) = a - b - c = a - c - b \quad \text{(rovn. 10. v § 7.)}$$
vychází na jevo věta:

Součet odečteme, odečteme-li po sobě všecky jeho sčítance.

Při tom jest lhostejno, kterého sčítance odečítáme napřed.

Krátce vyjadřujeme tuto větu vzorcem
$$-(b + c) = -b - c = -c - b. \quad (1)$$
Na př. $-5 = -3 - 2 = -2 - 3.$

Je-li odečísti součet více než dvou čítanců, na př. součet $(b + c + d)$, obdržíme dle věty právě vyslovené nejprve
$$a - (b + c + d) = a - (b + c) - d = a - d - (b + c)$$
a potom, užijeme-li na druhou a třetí část poslední rovnice téže věty,
$$a - (b + c + d) = a - b - c - d = a - d - b - c.$$

Z toho jde, že pravidlo vyslovené pro odečtení součtu dvou sčítanců platí i pro součty o libovolném počtu sčítanců.

Zároveň jest zřejmo, že lze při tom odčítati sčítance v libovolném pořádku. T. j.

$$-b-c-d=-c-b-d=-d-b-c=-d-c-b \text{ atd.} \quad (2)$$

2) Z rovnice

$$a+(b-c)=a+b-c=a-c+b \quad \text{(rovn. 6. v § 7.)}$$

vysvítá: *Rozdíl přičteme, přičteme-li jeho menšence a odečteme-li od nabytého tím součtu menšitele.* Při tom jest lhostejno, který z vytčených dvou výkonů provedeme dříve. Krátce vyznačujeme tuto větu vzorcem

$$+(b-c)=+b-c=-c+b. \quad (3)$$

Na př. $+7=+10-3=-3+10.$

3) Z rovnice 9. v § 7.

$$a-(b-c)=a-b+c$$
$$=a+c-b$$

soudíme:

Rozdíl odečteme, odečteme-li jeho menšence a připočteme-li k nabytému tím rozdílu menšitele. Při tom jest zase lhostejno, který z obou vytčených výkonů provedeno napřed. Krátce vyjadřujeme tuto větu vzorcem

$$-(b-c)=-b+c=+c-b. \quad (4)$$

Na př. $-7=-10+3=+3-10.$

§ 9. Rozšíření řady číselné o nullu a o čísla záporná.

1) Dosud předpokládali jsme při odčítání, *že menšenec jest větší menšitele*, t. j. že v rovnici $a-b=c$ jest $a>b$.

V tomto případě byl zbytek c číslem z řady číselné

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots,$$

do níž náležela i čísla a a b.

Srovnáváme-li velikosti dvou čísel a a b této řady, mohou nastati mimo případ $a>b$ ještě případy dva, a to buď a) $a=b$

nebo b) $a<b$.

a) Je-li při odčítání $a-b$ číslo $a=b$, *není rozdílu mezi počtem jednotek menšence a menšitele.*

Místo rčení *„mezi menšencem a menšitelem není rozdílu“* pravíme *„rozdíl mezi menšencem a menšitelem roven jest nulle“* a píšeme

$$a-a=0.$$

Z této rovnice následuje dle § 7., 1. a 2.,

$$\text{že } a=a+0 \quad (1)$$

$$\text{a } a-0=a, \quad (1')$$

t. j.: *„Nulla k nějakému číslu připočtena neb od něho odečtena jsouc nezmění ho.“*

Aby i tento zvláštní zbytek obsažen byl v řadě číselné, *rozšiřujeme ji* o 0, která má v oné řadě místo *před jednotkou*, poněvadž

$$0 + 1 = 1.$$

Z rovnic 1. a 1′. jest patrno, že i $0 + 0 = 0$,

$$0 - 0 = 0.$$

b) Je-li při odčítání $a - b$ číslo $a < b$, *nelze* odčítání to *úplně* vykonati, neboť od čísla, jež udává jistý počet jednotek, nelze odníti *více* jednotek, než jich to číslo má.

To stává se ještě patrnějším těmito úvahami:

Je-li $a < b$, lze položiti $b = a + \alpha$, načež $a - b = a - (a + \alpha)$.

Na pravé straně této rovnice má býti od a odečteno a a α (§ 8., 1.) Avšak odečteme-li a od a, obdržíme již 0, od níž má býti ještě odečteno α, což jest nemožné.

Vyznačením postupu právě vypsaného obdržíme

$$a - (a + \alpha) = 0 - \alpha, \text{ což kratšeji píšeme}$$
$$a - (a + \alpha) = -\alpha. \qquad (2)$$

O výrazu $-\alpha$ *pravíme, že jest v tomto případě zbytkem, a nazýváme jej číslem záporným čili negativným.*

Poměr čísel záporných k číslům přirozené řady číselné

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots$$

vyplývá z rovnice

$$0 - \alpha = -\alpha.$$

Aby definice odčítání platila i pro rozdíl na levé straně této rovnice se vyskytující, musí býti součet zbytku $(-\alpha)$ a menšitele (α) roven menšenci,

$$\text{t. j. } (-\alpha) + \alpha = 0. \qquad (3)$$

Z toho následuje, že čísla α a $-\alpha$ mají se k sobě tak jako na př. *α zl.* jmění k *α zl.* dluhu, nebo jako dvě síly stejné působící ve směrech protivných, t. j. jako dvě protivy.

Tato vzájemná protiva čísel záporných a čísel řady 1, 2, 3, 4, . . vyplývá i z toho, že pro $a > b$ lze položiti $a = b + \beta$ a tudíž

$$a - b = (b + \beta) - b, \text{ t. j.}$$
$$a - b = 0 + \beta = \beta, \text{ kdež } \beta \text{ značí } \textit{nadbytek} \text{ menšence naproti menšiteli.}$$

Avšak je-li $a < b$, lze položiti $b = a + \alpha$ a tudíž $a - b = a - (a + \alpha)$ čili dle svrchu vytčeného $a - b = 0 - \alpha = -\alpha$, kdež α udává *schodek* menšence naproti menšiteli.

Rovná-li se tudíž zbytek číslu z řady číselné 1, 2, 3, . . ., poukazuje to na *nadbytek* menšence proti menšiteli, avšak je-li zbytkem číslo *záporné*, jest to znamení *schodku* menšence naproti menšiteli.

Aby protiva čísel přirozené řady číselné s čísly zápornými i slovy byla vyjádřena, nazýváme zbytky, které udávají nadbytek menšence proti menšiteli, *čísly kladnými* čili *positivními* a klademe před ně znaménko $+$.

Čísla kladná a záporná nazýváme *čísly algebraickými* čili *relativními* naproti číslům 1, 2, 3, 4, . . ., jež nejsou opatřena žádnými znaménky a jež čísly *absolutními* slují.

Každé algebraické číslo skládá se z absolutní hodnoty a ze znaménka *jakostného* $+$ anebo $-$.

Mezi čísly positivními a absolutními rozdílu není.

Čísla stejnými znaménky označená jmenujeme *souhlasná*, čísla označená znaménky protivnými *nesouhlasná* (protivná).

Z rovnice 3.

$$(-\alpha) + \alpha = 0$$

jest patrno:

α) *Čísla záporná jest pokládati za menší než* 0, neboť teprve připojíme-li k zápornému číslu $-\alpha$ absol. číslo α, obdržíme nullu.

β) *Číslo záporné jest tím menší, čím jest jeho absolutní hodnota větší,* neboť čím jest jeho absolutní hodnota větší, tím větší číslo absolutní jest k němu připojiti, aby povstala nulla.

Tak na př. připojiti jest

k -1 číslo 1, aby vznikla 0,
„ -2 „ 2, „ „ 0,
„ -3 „ 3, „ „ 0,
atd.

2) Aby byly v řadě číselné i záporné zbytky obsaženy, rozšiřujeme ji o čísla záporná, kteráž v ní mají, jsouce nully menší, místo své před nullou.

Tím nabýváme řady

$$\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

v níž jsou čísla uspořádána od *menšího k většímu* čili *vzestupně*,

$$\text{t. j. } \ldots -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 \ldots \quad (4)$$

3) Poněvadž nulla činí rozhraní mezi čísly zápornými a kladnými, lze ji počítati k číslům záporným i kladným,

$$\text{t. j. } +0 = -0. \quad (5)$$

Z nerovnosti 4. a z rovnice 5. vychází na jevo:

Číslo kladné nemůže býti rovno zápornému, leč by bylo rovno 0.

Na základě věty 3. lze dokázati:

4) *Odčítání není výkonem záměnným.*

Tvrzení. $a - b$ není rovno $b - a$.

Důkaz. Budiž na př. $a > b$ a $a - b = c$, (6)

tudíž $a = b + c$.

Z toho jde, že $b - a = b - (b + c)$;
avšak $b - (b + c) = -c$, (2. rovn. tohoto §)
tedy i $b - a = -c$. (6′)
Je-li tudíž $a - b$ rovno c,
jest $b - a$ „ $-c$
a poněvadž c nemůže se rovnati $-c$, je-li od nully rozdílno, nemůže býti $a - b$ rovno $b - a$, pokud a a b jsou čísla různá.

5) Po rozšíření řady číselné o nullu a o čísla záporná mohou obecná čísla a, b, c, . . . atd. značiti každé číslo této řady. Avšak prozatím budeme těmito písmeny vyjadřovati jen absolutní hodnoty a připojíme před ně znaménko + nebo —, bude-li nám vyjádřiti číslo kladné nebo záporné. Teprve později přiložíme znakům a, b, c, . . . onen význam všeobecnější.

§ 10. O významu záporných výsledků v několika případech. Znázornění čísel.

1) *Příklad 1.* Někdo má a *zl.* jmění a b *zl.* dluhu. Kolik má čistého jmění?

Odpověď. Čisté jmění té osoby rovno jest $(a - b)$ *zl.* Při tom jsou tři případy možné:

a) Číslo $a > b$, potom jest rozdíl $a - b$ kladný rovnaje se na př. c.
b) Číslo $a = b$, „ „ „ $a - b$ rovný 0.
c) Číslo $a < b$, „ „ „ $a - b$ záporný rovnaje se na př. $-d$.

I zní odpověď na danou otázku
ve případě *a*): Jmění té osoby rovno jest c,
„ „ *b*): „ „ „ „ „ 0,
„ „ *c*): „ „ „ „ „ $-d$.

Tážeme-li se v témž příkladě, jaký dluh má ta osoba, zní odpověď:
Dluh její roven jest $(b - a)$ *zl.*

Přihlédneme-li k týmž třem případům jako prve, poznáme
ve příkladě *a*), že dluh roven jest $-c$,
„ „ *b*) „ „ „ „ 0, (rovnice 6. a 6′. § 9.)
„ „ *c*) „ „ „ „ d.

Srovnajíce obojí odpovědi seznáme, že
výsledek „c *zl.* jmění“ totožný jest s výsledkem „$-c$ *zl.* dluhu“.
„ 0 *zl.* „ „ „ „ „ 0 *zl.* „
„ $-d$ *zl.* „ „ „ „ „ d *zl.* „

Čísly kladnými a zápornými jest v tomto případě vyznačena *protiva* mezi jměním a dluhem.

Příklad 2. Někdo vyšel z místa A a ušel a *km* na sever, načež se vrátil a šel b *km* na jih. Kolik *km* jest od místa A na sever?

Odpověď. Ta osoba jest $(a - b)$ *km* od místa A na sever.

Při tom jsou zase tytéž tři případy možny, jako ve příkladě 1.

I zní odpověď ve případě *a*): Osoba jest c *km* od místa A na sever,

„ „ *b*): „ „ 0 „ „ „ „ „ „

„ „ *c*): „ „ $-d$ „ „ „ „ „ „ .

Tážeme-li se v témž případě, kolik *km* jest ta osoba od místa *A* na jih, zní odpověď:

Ta osoba jest $(b - a)$ od místa *A* *km* na jih,

načež obdržíme ve případě *a*), že jest od místa *A* vzdálena $-c$ *km* na jih,

„ „ *b*) „ „ „ „ „ „ 0 „ „ „

„ „ *c*) „ „ „ „ „ „ d „ „ „ .

Srovnajíce obojí odpovědi seznáme,

že výsledek „*c* *km* na sever“ totéž značí jako výsledek „$-c$ *km* na jih“

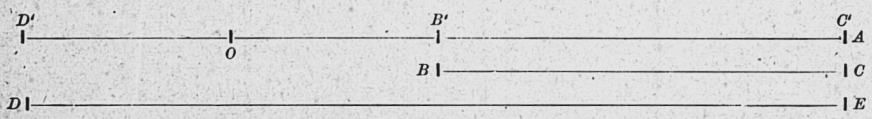
„ „ „0 „ „ „ “ „ „ „ „ „0 „ „ „ “

„ „ „$-d$ „ „ „ “ „ „ „ „ „d „ „ „ “.

Čísly kladnými a zápornými jest v tomto případě vyjádřena vzájemná *protiva směrů na sever a jih.* Totéž platí o každých dvou směrech na vzájem protivných, jak jest zřejmo i z následujícího příkladu.

Příklad 3. Je-li od úsečky *OA*, která má *a* jednotek délkových, odečísti jinou menší úsečku $BC = b$ jedn. délkovým, může se to státi tím, že úsečku

Obr. 1.



BC položíme na úsečku *OA* tak, že její konec *C* padne na konec A úsečky *OA*. Úsečka $OB' = c$ jest potom zbytkem.

Při tom padne bod *B'* od *O* na pravo a rozdíl $a - b$ jest kladný.

Je-li úsečka $DE = b'$ větší úsečky *a*, nelze jí odníti od úsečky *a*, čili jinými slovy (§ 10. *b*.) rozdíl $(a - b')$ jest záporný. Avšak opakujeme-li výkon prve provedený, t. j. položíme-li *DE* na *OA* tak, že bod *E* padne na *A*, vyskytne se bod *D* v místě *D'*, které jest v levo od bodu *O*.

Chceme-li i v tomto případě mluviti o rozdílu $(a - b')$, jest důsledno pokládati zaň úsečku *OD'*.

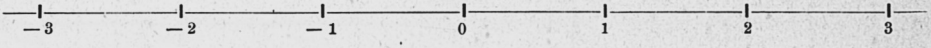
Kladným rozdílem úseček *OA* a *BC* jest tudíž úsečka *OB'* ležící od bodu *O* na pravo, kdežto záporným rozdílem úseček *OA* a *DE* jest úsečka *OD'* ležící od bodu *O* na levo.

2) Na třetím příkladě zakládá se *znázornění čísel řady číselné*

$$\ldots, -2, -1, -0, 1, 2, 3, \ldots$$

Na přímce vytkneme určitý bod O a zvolíce určitou jednotku délky nanášíme ji od něho v jednom i druhém směru.

Obr. 2.



Body tím obdržené, ležící po jedné straně bodu O znázorňují čísla kladná, body ležící na straně protivné čísla záporná. Určitým bodem jest znázorněno číslo, jehož absolutní hodnota skládá se z tolika jednotek, kolik jednotek délkových obnáší vzdálenosť onoho bodu od bodu O. Bodem O znázorněna jest tudíž 0. Přímku, na níž čísla znázorňujeme, jmenujeme *„osou čísel.“*

§ 11. O sčítání a odčítání čísel algebraických.

1) Poněvadž mezi čísly kladnými a absolutními rozdílu není, jest patrna věta:

Číslo kladné $\begin{matrix}\text{připočísti}\\ \text{odečísti}\end{matrix}$ *značí* $\begin{matrix}\text{připočísti}\\ \text{odečísti}\end{matrix}$ *jeho absolutní hodnotu,*

t. j.
$$+(+a)=+a,$$
$$-(+a)=-a.$$

Tedy na př.
$$8+(+3)=8+3=11,$$
$$8-(+3)=8-3=5,$$
$$-13+(+10)=-13+10=-3, \qquad (\S\ 8.,\ 4.)$$
$$-13-(+10)=-13-10=-23. \qquad (\S\ 8.,\ 1.)$$

2) Abychom poznali, co značí připočísti neb odečísti číslo záporné, suďme takto:

Přičteme-li na př. k číslu 20 postupně po jedné klesající čísla

$$4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3\ldots,$$

nabudeme součtů

$$20+4,\ 20+3,\ 20+2,\ 20+1,\ 20+0,\ 20+(-1),\ 20+(-2),\ 20+(-3)\ldots,$$

čili v prvních pěti případech

$$24,\quad 23,\quad 22,\quad 21,\quad 20,$$

a tyto první součty po jedné klesají. Jednota žádá, aby i následující součty po jedné klesaly,

t. j. aby bylo $20+(-1)=19$ čili rovno $20-1$,
$20+(-2)=18$ „ „ $20-2$,
$20+(-3)=17$ „ „ $20-3$
atd.

Z toho vychází na jevo:

Číslo záporné připočísti značí odečísti jeho absolutní hodnotu,

t. j.
$$+(-a)=-a.$$

Na př. $15 + (-3) = 15 - 3 = 12.$

$-8 + (-2) = -8 - 2 = -10.$ (§ 8., 1.)

Odečteme-li na př. od čísla 5 postupně po jedné klesající čísla

$3, 2, 1, 0, -1, -2, -3 \ldots,$

nabudeme rozdílů

$5 - 3, \; 5 - 2, \; 5 - 1, \; 5 - 0, \; 5 - (-1), \; 5 - (-2), \; 5 - (-3) \ldots$

čili v prvních čtyřech případech

$2, \quad 3, \quad 4, \quad 5,$

a tyto čtyři rozdíly po jedné *rostou*. Požadavkem jednoty jest, aby i další rozdíly po jedné rostly,

t. j. aby bylo $5 - (-1) = 6$ čili rovno $5 + 1,$

$5 - (-2) = 7$ „ „ $5 + 2,$

$5 - (-3) = 8$ „ „ $5 + 3$

atd.

Z toho jest zřejmo:

Číslo záporné odečísti značí připočísti jeho absolutní hodnotu,

t. j. $-(-a) = +a.$

Na př. $7 - (-5) = 7 + 5 = 12,$

$-10 - (-3) = -10 + 3 = -7,$

$-6 - (-8) = -6 + 8 = 2.$ (§ 8., 3. a 4.)

§ 12. Rozšíření vět o sčítání a odčítání rozdílů.

1) Při odvozování pravidel pro sčítání a odčítání rozdílů (§ 8.) jsme předpokládali, že v každém rozdílu, který se při tom vyskytl, byl menšenec větší menšitele. Rozšířivše řadu číselnou o nullu a o čísla záporná, můžeme tvrditi:

Pravidla odvozená v § 8. pro sčítání a odčítání rozdílů platí i pro rozdíly, jichžto menšenec jest roven menšiteli nebo menší menšitele.

Jest tedy dokázati platnost vzorců

a) $a + (b - c) = a + b - c,$

b) $a - (b - c) = a - b + c,$

které byly v § 8. dokázány pro $b > c$, i pro $b \leqq c$.

Důkaz. Že vzorce tyto platí i pro $b = c$, jest patrno z toho, že v tomto případě $b - c = 0$, což vloženo jsouc do rovnic a) a b) poskytne správné rovnice:

$$a + 0 = a + b - b,$$

$$a - 0 = a - b + b.$$

Je-li $b < c$, jest $b - c = -r$ a $c - b = r,$

tudíž a) $a + (b - c) = a + (-r) = a - r = a - (c - b).$

Poněvadž jest $c > b,$

jest $a - (c - b) = a - c + b = a + b - c$ (§ 8., 4)

a tedy i $a + (b - c) = a + b - c,$ čímž jest dokázána rovn. a).

b) Týmž dosazením obdržíme,

že $a - (b - c) = a - (-r) = a + r = a + (c - b).$

Avšak poněvadž $c > b$,

jest $a + (c - b) = a + c - b = a - b + c$, (§ 8., 3.)

tudíž i $a - (b - c) = a - b + c$, čímž jest dokázána rovnice b).

Ke vzorcům a) a b) buďtež ještě připojeny vzorce

$$a + (-b - c) = a - b - c,$$
$$a - (-b - c) = a + b + c,$$

jichž platnosť takto dokázati lze:

Za $-b - c$ lze položiti $-(b + c)$, takže jest

$$a + (-b - c) = a + [-(b + c)].$$

Avšak $a + [-(b + c)] = a - (b + c)$ (§ 11.)

a $a - (b + c) = a - b - c$, (§ 8., 1.)

tudíž jest $a + (-b - c) = a - b - c$.

Podobně jest $a - (-b - c) = a - [-(b + c)]$.

Avšak $a - [-(b + c)] = a + (b + c)$ (§ 11.)

a $a + (b + c) = a + b + c$, (§ 5., 3.)

tudíž jest $a - (-b - c) = a + b + c$.

§ 13. O mnohočlenech.

Výraz, který složen jest z čísel spojených znaménky + nebo —, jmenujeme *mnohočlenem* (polynomem).

Čísla, z nichž se mnohočlen skládá, i se znaménky, která před nimi stojí, jmenujeme *členy* jeho.

Členy se znaménky + jmenujeme *kladnými* čili *součetnými*, členy se znaménky — *zápornými* čili *odčetnými*.

Obecný tvar mnohočlenu jest tedy

$$\pm b \pm c \pm d \ldots,$$

kdež mohou býti vzata znaménka + nebo —.

Podle počtu členů rozeznáváme *dvojčleny* (binomy), *trojčleny* (trinomy) a t. d.

Znaménko + před prvním členem mnohočlenu vynechává se. Není-li tudíž před prvním členem mnohočlenu žádného znaménka, sluší jej pokládati za součetný.

1) *Pořádek, v němž členy mnohočlenu po sobě jdou, jest libovolný.*

Důkaz. Tato věta jest patrna pro mnohočleny tvaru $+b + c + d$ a $-b - c - d$ z věty 2. v § 5. a z rovnice 2. v § 8.

Zbývá ji tedy dokázati pro ostatní možná spojení znamének, t. j. pro $-b + c + d$, $+b - c + d$, $+b + c - d$, $-b - c + d$, $-b + c - d$ $+b - c - d$.

Dokažme na př., že

$$\underbrace{-b+c+d}_{M} = \underbrace{-b+d+c}_{N} = \underbrace{+c-b+d}_{P} = \underbrace{+c+d-b}_{Q} = \underbrace{+d-b+c}_{R} = \underbrace{+d+c-b}_{S}$$

Že $M=N$ a $Q=S$, vychází na jevo z toho, že $+c+d=+d+c$ (§ 5., 2.)
„ $M=P$ a $R=S$ „ „ „ „ $-b+c=+c-b$ (§ 8., 3.)
„ $P=Q$ „ „ „ „ $-b+d=+d-b$ (§ 8., 3.).

Z těchto rovnic jest zřejmo, že

$$M=N=P=Q=R=S,$$ jak jsme tvrdili.

Podobně lze vykonati důkaz ve případech ostatních a rozšířiti jej i na mnohočleny o více než třech členech.

2) *Závorka, v níž jest mnohočlen uzavřen, aby bylo vyznačeno, že má býti k nějakému číslu připočten, může býti vynechána.*

Na př. $M+(a-b-c+d)=M+a-b-c+d.$

Důkaz. $a-b-c+d=a+d-(b+c)=(a+d)-(b+c),$
tudíž jest $M+(a-b-c+d)=M+[(a+d)-(b+c)].$

Na pravé straně této rovnice má býti k M připočten rozdíl. Dle § 8., 2. se to stane, připočteme-li k M menšence a odečteme-li menšitele.

Tím nabudeme

$$M+(a-b-c+d)=M+(a+d)-(b+c)$$ a poněvadž
$$M+(a+d)=M+a+d$$
a $$-(b+c)=-b-c,$$
jest $$M+(a-b-c+d)=M+a+d-b-c.$$

Vyměníme-li na pravé straně pořádek členů, obdržíme

$$M+(a-b-c+d)=M+a-b-c+d,$$ jak jsme tvrdili.

3) *Vynecháme-li závorku, v níž jest mnohočlen uzavřen, aby bylo vyznačeno, že má býti od nějakého čísla odečten, jest nám zároveň znaménka všech členů onoho mnohočlenu proměniti v protivná.*

Na př. $M-(-a-b-c+d)=M+a+b+c-d.$

Důkaz. Poněvadž $-a-b-c+d=d-(a+b+c),$ (§ 8., 2.)
jest $M-(-a-b-c+d)=M-[d-(a+b+c)].$
Avšak $M-[d-(a+b+c)]=M-d+(a+b+c)$ (§ 8., 3.)
a $M-d+(a+b+c)=M-d+a+b+c,$ (§ 5., 3.)
tudíž $M-(-a-b-c+d)=M-d+a+b+c,$ ze kteréž rovnice vyplývá rovnice žádaná, vyměníme-li na pravé její straně pořádek členů $-d$, $+b$ a $+c$.

4) Rovnici $M-(-a-b-c+d)=M+a+b+c-d$ lze psáti i ve tvaru

$$M-(-a-b-c+d)=M+(+a+b+c-d),$$

z čehož následuje:

Mnohočlen odečteme od nějakého čísla, proměníme-li znaménka všech jeho členů v protivná a přičteme-li k onomu číslu mnohočlen tím nabytý.

5) Na základě věty 2. a 3. tohoto § lze tvrditi:

a) *Každý mnohočlen lze uzavříti v závorku, před níž jest znaménko* $+$.

b) *Chceme-li mnohočlen uzavříti v závorku, před níž jest znaménko* $-$, *jest nám znaménka všech členů proměniti v protivná.*

Na př. místo $-a+b-c$ lze psáti $+(-a+b-c)$ anebo $-(a-b+c)$.

Výkon ve větě *b*) vyznačený nazýváme *vytčením znaménka — před závorku.*

6) Jde-li o odstranění závorek v nějakém výraze, mějme na mysli jich význam.

Na př. ve výraze

$$-a+b-\{-5+[b-(a-3)]\}$$

značí závorky od nejnižší počínajíc toto:

Od čísla *b* odečísti jest rozdíl $(a-3)$, výsledek $[b-(a-3)]$, jehož tím dojdeme, připočísti jest k číslu -5 a součet $\{-5+[b-(a-3)]\}$ odečísti jest od výrazu $-a+b$.

Abychom tyto závorky odstranili, proveďme postupně výkony jimi vyznačené, počínajíce závorkou nejnižší.

Tím nabudeme

$$\begin{aligned}-a+b-\{-5+[b-(a-3)]\} &= -a+b-\{-5+[b-a+3]\} = \\ &= -a+b-\{-5+b-a+3\} = \\ &= -a+b+5-b+a-3 = 2.\end{aligned}$$

Vyličte význam závorek ve příkladě svrchu vytčeném počínajíce závorkou nejvyšší a odstraňte potom nejprve tuto závorku a po ní závorky ostatní.

§ 14. O algebraickém sčítání.

Na základě pravidel odvozených pro počítání čísly algebraickými lze tvrditi, že

$$\begin{aligned}a+b &= (+a)+(+b),\\ a-b &= (+a)+(-b),\\ -a+b &= (-a)+(+b),\\ -a-b &= (-a)+(-b),\end{aligned}$$ z čehož jde:

1) *Každý součet nebo rozdíl čísel absolutních, tudíž i každý mnohočlen lze vyjádřiti součtem čísel algebraických.*

Součet čísel algebraických jmenujeme *algebraický součet* a výkon početní, jímž se vypočítává, nazýváme *algebraické sčítání.* Výkon tento tají v sobě dva výkony čísly absolutními: sčítání a odčítání. Vykonávajíce v určitých případech tyto výkony, pravíme, že *„slučujeme“*. Na př. ze součtu algebraického $(+6)+(-7)+(-5)$ obdržíme po sloučení -6.

Zvláště zasluhuje povšimnutí,

že $(+a)+(-a)=0$,

$(-b)+(+b)=0$, jakož již z rovnice 3. v § 9. známo jest.

2) *V algebraickém součtu mohou býti sčítanci v libovolném pořádku sčítáni.*

Tvrzení. $(\pm a) + (\pm b) + (\pm c) \ldots\ldots = (\pm a) + (\pm c) + (\pm b) =$
$= (\pm b) + (\pm a) + (\pm c)$ a t. d.

Důkaz. $(\pm a) + (\pm b) + (\pm c) = \pm a \pm b \pm c$ dle 1. věty tohoto §.
$(\pm a) + (\pm c) + (\pm b) = \pm a \pm c \pm b$ „ „ „
$(\pm b) + (\pm a) + (\pm c) = \pm b \pm a \pm c$ „ „ „
a $\pm a \pm b \pm c = \pm a \pm c \pm b = \pm b \pm a \pm c$ a t. d. dle § 13., 1.,
tudíž i $(\pm a) + (\pm b) + (\pm c) = (\pm a) + (\pm c) + (\pm b) =$
$= (\pm b) + (\pm a) + (\pm c)$ a t. d., což bylo dokázati.

O násobení.

§ 15. Výměry.

1) *Násobiti číslo* **a** *číslem* **b** *znamená vypočísti součet* **c** *skládající se z tolika sčítanců* **a**, *kolik jednotek má* **b**.

Číslo a jmenuje se *násobenec* (multiplikand), číslo b *násobitel* (multiplikator) a výsledek c *součin* (produkt). Výkon početní, kterým se z násobence a násobitele vypočítá součin, nazýváme *násobením.*

Násobenec a násobitel slovou *činitelé* (faktory).

Znaménkem násobení jest ležatý křížek ($\times$) nebo tečka, kteráž znaménka kladou se mezi násobence a násobitele. Nepovstává-li tím nejasnost, neklade se mezi násobence a násobitele znaménka žádného.

Rovnicí $a \,.\, b = c$ jest vyznačeno,
že násobením čísla a (násobence) číslem b (násobitelem) povstane číslo c.

2) $a\,b$ značí, že má býti a násobeno b, $(a\,b)$ značí součin složený z činitelů a a b.

3) $a\,b\,c\,d$ značí, že má býti nejprve a násobeno b, t. j. že má býti vytvořen součin $(a\,b)$; tento součin že násobiti jest c, t. j. že má býti vytvořeno $[(a\,b)\,c]$ a z toho konečně $\{[(a\,b)\,c]\,d\}$.

4) Místo $a \,.\, a$ píšeme kratšeji a^2,
„ $a \,.\, a \,.\, a$ „ „ a^3
a všeobecně místo $\underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, .\,.}_{n\text{kráte}}$ píšeme a^n.

Součin několika stejných činitelů jmenuje se *mocnina* (potence). Činitel, který se opakuje, jmenuje se *mocněnec* nebo *základ* (dignand) a číslo, které udává, kolikrát se mocněnec vyskytuje jako činitel, nazývá se *mocnitel* (exponent).

V mocnině a^n jest a mocněncem a n mocnitelem.

a^n čteme a na n^{tou} (mocnost) aneb a $n^{té}$ (mocnosti).

Podle počtu stejných činitelů čili podle mocnitele rozeznáváme mocniny druhé, třetí . . . $n^{té}$.

Vypočítávání $n^{té}$ mocniny jmenujeme povyšováním na n^{tou} mocnost čili umocněním číslem n.

§ 16. Výsledky.

1) $ab = \underbrace{a+a+a+a+a\ldots}_{b\text{kráte.}}$

2) Násobitel musí býti číslem nepojmenovaným z řady čísel absolutních 1, 2, 3, 4, . . .

Násobenec může býti číslem pojmenovaným nebo nepojmenovaným absolutním neb algebraickým.

3) Při absolutním násobiteli jest součin *kladný, záporný,* je-li násobenec *kladný. záporný.*

Tvrzení. a) $(+a)b = +(ab)$,

b) $(-a)b = -(ab)$.

Důkaz. $(+a)b = \underbrace{(+a)+(+a)+(+a)\ldots}_{b\text{kráte}}$, (dle 1.,)

avšak $(+a)+(+a)+(+a)\ldots = \underbrace{a+a+a+a\ldots}_{b\text{kráte}}$ (§ 11.)

a $\underbrace{a+a+a\ldots}_{b\text{kráte}} = ab = +(ab)$,

tudíž i $(+a)b = +(ab)$.

b) $(-a)b = \underbrace{(-a)+(-a)+(-a)+(-a)\ldots}_{b\text{kráte}}$ (dle 1. tohoto §)

Avšak $\underbrace{(-a)+(-a)+(-a)+(-a)+\ldots}_{b\text{kráte}} = \underbrace{-a-a-a-a-\ldots}_{b\text{kráte}}$ (§ 11.)

a $\underbrace{-a-a-a\ldots}_{b\text{kráte}} = -(\underbrace{a+a+a+\ldots}_{b\text{kráte}}) = -(ab)$, (§ 8., 1.),

tudíž i $(-a)b = -(ab)$.

4) $1 \,.\, a = a$,

neboť $1 \,.\, a = \underbrace{1+1+1+\ldots}_{a\text{kráte}} = a$.

5) $a \,.\, 1 = a$, neboť $a \,.\, 1$ značí, že má býti číslo a vzato za sčítance jednou, čímž nabudeme a.

Poněvadž $1 \,.\, a = a$ i $a \,.\, 1 = a$, nepíšeme 1 jakožto činitele.

6) Číslo záporné lze pokládati za součin vzniklý z násobence -1 a z absolutní hodnoty onoho čísla,

neboť $-a = (-1)a$. (3. tohoto §)

7) $0 \,.\, b = 0$, neboť $0 \,.\, b = \underbrace{0+0+0+\ldots}_{b\text{kráte}} = 0$. (§ 9., a)

8) Jsou-li násobenec a násobitel čísla absolutní, lze tvrditi:

Součin se nemění, vyměníme-li násobence s násobitelem.

Tvrzení. $ab = ba$.

Důkaz.

$$ab = \begin{cases} \overbrace{1+1+1+1+1+1+\ldots}^{a} \\ 1+1+1+1+1+1+\ldots \\ 1+1+1+1+1+1+\ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases} \quad b\text{kráte}$$

$$ba = \begin{cases} \overbrace{1+1+1+\ldots}^{b} \\ 1+1+1+\ldots \\ 1+1+1+\ldots \\ 1+1+1+\ldots \\ 1+1+1+\ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases} \quad a\text{kráte}$$

Poněvadž v obou případech obdržíme stejný počet jednotek, jest $ab = ba$, jak bylo tvrzeno.

Z věty 8. jde, že násobení jest *výkonem záměnným*. Při absolutním násobenci a násobiteli není tudíž potřebí činiti rozdílu mezi těmito dvěma čísly. Z té příčiny jmenujeme násobence a násobitele společným jménem *činiteli* (§ 15., 1).

Jest-li jeden z činitelů udán číslem zvláštním anebo je-li výslovně jako násobitel označen, jmenujeme jej *součinitelem* (koefficientem).

Součinitele píšeme vždy na první místo. Na př. v součinech $2a$, $5a$, $7b$ jsou čísla 2, 5 a 7 součiniteli. Tyto součiny čteme: dvě a, pět a, sedm b takže již z vyslovení jest patrno, že činitele 2, 5 a 7 pokládáme za násobitele.

9) *Násobením dvou rovnic povstane opět rovnice,*

t. j., je-li
$$\begin{array}{l} a = \alpha, \\ b = \beta, \\ \hline \text{jest } ab = \alpha\beta, \end{array}$$

neboť rovné za rovné lze položiti, tudíž může býti položeno α za a a β za b.

Zvláště pak obdržíme znásobením rovnic,
$$\begin{array}{l} -1 = -1, \\ \hline a = \alpha \end{array}$$
rovnici $(-1)\,a = (-1)\,\alpha$ čili dle 3. věty $-a = -\alpha$.

Srovnajíce tuto rovnici s rovnicí $a = \alpha$ shledáváme, že *jest dovoleno znaménku obou stran rovnice změniti v protivná.*

§ 17. Násobení součtů, součinů, mocnin a mnohočlenů.

1) *Součet násobíme, násobíme-li každého jeho sčítance a sečteme-li obdržené tím součiny částečné.*

Tvrzení. $(a+b)\,c = ac + bc$.

Důkaz.
$$(a+b)\,c = \underbrace{(a+b)+(a+b)+(a+b)+(a+b)\ldots}_{c\text{kráte}}$$
$$= a+b+a+b+a+b+\ldots$$
$$= \underbrace{(a+a+a+a+\ldots)}_{c\text{kráte}} + \underbrace{(b+b+b+b+\ldots)}_{c\text{kráte}}$$
$$= ac + bc, \text{ jak jsme tvrdili.}$$

Z týchž důvodů jest

$$(a + b + c + d)\, m = am + bm + cm + dm \text{ atd.}$$

2) *Součin násobíme, násobíme-li jednoho jeho činitele.*

Tvrzení. $(ab)c = (ac)b = (bc)a = a(bc)$.

Důkaz. Poněvadž $a \,.\, b = \underbrace{a + a + a + a \ldots}_{b\text{kráte}}$,

jest $(ab)c = \underbrace{(a + a + a \ldots)}_{b\text{kráte}}\, c$ a tudíž dle věty 1. tohoto §

$(ab)c = \underbrace{ac + ac + ac + \ldots}_{b\text{kráte}}$, čili

$(ab)c = (ac)b$, čímž jest první část tvrzení okázána.

Poněvadž $ab = ba$, jest $(ab)\, c = (ba)\, c$. (§ 16., 8)

Dle toho, co bylo právě dokázáno, jest

$$(ba)c = (bc)a,$$

tudíž i $(ab)c = (bc)a$.

Avšak poněvadž činitele spolu vyměniti lze, jest $(bc)a = a(bc)$ a tím i $(ab)c = a(bc)$, čímž jest dokázán ostatek věty 2.

3) *Součin libovolného počtu absolutních činitelů se nemění, násobíme-li činitele jeho za sebou v jakémkoli pořádku.*

Dokážeme tuto větu pro tři činitele.

Tvrzení. $abc = acb = bac = bca = cab = cba$.

Důkaz. Seznali jsme dle věty 2., že jest $(ab)c = (ac)b = (bc)a$, a poněvadž dle § 16., 8. jest $ab = ba$, $ac = ca$, $bc = cb$, jest i

$(ab)c = (ba)c = (ac)b = (ca)b = (bc)a = (cb)a$.

VEŘEJNÁ A UNIVERSITNÍ KNIHOVNA V PRAZE

Dle § 15., 3. mohou býti závorky v této rovnici vynechány, čímž nabudeme $abc = bac = acb = cab = bca = cba$, což bylo tvrzeno.

4) *Součinem násobíme, násobíme-li každým jeho činitelem.*

Tvrzení. $a(bc) = (ab)c = (ac)b$.

Důkaz. $a(bc) = (bc)a = bca = abc$ (§ 16., 8.; § 15., 3.; § 17., 3.)

a témuž výrazu rovny jsou i součiny $(ab)c$ a $(ac)b$. (§ 15., 3.; § 17., 3.)

Z věty 2. a 4. jest patrno, že *není potřebí závorek, aby bylo vyznačeno násobení součinu nějakým číslem* anebo *nějakého čísla součinem* a konečně *součinu součinem.*

5) *Součin mocnin stejného základu roven jest mocnině téhož základu, jejímž mocnitelem jest součet daných mocnitelů.*

Tvrzení. $a^r \,.\, a^s = a^{r+s}$.

Důkaz. $a^r \,.\, a^s = \underbrace{(aaa \ldots)}_{r\text{kráte}}\ \underbrace{(aaa \ldots)}_{s\text{kráte}}$,

$$a^r \cdot a^s = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots .}_{(r+s)\text{kráte}},$$

t. j. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

Podobně dokážeme, že $a^r \cdot a^s \cdot a^p \ldots = a^{r+s+p+\cdots}$.

6) *Součin umocníme libovolným číslem, umocníme-li jím každého jeho činitele a znásobíme-li mocniny tím nabyté.*

Tvrzení. $(ab)^r = a^r \cdot b^r$.

Důkaz. $(ab)^r = \underbrace{(ab)\,(ab)\,(ab)\ldots}_{r\text{kráte}}$ (§ 15., 4.)

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots}_{r\text{kráte}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots}_{r\text{kráte}}$$ (§ 17., 3. a 4.)

$(ab)^r = a^r \cdot b^r$, jak jsme tvrdili.

Z této rovnice soudíme, že $a^r \cdot b^r = (ab)^r$. Které pravidlo jest obsaženo v tomto vzorci?

7) *Mocninu umocníme, násobíme-li jejího mocnitele mocnitelem novým.*

Tvrzení. $(a^r)^s = a^{rs}$.

Důkaz. $(a^r)^s = \underbrace{a^r \cdot a^r \cdot a^r \ldots}_{s\text{kráte}}$ (§ 15., 4.)

$$= a^{\underbrace{r+r+r+\cdots}_{s\text{kráte}}}$$ (§ 17., 5.)

$(a^r)^s = a^{rs}$, jak bylo tvrzeno.

Podobně jest

$$[(a^r)^s]^u = a^{rsu}, \quad \text{neboť} \quad [(a^r)^s]^u = (a^{rs})^u = a^{rsu}.$$

Dále soudíme, že $a^{rs} = (a^r)^s = (a^s)^r$,
tedy na př. $a^6 = (a^2)^3 = (a^3)^2$.

8) *Rozdíl násobíme, násobíme-li jeho menšence i menšitele násobitelem a odečteme-li od prvého součinu druhý.*

Tvrzení. $(a - b)\,c = ac - bc$.

Důkaz. $(a - b)\,c = \underbrace{(a - b) + (a - b) + (a - b) + \ldots}_{c\text{kráte}}$

$$= a - b + a - b + a - b + \ldots$$

$$= \underbrace{(a + a + a + \ldots)}_{c\text{kráte}} - \underbrace{(b + b + b + \ldots)}_{c\text{kráte}},$$

$(a - b)\,c = ac - bc$, jak jsme tvrdili.

9) *Mnohočlen násobíme, násobíme-li každý jeho člen násobitelem a sečteme-li obdržené součiny.*

Tvrzení. $(a - b + c - d)m = (+am) + (-bm) + (+cm) + (-dm)$.

Důkaz. Jako při důkazu vět 1. a 7. tohoto § obdržíme, že

$$(a - b + c - d)m = am - bm + cm - dm,$$

avšak $am - bm + cm - dm = (+am) + (-bm) + (+cm) + (-dm)$, (§ 14., 1.)

tedy $(a - b + c - d)m = (+am) + (-bm) + (+cm) + (-dm)$.

10) *Mnohočlenem násobíme, násobíme-li násobence absolutní hodnotou každého členu násobitele a pokládáme-li obdržené tím součiny za* součetné, odčetné, *byly-li členy násobitele, jichž absolutními hodnotami jsme násobili,* součetné. odčetné.

Tvrzení. $A(a - b + c - d) = Aa - Ab + Ac - Ad$.

Důkaz. $A(a - b + c - d) = (a - b + c - d)A$, (§ 16., 8.)

$$(a - b + c - d)A = aA - bA + cA - dA =$$
$$= Aa - Ab + Ac - Ad, \quad \text{(9. věta tohoto § a § 16., 8.)}$$

tudíž jest

$$A(a - b + c - d) = Aa - Ab + Ac - Ad.$$

Sluší poznamenati, že dle § 16., 2.) $(a - b + c - d)$ musí býti číslo absolutní. Násobenec A může býti číslem absolutním neb algebraickým. Je-li číslem algebraickým, vykoná se výměna v první řádce důkazu vyznačená jen s jeho absolutní hodnotou, kdežto znaménko jakostné zůstane v násobenci.

11) Z věty 10. jde, jak lze vykonati násobení mnohočlenu mnohočlenem. Je-li na př. násobiti $(a - b + c - d)(e - f - g)$, položme $a - b + c - d = A$. Potom jest $(a - b + c - d)(e - f - g) = A(e - f - g)$, což jest dle věty 10. rovno $Ae - Af - Ag$. Vložíce za A původní výraz, obdržíme

$$(a-b+c-d)(e-f-g) = (a-b+c-d)e - (a-b+c-d)f - (a-b+c-d)g$$
$$= ae - be + ce - de - (af - bf + cf - df) - (ag - bg + cg - dg)$$
$$= ae - be + ce - de - af + bf - cf + df - ag + bg - cg + dg.$$

Pravidlo v tomto vzorci obsažené bude až v § 19. vysloveno.

§ 18. Rozšíření pojmu násobení na násobitele rovného nulle a na násobitele algebraické.

Výměr násobení vytčený v § 15. žádá, aby násobitel byl od nully rozdílným absolutním číslem celým a nestačí tudíž pro násobitele rovného 0 a pro násobitele algebraické.

Především lze snadno rozšířiti výměr násobení na *kladné* násobitele.

Poněvadž totiž mezi čísly kladnými a absolutními rozdílu není, jest patrno, že *násobiti číslem kladným značí násobiti jeho absolutní hodnotou,* t. j.

$$a(+b) = a \,.\, b,$$

kdež b jest číslo absolutní.

Abychom poznali význam násobení v ostatních případech, suďme takto:

Násobíme-li kladné nebo záporné číslo a čísly po jedné klesajícími

$$5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3\ldots,$$

obdržíme v prvních *pěti* případech součiny

$$5a,\ 4a,\ 3a,\ 2a,\ a,$$

a každý následující z těchto pěti součinů jest o a menší nežli součin předcházející. Důslednosť žádá, aby týž zákon jevil se i ve případech následujících, t. j. abychom pro

násobitele $\quad 0,\ -1,\ -2,\ -3\ldots$

obdrželi součiny $\quad 0,\ -a,\ -2a,\ -3a\ldots$ Klademe tudíž

1) $\quad a\,.\,0 = 0,$

2) $\begin{cases} a(-1) = -a, \text{ což jest dle § 16., 3. rovno } (-a)1, \\ a(-2) = -2a \text{ „ „ „ „ „ } (-a)2, \\ a(-3) = -3a \text{ „ „ „ „ „ } (-a)3, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{cases}$

Z rovnice 1. vysvítá:

„Je-li násobitel roven nulle, součin rovná se nulle“ a spojíme-li tuto větu s rovnicí $0\,.\,b = 0$ (§ 16., 7.) dospějeme k větě:

Je-li jeden činitel součinu roven nulle, součin rovná se nulle.

Uvážíme-li, že $-a$ jest číslo $\begin{matrix}\text{záporné,}\\ \text{kladné,}\end{matrix}$ je-li a číslo $\begin{matrix}\text{kladné,}\\ \text{záporné,}\end{matrix}$ vychází z rovnic 2. na jevo tento výměr násobení pro záporného násobitele:

Násobiti číslem záporným značí násobiti jeho absolutní hodnotou s protivným znaménkem vzatého násobence,

t. j. $\qquad a(-b) = (-a)b.$

Na základě významu, jejž jsme dali algebraickému násobiteli, lze tvrditi:

2) *Součin dvou* $\begin{matrix}\text{souhlasných}\\ \text{nesouhlasných}\end{matrix}$ *činitelů jest* $\begin{matrix}\text{kladný.}\\ \text{záporný.}\end{matrix}$

Tvrzení. a) $(+a)(+b) = +(ab),$

b) $(-a)(-b) = +(ab),$

c) $(-a)(+b) = -(ab),$

d) $(+a)(-b) = -(ab).$

Důkaz. Dle věty 1. tohoto § jest

a) $(+a)(+b) = (+a)b,$ avšak $(+a)b = +(ab),$ (§ 16., 3.)

tudíž $(+a)(+b) = +(ab).$

b) $(-a)(-b) = (+a)b = +(ab),$

c) $(-a)(+b) = (-a)b = -(ab),$

d) $(+a)(-b) = (-a)b = -(ab).$

3) *Součin libovolného počtu činitelů jest* $\begin{matrix}\text{kladný,}\\ \text{záporný,}\end{matrix}$ *je-li počet záporných činitelů* $\begin{matrix}\text{sudý.}\\ \text{lichý.}\end{matrix}$

Důkaz. Násobíme-li kladným činitelem, jest součin vždy souhlasný s násobencem; pak-li násobíme činitelem záporným, jest součin s násobencem nesouhlasný.

Je-li tudíž první činitel kladný, stane se součin záporným, jakmile dojde při násobení řada na prvního záporného činitele, při druhém záporném činiteli stane se součin zase kladným, při třetím záporným atd. — Je-li tudíž v tomto případě záporných činitelů počet $\begin{matrix}\text{sudý,}\\ \text{lichý,}\end{matrix}$ jest součin $\begin{matrix}\text{kladný.}\\ \text{záporný.}\end{matrix}$ Totéž platí, je-li první činitel záporný.

4) *Je-li mocnitelem číslo sudé, jest mocnina kladná, budiž mocněnec kladný nebo záporný.* Neboť na př. a^6 značí součin šesti činitelů, t. j. sudého počtu činitelů, z nichž každý roven jest a. Avšak součin tento jest kladný, budiž a kladné nebo záporné.

Je-li mocnitelem číslo liché a mocněncem číslo $\begin{matrix}\text{kladné,}\\ \text{záporné,}\end{matrix}$ *jest mocnina* $\begin{matrix}\text{kladná.}\\ \text{záporná.}\end{matrix}$

Neboť na př. a^7 značí součin sedmi činitelů, t. j. lichého počtu činitelů a a ten jest $\begin{matrix}\text{kladný,}\\ \text{záporný,}\end{matrix}$ je-li a $\begin{matrix}\text{kladné.}\\ \text{záporné.}\end{matrix}$

5) *Závorku, která má jen ten účel, aby bylo vyznačeno, že znaménko před ní napsané náleží k součinu v ní uzavřenému, lze vynechati,* neboť dle věty 3. jest lhostejno, vztahujeme-li ono znaménko k celému součinu, nebo k prvnímu jeho činiteli.

Místo $-(ab)$ lze tudíž psáti $-ab$,
„ $+(abc)$ „ „ „ $+abc$ neb abc,
„ $-(abc)$ „ „ „ $-abc$,
„ $-[a(-b)c]$ lze tudíž psáti $-a(-b)c$ a t. d.

6) *Činitele algebraické jest dovoleno násobiti v libovolném pořádku.*

Důkaz. Absolutní hodnotu součinu obdržíme násobíce absolutní hodnoty činitelů. Avšak absolutní činitele násobiti lze v pořádku libovolném, aniž se součin změní. Znaménko součinu závisí na počtu záporných činitelů a ten se přemístěním činitelů nezmění. Výměnou činitelův algebraických neporuší se tudíž ani absolutní hodnota součinu ani jeho znaménko, t. j. součin se výměnou činitelů nezmění.

§ 19. Rozšíření pravidla pro násobení rozdílem a vůbec mnohočlenem.

1) Dokázali jsme, že jest
$A(a-b)=Aa-Ab$, při čemž jsme předpokládali, že jest $a>b$. (§ 17., 10.)
Zavedše i násobitele negativné můžeme tvrditi:

Pravidlo obsažené ve vzorci $A(a-b)=Aa-Ab$ *platí i pro* $a<b$.

Důkaz. Jelikož $a-b=-(b-a)$, jest
$A(a-b)=A[-(b-a)]$, kdež $(b-a)$ jest číslo kladné.
Podle významu negativného násobitele (§ 18.,) jest
$A[-(b-a)]=-A(b-a)=-Ab+Aa=Aa-Ab$,
t. j. $A(a-b)=Aa-Ab$, což bylo dokázati.
Tudíž platí i vzorce
$$A(e-f-g)=Ae-Af-Ag \text{ a}$$
$$(a+b-c+d)(e-f-g)=ae+be-ce+de-af-bf+cf-df-ag-bg+cg-dg$$
i pro $e-f-g<0$, poněvadž násobitele $e-f-g$ lze psáti ve tvaru rozdílu
$$e-(f+g).$$

2) Vzorec poslední lze uvésti na tvar
$$(a+b-c+d)(e-f-g)=(+a)(+e)+(+b)(+e)+(-c)(+e)+$$
$$+(+d)(+e)+(+a)(-f)+(+b)(-f)+(-c)(-f)+(+d)(-f)+$$
$$+(+a)(-g)+(+b)(-g)+(-c)(-g)+(+d)(-g),$$
z něhož jest patrna věta:

Mnohočlen násobíme mnohočlenem, násobíme-li každý člen jednoho mnohočlenu každým členem druhého a sečteme-li obdržené tím součiny částečné.

Z toho následuje, že součin povstalý násobením mnohočlenu, který má r členů, mnohočlenem s členným má $r.s$ členů.

§ 20. O vytčení společného činitele mimo závorku.

Ze vzorce
$$(a-b+c-d)m=am-bm+cm-dm$$
soudíme, že
$$am-bm+cm-dm=(a-b+c-d)m=m(a-b+c-d).$$

Výkon v tomto vzorci obsažený nazýváme *vytčením* nebo *vynětím společného činitele.*

Výkonu toho užiti lze, když několik členů má společného činitele. V závorce vyskytne se po vytčení mnohočlen, který násoben jsa vytčeným činitelem dá výraz, z něhož onen činitel vyňat byl.

Z mnohočlenu $am-bm+cm-dm$ mohlo býti vyňato i $-m$, poněvadž jej lze psáti ve tvaru $(-a)(-m)+b(-m)-c(-m)+d(-m)$. Z tohoto tvaru následuje, že
$$am-bm+cm-dm=(-m)(-a+b-c+d).$$

Vytčení znaménka — před závorku (§ 13., 5) lze pojímati jakožto vytčení společného činitele — 1.

Na př. $a - b + c - d = -a(-1) + b(-1) - c(-1) + d(-1)$,

tudíž $a - b + c - d = (-1)(-a + b - c + d)$ čili

$$a - b + c - d = -(-a + b - c + d).$$

Podstatu „vytčení společného činitele“ poznáme blíže při dělení (§ 25., 5.).

§ 21. O členech stejnojmenných a různojmenných. O upravení mnohočlenů. O výhodách při násobení některých mnohočlenů. Důležité příklady.

1) Dle definice mnohočlenu v § 13. jest míti každý součin za jednočlen, buďtež jeho činitelé jednočlenní nebo mnohočlenní.

Na př. výrazy ab, abc, $a(b - c)$, $(a - b)(c - d)$ jsou dle tvaru svého jednočleny.

Vynásobíme-li ve výraze 3. a 4., obdržíme ve 3. příkladě za výsledek dvojčlen a ve 4. čtyřčlen.

Výrazy jednočlenné, které se od sebe liší jen znaménkem nebo součinitelem, jsou *stejnojmenné*, kdežto výrazy, které se liší jinými prvky, nazýváme *nestejnojmenné* čili *různojmenné*.

Na př. ab, $3ab$, $-7ab$ jsou výrazy stejnojmenné,

ab, $5ac$, $-5bc$, de a t. d. jsou výrazy nestejnojmenné.

2) Stejnojmenné členy mnohočlenu lze vždy *sloučiti*.

Na př. $2a + 5a$ po sloučení dá $7a$,

$$-3ab + 5ab = 2ab,$$

$$8x^2 - 7x^2 + 15x^2 = 16x^2,$$

$$-5(a - b)c + 7(a - b)c = 2(a - b)c,$$

$$xy - 2xz + 8xy + 3xz - 10xy = xz - xy.$$

Slučování lze pojati, jako by bylo složeno ze dvou výkonů: *a*) z vytčení společného činitele, *b*) z algebraického sčítání číselných součinitelů, které se po vytčení octnou v závorce. Na př.:

$$2a + 5a = (2 + 5)a = 7a,$$

$$8x^2 - 7x^2 + 15x^2 = (8 - 7 + 15)x^2 = 16x^2 \text{ a t. d.}$$

Vyskytují-li se po ukončení nějakého výkonu početního, na př. násobení, ve výsledku členy stejnojmenné, *sloučíme* je.

Na př.

1) $(2x - 5y)(x - y) + (6x - 7y)(x - 2y) + (2x - 6y)(2x - y) = 2x^2 - 5xy - 2xy + 5y^2 + 6x^2 - 7xy - 12xy + 14y^2 + 4x^2 - 12xy - 2xy + 6y^2 = 12x^2 - 40xy + 25y^2$.

2) $(x - y)a + (y - z)a - (x - z)a = ax - ay + ay - az - ax + az = 0$.

Mnohdy píšeme členy stejnojmenné, které se objeví jakožto částečné součiny při násobení dvou mnohočlenů, pod sebe, abychom si jich slučování usnadnili. Na př.:

$$
\begin{array}{l}
(6a + 3b - 8c - d)(2a - 5b + 4c) = \\
12a^2 + 6ab - 8ac - 2ad \\
\quad - 30ab \qquad\qquad - 15b^2 + 40bc + 5bd \\
\qquad + 24ac \qquad\qquad + 12bc \qquad - 32c^2 - 4cd \\
\hline
12a^2 - 24ab + 16ac - 2ad - 15b^2 + 52bc + 5bd - 32c^2 - 4cd.
\end{array}
$$

3) Důležité jsou mnohočleny, v jichžto členech vyskytují se mocniny téhož základu, na př. $2x^5 + 3x^3 - 2x + 6x^2 - x^4$.

Takové mnohočleny upravujeme buď *vzestupně* nebo *sestupně* dle mocnin onoho společného základu.

Mnohočlen za příklad uvedený *sestupně* jsa spořádán, nabývá tvaru

$$2x^5 - x^4 + 3x^3 + 6x^2 - 2x,$$

kdežto $-2x + 6x^2 + 3x^3 - x^4 + 2x^5$ jest týž mnohočlen upravený *vzestupně*. Ve mnohočlenech tohoto druhu může přicházeti i člen, ve kterém mocniny o základu x není, jako na př. ve mnohočlenech $ax^3 + bx^2 + cx + d$, $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, $1 - 2z + 3z^2 - 4z^3$ a t. d.

Podle největšího mocnitele společného základu rozeznáváme mnohočleny pro onen základ *stupně 1.*, *stupně 2.*, ... všeobecně *stupně* n^{ho}.

4) Jsou-li ve členech mnohočlenu mocniny dvou nebo několika různých základů, upravujeme jej *sestupně* nebo *vzestupně* dle mocnin *jednoho základu*, píšíce při tom činitele každého členu v abecedním pořádku. Na př. mnohočlen $-3x^2y + 3xy^2 + x^3 - y^3$ nabývá po upravení tvaru buď $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ nebo $-y^3 + 3xy^2 - 3x^2y + x^3$.

K těmto mnohočlenům náležejí tak zvané mnohočleny *stejnoměrné* (homogenní).

Stejnoměrným mnohočlenem pro určitá čísla, na př. x, y..., jmenujeme mnohočlen, jehož každý člen složen jest ze stejného počtu činitelů x a y... Dle počtu těchto činitelů rozeznáváme stejnoměrné mnohočleny stupně 1., stupně 2., ... všeobecně stupně n^{ho}.

Na př. $2x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 5xy^3 + 10y^4$ jest stejnoměrný mnohočlen stupně 4. pro x a y.

Jaký mnohočlen obdržíme, násobíce dva stejnoměrné mnohočleny stupně r a s pro x a y?

5) Mnohočleny, ve kterých nejeví se známky ve 3) a 4) vytčené, uspořádáme tak, jak jsou uspořádána slova ve slovníku.

Na př. mnohočlen $ac - 3bd - 2ab + 8a^2$ upraven byv, nabývá tvaru

$$8a^2 - 2ab + ac - 3bd.$$

6) Dokažte věty:

a) Násobíce součet dvou čísel jich rozdílem, obdržíme rozdíl čtverců těchto čísel,

t. j. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

b) *Dvojmoc dvojčlenu rovna jest součtu dvojmocí obou členů, zvětšenému o dvojnásobný součin těchto členů,*

$$\text{t. j. } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

při čemž a a b jsou libovolná čísla algebraická.

O dělení.

§ 22. Výměry.

1) *Děliti číslo* **a** *číslem* **b** *znamená vyhledati číslo* **c** *tak, aby součin čísel* **b** *a* **c** *roven byl* **a**.

Číslo a jmenuje se *dělenec* (dividend), číslo b *dělitel* (divisor) a číslo c *podíl* (quotient).

Výkon početní, kterým z dělence a dělitele nabýváme podílu, nazývá se *dělení*.

Znaménko dělení jest :, které klademe mezi dělence a dělitele, nebo vodorovná čárka, nad níž dělence a pod níž dělitele píšeme.

Rovnicí $a : b = c$ (1)

jest vyznačeno, že číslo a děleno jsouc číslem b dá podíl c.

2) $a : b$ značí, že děliti jest číslo a číslem b,

$(a : b)$ značí podíl těchto dvou čísel.

3) Abychom vyznačili, že podíl $(a : b)$ děliti jest číslem c, píšeme

$$(a : b) : c.$$

Co značí dle toho $\{[(a : b) : c] : d\}$?

§ 23. Výsledky.

1) *Úkolem dělení jest ze součinu a jednoho jeho činitele vyhledati činitele druhého.*

Je-li známým činitelem *násobitel*, nazýváme dělení *rozdělováním*, poněvadž známe v tomto případě *součet stejných sčítanců* (součin) jakož i *jich počet* (násobitele) a hledáme *jednoho sčítance*, t. j. určitou část čili díl onoho součtu. Z té příčiny čteme i $a : b \ldots$ *a* děleno na b, t. j. na b dílů.

Podíl $(a : b)$ udává tu $b^{tý}$ díl a jednotek.

Je-li známým činitelem násobenec, nazýváme dělení *měřením*, poněvadž známe v tomto případě *součet stejných sčítanců* (součin) jakož i velikost *jednoho* (tudíž každého) *z nich* a hledáme *jich počet*, t. j. kolikrát tohoto sčítance vzíti jest, aby povstal daný součin, čili kolikrát jest v součinu obsažen.

2) Z definice dělení (1) vychází na jevo, že

$$b \,.\, c = a, \qquad (2)$$

t. j. že *součin dělitele a podílu roven jest dělenci.*

Vyměníme-li v rovnici (2) činitele b s činitelem c, obdržíme rovnici

$$cb = a,$$

s kterouž jest rovnice $a : c = b$ (3)

v téže souvislosti, jako rovnice 1. s 2.

V rovnici 3. obsažena jest věta:

Dělenec dělen jsa podílem dá dělitele.

3) Vložíme-li z 1. rovnice do 2. za c výraz $(a : b)$, obdržíme

$$(a : b)\, b = a \qquad (4)$$

a vložíme-li ze 2. rovnice do 1. a 3. součin bc za a, nabudeme rovnic

$$(bc) : b = c \qquad (5)$$

$$(bc) : c = b. \qquad (5')$$

Z těchto rovnic vyplývá:

Násobíme-li / Dělíme-li *libovolné číslo nějakým číslem a* *dělíme-li / násobíme-li* *obdržený tím součin / podíl* *týmž číslem, obdržíme za výsledek číslo původní* čili:

Výkony násobení a dělení provedené týmž číslem se na vzájem ruší.

Z té příčiny jmenujeme násobení a dělení *výkony na vzájem protivnými.*

4) Z rovnic 5. a 5'. jde také věta:

Součin dělen jsa součinem několika svých činitelů, dá za podíl součin ostatních svých činitelů,

t. j. na př. $abcd : ac = bd$, neboť

$abcd$ lze psáti $(ac)\,(bd)$ a tudíž jest dle rovnice 5.

$(ac)\,(bd) : (ac) = bd.$

5) *Podíl mocnin stejného základu rovná se mocnině téhož základu, jejíhož mocnitele obdržíme, jestliže od mocnitele dělence odečteme mocnitele dělitele.*

Na př. $a^3 : a^2 = a$, $a^6 : a^2 = a^4$ atd. všeobecně $a^r : a^s = a^{r-s}$ pro $r > s$.

Podmínka. $r > s$.

Tvrzení. $a^r : a^s = a^{r-s}$.

Důkaz. Poněvadž $a^r = \underbrace{a \,.\, a \,.\, .\, .\, a}_{r\text{krát}}$,

$$a^s = \underbrace{a \,.\, a \,.\, .\, .\, a}_{s\text{krát}},$$

jest $a^r : a^s = \underbrace{(a \,.\, a \,.\, .\, .\, a)}_{r\text{krát}} : \underbrace{(a \,.\, a \,.\, .\, .\, a)}_{s\text{krát}}$.

Dle výsl. 4. jest $\underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,.\, .\, .\, a}_{r\text{krát}} : \underbrace{a \,.\, a \,.\, .\, .\, a}_{s\text{krát}} = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,.\, .\, .\, a}_{(r-s)\text{krát}}$,

t. j. $a^r : a^s = a^{r-s}$, jak jsme tvrdili.

6) *Podíl algebraických čísel souhlasných jest kladný, podíl čísel protivných jest záporný.*

Tvrzení.

a) $(+a) : (+b) = +(a : b)$,

b) $(-a) : (-b) = +(a : b)$,

c) $(+a):(-b)=-(a:b)$,
d) $(-a):(+b)=-(a:b)$.

Důkaz. Ve všech případech vyhověno jest definici dělení, že totiž součin podílu a dělitele roven jest dělenci, neboť

a) $+(a:b)(+b)=+(a:b)\,b=+a$,
b) $+(a:b)(-b)=-(a:b)\,b=-a$,
c) $-(a:b)(-b)=+(a:b)\,b=+a$,
d) $-(a:b)(+b)=-(a:b)\,b=-a$.

Z toho jest zřejmo, že při dělení čísel algebraických *nejprv ustanoviti jest znaménko a po té děliti absolutní hodnoty dělence a dělitele.* Absolutní hodnota podílu závisí jen na absolutních hodnotách dělence a dělitele.

7) Z věty 6. vyplývá:

Změníme-li jen znaménko dělence nebo jen znaménko dělitele v protivné, přejde tím i znaménko podílu v protivné.

Změníme-li současně znaménka dělence i dělitele ve znaménka protivná, nezmění se znaménko podílu.

8) $\frac{a}{1}=a$, neboť $1\,.\,a=a$.

9) $\frac{a}{a}=1$, „ $a\,.\,1=a$.

10) $\frac{0}{a}=0$, „ $a\,.\,0=0$.

11) $\frac{0}{0}$ nemá určité hodnoty, poněvadž 0 násobena jsouc každým číslem dá za součin 0.

O významu $\frac{a}{0}$ promluvíme později.

12) *Podíl se nemění, násobíme-li dělence i dělitele týmž číslem.*

Tvrzení. $a:b=(am):(bm)$.

Důkaz. Budiž $a:b=c$,
tudíž $a=b\,.\,c$.

Násobíme-li obě strany této rovnice m, obdržíme

$$am=(bm)\,c$$

a poněvadž $(bm)\,.\,c:(bm)=c$,
jest i $(am):(bm)=c$, tudíž i $a:b=(am):(bm)$.

Z rovnice $(am):(bm)=a:b$ soudíme, že *společný činitel dělence a dělitele může býti vynechán, aniž se podíl změní.*

Vynechávajíce tohoto společného činitele, dělíme jím dělence i dělitele. Tento výkon jmenujeme *krácením* dělence a dělitele.

13) Na základě věty 12. lze *uvésti podíly, které mají nestejné dělitele na podíly o stejných dělitelích.*

Abychom na př. podíly $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$ uvedli na stejného dělitele, násobme dělence i dělitele prvního podílu číslem d a dělence i dělitele druhého podílu číslem b.

Tím nabudeme podílů $\frac{ad}{bd}$ a $\frac{bc}{bd}$, které mají stejné dělitele.

14) *Dělením dvou rovnic povstane zase rovnice,*

t. j., je-li
$$a = \alpha,$$
$$b = \beta,$$
$$\text{jest} \quad \frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta},$$

neboť rovné za rovné lze položiti, tudíž může býti položeno α za a a β za b.

§ 24. Rozšíření řady číselné o čísla lomená.

1) Jsou-li dělenec a dělitel čísly z řady číselné

$$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

může býti podíl c číslem této řady jen tenkráte, lze-li dělence odvoditi z dělitele násobením nějakým číslem oné řady, t. j. je-li dělenec *násobkem* dělitele. V tomto případě pravíme, že jest dělenec dělitelem *dělitelný*. Není-li dělenec násobkem dělitele, není podíl c číslem řady

$$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots$$

Tak na př. číslo 15 nepovstane násobením čísla 4 nějakým číslem vytčené řady a proto podíl (15 : 4) není číslem oné řady. V takových případech lze vždy udati, mezi kterými čísly řady číselné podíl jest obsažen, na př.

podíl (15 : 4) obsažen jest mezi čísly 3 a 4,
(— 13 : 2) „ „ „ „ — 7 a — 6,
(— 7 : — 3) „ „ „ „ 2 a 3.

Aby bylo lze podíl i v těchto případech úplně vyjádřiti, *pokládáme jednotku, která jest základem čísel řady číselné, za dělitelnou bez mezí. Několikátý díl jednotky celé nazýváme jednotkou zlomkovitou.*

Jednotky zlomkovité jsou základem nových čísel, tak zvaných *čísel lomených* čili *zlomků. Zlomek jest číslo složené z jedné nebo několika určitých jednotek zlomkovitých.*

Jednotky zlomkovité jsou: *polovina, třetina, čtvrtina* atd.

Poněvadž $b$tý díl z a jednotek označili jsme $(a : b)$ nebo $\frac{a}{b}$, jest důsledno označiti polovinu jakožto druhý díl jednotky (1 : 2) čili $\frac{1}{2}$,

třetinu „ třetí „ „ (1 : 3) „ $\frac{1}{3}$,
⋮
$b$tinu „ $b$tý „ „ $(1 : b)$ „ $\frac{1}{b}$.

Definice výrazu $\frac{1}{b}$ jest dle svrchu vytčeného obsažena v rovnici

$$\underbrace{\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\ldots}_{b\text{kráte}}=1, \text{ čili } \frac{1}{b}.b=1.$$

Jest patrno, že a $b$tých dílů jedné jednotky rovno jest $b$tému dílu a jednotek, t. j.

$$\underbrace{\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\ldots}_{a\text{kráte}}=\frac{a}{b}$$

čili $\frac{1}{b}.a=\frac{a}{b}$, z čehož vychází na jevo, že zlomek udávající a jednotek zlomkovitých $\frac{1}{b}$ označiti lze tak jako podíl $\frac{a}{b}$.

Poněvadž $\frac{a}{b}$ značí $b^{tý}$ díl a jednotek, jest

$$\underbrace{\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}\ldots}_{b\text{kráte}}=a,$$

čili $\frac{a}{b}.b=a.$

2) Mezi každá dvě čísla řady

$$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\ldots.$$

lze vložiti zlomky, jimž slouží za základ určitá jednotka zlomkovitá, na př. jednotka $\frac{1}{b}$.

Tím nabudeme z řady

$$-1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2\ldots.$$

$$-\frac{b}{b}\ldots, -\frac{2}{b}, -\frac{1}{b}, 0, \frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \frac{3}{b}\ldots\frac{b-1}{b}, \frac{b}{b}, \frac{b+1}{b}, \frac{b+2}{b}\ldots, \frac{2b}{b}\ldots.$$

Řadu číselnou, v níž se vyskytují i zlomky, jmenujeme řadou *číselnou rozšířenou.*

Na rozdíl od zlomků jmenujeme čísla řady

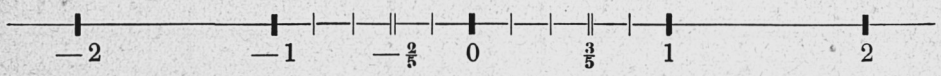
$$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\ldots$$

čísly celými.

Podíl $\frac{a}{b}$ nabývá rozšířením řady číselné o zlomek významu širšího, než byl v definici dělení vytčen. Značíť $\frac{a}{b}$ *číslo z rozšířené řady číselné, které násobeno jsouc číslem b dá a.* (Viz poslední rovnici v odst. 1.)

3) Každé číslo rozšířené řady číselné lze znázorniti na ose čísel. Na př. zlomek $\frac{3}{5}$ znázorníme bodem, který má od bodu 0 vzdálenosť rovnou 3 pětinám jednotky délkové, vzaté za základ znázornění čísel celých.

Obr. 3.



Zlomek $\frac{a}{b}$ jest znázorněn bodem, který má od bodu 0 vzdálenosť rovnou a $b^{tým}$ dílům jednotky délkové.

Znázorníme-li tímto způsobem všecky zlomky, jimž slouží za základ určitá jednotka $\frac{1}{b}$, obdržíme na ose číselné řadu bodů stejně od sebe vzdálených. Body tyto jsou sobě při určité jednotce délkové tím bližší, čím jest číslo b větší.

4) Rozšířivše řadu číselnou o zlomky, můžeme podíl každých dvou čísel úplně vyjádřiti.

Na př. podíl $(15 : 4)$ roven jest 15 čtvrtinám, čili 3 celým jednotkám a 3 čtvrtinám; podíl $3 : 7$ roven jest třem sedminám,

„ $-5 : 7$ „ „ — pěti „

„ $13 : -5$ „ „ — třinácti pětinám a t. d.

5) Výrazy zlomků prosté jmenujeme *celistvými*, kdežto výrazy, v nichž zlomky se vyskytují jsou zlomkovité čili *lomené*.

Na př. $5x^2 + 3x - 6$, $a + b - c$ jsou celistvé a $\frac{4x^2 - 5x + 6}{x^3 - x^2 + 1}$,

$\frac{3}{4}a + \frac{5}{6}b - c$ lomené výrazy algebraické.

§. 25. Sčítání a odčítání podílů. Dělení mnohočlenu jednočlenem.

1) *Součet / Rozdíl dvou podílů (zlomků) o stejných dělitelích roven jest podílu téhož dělitele, jehož dělencem jest součet / rozdíl dělenců daných podílů.*

Tvrzení. $\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}$.

Důkaz. $\frac{a}{m} = a$ $m^{tých}$ dílů jednotky,

$\frac{b}{m} = b$ $m^{tých}$ dílů jednotky,

$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = (a \pm b)$ $m^{tých}$ dílů jednotky, čili

$$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m},$$ což mělo býti dokázáno.

Podobně jest $$-\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = -\left(\frac{a}{m} - \frac{b}{m}\right) = -\frac{a-b}{m} = \frac{b-a}{m},$$ (§ 23., 7)

$$-\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = -\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m}\right) = -\frac{a+b}{m}.$$

Všeobecněji jest

$$\pm\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} \pm \frac{c}{m} \pm \frac{d}{m} = \frac{\pm a \pm b \pm c \pm d}{m}.$$

2) *Mnohočlen dělíme jednočlenem, dělíme-li tímto jednočlenem každý člen mnohočlenu a sečteme-li obdržené tím podíly částečné.*

Tvrzení. $$(\pm a \pm b \pm c \pm d) : m = \frac{\pm a}{m} + \frac{\pm b}{m} + \frac{\pm c}{m} + \frac{\pm d}{m}.$$

Důkaz. Bylo dokázáno, že

$$\pm\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} \pm \frac{c}{m} \pm \frac{d}{m} = \frac{\pm a \pm b \pm c \pm d}{m},$$ tudíž i

$$\frac{\pm a \pm b \pm c \pm d}{m} = \pm\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} \pm \frac{c}{m} \pm \frac{d}{m},$$ čili

$$\frac{\pm a \pm b \pm c \pm d}{m} = \frac{\pm a}{m} + \frac{\pm b}{m} + \frac{\pm c}{m} + \frac{\pm d}{m}.$$ (§ 23., 6.)

Jest důležito poznamenati, *že věty* 1. *a* 2. *platí i pro záporné dělitele.*

Tvrzení. $$\frac{a}{-m} \pm \frac{b}{-m} = \frac{a \pm b}{-m}.$$

Důkaz.

$$\frac{a}{-m} = -\frac{a}{m},$$

$$\frac{b}{-m} = -\frac{b}{m},$$

tudíž $$\frac{a}{-m} \pm \frac{b}{-m} = -\frac{a}{m} \mp \frac{b}{m} = \frac{-a \mp b}{m}.$$

Změníme-li znaménka v dělenci i v děliteli ve protivná, obdržíme

$$\frac{-a \mp b}{m} = \frac{a \pm b}{-m},$$

tudíž $$\frac{a}{-m} \pm \frac{a}{-m} = \frac{a \pm b}{-m},$$ jak bylo tvrzeno.

Tím jest i $$\frac{a \pm b}{-m} = \frac{a}{-m} \pm \frac{b}{-m}.$$

Že a a b mohou býti čísla kladná nebo záporná, netřeba zvláště vytýkati.

3) Na základě věty této lze doplniti to, co v § 24. bylo řečeno o úplném vyjadřování podílů, *když dělenec dělitelem není dělitelen.*

Není-li dělenec **a** *násobkem dělitele* **b**, *lze vždy položiti* $a = b \cdot p + z$, kdež a, b, p a z jsou čísla celá a $z < b$.

Z toho následuje, že

$a : b = (bp + z) : b$, avšak dle věty předcházející jest

$(bp + z) : b = \frac{bp}{b} + \frac{z}{b}$, čili $a : b = p + \frac{z}{b}$.

Podíl skládá se tudíž v takovém případě *ze dvou částí, z čísla celého* a *ze zlomku* $\frac{z}{b}$.

Číslo z jmenujeme *zbytkem* při dělení $a : b$.

Často mluvíváme při dělení i o *zbytcích negativních*. Tak na př.

$15 : 8$ lze psáti $(16 - 1) : 8 = \frac{16}{8} - \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8} = 2 + \frac{-1}{8}$,

kdež -1 jest zbytkem negativným.

Tak jest tomu i ve případě všeobecném, neboť přičteme-li a odečteme-b na pravé straně rovnice

$$a = bp + z,$$

obdržíme $a = bp + b + z - b$

čili $a = b(p + 1) + (z - b)$,

tudíž $(a : b) = p + 1 + \frac{z - b}{b}$,

z čehož jest patrno, že za zbytek při dělení $a : b$ lze pokládati i $z - b$. Avšak poněvadž jest $z < b$, jest tento zbytek *záporný*.

Nejmenším zbytkem při dělení jmenujeme ten, jehož absolutní hodnota jest nejmenší.

Na př. při dělení $17 : 4$ jest nejmenším zbytkem 1,

při „ $13 : 8$ „ „ „ -3.

O absolutní hodnotě nejmenšího zbytku lze tvrditi, že jest vždy menší než polovina absolutní hodnoty dělitele, nebo že jest této polovině rovna.

Neboť je-li kladný zbytek $z \geqq \frac{b}{2}$, jest absolutní hodnota zbytku záporného $(z - b) \leqq \frac{b}{2}$.

4) *Dělení není výkonem záměnným*, neboť $\frac{a}{b}$ není všeobecně rovno $\frac{b}{a}$, na př. $\frac{4}{7}$ nejsou rovny $\frac{7}{4}$ atd.

5) Nyní poznáme, v čem záleží podstata *vytčení společného činitele z několika členů*. (§ 20.)

Chceme-li na př. ze mnohočlenu $\pm ma \pm mb \pm mc$, jehož členy mají společného činitele m, vytknouti tohoto činitele, pokládáme mnohočlen

$ma \pm mb \pm mc$ za součin, jehož jedním činitelem jest m a jehož druhého činitele hledáme. Dle § 23, 1. vyhledáme tohoto činitele dělíce součin daným činitelem.

T. j. $\pm ma \pm mb \pm mc = m \dfrac{\pm ma \pm mb \pm mc}{m}$

čili $\pm ma \pm mb \pm mc = m(\pm a \pm b \pm c)$.

Podobně jest

$$\pm ma \pm mb \pm mc = (-m) \frac{\pm ma \pm mb \pm mc}{-m} = -m(\mp a \mp b \mp c).$$

§ 26. Dělení součinů a podílů. Násobení podílem.

1) *Součin dělíme libovolným číslem celým, dělíme-li jím jednoho jeho činitele.*

Tvrzení. $(ab) : c = (a : c)b = (b : c)a$.

Důkaz. $(ab) = \underbrace{(a + a + a + \ldots)}_{b\text{kráte}}$

$(ab) : c = \underbrace{(a + a + a + \ldots)}_{b\text{kráte}} : c$ a tudíž dle § 25.

$(ab) : c = \underbrace{(a : c) + (a : c) + (a : c) \ldots}_{b\text{kráte}}$ čili

$(ab) : c = (a : c)b$.

Poněvadž $ab = ba$, jest i

$(ab) : c = (ba) : c = (b : c)a$.

Všeobecněji jest

$$(abc) : d = (a : d)bc = (b : d)ac = (c : d)ab.$$

Z poučky této vyplývá, že *není potřebí uzavírati součin v závorku, aby bylo vyznačeno, že má býti nějakým číslem dělen.*

Čteme-li rovnici $(ab) : c = (b : c)a$ od pravé strany k levé, poznáváme větu:

2) *Podíl násobíme libovolným číslem celým, násobíme-li jím jeho dělence.*

Jest tedy $(b : c)a = ba : c$.

Jest-li číslo c násobkem čísla a, lze dělence i dělitele podílu $ba : c$ děliti a (§ 23., 12.), čímž obdržíme $ba : c = b : (c : a)$, tudíž $(b : c)a = b : (c : a)$. V tomto vzorci obsaženo jest pro ten případ, že c dělitelno jest a, jiné pravidlo pro násobení podílu číslem celým.

3) *Podíl dělíme libovolným číslem celým, násobíme-li jím jeho dělitele.*

Tvrzení. $(a : b) : c = a : bc$.

Důkaz. $(a : b) : c = \dfrac{[(a : b) : c]\, bc}{bc} = \dfrac{\{[(a : b) : c]\, c\}\, b}{bc} = \dfrac{(a : b)\, b}{bc} = \dfrac{a}{bc}$,

což mělo býti dokázáno,

Jest-li dělenec a násobkem čísla c, lze dělence i dělitele podílu $\frac{a}{bc}$ děliti c (§ 23., 12), čímž obdržíme $\frac{a}{bc} = \frac{a:c}{b}$, tudíž jest $(a:b):c = \frac{a:c}{b}$, ve kterémž vzorci obsaženo jest jiné pravidlo pro dělení podílu číslem pro ten případ, že jest dělenec tím číslem dělitelný.

Všeobecněji jest

$$[(a:b):c]:d = a:bcd.$$

4) Píšeme-li rovnici $(a:b):c = a:bc$ ve tvaru $a:bc = (a:b):c$, poznáváme větu:

Libovolné číslo celé dělíme součinem, dělíme-li je po sobě každým jeho činitelem.

5) *Libovolné číslo celé násobíme podílem, který jest roven číslu celistvému, násobíme-li je dělencem a dělíme-li nabytý tím součin dělitelem.*

Podmínka. $b:c =$ číslu celému.

Tvrzení. $a(b:c) = ab:c$.

Důkaz. Poněvadž podíl $(b:c)$ jest číslem celým, smíme činitele součinu $a(b:c)$ spolu vyměniti (§ 16., 8.). Tím nabudeme $(b:c)a$, což jest dle věty 2. tohoto § rovno $ab:c$. Jesti tedy i $a(b:c) = ab:c$.

Co znamená násobiti podílem lomeným čili zlomkem, bude až při zlomcích objasněno.

6) *Libovolné číslo celé dělíme podílem, který jest roven číslu celému, dělíme-li je jeho dělencem a násobíme-li obdržený tím podíl dělitelem.*

Podmínka. $(b:c) =$ číslu celému.

Tvrzení. $a:(b:c) = (a:b)c = ac:b$.

Důkaz. Je-li $b:c$ číslem celým, můžeme dle § 23., 12. násobiti dělence i dělitele podílu $a:(b:c)$ týmž číslem, na př. c. Tím obdržíme

$$a:(b:c) = ac:[(b:c)c] \text{ čili } a:(b:c) = ac:b = (a:b)c,$$

což mělo býti dokázáno.

§ 27. Dělení mnohočlenu mnohočlenem.

1) Mnohočleny, v jichž členech vyskytují se mocniny téhož základu, dělíme takto:

a) *Upravíme oba mnohočleny vzestupně nebo sestupně dle mocnin společného základu.*

b) *První člen dělence dělíme prvním členem dělitele. Obdrženým podílem částečným násobíme dělitele, a součin tím nabytý odečteme od dělence. Se zbytkem, který tím povstane, jakož i s každým zbytkem následujícím naložíme týmž způsobem, jako jsme učinili s dělencem a pokračujeme v tom tak dlouho, až neobdržíme žádného zbytku, nebo až zbytek bude stupně nižšího než dělitel.*

c) *Podíl úplný rovná se součtu podílů částečných, zvětšených o poslední zbytek dělený dělitelem.*

Důkaz. Označme mnohočlen, který jest v dělenci, A, a mnohočlen v děliteli B.

Dělíme-li první člen dělence A prvním členem dělitele B, obdržíme na př. podíl p_1 a zbytek A_1,
zbytku A_1 „ „ „ B, „ „ „ p_2 „ A_2,
„ A_2 „ „ „ B, „ „ „ p_3 „ A_3,
⋮
„ A_{n-1} „ „ „ B, „ „ „ p_n „ A_n.

Zbytek A_n budiž zbytkem posledním.

Dle § 25., 3. platí rovnice

$$\frac{A}{B} = p_1 + \frac{A_1}{B},$$
$$\frac{A_1}{B} = p_2 + \frac{A_2}{B},$$
$$\frac{A_2}{B} = p_3 + \frac{A_3}{B},$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{A_{n-1}}{B} = p_n + \frac{A_n}{B}.$$

Sečtením těchto rovnic povstane $\frac{A}{B} + \frac{A_1}{B} \ldots \frac{A_{n-1}}{B} = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots$

$+ p_n + \frac{A_1}{B} + \frac{A_2}{B} + \frac{A_3}{B} + \ldots \frac{A_{n-1}}{B} + \frac{A_n}{B}$.

Odečteme-li od obou stran této rovnice součet $\frac{A_1}{B} + \frac{A_2}{B} + \ldots \frac{A_{n-1}}{B}$,

obdržíme $\frac{A}{B} = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n + \frac{A_n}{B}$, což mělo býti dokázáno.

Je-li $A_n = 0$, jest mnohočlen A *dělitelen* mnohočlenem B a

$$\frac{A}{B} = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n.$$

Na př.

$$\overbrace{(6 + 17x - 3x^2 - 20x^3)}^{A} : \overbrace{(3 + 4x)}^{B} = \overset{p_1}{2} + \overset{p_2}{3x} - \overset{p_3}{5x^2}.$$

$$\begin{array}{rl} & 6 + 8x \\ & - \quad - \\ \hline A_1 = \ldots : & 9x - 3x^2 - 20x^3 \\ & 9x + 12x^2 \\ & - \quad - \\ \hline A_2 = \ldots . & -15x^2 - 20x^3 \\ & -15x^2 - 20x^3 \\ & + \quad + \\ \hline A_3 = \ldots . & 0 \end{array}$$

Ve zbytcích A_1, A_2... vypisujeme obyčejně jen tolik členů, kolik jest jich k následujícímu dělení potřebí. Na př.

$$(a^3 - 5a^2b - 2ab^2 + 24b^3) : (a - 2b) = a^2 - 3ab - 8b^2 + \frac{8b^3}{a - 2b}.$$

$$\begin{array}{r|l}
a^3 - 2a^2b & \\
\hline
- 3a^2b - 2ab^2 \ldots\ldots & \\
- 3a^2b + 6ab^2 & \\
\hline
- 8ab^2 + 24b^3 & \\
- 8ab^2 + 16b^3 & \\
\hline
8b^3 &
\end{array}$$

2) Dokažte věty: a) *Rozdíl dvojmocí dělen jsa* $\begin{matrix}\text{součtem}\\ \text{rozdílem}\end{matrix}$ *jich mocněnců dá za podíl* $\begin{matrix}\text{rozdíl}\\ \text{součet}\end{matrix}$ *mocněnců, t. j.*

$$(x^2 - y^2) : (x \pm y) = x \mp y.$$

b) *Rozdíl mocnin se sudými stejnými mocniteli jest dělitelen součtem i rozdílem mocněnců*, a sice jest na př.

$$(x^4 - y^4) : (x \pm y) = x^3 \mp x^2y + xy^2 \mp y^3,$$

kdež vzíti jest na obou stranách současně buď znaménka horní nebo dolní.

c) $\begin{matrix}\text{Součet}\\ \text{Rozdíl}\end{matrix}$ *mocnin s lichými stejnými mocniteli jest dělitelen* $\begin{matrix}\text{součtem,}\\ \text{rozdílem,}\end{matrix}$ *ale není dělitelen* $\begin{matrix}\text{rozdílem}\\ \text{součtem}\end{matrix}$ *mocněnců*, a sice jest na př.

$$(x^5 \pm y^5) : (x \pm y) = x^4 \mp x^3y + x^2y^2 \mp xy^3 + y^4.$$

d) *Součet mocnin se sudými stejnými mocniteli není dělitelen ani součtem ani rozdílem mocněnců.*

3) Dělení netřeba ukončiti u posledního zbytku, jak následuje z těchto příkladů, v nichž dělenec a dělitel uspořádány jsou vzestupně dle mocnin téhož základu:

a) $(1 + x + x^2) : (1 + x) = 1 + 2x + 3x^2 + 3x^3 + 3x^4 +$ atd.

$$\begin{array}{r|l}
1 - x & \\
\hline
2x + x^2 & \\
2x - 2x^2 & \\
\hline
3x^2 & \\
3x^2 - 3x^3 & \\
\hline
3x^3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
3x^3 & \\
3x^3 - 3x^4 & \\
\hline
3x^4 & \\
3x^4 - 3x^5 & \\
\hline
3x^5 &
\end{array}$$

Jak patrno, lze pokračovati v tomto dělení stále. Ustaneme-li u zbytku $3x^5$, jest úplný podíl:

$$1 + 2x + 3x^2 + 3x^3 + 3x^4 + \frac{3x^5}{1 - x}.$$

4) Nelze-li mnohočlenů v dělenci a v děliteli spořádati dle mocnin téhož základu, píšeme podíl ve tvaru zlomku.

Na př. $(a+b):(c-d)=\frac{a+b}{c-d}$.

Část druhá.

O soustavách číselných vůbec a o soustavě desítkové zvláště.

§ 28. Vysvětlení.

1) Poněvadž řada číselná jest nekonečná, nelze každé její číslo zvláštním jménem vyjádřiti a zvláštním znakem označiti. Již vyjádření všech čísel od 1 až k číslům poněkud větším bylo by tímto způsobem nesnadné.

Z té příčiny vyjadřujeme čísla větší na základě čísel menších. K tomu cíli myslíme si čísla zbudována určitým způsobem a dbáme tohoto způsobu při písemném i ústním jich vyjádření.

Souhrn čísel zbudovaných dle určitého zákona nazýváme *soustavou číselnou.*

Čísla tvoříme dle tohoto zákona:

Čítáme od 1 až k určitému číslu x, které pokládáme za novou jednotku — jednotku prvního řádu — pro tvoření čísel vyšších. Další čísla tvoříme z této jednotky dle vzorců $x+1$, $x+2\ldots$ atd., až dospějeme k číslu $x+x$ čili $2x$, z čehož dále povstávají čísla $2x+1$, $2x+2\ldots 3x$, $3x+1$, $3x+2\ldots 4x$ atd., až konečně nabudeme čísla xx čili x^2, jež pokládáme opětně za novou jednotku — jednotku řádu druhého — pro tvoření dalších čísel. Po této jednotce přijde na řadu jednotka řádu třetího, t. j. $x.x^2$ čili x^3 atd. Tak jako skládáme čísla, skládáme i jich jména.

Jest patrno,

a) že vystačíme, vyslovujíce čísla, se jmény čísel od 1 až do $x-1$ a se jmény jednotek různých řádů;

b) že k písemnému označení čísla dostačí x znaků.

Skládá-li se na př.

číslo z a_0 jednotek původních čili jednotek nullového řádu,

z a_1 „ prvního řádu,

z a_2 „ druhého „ ,

⋮

z a_n „ n^{ho} „ ,

při čemž a_0, a_1, $a_2,\ldots a_n$ jsou menší čísla x, lze je vyjádřiti mnohočlenem

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}\ldots a_2x^2 + a_1x + a_0. \qquad (1)$$

Číslo x jmenujeme *základem soustavy* a jeho mocnitele *udavatelem řádu jednotek.*

U všech národů kulturních užívá se čísla 10 jakožto základu soustavy. Soustavu, jejímž základem jest číslo 10, nazýváme *soustavou desítkovou.*

Ze vzorce 1. jest zřejmo, že každé číslo soustavy desítkové lze vyjádřiti vzorcem

$$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots a_2 10^2 + a_1 10 + a_0, \qquad (2)$$

kdež všeobecně a_k znamená některou z číslic 1, 2, ... 9.

Abychom označili číslo písemně, klademe číslice udávající počet jednotek jednotlivých řádů vedle sebe v takovém pořádku, že udavatelé jednotek od pravé ruky k levé od 0 počínajíce po jedné rostou. Místo jednotek, které v čísle nejsou a jsou nižší než nejvyšší jednotky čísla, označujeme nullou.

Číslo obsažené ve vzorci

$\dots a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ označujeme tudíž krátce $\dots a_3 a_2 a_1 a_0$

a číslo vyjádřené vzorcem

$\dots a_3 10^3 + a_1 10 + a_0$ vypisujeme ve tvaru $a_3 0 a_1 a_0$.

Z toho jde, že základem psaní čísel soustavy desítkové jsou ustanovení:

a) *Číslice na prvním místě od pravé ruky k levé stojící značí jednotky řádu nullového.*

b) *Ze dvou stejných číslic vedle sebe napsaných má ta, která v levo stojí, 10kráte větší hodnotu.*

Při každé číslici rozeznávati jest tudíž dvojí hodnotu: *hodnotu tvaru* čili *přirozenou* a *hodnotu místa* čili *řádovou.* Na př. v čísle 444 mají všecky číslice, z nichž jest složeno, stejnou hodnotu tvaru, ale nestejnou hodnotu místa.

2) Číslo $\dots a_5 10^5 + a_4 10^4 + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ lze psáti i ve tvarech

a) $\dots (a_5 10 + a_4) 10^3 + (a_3 10 + a_2) 10^2 + (a_1 10 + a_0)$,

b) $\dots (a_5 10^2 + a_4 10 + a_3) 10^3 + (a_2 10^2 + a_1 10 + a_0)$ atd.

Označíme-li dvojciferná čísla

$a_1 10 + a_0$, $a_3 10 + a_2$, $a_5 10 + a_4$ krátce A_0, A_1, A_2

a trojciferná čísla

$a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ a $a_5 10^2 + a_4 10 + a_3$ krátce B_0, B_1,

nabývá ono číslo tvaru

$\dots A_2 10^4 + A_1 10^2 + A_0$.

$\dots B_1 10^3 + B_0$, kdež patrn jest zákon, dle něhož další členy s vyššími mocninami čísla 10 postupují.

Na př. $8543219 = 8.10^6 + 54.10^4 + 32.10^2 + 19$ anebo

$8543219 = 8.10^6 + 443.10^3 + 219$.

Číslo jest tu vyjádřeno svými *dvojciferným*i nebo *trojciferným*i *třídami*, které se tvoří od pravé ruky k levé.

Označíme-li čísla vyskytující se v n ciferných třídách nějakého čísla C, jak po sobě následují od pravé strany k levé, A_0, A_1, A_2, ..., lze podle toho, co svrchu řečeno bylo, vyjádřiti číslo C mnohočlenem

$$C = \ldots A_3 10^{3n} + A_2 10^{2n} + A_1 10^n + A_0.$$

§ 29. Převod čísel z jedné soustavy na jinou.

1) *Budiž číslo* **A** *soustavy desítkové vyjádřeno v soustavě, jejímž základem jest číslo* **x**.

Z výkladu dříve podaného jest patrno, že jde o to, aby číslo A bylo vyjádřeno mnohočlenem tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

K tomu cíli dělme nejdříve číslo A číslem x, abychom poznali, kolik jednotek prvního řádu soustavy x číslo A obsahuje.

$$\text{Budiž } \frac{A}{x} = A_1 + \frac{a_0}{x}, \text{ tudíž } A = A_1 x + a_0, \qquad (1),$$

při čemž jest $a_0 < x$.

Je-li $A_1 < x$, jest předložená úloha již rozřešena, avšak je-li $A_1 > x$, naložme s číslem A_1 tak, jak jsme naložili s číslem A. Tím nabudeme rovnice $A_1 = A_2 x + a_1$, kdež jest $a_1 < x$.

Vložíme-li výraz pro A_1 do rovnice 1., obdržíme

$$A = (A_2 x + a_1) x + a_0$$

čili $$A = A_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Takto pokračujíce dospějeme při postupném dělení číslem x k podílu $A_n < x$, načež jest

$$A = A_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0,$$

čímž jest předložená úloha rozřešena.

Je-li na př. napsati číslo 3579 soustavy desítkové v soustavě sedmičkové, počítáme takto:

$$\begin{array}{rrl} 3579 : 7 = 511, & \text{(t. j.} & 3579 = 511 \cdot 7 + 2), \\ 2 & & a_0 \\ 511 : 7 = 73, & (\ \text{„} & 511 = 73 \cdot 7 + 0), \\ 0 & & a_1 \\ 73 : 7 = 10, & (\ \text{„} & 73 = 10 \cdot 7 + 3), \\ 3 & & a_2 \\ 10 : 7 = 1, & (\ \text{„} & 10 = 1 \cdot 7 + 3) \\ 3 & & A_4 \quad a_3 \end{array}$$

a jest tudíž

$$(3579)_X = 1.7^4 + 3.7^3 + 3.7^2 + 0.7 + 2 = (13302)_{VII}.$$

2) *Budiž číslo* **A** *soustavy, jejímž základem jest číslo* **x**, *vyjádřeno v soustavě desítkové.*

Vypočteme, kolik jednotek jednotlivých řádů soustavy desítkové číslo A obsahuje.

Výpočet provede se tu nejsnáze, převedeme-li postupně jednotlivé členy čísla A psaného ve tvaru $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ na čísla soustavy desítkové a sečteme-li tyto částečné výsledky.

Budiž na př. číslo 4321 soustavy *pětkové* převedeno na soustavu *desítkovou*.

Dle § 28. jest $(4321)_V = 4 . 5^3 + 3 . 5^2 + 2 . 5 + 1.$

Avšak $5^3 = (125)_X$, tudíž $4 . 5^3 = (500)_X$,

$5^2 = (25)_X$ „ $3 . 5^2 = (75)_X$.

K tomu přistoupí ještě $2 . 5 = (10)_X$

a $1 = (1)_X$,

z čehož následuje, že $4 . 5^3 + 3 . 5^2 + 2 . 5 + 1 = (586)_X$ čili

$(4321)_V = (586)_X$.

3) *Je-li převésti číslo* **A** *ze soustavy, jejímž základem jest číslo* **x**, *na soustavu, jejímž základem jest číslo* **y**, *převeďme nejprve číslo* **A** *ze soustavy* **x** *na soustavu desítkovou a z ní na soustavu* **y**.

Část třetí.

Dělitelnost čísel.

§ 30. Výměry.

1) Neobjeví-li se při dělení celého čísla a celým číslem b zbytek, čili jinými slovy rovná-li se zbytek 0, pravíme, že jest číslo a *dělitelno* číslem b.

Číslo b jmenujeme v tomto případě *dělitelem* nebo *měrou* čísla a. Je-li p podílem při tomto dělení,

t. j. je-li $a : b = p$,

jest $a = bp$,

ze kteréž příčiny nazýváme číslo a *násobkem* čísla b.

Abychom vyznačili, že číslo a jest dělitelno číslem b, píšeme

$$Z\left(\frac{a}{b}\right) = 0,$$

což čteme: *Zbytek čísla* **a** *dle čísla* **b** *roven jest* **0**.

2) Objeví-li se při dělení čísla a číslem b zbytek r, který jest od 0 rozdílný, pravíme, že číslo a číslem b *dělitelno není* a vyznačujeme to písemně rovnicí

$$Z\left(\frac{a}{b}\right) = r,$$

t. j. *zbytek čísla* **a** *dle čísla* **b** *roven jest* **r**.

Je-li p podílem při dělení $a : b$ v tomto posledním případě, jest

$$a = b . p + r.$$ (§ 28., 3)

Na př. $Z\left(\frac{17}{3}\right) = 2 \ldots . \; 17 = 3 . 5 + 2,$

nebo $Z\left(\frac{17}{3}\right) = -1 \ldots . \; 17 = 3 . 6 - 1.$

3) *Každé číslo jest dělitelno 1 a samým sebou.*

Číslo, které jiným číslem dělitelno není, než 1 a samo sebou, jmenujeme *prvočíslem* anebo *číslem kmenným*, kdežto číslo, které mimo jednotkou a samým sebou i jinými čísly jest dělitelno, nazýváme *číslem složeným.*

4) Jsou-li dvě nebo několik čísel týmž číslem od 1 různým dělitelna, nazýváme je *čísly soudělnými* a číslo, kterým jsou dělitelna, jest jich *společným dělitelem* čili jich *společnou měrou.* Nemají-li dvě nebo několik čísel kromě 1 žádného společného dělitele, nazýváme je *čísly nesoudělnými.*

§ 31. Výsledky.

1) *Každé číslo složené jest násobkem čísel od 1 rozdílných.*

2) *Každé číslo, které jest násobkem čísla jiného od jedné různého, jest číslo složené.*

3) Chceme-li nabyti prvočísel z řady čísel absolutních

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...,

vynechme po 2 každé číslo *druhé*,
„ 3 „ „ *třetí*,
„ 5 „ „ *páté*,
„ 7 „ „ *sedmé* a t. d. Zbývající čísla jsou vesměs prvočísla. Tento výkon nazývá se určení prvočísel *sítem Eratosthenovým.* *)

4) *Prvočísel jest nekonečně mnoho.*

Důkaz. Budiž číslo p prvočíslem. Ukážeme, že vždy jest ještě prvočíslo větší než p. K tomu cíli znásobme všecka prvočísla od 1 až do p a zvětšme tento součin o 1. Tím nabudeme čísla $P = 1 . 2 . 3 . 5 \ldots p + 1$. Toto číslo buď jest prvočíslem nebo prvočíslem není. Je-li prvočíslem, jest tvrzení naše dokázáno, poněvadž jest $P > p$. Není-li číslo P prvočíslem, musí býti nějakým prvočíslem dělitelno. Avšak dělíme-li číslo P kterýmkoli z prvočinitelů od 1 do p, obdržíme pokaždé 1 za zbytek, z čehož následuje, že číslo P musí býti v druhém případě dělitelno prvočinitelem větším než p. Z obou případů vychází na jevo, že lze vždy stanoviti prvočíslo větší než libovolné prvočíslo, t. j. prvočísel jest nekonečně mnoho.

5) *Jednotka jest společnou měrou všech čísel.*

§ 32. Rozklad čísel složených na prvočísla. Základní poučky o dělitelnosti.

1) *Každé číslo složené lze vyjádřiti součinem prvočísel.*

---

*) 275—195 př. Kr.

Důkaz. Je-li a číslem složeným, musí býti násobkem jiného čísla b,

t. j. $a = bp$. (§ 31., 1.)

U každého z čísel b a p mohou nastati dva případy: buď jest prvočíslem anebo jím není.

Jsou-li obě čísla b a p prvočísly, jest již tvrzení naše dokázáno, pakli jimi nejsou, lze je vyjádřiti součinem jiných čísel a tato čísla rozkládati v činitele dotud, dokud všichni činitelé nejsou prvočísly.

Činitele čísla, které jsou prvočísly, nazýváme jeho *prvočiniteli.* Výkon, kterým vyhledáváme prvočinitele čísla složeného, jmenujeme *rozkladem čísla složeného na prvočinitele*, čili *roznásobením onoho čísla.*

2) Je-li nám číslo složené rozložiti na prvočinitele, počínáme si takto: *Dané číslo dělíme prvočíslem, kterým jest dělitelno, obdržený tím podíl dělíme opět prvočíslem, kterým jest dělitelen, a tak pokračujeme stále, až dospějeme k podílu, který jest prvočíslem. Tento podíl a všecka dříve vytčená prvočísla jsou prvočiniteli daného čísla.*

Důkaz. Jmenujme dané číslo a, prvočísla, jimiž po sobě dělíme, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ a podíly při tom nabyté $p_1, p_2, \ldots p_n$.

Mezi těmito čísly platí rovnice

$$\begin{aligned} a &= \alpha_1 p_1, \\ p_1 &= \alpha_2 p_2, \\ p_2 &= \alpha_3 p_3, \\ &\vdots \\ p_{n-1} &= \alpha_n p_n. \end{aligned}$$

Znásobením těchto rovnic obdržíme

$$a p_1 p_2 p_3 \ldots p_{n-1} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n p_1 p_2 p_3 \ldots p_{n-1} p_n,$$

ze které rovnice vyplývá, dělíme-li obě její strany součinem $p_1 p_2 p_3 \ldots p_{n-1}$,

$$a = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n p_n,$$

čímž jest naše tvrzení dokázáno.

3) *Každé číslo jest dělitelno* a) *každým ze svých prvočinitelů a* b) *každým součinem vytvořeným z těchto prvočinitelů.*

Důkaz. Tvrzení jest patrno z toho, že dané číslo jest násobkem každého svého prvočinitele, jakož i každého součinu ze svých prvočinitelů.

4) *Číslem* **b**, *jehož každý prvočinitel není zároveň prvočinitelem čísla* **a**, *číslo* **a** *dělitelno není.*

Důkaz. Je-li v čísle b prvočinitel β, který se v čísle a nevyskytuje, nemůže býti číslo a dělitelno číslem b, neboť kdyby jím bylo dělitelno, bylo by jeho násobkem a tudíž i násobkem čísla β, což se však protiví podmínce, že β není prvočinitelem čísla a.

Z věty 3. a z věty 4. vychází na jevo:

5) *Čísla soudělná musí míti nejméně jednoho prvočinitele společného. Čísla nesoudělná nemají žádného společného prvočinitele.*

6) *Kterým číslem jest dělitelen jeden činitel součinu, tím jest dělitelen i celý součin.*

Neboť součin dělíme, dělíme-li jednoho jeho činitele. (§ 26., 1.)

7) *Je-li součin* **ab** *dělitelen číslem* **c** *a jsou-li* **a** *a* **c** *čísla nesoudělná, musí býti činitel* **b** *dělitelen číslem* **c**.

Důkaz. Je-li součin *ab* dělitelen číslem *c*, musí dle věty 3. a 4. každý prvočinitel čísla *c* býti obsažen v *ab*. Poněvadž však dle podmínky žádný z prvočinitelů čísla *c* není v čísle *a* (6), jsou všichni tito prvočinitelé obsaženi v čísle *b*, t. j. *b* jest dělitelno *c*. —

Na př. jsou-li *a* a *c* čísla nesoudělná a má-li býti $a \cdot 10^n$ dělitelno *c*, musí býti číslo 10^n dělitelno číslem c.

8) *Je-li číslo* **c** *dělitelno dvěma nesoudělnými čísly* **a** *a* **b**, *jest dělitelno i jich součinem.*

Důkaz. Poněvadž
číslo *c* jest dělitelno číslem *a*, jest každý prvočinitel čísla *a* prvočinitelem čísla *c*.
„ „ „ „ „ *b*, „ „ „ „ *b* „ „ „
a poněvadž *a* a *b* jsou čísla nesoudělná, nemají žádného prvočinitele společného. Z toho následuje, že v čísle *c* vyskytují se všichni prvočinitelé, kteří jsou v čísle *a* i v čísle *b*, čili kteří jsou v součinu *ab*, t. j. číslo *c* jest dělitelno součinem *ab*.

Na př. číslo, které jest dělitelno 2 i 3, jest dělitelno i 6,
„ „ „ „ 3 i 4, „ „ 12,
„ „ „ „ 2 i 9, „ „ 18.

9) *Jsou-li čísla* **a** a **b** *dělitelna číslem* **m**, *jest jím dělitelen i každý výraz tvaru* **au + bv**.

Důkaz. Jsou-li čísla *a* a *b* dělitelna číslem *m*, jsou i součiny *au* a *bv* tímto číslem dělitelny. Avšak poněvadž součet dělíme číslem, dělíme-li jím každého jeho sčítance, jest i výraz $au + bv$ číslem *m* dělitelen.

Které věty obsaženy jsou ve větě 9. pro $u = v = 1$
a pro $u = 1, v = -1$?

10) *Kterým číslem jest dělitelen dělitel a zbytek, tím jest dělitelen i dělenec.*

Důkaz. Je-li číslo *a* dělencem, číslo *b* dělitelem a *r* zbytkem, jest jich závislost na sobě vyjádřena rovnicí

$$a = b \cdot p + r, \qquad (\S\ 25., 3)$$

z níž na základě věty 9. vyplývá naše tvrzení.

11) *Kterým číslem jest dělitelen dělenec a dělitel, tím jest dělitelen i zbytek.*

Důkaz. Odečteme-li od rovnice

$$a = bp + r$$

rovnici $bp = bp$,

obdržíme rovnici $a - bp = r$,

z níž jest tvrzení naše patrno na základě věty 9.

Jest-li dělitel vždy týmž číslem dělitelen, kterým jest dělitelen dělenec a zbytek?

§ 33. Pravidla dělitelnosti pro čísla soustavy desítkové.

1) *Dělíme-li číslo soustavy desítkové číslem* 2^r *nebo* 5^r, *obdržíme týž zbytek, jako když dělíme číslo skládající se z* r *posledních míst daného čísla číslem* 2^r *nebo* 5^r.

Důkaz. Číslo A soustavy desítkové lze psáti ve tvaru

$$A = \ldots . a_{r+1}10^{r+1} + a_r 10^r + a_{r-1}10^{r-1} + a_{r-2}10^{r-2} + \ldots . a_2 10^2 + a_1 10 + a_0,$$

čili $A = (\ldots a_{r+1}10 + a_r)10^r + a_{r-1}10^{r-1} + a_{r-2}10^{r-2} + \ldots a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$.

Označíme-li číslo $\ldots a_{r+1}10 + a_r$ písmenem U a číslo

$$a_{r-1}10^{r-1} + a_{r-2}10^{r-2} + \ldots . a_2 10^2 + a_1 10 + a_0,$$

skládající se z r posledních míst daného čísla, písmenem V, jest

$$A = U10^r + V.$$

Poněvadž $10^r = 2^r . 5^r$, jest 10^r a tudíž i $U10^r$ (§ 32., 6.) dělitelno číslem 2^r i 5^r, z čehož jde, že při dělení čísla $(U10^r + V)$ čili čísla A číslem 2^r anebo 5^r obdržíme týž zbytek, který povstane dělením čísla V čísly 2^r anebo 5^r. Tím jest tvrzení naše dokázáno.

Z poučky první vychází na jevo:

Číslo soustavy desítkové jest dělitelno 2^r *nebo* 5^r, *je-li těmito čísly dělitelno číslo složené z* r *posledních míst čísla daného.*

V této větě obsaženy jsou věty zvláštní:

a) *Číslo jest dělitelno* 2 *nebo* 5, *jsou-li jeho jednotky nullového řádu* 2 *nebo* 5 *dělitelny.*

b) *Číslo jest dělitelno* 4 *nebo* 25, *je-li číslo složené z jeho jednotek a desítek* 4 *nebo* 25 *dělitelno.*

c) *Číslo jest dělitelno* 8 *nebo* 125, *je-li číslo složené z jeho jednotek, desítek a set* 8 *nebo* 125 *dělitelno.*

Čísla, která jsou 2 dělitelna, nazýváme čísla *sudá*, kdežto čísla, která 2 dělitelna nejsou, slovou *čísla lichá.*

Z těchto definic vychází na jevo, že číslo sudé musí míti tvar $2r$, kdežto každé číslo liché ve tvaru $2r + 1$ nebo $2r - 1$ napsati lze.

Z pravidla pro dělitelnosť dvěma jest patrno, že každé číslo sudé má sudý počet jednotek nullového řádu, čili jak se obyčejně říká, že má na konci sudou číslici.

Vysvětlení. Ciferným součtem čísla jmenujeme součet přirozených hodnot číslic, jimiž jest vypsáno.

2) *Dělíme-li číslo soustavy desítkové devíti nebo třemi, obdržíme týž zbytek, jako když dělíme ciferný jeho součet devíti nebo třemi.*

Důkaz. Uvážíme-li, že $10 = 9 + 1,$

$10^2 = 99 + 1 = 9 . 11 + 1,$

$10^3 = 999 + 1 = 9 . 111 + 1,$

$\vdots$

a t. d.,

můžeme číslo A soustavy desítkové psáti ve tvaru

$$A = \ldots a_3 (9 . 111 + 1) + a_2 (9 . 11 + 1) + a_1 (9 + 1) + a_0,$$

čili $A = (\ldots a_3 . 111 + a_2 . 11 + a_1)9 + (\ldots a_3 + a_2 + a_1 + a_0),$

z kteréhož tvaru vyplývá, že jest

$$Z\left(\frac{A}{9}\right) = Z\left(\frac{\ldots a_3 + a_2 + a_1 + a_0}{9}\right),$$

jakož i $$Z\left(\frac{A}{3}\right) = Z\left(\frac{\ldots a_3 + a_2 + a_1 + a_0}{3}\right),$$

čímž jest naše tvrzení dokázáno.

Z věty 2. jest patrno:

Číslo soustavy desítkové jest dělitelno třemi nebo devíti, je-li jeho ciferný součet třemi nebo devíti dělitelen.

3) *Dělíme-li číslo jedenácti, obdržíme týž zbytek, jako když dělíme jedenácti rozdíl mezi ciferným součtem jeho číslic stojících na místech lichých a ciferným součtem číslic stojících na místech sudých (od pravé strany).*

Důkaz. Uvážíme-li,

že $10 = 11 - 1,$

$10^2 = 99 + 1 = 9 . 11 + 1,$

$10^3 = 10 (9 . 11 + 1) = 90 . 11 + 10 = 90 . 11 + 11 - 1 = 91 . 11 - 1,$

$10^4 = 10 (91 . 11 - 1) = 910 . 11 - 10 = 910 . 11 - 11 + 1 = 909 . 11 + 1,$

$10^5 = 10 (909 . 11 + 1) = 9090 . 11 + 10 = 9090 . 11 + 11 - 1 =$

$= 9091 . 11 - 1$ atd.,

lze psáti číslo A soustavy desítkové ve tvaru

$$A = \ldots a_5 (9091 . 11 - 1) + a_4 (909 . 11 + 1) + a_3 (91 . 11 - 1) + a_2 (9 . 11 + 1) + a_1 (11 - 1) + a_0$$

čili $$A = (\ldots a_5 . 9091 + a_4 . 909 + a_3 . 91 + a_2 . 9 + a_1) 11 + (\ldots - a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0).$$

Z této rovnice jest patrno, že

$$Z\left(\frac{A}{11}\right) = Z\left(\frac{\ldots - a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0}{11}\right),$$

čili, upravíme-li jinak pravou stranu této rovnice,

$$Z\left(\frac{A}{11}\right) = Z\left[\frac{(\ldots a_4 + a_2 + a_0) - (a_5 + a_3 + a_1)}{11}\right],$$

ve kteréž rovnici jest tvrzení naše obsaženo.

Z věty a) vychází na jevo:

Číslo soustavy desítkové jest dělitelno jedenácti, je-li rozdíl mezi ciferným součtem jeho číslic stojících na místech sudých a ciferným součtem číslic stojících na místech lichých jedenácti dělitelen.

Dokažte pravdivost těchto tvrzení:

a) Součet i rozdíl dvou čísel sudých jest číslo sudé.

b) „ „ „ „ „ lichých „ „ „

c) „ „ „ čísla sudého a lichého jest číslo liché.

d) Je-li aspoň jeden činitel součinu čísel celých číslem sudým, jest i součin číslem sudým.

e) Součin čísel lichých jest číslo liché.

§ 34. O algebraických výrazech kmenných a složených. Rozklad výrazů složených na výrazy kmenné.

Kmenným výrazem algebraickým čili algebraickým prvočinitelem jmenujeme celistvý výraz algebraický, který není žádným celým číslem zvláštním ani celistvým výrazem algebraickým dělitelen, kromě 1 *a sám sebou.*

Takovými *kmennými* výrazy jsou na př.

$$a,\ b,\ a+b,\ a-b,\ a^2+b^2,\ a^4+b^4 \text{ atd.}$$

Složeným výrazem algebraickým jmenujeme takový celistvý výraz algebraický, který jest kromě 1 *a sám sebou ještě jinými čísly celými nebo celistvými výrazy algebraickými dělitelen.*

Na př. a^2, ab, $5a$, $3a^2+3b^2$, a^2-b^2, $(a \pm b)^2$ atd.
jsou složené výrazy algebraické.

Ve mnohých případech jest důležito *rozkládati* složené výrazy na prvočinitele.

Úlohu tuto lze snadno vykonati úplně nebo částečně v těchto případech:

a) *Je-li daný výraz, jakož i každý jeho činitel jednočlenný.*

Na př. výraz a^2bc^3 složen jest z prvočinitelů $a, a, b, c, c, c,$
výraz $462xy^3z^5$ složen jest z prvočinitelů $2, 3, 7, 11, x, y, y, y, z, z, z, z, z$ *atd.*

b) *Je-li daný výraz mnohočlenný, ale mají-li všecky jeho členy společného činitele.* Vytčením tohoto činitele před závorku bude rozklad úplně nebo částečně vykonán.

Na př. $8ax^2+16a^2x = 8ax\,(x+2a)$, z čehož jest patrno, že výraz $8ax^2+16a^2x$ složen jest z prvočinitelů $2, 2, 2, a, x, (x+2a)$.

c) V některých případech lze užiti při rozkladu vět vytčených v § 27., 2.

Na př.

1) $x^2-1=(x-1)(x+1)$. 2) $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. 3) $(x^3+1)=(x+1)(x^2-x+1)$.

4) $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$.

5) $x^8-y^8=(x^4-y^4)(x^4+y^4)=(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$.

6) $x^{12}+y^{12}=(x^4)^3+(y^4)^3=(x^4+y^4)(x^8-x^4y^4+y^8)$.

d) *Má-li výraz algebraický tvar* x^2+rx+s *a jsou-li* α *a* β *taková dvě čísla, že* $\alpha+\beta=r$, $\alpha.\beta=s$,

jest $x^2+rx+s=(x+\alpha)(x+\beta)$.

Důkaz. Je-li $r = \alpha + \beta$ a $s = \alpha\beta$,

jest $x^2 + rx + s = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ čili

$x^2 + rx + s = x^2 + \alpha x + \beta x + \alpha\beta$

$x^2 + rx + s = x(x + \alpha) + \beta(x + \alpha)$

$x^2 + rx + s = (x + \alpha)(x + \beta)$, jak bylo tvrzeno.

Je-li na př. trojčlen $x^2 + 6x + 8$ rozložiti na dva činitele, uvažme,

že $6 = 2 + 4$ a $8 = 2 \cdot 4$,

tudíž jest $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$.

V trojčlenu $x^2 - 6x - 16$ jest $-6 = -8 + 2$ a $-16 = 2(-8)$,

tudíž $x^2 - 6x - 16 = (x - 8)(x + 2)$.

§ 35. O největší společné míře čísel a výrazův algebraických.

Výměr. Největší společnou měrou dvou nebo několika čísel jmenujeme největší číslo, kterým jsou daná čísla dělitelna.

Z této definice vychází na jevo věta:

1) *Největší společná míra několika čísel rovna jest součinu všech prvočinitelů daným číslům společných* (§ 32., 3.).

Výměr. Největší společnou měrou několika výrazův algebraických jmenujeme součin všech jim společných prvočinitelů.

2) Z věty první a definice poslední jest patrno:

Největší společná míra několika čísel nebo výrazův algebraických se nezmění, násobíme-li kterýkoli z těchto výrazů prvočinitelem, který ve všech ostatních číslech nebo výrazech obsažen není.

Největší společná míra několika čísel nebo výrazů jest každou jinou jich společnou měrou dělitelna.

3) *Největší společná míra dělitele a zbytku jest též největší společnou měrou dělence a dělitele.*

Důkaz. Budiž A dělenec, B dělitel, R zbytek a M největší společná míra dělitele a zbytku. Dle věty 10. v §. 32. jest i dělenec A dělitelen výrazem M, z čehož následuje, že M jest *společnou měrou* i výrazů A a B. Že jest jich největší společnou měrou, plyne z úvahy této: Kdyby M nebylo největší společnou měrou výrazův A a B, byl by jiný výraz $M' > M$ jich největší společnou měrou. Dle věty 11. v § 32. byl by však i zbytek R tímto výrazem dělitelný, t. j. M' bylo by i společnou měrou výrazů B a R: což jest proti podmínce, že M jest jich největší společnou měrou.

4) *Dělíme-li dvě čísla nebo dva výrazy algebraické jich největší společnou měrou, jsou podíly tím nabyté nesoudělné.*

Důkaz. Budiž M největší společnou měrou výrazův A a B a dále budiž

$$\frac{A}{M} = a, \quad \frac{B}{M} = b \text{ čili } A = aM, \quad B = bM.$$

Kdyby podíly a a b nebyly nesoudělné, měly by nějakou společnou míru, na př. m, a bylo by $a = \alpha m$ a $b = \beta m$.

Vložíce tyto hodnoty za a a b do výrazů pro A a B, obdržíme rovnice

$$A = \alpha m M \quad \text{a} \quad B = \beta m M,$$

z nichž jde, že by v tomto případě výrazy A a B měly společnou míru mM, což jest proti podmínce, že M jest jich největší společnou měrou. Proto nemohou podíly a a b býti soudělné a musí tudíž býti nesoudělné.

§ 36. Jak vypočteme největší společnou míru čísel a algebraických výrazů.

Způsob první. Daná čísla nebo dané výrazy rozložme na prvočinitele a vytvořme součin všech prvočinitelů v oněch číslech nebo výrazech společně se vyskytujících. Tento součin jest žádanou největší společnou měrou (§ 35., 1.).

Příklad 1. Vyhledejte největší společnou míru čísel 48, 72, 180.

48	2	72	2	180	2
24	2	36	2	90	2
12	2	18	2	45	3
6	2	9	3	15	3
3	3	3	3	5	5

Největší společná míra $= 2 . 2 . 3 = 12$.

Příklad 2. Vyhledati jest největší společnou míru výrazů

$$6a^2b^2,\ 9a^2bc,\ 12abc^2.$$

$$6a^2b^2 = 2 . 3 . a . a . b . b,$$

$$9a^2bc = 3 . 3 . a . a . b . c,$$

$$12abc^2 = 2 . 2 . 3 . a . b . c . c.$$

Největší společná míra $= 3ab$.

Příklad 3. Vyhledati jest největší společnou míru výrazů $(x^2 - y^2)^2$ a $(x + y)^4$.

$$(x^2 - y^2)^2 = [(x + y)(x - y)]^2 = (x + y)(x + y)(x + y)(x - y).$$

$$(x + y)^4 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y).$$

Největší společná míra $= (x + y)(x + y) = (x + y)^2$.

Způsob druhý. Je-li vyhledati největší společnou míru dvou čísel A a B,

dělme číslo A číslem B, čímž nabudeme zbytku R_1,
„ „ B „ R_1, „ „ „ R_2,
„ „ R_1 „ R_2, „ „ „ R_3,
⋮ ⋮ ⋮
„ „ R_{n-2} „ R_{n-1}, „ „ „ R_n,
„ „ R_{n-1} „ R_n, „ „ „ 0,

načež jest R_n největší společnou měrou čísel A a B.

Důkaz. R_n jest především největší společnou měrou čísel R_{n-1} a R_n, tudíž dle věty 3. v § 35. jest i „ „ „ „ R_{n-2} a R_{n-1},
„ „ „ „ „ „ „ „ „ R_{n-3} a R_{n-2},
⋮ ⋮ ⋮
„ „ „ „ „ „ „ „ „ R_2 a R_1,
„ „ „ „ „ „ „ „ „ R_1 a B,
„ „ „ „ „ „ „ „ „ B a A,

což mělo býti dokázáno.

Že při svrchu vytčeném *postupném* dělení musíme konečně dospěti ke zbytku $= 0$, vychází na jevo z toho, že všecky zbytky jsou vyjádřeny čísly celými, o jichž absolutních hodnotách platí nerovnost

$$B > R_1 > R_2 \ldots > R_{n-1} > R_n.$$

Budiž podotčeno, že výkon se urychlí, béřeme-li za R_1, R_2, R_3 ... zbytky nejmenší.

Příklad.

Vyhledati jest největší společnou míru čísel 1035 a 322.

			Vysvětlení.
1035	322	3	$1035 : 322 = 3$
69	46	4	69
23	0	1	$322 : 69 = 4$
		2	46
			$69 : 46 = 1$
			23
			$46 : 23 = 2$
			0

Největší společná míra jest 23.

Hledíme-li ke zbytkům nejmenším, obdržíme v témž příkladě

1035	322	3
69	—23	5
0		3

Největší společná míra $= 23$ (neboť na znaménku při dělitelnosti nezáleží).

Poněvadž věta 3. v § 35. platí i pro dva výrazy algebraické, lze postupným dělením vyhledati i největší společnou míru dvou výrazův algebraických.

Při tom lze výhodně užiti věty 2. v § 35., že totiž lze vynechati takové prvočinitele každého z výrazů A a B, nebo B a R_1, R_1 a R_2 a t. d., které v druhém obsaženy nejsou, jakož i že každý z těchto výrazů násobiti lze prvočinitelem, který není zároveň prvočinitelem výrazu druhého.

Příklad 1.

Vyhledati jest největší společnou míru výrazův

$$A = 2x^3 - 7x^2 + 8x - 4 \quad \text{a} \quad B = x^2 - 5x + 6.$$

$2x^3 - 7x^2 + 8x - 4$	$x^2 - 5x + 6$	$2x + 3$
$2x^3 - 10x^2 + 12x$	$x^2 - 2x$	$x - 3$
$- \quad + \quad -$	$- \quad +$	
$3x^2 - 4x - 4$	$-3x + 6$	
$3x^2 - 15x + 18$	$-3x + 6$	
$- \quad + \quad -$	0	
$11x - 22$		
$:11)$ $\quad x - 2$		

Největší společná míra $= x - 2$.

Vysvětlení. Mnohočlen vyššího stupně, t. j. A, dělili jsme nejprve mnohočlenem B. Tím povstal podíl $2x + 3$ a zbytek $11x - 22$. Poněvadž $11x - 22 = 11(x - 2)$ a číslo 11

není prvočinitelem mnohočlenu B, bylo číslo 11 vynecháno. Výrazem $x-2$ byl dělen mnohočlen B, čímž povstal podíl $x-3$ a zbytek $= 0$, z čehož následuje, že $x-2$ jest největší společnou měrou výrazů A a B.

Příklad 2.

Vyhledati jest největší společnou míru výrazů

$$A = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 - x - 6 \text{ a } B = 6x^3 + 7x^2 + x + 6.$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & 2x^4 & -3x^3 & -7x^2 & -x-6 & \\
\times 3) & 6x^4 & -9x^3 & -21x^2 & -3x-18 & \\
 & 6x^4 & +7x^3 & +x^2 & +6x & \\
\hline
 & & -16x^3 & -22x^2 & -9x-18 & \\
\times -3) & & 48x^3 & +66x^2 & +27x+54 & \\
 & & 48x^3 & +56x^2 & +8x+48 & \\
\hline
 & & & 10x^2 & +19x+6 & \\
 & & & 10x^2 & +15x & \\
\hline
 & & & & 4x+6 & \\
 & & & & 4x+6 & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & 6x^3 & +7x^2 & +x & +6 & x \\
 & & & & & 8 \\
\times 5) & 30x^3 & +35x^2 & +5x & +30 & 3x \\
 & 30x^3 & +57x^2 & +18x & & \\
\hline
 & & -22x^2 & -13x & +30 & -11 \\
\times 5) & & -110x^2 & -65x & +150 & 5x+2 \\
 & & -110x^2 & -209x & -66 & \\
\hline
 & & & 144x & +216 & \\
:72) & & & 2x & +3 &
\end{array}$$

Největší společná míra $= 2x + 3$.

Vysvětlení. Aby první člen mnohočlenu A byl dělitelen prvním členem mnohočlenu B, násobili jsme mnohočlen A činitelem 3 (§ 35., 2.), z téže příčiny násobili jsme zbytek $-16x^3 - 22x^2 - 9x - 18$, který se objevil po prvním dělení, činitelem -3. Aby první člen mnohočlenu B byl dělitelen prvním členem zbytku $10x^2 + 19x + 6$, násobili jsme mnohočlen B činitelem 5 a t. d.

Je-li nám vyhledati tímto způsobem největší společnou míru více než dvou výrazů nebo čísel, na př. výrazů A, B a C, počínáme si takto:

Vyhledáme nejprve největší společnou míru M' kterýchkoli dvou z daných výrazů, na př. A a B. Po té vyšetříme největší společnou míru M výrazu M' a výrazu C a ta jest největší společnou měrou výrazů A, B a C.

Důkaz.

A a B jest dělitelno M',
M' a C jest dělitelno M.
Tudíž jest A, B a C dělitelno M,

t. j. M jest *společnou* měrou výrazů A, B a C.

Kdyby M nebylo *největší* společnou měrou těchto čísel, bylo by jiné číslo $M_1 > M$ jich největší společnou měrou. Číslo M', jsouc největší společnou měrou čísel A a B, muselo by býti dělitelno číslem M_1 (§ 35., 2.), z čehož jde, že by M_1 bylo společnou měrou čísel M' a C. Avšak to protiví se podmínce, že M jest největší společnou měrou těchto čísel. Nemůže tudíž býti společná míra všech tří čísel větší nežli jich společná míra M, z čehož jest zřejmo, že M jest žádanou největší společnou měrou.

Druhým způsobem vyhledávati jest společnou míru, nedovedeme-li daných čísel anebo výrazův rozložiti na prvočinitele.

§ 37. O společném násobku čísel a algebraických výrazů vůbec a o jich nejmenším společném násobku zvláště.

Společným násobkem několika čísel jmenujeme číslo, které jest oněmi čísly dělitelno.

Týž výměr rozumí se i o společném násobku výrazův algebraických.

Z této definice jest patrno:

1) *Každý prvočinitel daných čísel (výrazův alg.) musí býti zároveň prvočinitelem společného jich násobku.*

2) *Společných násobků několika čísel jest nekonečně mnoho*, neboť každý násobek určitého násobku daných čísel jest i násobkem těchto čísel.

Z nekonečně mnoha společných násobků daných čísel jest *jeden nejmenší*, t. j. ten, *který složen jest z nejmenšího počtu prvočinitelů, jež se v daných číslech (výrazech) vyskytují.* Tento násobek jmenujeme *nejmenším společným násobkem daných čísel* (výrazů).

3) *Prvočinitele nejmenšího společného násobku několika čísel (výrazů) najdeme, vybéřeme-li z daných čísel (výrazů) všecky jejich různé prvočinitele a pokládáme-li každého z nich tolikráte za prvočinitele nejmenšího společného násobku, kolikráte se vyskytuje v čísle, ve kterém se opakuje nejvícekráte.*

Na př. nejmenší společný násobek výrazů x^3, x^2y, xy^2, xyz složen jest z prvočinitelů x, x, x, y, y, z.

4) *Nejmenší společný násobek dvou čísel (výrazů) roven jest jich součinu dělenému největší společnou měrou těchto čísel.*

Důkaz. Dané výrazy buďtež A a B a jich největší společná míra budiž M. Potom jest

$$A = aM,$$
$$B = bM,$$

kdež a a b jsou čísla nesoudělná (§ 35., 4.).

Z toho jde, že nejmenší společný násobek výrazův A a B, čili aM a bM jest abM, čili $\frac{aM.bM}{M}$, t. j. $\frac{A.B}{M}$, což bylo dokázati.

Poznámka. Pro více než dva výrazy ani poučka tato ani poučka jí podobná neplatí. Neboť jsou-li A, B a C dané výrazy, M jich společná míra a a, b a c podíly, jež obdržíme dělíce touto měrou A, B a C, tu lze sice tvrditi, že všecka tři čísla a, b a c nemají kromě 1 žádné společné míry, ale dvě z nich, na př. a a b, mohou býti čísla soudělná. Nelze tudíž tvrditi, že by součin $abcM = \frac{ABC}{M^2}$ byl nejmenším společným násobkem. Nejmenší společný násobek může tu býti patrně menší nežli $\frac{ABC}{M^2}$, natož aby byl roven $\frac{ABC}{M}$.

*5) Je-li číslo (výraz) **C** dělitelno dvěma čísly (výrazy) **A** a **B**, jest dělitelno i jich nejmenším společným násobkem.*

Důkaz. Je-li číslo C dělitelno čísly A a B, jest každý prvočinitel čísel A a B zároveň prvočinitelem čísla C. A poněvadž v nejmenším společném násobku čísel A a B kromě jich prvočinitelů jiných prvočinitelů není, jest číslo C dělitelno i tímto nejmenším společným násobkem.

Z této věty vyplývá věta 8. v § 32. jakožto zvláštní případ. Proč?

§ 38. Jak vypočteme nejmenší společný násobek.

Způsob první. Daná čísla rozložíme na prvočinitele a vybéřeme z nich všecky prvočinitele různé. Každý z těchto prvočinitelů pokládáme tolikráte za prvočinitele žádaného násobku, kolikrát jest v čísle, ve kterém se opakuje nejvícekráte. Součin takto nabytých prvočinitelů jest žádaným nejmenším společným násobkem. (§ 37., 3.)

Příklad 1. Vyhledati jest nejmenší společný násobek čísel 24, 36, 48.

24	2	36	2	48	2
12	2	18	2	24	2
6	2	9	3	12	2
3	3	3	3	6	2
				3	3

Nejmenší společný násobek $= 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . = 144$.

Příklad 2. Vyhledati jest nejmenší společný násobek výrazů
$2x - 2y$, $6x + 6y$, $(x^2 - y^2)^2$, $x^4 - y^4$.

$2x - 2y = 2 (x - y)$,
$6x + 6y = 2 . 3 . (x + y)$,
$(x^2 - y^2)^2 = (x + y)^2 (x - y)^2$,
$x^4 - y^4 = (x - y) (x + y) (x^2 + y^2)$.

Nejmenší společný násobek $= 2 . 3 . (x - y)^2 (x + y)^2 (x^2 + y^2) = 6 (x^2 - y^2)^2 (x^2 + y^2) =$
$= 6 (x^2 - y^2) (x^4 - y^4)$.

Způsob druhý. Je-li nám vyšetřiti nejmenší společný násobek dvou čísel (výrazů), *vyhledejme nejprve jich největší společnou míru a užijme potom věty* 4. *v* § 37.

Příklad. Vyhledati jest nejmenší společný násobek výrazů
$2x^3 - 7x^2 + 8x - 4$ a $x^2 - 5x + 6$.

Dle § 36. jest největší společnou měrou těchto výrazů $x - 2$.
Jich nejmenší společný násobek N jest tudíž

$$N = \frac{(2x^3 - 7x^2 + 8x - 4)(x^2 - 5x + 6)}{x - 2},$$

čili poněvadž $(x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x - 3$, jest $N = (2x^3 - 7x^2 + 8x - 4)(x - 3)$.

Vyšetřujíce tímto způsobem nejmenší společný násobek několika, na př. tří výrazův A, B, C, vyhledejme nejprve nejmenší společný násobek N' dvou z nich, na př. A a B, potom nejmenší společný násobek N výrazů N' a C. Násobek N jest násobkem žádaným.

Tvrzení. Je-li N' nejmenším společným násobkem výrazův A a B
a N „ „ „ „ N' a C,
jest N „ „ „ „ A, B i C.

Důkaz. N jest dělitelno N' a C,
N' „ „ A a B,

tudíž jest N dělitelno A, B i C, t. j. N jest *společným* násobkem výrazův A, B a C. Že jest jich nejmenším společným násobkem, vychází na jevo z úvahy této: Kdyby číslo N nebylo nejmenším společným násobkem daných čísel, bylo by jím jisté číslo $N_1 < N$. Číslo N_1, jsouc dělitelno čísly A a B, musilo by býti dělitelno i jich nejmenším společným násobkem (§ 37., 5.), t. j. číslem N' a poněvadž jest mimo to dělitelno číslem C, bylo by společným násobkem čísel N' a C. Avšak to protiví se podmínce, že N jest *nejmenším* společným násobkem těchto čísel. Čísla A, B a C nemohou tudíž míti menšího společného násobku než N, t. j. N jest nejmenším jich násobkem společným.

Podobně vykoná se důkaz pro více než tři výrazy.

Část čtvrtá.

O zlomcích.

Všeobecné vlastnosti zlomků.

§ 39. Výměry.

V § 24. seznali jsme:

1) *Jednotkou zlomkovitou jmenujeme několikátý díl jednotky celé.*

2) *Výraz udávající jednu nebo několik jednotek zlomkovitých jmenujeme zlomkem.*

Z toho následuje, že k určení zlomku jest potřebí *dvou čísel.* Jedno, které udává, v kolik dílů jednotka celá byla rozdělena, jmenuje se *jmenovatel*; druhé, které udává, kolik těch dílů ve zlomku obsaženo jest, jmenuje se *čítatel.* Jmenovatel určuje tudíž jednotku zlomkovitou, která zlomku za základ slouží, kdežto čítatel určuje jich počet.

3) Je-li jmenovatelem zlomku číslo b a čítatelem číslo a, označíme jednotku zlomkovitou, která tomuto zlomku za základ slouží, podle jejího významu $(1 : b)$ nebo $\frac{1}{b}$. Zlomek pak vyjádřen bude součtem

$$\underbrace{\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\ldots\frac{1}{b}}_{a\text{krát}}$$

čili kratšeji

$$\frac{1}{b} . a. \qquad \text{(§ 24.).}$$

Avšak poněvadž a dílů $b^{tých}$ jedné jednotky rovno jest $b^{tému}$ dílu a jednotek, t. j. rovno jest podílu $(a : b)$ čili $\frac{a}{b}$, jest zlomek $\frac{1}{b} . a$ roven podílu $\frac{a}{b}$. Z té příčiny označujeme zlomek, jehož čítatelem jest a a jmenovatelem b, krátce $\frac{a}{b}$.

§ 40. Výsledky.

1) *Zlomek má hodnotu* $\gtrless 1$ *anebo jedné rovnou podle toho, je-li čítatel jeho* $\gtrless$ *jmenovatele nebo jemu roven.*

Zlomky, jichž čítatel jest *menší* jmenovatele, jmenujeme zlomky *pravými*, kdežto zlomky, jichž čítatel jest *větší* jmenovatele, nazýváme zlomky *nepravými*.

Abychom vyšetřili, kolik celých jednotek ve zlomku nepravém obsaženo jest, dělíme jeho čítatele jmenovatelem. Tím nabudeme všeobecně jistého počtu jednotek celých, načež ještě zbývá ze zlomku nepravého jistá část, vyjádřená zlomkem pravým.

Na př.

$$\frac{23}{5} = 4 + \frac{3}{5},$$

$$\frac{a+2}{a} = 1 + \frac{2}{a},$$

$$\frac{ac+b}{c} = a + \frac{b}{c}.$$

Zlomek nepravý bude potom vyjádřen tvarem $a + \frac{b}{c}$. Výraz tohoto tvaru jmenujeme *číslem smíšeným*.

Číslo smíšené složeno jest tudíž ze dvou částí: z čísla celého a ze zlomku.

Při číslech zvláštních píšeme části čísla smíšeného vedle sebe, nespojujíce jich znaménkem $+$. Na př. $2\frac{3}{5}$ značí $2 + \frac{3}{5}$.

2) Z rovnice

$$\frac{ac+b}{c} = a + \frac{b}{c}$$

čili $$a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$$

jest patrno pravidlo:

Abychom číslo smíšené převedli na zlomek, přičteme k čítateli zlomku součin z jeho jmenovatele a čísla celého a součet tím nabytý lomíme jmenovatelem.

Na př.

$$2 + \frac{2x}{10-x} = \frac{2x + 2(10-x)}{10-x} = \frac{2x + 20 - 2x}{10-x} = \frac{20}{10-x}.$$

3) *Zlomek, jehož čitatel jest násobkem jmenovatele, roven jest číslu celému, které obdržíme dělíce čitatele jmenovatelem.*

K těmto zlomkům náležejí jakožto zvláštní případy

a) zlomky, jichž jmenovatelé rovni jsou 1, na př. $\frac{a}{1}$, $\frac{b}{1}$ atd.

b) „ „ „ „ „ čitatelům na př. $\frac{a}{a}$, $\frac{b}{b}$.

Ve případě *a)* vyjádřena jest hodnota zlomku číslem celým, které jest v čitateli, a ve případě *b)* roven jest zlomek 1. — Zlomky ve 3. vytčené jsou zlomky pouze dle tvaru, avšak hodnoty jich lze vyjádřiti čísly celými. Z té příčiny slovou zlomky *nevlastními.*

Na př. $\frac{4}{2}$, $\frac{9}{3}$, $\frac{16}{4}$ atd. jsou zlomky nevlastní.

3) *Každé číslo celé lze vyjádřiti zlomkem, jehož jmenovatel jest libovolný a jehož čitatel roven jest součinu daného čísla a jmenovatele.*

T. j. $a = \frac{a \,.\, b}{b}$.

Na př. $4 = \frac{4 \,.\, 3}{3} = \frac{12}{3}$, $5 = \frac{5 \,.\, 6}{6} = \frac{30}{6}$ atd.

4) *Zlomek, jehož čitatel roven jest* 0 *a jehož jmenovatel od* 0 *jest rozdílný, rovná se* 0, *t. j.* $\frac{0}{a} = 0$.

5) Majíce zlomek $\frac{a}{b}$ vždy za totožný s podílem $(a : b)$, poznáme, jaký význam přiložiti jest zlomkům, v jichž čitatelích a jmenovatelích jsou čísla algebraická.

Podle toho jest, jsou-li α a β čísla absolutní:

$$\frac{+\alpha}{+\beta} = +\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{-\alpha}{+\beta} = -\frac{\alpha}{\beta}, \qquad (1)$$
$$\frac{+\alpha}{-\beta} = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{-\alpha}{-\beta} = +\frac{\alpha}{\beta}.$$

Zlomky, v jichž čitatelích a jmenovatelích jsou čísla algebraická, jmenujeme *zlomky algebraickými.* Na rozdíl od nich slovou zlomky, v jichž čitatelích a jmenovatelích jsou čísla absolutní, *zlomky absolutními.*

Z rovnic (1) jest patrno, že

$$\frac{+\alpha}{+\beta} = \frac{-\alpha}{-\beta} = -\frac{+\alpha}{-\beta} = -\frac{-\alpha}{+\beta}, \qquad (2)$$
$$\frac{-\alpha}{+\beta} = \frac{+\alpha}{-\beta} = -\frac{+\alpha}{+\beta} = -\frac{-\alpha}{-\beta}.$$

Z těchto rovnic vychází na jevo věta:

Ve zlomku algebraickém dovoleno jest proměniti současně znaménka a) *čí tatele a jmenovatele*, b) *čítatele a celého zlomku*, c) *jmenovatele a celého zlomku ve znaménka protivná.*

Z rovnic (1) jest zároveň patrno, jak lze každý zlomek algebraický vyjádřiti zlomkem absolutním.

6) *Kolikrát* $\frac{\text{zvětšíme}}{\text{zmenšíme}}$ *čítatele zlomku, tolikrát* $\frac{\text{zvětšíme}}{\text{zmenšíme}}$ *zlomek.*

Zvětšíme-li na př. čítatele zlomku $\frac{a}{b}$ ckráte, nabudeme zlomku $\frac{a \cdot c}{b}$, který jest ckráte větší zlomku $\frac{a}{b}$, neboť oběma zlomkům slouží za základ táž jednotka zlomkovitá a zlomek $\frac{ac}{b}$ obsahuje těchto jednotek ckráte více než zlomek $\frac{a}{b}$.

Z toho naopak následuje, že zmenšíme zlomek ckráte, dělíce jeho čítatele číslem c (kterým jest dělitelen).

7) *Kolikrát* $\frac{\text{zvětšíme}}{\text{zmenšíme}}$ *jmenovatele zlomku, tolikrát* $\frac{\text{zmenšíme}}{\text{zvětšíme}}$ *zlomek.*

Zvětšíme-li na př. jmenovatele zlomku $\frac{a}{b}$ ckráte, nabudeme zlomku $\frac{a}{bc}$, který jest ctým dílem zlomku $\frac{a}{b}$, neboť oba zlomky udávají stejný počet jednotek zlomkovitých, ale jednotka zlomkovitá, která slouží za základ zlomku $\frac{a}{bc}$, jest ckráte menší jednotky, která jest základem zlomku $\frac{a}{b}$.

Z toho naopak jde, že zvětšíme zlomek ckráte, dělíce jeho jmenovatele číslem c (kterým jest dělitelen).

8) Z vět 6. a 7. vycházejí na jevo věty:

a) *Hodnota zlomku se nezmění, násobíme-li jeho čítatele a jmenovatele stejným číslem.*

b) *Hodnota zlomku se nezmění, dělíme-li jeho čítatele a jmenovatele stejným číslem (kterým jsou oba dělitelny).*

§ 41. Krácení zlomků.

1) *Dělíce čítatele i jmenovatele zlomku jich společnou měrou, pravíme, že zlomek zkracujeme.*

Z toho jest patrno:

a) *Zlomku, jehož čítatel a jmenovatel jsou čísla nesoudělná, zkrátiti nelze.*

b) *Zlomek, jehož čítatel a jmenovatel jsou čísla soudělná, lze najednou zkrátiti, dělíme-li čítatele i jmenovatele jich největší společnou měrou.*

Na př.

$$\frac{18}{24} = \frac{18:6}{24:6} = \frac{3}{4}, \quad \frac{ax + x^2}{2bx - cx^2} = \frac{(a+x)x}{(2b-c)x} = \frac{a+x}{2b-c}.$$

2) Krátíce zlomek, vyjadřujeme jej zlomkem, v jehož čítateli a jmenovateli jsou čísla menší nežli v čítateli a jmenovateli zlomku původního.

I jest důležito poznati, že žádným jiným způsobem nežli *krácením*, nelze zlomek vyjádřiti zlomkem, v jehož čítateli a jmenovateli jsou menší čísla celá nežli v čítateli a jmenovateli zlomku původního. To jest patrno z věty následující:

Rovná-li se zlomek, jehož čítatelem a jmenovatelem jsou čísla nesoudělná, zlomku jinému, musí býti čítatel a jmenovatel tohoto zlomku stejnými násobky čítatele a jmenovatele zlomku původního.

Tvrzení. Buďtež a a b čísla nesoudělná a zlomek

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Tvrdíme, že jest

$$c = \lambda a, \quad d = \lambda b.$$

Důkaz. Znásobíme-li čítatele každého ze zlomků daných číslem d, nabudeme zlomků $\frac{ad}{b}$ a $\frac{cd}{d}$, které jsou $d$krát větší než zlomky původní. A poněvadž původní zlomky jsou podle podmínky stejné, jsou i $d$násobné zlomky stejné, t. j.

$$\frac{ad}{b} = \frac{cd}{d} \text{ čili poněvadž } \frac{cd}{d} = c,$$

$$\text{jest } \frac{ad}{b} = c. \tag{1}$$

Rovnice poslední poučuje nás, že součin ad musí býti dělitelen b. Avšak podle podmínky jsou čísla a a b nesoudělná, z čehož následuje, že číslo d musí býti dělitelno b (§ 32., 7.), t. j. d musí míti tvar $d = \lambda b$.

Dosadíce tuto hodnotu za d do rovnice (1), nabýváme rovnice

$$\frac{a\lambda b}{b} = c \text{ čili } c = \lambda a.$$

Jest tedy skutečně $c = \lambda a$ a $d = \lambda b$, jak dokázáno býti mělo.

Z výsledku toho vychází zároveň na jevo:

a) Zlomku, jehož čítatelem a jmenovatelem jsou čísla nesoudělná, nelze již zjednodušiti.

b) Rovnají-li se sobě dva zlomky, jichž čítatelé a jmenovatelé jsou čísla nesoudělná, rovnají se sobě i jich čítatelé i jich jmenovatelé.

*c) Ze zlomku, jehož čítatelem a jmenovatelem jsou čísla nesoudělná, obdržíme všecky zlomky jemu se rovnající, násobíme-li postupně jeho čítatele a menovatele všemi celými čísly řady číselné.**)

*) Budiž podotčeno, že v souhlase s výměrem zlomku přihlíženo jest jen ke zlomkům, jichž čítateli a jmenovateli jsou čísla celá.

§ 42. Rozšiřování zlomků. Jak uvedeme zlomek na jiného jmenovatele.

1) *Násobíce čitatele i jmenovatele zlomku týmž číslem, pravíme, že zlomek rozšiřujeme.*

Rozšířením zlomku změní se jen podoba, ale nikoli velikosť zlomku. (§ 40., 8.)

2) Na základě věty 8) v § 40. lze převésti každý zlomek na zlomek s ním co do hodnoty stejný, jehož jmenovatel jest násobkem jmenovatele původního.

Je-li na př. zlomek $\frac{a}{b}$ převésti na zlomek o jmenovateli bc, násobme i čitatele zlomku $\frac{a}{b}$ číslem c, čímž nabudeme ac, a zlomek $\frac{ac}{bc}$ jest zlomek žádaný.

Z toho vyplývá toto pravidlo pro uvádění zlomku na jiného jmenovatele, který jest násobkem jmenovatele původního:

Nového jmenovatele dělíme původním, a obdrženým podílem násobíme čitatele zlomku původního. Součin tím nabytý jest čitatelem zlomku nového.

3) Je-li několik zlomků o různých jmenovatelích převésti na zlomky o stejných jmenovatelích, čili jak se jinak praví, *je-li tyto zlomky uvésti na společného jmenovatele*, soudíme takto:

Žádaný jmenovatel společný musí býti násobkem každého z jmenovatelů daných, z čehož jde, že jest jich společným násobkem.

Vyhledavše společného jmenovatele několika daných zlomků, uvedeme každého z nich na tohoto jmenovatele podle 2.—

4) Z toho, co bylo vytčeno ve 3., jest patrno:

Nejmenším společným jmenovatelem několika zlomků jest nejmenší společný násobek jich jmenovatelů.

Na př.

nejmenší společný jmenovatel, na nějž lze uvésti zlomky $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, jest nejmenší společný násobek jmenovatelů 4, 6, a 8, t. j. 24 a tu jsou $\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$, $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$ a $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$.

Nejmenší společný jmenovatel, na nějž lze uvésti zlomky

$$\frac{a}{x-y}, \frac{b}{2(x+y)}, \frac{c}{x^2-y^2}, \text{ jest } 2(x-y)(x+y) = 2(x^2-y^2)$$

a tu jest $\frac{a}{x-y} = \frac{2a(x+y)}{2(x^2-y^2)}$, $\frac{b}{2(x+y)} = \frac{b(x-y)}{2(x^2-y^2)}$, $\frac{c}{x^2-y^2} = \frac{2c}{2(x^2-y^2)}$.

Početní výkony zlomky.

§ 43. Sčítání zlomků.

1) *Součet zlomků o stejných jmenovatelích rovná se zlomku téhož jmenovatele, jehož čitatel rovná se součtu čitatelů jednotlivých sčítanců.*

Tvrzení. $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}$.

Důkaz jest obsažen v odst. 1. § 25.

2) *Nemají-li zlomky, jež sčítati jest, stejných jmenovatelů, uveďme je nejprve na jmenovatele společného a potom je sečtěme dle* 1.

Obyčejně uvádíme zlomky, majíce je sčítati, na nejmenšího společného jmenovatele.

Na př.

1) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{2.4+3.3+5.2}{12}=\frac{27}{12}=2\frac{3}{12}=2\frac{1}{4}$.

2) $\frac{a}{a+x}+\frac{x}{a-x}=\frac{a(a-x)+(a+x)x}{(a+x)(a-x)}=\frac{a^2-ax+ax+x^2}{a^2-x^2}=\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$.

Je-li vykonati sčítání čísla celého a zlomku, uveďme číslo celé na jmenovatele rovného jmenovateli zlomku daného a sečtěme zlomek tím nabytý a zlomek daný.

Na př.

$$a+\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}.$$ (Srovnej s tím větu 2. v § 40.)

$$1+\frac{1}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=\frac{x}{x-1}.$$

§ 44. Odčítání zlomkův.

1) *Rozdíl zlomkův o stejných jmenovatelích rovná se zlomku téhož jmenovatele, jehož čítatelem jest rozdíl čítatelův obou těch zlomků.*

Tvrzení. $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}$.

Důkaz jest obsažen v odst. 1. § 25.

2) *Nemají-li zlomky, jež odčítati jest, stejných jmenovatelů, uveďme je na společného jmenovatele a odečtěme je potom dle* 1.

Na př.

1) $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4-3}{6}=\frac{1}{6}$.

2) $\frac{5}{6}-\frac{7}{8}=\frac{20-21}{24}=\frac{-1}{24}=-\frac{1}{24}$.

3) $\frac{ac}{a^2-4y^2}-\frac{c}{a+2y}=\frac{ac-(a-2y)c}{a^2-4y^2}=\frac{2cy}{a^2-4y^2}$.

4) $a-\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}$.



3) Z vět o sčítání a odčítání zlomků jest patrno, že na př.

$$\frac{a_1}{b}-\frac{a_2}{b}+\frac{a_3}{b}=\frac{a_1-a_2+a_3}{b}.$$

4) *Součet zlomků se nemění, sčítáme-li sčítance v libovolném po sobě pořádku, t. j.*

$$\frac{a_1}{b}+\frac{a_2}{b}+\frac{a_3}{b}=\frac{a_1}{b}+\frac{a_3}{b}+\frac{a_2}{b}=\frac{a_2}{b}+\frac{a_1}{b}+\frac{a_3}{b}$$ atd.,

neboť vždy obdržíme součet

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{b}. \qquad (\S\ 13., 1.)$$

Tím rozšířena jest věta 1. v § 13. i na zlomky.

§ 45. Násobení zlomku číslem celým.

Přidržujeme-li se definic násobení obsažených v §§ 15. a 18., můžeme tvrditi:

1) *Zlomek násobíme číslem celým, násobíme-li jím jeho čítatele.*

Tvrzení. $\frac{a}{b}\, c = \frac{ac}{b}$.

Důkaz. Budiž a) číslo c číslem absolutním.

Podle definice násobení v § 15. značí $\frac{a}{b} . c$ v tomto případě

$$\underbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \ldots}_{c\text{krát}}, \text{ t. j. } \frac{\overbrace{a + a + a + a \ldots}^{c\text{krát}}}{b},$$

což jest rovno $\frac{a \,.\, c}{b}$.

Jesti tudíž $\frac{a}{b} . c = \frac{ac}{b}$, jak bylo tvrzeno.

Je-li b) číslo c číslem algebraickým, jehož absolutní hodnota jest γ, takže $c = \pm\gamma$, tu jest dle definice násobení v § 18.

$$\frac{a}{b}(\pm\gamma) = \left(\pm\frac{a}{b}\right)\gamma = \pm\frac{a\gamma}{b} = \frac{\pm a\gamma}{b} = \frac{a(\pm\gamma)}{b}$$

čili, spojíme-li první člen s posledním a píšeme-li c místo $\pm\gamma$, $\frac{a}{b} . c = \frac{ac}{b}$, čímž jest tvrzení naše dokázáno i pro algebraického násobitele.

Je-li jmenovatel zlomku $\frac{ac}{b}$ dělitelen číslem c, lze jím tento zlomek krátiti a obdržíme rovnici

$$\frac{a}{b} . c = \frac{a}{b : c}.$$

Z této rovnice vyplývá:

2) *Zlomek násobíme číslem celým, dělíme-li jím jeho jmenovatele* (je-li jím dělitelen).

Srovnej s tím větu 2. v § 26.

§ 46. Dělení zlomku číslem celým.

1) *Zlomek dělíme číslem celým, násobíme-li jím jeho jmenovatele.*

Tvrzení. $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \,.\, c}$.

Důkaz. Při dělení hledáme číslo, které násobeno jsouc dělitelem dá dělence a poněvadž $\frac{a}{bc} . c = \frac{a}{b}$, jest v tomto případě $\frac{a}{bc}$ žádaným podílem.

Je-li číslo a dělitelno číslem c, lze zlomek $\frac{a}{bc}$ číslem c krátiti, čímž nabudeme zlomku $\frac{a : c}{b}$.

V tomto případě jest tudíž $\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b}$, ze kteréž rovnice vyplývá:

2) *Zlomek dělíme celým číslem, dělíme-li jím jeho čítatele* (je-li jím dělitelen).

Srovnej s tím větu 3. v § 26.

§ 47. Násobení zlomkem.

Definice násobení vytčená v § 15. žádá, aby násobitelem bylo absolutní číslo *celé* a tudíž nevystačuje pro *záporné* a *zlomkovité* násobitele. Jako pro záporného celistvého násobitele bylo nám postarati se o novou definici násobení, tak bude nám učiniti pro násobitele zlomkovitého.

Jak tuto definici voliti jest, poznáme z těchto úvah:

Číslo b budiž dělitelno číslem c a tudíž podíl $\frac{b}{c}$ číslem celým. Potom jest, jak v odst. 5. § 26. bylo dokázáno,

$$a . \frac{b}{c} = \frac{ab}{c} = \frac{a}{c} . b,$$

t. j. násobení zlomkem nevlastním žádá, aby bylo násobeno jeho čítatelem a děleno jeho jmenovatelem.

Podržíme-li tento způsob násobiti zlomkem nevlastním pro všecky zlomky, obdržíme tuto definici:

1) *Násobiti zlomkem znamená násobiti jeho čítatelem a děliti jeho jmenovatelem.*

Klademe tudíž pro každý zlomek $\frac{b}{c}$

$$a . \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}.$$

Z rovnice $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} . b$ vychází na jevo, že oba výkony ve vytčené definici obsažené mohou býti provedeny v tom nebo v onom pořádku.

2) *Zlomek násobíme zlomkem, násobíme-li čítatele čítatelem a jmenovatele jmenovatelem.*

Tvrzení. $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Důkaz. Zlomkem $\frac{c}{d}$ násobiti znamená násobiti číslem c a děliti součin číslem d.

Násobením zlomku $\frac{a}{b}$ číslem c nabudeme součinu $\frac{ac}{b}$, který dělen jsa číslem d poskytne podíl $\frac{ac}{bd}$. Jesti tudíž

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

jak bylo tvrzeno.

3) *Součin činitelů zlomkovitých se nemění, násobíme-li je v libovolném pořádku po sobě.*

Tvrzení. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$.

Důkaz. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$,

$\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = \frac{ca}{db}$;

avšak $\frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db}$, tudíž jest i $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$,

což bylo dokázati.

Tím rozšířena jest věta o záměnnosti celistvých činitelů (§ 18., 5) i na činitele lomené.

4) Jest-li čítatel každého ze dvou zlomků roven jmenovateli zlomku druhého, pravíme, že jsou tyto zlomky na vzájem *převrácené*. Na př. $\frac{a}{b}$ a $\frac{b}{a}$ jsou dva zlomky (dvě hodnoty) na vzájem převrácené (reciproké).

Součin dvou hodnot na vzájem převrácených roven jest 1.

Neboť $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = 1$.

Která jest převrácená hodnota čísla a, zlomku $\frac{1}{b}$?

5) Rozšířivše pojem násobení i na zlomkovité násobitele, snadno dokážeme, že věty 1., 2., 4., 8., 9. a 10. v § 17. platí i pro zlomkovité činitele. Důkazy podej žák.

§ 48. Dělení zlomkem.

1) *Zlomkem dělíme, násobíme-li jeho hodnotou převrácenou.*

Tvrzení. $A : \frac{b}{c} = A \cdot \frac{c}{b}$.

Důkaz. Podíl žádaný musí býti takový, že násoben jsa dělitelem dá dělence a poněvadž $A \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c} = A$, jest $A \cdot \frac{c}{b}$ žádaným podílem.

Dle toho jest $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

$$= \frac{ad}{bc}.$$

Je-li čítatel i jmenovatel výsledku $\frac{ad}{bc}$ dělitelen součinem cd, t. j. je-li číslo a dělitelno číslem c a číslo b číslem d, lze výsledek psáti ve tvaru

$$\frac{ad}{bc} = \frac{ad : cd}{bc : cd}$$

$$= \frac{a : c}{b : d}.$$

Tudíž jest také $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d}$.

Které pravidlo jest v tomto vzorci obsaženo?

Dokažte, že 1. a 2. věta v § 26. platí i pro čísla lomená.

§ 49. O zlomcích složených.

1) Vyznačený podíl dvou zlomků $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$, napsaný ve tvaru

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}},$$

jmenujeme *zlomkem složeným.*

Podle toho jest $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)$.

2) *Zlomek složený rovná se zlomku jednoduchému, jehož čítatelem jest součin členů vnějších a jmenovatelem součin členů vnitřních daného zlomku složeného.*

Neboť $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Dokažte věty:

a) *Hodnota zlomku složeného se nemění, násobíme-li jeden jeho krajní a jeden vnitřní člen týmže číslem.*

b) *Hodnota zlomku složeného se nemění, dělíme-li jeden jeho krajní a jeden vnitřní člen týmže číslem* (kterým jsou oba tyto členy dělitelny.)

3) *Všecka pravidla, jež jsme poznali o početních výkonech zlomky jednoduchými, platí i o početních výkonech zlomky složenými.*

Tvrzení.

a) $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \pm \frac{\frac{a_1}{b_1}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \pm \frac{a_1}{b_1}}{\frac{c}{d}},$$

b) $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \cdot e = \frac{\frac{a}{b} \cdot e}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d} : e},$$

c) $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \cdot \frac{r}{s} = \frac{\frac{a}{b} \cdot r}{\frac{c}{d} \cdot s} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{r}{s}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d} : \frac{r}{s}},$$

d) $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \cdot \frac{\frac{r}{s}}{\frac{u}{v}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{r}{s}}{\frac{c}{d} \cdot \frac{u}{v}},$$

e) $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} : e = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d} \cdot e} = \frac{\frac{a}{b} : e}{\frac{c}{d}},$$

f) $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} : \frac{\frac{r}{s}}{\frac{u}{v}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{u}{v}}{\frac{c}{d} \cdot \frac{r}{s}} = \frac{\frac{a}{b} : \frac{r}{s}}{\frac{c}{d} : \frac{u}{v}}$$ atd.

Důkaz.

Výrazy vyskytující se na každé straně daných rovnic vyjádřeme zlomky jednoduchými a srovnejme potom obdržené výsledky. Tím nabudeme ve případě

a) $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \pm \frac{\frac{a_1}{b_1}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \pm \frac{a_1 d}{b_1 c} = \frac{adb_1 \pm a_1 bd}{bb_1 c} = \frac{d(ab_1 \pm a_1 b)}{bb_1 c} \qquad (1)$$

a podobně jest

$$\frac{\frac{a}{b} \pm \frac{a_1}{b_1}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{ab_1 \pm a_1 b}{bb_1}}{\frac{c}{d}} = \frac{d(ab_1 \pm a_1 b)}{bb_1 c}. \qquad (2)$$

Z výsledku 1. a 2. jest patrno, že

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \pm \frac{\frac{a_1}{b_1}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \pm \frac{a_1}{b_1}}{\frac{c}{d}},$$

jak bylo tvrzeno.

Týmž způsobem přesvědčíme se o správnosti ostatních rovnic.

4) Položíme-li v rovnicích *d*) a *f*) ... $\frac{r}{s} = \frac{u}{v}$, tudíž $\frac{\frac{r}{s}}{\frac{u}{v}} = 1$,

obdržíme z rovnice a) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{r}{s}}{\frac{c}{d} \cdot \frac{r}{s}}$

a z rovnice f) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} : \frac{r}{s}}{\frac{c}{d} : \frac{r}{s}}$, v nichž jest obsažena věta:

Hodnotu zlomku se nemění, násobíme-li nebo dělíme-li jeho čítatele i jmenovatele libovolným číslem, kteráž jest rozšířením vět obsažených v odstavci 8. § 40.

Přídavky připojené v závorkách k větám § 40., 8., § 45., 2., § 46., 2. a § 49., 3. (t. j. slova „kterým jest dělitelen“) lze na základě této věty vynechati.

Připojíce tuto větu k větě 3., můžeme tvrditi:

Všecka pravidla odvozená pro zlomky, jichž čítatelé a jmenovatelé jsou algebraická čísla celá, platí i pro zlomky, jichž čítateli a jmenovateli jsou čísla lomená.

Z té příčiny lze užiti všech pravidel, která jsme odvodili pro zlomky jednoduché, i pro zlomky, v jichž čítatelích a jmenovatelích jsou libovolné výrazy algebraické, jimiž vyznačeny jsou početní výkony dosud poznané. Neboť nabývají-li čísla obecná v oněch výrazech přicházející jakýchkoli hodnot zvláštních, nabývá celý výraz hodnoty vyjádřené algebraickým číslem celým anebo lomeným a podle věty předcházející lze zlomky tím povstalými tak počítati, jakoby v jich čítatelích a jmenovatelích byla čísla celá.

§ 50. O výrazech $\frac{a}{\infty}$, $\frac{a}{0}$, $\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$ a $\frac{\infty}{\infty}$.

Vzrůstá-li absolutní hodnota nějakého čísla tak, že se stává větší, než sebe větší číslo, pravíme, že vzrůstá do *nekonečna*, čili že nabývá hodnot *nekonečně velkých*.

Znak pro čísla nekonečně velká jest ∞.

2) *Zvětšujeme-li* absolutní hodnotu jmenovatele nějakého zlomku do nekonečna, ponechávajíce při tom jeho čítatele bez proměny, stává se absolutní hodnota zlomku menší než sebe menší číslo, z čehož jde, že

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0, \text{ kdež } a \text{ jest číslo konečné.}$$

3) *Zmenšujeme-li* abs. hodnotu jmenovatele zlomku $\frac{a}{b}$ postupně na př. na $\frac{b}{2}, \frac{b}{3}, \frac{b}{4}$ atd. ponechávajíce při tom čítatele a bez proměny, nabývá zlomek hodnot

$$\frac{2a}{b}, \frac{3a}{b}, \frac{4a}{b} \text{ atd.,}$$

t. j. jeho abs. hodnota stále vzrůstá. Zmenšíme-li abs. hodnotu jmenovatele tak, že se stává menší než sebe menší číslo, stává se hodnota zlomku větší než číslo sebe větší. Z toho soudíme, že jest

$$\frac{a}{0} = \pm\infty, \text{ jak i z rovnice } \frac{a}{\pm\infty} = 0 \text{ jest zřejmo.}$$

4) Z rovnice

$$\frac{a}{0} = \pm\infty,$$

která platí pro každé konečné a, vysvítá že $\infty \,.\, 0 = \pm a$, t. j. výraz $\infty \,.\, 0$ může nabyti libovolné hodnoty. Z té příčiny jmenujeme jej výrazem *neurčitým.*

O číslech nekonečně velkých jest patrno, že

$$\infty + x = \infty, \qquad \infty \,.\, y = \infty,$$

kdež x a y jsou libovolná kladná čísla.

Z první rovnice soudíme, že

$$\infty - \infty = \pm x \text{ a ze druhé, že } \frac{\infty}{\infty} = y, \text{ t. j.:}$$

Výrazy $\infty - \infty$ *a* $\frac{\infty}{\infty}$ *jsou též výrazy neurčité.*

K těmto výrazům druží se ještě výraz $\frac{0}{0}$, který též může býti roven každému číslu (§. 23., 11).

O zlomcích desetinných.

§ 51. Výměr zlomků desetinných a jich písemné označování.

Zlomek, jehož jmenovatelem jest mocnina čísla 10, *a jehož čítatelem jest číslo celé, jmenujeme zlomkem desetinným.*

Na rozdíl od zlomků desetinných jmenujeme zlomky, jichž jmenovatelé nejsou mocninami 10, *zlomky obecnými.*

Obecný tvar zlomku desetinného jest tudíž $\frac{A}{10^r}$.

Poněvadž číslo A lze psáti všeobecně ve tvaru

$$A = \ldots a_{r+2}10^{r+2} + a_{r+1}10^{r+1} + a_r 10^r + a_{r-1}10^{r-1} + a_{r-2}10^{r-2} + \ldots a_2 10^2 + a_1 10 + a_0,$$

jest $$\frac{A}{10^r} = \frac{a_{r+2}10^{r+2} + a_{r+1}10^{r+1} + a_r 10^r + a_{r-1}10^{r-1} + \ldots a_2 10^2 + a_1 10 + a_0}{10^r}$$

čili, vykonáme-li dělení na pravé straně vyznačené,

$$\frac{A}{10^r} = \ldots a_{r+2}10^2 + a_{r+1}10 + a_r + \frac{a_{r-1}}{10} + \frac{a_{r-2}}{10^2} + \ldots \frac{a_2}{10^{r-2}} + \frac{a_1}{10^{r-1}} + \frac{a_0}{10^r}.$$

V tomto případě předpokládali jsme, že jest $A > 10^r$. Kdyby bylo $A < 10^r$, tedy na př. $A = a_{r-1}10^{r-1} + a_{r-2}10^{r-2} + \ldots a_1 10 + a_0$, nabyli bychom pro $\frac{A}{10^r}$ výrazu $\frac{A}{10^r} = \frac{a_{r-1}}{10} + \frac{a_{r-2}}{10^2} + \ldots \frac{a_1}{10^{r-1}} + \frac{a_0}{10^r}$.

Při tom značí v obou případech

a_{r-1} počet desetin čili jednotek 1. řádu desetinného,
a_{r-2} „ setin „ „ 2. „ „ ,
a_{r-3} „ tisícin „ „ 3. „ „ , atd.

Jako místo $a_{r+2}10^2 + a_{r+1}10 + a_r$ píšeme kratšeji $a_{r+2}\ a_{r+1}\ a_r$, tak místo

$$a_{r+2}10^{r+2} + a_{r+1}10^{r+1} + a_r + \frac{a_{r-1}}{10} + \frac{a_{r-2}}{10^2} + \ldots \frac{a_1}{10^{r-1}} + \frac{a_0}{10^r}$$

píšeme $a_{r+2}\ a_{r+1}\ a_r \cdot a_{r-1}\ a_{r-2} \ldots a_1\ a_0$, oddělujíce číslice, které udávají počet jednotek, desítek, set atd., od číslic udávajících desetiny, setiny, tisíciny atd. desetinnou tečkou.

Jest patrno, že vypisování zlomků desetinných děje se na témž základě jako vypisování čísel celých: přikládáme totiž každé číslici dvojí hodnotu, hodnotu *tvaru* a hodnotu *místa*, jejíž závislosť na místě vyjádřena jest zákonem obsaženým ve větách *a*) a *b*) v § 28. Při tom jen to jest doložiti, že číslice stojící od desetinné tečky na levo značí jednotky nullového řádu.

2) Hodnota zlomku desetinného se nezmění, připíšeme-li k němu v pravo libovolný počet null.

Důkaz. Budiž $\frac{A}{10^n}$ zlomek desetinný o n desetinných místech, při čemž A jest číslo celé.

Dle § 40. nezmění se hodnota zlomku $\frac{A}{10^n}$, násobíme-li jeho čítatele i jmenovatele na př. číslem 10^r,

t. j. $$\frac{A}{10^n} = \frac{A \cdot 10^r}{10^{n+r}}.$$

Uvážíme-li, že na pravé straně této rovnice jest zlomek desetinný, který vznikne z daného zlomku, připíšeme-li k němu v pravo r null, jest tvrzení naše dokázáno.

Na základě této věty lze zlomky desetinné o nestejném počtu míst desetinných proměniti ve zlomky se stejným počtem těchto míst.

Na př. ze zlomků 0·25, 0·356, 7·1 obdržíme touto proměnou 0·250, 0·356, 7·100.

Každé číslo celé lze napsati ve tvaru zlomku desetinného s libovolným počtem desetinných míst, učiníme-li za ním v pravo desetinnou tečku a připíšeme potom libovolný počet null.

Neboť celé číslo A rovná se zlomku desetinnému $\frac{A\,10^n}{10^n}$.

§ 52. O počítání zlomky desetinnými.

1) *Zlomky desetinné o stejném počtu míst desetinných sčítáme, jako by to byla čísla celá, a v součtu vytvoříme tolik desetinných míst, co jich má každý sčítanec.*

Důkaz. Jsou-li $\frac{A}{10^n}, \frac{B}{10^n}, \frac{C}{10^n} \ldots$ daní sčítanci,

jest $$\frac{A}{10^n} + \frac{B}{10^n} + \frac{C}{10^n} + \ldots = \frac{A + B + C + \ldots}{10^n}.$$

Na př. $$18{\cdot}78 + 0{\cdot}56 + 9{\cdot}23 = 28{\cdot}57.$$

Nemají-li sčítanci stejný počet míst desetinných, uvedeme je nebo si je myslíme uvedeny dle věty 2. v § 51. na zlomky se stejným počtem míst desetinných a sečteme je potom jako prve.

Na př.

$$9{\cdot}876 + 0{\cdot}2 + 0{\cdot}37 = 9{\cdot}876 + 0{\cdot}200 + 0{\cdot}370 = 10{\cdot}446.$$

Obyčejně nepřipisujeme null, sčítajíce takto:

$$\begin{array}{r} 9{\cdot}876 \\ 0{\cdot}2 \\ 0{\cdot}37 \\ \hline 10{\cdot}446 \end{array}.$$

2) *Zlomky desetinné o stejném počtu míst desetinných odčítáme, jako by to byla čísla celá, a ve zbytku vytvoříme tolik míst desetinných, kolik jich má každý z daných zlomků.*

Důkaz jako prve.

Na př. $$27{\cdot}46 - 13{\cdot}23 = 14{\cdot}23.$$

Nemají-li menšenec a menšitel stejný počet míst desetinných, uvedeme je nebo si je myslíme uvedeny na zlomky se stejným počtem míst desetinných a odčítáme je potom jako prve.

Na př. $$95{\cdot}7 - 3{\cdot}568 = 95{\cdot}700 - 3{\cdot}568 = 92{\cdot}132.$$

Místo toho píšeme a počítáme kratšeji takto:

$$\begin{array}{r} 95{\cdot}7 \\ 3{\cdot}568 \\ \hline 92{\cdot}132 \end{array}.$$

3) *Zlomek desetinný násobíme mocninou čísla deset, na př.* 10^r, *pošineme-li jeho desetinnou tečku o* r *míst na pravo.*

Důkaz. Ve zlomku $\frac{A}{10^n}$, jejž násobiti jest 10^r, lze vždy předpokládati, že $n \gtrless r$. Neboť kdyby bylo $n < r$, připsali bychom k němu tolik null, až by měl více než r desetinných míst.

To předpokládajíce, obdržíme

$$\frac{A}{10^n} \cdot 10^r = \frac{A}{10^n : 10^r} = \frac{A}{10^{n-r}},$$

jak jsme tvrdili.

Je-li $n = r$, obdržíme zvláště $\frac{A}{10^r} \cdot 10^r = A$.

Na př. $3{\cdot}876 \times 10^2 = 3{\cdot}876 \times 100 = 387{\cdot}6,$

$49{\cdot}526 \times 1000 = 49526,$

$0{\cdot}41 \times 10000 = 4100.$

Zlomek desetinný násobíme číslem celým, nebo číslo celé zlomkem desetinným, nebo konečně zlomek desetinný zlomkem desetinným, násobíme-li je nejprve nehledíce na desetinné tečky a vytvoříme-li potom v součinu tolik míst desetinných, kolik jich mají oba činitelé.

Důkaz. Pro násobení zlomku desetinného $\frac{A}{10^n}$ celým číslem M obdržíme

$$\frac{A}{10^n} \cdot M = \frac{AM}{10^n},$$

pro násobení celého čísla M zlomkem desetinným $\frac{A}{10^n}$

jest $$M \cdot \frac{A}{10^n} = \frac{MA}{10^n}$$

a konečně násobením dvou zlomků desetinných $\frac{A}{10^n}$ a $\frac{B}{10^r}$

vznikne $$\frac{A}{10^n} \cdot \frac{B}{10^r} = \frac{A \cdot B}{10^{n+r}},$$

čímž jest správnosť vytčeného pravidla dokázána.

Na př.

1) $48{\cdot}52 \times 72$

33964

9704

$3493{\cdot}44$

2) $297 \times 0{\cdot}011$

$3{\cdot}267$

3) $48{\cdot}726 \times 1{\cdot}25$

$60{\cdot}90750$

4) *Zlomek desetinný dělíme mocninou čísla deset, na př.* 10^r, *pošineme-li jeho desetinnou tečku o* r *míst na levo.*

Důkaz. $$\frac{A}{10^n} : 10^r = \frac{A}{10^{n+r}}.$$

Zlomek desetinný dělíme číslem celým, dělíme-li jej nejprve nedbajíce desetinné tečky a vytvoříme-li potom v podílu tolik míst desetinných, co jich dělenec má.

Důkaz. $$\frac{A}{10^n} : B = \frac{A : B}{10^n}.$$

Na př.

1) $$856{\cdot}917 : 45 = \frac{856917}{10^3} : 45 = \frac{856917 : 45}{10^3}.$$

Krátce počítáme takto:

$$856{\cdot}917 : 45 = 19{\cdot}042.$$
$$406$$
$$191$$
$$117$$
$$27$$

Poněvadž k dělenci lze v pravo připsati libovolný počet null, můžeme dále děliti, i když byla všecka místa původního dělence vyčerpána. Každou připsanou a při dělení užitou nullou zvětší se ovšem počet desetinných míst podílu o jedno.

Někdy jest nám připsati nully hned při prvním částečném dělení.

Na př. při dělení $0{\cdot}027 : 365$ připsati jest hned k dělenci dvě nully. Připíšeme a užijeme-li potom při dalším dělení ještě 3 nully, jest nám vytvořiti v podílu 8 míst desetinných.

$$0{\cdot}02700 : 364 = 0{\cdot}00007417.$$
$$1520$$
$$640$$
$$2760$$
$$212$$

Často jest důležito nebo výhodno ustanoviti místní hodnotu nejvyšší číslice v podílu. Jest patrno, že *tato číslice značí při celistvém děliteli vždy jednotky téhož řádu, jako první částečný dělenec.* Neboť na př. při dělení $0{\cdot}08597 : 36$ jest prvním částečným dělencem 85 tisícin čili $\frac{85}{10^3}$ a dělíme-li jej 36, obdržíme více než 2, ale méně než 3 tisíciny. Tudíž první číslice v podílu značí tisíciny jako první částečný dělenec.

Podobně značí první číslice v podílu při děleních

a) $956{\cdot}47 : 35$ . . . . desítky, poněvadž 1. část. dělenec jest 95 desítek,

b) $0{\cdot}0047 : 285$ . . . set. tisícin, „ „ „ „ „ 470 set.tisícin.

a t. d.

Podle místní hodnoty první číslice v podílu poznáme polohu desetinné tečky v podílu. Ustanovivše tedy tuto místní hodnotu dělme nehledíce na desetinnou tečku dělence a položme potom v podílu desetinnou tečku na takové místo, aby první jeho číslice měla ustanovenou místní hodnotu.

Ve vytčených třech případech budou míti podíly tvar:

$$0{\cdot}08597 : 36 = 0{\cdot}00 \ldots . \qquad 956{\cdot}47 : 35 = \ldots \cdot \ldots$$
$$0.0047 : 285 = 0{\cdot}0000 \ldots,$$

kdež místo teček napsati jest číslice podílů, které vzniknou při děleních

$$8597_{000} \ldots : 36, \qquad 95647_{000} \ldots : 35, \qquad 47_{000} \ldots : 285.$$

Je-li děliti číslo celé nebo zlomek desetinný *zlomkem desetinným*, násobíme dělence i dělitele takovou mocninou čísla deset, aby se *dělitel* stal číslem celým. Tím jest tento případ převeden na předešlý nebo na dělení čísla celého číslem celým.

Na př. majíce děliti 58·176 : 3·25 násobme dělence i dělitele 10^2. I jest potom podíl (58·176 : 3·25) = podílu (5817·6 : 325) dle § 46. a 54.

Podobně jest podíl (48·1 : 5·673) = podílu (48100 : 5673) a t. d.

Při dělení zlomkem desetinným lze určiti místní hodnotu první číslice v podílu, aniž byl dříve dělitel v celé číslo proměněn.

Na př při dělení 58·176 : 3·25 značí první číslice v podílu desítky, neboť první částečný dělenec je $\frac{581}{10}$ a dělitel $\frac{325}{10^2}$ a dělice je obdržíme více než jednu, ale méně než dvě desítky.

§ 53. Proměna zlomku obecného v desetinný.

O čítateli a jmenovateli každého zlomku obecného $\frac{a}{b}$ lze vždy předpokládati 1), že jsou to čísla celá a 2) nesoudělná.

Neboť kdyby a a b nebyla čísla celá, násobili bychom čítatele i jmenovatele zlomku $\frac{a}{b}$ takovým číslem, abychom v čítateli i jmenovateli nabyli čísel celých, a kdyby a a b byla čísla soudělná, zkrátili bychom úplně zlomek tento, načež by se jeho čítatel a jmenovatel staly čísly nesoudělnými.

To předpokládajíce násobme čítatele i jmenovatele zlomku $\frac{a}{b}$, jejž ve zlomek desetinný proměniti jest, nějakou mocninou čísla 10, na př 10^r Tím nabudeme

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 10^r}{b \cdot 10^r}$$

čili $$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a \cdot 10^r}{b}}{10^r}.$$

Označíme-li $\frac{a \cdot 10^r}{b}$ písmenem A, jest $\frac{a}{b} = \frac{A}{10^r}$, čímž jest žádaná proměna vykonána, an zlomek $\frac{A}{10^r}$ jest zlomkem desetinným o r desetinných místech.

Jak patrno, žádá tato proměna, aby bylo vypočteno číslo A, které jest rovno $\frac{a \cdot 10^r}{b}$, t. j. aby bylo vykonáno dělení $a \cdot 10^r : b$.

Aby vyšel při tomto dělení podíl vyjádřený konečným počtem číslic, musí býti číslo $a10^r$ dělitelno b.

Avšak poněvadž čísla a a b jsou nesoudělna, musil by býti v tomto případě činitel 10^r čili $2^r . 5^r$ dělitelen b, což žádá, aby jmenovatel b byl složen jen z prvočinitelů 2 a 5. (§ 32., 7.)

Má-li jmenovatel tuto vlastnosť, obdržíme za podíl číslo A o určitém konečném počtu míst a zlomek $\frac{a}{b}$ rovná se tudíž v tomto případě zlomku desetinnému, který má konečný počet míst desetinných.

Vyskytují-li se ve jmenovateli b (po úplném zkrácení zlomku) jiní prvočinitelé než 2 a 5, nemůže býti $a . 10^r$ ani pro sebe větší r dělitelno b a podíl $a10^r : b$ nemůže tudíž býti vypsán konečným počtem číslic. Dělení $a10^r : b$ lze v tomto případě vykonávati bez konce a zlomek desetinný $\frac{A}{10^r}$ má nekonečný počet míst desetinných.

O těchto místech lze dokázati:

a) *Jistá soustava číslic na místech desetinných opakuje se stále od určitého místa.*

b) *Číslic opakujících se jest méně než má jmenovatel* **b** *jednotek.*

Důkaz. Při dělení číslem b může se vyskytnouti jen $(b — 1)$ různých zbytků. Z toho jde, že při dělení $a10^r : b$, které konce nemá, musí se zbytky opakovati.

Dělíce $a10^r$ číslem b, připisujeme od jistého místa ke zbytkům stále jen nully. Objeví-li se tudíž jistý zbytek z po druhé, objeví se i v podílu k němu příslušné číslo p po druhé, a všecky zbytky, které se vyskytly po prvé po zbytku z, objeví se po něm v témž pořádku i po druhé, po třetí atd.

Ale z toho pochází, že táž řada číslic, která následovala v podílu po číslici p po prvé, objeví se za ní v témž pořádku i po druhé, po třetí atd.

Že počet číslic, které se v podílu stále opakují, musí býti menší než má jmenovatel b jednotek, vysvítá z toho, že různých zbytků, které se při dělení číslem b vyskytnou, může býti nejvýše $(b—1)$.

Zlomek desetinný, v němž se jistá soustava míst desetinných stále opakuje, jmenujeme desetinným zlomkem občíselným čili periodickým a onu soustavu číslic stále se opakujících nazýváme občíslím anebo periodou.

Periodičnosť zlomku desetinného může začínati se *hned za desetinnou tečkou* nebo až *po určitém počtu desetinných míst.* V prvním případě jmenujeme zlomek ten *ryze*, ve druhém *neryze periodickým.*

Na př. zlomek $0{\cdot}583583583\ldots$, který kratšeji píšeme $0{\cdot}5\dot{8}\dot{3}$, jest zlomkem ryze periodickým, kdežto zlomek $0{\cdot}423\dot{8}7\dot{6}$ jest *neryze* periodickým.

Zlomek ryze periodický, jehož perioda jest r místna, má tvar

$$\frac{\alpha_r}{10^r} + \frac{\alpha_r}{10^{2r}} + \frac{\alpha_r}{10^{3r}} + \ldots,$$

při čemž α_r značí číslo celé skládající se z číslic jedné periody.

Zlomek neryze periodický, jehož perioda jest r místná a před jehož periodou jest s míst, má tvar

$$\frac{\beta_s}{10^s} + \frac{\alpha_r}{10^{s+r}} + \frac{\alpha_r}{10^{s+2r}} + \frac{\alpha_r}{10^{s+3r}} + \ldots,$$

kdež α_r má týž jako prve význam a β_s značí číslo celé, které jest složeno z číslic sahajících až k první periodě.

Výsledky v tomto § dosažené lze takto vysloviti:

Zlomek obecný lze proměniti ve zlomek desetinný konečného tvaru, skládá-li se jeho jmenovatel jen z prvočinitelů 2 a 5.

Vyskytují-li se však po úplném zkrácení zlomku v jeho jmenovateli i jiní prvočinitelé než 2 a 5, rovná se tento zlomek desetinnému zlomku periodickému.

§ 54. Proměna zlomku desetinného v obecný.

1) *Je-li zlomek desetinný, jejž proměniti jest ve zlomek obecný, tvaru konečného, pišme tento zlomek ve formě obvyklé pro zlomky obecné a proměna jest tím vykonána.*

Na př. $0{\cdot}7 = \frac{7}{10}$, $0{\cdot}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $0{\cdot}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ atd.

2) Je-li proměniti *periodický* zlomek desetinný Z v obecný, rozeznávejme dva případy:

a) daný zlomek budiž *ryze periodický*,

b) „ „ „ *neryze* „ .

Případ a) V tomto případě jest

$$Z = \frac{\alpha_r}{10^r} + \frac{\alpha_r}{10^{2r}} + \frac{\alpha_r}{10^{3r}} + \ldots\ldots,$$

tudíž $Z.10^r = \alpha_r + \frac{\alpha_r}{10^r} + \frac{\alpha_r}{10^{2r}} + \frac{\alpha_r}{10^{3r}} + \ldots\ldots$.

Odečtouce první rovnici od druhé, nabudeme

$$Z(10^r - 1) = \alpha_r, \text{ tudíž } Z = \frac{\alpha_r}{10^r - 1}.$$

Uvážíme-li, že $10^r - 1$ jest číslo psané r devítkami, máme pravidlo:

Zlomek ryze periodický rovná se zlomku obecnému, jehož čítatelem jest celá jedna perioda pokládaná za číslo celé a jehož jmenovatelem jest číslo psané tolika devítkami, kolik má perioda míst.

Případ b) Zlomek periodický Z má tu tvar

$$\frac{\beta_s}{10^s} + \frac{\alpha_r}{10^{s+r}} + \frac{\alpha_r}{10^{s+2r}} + \frac{\alpha_r}{10^{s+3r}} + \ldots$$

Vytkneme-li ze všech členů tohoto výrazu činitele $\frac{1}{10^s}$, nabude tvaru

$$\frac{1}{10^s}\left(\beta_s + \frac{\alpha_r}{10^r} + \frac{\alpha_r}{10^{2r}} + \ldots\right).$$

Avšak $\frac{\alpha_r}{10^r} + \frac{\alpha_r}{10^{2r}} + \ldots = \frac{\alpha_r}{10^r - 1}$,

tudíž jest $Z = \frac{1}{10^s}\left(\beta_s + \frac{\alpha_r}{10^r - 1}\right)$ čili

$$Z = \frac{\beta_s 10^r + \alpha_r - \beta_s}{(10^r - 1)\, 10^s}.$$

Uvážíme-li, že $\beta_s 10^r + \alpha_r$ značí číslo celé psané číslicemi, které sahají až za první periodu, jest z poslední rovnice patrna věta:

Zlomek desetinný neryze periodický rovná se zlomku obecnému, jehož čítatelem jest číslo složené z číslic sahajících až za první periodu, zmenšené o číslo před první periodou, a jehož jmenovatelem jest číslo psané tolika devítkami, kolik má perioda míst, s tolika připojenými nullami, kolik jest míst desetinných před první periodou.

Poznámka. Ze vzorců odvozených pro proměnu periodického zlomku desetinného v obecný ve případech a) a b) jest patrno, že zlomek ryze periodický vede vždy ke zlomku obecnému, jehož jmenovatel jest nesoudělný s číslem 10, kdežto zlomek neryze periodický roven jest vždy zlomku obecnému, jehož jmenovatel jest s 10^{ti} soudělný. Toto druhé tvrzení jest patrno z toho, že čítatel $\beta_s 10^r + \alpha_r - \beta_s$ zlomku obecného, jemuž se zlomek neryze periodický rovná, nemůže býti dělitelen 10^s, poněvadž by to žádalo, aby číslo $\beta_s 10^r + \alpha_r - \beta_s$ mělo na konci s null, což se státi nemůže, leč by se $\beta_s 10^r + \alpha_r$ shodovalo s číslem β_s v s posledních místech. Avšak potom by se začínala perioda hned za tečkou desetinnou a daný zlomek nebyl by neryze periodickým.

Z toho soudíme dále, že *zlomek obecný, jehož jmenovatel po úplném zkrácení zlomku jest s 10^{ti} nesoudělný, rovná se zlomku desetinnému ryze periodickému, kdežto zlomek obecný, který po úplném zkrácení má jmenovatele s 10 soudělného, rovná se zlomku dosetinnému neryze periodickému.*

Část pátá.

O veličinách. O číslech neúplných. O zkráceném počítání čísly soustavy desítkové.

---

§ 55. O veličinách a jich měření.

1) *Každou* částí prostoru jest zase prostor, času zase čas, síly síla, ceny cena atd. Prostor, čas, sílu, cenu atd. jmenujeme *veličinami.*

Dvě veličiny jsou stejnorodé, shoduje-li se jedna z nich anebo nějaká její část úplně s veličinou druhou. Na př. délka a délka, jakož i plocha a plocha, váha a váha jsou veličiny stejnorodé.

Z definice veličin stejnorodých vychází na jevo věta:

Každá veličina jest stejnorodá s každou svou částí.

Veličiny, které nejsou stejnorodé, jsou *nestejnorodé*, jako na př. čas a prostor, cena a délka, délka a plocha a t. d.

2) Abychom určili velikosť veličiny A, *měříme ji*, t. j. zkoumáme, kolikrát jest v ní obsažena veličina M, jejíž velikosť známe. Poněvadž veličina M jeví se při tom jakožto část veličiny A, jest nutno, aby byla s veličinou A stejnorodá. Veličinu M jmenujeme *jednotkou měření* čili *měrou*.

Udání o velikosti veličiny A složeno jest potom ze dvou částí, totiž

b) z udání *míry*, jíž jest na př. metr, kilogramm, hodina atd.

a) z udání, kolikrát jest míra ve měřené veličině obsažena, t. j. *z čísla* (viz úvod).

Číslo, které udává, kolikrát jest míra (M) ve měřené veličině (A) obsažena, jmenujeme *číslem poměrným veličiny A pro míru M*. Je-li a tímto číslem poměrným, jest $A = Ma$.

§ 56. O číslech neúplných.

1) Až dosud předpokládali jsme, že čísla, jimiž počítáme, udána jsou *přesně* čili *úplně*. Avšak tomu není vždy tak. *Čísla poměrná* měřením nabytá jsou obyčejně jen *přibližná*. Čísla přibližná jmenujeme jinak čísly *neúplnými*.

Rozdíl mezi číslem *úplným* a jeho hodnotou *přibližnou* jest *absolutní chybou*, která jest s přibližnou hodnotou spojena. Je-li na př. $(a + \alpha)$ číslo úplné a a jeho hodnota přibližná, jest α chybou absolutní. Tato chyba jest *kladná*, *záporná*, je-li hodnota přibližná *menší* *větší* než hodnota úplná.

Obyčejně lze vyšetřiti jen *mez m*, kterou nepřestoupí absolutní hodnota chyby α s přibližným číslem a spojené. Potom jest číslo úplné obsaženo mezi čísly $(a - m)$ a $(a + m)$, z nichž první jmenujeme *dolní* a druhé *horní mezí* čísla úplného.

Druhem čísel neúplných jsou čísla *zkrácená*. Je-li na př. vypočísti obvod kružnice s určitou přesností, dostačí k tomu určitý počet míst Ludolfova čísla 3·141592653589793...

Dostačí-li na př. k dosažení žádané přesnosti z čísla Ludolfova

dvě místa, klademe za ně 3·1, a chyba $= 0{\cdot}041 \ldots\ldots$ tedy $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}$

tři „ „ „ „ 3·14, „ „ „ $0{\cdot}001 \ldots\ldots$ „ $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^2}$

čtyři „ „ „ „ 3·142, „ „ „ $0{\cdot}0004 \ldots\ldots$ „ $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^3}$

pět míst „ „ „ 3·1416, „ „ „ $0.000007 \ldots$ „ $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4}$

atd.

Podržujíce jedno, dvě, tři... nejvyšší místa určitého čísla a vynechávajíce místa ostatní, pravíme, že číslo na jedno, dvě, tři... místa *zkracujeme*. Z vytčeného příkladu jest patrno, že, zkracujíce číslo na n míst, ponecháváme

místo $n^{té}$ *nezměněno* nebo je *zvětšujeme o* 1 podle toho, činí-li číslo složené z míst vynechaných méně nebo více než *polovinu nejnižší jednotky čísla zkráceného.* Bylo-li by číslo vynechané rovno polovině oné jednotky, lze místo $n^{té}$ buď zvětšiti o 1, nebo je ponechati bez proměny.

Zkracujíce čísla tímto způsobem docílíme, že absolutní chyba s číslem zkráceným spojená jest buď *menší než polovina jednotky nejnižšího řádu čísla zkráceného,* nebo že jest nejvýše této polovině rovna.

2) Podle chyby *absolutní* nelze souditi na přesnosť udání, neboť učiníme-li na př. naměříce 5 metrů chybu rovnou $1mm$ a naměříce $5cm$ též chybu rovnou $1mm$, jest první měření *přesnější* druhého přes to, že absolutní chyby v obou případech jsou stejné. *Měrou přesnosti* udání jest *chyba relativní*, rovnající se podílu, jehož nabudeme dělíce absolutní chybu příslušnou k ní hodnotou přibližnou. Tak na př. v prvním z vytčených případů jest relativní chyba rovna $\frac{1}{5000}$, ve druhém $\frac{1}{50}$: první měření jest tudíž 100kráte přesnější druhého.

Je-li všeobecně $(a + \alpha)$ číslo úplné a a jeho hodnota přibližná, jest relativní chyba s udáním a spojená rovna $\frac{\alpha}{a}$.

3) Počítáme-li čísly neúplnými, vcházejí chyby s nimi spojené i do výsledků, k nimž dospějeme. A tu jest ze dvou příčin důležito ustanoviti mez, kterou chyba ve výsledku nepřestoupí,

a) *abychom výsledku nepřikládali přesnosti, která mu nenáleží,*

b) *abychom si vypočítávání nespolehlivých míst výsledku ušetřili.*

§ 57. Jak vypočteme mez chyby při čtyřech základních výkonech početních čísly neúplnými.

1) *Absolutní chyba v součtu rovna jest součtu absolutních chyb ve sčítancích.*

Důkaz. Sčítáme-li místo úplných čísel $(a + \alpha)$, $(b + \beta)$, $(c + \gamma) \ldots$
jich přibližné hodnoty a, b, $c \ldots\ldots$
nabudeme místo úplného součtu $(a + \alpha) + (b + \beta) + (c + \gamma) \ldots$
součtu přibližného $a + b + c \ldots\ldots$

Jest tudíž chyba v součtu

$$= (a + \alpha) + (b + \beta) + (c + \gamma) + \ldots - (a + b + c + \ldots)$$
$$= \alpha + \beta + \gamma + \ldots,$$ jak jsme tvrdili.

Je-li na př. chyba spojená s každým z n sčítanců $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^r}$,

jest $\alpha + \beta + \gamma + \ldots < n \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^r}$, t. j. chyba v součtu $< n \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{10^r}$.

Z toho jde: *Absolutní chyba v součtu čísel zkrácených, která mají na nejnižším místě jednotky téhož řádu, jest menší než tolik polovin jednotky nejnižšího řádu, kolik jest sčítanců.*

Na př. v součtu $(3{\cdot}25\ldots + 4{\cdot}82\ldots + 0{\cdot}09\ldots + 19\,47\ldots) = 27{\cdot}63$ jest $ch < 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^2}$,

t. j. $ch < 0{\cdot}02$.

Jest tudíž horní mez součtu $27{\cdot}63 + 0{\cdot}02 = 27{\cdot}65$,

dolní „ „ $27{\cdot}63 - 0{\cdot}02 = 27{\cdot}61$,

místa spolehlivá „ $27{\cdot}6$, při čemž jest $ch < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}$.

2) *Absolutní chyba v rozdílu dvou čísel neúplných rovna jest rozdílu absolutních chyb v menšenci a menšiteli.*

Důkaz. Užijeme-li téhož označení jako v 1., jest chyba rozdílu

$$= (a + \alpha) - (b + \beta) - (a - b)$$
$$= \alpha - \beta,$$

jak jsme tvrdili.

Z toho jde, že chyba rozdílu může býti největší, jsou-li chyby α a β protivně označeny, poněvadž tu $(\alpha - \beta)$ přejde v součet.

Jsou-li na př. chyby spojené s menšencem i menšitelem menší než $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^r}$, jest vždy $\alpha - \beta < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^r} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^r}$, t. j. chyba rozdílu jest $< \frac{1}{10^r}$.

V tom obsažena jest věta:

Chyba rozdílu dvou čísel zkrácených, která mají na nejnižším místě jednotky téhož řádu, jest menší než jednotka tohoto řádu.

Na př. s rozdílem $(7{\cdot}125 - 0{\cdot}837) = 6{\cdot}288\ldots$ spojena jest chyba $< 0{\cdot}001$.

Jest tudíž horní mez rozdílu $= 6{\cdot}289$,

dolní „ „ $= 6{\cdot}287$

a místa spolehlivá jsou $6{\cdot}28$. Klademe-li za rozdíl $6{\cdot}29$, učiníme chybu menší než $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^2}$.

3) *Absolutní chyba v součinu dvou čísel neúplných rovná se přibližně součtu dvou součinů, jichž nabudeme násobíce chybu každého činitele činitelem druhým.*

Důkaz. Násobíme-li místo čísel úplných $(a + \alpha)$ a $(b + \beta)$ čísla neuplná a a b, obdržíme místo součinu $(a + \alpha)(b + \beta)$ součin ab. Jest tudíž chyba součinu rovna $(a + \alpha)(b + \beta) - ab$ čili $a\beta + b\alpha + \alpha\beta$. Jsou-li chyby α a β proti a a b malé, jest součin $\alpha\beta$ malý proti součtu $a\beta + b\alpha$ a lze jej vynechati. Potom rovná se chyba součinu přibližně $a\beta + b\alpha$, jakož bylo tvrzeno.

Pro $\alpha = 0$ nebo pro $\beta = 0$ obdržíme jakožto chybu součinu $a\beta$ nebo $b\alpha$.

Je-li na př.

$$\alpha < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^r} \text{ a } \beta < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^s}, \text{ jest } a\beta + b\alpha < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^s} a + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^r} \cdot b$$

$$\text{a tudíž } ch < \frac{1}{2}\left(\frac{a}{10^s} + \frac{b}{10^r}\right).$$

Nerovnosť tato učí nás znáti mez chyby při násobení čísel *zkrácených.*

Pro $r = s$ obdržíme z této nerovnosti, že $ch < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^r}(a + b)$.

Na př. v součinu čísel zkrácených 3·1416 ... a 824·6 ... jest $ch < \frac{1}{2}\left(\frac{3{\cdot}1416}{10} + \frac{824{\cdot}6}{10^4}\right)$ čili $ch < \frac{1}{2}\frac{39662}{10^4}$, $ch < \frac{19831}{10^4}$, tedy přibližně $ch < 0{\cdot}2$. Poněvadž jest

3.1416 ... × 824·6 ... = 2590·56336 .., jest horní mez součinu = 2590·76336,
dolní „ „ = 2590·36336
a místa spolehlivá jsou 2590, při čemž jest $ch < 1$.

Sluší podotknouti, že táž mez chyby není přestoupena, klademe-li za součin 2591.

4) Užijeme-li téhož označení jako ve případech předešlých, obdržíme, že chyba podílu dvou čísel neúplných jest $\frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b}$ čili $\frac{b\alpha - a\beta}{b(b+\beta)}$.

Je-li β proti b malé, liší se součin $b(b+\beta)$ málo od součinu b^2 a chyba podílu dvou čísel neúplných rovná se tudíž přibližně $\frac{b\alpha - a\beta}{b^2}$.

Je-li jen dělencem číslo neúplné, jest $\beta = 0$ a chyba podílu $= \frac{\alpha}{b}$,

„ „ dělitelem „ „ „ $\alpha = 0$ „ „ „ $-\frac{a\beta}{b^2}$.

Z výrazu $\frac{b\alpha - a\beta}{b^2}$ pro chybu podílu jest patrno, že chyba tato může nabyti hodnoty největší, jsou-li chyby α a β protivně označeny, poněvadž potom rozdíl $(b\alpha - a\beta)$ přejde v součet.

Je-li na př. $\alpha < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^r}$ a $\beta < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^s}$,

jest $b\alpha - a\beta < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^r} b + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^s} a$

a tudíž $\frac{b\alpha - a\beta}{b^2} < \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{10^s} + \frac{b}{10^r}\right)}{b^2}$ čili chyba podílu jest $< \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{10^s} + \frac{b}{10^r}\right)}{b^2}$.

Z toho výsledku a z odst. 3. jest patrno:

Chyba v podílu dvou čísel zkrácených jest menší než podíl, jehož nabudeme dělíce mez chyby, vzniklé při násobení týchž dvou čísel, dvojmocí dělitele.

Z výsledku v odst. 1.—4. nabytých jest zřejmo, že *relativní chyba*

v součtu čísel neúplných $= \frac{\alpha + \beta + \gamma + \dots}{a + b + c + \dots}$,

v rozdílu dvou čísel neúplných $= \frac{\alpha - \beta}{a - b}$,

v součinu dvou „ „ $= \frac{b\alpha + a\beta}{ab} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}$,

v podílu „ „ „ $= \frac{b\alpha - a\beta}{b^2} : \frac{a}{b} = \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{b}$.

Uvážíme-li, že $\frac{\alpha}{a}$ a $\frac{\beta}{b}$ jsou relativní chyby čísel a a b, jsou v posledních dvou rovnicích obsaženy věty:

Relativní chyba v $\begin{matrix}\text{součinu}\\ \text{podílu}\end{matrix}$ *dvou čísel neúplných rovná se* $\begin{matrix}\text{součtu}\\ \text{rozdílu}\end{matrix}$ *relativních chyb v těchto číslech.*

§ 58. O zkráceném počítání čísly soustavy desítkové.

Vysvětlení.

Ve mnohých případech dostačí vypočísti jen přibližnou hodnotu výsledku. Na př. při násobení

$$48{\cdot}57 \text{ zl.} \times 8{\cdot}9654$$

úplný součin má 6 míst desetinných. Ale poněvadž udává „zlaté“, dostačí v životě praktickém, vypočten-li jest správně na dvě místa desetinná. Vypočítávání všech šesti míst desetinných bylo by tudíž zbytečno.

Podobně by bylo zbytečno určovati při počítání čísly neúplnými místa výsledku, o nichž z předu víme, že správna nejsou. Tak na př. nebudeme vypočítávati všecka místa součinu čísel zkrácených

$$3{\cdot}1416\ldots \times 824{\cdot}6\ldots,$$

poněvadž již desetiny součinu jsou nespolehlivé.

Ve všech případech, v nichž jde o přibližné vypočtení výsledku s přesností napřed udanou, budeme počítati *zkráceně.*

Pravíme-li, že výsledek jest vypočten *správně* na jednotky řádu r^{ho} (desítkového nebo desetinného), značí to, že chyba s tímto výsledkem spojená jest *menší* oné jednotky.

I. Zkrácené sčítání.

1) *Je-li sčítati nejvýše pět sčítanců správně na jednotky určitého řádu, začneme sčítati jednotky řádu o jeden stupeň nižšího a zkrátíme potom součet o místo nejnižší.*

Na př. je-li vypočísti součet

$$\begin{array}{r} 854{\cdot}62625 \\ 69{\cdot}417429 \\ 56{\cdot}8413 \\ 291{\cdot}73486 \\ 2.41875 \\ \hline 1275{\cdot}036 \end{array}$$

na setiny, začneme sčítati tisíciny. Součet 1275·04 určen jest na setiny správně.

Důkaz. Předpokládejme, že součet n sčítanců má býti vypočten na jednotky r^{ho} řádu desetinného.

Sčítajíce vytčeným způsobem, učiníme chybu, která jest složena ze dvou částí, a to

a) z chyby tím vzešlé, že jsme všecka místa sčítanců, počínajíce jednotkami řádu $(r+2)^{ho}$, vynechali a

b) z chyby spojené s opravou při zkracování výsledku.

Při chybě *a*) vynecháno jest v každém sčítanci méně než $\frac{1}{10^{r+1}}$, tudíž ve všech sčítancích méně než $\frac{n}{10^{r+1}}$. Chyba v *a*) vytčená jest tudíž $< \frac{n}{10^{r+1}}$. Poněvadž dále chyba s opravou spojená jest, jak nám již známo, $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^r}$, jest celá chyba v součtu $< \frac{n}{10^{r+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^r}$ čili $< \frac{1}{10^r}\left(\frac{n}{10} + \frac{1}{2}\right)$.

Je-li tudíž n nejvýše rovno 5, jest tato chyba vždy $< \frac{1}{10^r}$, jak jsme tvrdili.

2) *Je-li sčítati více než pět, ale nejvýše 50 sčítanců správně na jednotky určitého řádu, začneme sčítati jednotky řádu o dva stupně nižšího a zkrátíme potom součet o dvě místa nejnižší.*

Důkaz. Předpokládejme, že součet n sčítanců má býti vypočten na jednotky r^{ho} řádu desetinného. Jako prve, skládá se i v tomto případě chyba součtu ze dvou částí. Chyba *a*) jest nyní $< \frac{n}{10^{r+2}}$ a chyba *b*) jako prve $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^r}$.

Úplná chyba jest tudíž $< \frac{n}{10^{r+2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^r}$ čili $< \frac{n}{10^r}\left(\frac{n}{10^2} + \frac{1}{2}\right)$.

Pro $n \leqq 50$ jest tato chyba $< \frac{1}{10^r}$, jak jsme tvrdili.

Jak by bylo vypočísti zkráceně součet více než 50 ale nejvýše 500 sčítanců přesně na jednotky určitého řádu?

II. Zkrácené odčítání.

Je-li vypočísti zkráceně rozdíl dvou čísel správně na jednotky určitého řádu, začneme odčítati u jednotek tohoto řádu, nedbajíce jednotek řádů nižších.

Je-li na př. rozdíl 87·4165 — 25·3792 vypočísti na setiny, začněme odčítati až u setin.

$$\begin{array}{r} 87{\cdot}4165 \\ 25{\cdot}3792 \\ \hline 62{\cdot}04 \end{array}$$

Rozdíl 62·04 jest až na setiny správný.

Důkaz. Předpokládejme, že rozdíl vypočísti jest na jednotky r^{ho} řádu desetinného. Odčítajíce vytčeným způsobem, vynecháme v menšenci i v menšiteli čísla menší než $\frac{1}{10^r}$. Poněvadž obě tyto chyby vynecháním vzniklé jsou souhlasné, jest i chyba v rozdílu menší než $\frac{1}{10^r}$, jak jsme tvrdili. (§ 57., 2.)

Ve kterém případě byl by rozdíl zkráceným odčítáním vzešlý úplně přesný?

III. Zkrácené násobení.

Jde-li o to, aby na př. součin

$$43{\cdot}789647 \times 786{\cdot}5943912$$

čili $\left(4.10 + 3 + \frac{7}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \frac{4}{10^5} + \frac{7}{10^6}\right)\left(7.10^2 + 8{,}10 + 6 + \right.$
$\left. + \frac{5}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{1}{10^6} + \frac{2}{10^7}\right)$

vypočten byl přibližně tak, že na jeho nejnižším místě budou setiny, suďme takto:

Poněvadž násobením mají býti vyvozeny jen setiny a jednotky řádů vyšších, budeme násobiti jen ty členy násobence těmi členy násobitele, jichž součinem jsou setiny nebo jednotky vyšší.

Z toho jde, že budeme násobiti

členem 7×10^2 násobit. jen členy $4.10 + 3 + \frac{7}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{6}{10^4}$ násobence,

„ 8×10 „ „ „ $4.10 + 3 + \frac{7}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{9}{10^3}$ „

$\frac{9}{10^2}$ „ „ „ $4.10 + 3$ „

„ $\frac{4}{10^3}$ „ „ člen 4.10 „

Abychom si pamatovali, že člen

$\frac{6}{10^4}$ jest nejnižší člen násobence, který začn. násobiti čl. 7×10^2 násobitele,

$\frac{9}{10^3}$ „ „ „ „ „ „ „ „ 8×10 „ ,

3 „ „ „ „ „ „ „ „ $\frac{9}{10^2}$ „ ,

4.10 „ „ „ „ „ „ „ „ $\frac{4}{10^3}$ „ ,

napišme tyto k sobě příslušné členy násobence a násobitele pod sebe a povšimněme si, že se tím číslice násobitele vyskytnou pod číslicemi násobence v pořádku převráceném vzhledem k jich pořádku v násobiteli a dále, že jednotky null. řádu násobitele jsou napsány pod setinami násobence, t. j. pod jednotkami, jež v součinu na nejnižším místě obdržeti chceme.

43·789647
2193 49 5687

Podle toho, co svrchu bylo řečeno, bylo by nyní každým členem násobitele násobiti nejprve nad ním stojící člen násobence a potom všecky členy vyšší.

Sečtením částečných součinů tím nabytých vznikl by součin, v němž na nejnižším místě jsou setiny. Avšak v tomto součinu scházel by jistý počet setin, jejž přibližně takto určiti lze:

Násobíme-li členem 7×10^2 násobitele člen $\frac{4}{10^5}$ násobence, obdržíme součin $\frac{28}{10^3}$ čili skoro 3 setiny, které byly vynechány.

Podobně byly vynechány součiny:

$$\frac{6}{10^4} \times 8.10, \text{ t. j. } \frac{48}{10^3} \text{ čili přibližně 5 setin,}$$

$$\frac{9}{10^3} \times 6, \quad \text{„} \quad \frac{54}{10^3} \text{ „ „ 5 „ ,}$$

$$\vdots$$

$$3 \times \frac{4}{10^3}, \quad \text{„} \quad \frac{12}{10^3} \text{ „ „ 1 setina,}$$

$$4.10 \times \frac{3}{10^4}, \quad \text{„} \quad \frac{12}{10^3} \text{ „ „ 1 „ .}$$

Aby vyvozený součin byl správnější, připočítáme tyto setiny jakožto *opravy* k příslušným částečným součinům.

Z toho vychází na jevo toto pravidlo:

Jde-li o to, aby byl součin vypočten tak, že na jeho nejnižším místě jsou jednotky určitého řádu, napíšeme číslice násobitele v obráceném pořádku vzaté pod číslice násobence a to tak, že jednotky nullového řádu násobitele jsou pod jednotkami toho řádu násobence, jež v součinu na nejnižším místě obdržeti chceme.

Každým členem x *násobitele násobíme nejprv o jedno místo v pravo stojící člen násobence a vezmeme z tohoto součinu opravu. Tuto opravu připočteme k součinu členu* x *a členu násobence nad ním stojícího, načež vyšší členy násobence násobíme obyčejným způsobem. Všecky takto vzniklé částečné součiny sečteme a vytvoříme v součtu tolik míst desetinných anebo připíšeme tolik null, aby na nejnižším místě byly jednotky žádaného řádu.*

Ocenění chyby. Chyba v součinu, jehož nabudeme zkráceným násobením, skládá se ze dvou částí:

a) Z chyby ch_1 spojené s opravami a

b) z chyby ch_2 tím vzešlé, že nenásobíme každý člen násobence každým členem násobitele.

a) Tvoříce vytčeným způsobem opravy, učiníme v našem případě při každé opravě chybu menší než $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^2}$ a poněvadž sedmi oprav bylo užito, jest $ch_1 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^2} \cdot 7.$

Bylo-li ve všeobecném případě násobeno zkráceně tak, že na nejnižším místě součinu jsou jednotky řádu r^{ho} desetinného, a bylo-li vyvozeno celkem n částečných součinů,

$$\text{jest } ch_1 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^r} \cdot n.$$

O tom lze se přesvědčiti týmiž úvahami, jako ve vytčeném případě zvláštním.

Tato chyba může býti kladná nebo záporná.

b) V našem příkladě členem

$7 . 10^2$ nebyl násoben člen . . . . . $\frac{7}{10^6} < \frac{1}{10^5}$,

8 . 10 nebyly násobeny členy . . . . . $\frac{4}{10^5} + \frac{7}{10^6} < \frac{1}{10^4}$

6 „ „ „ . . . . . $\frac{6}{10^4} + \frac{4}{10^5} + \frac{7}{10^6} < \frac{1}{10^3}$,

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$\frac{3}{10^4}$ „ „ „ $3 + \frac{7}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots < 10$,

$\frac{9}{10^5}$ „ „ „ $4 . 10 + 3 + \frac{7}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots < 100$,

$\frac{1}{10^6}$ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „

$\frac{2}{10^7}$ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ .

Z toho jde, že chyba

$$ch_2 < \frac{1}{10^5} . 7 . 10^2 + \frac{1}{10^4} . 8 . 10 + \frac{1}{10^3} . 6 + \ldots 10 . \frac{3}{10^4} + 100 . \frac{9}{10^5},$$

při čemž dva sčítance, plynoucí ze dvou posledních chyb částečných, jsme pro nepatrný jich vliv vynechali.

Výraz pro mez chyby ch_2 lze uvésti na tvar

$$ch_2 < \frac{1}{10^3} (7 + 8 + 6 + 4 + 3 + 9),$$

kdež v závorce vyskytuje se ciferný souče několika (někdy i všech) členů násobitele, mající nejvýše o jednoho sčítance více, než jest částečných součinů. Nazveme-li tento součet s, máme pro mez chyby ch_2 ve všeobecném případě výraz

$$ch_2 < \frac{1}{10^{r+1}} . s.$$

Tato chyba jest vždy kladná.

Poněvadž celá chyba ch součinu jest rovna $ch_1 + ch_2$,

$$\text{jest } ch < \frac{1}{2} . \frac{1}{10^r} . n + \frac{1}{10^{r+1}} . s$$

čili

$$ch < \frac{1}{10^r} \left(\frac{n}{2} + \frac{s}{10} \right).$$

V našem příkladě jest

$$ch < \frac{1}{10^2} (2{\cdot}5 + 3{\cdot}7), \text{ tedy i } ch < \frac{7}{10^2}.$$

Vyjde-li při zkráceném násobení na r deset. míst *nejvýše 6 částečných součinů*, jest chyba v součinu výsledním *vždy* menší než $\frac{1}{10^r} . 10$ čili $< \frac{1}{10^{r-1}}$. Neboť v takovém případě jest

1) $\frac{n}{2}$ nejvýše rovno 3 a

2) s „ „ 63, kteréž meze bylo by dosaženo teprve, když by každý sčítanec součtu s roven byl devíti.

Ale z toho jde, že v takovém případě jest

$$ch < \frac{1}{10^r}(3 + 6{\cdot}3) \text{ čili } ch < \frac{1}{10^r}.9{\cdot}3$$

a tedy tím spíše menší než $\frac{1}{10^{r-1}}$, jak jsme tvrdili.

Z této úvahy vychází na jevo:

Je-li zkráceným násobením, při němž vyjde nejvýše 6 částečných součinů, vypočísti součin tak, aby chyba s ním spojená nepřesáhla *jednotku* určitého řádu, dostačí, vyvodíme-li součin až na jednotky řádu o *jeden* stupeň nižšího, než jest ona jednotka.

Je-li na př. vyvoditi součin tak, aby chyba s ním spojená byla menší než jedna setina, počítáme zkráceně na tisíciny.

Součin takto nabytý zkracujeme o jedno místo. Tím se ovšem chyba může zvětšiti, ale obyčejně nepřesáhne vytčenou mez. Poněvadž více než šest částečných součinů při zkráceném násobení zřídka se vyskytne, přestaneme na tomto vyšetřování.

IV. Zkrácené dělení.

Je-li vypočísti podíl správně na jednotky určitého řádu, počínáme si takto:

Ustanovíme nejprve místní hodnotu první číslice podílu, z čehož poznáme polohu desetinné tečky a počet **n** *míst podílu, jež vypočísti jest.*

Skládá-li se dělitel z více než **n** *míst, podržíme z něho jen* **n** *míst* (od nejvyšší *číslice* počítajíc) *nejvyšších, ostatní zatrhnouce. Z dělence vezmeme* **n** *nebo* (**n** + **1**) *míst nejvyšších* (od nejvyšší *číslice* počítajíc) *dle toho, měl-li by při obyčejném dělení první částečný dělenec tolik míst co dělitel anebo o jedno místo více.*

Ustanovivše číselnou hodnotu první číslice **x** *podílu, násobíme jí nejprve nejvyšší číslicí vynechané části dělitele a vezmouce z tohoto součinu opravu, připočteme ji k první části součinu vzniklého z číslice* **x** *a zkráceného dělitele. Odvodivše první zbytek, zatrhneme nejnižší místo zkráceného dělitele, čímž obdržíme druhého zkráceného dělitele. S tímto dělitelem a s prvním zbytkem učiníme totéž, co prve s prvním dělitelem a dělencem a pokračujeme tímto způsobem dotud, dokud nejsou vyčerpána všecka místa zkráceného dělitele.*

Má-li dělitel méně než **n** *nebo nejvýše* **n** *míst* (od nejvyšší *číslice* počítajíc), *dělíme způsobem obyčejným, až vyčerpáme všecka místa zkráceného dělence. Potom teprve dělíme zkráceně, jak bylo svrchu vytčeno.*

Na př. je-li podíl při dělení

$$4166{\cdot}9946 : 871294$$

vypočísti na 6 míst desetinných, soudíme takto: Poněvadž první číslice podílu značí tisíciny, bude míti podíl tvar $0{\cdot}00\ldots$. Máme tudíž již dvě desetinná místa podílu a jde tudíž jen o jeho další 4 místa.

Nyní vezmeme v děliteli 4 a v dělenci 5 míst nejvyšších a dělíme takto:

$$\begin{array}{l} 4166{\cdot}9|946 : 8712|94 = 0{\cdot}004782. \\ 6817 \\ 719 \\ 22 \\ 5 \end{array}$$

O podílu $0{\cdot}004782$ tvrdíme, že jest na millioniny správný.

Důkaz. Chyba podílu složena jest ze dvou částí a to

a) z chyby tím pochodící, že zbytek při dělení vynecháme a

b) z chyby, která má svůj původ v tom, že jsme nenásobili každou číslicí podílu všecky číslice dělitele.

a) V našem případě jest zbytek $= 0{\cdot}5946$ a chyba v podílu vynecháním tohoto zbytku vzešlá

$$\text{jest} \qquad \frac{0{\cdot}5946}{871294}.$$

Chyba tato *zmenšuje* podíl.

b) Místo abychom každou číslicí podílu násobili každou číslici dělitele, násobili jsme dělitele podílem *zkráceně* na jedno místo desetinné. Tím učinili jsme chybu složenou ze dvou částí, která se především jeví ve zbytcích, jichž jsme při dělení nabyli. První část chyby ve zbytcích, mající původ svůj v opravách, jest v našem případě $< 0{\cdot}2$ a tudíž v podílu $< \frac{0{\cdot}2}{871294}$ (viz odst. III.). Tato chyba může zbytky a tudíž i podíl zvětšiti nebo zmenšiti. Druhá část vyplývající z neúplnosti násobení, jest ve zbytcích $< 0{\cdot}21$ a tudíž v podílu $< \frac{0{\cdot}21}{871294}$.

Tato část působí vždy na zvětšení zbytků a tudíž i podílu a proto jest s chybou *a*) nesouhlasná.

Z toho jde, že celá chyba v podílu jest menší

$$\text{než} \quad \frac{0{\cdot}5946}{871294} + \frac{0{\cdot}2}{871294} - \frac{0{\cdot}21}{871294} \quad \text{čili} < \frac{0{\cdot}5846}{871294} < \frac{1}{10^6},$$

jak jsme tvrdili.

V. Vyskytují-li se při některém výkonu početním čísla neuplná, vyšetříme nejprve, na kolik spolehlivých míst lze výsledek vypočísti a potom vypočteme tato místa zkráceně.

Tak ve příkladě odst. 3. v § 65. již desetiny součinu jsou nespolehlivy, pročež budeme násobiti zkráceně na jedno místo desetinné a potom výsledek o toto místo zkrátíme.

$$\begin{array}{r} 3{\cdot}1416\ldots \times 824{\cdot}6\ldots \\ 6\,428 \\ \hline 25\,133 \\ 628 \\ 126 \\ 19 \\ \hline 2590{\cdot}6 \end{array}$$

Součin 2591 jest až na jednotky správný, t. j. chyba s ním spojená jest < 1, o čemž se přesvědčíme, srovnajíce tento výsledek s výsledkem dříve nabytým.

Poznámka. Při zkráceném počítání čísly *neúplnými* přistupuje k chybě pochodící z neúplnosti čísel chyba vzešlá ze zkráceného počítání. Z té příčiny jest dobře při čtyřech výkonech početních svrchu vyložených, jmenovitě při sčítání velkého počtu neúplných sčítanců a násobení mnohomístných čísel neúplných, vypočísti zkráceně o jedno místo více než při zkráceném počítání čísly úplnými.

Přehled.

Čítáním jednotek absolutních povstane řada absolutních čísel celých.

Z čítání vyplývá bezprostředně první základní výkon početní: *sčítání čísel absolutních* a z opětovného sčítání téhož čísla vzniká *násobení čísel absolutních*. Je-li výsledek $\begin{matrix}\text{sčítání}\\ \text{násobení}\end{matrix}$ dvou čísel znám a mimo to jedno z těchto čísel, vypočteme druhé $\begin{matrix}\text{odčítáním.}\\ \text{dělením.}\end{matrix}$ Tyto dva výkony vznikají tudíž z prvních dvou *obrácením* čili *inversí* a proto se jmenují výkony *inversními* (obrácenými, nepřímými). Aby bylo lze výsledky odčítání a dělení v každém případě vyjádřiti, rozšířena jest řada číselná o nová čísla: o čísla *záporná* a *lomená*. Pojem sčítání a násobení jest potom rozšířiti i pro tato nová čísla.

Sčítání a násobení mají po jednom výkonu inversním, čehož příčina jest, že každý z těchto výkonů jest výkonem *záměnným*. Z toho jde totiž, že jest lhostejno, je-li vedle $\begin{matrix}\text{součtu}\\ \text{součinu}\end{matrix}$ dán první nebo druhý $\begin{matrix}\text{sčítanec}\\ \text{činitel}\end{matrix}$: zbývající $\begin{matrix}\text{sčítanec}\\ \text{činitel}\end{matrix}$ vypočte se vždy týmž výkonem početním, t. j. $\begin{matrix}\text{odčítáním.}\\ \text{dělením.}\end{matrix}$

Z odčítání i z dělení vznikají *obrácením* dva výkony početní, poněvadž ani odčítání ani dělení není výkonem záměnným. Avšak výkony tyto nejsou nové, z odčítání vznikne inversí sčítání a odčítání, z dělení násobení a dělení.

Sčítání a odčítání jsou výkony *prvního*, násobení a dělení *druhého stupně*.

Část šestá.

O poměrech a úměrách.

O poměrech.

§ 59. Výměry.

1) Srovnávajíce velikosť dvou veličin stejnorodých A a B, můžeme se tázati a) *o kolik*, b) *kolikrát* jest jedna z nich větší druhé. Výsledek tohoto srovnání jmenujeme *poměrem*.

2) *Poměr arithmetický jisté veličiny k jiné veličině s ní stejnorodé udává, o kolik zvětšiti jest veličinu druhou, aby povstala první.*

Poměr geometrický jisté veličiny k jiné veličině s ní stejnorodé udává, kolikrát zvětšiti jest veličinu druhou, aby povstala první.

3) Kdybychom místo libovolných veličin měli čísla A a B, vypočetli bychom jich poměr arithmetický jakožto rozdíl $(A - B)$ a jich poměr geometrický jakožto podíl $(A : B)$ čili $\frac{A}{B}$. Těchto označení užíváme, i když A a B nejsou čísly. Veličiny, jež srovnáváme, jmenujeme *členy* poměru. Člen A jmenujeme v obou případech členem *prvním* čili *předním* (antecedent) a člen B členem *druhým* čili *zadním* (konsekvent).

Je-li první člen větší druhého, jmenujeme poměr poměrem *sestupným*, v opačném případě *vzestupným*. Rovnají-li se sobě oba členy poměru, nazýváme jej poměrem *rovnosti*.

4) Jest-li první člen každého ze dvou poměrů roven druhému členu poměru druhého, pravíme, že jsou tyto poměry *navzájem převrácené*.

Na př. $(A - B)$ a $(B - A)$ jsou navzájem převrácené poměry arithmetické, $(A : B)$ a $(B : A)$ geometrické.

§ 60. Výsledky.

1) *Arithmetický poměr dvou stejnorodých veličin A a B jest veličina s těmito veličinami stejnorodá.*

Neboť veličinu lze zvětšiti jen připojením veličiny s ní stejnorodé.

Geometrický poměr každých dvou veličin stejnorodých lze vyjádřiti číslem nepojmenovaným.

Neboť geometrický poměr udává, *kolikrát* jest veličina A větší než veličina s ní stejnorodá B, a toto udání může se státi jen *číslem*.

Poněvadž toto číslo udává, kolikrát veličina B jest obsažena v A, jest patrno, že jest číslem poměrným veličiny A, pokládáme-li veličinu B za míru. (§ 56.)

3) Přijdeme-li srovnávajíce dvě veličiny stejnorodé k témuž výsledku, jako při srovnávání jiných dvou veličin stejnorodých, pravíme, *že se poměry těchto dvou párů veličin sobě rovnají.*

Arithmetický poměr dvou veličin stejnorodých může býti roven zase jen arithmetickému poměru dvou veličin s prvními stejnorodých.

Neboť arithmetický poměr jest vždy stejnorodý s veličinami, které byly srovnány. Aby tedy dva arithmetické poměry se sobě rovnaly, musí býti členy prvého stejnorodé se členy druhého. Na př. arithmetický poměr dvou délek, t. j. délka, může býti roven zase jen arithmetickému poměru dvou délek, t. j. délce, ale nikoliv arithmetickému poměru dvou ploch, vah atd.

Geometrický poměr dvou veličin stejnorodých může býti roven geometrickému poměru jiných dvou stejnorodých veličin, na př. geometrický poměr dvou ploch může býti roven geometrickému poměru dvou délek, vah, dvou čísel nepojmenovaných atd., poněvadž ve všech případech mohou býti čísla, jimiž jsou ony poměry vyjádřeny, sobě rovna (1).

4) *Geometrický poměr dvou veličin stejnorodých rovná se podílu, kterého nabudeme, dělíce čísla poměrná oněch veličin (pro touž míru).*

Důkaz. Buďtež A a B dané veličiny a M míra, kterou obě měříme.

Číslo poměrné veličiny A budiž a, t. j. $A = Ma$

a „ „ „ B „ b, „ $B = Mb$.

Z rovnice $B = Mb$ vyplývá, že jest $M = \frac{B}{b}$.

Vložíme-li tuto hodnotu za M do rovnice $A = Ma$, obdržíme $A = \frac{B}{b}a$, čili, majíce na paměti definici pro násobení zlomkem, $A = B\frac{a}{b}$.

Tato rovnice praví, že veličinu B zvětšiti jest $\frac{a}{b}$ kráte, aby povstala veličina A, čili podíl $\frac{a}{b}$ roven jest geometrickému poměru veličin A a B, jak bylo tvrzeno.

Z toho jest patrno, *že geometrický poměr dvou veličin stejnorodých lze nahraditi vždy poměrem jich čísel poměrných (při téže míře).*

§ 61. Vlastnosti poměrův geometrických.

Ve větách následujících předpokládáme, že geometrický poměr dvou veličin vyjádřen jest poměrem jich čísel poměrných.

1) *Geometrický poměr se nezmění,* $\begin{matrix}\text{násobíme-li}\\ \text{dělíme-li}\end{matrix}$ *oba jeho členy týmž číslem.*

Důkaz.

$$a : b = am : bm = \frac{a}{r} : \frac{b}{r}. \quad (\S\ 23.,\ 12.\ \text{a}\ \S\ 49.,\ 5.)$$

Na základě první části této věty lze poměr dvou zlomků vyjádřiti poměrem čísel celých. K tomu cíli dostačí násobiti oba členy poměru nejmenším společným násobkem jmenovatelův obou zlomků.

Druhá část této věty poučuje nás, jak lze poměr geometrický, jehož členy jsou soudělná čísla celá, vyjádřiti poměrem nejmenších čísel celých. K tomu cíli dostačí děliti oba členy poměru jich největší společnou měrou. Výkon tento nazýváme *krácením* poměru.

2) *Násobením souhlasných členů dvou nebo několika poměrů geometrických nabýváme poměru, který jest roven součinu poměrů daných.*

Tvrzení. Jsou-li dané poměry

$$\begin{array}{l} a_1 : b_1 \\ \underline{a_2 : b_2,} \end{array}$$

jest $a_1 a_2 : b_1 b_2 = (a_1 : b_1)(a_2 : b_2)$.

Důkaz. Dle § 59.. 3. jest poměr $(a_1 a_2 : b_1 b_2)$ roven podílu, kt rého nabudeme dělíce číslo $a_1 a_2$ číslem $b_1 b_2$, t. j. rovná se zlomku $\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}$.

Avšak $\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = (a_1 : b_1)(a_2 : b_2)$,

tudíž i $a_1 a_2 : b_1 b_2 = (a_1 : b_1)(a_2 : b_2)$.

Týmž způsobem dokážeme větu 2. pro více než dva poměry. Poměr geometrický vzniklý násobením několika jiných poměrů jmenujeme poměrem *složeným.*

Zvláštním případem věty 2. jest věta:

Násobením souhlasných členů dvou navzájem převrácených poměrů geometrických nabudeme poměru rovného 1.

3) *Dělením souhlasných členů dvou poměrů geometrických nabýváme poměru, který jest roven podílu poměrů daných.*

Jsou-li dané poměry $a_1 : b_1$ a $a_2 : b_2$,

tvrdíme, že

$$\frac{a_1}{a_2} : \frac{b_1}{b_2} = (a_1 : b_1) : (a_2 : b_2).$$

Důkaz. $\frac{a_1}{a_2} : \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1 : b_1}{a_2 : b_2} = (a_1 : b_1) : (a_2 : b_2)$. (§ 48.)

4) *Sečteme-li / Odečteme-li souhlasné členy dvou sobě rovných geometrických poměrů, nabudeme poměru, který jest roven každému z poměrů daných.*

Tvrzení. Jsou-li dané poměry $a_1 : b_1$ a $a_2 : b_2$ sobě rovny, jest

$$(a_1 \pm a_2) : (b_1 \pm b_2) = a_1 : b_1 = a_2 : b_2.$$

Důkaz. Nazveme-li p_1 podíl při děleních $a_1 : b_1$ a $a_2 : b_2$,

jest $a_1 = b_1 p_1$

$a_2 = b_2 p_1$.

Sečtením / Odečtením těchto rovnic nabudeme $(a_1 \pm a_2) = (b_1 \pm b_2)\,p$, ze kteréž rovnice vychází na jevo, že

poměr $(a_1 \pm a_2) : (b_1 \pm b_2) = p$

čili $(a_1 \pm a_2) : (b_1 \pm b_2) = a_1 : b_1 = a_2 : b_2$, jak bylo tvrzeno.

Věta tuto vyslovená jest zvláštním případem následující věty všeobecnější:

5) *Je-li* $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 \ldots = a_n : b_n$,

jest i $(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \ldots \lambda_n a_n) : (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 \ldots \lambda_n b_n) = a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_n : b_n$, *kdež* $\lambda_1, \lambda_2 \ldots . \lambda_n$ *jsou libovolná čísla řady číselné.*

Důkaz. Nazveme-li p podíl povstalý při děleních $a_1 : b_1$, $a_2 : b_2$ atd., platí rovnice

$a_1 = b_1 p$, $a_2 = b_2 p$, $\ldots a_n = b_n p$.

Násobíme-li obě strany první rovnice λ_1, druhé λ_2 a $n^{té}$ λ_n, nabudeme rovnic

$\lambda_1 a_1 = \lambda_1 b_1 p$, $\lambda_2 a_2 = \lambda_2 b_2 p$, $\ldots \lambda_n a_n = \lambda_n b_n p$,

jichž sečtením povstane rovnice

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots \lambda_n a_n = (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots \lambda_n b_n)\,p,$$

z níž jest patrno, že

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots \lambda_n a_n) : (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots \lambda_n b_n) = p, \text{ čili}$$

$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots \lambda_n a_n) : (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots . \lambda_n b_n) = a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots a_n : b_n$, jak bylo tvrzeno.

O úměrách (srovnalostech, proporcích).

§ 62. Výměr a vlastnosti úměr.

1) *Rovnici, jíž jest vyjádřeno, že dva* *arithmetické / geometrické* *poměry jsou si rovny, jmenujeme úměrou* *arithmetickou. / geometrickou.*

Úměra arithmetická má tvar
$A - B = C - D$.

Úměra geometrická má tvar
$A : B = C : D$
a čte se: A má se k B jako C k D.

Každá úměra složena jest ze čtyř *členů*. Členy A a D jsou členy krajní, B a C *vnitřní*. Členy A a C jakož i B a D jmenujeme *soulehlými* (homologickými).

Veličinu, která s třemi danými veličinami *s ní stejnorodými* tvoří úměru *arithmetickou, / geometrickou,* jmenujeme *jich čtvrtou* *arithmetickou / geometrickou* *úměrnou.*

2) V arithmetické úměře musí býti všecky členy *stejnorodé* (§ 60., 3). V geometrické úměře musí býti členy jednoho poměru *stejnorodé*, kdežto členy různých poměrů mohou býti *nestejnorodé* (§ 60., 3).

Každou geometrickou úměru, v jejíchž členech vyskytují se veličiny, lze nahraditi úměrou, v jejíchž členech jsou čísla poměrná oněch veličin (§ 60., 3).

Z té příčiny budeme v následujících větách předpokládati, že členy úměry geometrické jsou *čísla nepojmenovaná.*

3) *V geometrické úměře jest součin členů vnitřních roven součinu členů krajních.*

Důkaz. Danou úměru

$$a : b = c : d \text{ násobme}$$

rovnicí $bd = bd.$

Tím nabudeme

$(a : b)\, bd = (c : d)\, bd$ čili $ad = bc$, jak bylo tvrzeno.

Není-li součin vnitřních členů úměry geometrické roven součinu členů krajních, není úměra geometrická správna.

Neboť z nerovnosti $ad \gtrless bc$ obdržíme, dělíce ji rovnicí

$$bd = bd,$$

nerovnost $a : b \gtrless c : d$, kteráž praví,

že poměr $a : b$ není roven poměru $c : d$, t. j. že úměra $a : b = c : d$ není správna.

Věty 3. lze tudíž užiti k posouzení, je-li úměra geometrická správna.

4) *Je-li součin dvou čísel roven součinu jiných dvou čísel, lze z těchto čtyř čísel sestaviti úměru geometrickou, jejímiž členy vnitřními jsou činitelé jednoho a jejímiž členy krajními jsou činitelé druhého z vytčených součinů.*

Tvrzení.

Je-li $ab = cd$,

jest 1) $a : c = d : b$, 2) $a : d = c : b$, 3) $b : c = d : a$, 4) $c : a = b : d$.

Důkaz. V každé z těchto úměr jest součin členů vnitřních roven součinu členů vnějších a tudíž jsou ony úměry správny (4).

Z rovnic 1., 2., 3. a 4. vyplývá:

5) *V geometrické úměře jest dovoleno vyměniti spolu* a) *členy vnitřní,* b) *členy vnější,* c) *vyměniti členy vnitřní s vnějšími.*

6) *Správnost úměry geometrické se neporuší, násobíme-li nebo dělíme-li jeden krajní a jeden vnitřní člen týmž číslem.*

Důkaz. Je-li $a : b = c : d$,

jest i

$$ae : be = c : d, \text{ a } \frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d,$$

$$a : b = ce : de, \quad a : b = \frac{c}{m} : \frac{d}{m},$$

$$ae : b = ce : d, \quad \frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d,$$

$$a : be = c : de, \quad a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m},$$

poněvadž ve všech těchto případech jest součin členů vnějších roven součinu členů vnitřních. (§ 62., 3.)

Na základě první části této věty lze úměru geometrickou, v níž se vyskytují zlomky, vyjádřiti úměrou, jejímiž členy jsou čísla celá. Dostačí tu násobiti vždy jeden vnitřní a jeden krajní člen nejmenším společným násobkem jmenovatelů, které se v těchto členech vyskytují.

Druhá část této věty nás poučuje, jak lze úměru geometrickou vyjádřiti nejmenšími čísly celými. K tomu cíli děliti jest vždy jeden vnitřní a jeden krajní člen, jsou-li soudělné, jich největší společnou měrou.

7) *Vnější / Vnitřní člen úměry geometrické rovná se součinu členů vnitřních / vnějších dělenému zbývajícím členem vnitřním. / vnějším.*

Tvrzení. Je-li $a : b = c : d$, jest $a = \frac{bc}{d}$, $b = \frac{ad}{c}$.

Důkaz.

Násobíme-li rovnici

$$a : b = c : d$$

rovnicí $b = b$,

nabudeme $a = bc : d$.

Dělíme-li rovnicí

$$a : b = c : d$$

rovnici $a = a$,

nabudeme $b = ad : c$

Týmž způsobem lze dokázati,

že jest $c = \frac{ad}{b}$ a $d = \frac{bc}{a}$.

Z věty této vychází na jevo, že můžeme vypočísti jeden člen úměry, znajíce ostatní tři.

8) Úměru geometrickou, jejíž vnitřní členy se sobě rovnají, jmenujeme *spojitou úměrou geometrickou* a každý ze vnitřních členů nazýváme *geometrickým středem členů vnějších.*

Dvojmoc geometrického středu dvou čísel rovna jest jich součinu.

Neboť je-li

$$a : b = b : c$$

danou úměrou spojitou, jest dle 3) $bb = ac$ čili $b^2 = ac$, jak bylo tvrzeno.

Poznámka. Ve spojité arithmetické úměře $A - B = B - C$ jmenujeme člen B *arithmetickým středem* členů A a C. Připočteme-li k oné úměře rovnici $B + C = B + C$, nabudeme rovnice $A + C = 2B$ čili $B = \frac{A + C}{2}$, t. j. *arithmetický střed dvou veličin roven jest polovině jich součtu.*

9) *Součiny / Podíly souhlasných členů dvou geometrických úměr tvoří úměru geometrickou.*

$$\text{Je-li } a : b = c : d,$$
$$a_1 : b_1 = c_1 : d_1,$$
$$\text{jest } aa_1 : bb_1 = cc_1 : dd_1$$
$$\text{i } \frac{a}{a_1} : \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} : \frac{d}{d_1}.$$

Neboť z první podmínky vyplývá, že

$$a\,d = b\,c,$$

a z druhé, že

$$a_1 d_1 = b_1 c_1.$$

Násobením těchto rovnic nabudeme $aa_1 dd_1 = bb_1 cc_1$, t. j. úměra

$$aa_1 : bb_1 = cc_1 : dd_1 \text{ jest správna.}$$

Dělením týchž rovnic povstane

$$\frac{a}{a_1} \cdot \frac{d}{d_1} = \frac{b}{b_1} \cdot \frac{c}{c_1},$$ t. j. úměra $\frac{a}{a_1} : \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} : \frac{d}{d_1}$ jest správna.

První část věty 9. platí i pro více než dvě úměry geometrické, t. j. z úměr

$$\begin{aligned} a &: b = c : d, \\ a_1 &: b_1 = c_1 : d_1, \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_n &: b_n = c_n : d_n \end{aligned}$$

vyplývá znásobením souhlasných členův úměra

$$a \,.\, a_1 \ldots a_n : b \,.\, b_1 \ldots b_n = c \,.\, c_1 \ldots c_n : d \,.\, d_1 \ldots d_n.$$

Důkaz jako prve.

Která věta vyplývá z věty této, jsou-li všecky dané úměry stejny?

10) *Součet / Rozdíl prvních členů obou poměrů má se k součtu / rozdílu obou druhých členů, jako první člen ke druhému, nebo třetí ke čtvrtému.*

Budiž $a : b = c : d$ daná úměra.

Poněvadž poměr $a : b$ roven jest poměru $c : d$, jest i poměr $(a \pm c) : (b \pm d)$ roven každému z těchto poměrů (§ 61., 4), t. j.

$$(a \pm c) : (b \pm d) = a : b,\ (a \pm c) : (b \pm d) = c : d.$$

11) *Součet / Rozdíl členů prvního poměru má se k součtu / rozdílu členů druhého poměru jako člen první ke třetímu nebo druhý ke čtvrtému.*

Budiž $a : b = c : d$ daná úměra. Vyměníme-li v ní vnitřní členy, povstane úměra $a : c = b : d$ a pozorujeme-li souvislosť této úměry s úměrami

$$(a \pm c) : (b \pm d) = a : b,\ (a \pm c) : (b \pm d) = c : d,$$

jichž správnosť byla v odst. 10. dokázána, jest i správnosť tvrzení našeho patrna.

12) *Součet / Rozdíl členů prvního poměru má se k jich rozdílu / součtu, jako součet / rozdíl členů druhého poměru k jich rozdílu / součtu.*

Budiž $a:c=b:d$ daná úměra.

Podle věty předešlé platí úměry

$$(a+c):(b+d)=a:b,$$
$$(a-c):(b-d)=a:b,$$

z nichž vyplývá $(a+c):(b+d)=(a-c):(b-d)$. Vyměníme-li v této úměře vnitřní členy, nabudeme úměry $(a+c):(a-c)=(b+d):(b-d)$, jak bylo v 1. části věty 12. tvrzeno. Učiníme-li v poslední úměře členy vnitřní krajními, nabudeme úměry $(a-c):(a+c)=(b-d):(b+d)$, čímž jest dokázána druhá část věty 12.

Které věty obsaženy jsou v úměrách

$$(a+c):(a-c)=(b+d):(b-d),$$
$$(a-c):(a+c)=(b-d):(b+d)$$

vzhledem k úměře $a:b=c:d$?

Kterých vět nabudeme vyměníce v úměrách

$$(a\pm c):(b\pm d)=a:b,$$
$$(a\pm c):(b\pm d)=c:d$$

vnitřní členy a srovnajíce je s úměrou $a:c=b:d$?

13) Čtyři čísla a, b, c a d tvoří *harmonickou úměru*, má-li se rozdíl prvních dvou k rozdílu druhých dvou, jako první číslo ke čtvrtému, t. j. platí-li úměra

$$(a-b):(c-d)=a:d.$$

Je-li v této úměře $b=c$, nabýváme z ní *spojité úměry harmonické*

$$(a-b):(b-d)=a:d,$$

v níž jest b harmonickým *středem čísel* a a d.

Věty podobné větám 3.—9. lze dokázati i pro úměry arithmetické. Pro malou jich důležitosť vynecháme je.

§ 63. O úměrách postupných.

1) Máme-li takovou soustavu úměr

$$\begin{aligned} a_1:a_2&=b_1:b_2,\\ a_2:a_3&=b_2:b_3,\\ a_3:a_4&=b_3:b_4,\\ &\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots, \end{aligned} \tag{1}$$

že vždy první člen každého poměru následující úměry rovná se druhému členu příslušného poměru úměry předcházející, sestavujeme z nich jedinou úměru tvaru

$$a_1:a_2:a_3:a_4:a_5\ldots=b_1:b_2:b_3:b_4:b_5\ldots$$

a nazýváme ji *úměrou postupnou.*

Členy a_1 a b_1, a_2 a b_2, a_3 a b_3 atd. jsou *soulehlými členy* této úměry.

2) *V úměře postupné jest poměr kterýchkoli dvou členů levé strany roven poměru soulehlých členů strany pravé.*

Dokážeme na př., že platí úměra $a_2 : a_5 = b_2 : b_5$.

Dle podmínky (1) platí úměry

$$a_2 : a_3 = b_2 : b_3,$$
$$a_3 : a_4 = b_3 : b_4,$$
$$a_4 : a_5 = b_4 : b_5.$$

Znásobením souhlasných členů těchto úměr nabudeme úměry

$$a_2 a_3 a_4 : a_3 a_4 a_5 = b_2 b_3 b_4 : b_3 b_4 b_5$$

a krátíme-li první a druhý člen součinem $a_3 a_4$ a třetí a čtvrtý součinem $b_3 b_4$, povstane úměra

$$a_2 : a_5 = b_2 : b_5,$$

jak bylo tvrzeno.

3) Vyměníme-li spolu v poslední úměře členy vnitřní, nabudeme úměry $a_2 : b_2 = a_5 : b_5$, z níž vychází na jevo věta: *V úměře postupné jsou poměry soulehlých členů stejné.*

4) *Z každé soustavy úměr lze po náležité jich proměně sestaviti úměru postupnou.*

Buďtež dány na př. úměry 1) $a : b = c : d$,
2) $e : f = g : h$,
3) $i : j = k : l$.

Násobme 1. a 2. člen úměry 1. součinem ei a 3. a 4. její člen součinem gk,
„ „ „ „ 2. „ bi „ „ „ „ dk,
„ „ „ „ 3. „ bf „ „ „ „ dl.

Tím povstanou úměry $aei : bei = cgk : dgk$,
$bei : bfi = dgk : dhk$,
$bfi : bfj = dhk : dhl$,

z nichž vyplývá úměra postupná

$$aei : bei : bfi : bfj = cgk : dgk : dhk : dhl.$$

5) *O každé úměře postupné*

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 \ldots : b_n$$

platí:

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \ldots \lambda_n a_n) : (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \ldots \lambda_n b_n) = a_1 : b_1,$$
$$= a_2 : b_2,$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$= a_n : b_n,$$

kdež λ_1, $\lambda_2 \ldots \lambda_n$ jsou libovolná čísla.

Důkaz. Místo dané úměry postupné lze psáti dle věty 3. řadu sobě rovných poměrův

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots \frac{a_n}{b_n}.$$

Dle odst. 5. v § 61. jest

$$\frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \ldots \lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \ldots \lambda_n b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots \frac{a_n}{b_n},$$

jak bylo tvrzeno.

Pro $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots \lambda_n$ jest v tomto výsledku obsažena věta:

6) *Součet členů levé strany úměry postupné má se k součtu členů její strany pravé, jako každé dva členy soulehlé.*

1) Dokažte o úměrách postupných ještě tyto věty:

V úměře postupné jest dovoleno násobiti nebo děliti a) každé dva soulehlé členy, b) všecky členy jedné strany týmž číslem.

2) Dokažte, že obvody podobných mnohoúhelníků mají se k sobě jako jich stejnělehlé strany, vědouce, že poměry stejnělehlých stran podobných mnohoúhelníků se sobě rovnají.

3) Dokažte pravdivosť tohoto tvrzení:

Jsou-li $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$,
$B_1, B_2, B_3 \ldots B_n$
úhly dvou mnohoúhelníků a platí-li postupná úměra

$$A_1 : A_2 : A_3 : \ldots A_n = B_1 : B_2 : B_3 : \ldots B_n,$$

jest $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$, $A_3 = B_3 \ldots A_n = B_n$.

Užití úměr.

§ 64. O zákonech úměrnosti.

1) *Závisejí-li dvě veličiny Z a X na sobě tak, že, zvětší-li se libovolná část jedné z nich několikráte, právě tolikráte se zvětší k ní příslušná část veličiny druhé, pravíme, že tyto dvě veličiny jsou jednoduše přímo úměrny.*

Na př. cena zboží jest přímo úměrna jeho množství, dráha při pohybu stejnoměrném v určitém čase vykonaná rychlosti atd.

Jsou-li X a Z dvě veličiny přímo úměrné a náleží-li
k části X_1 veličiny X část Z_1 veličiny Z,
„ „ X_2 „ „ „ Z_2 „ „ :
platí úměra $Z_2 : Z_1 = X_2 : X_1$

Důkaz.

Je-li $X_2 = X_1 m$, musí býti $Z_2 = Z_1 m$,
tedy poměr $(X_2 : X_1) = m$ a $(Z_2 : Z_1) = m$,
z čehož jde, že

$$Z_2 : Z_1 = X_2 : X_1.$$

2) *Závisí-li veličina Z na veličině X tak, že, zvětší-li se libovolná část jedné z nich několikráte, právě tolikráte se zmenší k ní příslušná část veličiny druhé, pravíme, že tyto veličiny jsou jednoduše nepřímo úměrny.*

Na př. čas k vykonání jisté práce potřebný jest nepřímo úměren počtu dělníků, čas při stejnoměrném pohybu k vykonání určité dráhy potřebný rychlosti atd.

Jsou-li X a Z dvě veličiny nepřímo úměrné a náleží-li
k části X_1 veličiny X část Z_1 veličiny Z,
„ „ X_2 „ „ „ Z_2 „ „,
platí úměra $Z_1 : Z_2 = X_2 : X_1$.

Důkaz.

Jeli $X_2 = X_1 m$, musí býti $Z_2 = \frac{Z_1}{m}$,

tedy poměr $X_2 : X_1 = m$ a $Z_1 : Z_2 = m$

z čehož jde, že

$$Z_1 : Z_2 = X_2 : X_1$$

3) Pravíme-li, že veličina Z jest přímo úměrna s veličinami X a Y, znamená to:

Mění-li se $\frac{X}{Y}$ a zůstává-li $\frac{Y}{X}$ stálým, mění se Z přímo úměrně s $\frac{X}{Y}$.

Na př. dráha při pohybu stejnoměrném jest přímo úměrna času a rychlosti, plocha obdélníku jeho délce a šířce atd.

Je-li veličina Z přímo úměrna s veličinami X a Y a náleží-li
k částem X_1, Y_1 veličin X a Y část Z_1 veličiny Z,
„ „ X_2, Y_2 „ „ „ „ „ Z_2 „ „,
jest poměr $Z_2 : Z_1 = (X_2 : X_1)\,(Y_2 : Y_1)$.

Důkaz. Jmenujme Z' část veličiny Z náležející k částem X_2, Y_1 veličin X a Y.

Je-li $X_2 = X_1 m$, musí býti $Z' = Z_1 m$,
$Y_2 = Y_1 n$, „ „ $Z_2 = Z' n$ čili $Z_2 = Z_1 mn$.

Z poslední rovnice vysvítá, že poměr $Z_2 : Z_1 = mn$.

Avšak $m = X_2 : X_1$ a $n = Y_2 : Y_1$, tudíž

$Z_2 : Z_1 = (X_2 : X_1)\,(Y_2 : Y_1)$, jak jsme tvrdili.

Jsou-li $x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, z_2$ čísla poměrná částí X_1, Y_1, X_2, Y_2, Z_1, Z_2, jest poměr

$$z_2 : z_1 = (x_2 : x_1)\,(y_2 ; y_1) \qquad (\S\ 60., 4).$$

Znásobíme-li spolu oba poměry pravé strany dle § 61., 2., nabudeme úměry

$$z_2 : z_1 = x_2 y_2 : x_1 y_1.$$

4) Z vysvětlení v 3. podaného jest patrno, co znamená, pravíme-li, že veličina Z jest přímo úměrna veličině X a nepřímo úměrna veličině Y.

Náleží-li v tomto případě
k částem X_1, Y_1 veličin X a Y část Z_1 veličiny Z,
„ „ X_2, Y_2 „ „ „ „ „ Z_2 „ „,
jest poměr $Z_2 : Z_1 = (X_2 : X_1) : (Y_2 : Y_1)$

Důkaz.

Jmenujme Z' část veličiny Z náležející k částem X_2 a Y_1 veličin X a Y.

Je-li $X_2 = X_1 m$, musí býti $Z' = Z_1 m$,

„ $Y_2 = Y_1 n$, „ „ $Z_2 = \frac{Z'}{n}$ čili $Z_2 = Z_1 \frac{m}{n}$.

Z poslední rovnice vysvítá, že poměr $Z_2 : Z_1 = m : n$, z čehož obdržíme týmž způsobem jako v odst. 3.

$$Z_2 : Z_1 = (X_2 : X_1) : (Y_2 : Y_1).$$

Pro čísla poměrná veličin tuto se vyskytujících obdržíme tudíž

$$z_2 : z_1 = (x_2 : x_1) : (y_2 : y_1)$$

čili dle § 61., 3. $$z_2 : z_1 = \frac{x_2}{y_2} : \frac{x_1}{y_1}.$$

5) Je-li všeobecněji veličina Z přímo úměrna s veličinami X a Y a nepřímo úměrna s veličinami U a V, platí o každých dvou skupinách z_1, x_1, y_1, u_1, v_1, a z_2, x_2, y_2, u_2, v_2 k sobě příslušných čísel poměrných těchto veličin úměra $z_1 : z_2 = \frac{x_1 y_1}{u_1 v_1} : \frac{x_2 y_2}{u_2 v_2}$.

6) Je-li veličina Z na veličině X tak závislá, že, zvětší-li se libovolná část veličiny X na př. a-kráte..., zvětší se k ní příslušná část veličiny Z a^n-kráte, pravíme, že jest veličina Z spojena s veličinou X *přímým zákonem úměrnosti stupně* n^{ho}.

Na př. dráha při volném pádu jest přímo úměrna dvojmoci času, krychlový obsah koule trojmoci jejího poloměru atd.

Jsou-li x a x_1 čísla poměrná částí X a X_1
a z a z_1 „ „ „ Z a Z_1, které příslušejí k částem X a X_1, dokážeme podobně jako v odst. 1., že platí pro zákon úměrnosti stupně n^{ho} úměra $z : z_1 = x^n : {x_1}^n$.

7) Je-li veličina Z na veličině X tak závislá, že, zvětší-li se libovolná část veličiny X na př. a-kráte, zmenší se k ní příslušná část veličiny Z a^n-kráte, pravíme, že jest veličina Z spojena s veličinou X *nepřímým zákonem úměrnosti stupně* n^{ho}.

Na př. síla, jíž hmota přitahuje hmotu, jest nepřímo úměrna dvojmoci jejich vzdálenosti.

Jsou-li x a x_1 čísla poměrná částí X a X_1
a z a z_1 „ „ „ Z a Z_1, které příslušejí k částem X a X_1, dokážeme jako v odst 2., že platí úměra $z : z_1 = {x_1}^n : x^n$.

§ 65. Počet trojčlenný.

Je-li veličina Z přímo nebo nepřímo úměrna s veličinami X, Y, U.... a známe-li hodnotu Z_1 veličiny Z, která náleží k soustavě hodnot X_1, Y_1, U_1..., můžeme vypočísti hodnotu Z_2, příslušnou k jiné soustavě hodnot veličin X, Y, U..., *počtem trojčlenným*.

Počet trojčlenný jmenujeme *jednoduchým*, závisí-li veličina Z na *jediné* veličině jiné, a *složeným*, závisí-li na *několika jiných* veličinách.

1) *Počet trojčlenný jednoduchý.*

a) Budiž veličina Z přímo úměrna s veličinou X.

Přísluší-li k poměrnému číslu x_1 poměrné číslo z_1

a „ „ x_2 „ „ z_2.

platí úměra $x_1 : x_2 = z_1 : z_2$, z níž lze vypočísti kteroukoli ze čtyř hodnot x_1, x_2, z_1, z_2, známe-li ostatní tři (§ 64., 1. a § 62., 7).

b) Budiž veličina Z jednoduše nepřímo úměrna s X.

Přísluší-li k poměrnému číslu x_1 poměrné číslo z_1

a „ „ x_2 „ „ z_2,

platí úměra $x_1 : x_2 = z_2 : z_1$, z níž lze vypočísti kteroukoli ze čtyř hodnot x_1, x_2, z_1, z_2, známe-li ostatní tři (§ 64., 2. a § 62., 7).

2) *Počet trojčlenný složený.*

Budiž veličina Z přímo úměrna s veličinami X a Y a nepřímo úměrna s veličinami U a V.

Přísluší-li k soustavě čísel poměrných x_1, y_1, u_1, v_1 číslo poměrné z_1

a „ „ „ x_2, y_2, u_2, v_2 „ „ z_2,

platí úměra $z_1 : z_2 = \frac{x_1 y_1}{u_1 v_1} : \frac{x_2 y_2}{u_2 v_2}$, z níž lze vypočísti na př. z_2, známe-li všecka čísla ostatní (§ 64., 5.).

§ 66. Počet úrokový.

Vysvětlení. Pravíme-li, že jistina uložena jest na $p\%$, značí to, že 100 zl. vynese za 1 rok p zl. Výnos z jistiny za jakýkoli čas jmenujeme *úroky*. Jsou-li úroky *přímo úměrny* času, za který z jistiny vzejdou, nazýváme je úroky *jednoduchými*. Počet, jímž nabýváme úroků jednoduchých, nazýváme *jednoduchým počtem úrokovým*.

Úroky jednoduché jsou přímo úměrny a) jistině, b) procentům a c) času.

Neboť, zvětší-li se $\frac{\text{jistina}}{\text{procenta}}$ 2kráte, 3kráte, 4kráte... atd., zvětší se úroky 2kráte, 3kráte, 4kráte atd. a že úroky přímo úměrny jsou času, bylo ustanoveno.

Příklad 1. Kolik úroků vynese jistina k *zl.* uložená na p % za n let při úrokování jednoduchém?

100 *zl.* vynese za 1 *rok* p *zl.*
k *zl.* „ „ n *roků* x *zl.*

$x : p = k \,.\, n : 100 \,.\, 1,$ (§ 65., 2)

$$x = \frac{k \,.\, p \,.\, n}{100}.$$

Příklad 2. Kterou jistinu uložiti jest na p % po n let, aby vynesla u zl. úroků při jednoduchém úrokování?

Příklad 3. Na kolik procent uložiti jest jistinu k zl. po n let, aby vynesla u zl. úroků při úrokování jednoduchém?

Příklad 4. Jak dlouho musí býti uložena jistina k zl., aby vynesla u zl. úroků při p % úrokování jednoduchém?

Příklad 5. Někdo má platiti po n letech částku k zl. Jak velkou částku bylo by mu platiti hned při p % jednoduchém úrokování?

Vysvětlení. Částka k jest splatna až po n letech. Zaplatí-li dlužník hned, jest mu zaplatiti částku k', která by za n let vyrostla na k. Částku k' jmenujeme částkou *diskontovanou* a rozdíl $(k - k')$ *diskontem*.

Dle tohoto vysvětlení lze úlohu 5. také takto vysloviti:

Jak velkou částku k' uložiti jest nyní, aby za n let při p % jednoduchém úrokování vzrostla na k?

100 zl. vzroste za n let na $(100 + np)$ zl.,

k' zl. „ „ „ „ k zl.

Zvětší-li se částka původní 2krát, 3krát..., bude i hodnota její po n letech 2kráte, 3kráte atd. větší, t. j. částka původní jest *jednoduše přímo úměrna* s částkou vzrostlou. Platí tudíž úměra $k' : 100 = k : (100 + np)$, z níž plyne

$$k' = \frac{100}{100 + np}\, k.$$

Místo toho soudívá se chybně takto:

Zaplatí-li dlužník dluh splatný po n letech hned, platí o úroky z toho dluhu za n let vzešlé méně. A poněvadž úroky z k zl. za n let při p % úr. jednoduchém jsou $\frac{k \,.\, p \,.\, n}{100}$, obnáší hotové placení $k'' = k - \frac{kpn}{100}$ čili $k'' = \frac{100 - pn}{100}\, k$.

Chyba při tomto řešení záleží v tom, že úroky počítají se z hodnoty k, jíž dluh nabude až po n letech.

Vypočítávání diskontované hodnoty prvním způsobem nazýváme diskontováním *na sto*, způsob druhý slove diskontováním *ve stu*.

Pro čas menší jednoho roku a pro malé částky k jest rozdíl mezi diskontováním na sto a ve stu nabytými hodnotami nepatrný. Proto obchodníci vypočítávají v takových případech diskonto „*ve stu*“ místo „*na sto*“, poněvadž ono snáze než toto vypočísti lze.

O diskontování promluvíme ještě při složeném počtu úrokovém.

§ 67. Počet spolkový.

Základní úlohou počtu spolkového jest:

Jistá veličina, jejíž číslo poměrné jest a, má býti rozdělena v díly, které jsou k sobě v poměru $m : n : p \ldots$ Velikosť těchto dílů budiž vypočtena.

Nazveme-li čísla poměrná žádaných dílů x, y a z, musí býti dle podmínky $x : y : z : \ldots = m : n : p : \ldots$

Užijeme-li věty 6. § 63., nabudeme

$$(x + y + z \ldots) : (m + n + p) = x : m = y : n = z : p$$

a poněvadž $x + y + z \ldots = a$, jest $a : (m + n + p) = x : m = y : n = z : p$.

Z těchto úměr jde, že jest

$$x = a\,\frac{m}{m + n + p},$$

$$y = a\,\frac{n}{m + n + p},$$

$$z = a\,\frac{p}{m + n + p}.$$

Závisejí-li čísla poměrná m, n a p na *jediné* okolnosti, jmenujeme počet spolkový *jednoduchým*; pak-li závisejí na několika okolnostech, jmenujeme jej *složeným*.

Příklad jednoduchého počtu spolkového.

Při jistém úpadku obnášela passiva 72.500 zl. a aktiva 30.800 zl. Kolik dostane každý z věřitelů A, B a C z těchto aktiv, byl-li věřitel A súčastněn v onom podniku

21.700 zl., věřitel B 18.300 zl. a věřitel C 25.200 zl. a připadá-li zbytek passiv na ostatní účastníky?

Nazveme čísla poměrná částek, která připadají na osoby A, B, C a na ostatní účastníky, x, y, z a u, pokládajíce při tom 1 zlatý za jednotku. Čísla tato musí vyhovovati podmínce

$$x : y : z : u = 21700 : 18300 : 25200 : 7300,$$
$$= 217 : 183 : 252 : 73,$$

kdež 7300 zl. značí zbytek passiv připadající na ostatní účastníky.

Z této úměry vyplývají úměry

$$(x + y + z + u) : (217 + 183 + 252 : 73) = x : 217 = y : 183 = z : 252 = u + 73,$$

z nichž jde, — položíme-li $x + y + z + u = 30800$, —

$$x = 9218{\cdot}75,\ y = 7774{\cdot}34,\ z = 10705{\cdot}65.$$

Osoba A dostane tudíž 9218·75 zl.,
„ B „ „ 7774·34 „
„ C „ „ 10705·65 „.

Příklad složeného počtu spolkového:

Osoba A začala 1. ledna obchod vloživši do něho 9000 zl., 1. března přidružila se k ní osoba B s vkladem 7000 zl. a 15. dubna osoba C s vkladem 5000 zl. Na konci roku rozděliti jest zisk 1764 zl. mezi tyto osoby, hledíc jen k velikosti jich vkladů a času, po který se obchodu účastnily.

Osoba
A měla v obch. 9000 zl. po 12 měs. a dostane tudíž tolik, jako by se účastnila 9000 zl. × 12 po 1 m
B „ „ 7000 „ „ 10 „ „ „ „ „ „ 7000 zl. × 10 „
C „ „ 5000 „ „ $8\frac{1}{2}$ „ „ „ „ „ „ 5000 zl. × $8\frac{1}{2}$ „

Nazveme-li čísla poměrná částek, které na osoby A, B a C ze zisku připadnou x, y a z, platí úměra $x : y : z = 9000 \times 12 : 7000 \times 10 : 5000 \times 8\frac{1}{2}$, z níž vypočteme podobným způsobem jako prve, že

$$x = 864,\quad y = 560,\quad z = 340.$$

Dostane tudíž ze zisku osoba A... 864 zl.,
„ B... 560 zl.
a „ C... 340 zl.

Část sedmá.

O rovnicích stupně prvého.

O rovnicích vůbec.

§ 68. Vysvětlení.

1) Mezi rovnicemi

1) $a = a$, 2) $a + b = a + b$, 3) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$,
4) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, 5) $2x = 1$, 6) $3x + 5 = 11$

jsou rovnice tří rozdílných druhů. V rovnicích 1. a 2. levá strana rovná se pravé nejen velikostí, ale i tvarem. Tato shoda ve tvaru nevyskytuje se

v rovnicích ostatních. Avšak v rovnicích 3. a 4. může jí býti dosaženo, provedeme-li úplně výkony na levých stranách těchto rovnic vyznačené, kdežto v rovnicích 5. a 6. shody této dosáhnouti nelze, dokud v nich zůstane číslo označené písmenem x.

Rovnice prvního druhu (1. a 2.) jmenujeme rovnicemi *identickými* čili *stejninami*, rovnice druhého druhu (3. a 4.) rovnicemi *analytickými* a rovnice třetího druhu (5. a 6.) rovnicemi *synthetickými* čili *určovacími*.

Z podaného vysvětlení jest patrno:

a) *Identickou* rovnicí jmenujeme rovnici, jejíž levá strana jest totožná s pravou.

b) Rovnice *analytická* jest rovnice, která provedením výkonů v ní naznačených stane se rovnicí identickou.

c) Rovnicí *synthetickou* čili *určovací* jmenujeme rovnici, jejíž strany nestanou se totožnými, ani když všecky výkony na obou jejích stranách provedeme, čili jinak: Která rovnice není ani *identická* ani *analytická*, jest rovnicí *synthetickou*.

2) O hodnotách, které za obecné veličiny v rovnici se vyskytující lze položiti, aniž rovnost obou stran rovnice jest porušena, pravíme, že rovnici *vyhovují*.

Na základě definic ve 2. vytčených lze tvrditi:

a) *Rovnici identické i analytické jest vyhověno libovolnými hodnotami čísel obecných, která se v ní vyskytují.*

Důkaz. Dostačí dokázati tvrzení toto o rovnicích identických, poněvadž každou rovnici analytickou lze převésti na identickou. Avšak pro rovnici identickou jest tvrzení toto z toho patrno, že obě strany rovnice identické jsou totožné.

b) *Je-li v rovnici určovací jediné číslo obecné, jehož hodnota udána není, nelze za ně položiti hodnotu libovolnou, nýbrž jen jednu nebo několik hodnot určitých.*

Na př. v rovnici $2x = 1$ lze za x položiti jen $\frac{1}{2}$, má-li býti rovnici vyhověno, neboť je-li $x \gtrless \frac{1}{2}$, jest levá strana rovnice $\gtrless 1$ a pouze pro $x = \frac{1}{2}$ jest $2x = 1$.

V rovnici $x^2 - 5x + 6 = 0$ lze položiti za x jen dvě hodnoty, aby jí bylo vyhověno, a to $x = 2$ a $x = 3$, jak poznáme píšíce ji ve tvaru $(x - 2)(x - 3) = 0$.

Rovnice tato žádá totiž, aby byl součin roven 0. Tomu bude vyhověno

poprvé, když $x - 2 = 0$, což žádá, aby $x = 2$,

a podruhé, když $x - 3 = 0$, „ „ „ $x = 3$.

A poněvadž součin $(x - 2)(x - 3)$ jen v těchto dvou případech může býti rovným 0, vyhovují jen tyto dvě hodnoty předložené rovnici. Tak jest tomu i při jiných rovnicích určovacích.

Jsou-li v rovnici synthetické *dvě* čísla obecná, jichž hodnoty dány nejsou, lze za *jedno* z nich položiti hodnotu libovolnou, ale nikoli za číslo druhé. Neboť položíce za jedno z těch čísel libovolnou hodnotu, nabýváme rovnice, v níž jest jediné číslo obecné, jehož hodnota udána není, a za to nelze dle svrchu vytčeného položiti hodnotu libovolnou.

Na př. položíme-li v rovnici

$x + y = 15$ za x číslo 1, jest nám za y položiti 14,

„ x „ 2. „ „ „ y „ 13 atd.

Podobně se to má, jsou-li v rovnici synthetické více než 2 čísla, jichž hodnoty udány nejsou.

Z a) a b) soudíme: α) *Každá rovnice, jíž jest vyhověno libovolnými hodnotami čísel obecných v ní přicházejících, jest rovnicí analytickou (nebo identickou).* β) *Každá rovnice, jíž není vyhověno libovolnými hodnotami čísel obecných v ní se vyskytujících, jest rovnicí synthetickou.*

3) Čísla obecná rovnice synthetické, která z předu udána nejsou, jmenujeme *neznámými.* Ty hodnoty, které za neznámé vložiti jest, aby bylo rovnici vyhověno, jmenujeme *kořeny rovnice.* Určování kořenů rovnice nazýváme *řešením rovnice.*

Z tohoto vysvětlení jest patrno:

Vložíme-li do rovnice synthetické za neznámou (neznámé) kořen (kořeny) této rovnice, nabudeme rovnice analytické.

Na př. kořenem rovnice $3x + 5 = x + 9$ jest číslo 2.

Vložíce tuto hodnotu za x do dané rovnice, nabýváme rovnice analytické

$$3 \cdot 2 + 5 = 2 + 9,$$

z níž plyne identická rovnice $11 = 11$.

Veličiny neznámé označujeme obyčejně posledními písmeny abecedy, tedy x, y, z, u, v ...

Podle počtu neznámých rozeznáváme rovnice o jedné, dvou, třech atd. neznámých.

4) Jak později seznáme, převádí se řešení rovnic o několika neznámých vždy na řešení rovnice o jedné neznámé.

Řešení rovnice o jedné neznámé záleží v tom, že předloženou rovnici postupně přetvořujeme, až dospějeme k rovnici, na jejíž jedné straně jest neznámá veličina samotna a na jejíž druhé straně jsou veličiny známé. Potom jest řešení ukončeno.

Přetvořujíce rovnici dbejme toho, aby

a) *kořeny rovnice se nezměnily,*

b) *aby se jich počet nezměnil.*

Změny rovnice, kterými jest podmínkám a) a b) dosť učiněno, jmenujeme *dovolenými*. Rovnice, které se shodují ve všech svých kořenech, jmenujeme *rovnomocnými* (equivalentními).

§ 69. O dovolených změnách rovnice.

1) *K oběma stranám rovnice jest dovoleno stejný výraz připočísti i od nich stejný výraz odečísti.*

Důkaz. Nazveme celou levou stranu rovnice X a pravou X', tak že daná rovnice jest

$$X = X'. \qquad (1)$$

Připočteme-li k ní nebo odečteme-li od ní stejninu $X'' = X''$, kdež X'' zastupuje libovolný výraz, nabudeme rovnice

$$X \pm X'' = X' \pm X'', \qquad (2)$$

o jejíchž kořenech jest nám dokázati, že se shodují i co do velikosti i co do počtu s kořeny rovnice 1.

Jesti především patrno, že každá hodnota, která vložena jsouc za neznámou (neznámé) učiní

X rovno X', učiní i $X \pm X''$ rovno $X' \pm X''$

a naopak, že každá hodnota, která vložena jsouc za neznámou učiní

$X \pm X''$ rovno $X' \pm X''$, učiní i X rovno X'.

Z toho jde, že každý kořen, který vyhovuje rovnici (1), vyhovuje i rovnici (2) a naopak. Mají tudíž tyto dvě rovnice stejné kořeny a stejný jich počet, t. j. vytčená změna rovnice jest dovolena.

Na základě této dovolené změny lze každý člen rovnice *převésti* s jedné její strany na druhou, změní-li se při tom jeho znaménko v protivné.

Jde-li na př. v rovnici $x + a = b$ o převod členu a s levé strany na pravou, odečteme od rovnice $x + a = b$

stejninu $a = a$,

čímž nabudeme $x = b - a$.

Abychom v rovnici $x - a = b$ převedli a na pravou stranu,

připočteme k ní $a = a$,

čímž nabudeme $x = b + a$.

Dále z toho vyplývá: Vyskytuje-li se na obou stranách rovnice stejný člen, může býti vynechán, čili *ruší se*.

Neboť je-li $x + a = b + a$,

nabudeme odečtením $a = a$

$x = b$,

a podobně ve případě $x - a = b - a$

nabudeme připočtením $a = a$

$x = b$.

Převedeme-li všecky členy rovnice na jednu stranu, obdržíme na druhé straně 0 a pravíme, že jest rovnice *uvedena na nullu*.

2) *Obě strany rovnice dovoleno jest násobiti výrazem od nully rozdílným, ve kterém neznámé není.*

Důkaz. Dle věty 1. lze každou rovnici uvésti na 0. Výraz, který se vyskytne, uvedeme-li rovnici na nullu, na druhé její straně, označme krátce X a číslo (nebo výraz), jímž obě strany rovnice

$$X = 0 \tag{1}$$

násobíme, budiž označeno A.

Násobením nabudeme rovnice

$$AX = 0, \tag{2}$$

o jejíchž kořenech jest nám dokázati, že se shodují i co do velikosti i co do počtu s kořeny rovnice 1.

Každý kořen rovnice 1. má vlastnosť, že vložen jsa za neznámou do výrazu X, učiní jej rovným 0, činí tudíž i výraz AX rovným 0 (§ 18., 1.), t. j. každý kořen rovnice 1. jest i kořenem rovnice 2.

Naopak zase každý kořen α rovnice $AX = 0$, t. j. každá hodnota, která vložena jsouc za neznámou x do výrazu AX učiní tento výraz rovným nulle, musí učiniti X rovným nulle. Neboť v součinu AX činitel A podle podmínky nulle se nerovná a vložení α za x v A nepůsobí, poněvadž ve výraze A neznámé x není a má-li tudíž AX býti rovno 0,

$$\text{musí býti } X = 0,$$

t. j. každý kořen rovnice 2. jest i kořenem rovnice 1.

Všecky kořeny rovnice 1. jsou tudíž i kořeny rovnice 2. a naopak.

Na základě této věty lze *odstraniti* z rovnice *zlomky*, v jichž jmenovatelích neznámého čísla není. K tomu cíli dostačí násobiti rovnici nejmenším společným násobkem všech vytčených jmenovatelů.

Na př. jde-li o odstranění zlomků v rovnici

$$\frac{x}{a} + \frac{b^2}{a^2} = 1,$$

násobme ji stejninou $a^2 = a^2$, čímž nabudeme

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{b^2}{a^2}\right) a^2 = a^2$$

a provedeme-li na levé straně naznačený výkon, $ax + b^2 = a^2$.

Podobně odstraníme v rovnici

$$\frac{x}{6} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

zlomky, násobíme-li ji stejninou $18 = 18$,

čímž nabudeme $3x + 6 = 8$.

Z věty 2. jest též patrno, že znaménka *všech členů* rovnice dovoleno jest *proměniti ve protivná*, neboť tím násobíme rovnici -1, což jest dovoleno.

Na př. z rovnice $-x + a = -b$ nabudeme touto proměnou $x - a = b$.

3) Úsudky pronesené ve druhé části důkazu věty 2. pozbyly by platnosti, kdyby výraz A roven byl 0, nebo kdyby v sobě choval neznámou x.

Neboť kdyby a) $A = 0$, bylo by rovnici $AX = 0$ vyhověno každou hodnotou neznámé x, poněvadž pro $A = 0$ a pro jakoukoli hodnotu výrazu X jest $AX = 0$. Každý kořen rovnice $AX = 0$ (t. j. libovolná hodnota), nebude tudíž zároveň kořenem rovnice $X = 0$, z čehož jde, že obě strany rovnice 0 násobeny býti nesmějí.

Kdyby b) výraz A choval v sobě neznámou x, mohla by býti příčinou toho, že $AX = 0$, i ta okolnosť, že pro jisté hodnoty neznámé x, a to pro ty, které vyhovují rovnici $A = 0$, stalo by se $A = 0$, aniž by se výraz X pro tyto hodnoty rovnal nulle. Těmito zvláštními hodnotami neznámé x bylo by tudíž vyhověno rovnici $AX = 0$, ale nikoliv rovnici $X = 0$.

Na př. rovnici $x - 3 = 0$ vyhovuje jediná hodnota, t. j. $x = 3$. Avšak násobíme-li tuto rovnici výrazem $A = x - 2$, nabudeme rovnice $(x-2)(x-3) = 0$, jíž vyhovuje nejen hodnota $x = 3$, ale i hodnota $x = 2$, která činí výraz A rovným nulle. Všecky kořeny rovnice $(x - 2)(x - 3) = 0$ nejsou tedy zároveň kořeny rovnice $x - 3 = 0$, z čehož jde, *že výrazem, který v sobě neznámou chová, rovnice všeobecně násobena býti nesmí, poněvadž se tím do rovnice dostanou kořeny, kterých tam původně nebylo.* Než případ tento zasluhuje ještě bližšího povšimnutí.

Kdyby v rovnici byly zlomky, v jichž jmenovatelích jest neznámá, a kdyby A bylo nejmenším společným násobkem těchto jmenovatelů, nedostaly by se do rovnice, kdybychom ji násobili výrazem A, nové kořeny.

Pravdivosť tohoto tvrzení poznáme aspoň v několika případech.

a) Rovnice $\frac{4}{x+4} + \frac{x-6}{x^2-16} = 1$ má dva kořeny, a to $x = 2$ a $x = 3$,

neboť $\frac{4}{2+4} + \frac{2-6}{4-16}$ čili $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ rovno jest 1, jak daná rovnice žádá, a podobně $\frac{4}{3+4} + \frac{3-6}{9-16}$ rovno jest 1.

Násobíme-li tuto rovnici nejmenším společným násobkem jmenovatelů $x + 4$ a $x^2 - 16$, t. j. výrazem $x^2 - 16$, nabudeme rovnice

$$4(x - 4) + x - 6 = x^2 - 16,$$

jíž zase vyhovují kořeny 2 a 3.

Že jí nevyhovují kořeny jiné, že tedy násobením dané rovnice výrazem $x^2 - 16$ jí kořenů nepřibylo, patrno jest z toho, že rovnici tu lze psáti ve tvaru $(x - 2)(x - 3) = 0$ (§ 68., 2).

b) Rovnici $1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3} = 0$ vyhovují tři kořeny, a to -1, $+2$ a -3.

Znásobíce tuto rovnici x^3, t. j. nejmenším společným násobkem jmenovatelů, nabudeme rovnice

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0,$$

jíž vyhovují tytéž tři kořeny jako prve, t. j. -1, $+2$ a -3.

Že jí nevyhovují kořeny jiné, jest patrno z toho, že rovnici tu lze psáti ve tvaru $(x+1)(x-2)(x+3)=0$, jak se vynásobením na levé straně této rovnice přesvědčiti lze. Rovnice poslední žádá totiž, aby součin $(x+1)(x-2)(x+3)$ byl roven 0. Avšak to může nastati jen tenkráte, je-li některý jeho činitel nulle roven, což nastane jen pro $x=-1$, $x=+2$ a $x=-3$.

Násobením rovnice $1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x^3}=0$ nejmenším společným násobkem všech jmenovatelů, t. j. x^3, nepřibylo jí tudíž kořenů.

Z toho soudíme, že jest *dovoleno rovnici násobiti nejmenším společným násobkem všech v rovnici se vyskytujících jmenovatelů.*

Na základě této věty lze z rovnice odstraniti *všecky zlomky.* K tomu cíli dostačí násobiti rovnici *nejmenším společným násobkem všech v rovnici se vyskytujících jmenovatelů.*

Na př. z rovnice

$$\frac{30-x}{2x^2}+\frac{3}{x}=\frac{15}{4x}$$

odstraníme zlomky aniž počet kořenů změníme, násobíce ji $4x^2$. Tím nabudeme rovnice

$$(30-x)2+3\,.\,4\,.\,x=15x,$$

která jest zlomků prosta.

4) Z věty 2. vychází na jevo:

Rovnici dovoleno jest děliti výrazem od 0 rozdílným, v němž neznámé není.

Neboť je-li dovoleno z rovnice $X=0$ vytvořiti rovnici $AX=0$, při čemž jest A od nully rozdílno a neznámou neobsahuje, může býti naopak z rovnice $AX=0$ vytvořena rovnice $X=0$ a to se stane dělením rovnice výrazem A.

Na základě této věty můžeme si vždy při neznámé opatřiti součinitele rovného 1.

Na př. abychom v rovnici $ax=b$ nabyli při x součinitele 1,

dělme obě strany číslem $a=a$,

čímž povstane $x=\frac{b}{a}$.

Z této věty vychází též na jevo:

Mají-li všecky členy rovnice společného činitele, v němž se neznámá nevyskytuje může býti tento činitel vynechán, čili jinými slovy: *rovnice jím může býti krácena.*

Na př. v rovnici

$ax+ab=ac$ mají všecky členy společného činitele a.

Dělíme-li tuto rovnici stejninou $a=a$,

nabudeme $x+b=c$,

kdež společného činitele a není.

5) *Krátiti rovnici společným činitelem všech členů, který neznámou v sobě chová, dovoleno není.*

Neboť hodnota neznámé x, která učiní, že tento společný činitel nabude hodnoty rovné 0, učiní obě strany rovnice rovny 0, t. j. jest kořenem rovnice dané. Avšak o tento kořen bychom přišli vynechajíce onoho společného činitele. Řešení rovnice dané bylo by potom *kusé.*

Na př. rovnici $x(x-3)-(x-3)=3(x-3)$ není dovoleno krátiti činitelem $(x-3)$, neboť rovnice $x-1=3$ tímto krácením povstalá má jediný kořen $x=4$, kdežto rovnice původní má mimo tento kořen ještě kořen $x=3$, který byl krácením ztracen.

§ 70. O normálném tvaru rovnice. O upravení rovnice.

Tvary

$$ax+b=0,\quad ax^2+bx+c=0,\quad ax^3+bx^2+cx+d=0 \text{ atd.}$$

nazýváme *normálnými tvary* rovnic o jedné neznámé. — Člen, ve kterém neznámé není, jmenujeme členem *samostatným.*

Věty v předcházejícím § vytčené vystačí, abychom každou rovnici, v níž se neznámá vyskytuje jen v takových početních spojeních, jaká jsme dosud poznali, uvésti mohli na tvar normálný.

K tomu cíli

a) Vykonáme všecky výkony, které jsou v rovnici naznačeny, jmenovitě ty, které mají býti vykonány s veličinou neznámou.

b) Odstraníme všecky zlomky v rovnici.

c) Uvedeme rovnici na nullu.

d) Vytkneme stejnou mocninu neznámé ze členů, v nichž se vyskytuje.

e) Uspořádáme mnohočlen v rovnici se vyskytující sestupně podle mocnin neznámé.

Převádění rovnice na tvar normálný jmenujeme jejím *upravením.*

Je-li nejvyší mocnitel neznámé veličiny v normálném tvaru rovnice roven 1, 2, 3 ... n, pravíme, že rovnice jest *stupně* 1., 2., 3.... n^{ho}.

Rovnice 1^{ho} stupně jmenujeme jinak *lineárné,*
„ 2^{ho} „ „ „ *kvadratické,*
„ 3^{ho} „ „ „ *kubické,*
„ 4^{ho} „ „ „ *bikvadratické.*

Rovnice o několika neznámých upravujeme, řídíce se podobnými zásadami jako při upravování rovnic o jedné neznámé.

Na př. $ax+by+c=0$, $ax^2+bxy+cy^2+dx+cy+f=0$ atd. jsou upravené rovnice o dvou neznámých.

Vyskytují-li se v rovnici o několika neznámých členy, v nichž jest nejvýše 1, 2, 3 ... n činitelů neznámých, pravíme, že jest rovnice tato *stupně* 1., 2., 3., ... n^{ho}.

Na př. rovnice $ax + by + c = 0$ jest stupně 1ho, poněvadž žádný člen její nechová více než jednoho neznámého činitele; rovnice

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, $ax^2 + by^2 + c = 0$, $xy + m = 0$

jsou rovnice 2ho stupně o dvou neznámých, poněvadž v každé z nich jsou členy, kteréž obsahují nejvýše dva neznámé činitele.

Rovnici o několika neznámých, jejíž každý člen chová stejný počet neznámých činitelů, jmenujeme *stejnoměrnou* (homogenní).

Na př. $ax + by = 0$ jest stejnoměrná rovnice stupně 1ho a $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ stejnoměrná rovnice stupně 2ho.

Obsahuje-li rovnice náležitě jsouc upravena konečný počet členů tvaru ax^r, jmenuje se rovnicí *algebraickou*.

Rovnice, které nejsou algebraické, jsou *transcendentní*.

O řešení rovnic 1ho stupně.

§ 71. Řešení rovnic 1ho stupně (lineárných) o jedné neznámé.

1) Normálný tvar lineárné rovnice o jedné neznámé jest

$$ax + b = 0.$$

Abychom tuto rovnici rozřešili, odečtěme od obou její stran b, čímž nabudeme rovnice

$$ax = -b,$$

jejíž obě strany dělme a. Tím povstane

$$x = -\frac{b}{a}$$

a rovnice 1. jest rozřešena (§ 68., 4.).

Příklad. Vypočísti jest harmonický střed dvou čísel a a b.

Označíme-li žádaný střed písmenem x, platí dle § 62., 13. úměra

$$(a - x) : (x - b) = a : b$$

čili $(a - x)b = (x - b)a$, již řešiti jest podle x.

Obdržíme tu nejprv $ab - bx = ax - ab$, potom $ab + ab = ax + bx$ čili $(a + b)x = 2ab$, z čehož konečně jde $x = \frac{2ab}{a + b}$.

Z toho výsledku plyne zajímavá vlastnosť středu harmonického.

Jest totiž $\frac{1}{x} = \frac{a + b}{2ab}$ čili $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, t. j. *převrácená hodnota harmonického středu dvou čísel jest arithmetickým středem mezi převrácenými hodnotami oněch čísel* (§ 62., 8).

§ 72. Řešení rovnic 1ho stupně o dvou neznámých.

Lineárnou rovnici o dvou neznámých uvádíme před řešením na tvar

$$ax + by = c. \qquad (1)$$

1) *Jediná rovnice o dvou neznámých nedostačí k jich určení.*

Důkaz. Položíme-li v rovnici $ax + by = c$ za $\frac{x}{y}$ *libovolnou* hodnotu, zůstane v rovnici ještě jedna neznámá $\frac{y}{x}$, kterou lze vypočísti dle § 71.

Z toho jde, že ke každému $\frac{x}{y}$ náleží jediné určité $\frac{y}{x}$ a poněvadž za $\frac{x}{y}$ položiti lze libovolnou hodnotu, jest soustav x, y dané rovnici vyhovujících nekonečně mnoho, t. j. neznámé x a y rovnicí $ax + by = c$ určeny nejsou.

2) Úvahy pronesené o rovnici $ax + by = c$ platí i o jiné rovnici lineárné $a'x + b'y = c'$. (2)

I této rovnici vyhovuje nekonečné množství párů hodnot x, y, o nichž lze dokázati, neodporují-li sobě rovnice 1. a 2., větu:

Soustava párů hodnot **x, y** *vyhovujících rovnici* $\mathbf{ax + by = c}$
a „ „ „ **x, y** *„ „* $\mathbf{a'x + b'y = c'}$ *shodují se v jediném páru.*

Hodnoty x a y tohoto páru vyhovují rovnici 1. i 2. a proto je jmenujeme kořeny této soustavy rovnic.

Odporují-li sobě dané rovnice, jako na př. rovnice $x + y = 5$ a $x + y = 7$, nemají žádného páru společných kořenů. Tak v našem příkladě není čísel x a y, jichž součet by byl současně roven 5 i 7.

Kořeny dvou lineárných rovnic o dvou neznámých lze vyhledati několika způsoby a každý z nich přesvědčí nás o pravdivosti věty svrchu vyslovené, že totiž jsou vždy dvě hodnoty x a y, které vyhovují sobě neodporujícím rovnicím 1. i 2.

Podstata všech způsobů, jimiž rovnice lineárné o dvou neznámých rozřešíme, záleží v tom, že z daných rovnic vyloučíme jednu neznámou, t. j. opatříme si novou rovnici lineárnou, ve které jest jen jedna neznámá, načež rozřešíme tuto rovnici dle § 71.

a) *Methoda substituční* (dosazovací, nahrazovací) záleží v tom, že z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou, na př. y, neznámou druhou, t. j. x, a výraz tím nabytý vložíme za y do rovnice druhé. Tím povstane rovnice o jedné neznámé, již rozřešíme.

1) $ax + by = c$,
2) $a'x + b'y = c'$.

Z 2. rovnice vyplývá, že $y = \frac{c' - a'x}{b'}$. (a)

Poněvadž hledáme taková x a y, která oběma rovnicím vyhovují, tak že x, jakož i y v obou rovnicích totéž značí, můžeme hodnotu za y nabytou z rovnice (2) vložiti do rovnice (1). Tím povstane rovnice

$$ax + b\frac{c' - a'x}{b'} = c,$$

v níž jest jediná neznámá, t. j. x. Řešíce ji dle x, obdržíme

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}.$$

Druhou neznámou, t. j. y, lze nyní vypočísti dvojím způsobem. Buď si počínáme tak jako při vypočtení neznámé x, anebo vložíme hodnotu za x nabytou do rovnice a).

Tím obdržíme

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Příklad.

$$\begin{array}{rr} 1) & 9x + 8y = 80, \\ 2) & 11x + 12y = 100. \end{array}$$

Z 1) $\quad x = \dfrac{80 - 8y}{9}$ $\quad (a)$

do 2) $\quad 11\dfrac{80 - 8y}{9} + 12y = 100,$

$\quad y = 1;$

do a) $\quad x = 8.$

b) *Methoda komparační* (srovnávací) záleží v tom, že z obou rovnic vyjádříme touž neznámou neznámou druhou a nabyté výsledky srovnáme. Tím vznikne rovnice o jedné neznámé, již rozřešíme.

$$\begin{array}{rr} 1) & ax + by = c, \\ 2) & a'x + b'y = c'. \end{array}$$

Z 1. rovnice vyplývá $y = \dfrac{c - ax}{b}$, a)

Z 2. rovnice vyplývá $y = \dfrac{c' - a'x}{b'}$. b)

Poněvadž y v obou rovnicích má značiti totéž, musí býti

$$\frac{c - ax}{b} = \frac{c' - a'x}{b'},$$

ze kteréž rovnice jde

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}.$$

Vložíce tuto hodnotu do rovnice a) nebo do rovnice b), nabudeme

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Příklad.

$$\begin{array}{rr} 1) & 9x + 8y = 80, \\ 2) & 11x + 12y = 100. \end{array}$$

Z 1) $\quad x = \dfrac{80 - 8y}{9},$ $\quad (a)$

ze 2) $\quad x = \dfrac{100 - 12y}{11}.$ $\quad (b)$

Srovnáním a) a b) $\quad \dfrac{80 - 8y}{9} = \dfrac{100 - 12y}{11},$

$\quad y = 1;$

do a) $\quad x = 8.$

c) *Methoda stejných součinitelů**) záleží v tom, že si opatříme nejprve v obou rovnicích při téže neznámé stejné součinitele, načež obě rovnice sečteme nebo odečteme podle toho, jsou-li oni součinitelé nestejně nebo stejně označeni. Tím nabudeme rovnice o jedné neznámé, již rozřešíme.

$$1)\quad ax + by = c,$$
$$2)\quad a'x + b'y = c'.$$

Jde-li o vypočtení neznámé x, vylučme neznámou y. K tomu cíli násobme rovnici 1. číslem b' a rovnici 2. číslem b a nabyté tím rovnice odečtěme.

Tím obdržíme nejprve z 1) $ab'x + bb'y = cb'$,

z 2) $a'bx + bb'y = c'b$.

Odečtením vznikne rovnice $(ab' - a'b)x = cb' - c'b$,

z níž jde, že $x = \dfrac{cb' - c'b}{ab' - a'b}$.

Hodnotu za x nabytou můžeme vložiti do rovnice 1. nebo do 2., čímž povstane rovnice o neznámé y, již vypočteme, nebo můžeme z daných dvou rovnic vyloučiti x a z rovnice tím vzniklé vypočísti y.

Poznámka. Stejné součinitele při téže neznámé v obou rovnicích lze si opatřiti nekonečně mnoha způsoby, neboť onen společný součinitel může býti napřed libovolně vytčen. Chceme-li na př., aby číslo m bylo oním společným součinitelem, násobme rovnici 1. takovým číslem λ, aby $\lambda a = m$, t. j. $\lambda = \dfrac{m}{a}$ a druhou takovým číslem λ', aby $\lambda' a' = m$, t. j. $\lambda' = \dfrac{m}{a'}$.

Nemají-li čísla λ a λ', čili čísla $\dfrac{m}{a}$ a $\dfrac{m}{a'}$ býti zlomky, musí býti m společným násobkem součinitelů a a a'. Nejlépe tudíž poslouží nám jich nejmenší společný násobek.

Příklad.

$$\begin{array}{lll} & 1)\quad 9x + 8y = 80, & \\ & 2)\quad 11x + 12y = 100, & \\ \hline 1)\ \times 3 & 27x + 24y = 240, & \text{(a)} \\ 2)\ \times 2 & 22x + 24y = 200. & \text{(b)} \\ \hline a) - b) & 5x = 40, & \\ & x = 8; & \\ \text{do 1)} & y = 1. & \end{array}$$

3) Srovnáme-li spolu výrazy pro kořeny rovnic

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c',$$

t. j. výrazy $x = \dfrac{cb' - c'b}{ab' - a'b}$, $y = \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$,

shledáváme,

1) že oba ty výrazy jsou zlomky o stejných jmenovatelích, které obdržíme, když součinitele neznámých x a y v obou rovnicích křižmo spolu násobíme a nabyté tím součiny odečteme;

---

*) Methoda tato nazývá se jinak methodou *sčítací* (addiční), *odčítací* (subtrakční) nebo též methodou *anglickou*.

2) že čítatele oněch zlomků odvodíme z jich jmenovatelů dosadíce za součinitele neznámé, o jejíž vypočtení jde, pravé strany daných rovnic.

Označíme-li jmenovatele $ab' - a'b$ symbolem $\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix}$, jest nám výrazy $cb' - c'b$ a $ac' - a'c$ označiti důsledně $\begin{vmatrix} c, & b \\ c', & b' \end{vmatrix}$ a $\begin{vmatrix} a, & c \\ a', & c' \end{vmatrix}$ a užijíce těchto označení, nabýváme kořenů daných rovnic ve tvaru

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c, & b \\ c', & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a, & c \\ a', & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix}}.$$

Podle toho jsou na př. kořeny rovnic

$$2x + 3y = 8,$$
$$3x + 4y = 11$$

obsaženy ve vzorcích

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8, & 3 \\ 11, & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2, & 3 \\ 3, & 4 \end{vmatrix}} \text{ a } y = \frac{\begin{vmatrix} 2, & 8 \\ 3, & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2, & 3 \\ 3, & 4 \end{vmatrix}},$$

$$\text{t. j. } x = \frac{8 \cdot 4 - 3 \cdot 11}{2 \cdot 4 - 3 \cdot 3} = \frac{-1}{-1} = 1,$$

$$y = \frac{22 - 24}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Symbolické výrazy té podoby, jako jest $\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix}$, nazýváme *determinanty stupně druhého.*

§ 73. Řešení rovnic 1ho stupně o třech neznámých.

Lineárnou rovnici o třech neznámých uvedeme před řešením na tvar

$$ax + by + cz = d.$$

1) *Jedna ani dvě rovnice o třech neznámých nestačí k určení těchto neznámých.*

Neboť je-li dána a) jediná rovnice o třech neznámých, můžeme za dvě z nich dosaditi libovolné hodnoty, načež nabudeme rovnice lineárné o jedné neznámé, již dle § 71. rozřešíme.

Jsou-li b) dány dvě rovnice o třech neznámých, můžeme za jednu z neznámých položiti jakoukoli hodnotu, načež nabudeme dvou lineárných rovnic o dvou neznámých, jež dle § 72. rozřešíme.

2) Třem různým lineárným rovnicím o třech neznámých x, y a z vyhovuje *jediná trojina* hodnot x, y a z. Hodnoty této trojiny jmenujeme *kořeny* dané soustavy rovnic.

Podstata určení těchto kořenů záleží v tom, že z daných tří rovnic opatříme si dvě lineárné rovnice o dvou neznámých, jež potom rozřešíme dle § 72.

Abychom si z daných tří rovnic

$$1)\quad a\,x + b\,y + c\,z = d,$$
$$2)\quad a'\,x + b'\,y + c'\,z = d',$$
$$3)\quad a''x + b''y + c''z = d''$$

opatřili dvě rovnice lineárné o dvou neznámých, užijeme týchž method, které byly v § 72. vyloženy. Každá z těchto method poučí nás o pravdivosti věty 2.

a) *Methoda substituční.* Záleží v tom, že z jedné daných rovnic vyjádříme jednu neznámou, na př. z, druhými dvěma neznámými, t. j. x a y, a vložíme výraz za z nabytý do ostatních dvou rovnic. Tím nabudeme dvou rovnic o 2 neznámých, jež rozřešíme dle § 72.

Ze 3. rovnice jde $z = \dfrac{d'' - a''x - b''y}{c''}$, (a)

což vloženo jsouc do 1. a 2. poskytne $a\,x + b\,y + c\,\dfrac{d'' - a''x - b''y}{c''} = d$

a $\quad a'x + b'y + c'\,\dfrac{d'' - a''x - b''y}{c''} = d',$

kteréž rovnice upravením nabývají tvaru

$$(a\,c'' - a''c)\,x + (b\,c'' - b''c)\,x = d\,c'' - d''c,$$
$$(a'c'' - a''c')\,y + (b'c'' - b''c')\,y = d'c'' - d''c'.$$

Řešíce tyto rovnice některým v § 87. vytčeným způsobem, nabýváme

$$x = \frac{db'c'' + d'b''c + d''bc' - d''b'c - db''c' - d'bc''}{ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - ab''c' - a'bc''},$$

$$y = \frac{ad'c'' + a'd''c + a''dc' - a''d'c - ad''c' - a'dc''}{ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - ab''c' - a'bc''}.$$

Vložením těchto hodnot za x a y do rovnice (a) nabudeme po náležitém upravení

$$z = \frac{ab'd'' + a'b''d + a''bd' - a''b'd - ab''d' - a'bd''}{ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - ab''c' - a'bc''}.$$

Příklad.

$$1)\quad x + 2y + 3z = 32,$$
$$2)\quad 2x + 3y + z = 42,$$
$$3)\quad 3x + y + 2z = 40.$$

Z 1) $\quad x = 32 - 2y - 3z,$ (a)

do 2) $\quad 2(32 - 2y - 3z) + 3y + z = 42,$

$$y + 5z = 22;$$ (b)

do 3) $\quad 3(32 - 2y - 3z) + y + 2z = 40,$

$$5y + 7z = 56.$$ (c)

Řešiti jest

$$b)\quad y + 5z = 22,$$
$$c)\quad 5y + 7z = 56.$$

Tím nabudeme

$$y = 7,$$
$$z = 3;$$

do a) $\quad x = 9.$

b) *Methoda komparační.* Záleží v tom, že vyjádříme z každé dané rovnice touž neznámou, na př. z, druhými dvěma, načež srovnáme výsledky nabyté. Tím povstanou dvě lineárné rovnice o dvou neznámých, jež rozřešíme dle § 72

Z 1. rovnice obdržíme $z = \frac{d - a\,x - b\,y}{c}$,

„ 2. „ „ $z = \frac{d' - a'\,x - b'\,y}{c'}$, (a)

„ 3. „ „ $z = \frac{d'' - a''x - b''y}{c''}$.

A poněvadž z ve všech třech rovnicích má značiti totéž, musí býti

$$\frac{d - ax - by}{c} = \frac{d' - a'x - b'y}{c'} = \frac{d'' - a''x - b''y}{c''},$$

ve kteréž rovnici složené obsaženy jsou dvě na sobě nezávislé rovnice, na př.

$$\frac{d - ax - by}{c} = \frac{d' - a'x - b'y}{c'},$$

$$\frac{d - ax - by}{c} = \frac{d'' - a'x - b''y}{c''},$$

z nichž vypočteme x a y. Hodnoty tím nabyté vložíme do některé z rovnic (a) a vypočteme z.

Příklad.

1) $x + 2y + 3z = 32$,
2) $2x + 3y + z = 42$,
3) $3x + y + 2z = 40$.

Z 1) $x = 32 - 2y - 3z$ (a)

ze 2) $x = \frac{42 - 3y - z}{2}$ (b)

„ 3) $x = \frac{40 - y - 2z}{3}$ (c)

Srovnáním a) a b) $32 - 2y - 3z = \frac{42 - 3y - z}{2}$,

$y + 5z = 22.$ (α)

„ a) a c) $32 - 2y - 3z = \frac{40 - y - 2z}{3}$,

$5y + 7z = 56.$ (β)

Řešiti jest α) $y + 5z = 22$,
β) $5y + 7z = 56$.

Tím nabudeme $y = 7$,
$z = 3$;

do a) $x = 9$.

c) *Methoda stejných součinitelů.* Záleží v tom, že z daných tří rovnic vybéřeme dva páry rovnic, na př. rovnici 1. a 2. pro jeden a rovnici 1. a 3. pro druhý pár, načež z každého toho páru vyloučíme touž neznámou. Tím nabudeme dvou lineárných rovnic o dvou neznámých, které rozřešíme dle § 72.

Budiž $a\,x + b\,y + c\,z = d$,
$a'x + b'y + c'z = d'$ párem prvním
a $a\,x + b\,y + c\,z = d$,
$a''x + b''y + c''z = d''$ párem druhým.

Vyloučením z z prvního páru nabudeme rovnice

$$(ac' - a'c)\,x + (bc' - b'c)\,y = dc' - d'c \qquad \text{(a)}$$

a vyloučením z z druhého páru povstane

$$(ac'' - a''c)\,x + (bc'' - b''c)\,y = dc'' - d''c. \qquad \text{(b)}$$

Z rovnic (a) a (b) vypočteme x a y a vložíce hodnoty tím nabyté do některé z daných rovnic vypočteme z.

Příklad.

$$\begin{array}{rrr}
 & 1) & x + 2y + 3z = 32, \\
 & 2) & 2x + 3y + z = 42, \\
 & 3) & 4x + y + 2z = 40. \\
\hline
1) \times 2 & & 2x + 4y + 6z = 64, \qquad \text{(a)} \\
2) & & 2x + 3y + z = 42, \\
\hline
a) - 2) & & y + 5z = 22. \qquad (\alpha) \\
1) \times 3 & & 3x + 6y + 9z = 96, \qquad \text{(b)} \\
3) & & 3x + y + 2z = 40, \\
\hline
b) - 3) & & 5y + 7z = 56. \qquad (\beta)
\end{array}$$

Řešiti jest rovnice α) a β).

Tím nabudeme $y = 7$,
$z = 3$;
do 1) $x = 9$.

3) Srovnáme-li spolu výrazy pro kořeny rovnic

$$a\,x + b\,y + c\,z = d,$$
$$a'x + b'y + c'z = d',$$
$$a''x + b''y + c''z = d'',$$

t. j. výrazy

$$x = \frac{db'c'' + d'b''c + d''bc' - d''bc' - db''c' - d'bc''}{ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - ab''c' - a'bc''},$$

$$y = \frac{ad'c'' + a'd''c + a''dc' - a''d'c - ad''c' - a'dc''}{ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - ab''c' - a'bc''},$$

$$z = \frac{ab'd'' + a'b''d + a''bd' - a''b'd - ab''d' - a'bd''}{ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - ab''c' - a'bc''},$$

shledáváme, 1) že všecky ty výrazy jsou zlomky stejných jmenovatelů, které jsou určitým způsobem vytvořeny ze součinitelů neznámých x, y a z v daných rovnicích; 2) že čítatele oněch zlomků odvodíme z jich jmenovatelů dosadíce za součinitele neznámé, o jejichž vypočtení jde, pravé strany daných rovnic.

Označíme-li onoho společného jmenovatele výrazů pro x, y a z symbolem

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

jest nám čítatele oněch výrazův označiti

$$\begin{vmatrix} d, & b, & c \\ d', & b', & c' \\ d'', & b'', & c'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a, & d, & c \\ a', & d', & c' \\ a'', & d'', & c'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a, & b, & d \\ a', & b', & d' \\ a'', & b'', & d'' \end{vmatrix}.$$

Symbolické výrazy té podoby, jako výrazy právě vytčené, nazýváme *determinanty* stupně 3^{ho}. Výrazy těmito symboly vyznačené obdržíme takto: Napíšeme pod třetí řádek příslušného symbolu jeho první dva řádky, načež součiny vytvoříme z činitelů šípy spojených. Součiny vytvořené ve směru šípů jdoucích od levé strany k pravé pokládáme za součetné, součiny druhé za odčetné.

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - ab''c' - a'bc''.$$

Jde-li na př. o řešení rovnic

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 11, \\ x + y - z &= 0, \\ -2y + 7z &= 17, \end{aligned}$$

nabudeme

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11, & -3, & 5 \\ 0, & 1, & -1 \\ 17, & -2, & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2, & -3, & 5 \\ 1, & 1, & -1 \\ 0, & -2, & 7 \end{vmatrix}} = \frac{21}{21} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2, & 11, & 5 \\ 1, & 0, & -1 \\ 0, & 17, & 7 \end{vmatrix}}{21} = 2, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2, & -3, & 11 \\ 1, & 1, & 0 \\ 0, & -2, & 17 \end{vmatrix}}{21} = 3.$$

§. 74. Řešení n lineárných rovnic o n neznámých. O určitých, neurčitých a přeurčitých soustavách rovnic.

Jde-li o řešení soustavy n lineárných rovnic o n neznámých, opatříme i

z těchto rovnic $(n-1)$ rovnic o $(n-1)$ neznámé,
„ „ „ $(n-2)$ „ „ $(n-2)$ neznámých,
„ „ „ $(n-3)$ „ „ $(n-3)$ „

atd., až dospějeme k rovnici o jediné neznámé. Vypočtouce tuto neznámou, vložíme hodnotu její do některé z předcházejících rovnic o dvou neznámých a vypočteme druhou neznámou, načež hodnoty obou vypočtených neznámých vložíme do některé z předcházejících rovnic o třech neznámých a vypočteme neznámou třetí atd.

Z n rovnic o n neznámých lze si opatřiti $(n-1)$ rovnici o $(n-1)$ neznámé methodou substituční, komparační nebo methodou stejných součinitelů.

Užívajíce methody substituční vyjádříme z některé dané rovnice jednu neznámou, na př. x, ostatními neznámými a výraz za x nabytý vložíme za x do rovnic ostatních. Tím nabudeme $(n-1)$ rovnic o $(n-1)$ neznámé.

Užívajíce methody komparační vyjádříme z každé dané rovnice touž neznámou, na př. x, ostatními neznámými a srovnáme výsledky pro x nabyté. Tím povstane $(n-1)$ rovnic na sobě nezávislých o $(n-1)$ neznámé.

Téhož výsledku docílíme methodou stejných součinitelů. která záleží v tom, že z daných n rovnic vybéřeme $(n-1)$ párů rovnic, na př. tak, že první rovnici spojíme s každou z ostatních a z každého toho páru vyloučíme touž neznámou.

Z vylíčeného postupu při řešení lineárných rovnic o n neznámých jest zároveň patrno, že *méně* než n rovnic k určení n neznámých nedostačí. Neboť v takovém případě dospěli bychom postupným vylučováním neznámých k rovnici o více než jedné neznámé, která k jich určení nedostačí. Z té příčiny jmenujeme takovou soustavu rovnic soustavou *neurčitou*. — Kdyby si některé z daných n rovnic o n neznámých *odporovaly*. objeví se to při řešení tím, že dospějeme k nemožné rovnici, která žádá, aby se určité od nully rozdílné číslo rovnalo nulle.

Jsou-li dvě nebo několik daných rovnic na sobě *závislé*, vystoupí to při řešení na jevo tím, že dospějeme postupným vylučováním neznámých k několika rovnicím, jež nejsou různy a tudíž k určení neznámých, které jsou v nich, nedostačí. Z toho následuje, že i dané rovnice nedostačí k určení neznámých.

Kdyby bylo dáno *více* na sobě nezávislých rovnic než jest neznámých, nebylo by lze určiti tyto neznámé tak, aby jimi bylo všem rovnicím vyhověno. Neboť je-li dáno $(n+r)$ rovnic, v nichž jest n neznámých, lze ze kterýchkoli n daných rovnic vypočísti n neznámých a tyto nebudou vyhovovati ostatním r daným rovnicím, které jsou na prvních nezávislé. Soustava rovnic jest v tomto případě *přeurčita*, či lépe *nemožna*, poněvadž není takových hodnot neznámých, pro které by všecky tyto rovnice zároveň platily.

Výsledky tuto nabyté jsou obsaženy ve větách:

a) Je-li dáno tolik na sobě nezávislých a sobě neodporujících rovnic lineárných, kolik jest neznámých, lze vždy určiti neznámé tak, aby daným rovnicím bylo vyhověno.

Soustava daných rovnic jest soustavou *určitou.*

b) Je-li dáno méně lineárných rovnic než jest neznámých, vyhovuje jim nekonečné množství soustav hodnot neznámých.

Soustava daných rovnic jest soustavou *neurčitou.*

c) Je-li dáno více na sobě nezávislých rovnic lineárných než jest neznámých, nelze vyhledati neznámých tak, aby jimi bylo všem daným rovnicím vyhověno.

Soustava daných rovnic jest soustavou *přeurčitou.*

§ 75. Jak užíváme rovnic k řešení úloh.

Podmínky, jimž neznámé veličiny vyhověti mají, nebývají vždy dány rovnicemi, nýbrž bývají vylíčeny slovy.

Aby neznámé veličiny v takovém případě vyhledány byly, jest

a) sestaviti z podmínek slovy vylíčených rovnice spojující neznámé veličiny se známými,

b) tyto rovnice řešiti.

Jak sestavené již rovnice rozřešíme, poznali jsme v §§ předcházejících, zbývá nám tudíž pojednati o tom, jak si počínáme, je-li sestaviti rovnice, jimž neznámé veličiny vyhověti mají.

1) Vyskytují-li se v úloze veličiny (délky, plochy, váhy atd.), vyjádříme je jich čísly poměrnými na základě určitých jednotek, které v dalším průběhu výpočtu nesmějí býti měněny.

2) Všecka udání a všecky podmínky, které v úloze se vyskytují, vyjádříme čísly a mathematickými výrazy. Přijdeme-li při tom na číslo, které předcházejícími čísly nebo výrazy nemůže býti vyjádřeno, označíme je jakožto číslo neznámé, k čemuž užíváme obyčejně posledních písmen abecedy, na př. x, y, z, u, v atd.

c) Když jsme byli všecka udání a podmínky naznačeným způsobem vyjádřili, vyhledáme výrazy, které totéž číslo nebo veličinu dvakráte nebo i vícekráte vyjadřují, a položíme je sobě rovny.

4) Tím nabudeme rovnic pro čísla neznámá a tyto rovnice řešíme.

Příklad 1.) Číslo 56 rozložiti jest na dva sčítance, z nichž první jest o 16 větší druhého.

Řešení. V tomto případě odpadá volba jednotek (měr), poněvadž v úloze není veličin, jež by bylo měřiti.

Přikročme tedy k odstavci 2., t. j. vyjádřeme všecka udání a podmínky úlohy mathematickými výrazy.

Součet dvou sčítanců $= 56$.
První sčítanec $= x$.
Druhý sčítanec $= 56 - x$.
První sčítanec $=$ druhému $+ 16$, čili $= 56 - x + 16$.

Nyní vyhledejme výrazy, které totéž číslo vyjadřují.

V tomto případě jest první sčítanec vyjádřen dvakráte. Srovnajíce oba výrazy, jimiž jest vyjádřen, nabudeme rovnice

$$x = 56 - x + 16, \text{ kterou rozřešíme.}$$

Tím obdržíme $2x = 72$, tudíž $x = 36$.

První sčítanec jest roven 36 a druhý $= 56 - 36 = 20$.

Příklad 2.

Kolik grammů stříbra přidati jest k 231 *g* mědi, aby směs měla jakosť 0·670?

Řešení. Jednotkou váhy jest v našem případě gramm.

Žádaný počet grammů označíme x; potom váží směs $(231 + x)$ grammů a její jakosť jest $\frac{x}{231 + x}$. Ale poněvadž táž jakosť má býti 0·670, máme rovnici

$$\frac{x}{231 + x} = 0{\cdot}67 \text{ čili } 33x = 231.67, \text{ t. j. } x = 469.$$

Jest tudíž přidati 469 *g* stříbra.

Příklad 3. Vypočtení střední lhůty platební.

Někdo má splatiti v různých lhůtách určité částky peněžité. Jest otázka, za který čas bylo by mu všecky ty částky zaplatiti najednou, aby ani on ani jeho věřitel škody neměli, vezme-li se za základ $p\%$ úrokování jednoduché.

Čas, který vytčené podmínce vyhovuje, jmenujeme *střední lhůtou platební.*

Řešení.

Za jednotku míry pro všecky částky peněžité zvolíme 1 zl.

„ „ „ „ čas zvolíme 1 rok.

Jednotlivé částky buďtež potom vyjádřeny čísly poměrnými $k_1, k_2, k_3 \ldots$

a lhůty, za které mají býti splaceny, „ „ $n_1, n_2, n_3 \ldots$

Dlužník zaplatí najednou $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots$,

což se stane za čas, jehož číslo poměrné jest x.

Abychom vypočetli čas x, vyjádřeme dvojím způsobem, kolik by bylo dlužníkovi zaplatiti hned místo jednotlivých lhůtových placení.

Podle toho, předpokládáme-li diskontování na sto nebo ve stu, nabudeme dvou různých vzorců pro čas x.

a) Vezmeme-li za základ diskontování „*na sto*“, bylo by dlužníkovi zaplatiti hned

místo částky $k_1 \ldots \frac{100k_1}{100 + n_1p}$,

„ „ $k_2 \ldots \frac{100k_2}{100 + n_2p}$,

„ „ $k_3 \ldots \frac{100k_3}{100 + n_3p}$,

$\vdots \quad \vdots$.

Místo všech lhůtových placení bylo by dlužníkovi zaplatiti hned

$$\frac{100k_1}{100 + n_1p} + \frac{100k_2}{100 + n_2p} + \frac{100k_3}{100 + n_3p} \ldots$$

Uvážíme-li, že dlužník za čas x zaplatí $k_1 + k_2 + k_3 \ldots$, jest patrno, že může místo toho zaplatiti hned

$$\frac{100\,(k_1 + k_2 + k_3 \ldots)}{100 + xp}.$$

Srovnáme-li oba výrazy, jimiž udáno jest, kolik by bylo dlužníkovi zaplatiti hned, nabudeme rovnice

$$\frac{k_1 + k_2 + k_3 \ldots}{100 + xp} = \frac{k_1}{100 + n_1p} + \frac{k_2}{100 + n_2p} + \frac{k_3}{100 + n_3p} + \ldots,$$

z níž vypočteme x.

Poněvadž převrácená hodnota levé strany musí býti rovna převrácené hodnotě strany pravé, obdržíme nejprve rovnici

$$\frac{100 + xp}{k_1 + k_2 + k_3 \ldots} = \frac{1}{\frac{k_1}{100 + n_1 p} + \frac{k_2}{100 + n_2 p} + \frac{k_3}{100 + n_3 p} + \ldots}, \text{ z níž jde}$$

$$x = \frac{1}{p}\left(\frac{k_1 + k_2 + k_3 + \ldots}{\frac{k_1}{100 + n_1 p} + \frac{k_2}{100 + n_2 p} + \frac{k_3}{100 + n_3 p} + \ldots} - 100\right).$$

Uvedeme-li členy v závorce na společného jmenovatele a spojíme-li potom členy o k_1, jakož i členy o k_2 atd., nabudeme po krácení číslem p

$$x = \frac{\frac{k_1}{100 + n_1 p} n_1 + \frac{k_2}{100 + n_2 p} n_2 + \frac{k_3}{100 + n_3 p} n_3 + \ldots}{\frac{k_1}{100 + n_1 p} + \frac{k_2}{100 + n_2 p} + \frac{k_3}{100 + n_3 p} + \ldots},$$

ze kteréhož vzorce jest patrno pravidlo pro vypočtení střední lhůty platební.

Násobíme-li čítatele i jmenovatele pravé strany číslem 100, nabývá toto pravidlo tvaru:

Střední lhůta platební při diskontování *na sto*

$$= \frac{\text{součtu disk. hodn. jedn. částek násobených poměr. čís. přísl. lhůt}}{\text{součtu disk. hodn. jedn. částek.}}$$

b) Vezmeme-li za základ diskontování *ve stu*, dospějeme týmiž úvahami jako v *a*) k rovnici

$$\frac{(k_1 + k_2 + k_3 \ldots)(100 - xp)}{100} = \frac{(100 - n_1 p) k_1}{100} + \frac{(100 - n_2 p) k_2}{100} + \frac{(100 - n_3 p) k_3}{100} + \ldots,$$

z níž po několika proměnách povstane

$$x = \frac{k_1 n_1 + k_2 n_2 + k_3 n_3 + \ldots}{k_1 + k_2 + k_3 \ldots} = \frac{\text{součtu jedn. částek nás. pom. č. přísl. lhůt}}{\text{součtu jedn. částek.}}$$

Z toho, co bylo řečeno o diskontování *ve stu*, jest patrno, že toto druhé řešení není zcela přesné, avšak poněvadž jest jednodušší než první a poněvadž výsledky jím nabyté pro krátké lhůty málo se liší od výsledků nabytých při řešení prvním, užívá se ho obyčejně k vypočítávání střední lhůty platební.

Příklad 4.

Na obvodě kruhu 100 *m* dlouhém pohybují se dvě tělesa. Pohybují-li se v témž směru, setkají se vždy za 20 vteřin, pohybují-li se ve směrech protivných za 4 vteřiny. Kterou dráhu vykoná každé z těch těles za vteřinu?

Jednotkou času bude vteřina, jednotkou dráhy metr.

Poměrné číslo dráhy prvního tělesa za vteřinu označíme x, druhého y.

„ „ „ „ „ „ 20 vteřin jest $20x$, „ $20y$,

„ „ „ „ „ „ 4 vteřiny „ $4x$, „ $4y$,

Poněvadž tělesa při pohybu v $\begin{matrix}\text{stejném}\\ \text{protivném}\end{matrix}$ směru se $\begin{matrix}\text{dohoní,}\\ \text{setkají,}\end{matrix}$ je-li $\begin{matrix}\text{rozdíl}\\ \text{součet}\end{matrix}$ jejich drah roven celému obvodu, t. j. 100 *m*, máme rovnice

$$20x - 20y = 100 \text{ čili } x - y = 5,$$
$$4x + 4y = 100 \text{ „ } x + y = 25,$$

z nichž jde

$$x = 15 \text{ a } y = 10.$$

První těleso vykoná tedy za vteřinu dráhu 15, druhé 10 metrů.

Poznámka 1. Ve mnohých případech lze rovnice snáze rozřešiti, pokládáme-li za neznámé místo původních neznámých určité výrazy, ve kterých se tyto neznámé vyskytují. Na př. v rovnicích

$$\frac{1}{1-x+y}+\frac{1}{1-x-y}=\frac{2}{3},$$
$$\frac{1}{1-x+y}-\frac{1}{1-x-y}=\frac{4}{3},$$

pokládejme nejprve za neznámé $\frac{1}{1-x+y}$ a $\frac{1}{1-x-y}$, pro něž jsou ony rovnice lineárné a vypočtouce tyto neznámé, přikročme teprve k vypočtení x a y.

Pravíme tu, že *zavedeme do daných rovnic místo* **x** *a* **y** *nové neznámé* a to v tomto případě

$$\xi=\frac{1}{1-x+y} \text{ a } \eta=\frac{1}{1-x-y}, \qquad (\alpha)$$

načež dané rovnice nabudou tvaru

$$\xi+\eta=\frac{2}{3}, \quad \xi-\eta=\frac{4}{3},$$

z nichž jde, že $\xi=1$ a $\eta=-\frac{1}{3}$.

Vložíce tyto hodnoty za ξ a η do *rovnic substitučních* (α), nabýváme rovnic

$$1=\frac{1}{1-x+y} \text{ čili } 1-x+y=1 \ldots\ldots y-x=0$$
$$\text{a } -\frac{1}{3}=\frac{1}{1-x-y} \text{ „ } 1-x-y=-3 \ldots y+x=4,$$

z nichž jest patrno, že $x=y=2$.

Poznámka 2. Často žádá podstata úlohy, aby kořen rovnice byl absolutním číslem celým. Vyjde-li nám v takovém případě za neznámou hodnota lomená nebo záporná, jest to znamením, že buď udání v úloze obsažená se s podstatou úlohy nesrovnávají, nebo že otázka nesprávně byla podána.

Příklad 1. V protokole o jistém shromáždění stojí, že osoba *A* zvolena byla nadpoloviční většinou 7 hlasů všech přítomných voličů a že osoba *B* měla jen o 1 hlas více než obnášela $\frac{1}{5}$ hlasů, které padly na osobu *A*. Kolik voličů bylo ve shromáždění?

Počet voličův budiž x.

Osoba *A* dostala hlasů $\frac{x}{2}+7$,
„ *B* „ „ $\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2}+7\right)+1$. $\Big\}+$

Počet voličů $=\frac{x}{2}+7+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2}+7\right)+1$.

Srovnáním čísel dvakráte vyjádřených nabýváme rovnic

$$x=\frac{x}{2}+7+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2}+7\right)+1,$$

$$\text{čili } x = \frac{x}{2} + \frac{x}{10} + \frac{7}{5} + 8,$$

z nichž jde násobením číslem 10 $10x = 5x + x + 94$ a po sloučení členů stejnojmenných

$$4x = 94, \text{ tudíž } x = \frac{94}{4} \text{ čili } x = 23\tfrac{1}{2}.$$

Výsledek $23\frac{1}{2}$ nesrovnává se s podstatou úlohy a ukazuje, že udání v protokole jsou *nesprávná*.

Příklad 2. Při jisté práci bylo zaměstknáno 81 dělníků a to 2kráte tolik mužů co žen. Mzda každého muže činila denně 1 zl. a každé ženy 80 kr. Kolik dělnic bylo by přibrati, aby denní mzda všech dělníků obnášela 70 zl.

Jednotkou mzdy budiž 1 zl.

Poněvadž mužů bylo dvakráte tolik co žen, bylo žen třetina všech dělníků, t. j. 27 a tudíž mužů 54.

Zvětší-li se počet žen o x, bude jich $27 + x$ a jich denní mzda bude činiti $0{\cdot}8\ (27 + x)$ *zl.*

Poněvadž denní mzda mužů obnáší 54 *zl.*, bude poměrné číslo celé mzdy denní $= 0{\cdot}8\ (27 + x) + 54$.

Že však celá denní mzda činí dle udání 70 zl., máme rovnici

$$0{\cdot}8\ (27 + x) + 54 = 70, \text{ z níž jde, že } x = -7.$$

Výsledek tento praví, že by bylo přibrati -7 dělnic. Ale poněvadž přidati -7 značí totéž jako odníti 7, jest zjevno, že počet dělnic bylo by *zmenšiti* o 7.

Otázka v dané úloze měla by tudíž zníti: „Kolik dělnic bylo by propustiti atd.“ místo „kolik dělnic bylo by přibrati atd.“

Část osmá.

O zlomcích řetězových.

§ 76. Výměry.

Zlomek, jehož jmenovatel složen jest z čísla celého a zlomku, jehož jmenovatel podobně jest složen, není-li posledním, jmenujeme zlomkem *řetězovým* čili *řetězcem*.

Obecný tvar řetězového zlomku jest tudíž

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots \cfrac{b_{k-1}}{a_{k-1} + \cfrac{b_k}{a_k}}}}},$$

místo čehož píše se jinak

$$b_1/a_1 + b_2/a_2 + b_3/a_3 + b_4/a_4 + \ldots\ldots b_{k-1}/a_{k-1} + b_k/a_k.$$

Zlomky $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots\ldots \frac{b_k}{a_k}$ jmenují se *články* řetězce.

VEŘEJNÁ A UNIVERSITNÍ KNIHOVNA V PRAZE

Řetězec, který má *konečný* počet článků, jmenujeme *konečným*, kdežto řetězec o *nekonečném* počtu článků jest *nekonečným*.

Řetězce nekonečné, v nichž se určitá soustava článků stále opakuje, jmenují se *periodickými* a soustava článků stále se opakující zove se *periodou*. Periodičnosť může se počínati libovolným článkem.

Výraz *dvojčlenný*, který jest složen z libovolného čísla a řetězce, jmenujeme řetězcem *neryzím*, na rozdíl od řetězce *ryzího*, před jehož prvním článkem není členu. Obecný tvar řetězce *neryzího* jest

$$a_o + b_1/a_1 + b_2/a_2 + \ldots . b_{k-1}/a_{k-1} + b_k/a_k.$$

Pro $a_o = o$ přejde neryzí řetězec v ryzí.

Je-li $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots . b_k = 1$ nabývá řetězec tvaru

$$a_o + 1/a_1 + 1/a_2 + \ldots . 1/a_{k-1} + 1/a_k,$$

který sluje řetězcem *obyčejným*. Čísla a_1, a_2, a_3 ... jsou *podíly* tohoto řetězce.

Řetězci obyčejnými budeme se v následujících §§ obírati.

§ 77. Jak proměňujeme zlomek obecný na řetězec.

Abychom proměnili na př. zlomek $\frac{33}{46}$ na řetězec, dělme nejprve jeho čítatele i jmenovatele 33. Tím nabudeme $\frac{33}{46} = \frac{1}{1 + \frac{13}{33}}$. Se zlomkem $\frac{13}{33}$, jakož i s každým zlomkem, který se v následujících jmenovatelích objeví, učiňme jako se zlomkem $\frac{33}{46}$. Tím obdržíme

$$\frac{33}{46} = \frac{1}{1 + \frac{13:13}{33:13}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{7}{13}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{7:7}{13:7}}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{6}{7}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{6:6}{7:6}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}}}}.$$

Jesti tedy $\frac{33}{46} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}}}}$.

33	46	1
7	13	2
1	6	1
	0	1
		6

Z tohoto výsledku jest zřejmo, že

$$\frac{46}{33} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}}}.$$

Všimneme-li si bedlivěji výkonu tuto provedeného, shledáme, že s čítatelem a jmenovatelem daného zlomku provedeno bylo postupné dělení, jako bychom hledali jich největší společnou míru. Podíly při tom se objeviviší jsou *podíly* žádaného řetězce.

Chtějíce tedy proměniti na př. zlomek $\frac{37}{45}$ v řetězec, počítáme takto:

37	45	1
5	8	4
2	3	1
0	1	1
		1
		2

$$\frac{37}{45} = 1/1 + 1/4 + 1/1 + 1/1 + 1/1 + 1/2.$$

Z téhož výpočtu jest patrno, že

$$\frac{45}{37} = 1 + 1/4 + 1/1 + 1/1 + 1/1 + 1/2.$$

Jak proměňujeme řetězec na zlomek obecný, poznáme v § následujícím.

§ 78. O sblížených hodnotách řetězců.

Podržíme-li z řetězce $R = a_0 + 1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 + \ldots . 1/a_{k-1} + 1/a_k + \ldots 1/a_n$ vše až za článek $k^{tý}$, ostatní články vynechajíce, nabudeme $k^{tého}$ *zlomku sblíženého či* $k^{té}$ *hodnoty sblížené* daného řetězce.

Dle toho jest první hodnota sblížená $a_0 + 1/a_1$,

druhá „ „ $a_0 + 1/a_1 + 1/a_2$,

třetí „ „ $a_0 + 1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3$

a t. d.

Pravá či *úplná* hodnota řetězce jeví se tím jakožto poslední hodnota sblížená.

Zlomek obecný, jemuž se $k^{tá}$ sblížená hodnota rovná, budeme označovati $\frac{C_k}{J_k}$ čili krátce S_k. Je-li číslo k $\begin{matrix}liché,\\sudé,\end{matrix}$ jmenujeme zlomek S_k $\begin{matrix}lichým.\\sudým.\end{matrix}$

1) *Vzájemná závislost* $\begin{matrix}čítatelů\\jmenovatelů\end{matrix}$ *tří po sobě jdoucích hodnot sblížených řetězce* (R) *vyjádřena jest vzorci*

$$C_k = a_k C_{k-1} + C_{k-2} \text{ a } J_k = a_k J_{k-1} + J_{k-2}.$$

Důkaz. Dle vysvětlení podaného o hodnotách sblížených jest

$$\frac{C_1}{J_1} = a_0 + 1/a_1 = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1}. \qquad (1)$$

Hodnota druhá vznikne z 1., položíme-li $a_1 + \frac{1}{a_2}$ místo a_1.

Jesti tedy

$$\frac{C_2}{J_2} = \frac{(a_1 + \frac{1}{a_2})\,a_0 + 1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_2(a_1 a_0 + 1) + a_0}{a_2 a_1 + 1} = \frac{a_2 C_1 + a_0}{a_2 J_1 + 1}. \qquad (2)$$

Hodnota třetí vznikne z druhé, položíme-li $a_2 + \frac{1}{a_3}$ místo a_2, tudíž jest

$$\frac{C_3}{J_3} = \frac{(a_2 + \frac{1}{a_3})\,C_1 + a_0}{(a_2 + \frac{1}{a_3})\,J_1 + 1} = \frac{a_3(a_2 C_1 + a_0) + C_1}{a_3(a_2 J_1 + 1) + J_1} = \frac{a_3 C_2 + C_1}{a_3 J_2 + J_1}. \qquad (3)$$

Z rovnice 3. jest zjevno, že svrchu udané vzorce platí pro třetí hodnotu sblíženou. Kdyby platily i pro hodnotu r^{tou}, bylo by

$$\frac{C_r}{J_r} = \frac{a_r C_{r-1} + C_{r-2}}{a_r J_{r-1} + J_{r-2}}. \qquad (4)$$

Poněvadž z $r^{té}$ hodnoty sblížené obdržíme hodnotu $(r+1)^{ní}$, položíce za a_r součet $a_r + \frac{1}{a_{r+1}}$, bylo by na základě vzorce 4.

$$\frac{C_{r+1}}{J_{r+1}} = \frac{(a_r + \frac{1}{a_{r+1}})\,C_{r-1} + C_{r-2}}{(a_r + \frac{1}{a_{r+1}})\,J_{r-1} + J_{r-2}}.$$

Násobíme-li čítatele i jmenovatele zlomku na pravé straně číslem a_{r+1} obdržíme

$$\frac{C_{r+1}}{J_{r+1}} = \frac{(a_{r+1} a_r + 1)\,C_{r-1} + a_{r+1} C_{r-2}}{(a_{r+1} a_r + 1)\,J_{r-1} + a_{r+1} J_{r-2}} = \frac{a_{r+1}(a_r C_{r-1} + C_{r-2}) + C_{r-1}}{a_{r+1}(a_r J_{r-1} + J_{r-2}) + J_{r-1}}.$$

Avšak kdyby platila rovnice 4., bylo by

$$C_r = a_r C_{r-1} + C_{r-2} \text{ a } J_r = a_r J_{r-1} + J_{r-2},$$

tudíž by bylo

$$\frac{C_{r+1}}{J_{r+1}} = \frac{a_{r+1} C_r + C_{r-1}}{a_{r+1} J_r + J_{r-1}}.$$

Z tohoto a ze 4. vzorce jest patrno, že vzorce větou 1. udané, platí-li pro r^{tou} hodnotu sblíženou, platí i pro hodnotu $(r+1)^{ní}$. A poněvadž jsme poznali, že platí pro 3. sblíženou hodnotu, platí i pro čtvrtou, tudíž i pro pátou, šestou a t. d., t. j. pro všecky hodnoty sblížené.

Aby i vzorec 2. nabyl tvaru, který mají vzorce ostatní, píšeme jej

$$\frac{C_2}{J_2} = \frac{a_2 C_1 + C_0}{a_2 J_1 + J_0},$$

při čemž jest $C_0 = a_0$ a $J_0 = 1$. Připojujeme tudíž před první hodnotu sblíženou hodnotu *pomocnou* $\frac{C_0}{J_0} = \frac{a_0}{1}$.

Užitím vzorců

$$C_k = a_k C_{k-1} + C_{k-2} \text{ a } J_k = a_k J_{k-1} + J_{k-2}$$

lze vypočísti všecky hodnoty sblížené obyčejného řetězce.

Rychle dojdeme tu cíle užívajíce tohoto sestavení:

	a_1,	a_2,	a_3,	a_4,	$a_5 \ldots$
$\frac{a_0}{1}$	$a_0 + \frac{1}{a_1}$,	$\frac{a_2 C_1 + C_0}{a_2 J_1 + J_0}$,	$\frac{a_3 C_2 + C_1}{a_3 J_2 + J_1}$,	$\frac{a_4 C_3 + C_2}{a_4 J_3 + J_2}$,	$\frac{a_5 C_4 + C_3}{a_5 C_4 + J_3}$ ..
$\frac{C_0}{J_0}$	$\frac{C_1}{J_1}$,	$\frac{C_2}{J_2}$,	$\frac{C_3}{J_3}$,	$\frac{C_4}{J_4}$,	$\frac{C_5}{J_5}$

Pro ryzí řetězec položiti jest $a_0 = 0$.

Poněvadž poslední hodnota sblížená rovna jest úplně hodnotě řetězce, podán jest tím zároveň návod k proměně zlomku řetězového na zlomek obecný.

Jde-li na př. o sblížené hodnoty řetězce $5 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/2 + 1/3 + 1/2$, počítáme takto:

	2,	3,	4,	2,	3,	2,
$\frac{5}{1}$	$\underbrace{5 + \frac{1}{2}}_{\frac{11}{2}}$,	$\frac{38}{7}$,	$\frac{163}{30}$,	$\frac{364}{67}$,	$\frac{1255}{231}$,	$\frac{2874}{529}$.

$\frac{2874}{529}$ jest úplná hodnota daného řetězce.

Pro řetězec $1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/2 + 1/3 + 1/2$ obdržíme

	2,	3,	4,	2,	3,	2.
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$,	$\frac{3}{7}$,	$\frac{13}{30}$,	$\frac{29}{67}$,	$\frac{100}{231}$	$\frac{229}{529}$.

Poznámka. Z odvození vzorců vytčených ve větě 1. jest patrno, že platí, buďtež podíly řetězce jakákoli čísla z řady číselné.

§ 79. O vlastnostech sblížených hodnot řetězců.

V následujících větách předpokládáme, že podíly článků jsou kladná čísla celá.

1) *Čítatelé a jmenovatelé sblížených hodnot jsou kladná čísla celá rostoucí s počtem článků.*

Že čítatelé i jmenovatelé hodnot sblížených jsou čísla kladná a celá, jest patrno z toho, že povstanou násobením a sčítáním kladných čísel celých. Že pak s rostoucím počtem článků rostou, jest zjevno ze vzorců

$$C_k = a_k C_{k-1} + C_{k-2} \text{ a } J_k = a_k J_{k-1} + J_{k-2},$$

v nichž čísla a_k, C_{k-2} a J_{k-2} jsou nejméně rovna 1 a tudíž jest $C_k > C_{k-1}$ a $J_k > J_{k-1}$. —

2. *Absolutní hodnota rozdílu dvou po sobě jdoucích hodnot sblížených rovna jest zlomku, jehož čítatelem jest 1 a jehož jmenovatelem jest součin jmenovatelů oněch hodnot sblížených.*

Důkaz.

$$C_k = a_k\ C_{k-1} + C_{k-2},$$
$$J_k = a_k\ J_{k-1} + J_{k-2}.$$

Násobíce první rovnici J_{k-1}, druhou C_{k-1} a odečtouce výsledky, dospějeme rovnice

$$C_{k-1} J_k - C_k J_{k-1} = -(C_{k-2} J_{k-1} - C_{k-1} J_{k-2}),$$

kteráž platí, tak jako rovnice, od nichž jsme vyšli, pro každé k.

Pro $k = 2$ obdržíme z ní $C_1 J_2 - C_2 J_1 = -(C_0 J_1 - C_1 J_0)$,
„ $k = 3$ „ „ $C_2 J_3 - C_3 J_2 = -(C_1 J_2 - C_2 J_1)$,
„ $k = 4$ „ „ $C_3 J_4 - C_4 J_3 = -(C_2 J_3 - C_3 J_2)$,
⋮ ⋮ ⋮ ⋮
„ $k = r-1$ „ „ $C_{r-2} J_{r-1} - C_{r-1} J_{r-2} = -(C_{r-3} J_{r-2} - C_{r-2} J_{r-3})$,
„ $k = r$ „ „ $C_{r-1} J_r - C_r J_{r-1} = -(C_{r-2} J_{r-1} - C_{r-1} J_{r-2})$.

Znásobením těchto rovnic nabudeme

$$C_{r-1} J_r - C_r J_{r-1} = (-1)^{r-1} (C_0 J_1 - C_1 J_0).$$

Avšak $C_0 = a_0$, $J_0 = 1$, $C_1 = a_0 a_1 + 1$, $J_1 = a_1$, tudíž $C_0 J_1 - C_1 J_0 = -1$

a $$C_{r-1} J_r - C_r J_{r-1} = (-1)^r. \qquad (1)$$

Dělíme-li obě strany této rovnice součinem $J_{r-1} J_r$, nabudeme rovnice

$$\frac{C_{r-1}}{J_{r-1}} - \frac{C_r}{J_r} = \frac{(-1)^r}{J_{r-1} J_r}, \qquad (2)$$

v níž jest obsažena věta svrchu vyslovená.

Rozdíl $C_{r-1} J_r - C_r J_{r-1}$ jmenujeme podle jeho vytvoření rozdílem *křížovým.* Dle rovnice 1. jest hodnota jeho vždy rovna $+1$ nebo -1.

3. *Čítatelé a jmenovatelé každé hodnoty sblížené jsou čísla nesoudělná.*

Neboť kdyby byla na př. čísla C_r a J_r dělitelna číslem m, musela by býti i pravá strana rovnice $C_{r-1} J_r - C_r J_{r-1} = (-1)^r$ dělitelna číslem m, což jest nemožné. Zároveň jest z toho patrno, že i čítatelé, jakož i jmenovatelé každých dvou po sobě jdoucích hodnot sblížených jsou čísla nesoudělná.

4. *Absolutní hodnota rozdílu dvou po sobě jdoucích zlomků sblížených zmenšuje se s rostoucím počtem článků.*

Neboť jmenovatelé J_{r-1} a J_r s rostoucím počtem článků se zvětšují a tudíž zlomek $\frac{(-1)^r}{J_{r-1} J_r}$, jemuž se rozdíl dvou po sobě jdoucích hodnot sblížených rovná, se zmenšuje.

5. *Ze dvou sousedních zlomků sblížených jest zlomek lichý větší sudého.*

Důkaz. Z rovnice

$$\frac{C_{r-1}}{J_{r-1}} - \frac{C_r}{J_r} = \frac{(-1)^r}{J_{r-1} J_r}$$

vychází na jevo, že rozdíl na levé její straně se vyskytující jest kladný, je-li číslo r sudé a tudíž číslo $(r-1)$ liché, a že týž rozdíl jest záporný, je-li číslo r liché, tudíž číslo $(r-1)$ sudé. Z obého vysvítá, že zlomek lichý jest větší sousedního zlomku sudého.

6. *Liché zlomky sblížené s rostoucím počtem článků se zmenšují, kdežto sudé rostou.*

Důkaz. Pozorujme a) libovolné tři po sobě jdoucí hodnoty sblížené, z nichž dvě jsou *liché*, t. j. S_{2k-1}, S_{2k}, S_{2k+1}.

Dle věty 2. jest $S_{2k-1} - S_{2k} = \frac{1}{J_{2k-1} J_{2k}}$,

a $S_{2k+1} - S_{2k} = \frac{1}{J_{2k} J_{2k+1}}$.

Poněvadž jest $J_{2k+1} > J_{2k-1}$,

jest i $J_{2k} J_{2k+1} > J_{2k-1} J_{2k}$

a tudíž $\frac{1}{J_{2k} J_{2k+1}} < \frac{1}{J_{2k-1} J_{2k}}$.

Dosadíme-li do této nerovnosti za levou i pravou její stranu rozdíly sblížených hodnot, nabudeme nerovnosti

$$S_{2k+1} - S_{2k} < S_{2k-1} - S_{2k},$$

tedy $S_{2k+1} < S_{2k-1}$ čili $S_{2k+1} > S_{2k+1}$.

Pro $k=1$ obdržíme z této nerovnosti $S_1 > S_3$,

„ $k=2$ „ „ $S_3 > S_5$,

„ $k=3$ „ „ $S_5 > S_7$,

⋮ ⋮ ⋮

z čehož jde nerovnost $S_1 > S_3 > S_5 > S_7 \ldots$, jak jsme tvrdili.

Pozorujme b) tři po sobě jdoucí hodnoty sblížené, z nichž dvě jsou sudé, t. j.

$$S_{2k-2},\ S_{2k-1},\ S_{2k}.$$

Dle věty 2. jest

$$S_{2k-1} - S_{2k-2} = \frac{1}{J_{2k-2} J_{2k-1}},$$

a $S_{2k-1} - S_{2k} = \frac{1}{J_{2k-1} J_{2k}}$.

Poněvadž jest $J_{2k} > J_{2k-2}$,

jest $S_{2k-1} - S_{2k-2} > S_{2k-1} - S_{2k}$,

tedy i $-S_{2k-2} > -S_{2k}$

čili $S_{2k-2} < S_{2k}$. (§ 9., 1β.)

Kladouce v této nerovnosti postupně za k čísla 1, 2, 3 . . . . a shrnouce všecky tím povstalé nerovnosti v jedinou, nabudeme nerovnosti

$$S_0 < S_2 < S_4 < S_6 \ldots,$$ jak jsme tvrdili.

7) *Úplná hodnota řetězce jest mezi každými dvěma sousedními hodnotami sblíženými a jest bližší k hodnotě následující.*

Důkaz.

Daný řetězec budiž

$$R = a_0 + 1/a_1 + 1/a_2 + \ldots 1/a_{k-1} + 1/a_k + 1/a_{k+1} + \ldots 1/a_n.$$

Položme

$$a_{k+1} + 1/a_{k+2} + \ldots 1/a_n = x_{k+1}.$$

Potom jest

$$R = a_0 + 1/a_1 + 1/a_2 + \ldots 1/a_k + 1/x_{k+1}.$$

Jest patrno, že jest $x_{k+1} > 1$, poněvadž jest a_{k+1} nejméně rovno 1.

Jsou-li

$$\frac{C_{k-1}}{J_{k-1}} \text{ a } \frac{C_k}{J_k}$$

sblížené hodnoty řetězce R,

$$\text{jest } R = \frac{x_{k+1} C_k + C_{k-1}}{x_{k+1} J_k + J_{k-1}}. \qquad \text{(Pozn. k § 78.)}$$

Násobíce obě strany této rovnice jmenovatelem strany pravé, obdržíme

$$R(x_{k+1} J_k + J_{k-1}) = x_{k+1} C_k + C_{k-1}$$

čili

$$x_{k+1} J_k R - x_{k+1} C_k = C_{k-1} - R J_{k-1},$$

$$x_{k+1} J_k \left(R - \frac{C_k}{J_k} \right) = J_{k-1} \left(\frac{C_{k-1}}{J_{k-1}} - R \right)$$

a užijeme-li pro sblížené hodnoty znaků S_k a S_{k-1}, dělíce zároveň obě strany rovnice poslední součinem $(R - S_k) J_{k-1}$, nabudeme rovnice

$$x_{k+1} \frac{J_k}{J_{k-1}} = \frac{S_{k-1} - R}{R - S_k}.$$

Poněvadž jest

$$x_{k+1} > 0, \; J_k > 0, \; J_{k-1} > 0,$$

jest i

$$x_{k+1} \frac{J_k}{J_{k-1}} > 0 \text{ a tudíž i } \frac{S_{k-1} - R}{R - S_k} > 0.$$

Z toho jde, že musí býti současně buď

$$S_{k-1} - R > 0 \text{ a } R - S_k > 0, \text{ t. j. } S_{k-1} > R > S_k$$

anebo

$$S_{k-1} - R < 0 \text{ a } R - S_k < 0, \text{ t. j. } S_{k-1} < R < S_k.$$

Z obou případů jest zjevno, že jest úplná hodnota řetězce mezi dvěma sousedními zlomky sblíženými.

Poněvadž jest dále

$$x_{k+1} > 1 \text{ a } \frac{J_k}{J_{k-1}} > 1,$$

jest i

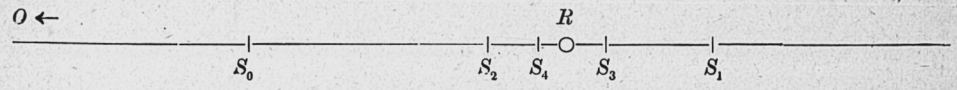
$$x_{k+1} \frac{J_k}{J_{k-1}} > 1 \text{ a tudíž } \frac{S_{k-1} - R}{R - S_k} > 1.$$

Z toho jde, že jest absol. hodn. $(R - S_k) <$ absol. hodn. $(S_{k-1} - R)$, t. j. R jest blíže k S_k než k S_{k-1}, jak jsme tvrdili.

Z vět 6. a 7. jest patrno, že liché zlomky sblížené blíží se úplné hodnotě řetězce *ubýváním*, kdežto sudé *vzrůstáním*.

Znázorníme-li sblížené hodnoty řetězce i jeho hodnotu úplnou na ose číselné, obdržíme tudíž tento obraz:

Obr. 4.



8) *Absolutní hodnota rozdílu mezi úplnou hodnotou řetězce a kteroukoli jeho hodnotou sblíženou jest vždy menší než zlomek, jehož čítatelem jest 1 a jehož jmenovatelem jest dvojmoc jmenovatele oné hodnoty sblížené.*

Důkaz. Z věty 7. jde, že jest

absol. hodnota rozdílu $(R - S_k) <$ absol. hodn. rozdílu $(S_{k+1} - S_k)$

čili absol. hodnota rozdílu $(R - S_k) < \frac{1}{J_{k+1} J_k}$. (§ 79., 2) (1)

Avšak $J_{k+1} > J_k$,

tudíž jest $J_{k+1} J_k > J_k^2$

a $\frac{1}{J_{k+1} J_k} < \frac{1}{J_k^2}$. (2)

Z 1. a 2. nerovnosti vysvítá, že jest

absol. hodn. rozdílu $(R - S_k) < \frac{1}{J_k^2}$, jak jsme tvrdili.

Kladouce tudíž v určitých případech místo úplné hodnoty řetězce jeho sblíženou hodnotu S_k, učiníme chybu menší než $\frac{1}{J_k^2}$. Chceme-li, aby tato chyba byla menší než číslo ε napřed vytčené, dostačí voliti místo hodnoty úplné tu hodnotu sblíženou, jejíž jmenovatel vyhovuje podmínce

$$\frac{1}{J_k^2} \leqq \varepsilon \text{ čili } J_k^2 \geqq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Jde-li na př. o sblíženou hodnotu řetězce $1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + \ldots$ s níž jest spojena chyba menší než $\frac{1}{10^6}$, jest vypočísti sblížené hodnoty až k té, jejíž jmenovatel jest roven 1000 nebo větší než 1000.

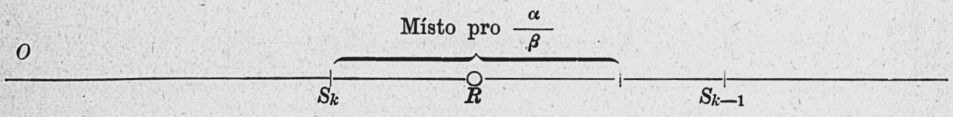
	2,	3,	4,	5,	6,	7.
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$,	$\frac{3}{7}$,	$\frac{13}{30}$,	$\frac{68}{157}$,	$\frac{421}{972}$,	$\frac{3015}{6961}$.

Zlomek $\frac{3015}{6961}$ vyhovuje žádané podmínce.

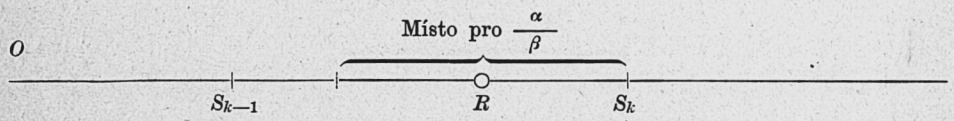
9) *Aby úplná hodnota řetězce byla vyjádřena přesněji zlomkem* $\frac{\alpha}{\beta}$ *nežli sblíženou hodnotou* $\frac{C_k}{J_k}$, *musí býti* $\beta > J_k$ a $\alpha > C_k$.

Důkaz. Znázorníme-li čísla S_k, S_{k-1}, R a $\frac{\alpha}{\beta}$ na ose číselné, obdržíme buď obrazec a) nebo b) dle toho, je-li číslo k sudé nebo liché (věta 5.). V obou jest R blíže k S_k než k S_{k-1} (věta 7.)

Obr. 5a.



Obr. 5b.



Je-li

$\frac{\alpha}{\beta}$ bližší k R než S_k, platí nerovnost*)

abs. hodn. rozdílu $(S_{k-1} - S_k) >$ abs. hodn. rozdílu $(S_{k-1} - \frac{\alpha}{\beta})$

čili $$\frac{1}{J_k J_{k-1}} > \text{abs. hodn. rozdílu} \left(\frac{C_{k-1}}{J_{k-1}} - \frac{\alpha}{\beta} \right),$$

$$\frac{1}{J_k} > \text{absol. hod. zlomku } \frac{C_{k-1}\beta - \alpha J_{k-1}}{\beta}.$$

Násobíce obě strany této nerovnosti součinem βJ_k, obdržíme nerovnost

$$\beta > \text{abs. hodn. součinu } J_k (C_{k-1}\beta - \alpha J_{k-1}). \quad (1)$$

Jest především patrno, že rozdíl $C_{k-1}\beta - \alpha J_{k-1}$ nemůže býti roven 0, neboť kdyby byl rozdíl $C_{k-1}\beta - \alpha J_{k-1} = 0$, byl by zlomek

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{C_{k-1}}{J_{k-1}},$$

což se protiví podmínce, že jest zlomek $\frac{\alpha}{\beta}$ bližší k úplné hodnotě řetězce, nežli sblížená hodnota $\frac{C_k}{J_k}$.

Avšak, že α, β, C_{k-1} a J_{k-1} jsou čísla celá, musí býti i rozdíl $C_{k-1}\beta - \alpha J_{k-1}$ číslem celým. Z toho jde, že v nerovnosti 1. musí býti $\beta > J_k$. Tím jest dokázána jedna část věty 9.

Druhou část dokážeme takto:

---

*) Viz pro snazší pochopení obrazec.

Je-li řetězec

$$R = a_0 + 1/a_1 + 1/a_2 + \ldots,$$

jest jeho převrácená hodnota

$$R' = \frac{1}{R} = 1/a_0 + 1/a_1 + 1/a_2 + \ldots$$

a sblížené hodnoty řetězce R' jsou převrácenými hodnotami sblížených hodnot řetězce R, a to tak, že druhá sblížená hodnota řetězce R', t. j. $1/a_0 + 1/a_1$, jest převrácenou hodnotou první sblížené hodnoty řetězce R a všeobecně $(k+1)^{ní}$ sblížená hodnota řetězce R' jest převrácenou hodnotou $k^{té}$ sblížené hodnoty řetězce R.

Bude tudíž $(k+1)^{ní}$ sblíženou hodnotou řetězce R' zlomek $\frac{J_k}{C_k}$.

Poněvadž zlomek $\frac{\alpha}{\beta}$ byl blíže k R než zlomek $\frac{C_k}{J_k}$, bude

„ $\frac{\beta}{\alpha}$ blíže k R' „ „ $\frac{J_k}{C_k}$, a z toho

jde podle již dokázané části věty 9., že jest $\alpha > C_k$. Tím jest dokázána věta 9. úplně.

Z věty 9. vysvítá, že úplnou hodnotu řetězce vyjádřiti lze jeho hodnotami sblíženými nejjednoduššeji.

§ 80. Užití řetězcův.

1) Jde-li o přibližné vyjádření hodnoty zlomku, jehož čítatel a jmenovatel jsou čísla velká, stane se to podle věty 9. v § 79. nejjednoduššeji sblíženými hodnotami řetězce, v nějž byl onen zlomek rozvinut.

Příklad. Tropický rok čítá 365·242255 dní a rok obecný 365 dní, jest tudíž o 0·542255 kratší roku tropického. Z toho jde, že 1,000.000 roků o 365 dnech jest o 242.255 dní kratší než 1,000.000 roků tropických. Aby byla tato neshoda vyrovnána, bylo by vždy v 1,000.000 roků zavésti 242255 roků o 366 dnech, tak zvaných roků přestupných. Chceme-li poměr počtu roků přestupných k 1,000.000 vyjádřiti přibližně, pokud možno nejjednoduššeji, proměňme zlomek $\frac{242255}{1{,}000.000}$ v řetězec a vypočtěme jeho hodnoty sblížené.

Obdržíme tu nejprve

$$\frac{242255}{1{,}000.000} = 1/4 + 1/7 + 1/1 + 1/4 + 1/1 + 1/1 + 1/4 + 1/1 + 1/4 + 1/1 + 1/1 + 1/9$$

a z toho sblížené hodnoty

$$\frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{39}{161}, \frac{47}{194} \ldots.$$

Jesti tudíž zavésti přibližně buď ve 4 rocích 1 rok přestupný,
nebo v 29 „ 7 roků přestupných,
„ „ 33 „ 8 „ „ ,
„ „ 161 „ 39 „ „
a t. d.

První způsob zaveden jest v kalendáři *juliánském*, třetí pak v *perském*.

Poněvadž jest 1 rok o 365 dnech o 0·242255 dne kratší roku tropického,
jsou 4 roky „ „ „ „ 0·96992 „ „ 4 roků tropických.
z čehož vysvítá, že v kalendáři juliánském přidáno jest každé 4 roky o 0·03098 dne, tudíž každých 400 roků přibližně o 3 dni více, než by bylo potřebí. Z té příčiny zavedeno jest v kalendáři *gregoriánském* ve 400 rocích o 3 přestupné roky méně než v kalendáři juliánském, t. j. 97 dní.

Část devátá.

O rovnicích neurčitých.

§ 81. *Vysvětlení.* Jsou-li v rovnici dvě nebo více neznámých, nejsou rovnicí určeny, poněvadž jest nekonečně mnoho hodnot, které vloženy jsouce za neznámé, rovnici vyhovují. Z té příčiny zoveme takové rovnice *neurčitými* Podobně jest soustava n rovnic o více než n neznámých soustavou neurčitou, poněvadž její řešení vede na rovnici o více než jedné neznámé, t. j. na rovnici neurčitou (§ 74.).

Kdyby šlo při řešení rovnice neurčité nebo neurčité soustavy rovnic jen o vyhledání hodnot neznámých, které rovnici nebo soustavě rovnic vyhovují, bylo by řešení to obsaženo úplně v řešení rovnic určitých.

Bylo-li by na př. v tomto smyslu řešiti soustavu tří rovnic o pěti neznámých, položili bychom za dvě neznámé libovolné hodnoty, načež bychom k nim příslušné hodnoty ostatních tří neznámých vypočetli z daných tří rovnic. Avšak řešením rovnic neurčitých rozumí se vypočítávání jich kořenů, které určitým *podmínkám* vyhovují. Při řešení neurčitých rovnic lineárných jde obyčejně o to, aby byly vyhledány kořeny celistvé a kladné.*)

V následujících §§ přihlédneme jen k případům, v nichž počet neznámých převyšuje o jednu počet daných rovnic.

§ 82. **O neurčitých rovnicích stupně 1. (lineárných) s dvěma neznámými.**

Neurčitou rovnici stupně 1. s dvěma neznámými lze vždy uvésti na tvar

$$ax + by = c, \qquad (1)$$

kdež a, b a c jsou čísla celá nemající žádné společné míry (§ 69., 2., 4.).

V následujícím vyšetřování budeme stále předpokládati, že rovnice na tento tvar uvedena jest.

1) *Je-li* $x_1\ y_1$ *jeden pár kořenů vyhovujících rovnici 1., jsou všecky ostatní kořeny obsaženy ve vzorcích*

$$x = x_1 \pm bn \text{ a } y = y_1 \mp an,$$

při čemž n *značí libovolné číslo.*

*) Rovnice neurčité slují též diofantickými podle řeckého mathematika Diofanta, který některé rovnice neurčité zvláštními obraty rozřešil. Diofantes žil kolem r. 360. po Kr.

Důkaz. Poněvadž čísla x_1 a y_1 jsou párem kořenů rovnice 1., platí rovnice

$$ax_1 + by_1 = c.$$

Odečtouce ji od rovnice 1., obdržíme

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0 \text{ čili } \frac{x - x_1}{y - y_1} = -\frac{b}{a}.$$

Z této rovnice jde, že

$$x - x_1 = \pm bn \text{ a } y - y_1 = \mp an \qquad (\S\ 41).$$

čili

$$x = x_1 \pm bn \text{ a } y = y_1 \mp an,$$

jak bylo tvrzeno.

Z věty 1. vyplývá:

Má-li rovnice 1. jeden pár celistvých kořenů, má jich nekonečně mnoho, neboť tvoří-li čísla x_1 a y_1 onen pár celistvých kořenů, dostačí položiti za n libovolné číslo celistvé a obdržíme ze vzorců

$$x = x_1 \pm bn \text{ a } y = y_1 \mp an$$

jiný pár kořenů celistvých rovnice 1.

2) *Jsou-li čísla* **a** *a* **b** *v rovnici 1. soudělná, nemá tato rovnice ani jediného páru celistvých kořenů.*

Důkaz. Mají-li čísla a a b společnou míru m, jest $a = \alpha m$ a $b = \beta m$, kdež α a β jsou čísla celá.

Vložíce za a a za b tyto součiny do rovnice 1., obdržíme rovnici

$$\alpha m x + \beta m y = c \text{ čili } \alpha x + \beta y = \frac{c}{m}.$$

Poněvadž čísla a, b a c nemají společné míry, jest číslo $\frac{c}{m}$ zlomkem.

Z toho jde, že i číslo na levé straně poslední rovnice musí býti zlomkem. Avšak že α a β jsou čísla celá, musí býti alespoň jedno z čísel x a y zlomkem, t. j. obě nemohou býti čísly celými.

3) *Jsou-li čísla* **a** *a* **b** *v rovnici 1. nesoudělná, má tato rovnice nekonečné množství párů celistvých kořenů.*

Pravdivosť tohoto tvrzení poznáme v § následujícím.

4) Předpokládajíce, že rovnici 1. vyhovují páry kořenů celistvých, položme si otázku, vyhovují-li jí i páry celistvých kořenů kladných.

Jmenujeme-li α, β a γ absolutní hodnoty čísel a, b a c v rovnici 1., jsou v ní obsaženy tyto čtyři případy:

a) $\alpha x + \beta y = \gamma$, b) $\alpha x - \beta y = \gamma$, c) $-\alpha x + \beta y = \gamma$, d) $-\alpha x - \beta y = \gamma$.

Jest především patrno, že ve případě d) nelze vyhověti rovnici kladnými čísly x a y, an součet záporných čísel $-\alpha x$ a $-\beta y$ nemůže býti kladný.

Případ a). Tvoří-li čísla x_1 a y_1 jeden pár celistvých kořenů, jsou dle věty 1. ostatní páry kořenů celistvých obsaženy ve vzorcích

$$x = x_1 + \beta n, \quad y = y_1 - \alpha n,$$

kdež n jest libovolné číslo celé.

Má-li býti $x > 0$ čili $x_1 + \beta n > 0$, musí býti $n > -\frac{x_1}{\beta}$.

„ „ i $y > 0$ „ $y_1 - \alpha n > 0$, „ „ $n < \frac{y_1}{\alpha}$.

Z obou nerovností, jimž n vyhovuje, vyplývá nerovnost

$$\frac{y_1}{\alpha} > n > -\frac{x_1}{\beta},$$

z níž jest patrno, že n jest sevřeno ve dvou mezích.

Uvážíme-li ještě, že n jest číslem celistvým, jest patrno, že může nabyti tolika hodnot, kolik jest celistvých čísel mezi $\frac{y_1}{\alpha}$ a $-\frac{x_1}{\beta}$. A poněvadž ke každému n přísluší jeden pár celistvých kladných kořenů rovnice 1, jest těchto párů tolik, kolik jest čísel celých mezi $\frac{y_1}{\alpha}$ a $-\frac{x_1}{\beta}$. Z toho jde, že rovnice $\alpha x + \beta y = \gamma$ má buď *určitý* počet anebo že *nemá* kořenů celistvých.

Případ b). Tvoří-li čísla x_1 a y_1 jeden pár celistvých kořenů rovnice $\alpha x - \beta y = \gamma$, jsou dle věty 1. ostatní páry obsaženy ve vzorcích

$$x = x_1 + \beta n, \quad y = y_1 + \alpha n.$$

Aby bylo $x > 0$ čili $x_1 + \beta n > 0$, musí býti $n > -\frac{x_1}{\beta}$,

„ „ i $y > 0$ „ $y_1 + \alpha n > 0$, „ „ $n > -\frac{y_1}{\alpha}$.

Poněvadž nerovnosti $n > -\frac{x_1}{\beta}$ a $n > -\frac{y_1}{\alpha}$ jsou stejného směru, jest jen ta rozhodující, na jejíž pravé straně jest číslo větší. Avšak této nerovnosti vyhovuje nekonečné množství celých čísel n, neboť vždy jest nekonečné množství čísel celých, která jsou větší než určité číslo $-\frac{x_1}{\beta}$ nebo $-\frac{y_1}{\alpha}$. Z toho jde, že ve případě b) má rovnice neurčitá nekonečné množství párů celistvých, kladných kořenů.

Totéž platí o případě c), poněvadž se liší od případu b) jen jinými písmeny, jak jest patrno z toho, že rovnici c) lze psáti ve tvaru $\beta y - \alpha x = c$.

§ 83. Jak řešíme neurčité rovnice lineárné o dvou i více neznámých.

1) *Methoda Eulerova.**) Methodu tuto seznáme nejsnáze z příkladu.

---

*) Leonh. Euler (1707—1783).

Buďtež na př. vypočteny celistvé a kladné kořeny rovnice

$$5x + 13y = 77.$$

Z této rovnice jde

$$x = \frac{77 - 13y}{5}.$$

Avšak

$$\frac{77}{5} = 15 + \frac{2}{5} \text{ a } -\frac{13y}{5} = -3y + \frac{2y}{5},$$

tudíž

$$x = 15 - 3y + \frac{2 + 2y}{5}. \qquad \text{(a)}$$

Aby bylo pro celistvé y i x číslem celým, musí býti výraz $\frac{2 + 2y}{5}$ roven číslu celému.

Položme tudíž

$$\frac{2 + 2y}{5} = z, \text{ z čehož } y = \frac{5z - 2}{2},$$

čili poněvadž

$$\frac{5z}{2} = 2z + \frac{z}{2} \text{ a } -\frac{2}{2} = -1,$$

$$y = 2z - 1 + \frac{z}{2}. \qquad \text{(b)}$$

Soudíce jako při rovnici (*a*), položme

$$\frac{z}{2} = u, \text{ tudíž } z = 2u.$$

Vložíce tuto hodnotu za z do rovnice (b) obdržíme

$$y = 5u - 1,$$

načež jde z a),

$$x = -13u + 18.$$

Z těchto vzorců obdržíme pro každé celé číslo u celistvé kořeny dané rovnice.

Jde-li o kořeny kladné, suďme takto:

Aby bylo $y > 0$ čili $5u - 1 > 0$, musí býti $u > \frac{1}{5}$,

„ „ $x > 0$ „ $-13u + 18 > 0$, „ „ „ $< 1\frac{5}{13}$.

Z těchto dvou nerovností a z podmínky, že u jest číslem celým, jde že musí býti

$$u = 1 \text{ a tudíž } y = 4 \text{ a } x = 5$$

jest jediným párem celistvých kladných kořenů rovnice $5x + 13y = 77$.

Příklad 2. Vyhledati jest celistvé a kladné kořeny rovnice $56x - 47y = 512$.

Z dané rovnice jde, že $y = \frac{56x - 512}{47}$ čili $y = x - 11 + \frac{9x + 5}{47}$. (a)

Položme $\frac{9x + 5}{47} = z$, tedy $x = \frac{47z - 5}{9}$ čili $x = 5z + \frac{2z - 5}{9}$. (b)

„ $\frac{2z - 5}{9} = u$, tedy $z = \frac{9u + 5}{2}$ čili $z = 4u + 2 + \frac{u + 1}{2}$. (c)

„ $\frac{u + 1}{2} = v$, tedy $u = 2v - 1$.

Vložíce tento výsledek do c), obdržíme $z = 9v - 2$, potom z b) $x = 47v - 11$ a z a) $t = 56v - 24$.

Aby bylo $x > 0$ čili $47v - 11 > 0$, musí býti $v > \frac{11}{47}$,

„ „ $y > 0$ „ $56v - 24 > 0$, „ „ $v > \frac{3}{7}$.

Oběma podmínkám jest vyhověno všemi kladnými čísly celými od 1 počínajíc. Z toho jde, že daná rovnice má nekonečné množství kladných kořenů celistvých, jak nám dle § 82., 4b) bylo očekávati.

Pro $v =$	1,	2,	3,	4, ...
jest $x =$	36,	83,	130,	177, ...
a $y =$	32,	88,	144,	200, ...

Přihlédneme-li blíže k výkonům v 1. a 2. příkladě vyznačeným, shledáváme, že se součiniteli neznámých x a y vykonává se *postupné* dělení (§ 40.) a že zbytky vzešlé při jednotlivých děleních, jsou součiniteli čísel z, u, v a t. d. Jsou-li součinitelé při x a y čísla nesoudělná, jest poslední zbytek při onom postupném dělení roven 1 a dospějeme tudíž k rovnici tvaru $u = k\,v + l$, z níž pro každé celistvé číslo v nabudeme celistvé hodnoty pro u. Z těchto hodnot vypočteme potom celistvé hodnoty pro z, x a y. Tím dokázána jest věta 3. v § 82.

2) *Methoda Lagrangeova.**)

Budiž řešena celistvými čísly na př. rovnice

$$47x - 56y = 3.$$

K tomu cíli vypočteme nejprve sblížené hodnoty zlomku $\frac{56}{47}$.

56	47	1
9	2	5
1	0	4
		2

	5	4	2.
$\frac{1}{1}$	$1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$	$\frac{25}{21}$	$\frac{56}{47}$.

Potom jest

$$47 \,.\, 25 - 56 \,.\, 21 = -1 \qquad (\S\ 79.,\ 2)$$

Obě strany rovnice násobme (-3), aby se její pravá strana shodovala s pravou stranou rovnice dané. Tím nabudeme rovnice

$$47 \,.\, 25 \,.\, (-3) - 56 \,.\, 21 \,.\, (-3) = 3$$

a srovnajíce tuto rovnici s rovnicí danou, shledáme, že hodnoty

$$x = 25 \,.\, (-3) = -75 \text{ a } y = 21 \,.\, (-3) = -63$$

vyhovují dané rovnici.

Všecky celistvé kořeny této rovnice obsaženy jsou tudíž ve vzorcích

$$x = -75 + 56n \text{ a } y = -63 + 47n. \qquad (\S\ 82.\ 1.)$$

---

*) Lagrange (1736—1813).

Jde-li o řešení neurčité rovnice

$$ax + by = c$$

methodou *Lagrangeovou*, pišme ji nejprve ve tvaru

$$ax - b(-y) = c$$

a pokládajíce v této rovnici za neznámé x a $-y$, vypočtěme je jako ve příkl. předcházejícím.

3) Na řešení neurčitých rovnic lineárných o dvou neznámých lze převésti řešení soustavy dvou lineárných rovnic o třech neznámých a všeobecně řešení soustavy n rovnic lineárných o $n + 1$ neznámé.

Jak si při tom počínáme, lze poznati nejlépe z příkladu.

Jde-li na př. o řešení rovnic

$$3x + 2y + 11z = 52,$$
$$6x - 7y + 13z = -48,$$

vylučme z obou rovnic jednu neznámou, na př. x.

Tím vznikne rovnice

$$11y + 9z = 152,$$

z níž obdržíme známým způsobem $y = 4 + 9n$ a $z = 12 - 11n$, kdež n značí libovolné číslo celé.

Vložíme-li tyto hodnoty na př. do rovnice 1., obdržíme rovnici $3x - 103n = -88$, v níž čísla x a n musí býti čísly celými. Z toho jde, že tvar čísel x a n poznáme, řeše poslední rovnici dle x a n.

Tím dospějeme k výsledku $n = 1 - 3r$ a $x = 5 - 103r$, kdež r jest libovolné číslo celé.

Vložíce tu hodnotu za n do vzorců pro y a z, obdržíme $y = 13 - 27r$ a $z = 1 + 33r$.

Aby bylo $x > 0$ čili $5 - 103r > 0$, musí býti $r < \frac{5}{103}$,

„ „ $y > 0$ „ $13 - 27r > 0$ „ „ $r < \frac{13}{27}$,

„ „ $z > 0$ „ $1 + 33r > 0$ „ „ $r > -\frac{1}{33}$.

Těmto třem podmínkám vyhovuje jediné $r = 0$, načež ze vzorců pro x, y a z obdržíme $x = 5$, $y = 13$ a $z = 1$, jakožto jedinou trojinu kladných celistvých kořenů daných rovnic.

Část desátá.

O mocninách, odmocninách a logarithmech.

O mocninách.

§ 84. Výměr mocniny a výsledky z něho plynoucí.

Součin n stejných činitelů $a \,.\, a \ldots a$ označujeme kratšeji a^n (§ 15., 4).

Výraz a^n jmenujeme *mocninou*, číslo a jejím *mocněncem* neboli *základem* a číslo n *mocnitelem* (exponentem).

1) Poněvadž mocnitel n udává, kolikrát mocněnec a má býti pokládán za činitele, jest *absolutním* číslem celým.

2) $a^1 = a$.

3) $1^n = 1$.

4) *Je-li mocnitelem číslo sudé, jest mocnina kladná, budiž mocněnec kladný nebo záporný*, t. j., značí-li a číslo absolutní, jest $(+a)^{2n} = (-a)^{2n} = +a^{2n}$. (§ 18., 4.)

Je-li mocnitelem číslo liché a mocněncem číslo $\begin{matrix}\text{kladné,}\\ \text{záporné,}\end{matrix}$ *jest mocnina* $\begin{matrix}\text{kladná,}\\ \text{záporná,}\end{matrix}$

t. j. pro absolutní číslo a jest

$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1},$$
$$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}. \qquad (\S\ 18., 4.)$$

Z těchto vět jde, že

$$(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}, \quad (a+b)^{2n} = (-a-b)^{2n},$$
$$(a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1}, \quad (a+b)^{2n+1} = -(-a-b)^{2n+1}.$$

§ 85. O umocňování jednočlenův. O počítání mocninami.

1) *Součin umocníme libovolným číslem* (abs. celým), *umocníme-li jím každého jeho činitele*,

t. j. $(ab)^n = a^n b^n$ (§ 17., 6.),

$$(abc)^n = a^n b^n c^n.$$

Čteme-li rovnice poslední od pravé strany k levé, dospíváme k větě:

2) *Součin mocnin o stejných mocnitelích roven jest mocnině téhož mocnitele, jejímž základem jest součin základů všech daných mocnin.*

3) *Zlomek* (podíl) *umocníme libovolným číslem, umocníme-li jím jeho čitatele i jmenovatele*,

t. j. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Neboť $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots}_{n\text{kráte}} = \frac{a.a.a\ldots}{b.b.b\ldots} = \frac{a}{b^n}$.

Čteme-li rovnici $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ od pravé strany k levé, nabýváme věty:

4) *Podíl mocnin o stejných mocnitelích roven jest mocnině téhož mocnitele, jejímž základem jest podíl základů daných mocnin.*

5) *Součin mocnin o stejných základech roven jest mocnině téhož základu, jejímž mocnitelem jest součet daných mocnitelů, t. j.* $a^n . a^r = a^{n+r}$ a všeobecněji $a^n . a^r . a^s . = a^{n+r+s+\cdots}$ (§ 17., 5.)

6) *Mocninu umocníme, násobíme-li jejího mocnitele mocnitelem novým.*

t. j. $(a^n)^r = a^{nr}$. (§ 17., 7.)

Dokažte, že $(a^n)^r = (a^r)^n$,

že $[(a^n)^r]^p = [(a^n)^p]^r = [(a^p)^n]^r = [(a^p)^r]^n = \ldots$

Značí-li výrazy $a^{(n^2)}$ a $(a^n)^2$ totéž?

7) Při *dělení* mocnin stejných základů $a^r : a^s$ mohou nastati tyto případy:

a) $r > s$, b) $r = s$, c) $r < s$.

Ve případě a) obdržíme za podíl a^{r-s} (§ 23., 5),

t. j. pro $r > s$ jest $a^r : a^s = a^{r-s}$.

Ve případě b) jest $a^r : a^s = a^r : a^r = 1$.

Ve případě c) má dělitel o $s - r$ činitelů více než dělenec. Krátíme-li podíl společným činitelem dělence i dělitele, t. j. mocninou a^r, nabudeme

$$a^r : a^s = 1 : a^{s-r}, \text{ čili}$$

$$\text{pro } r < s \text{ jest } a^r : a^s = \frac{1}{a^{s-r}}.$$

§ 86. Rozšíření pojmu mocniny na mocniny s mocnitelem 0 a na mocniny s mocniteli zápornými.

1) Při dělení $a^r : a^s$ bylo nám rozeznávati tři případy, totiž:

a) $r > s$, b) $r = s$ a c) $r < s$, a v každém z těch případů nabyl podíl jiného tvaru.

Užijeme-li při dělení mocnin o stejných základech ve všech třech případech pravidla:

Podíl mocnin o stejných základech roven jest mocnině téhož základu, jejíhož mocnitele nabudeme odečtouce od mocnitele dělence mocnitele dělitele (§ 23., 5), dospějeme k tomu, jaký význam přikládati jest symbolům a^0 a a^{-n}, které podle původní definice mocniny (§ 84., 1) významu nemají.

Podle onoho pravidla jest $a^r : a^r = a^0$,

avšak $a^r : a^r = 1$,

tudíž jest $a^0 = 1$. —

Je-li $r < s$, obdržíme podle vytčeného pravidla

$$a^r : a^s = a^{r-s},$$

při čemž $r - s$ jest číslo záporné. Avšak v § 85., 7. jsme poznali, že

$$a^r : a^s = \frac{1}{a^{s-r}},$$

tudíž jest $a^{r-s} = \frac{1}{a^{s-r}}$.

Označíme-li kladný zbytek $(s - r)$ krátce n,

jest číslo $(r - s) = -n$, což vloženo jsouc do předcházející rovnice poskytne

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Užíváme-li tudíž ve všech těchto případech téhož pravidla pro dělení mocnin o stejných základech, jest nám pokládati *každou mocninu s mocnitelem 0 za rovnu 1 a každou mocninu s mocnitelem záporným za rovnu převrácené*

hodnotě mocniny téhož základu, jejíž mocnitel rovná se absolutní hodnotě mocnitele záporného. Na př. $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ *atd.*

Poznámka. Uvážíme-li, že $a^n = 1 \cdot a^n$
a $a^{-n} = 1 : a^n$, poznáme:
a^n značí, že 1 má býti n kráte po sobě *násobena* a,
a^{-n} „ „ 1 „ „ „ „ „ *dělena* a.

Poněvadž $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, značí a^{-n} též, že *převrácená* hodnota čísla a ma býti $n$kráte pokládána za činitele.

2) *Všecka pravidla odvozená pro počítání mocninami, jichž mocniteli jsou čísla absolutní, platí i pro mocniny s mocniteli zápornými.*

Tvrzení. a) $(ab)^{-n} = a^{-n}b^{-n}$,

neboť $(ab)^{-n} = \frac{1}{(ab)^n} = \frac{1}{a^n b^n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = a^{-n}b^{-n}$.

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$,

neboť $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{b^n}} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$.

c) $(a^{-n})^r = a^{-nr}$,

neboť $(a^{-n})^r = \left(\frac{1}{a^n}\right)^r = \frac{1}{a^{nr}} = a^{-nr}$.

Podobně dokážeme, že $(a^n)^{-r} = a^{-nr}$.

Dále jest $(a^{-n})^{-r} = a^{(-n)(-r)} = a^{nr}$,

neboť $(a^{-n})^{-r} = \frac{1}{(a^{-n})^r} = \frac{1}{a^{-nr}} = a^{nr}$.

d) $a^{-n} \cdot a^r = a^{-n+r}$,

neboť $a^{-n} \cdot a^r = \frac{1}{a^n} \cdot a^r = \frac{a^r}{a^n} = a^{r-n} = a^{-n+r}$.

Podobně dokážeme, že jest $a^{-n} \cdot a^{-r} = a^{-n+(-r)}$.

e) $a^{-n} : a^r = a^{-n-r}$, neboť

$$a^{-n} : a^r = \frac{1}{a^n} : a^r = \frac{1}{a^n \cdot a^r} = \frac{1}{a^{n+r}} = a^{-(n+r)} = a^{-n-r}.$$

Konečně jest

$$a^n : a^{-r} = a^{n-(-r)} \text{ a } a^{-n} : a^{-r} = a^{-n-(-r)}.$$

3) *Umocníme-li obě strany rovnice týmž číslem, povstane opět rovnice,* t. j. pro $a = b$ jest $a^n = b^n$.

Důkaz. Pravdivosť tvrzení patrna jest z toho, že a lze položiti za b a tudíž a^n za b^n.

4) *Umocněním nerovnosti, na jejíchž obou stranách jsou čísla absolutní, číslem absolutním, povstane nerovnosť téhož směru s nerovností danou.*

Podmínka. $a > b$, kdež a a b jsou čísla absolutní.

Tvrzení. $a^n > b^n$, kdež n *jest číslo absolutní.*

Důkaz. Násobíme-li pospolu n nerovností $\left.\begin{matrix} a > b, \\ a > b, \\ \vdots \\ a > b, \end{matrix}\right\} n$

vznikne při daných podmínkách nerovnosť $a^n > b^n$, jak bylo tvrzeno.

5) *Umocněním nerovnosti, na jejíchž obou stranách jsou čísla absolutní, číslem záporným, vznikne nerovnosť směru protivného s nerovností danou.*

Podmínka. $a > b$, kdež a a b jsou čísla absolutní.

Tvrzení. $a^{-n} < b^{-n}$, kdež $-n$ *jest číslo záporné.*

Důkaz. Z nerovnosti $a > b$ jde,

že $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, tudíž dle věty 4) $\left(\frac{1}{a}\right)^n < \left(\frac{1}{b}\right)^n$

čili $\frac{1}{a^n} < \frac{1}{b^n}$

a klademe-li za $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ a za $\frac{1}{b^n} = b^{-n}$,

nabudeme $a^{-n} < b^{-n}$, jak bylo tvrzeno.

6) Zavedše mocniny se zápornými mocniteli, můžeme číslo soustavy desítkové, které má obecně tvar

$$\ldots a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \ldots,$$

psáti ve tvaru $\ldots a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0 + b_1 10^{-1} + b_2 10^{-2} + b_3 10^{-3} \ldots$

Hledíce k tomuto tvaru nazýváme desetiny též jednotkami prvního řádu *záporného*, setiny jednotkami druhého řádu *záporného* atd. Zároveň jest z tohoto tvaru patrno, proč jednotky základní jmenujeme jednotkami řádu *nullového*. Při všech jednotkách shoduje se udavatel jich řádu s mocnitelem mocniny čísla 10, jíž lze ony jednotky vyjádřiti.

§ 87. Zdvojmocňování dvojčlenův a mnohočlenův.

1) Poznali jsme, že

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (1)$$

kterýž vzorec platí, buďtež a a b jakákoli čísla z řady číselné. (§ 23.)

Označíme-li α a β absolutní hodnoty čísel a a b, mohou nastati tyto případy:

a) $a = +\alpha$ a $b = +\beta$, načež obdržíme ze vzorce 1.

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2.$$

b) $a = +\alpha$ a $b = -\beta$, potom jest dle 1.

$$[\alpha + (-\beta)]^2 = (+\alpha)^2 + 2(+\alpha)(-\beta) + (-\beta)^2, \text{ čili}$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2.$$

c) $a = -\alpha$, $b = +\beta$, potom obdržíme

$$[-\alpha + (+\beta)]^2 = (-\alpha)^2 + 2(-\alpha)(+\beta) + (+\beta)^2, \text{ čili}$$
$$(-\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

d) $a = \alpha$ a $b = -\beta$, potom jest

$$[(-\alpha) + (-\beta)]^2 = (-\alpha)^2 + 2(-\alpha)(-\beta) + (-\beta)^2, \text{ čili}$$
$$(-\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2.$$

Že jsme v případech a) a d), jakož i ve případech b) a c) obdrželi stejné výsledky, nepřekvapí nás, uvážíme-li, že platí všeobecně

$$(\alpha - \beta)^{2n} = (\beta - \alpha)^{2n},$$
$$(\alpha + \beta)^{2n} = (-\alpha - \beta)^{2n}. \qquad (\S\ 84.,\ 4.)$$

2) Je-li zdvojmocniti trojčlen $a + b + c$, položme nejprve $a + b = m$. Tím obdržíme

$$(a + b + c)^2 = (m + c)^2, \text{ avšak}$$
$$(m + c)^2 = m^2 + 2mc + c^2 \text{ a } m^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

tudíž

$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2, \qquad (2)$$

při čemž položen jest za m původní výraz $(a + b)$.

Podobně obdržíme pro

$(a + b + c + d)^2$, položíce $a + b + c = r$, nejprve
$(a + b + c + d)^2 = r^2 + 2rd + d^2$.

Vložíme-li za r výraz původní a za r^2 čili za $(a + b + c)^2$ výraz dříve nabytý, povstane vzorec

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2. \qquad (3)$$

Týmž způsobem dospějeme ke vzorci

$$(a + b + c + d + e)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2 + 2(a + b + c + d)e + e^2 \qquad (4)$$

atd.

Zákon výtvarný těchto vzorců jest tak patrný, že netřeba ho popisovati.

Ke vzorcům tvaru ještě pravidelnějšího dospějeme, provedouce všecky výkony na pravých stranách vzorců 2., 3. a 4. vyznačené. Uspořádáme-li zároveň pravé strany tak, že napřed napíšeme všecky dvojmoci a potom členy ostatní, nabudeme vzorců

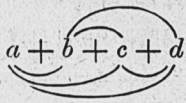
$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$
$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd,$$
$$(a + b + c + d + e)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae + 2bc + 2bd + 2be + 2cd + 2ce + 2de$$

atd.,

z nichž jest patrna věta:

Dvojmoc mnohočlenu rovná se součtu dvojmocí všech jeho členů zvětšenému o součet všech možných dvojnásobných součinů, které jsou vytvořeny vždy ze dvou členů daného mnohočlenu.

Těchto součinů nabudeme spojujíce každý člen mnohočlenu se všemi jeho členy následujícími. Na př. při zdvojmocňování čtyřčlenu



jsou ony součiny ab, ac, ad,
bc, bd,
cd.

Kdybychom spojovali každý člen mnohočlenu, na př. n členu, postupně se všemi jeho členy ostatními, nabyli bychom $n(n-1)$ součinů. V tomto počtu přichází každý součin, na př. ab, dvakráte, neboť jednou povstal spojením a s b a po druhé spojením b s a. Z toho jde, že při zdvojmocňování n členu nabudeme $\frac{n(n-1)}{2}$ dvojnásobných součinů a dvojmoc n členu má tudíž $n+\frac{n(n-1)}{2}$ čili $\frac{n(n+1)}{2}$ členů.

Budiž podotčeno, že vzorce v tomto § odvozené platí, buďtež $a, b, c, ..$ jakákoli čísla řady číselné.

§ 88. O vyšších mocninách dvojčlenův a mnohočlenův.

1) Opětovaným násobením lze odvoditi vzorce pro

$$(a+b)^3,\ (a+b)^4,\ (a+b)^5 \text{ atd.}$$

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \quad (1)$$

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b) = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4, \quad (2)$$

$$(a+b)^5 = (a+b)^4(a+b) = (a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)(a+b) = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \quad (3)$$

atd.

Součinitele, vyskytující se při jednotlivých členech na pravých stranách vzorců právě odvozených, nazýváme *součiniteli binomickými*.

Jak tito součinitelé jsou vytvořeni a jak na sobě závisejí, poznáme pozorujíce, jak povstali při násobeních, která byla svrchu vyznačena.

	Součinitelé částečných součinův a výsledkův:
$(a+b) = (a+b)(a+b)$	
a^2+ab	1, 1,
$ab+b^2$	1, 1
$a^2+2ab+b^2$	1, 2, 1
$(a+b)^3 = (a^2+2ab+b^2)(a+b)$	
$a^3+2a^2b+ab^2$	1, 2, 1
$a^2b+2ab^2+b^3$	1, 2, 1
$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.	1, 3, 3, 1

$$(a+b)^4 = (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)$$

$$a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3 \qquad 1,\ 3,\ 3,\ 1$$

$$a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \qquad 1,\ 3,\ 3,\ 1$$

$$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4. \qquad 1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1$$

$$(a+b)^5 = (a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)(a+b)$$

$$a^5+4a^4b+6a^3b^2+4a^2b^3+ab^4 \qquad 1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1$$

$$a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3+4ab^4+b^5 \qquad 1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1$$

$$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \qquad 1,\ 5,\ 10,\ 10,\ 5,\ 1$$

atd.

Připojíme-li k binomickým součinitelům tuto vyvinutým ještě součinitele první mocniny dvojčlenu $a+b$, t. j. 1 a 1 a dále 1, jakožto hodnotu mocniny $0^{té}$ téhož dvojčlenu, lze je sestaviti v obrazec

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

atd.,

který podle jeho vynálezce *Pascalovým trojúhelníkem* zoveme.*)

Podle toho jest na př.

$$(1+a)^5 = 1+5a+10a^2+10a^3+5a^4+a^5, \qquad (4)$$

$$(1+a)^6 = 1+6a+15a^2+20a^3+15a^4+6a^5+a^6$$

atd.

Povšimnutí zasluhuje, že součinitel druhého členu pravé strany roven jest vždy mocniteli daného dvojčlenu, neboť onen součinitel povstane sečtením tolika jednotek, kolik jich má mocnitel.

Bude tedy na př. součinitelem druhého členu ve vzorci pro $(1+a)^m$ číslo m, t. j.

$$(1+a)^m = 1+ma+\ldots$$

Je-li číslo $a > 0$, jest patrno ze vzorců 4.,

že $(1+a)^5 > 1+5a$

$(1+a)^6 > 1+6a$ a všeobecně ze vzorce 5.,

že $(1+a)^m > 1+ma.$ (6)

*) Pascal (1623—1662).

2) Vzorce pro $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ atd. svrchu odvozené platí, buďtež a a b čísla *kladná* nebo *záporná*. Nazveme-li α a β *absolutní* hodnoty algebraických čísel a a b, jsou možny případy

$$a=+\alpha,\quad b=+\beta,$$
$$a=+\alpha,\quad b=-\beta,$$
$$a=-\alpha,\quad b=+\beta,$$
$$a=-\alpha,\quad b=-\beta.$$

Ze vzorců 1., 2. a 3. vycházejí tím na jevo vzorce, v nichž členy složené z lichého počtu *záporných* činitelů jsou opatřeny znaménkem —. Na př.

$$(\alpha-\beta)^3=\ \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3,$$
$$(-\alpha+\beta)^3=-\alpha^3+3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+\beta^3,$$
$$(-\alpha-\beta)^3=-\alpha^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2-\beta^3,$$
$$(\alpha-\beta)^4=\ \alpha^4-4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta^3+\beta^4,$$
$$(-\alpha+\beta)^5=-\alpha^5+5\alpha^4\beta-10\alpha^3\beta^2+10\alpha^2\beta^3-5\alpha\beta^4+\beta^5$$

atd.

3) Na základě vzorců pro umocnění dvojčlenu čísly 3, 4, 5 atd. lze též libovolný mnohočlen těmito čísly umocniti.

Je-li na př. umocniti trojčlen $(a+b+c)$ číslem 3, položme nejprve $a+b=m$. Potom jest

$$(a+b+c)^3=(m+c)^3=m^3+3m^2c+3mc^2+c^3$$

a položíme-li $a+b$ za m a $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ za m^3, obdržíme

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3.$$

Podobně jest

$$(a+b+c+d)^3=\underbrace{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3}_{(a+b+c)^3}$$
$$+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3$$

atd.

§ 89. O závislosti absolutní hodnoty mocniny na jejím mocněnci a mocniteli.

V následujícím budeme předpokládati, že mocněncem i mocnitelem jsou čísla *absolutní*.

1) *Absolutní hodnota mocniny, jejímž mocněncem jest číslo větší než 1, roste s rostoucím mocnitelem.*

Podmínka. $a>1$.

Tvrzení. $a^4>a^3>a^2>a$.

Důkaz. Dle podmínky jest $a>1$, (1)

Násobením nabudeme $\dfrac{a=a,}{a^2>a,}$ (2)

„ „ $\dfrac{a=a,}{a^3>a^2,}$ (3)

„ „ $\dfrac{a=a,}{a^4>a^3,}$ (4)

atd.

Z nerovností ... 4., 3., 2. a 1. jde, že jest

$$\ldots a^4 > a^3 > a^2 > a > 1,$$ jak bylo tvrzeno.

Vzrůstá-li mocnitel mocniny, jejíž mocněnec jest > 1, *do nekonečna, vzrůstá i absolutní hodnota mocniny do nekonečna.*

Pravdivost tohoto tvrzení bude dokázána, dokážeme-li, že pro $a > 1$ může a^m nabyti hodnoty větší než sebe větší číslo.

Poněvadž $a > 1$,

lze položiti $a = 1 + \alpha$, při čemž jest $\alpha > 0$.

Potom jest $a^m = (1+\alpha)^m$,

že však jest $(1+\alpha)^m > 1 + m\alpha$, (§ 88., 1)

jest i $a^m > 1 + m\alpha$.

Vzrůstá-li m do nekonečna, vzrůstá i $1 + m\alpha$ do nekonečna (§ 50., 4.) a tudíž i a^m.

2) *Absolutní hodnota mocniny, jejíž mocněnec jest menší než* 1, *klesá s rostoucím mocnitelem.*

Podmínka. $a < 1$.

Tvrzení. $a^4 < a^3 < a^2 < a$.

Důkaz. Dle podmínky jest

$$a < 1, \quad (1)$$

$$\underline{a = a.}$$

Znásobením této nerovnosti a rovnice nabudeme

$$a^2 < a, \quad (2)$$

$$\underline{a = a,}$$

„ „ „ „ „ „

$$a^3 < a^2, \quad (3)$$

$$\underline{a = a,}$$

„ „ „ „ „ „

$$a^4 < a^3, \quad (4)$$

atd.

Z nerovností 4., 3., 2. a 1. jde, že jest

$$\ldots a^4 < a^3 < a^2 < a < 1,$$ jak bylo tvrzeno.

Roste-li mocnitel mocniny, jejíž mocněnec jest menší než 1, *do nekonečna, blíží se hodnota mocniny* 0.

Důkaz. Poněvadž jest mocněnec $a < 1$, lze položiti

$$a = \frac{1}{1+\alpha}, \text{ kdež jest } \alpha > 0.$$

Potom jest $$a^m = \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^m, \text{ čili } a^m = \frac{1}{(1+\alpha)^m}. \quad (1)$$

Poněvadž jest $(1+\alpha)^m > 1 + m\alpha$, (§ 88., 1)

jest $$\frac{1}{(1+\alpha)^m} < \frac{1}{1+m\alpha}, \text{ čili dle rovnice 1.}$$

$$a^m < \frac{1}{1+m\alpha}.$$

Roste-li číslo m do nekonečna, blíží se výraz $\frac{1}{1+m\alpha}$ a tudíž i a^m nulle. (§ 50., 2)

§ 90. Jak zdvojmocňujeme čísla soustavy desítkové.

1) Každé celé číslo A soustavy desítkové lze psáti ve tvaru

$$A = \ldots + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0. \qquad (\S\ 28.)$$

Jest tedy $A^2 = (\ldots + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0)^2$ a užijeme-li vzorce 3. v § 87., nabudeme

$$A^2 = \ldots a_3{}^2 10^6 + 2a_3 a_2 10^5 + a_2{}^2 10^4 + 2(a_3 10^3 + a_2 10^2) a_1 10 + a_1{}^2 10^2 + \\ + 2(a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10) a_0 + a_0{}^2.$$

Vytkneme-li z výrazů na pravé straně v závorkách se vyskytujících 10^2 a 10, vznikne vzorec

$$A^2 = \ldots a_3{}^2 10^6 + 2a_3 a_2 10^5 + a_2{}^2 10^4 + 2(a_3 10 + a_2) a_1 10^3 + a_1{}^2 10^2 + \\ + 2(a_3 10^2 + a_2 10 + a_1) a_0 10 + a_0{}^2, \qquad (1)$$

dle něhož lze *zdvojmocňovati* čísla soustavy desítkové.

Na př. pro číslo $A = 3476$ jest $a_3 = 3$, $a_2 = 4$, $a_1 = 7$, $a_0 = 6$

$a_3 10 + a_2 = 34$, $a_3 10^2 + a_2 10 + a_1 = 347$,

tudíž jest $A^2 = 3476^2 = 3^2 . 10^6 + 2 . 3 . 4 . 10^5 + 4^2 . 10^4 + 2 . 34 . 7 . 10^3 + 7^2 . 10^2 + \\ + 2 . 347 . 6 . 10 + 6^2.$

Avšak

$3^2 . 10^6 = 9000000$
$2 . 3 . 4 . 10^5 = 2400000$
$4^2 . 10^4 = 160000$
$2 . 34 . 7 . 10^3 = 476000$
$7^2 . 10^2 = 4900$
$2 . 347 . 6 . 10 = 41640$
$6^2 = 36$

$A^2 = 12082576.$

Místo toho píšeme kratšeji nully vynechávajíce

$3476^2 = 9$
24
16
476
49
4164
36

12082576.

Počet zjednoduší se ještě, počítáme-li na základě vzorce, který povstane ze vzorce 1. tím, že z 2. a 3. členu pravé strany vytkneme číslo $a_2 10^4$, ze 4. a 5. číslo $a_1 10^2$ a ze 6. a 7. číslo a_0.

Tím nabude onen vzorec tvaru

$$A^2 = \ldots a_3{}^2 10^6 + (2a_3 10 + a_2) a_2 10^4 + [2(a_3 10 + a_2) 10 + a_1] a_1 10^2 + \\ + [2(a_3 10^2 + a_2 10 + a_1) 10 + a_0] a_0. \qquad (2)$$

Pro $A = 3476$ jest

$$A^2 = 3476^2 = 3^2 . 10^6 + (2 . 3 . 10 + 4) 4 . 10^4 + (2 . 34 . 10 + 7) 7 . 10^2 + \\ + (2 . 347 . 10 + 6) 6.$$

Avšak

$3^2 . 10^6 = 9000000$
$(2 . 3 . 10 + 4) 4 . 10^4 = 2560000$
$(2 . 34 . 10 + 7) 7 . 10^2 = 480900$
$(2 . 347 . 10 + 6) 6 = 41676$

$3476^2 = 12082576.$

Místo toho píšeme kratšeji nully vynechávajíce

$3476^2 = 9$
256
4809
41676

12082576.

Pravidla pro zdvojmocňování čísel dekadických, obsažená ve vzorci 1. a 2., známa jsou ze tříd nižších.

2) *Jde-li o zdvojmocnění zlomku desetinného, zdvojmocňujeme jej nejprve nedbajíce desetinné tečky* (jako číslo celé), *a ve výsledku utvoříme dvakráte tolik míst desetinných, co jich daný zlomek má.*

Důkaz. Zlomek desetinný Z, který má n desetinných míst, lze psáti ve tvaru

$$\frac{A}{10^n}, \text{ kdež } A \text{ jest číslo celé (§ 51).}$$

Jest tedy $Z^2 = \left(\frac{A}{10^n}\right)$ čili $Z^2 = \frac{A^2}{10^{2n}}$,

z čehož jest patrno, že nejprve zdvojmocniti jest A (číslo celé) a potom utvořiti ve výsledku $2n$ míst desetinných.

3) *Dvojmoc čísla n místného má buď* $2n-1$ *nebo* $2n$ *míst.*

Důkaz. Celé číslo n místné A obsaženo jest vždy v mezích 10^{n-1} a 10^n, t. j. platí nerovnosť

$$10^{n-1} < A < 10^n.$$

Zdvojmocněním této nerovnosti nabudeme (§ 86., 4)

$$10^{2n-2} < A^2 < 10^{2n}.$$

Uvážíme-li, že číslo 10^{2n-2} jest nejmenší číslo $(2n-1)$ místné a že

10^{2n} jest „ „ $(2n+1)$ místné, poznáme, že naše tvrzení jest správno.

Dokažte pravdivosť těchto tvrzení:

1) Číslo celé, které má na posledním místě v pravo některou z číslic 2, 3, 7, 8, není úplnou dvojmocí.

2) Číslo celé, které má na místě jednotek 6 a na místě desítek sudou číslici, není úplnou dvojmocí.

3) Zlomek desetinný, který má lichý počet desetinných míst (nully v pravo připsané nepočítajíc), není úplnou dvojmocí.

4) Dvojmocí $\begin{matrix}\text{ryzího}\\\text{neryzího}\end{matrix}$ periodického zlomku desetinného jest zase $\begin{matrix}\text{ryzí}\\\text{neryzí}\end{matrix}$ periodický zlomek desetinný.

5) Dělíme-li dvojmoc lichého čísla 8^{mi}, obdržíme za zbytek 1.

4) Zdvojmocníme-li místo čísla úplného $(a+\alpha)$ číslo neúplné a, učiníme chybu $(a+\alpha)^2 - a^2$ čili $2a\alpha + \alpha^2$.

Je-li α proti a malé, lze α^2 vynechati a míti přibližně za chybu $2a\alpha$. Je-li na př. číslo a číslem zkráceným na n desetinných míst, s nímž tedy jest spojena chyba $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$, jest chyba ve dvojmoci tohoto čísla $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n} \cdot 2a$ čili $< \frac{a}{10^n}$, t. j.: chyba ve dvojmoci, povstalé zdvojmocněním čísla a na n desetinných míst zkráceného, jest menší než číslo, jehož nabudeme pošinouce v čísle a desetinnou tečku o n míst na levo.

Na př. chyba ve dvojmoci zkráceného čísla 4·15... jest menší než 0·0415.

Odvoďte výsledek tuto nabytý z pravidla pro vyšetření chyby v součinu dvou čísel zkrácených.

§ 91. Jak ztrojmocňujeme čísla soustavy desítkové.

1) Značiž jako v § předcházejícím A číslo $\ldots a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$, jež ztrojmocniti jest.

Dle vzorců v § 88., 3. jest

$$A^3 = \ldots a_2{}^3 10^6 + 3 . a_2{}^2 . a_1 10^5 + 3 . a_2 a_1{}^2 . 10^4 + a_1{}^3 10^3 + 3(a_2 10^2 + a_1 10)^2 a_0 + \\ + 3 (a_2 10^2 + a_1 10) a_0{}^2 + a_0{}^3$$

čili, vytkneme-li z výrazů v závorkách 10^2 a 10,

$$A^3 = \ldots a_2{}^3 10^6 + 3 . a_2{}^2 . a_1 10^5 + 3 . a_2 a_1{}^2 . 10^4 + a_1{}^3 10^3 + 3(a_2 10 + a_1)^2 a_0 10^2 + \\ + 3 (a_2 10 + a_1) a_0{}^2 10 + a_0{}^3,$$

dle kteréhož vzorce lze *ztrojmocňovati* čísla soustavy *desítkové.*

Pro $A = 247$ jest

$a_2 = 2$, $a_1 = 4$, $a_0 = 7$, $a_2 10 + a_1 = 24$ a tudíž

$$A^3 = 247^3 = 2^3 . 10^6 + 3 . 2^2 . 4 . 10^5 + 3 . 2 . 4^2 . 10^4 + 4^3 . 10^3 + 3 . 24^2 . 7 . 10^2 + \\ + 3 . 24 . 7^2 . 10 + 7^3.$$

Avšak

$$\begin{aligned} 2^3 . 10^6 &= 8000000 \\ 3 . 2^2 . 4 . 10^5 &= 4800000 \\ 3 . 2 . 4^2 . 10^4 &= 960000 \\ 4^3 . 10^3 &= 64000 \\ 3 . 24^2 . 7 . 10^2 &= 1209600 \\ 3 . 24 . 7^2 . 10 &= 35280 \\ 7^3 &= 343 \\ \hline 247^3 &= 15069223 \end{aligned}$$

Místo toho píšeme kratšeji nully vynechávajíce

$$\begin{aligned} 247^3 &= 8 \\ &\quad 48 \\ &\quad 96 \\ &\quad 64 \\ &\quad 12096 \\ &\quad 3528 \\ &\quad 343 \\ \hline &\quad 15069223. \end{aligned}$$

2) *Jde-li o ztrojmocnění zlomku desetinného, ztrojmocňujeme jej nejprve jako číslo celé, ale ve výsledku utvoříme 3kráte tolik míst desetinných, co jich daný zlomek má.*

Důkaz. Zlomek desetinný Z o n místech desetinných lze psáti ve tvaru

$$Z = \frac{A}{10^n}.$$

Tudíž jest $Z^3 = \frac{A^3}{10^{3n}}$, ze kteréž rovnice jest věta 2. patrna. (Viz důkaz věty 2. v § 90.)

3) *Trojmoc čísla n místného má nejméně* $3n - 2$ *a nejvýše* $3n$ *míst.*

Důkaz. O n místném čísle celém A platí nerovnost

$$10^{n-1} < A < 10^n,$$

tudíž $(10^{n-1})^3 < A^3 < (10^n)^3$

čili $10^{3n-3} < A < 10^{3n}$.

Uvážíme-li, že 10^{3n-3} jest nejmenší číslo $3n-2$ místné

a „ 10^{3n} „ „ „ $3n+1$ místné,

jest pravda našeho tvrzení patrna.

a) Dokažte pravdivost těchto tvrzení:

1. Číslo celé, které má na místě jednotek 8 a na místě desítek lichou číslici, nemůže býti úplnou trojmocí.

2. Číslo celé, které má na místě jednotek 2 nebo 6 a na místě desítek sudou číslici, nemůže býti úplnou trojmocí.

3. Zlomek desetinný, jehož počet míst desetinných 3 dělitelen není (nully v pravo připsané nepočítajíc), není úplnou trojmocí.

4. Trojmoc $\begin{matrix}\text{ryzího}\\\text{neryzího}\end{matrix}$ zlomku periodického jest zase $\begin{matrix}\text{ryzí}\\\text{neryzí}\end{matrix}$ periodický zlomek desetinný.

5. Ve výsledku umocňováním povstalém nevyskytují se prvočinitelé různí od prvočinitelů mocněnce.

b) Jak vypočísti jest na základě zdvojmocňování a ztrojmocňování čtvrtou, pátou, šestou, sedmou atd. mocninu čísla soustavy dekadické?

Lze-li tímto způsobem vypočísti každou mocninu čísla soustavy dekadické?

4) Ztrojmocníme-li místo úplného čísla $(a+\alpha)$ číslo neúplné a, dopustíme se chyby $(a+\alpha)^3 - a^3$ čili $3a^2\alpha + 3a\alpha^2 + \alpha^3$. Je-li α proti a velmi malé, převyšuje člen první značně členy ostatní a lze míti přibližně za chybu v trojmoci $3a^2\alpha$. Pro $\alpha < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^n}$ jest tudíž tato chyba $< \frac{3}{2}\frac{a^2}{10^n}$.

Na př. v trojmoci zkráceného čísla 3·45... jest $ch < \frac{3}{2}\frac{11}{10^2}$ čili přibližně $< 0{\cdot}17$.

Odvoďte výsledek tuto nabytý z pravidla, dle něhož vyšetří se chyba v součinu dvou čísel zkrácených.

Dokažte, že chyba, kterou učiníme umocníce číslem n neúplné číslo a místo úplného čísla $(a+\alpha)$, rovná se přibližně $na^{n-1}\alpha$, je-li α velmi malé proti a (§ 88., 6. rovn.).

§ 92. O inversních výkonech umocňování.

Poněvadž na př. 3^2 není rovno 2^3 a všeobecně a^b není pro každé a a b rovno b^a, není umocňování výkonem *záměnným*. Vyplývají tudíž z umocňování dva výkony *inversní* dle toho, známe-li kromě výsledku umocňování mocnitele nebo mocněnce.

Známe-li *výsledek* umocňování a $\begin{matrix}\textit{mocnitele,}\\\textit{mocněnce,}\end{matrix}$ vypočteme $\begin{matrix}\textit{mocněnce odmocňováním.}\\\textit{mocnitele logarithmováním.}\end{matrix}$

Umocňování se svými výkony inversními tvoří výkony stupně třetího.

O odmocninách.

§ 93. Výměr odmocniny a výsledky z něho plynoucí.

1) Budiž $a^r = b$, při čemž a jest jakékoli číslo z řady číselné a r kladné nebo záporné číslo *celé*.

Známe-li b, t. j. výsledek umocňování, a mocnitele r, vypočteme dle § 92. mocněnce a výkonem početním, který se nazývá *odmocňováním* čili

dobýváním kořene. O čísle a pravíme, že jest rovno $r^{té}$ *odmocnině* či $r^{tému}$ *kořeni* (radix) čísla b a vyznačujeme to písemně takto:

$$a = \sqrt[r]{b}.$$

Číslo b jmenuje se *odmocněnec* (radikand) a číslo r *odmocnitel* (exponent).

Z tohoto vysvětlení jest patrno, že číslo a, které jest rovno $\sqrt[r]{b}$, musí míti vlastnosť, že $a^r = b$, t. j. $r^{tá}$ *odmocnina z nějakého čísla* b *jest to číslo, které povýšeno jsouc na* r^{tou} *dá* b.

2) Dosadíme-li z rovnice

$$a = \sqrt[r]{b} \tag{1}$$

$\sqrt[r]{b}$ za a do rovnice $a^r = b$, (2)

nabudeme $\left(\sqrt[r]{b}\right)^r = b$ (3)

a vložíme-li z rovnice 2. výraz a^r za b do rovnice 1., povstane rovnice

$$a = \sqrt[r]{a^r}. \tag{4}$$

Rovnice 3. jest pouhým výrazem toho, co v definici $r^{té}$ odmocniny bylo řečeno. Z rovnice 4. jest patrno:

Povýšíme-li číslo na libovolnou mocnosť, na př. r^{tou}, *a dobudeme-li z obdržené mocniny* $r^{tý}$ *kořen, obdržíme za výsledek číslo původní.*

Z této věty jde, že umocňování a odmocňování jsou výkony na vzájem *protivné.*

3) *Odmocnina, jejímž odmocnitelem jest* 1, *rovna jest odmocněnci,*

t. j. $\sqrt[1]{a} = a$, neboť $a^1 = a$.

Z té příčiny píšeme vždy místo $\sqrt[1]{a}$ jen a. Místo $\sqrt[2]{a}$ píšeme kratšeji $\sqrt{a}$.

4) *Odmocnina z* 1 *rovna jest* 1, t. j. $\sqrt[n]{1} = 1$, neboť $1^n = 1$.

Poznámka. Dlužno jest poznamenati, že větou touto se netvrdí, že jest 1 jedinou hodnotou $\sqrt[n]{1}$.

5) Odmocniny o stejných odmocnitelích jmenujeme odmocninami *stejného stupně.*

§ 94. O početních výkonech odmocninami.

1) Součet nebo rozdíl odmocnin, které se liší svými odmocněnci nebo odmocniteli neb oběma zároveň, může býti pouze vyznačen, jako na př.

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b}, \quad \sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b} \text{ atd.}$$

Naproti tomu lze sloučiti odmocniny *stejné* neb odmocniny lišící se jen svými součiniteli, jako na př.

$$\sqrt{a}+\sqrt{a}=2\sqrt{a},\quad \sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt{a}=3\sqrt{a},\quad \sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{a}=-\sqrt[3]{a},$$

$$2\sqrt[4]{x}+3\sqrt[4]{x}-4\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{x},\quad 2\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}\ \text{atd.}$$

Poznámka. Nesprávno by bylo klásti $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ za rovno $\sqrt{a+b}$,

neboť by potom musilo býti $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a+b})^2$

čili $a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b} = a+b$,

což není možno, pokud obě čísla a a b jsou od nully různa.

Podobně by bylo nesprávno položiti $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ rovno $\sqrt{a-b}$.

2) *Součin odmocnin stejného stupně roven jest odmocnině téhož stupně ze součinu daných odmocněnců.*

Tvrzení. $\sqrt[r]{a}\,.\,\sqrt[r]{b}=\sqrt[r]{ab}$.

Důkaz. Budiž $\sqrt[r]{a}=x\ldots$, t. j. $a=x^r$

a $\sqrt[r]{b}=y\ldots$, „ $b=y^r$.

Potom jest $\sqrt[r]{a}\,.\,\sqrt[r]{b}=xy$ a $ab=x^r\,.\,y^r$ čili $ab=(xy)^r$,

z čehož jde, že $\sqrt[r]{ab}=xy$.

Srovnajíce oba výrazy pro xy nabyté obdržíme $\sqrt[r]{a}\,.\,\sqrt[r]{b}=\sqrt[r]{ab}$, jak bylo tvrzeno.

Podobně jest $\sqrt[r]{a}\,.\,\sqrt[r]{b}\,.\,\sqrt[r]{c}=\sqrt[r]{abc}$ atd.

3) Píšeme-li vzorec $\sqrt[r]{a}\sqrt[r]{b}=\sqrt[r]{ab}$ ve tvaru $\sqrt[r]{ab}=\sqrt[r]{a}\,.\,\sqrt[r]{b}$, jest v něm obsažena věta:

Součin odmocníme libovolným číslem, odmocníme-li jím každého jeho činitele.

Na př. $\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{a^2}\,.\,\sqrt{b^2}=ab,\quad \sqrt{x^2y}=\sqrt{x^2}\,.\,\sqrt{y}=x\sqrt{y},$

$$\sqrt[n]{a^n.b}=\sqrt[n]{a^n}\,.\,\sqrt[n]{b}=a\sqrt[n]{b},$$

$$\sqrt{8}=\sqrt{4}\,.\,\sqrt{2}=2\sqrt{2},$$

$$\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{27.3}=\sqrt[3]{27}\,.\,\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}.$$

Z rovnice $\sqrt[n]{a^nb}=a\sqrt[n]{b}$ čili $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$ vyplývá:

Chceme-li činitele, který jest před n^{tou} odmocninou, uvésti pod znamení odmocniny, jest nám jej povýšiti na n^{tou} mocnost.

Na př. $x\sqrt[3]{\frac{1}{abx}}=\sqrt[3]{x^3\frac{1}{abx}}=\sqrt[3]{\frac{x^2}{ab}},\quad \frac{1}{b}\sqrt{a}=\sqrt{\frac{1}{b^2}\,.\,a}=\sqrt{\frac{a}{b^2}}.$

4) *Podíl odmocnin stejného stupně roven jest odmocnině téhož stupně z podílu obou odmocněnců.*

Tvrzení. $\sqrt[r]{a} : \sqrt[r]{b} = \sqrt[r]{a:b}$ čili $\dfrac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}} = \sqrt[r]{\dfrac{a}{b}}$.

Důkaz. Budiž $\sqrt[r]{a} = x$, t. j. $a = x^r$,

$\sqrt[r]{b} = y$, „ $b = y^r$.

Potom jest $\dfrac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}} = \dfrac{x}{y}$ a $\dfrac{a}{b} = \dfrac{x^r}{y^r}$ čili $\dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^r$,

z čehož jde, že $\sqrt[r]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{x}{y}$.

Srovnáním obou výrazů pro $\dfrac{x}{y}$ nabytých obdržíme $\dfrac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}} = \sqrt[r]{\dfrac{a}{b}}$.

Na př. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

5) Z rovnice $\dfrac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}} = \sqrt[r]{\dfrac{a}{b}}$, čtené od pravé strany k levé, vychází na jevo:

Podíl (zlomek) *odmocníme libovolným číslem, odmocníme-li jím dělence* (čítatele) *i dělitele* (jmenovatele).

Na př. $\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}} = \dfrac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \dfrac{a}{b}$, $\sqrt{\dfrac{a^2}{b}} = \dfrac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b}} = \dfrac{a}{\sqrt{b}}$, $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{y^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{y^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{y}$,

$\sqrt[3]{\dfrac{ax^3}{by^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{ax^3}}{\sqrt[3]{by^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{y^3}} = \dfrac{x\sqrt[3]{a}}{y\sqrt[3]{b}} = \dfrac{x}{y}\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$.

Jak lze kratšeji k poslednímu výsledku dospěti?

6) *Odmocninu umocníme libovolným číslem, umocníme-li jím jejího odmocněnce.*

Tvrzení. $\left(\sqrt[r]{a}\right)^s = \sqrt[r]{a^s}$.

Důkaz. Budiž a) číslo *s kladné.*

Potom jest $\left(\sqrt[r]{a}\right)^s = \underbrace{\sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[r]{a} \ldots \sqrt[r]{a}}_{\text{skráte}}$, čili dle věty 2.

$\left(\sqrt[r]{a}\right)^s = \sqrt[r]{\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots}_{\text{skráte}}}$, t. j. $\left(\sqrt[r]{a}\right)^s = \sqrt[r]{a^s}$,

čímž jest tvrzení naše dokázáno pro mocnitele kladné.

Budiž b) číslo *s záporné* rovnajíc se na př. $-\alpha$.

Potom jest nám dokázati, že

$$\left(\sqrt[r]{a}\right)^{-\alpha} = \sqrt[r]{a^{-\alpha}}.$$

Dle § 86. jest $$\left(\sqrt[r]{a}\right)^{-\alpha} = \frac{1}{\left(\sqrt[r]{a}\right)^{\alpha}},$$

dle případu *a*) tohoto odst. $$\frac{1}{\left(\sqrt[r]{a}\right)^{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt[r]{a^{\alpha}}},$$

dle věty 4. tohoto § jest $$\frac{1}{\sqrt[r]{a^{\alpha}}} = \sqrt[r]{\frac{1}{a^{\alpha}}}$$

a konečně dle § 86. jest $$\sqrt[r]{\frac{1}{a^{\alpha}}} = \sqrt[r]{a^{-\alpha}},$$

tudíž jest i $$\left(\sqrt[r]{a}\right)^{-\alpha} = \sqrt[r]{a^{-\alpha}},$$ jak bylo tvrzeno.

Ze vzorce $\sqrt[r]{a^s} = (\sqrt[r]{a})^s$ plyne, že mocnitele odmocněnce lze pokládati i za mocnitele odmocniny.

Zároveň jest z tohoto vzorce patrno:

Je-li nějaké číslo umocniti libovolným číslem **s** *a výsledek odmocniti libovolným číslem* **r**, *lze ono číslo napřed odmocniti číslem* **r** *a výsledek umocniti číslem* **s**.

7) *Odmocninu odmocníme libovolným číslem* (celým), *násobíme-li jím jejího odmocnitele.*

Tvrzení. $$\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[rs]{a}.$$

Důkaz. Budiž $$\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = x.$$

Potom jest $\sqrt[s]{a} = x^r$ a tudíž $a = (x^r)^s$ čili $a = x^{rs}$.

Z této rovnice jde, že $\sqrt[rs]{a} = x$.

Srovnáním obou výrazů pro x nabýváme rovnice $$\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[rs]{a}.$$

Všeobecněji jest $$\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{a}}} = \sqrt[pqr]{a}.$$

Dokažte větu: Máme-li nějaké číslo postupně několikráte odmocniti různými čísly, jest lhostejno, v jakém pořádku tyto výkony provedeme.

Na př. $\sqrt[r]{\sqrt[n]{a^r}} = \sqrt[n]{\sqrt[r]{a^r}} = \sqrt[n]{a}$,

$\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$.

8) *Hodnota odmocniny se nezmění, násobíme-li mocnitele i odmocnitele týmž číslem.*

Tvrzení. $(\sqrt[r]{a})^s = (\sqrt[rn]{a})^{sn}$ čili $\sqrt[r]{a^s} = \sqrt[rn]{a^{sn}}$.

Důkaz. Budiž $\sqrt[r]{a^s} = x$, tedy $a^s = x^r$

a $(a^s)^n = (x^r)^n$ čili $a^{sn} = x^{rn}$.

Z poslední rovnice jde, že $\sqrt[rn]{a^{sn}} = x$.

Srovnajíce oba výrazy pro x, nabýváme rovnice, již bylo dokázati.

Dlužno jest poznamenati, že tento důkaz a tudíž i věta 8. platí, buďtež r a s čísla kladná nebo záporná. Podle tohoto jest

$$\sqrt[-r]{a^{-s}} = \sqrt[r]{a^s}, \quad \sqrt[-r]{a^s} = \sqrt[r]{a^{-s}}.$$

Na př. $\sqrt[-3]{8} = \sqrt[3]{8^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$, $\sqrt[-2]{\frac{1}{16}} = \sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^{-1}} = \sqrt{16} = 4$.

Na základě věty 8. lze odmocninu uvésti na jinou, jejíž odmocnitel jest *násobkem* odmocnitele původního. K tomu cíli dělíme nového odmocnitele původním a obdrženým číslem umocníme mocněnce.

Na př. $\sqrt[r]{a^s} = \sqrt[2r]{a^{2s}} = \sqrt[3r]{a^{3s}}$ atd.

Odmocniny různých odmocnitelů lze dle téže věty uvésti na odmocniny odmocnitelů stejných. Z předešlého jest patrno, že společný odmocnitel, na nějž dané odmocniny převádíme, musí býti společným násobkem odmocnitelů daných. Nejmenší jich společný násobek bude tudíž *nejmenším společným odmocnitelem*, na nějž dané odmocniny uvésti lze.

Na př. nejmenším společným odmocnitelem pro $\sqrt{a}$ a $\sqrt[3]{a^2}$ jest číslo 6 a to tak, že

$$\sqrt{a} = \sqrt[6]{a^3} \text{ a } \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4}.$$

Užívajíce věty 8. můžeme vykonati i násobení a dělení odmocnin *různých stupňů*. K tomu cíli převedeme je nejprve na společného odmocnitele a potom je násobíme nebo dělíme dle vět 2. a 4. tohoto §.

Na př.

$$\sqrt[r]{a^s} \cdot \sqrt[p]{b^n} = \sqrt[rp]{a^{sp}} \cdot \sqrt[rp]{b^{nr}} = \sqrt[rp]{a^{sp} \cdot b^{nr}}$$

$$\sqrt[r]{x^s} : \sqrt[n]{x^p} = \sqrt[rn]{x^{sn}} : \sqrt[rn]{x^{pr}} = \sqrt[rn]{x^{sn} : x^{pr}} = \sqrt[rn]{x^{sn-pr}}$$

$$\sqrt[3]{4} : \sqrt{2} = \sqrt[6]{4^2} : \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{16 : 8} = \sqrt[6]{2}.$$

9) Čteme-li rovnici $\sqrt[r]{a^s} = \sqrt[rn]{a^{sn}}$ od pravé strany k levé, nabýváme věty:

Hodnota odmocniny se nemění, dělíme-li jejího mocnitele i odmocnitele týmž číslem (kterým jsou obě ta čísla dělitelna).

Provádějíce výkon touto větou vyznačený pravíme, že krátíme mocnitele a odmocnitele.

Na př.

$\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{a}$, $\sqrt[8]{a^4} = \sqrt{a}$, $\sqrt[6]{x^4} = \sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt{x^4} = x^2$ a všeobecně $\sqrt[r]{a^{nr}} = \sqrt[1]{a^{nr:r}} = a^{\frac{nr}{r}} = a^n$.

Z posledního vzorce jest patrno, že, je-li číslo s dělitelno číslem r, lze položiti za odmocninu $\sqrt[r]{a^s}$ mocninu $a^{\frac{s}{r}}$.

§ 95. Rozšíření pojmu mocniny na mocniny s lomenými mocniteli.

1) Pojem mocniny omezen byl dosud na mocniny s mocniteli celými (§ 84. a § 86).

V předcházejícím § jsme poznali, že lze za $\sqrt[r]{a^s}$ klásti $a^{\frac{s}{r}}$, je-li číslo s dělitelno číslem r. Význam, který má výraz $a^{\frac{s}{r}}$ v tomto zvláštním případě, přikládáme mu vždy, budiž číslo s dělitelno číslem r anebo ne, t. j. klademe

$$a^{\frac{s}{r}} = \sqrt[r]{a^s}, \text{ čili, poněvadž } \sqrt[r]{a^s} = (\sqrt[r]{a})^s, \text{ jest } a^{\frac{s}{r}} = (\sqrt[r]{a})^s.$$

Z toho jde:

Mocnina $a^{\frac{s}{r}}$ značí, že r^{tou} odmocninu čísla a povýšiti jest na mocnost s^{tou}.

2) *Všecka pravidla, která jsme poznali pro počítání mocninami, jichž mocniteli byla čísla celá, platí i pro mocniny s mocniteli lomenými.*

Tvrzení. a) $a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}$, b) $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{r}{s}}$,

c) $(a.b)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{r}{s}} . b^{\frac{r}{s}}$, d) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{r}{s}} = \frac{a^{\frac{r}{s}}}{b^{\frac{r}{s}}}$, e) $\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{r}{s}\cdot\frac{m}{n}}$.

Důkaz. a) Poněvadž $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$,

$$a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r},$$

jest $a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[n]{a^m} . \sqrt[s]{a^r}$.

Ale $\sqrt[n]{a^m} . \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[ns]{a^{ms+nr}}$ (§ 94., 8.)

čili $\sqrt[n]{a^m} . \sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{ms+nr}{ns}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}$,

tudíž jest $a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}$, jak bylo tvrzeno ve případě a).

Podobně dokážeme správnost rovnice b).

Ve případě c) jest nejprve

$$(ab)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{(ab)^r} = \sqrt[s]{a^r . b^r}.$$

Ale $\sqrt[s]{a^r . b^r} = \sqrt[s]{a^r} . \sqrt[s]{b^r} = a^{\frac{r}{s}} . b^{\frac{r}{s}}$,

tudíž jest $(ab)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{r}{s}} . b^{\frac{r}{s}}$, jak bylo tvrzeno.

Podobně jako c) dokážeme i rovnici d).

Ve případě e) jest

$$\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[s]{a^r}\right)^m},$$

ale $\sqrt[n]{\left(\sqrt[s]{a^r}\right)^m} = \sqrt[n]{\sqrt[s]{a^{mr}}} = \sqrt[ns]{a^{mr}} = a^{\frac{mr}{ns}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s}}$,

tudíž jest $\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{r}{s} \cdot \frac{m}{n}}$, jak bylo tvrzeno.

3) Zavedše mocniny s mocniteli lomenými, snadno poznáme význam odmocniny, jejímž odmocnitelem jest číslo lomené, jako ve případě $\sqrt[\frac{r}{s}]{a^{\frac{n}{p}}}$.

Položme $\sqrt[\frac{r}{s}]{a^{\frac{n}{p}}} = x$.

Podle definice odmocniny číslo x musí míti vlastnost, že umocněno jsouc číslem $\frac{r}{s}$ dá odmocněnce $a^{\frac{n}{p}}$, t. j. $a^{\frac{n}{p}} = x^{\frac{r}{s}}$.

Umocníce obě strany této rovnice číslem ps, nabudeme $a^{ns} = x^{rp}$, z čehož následuje, že $\sqrt[rp]{a^{ns}} = x$. Srovnáním obou výrazů pro x vznikne rovnice

$$\sqrt[\frac{r}{s}]{a^{\frac{n}{p}}} = \sqrt[pr]{a^{ns}},$$ z níž jest patrno, jak odmocninu s lomeným odmocnitelem uvésti lze na odmocninu s odmocnitelem celým. Dostačí tu násobiti mocnitele i odmocnitele společným násobkem jich jmenovatelů.

Na př. $\sqrt[\frac{2}{3}]{a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[\frac{r}{n}]{a^{\frac{s}{n}}} = \sqrt[r]{a^s}$.

Z posledního příkladu vychází na jevo, že

$$\sqrt[r]{a^s} = \sqrt[\frac{r}{n}]{a^{\frac{s}{n}}},$$

t. j. *odmocnitele i mocnitele odmocniny dovoleno jest děliti libovolným číslem aniž se tím hodnota odmocniny změní.* Tím rozšířena jest platnost věty 9. v § 94.

§ 96. O odmocňování rovnic a nerovností. Závislosť hodnoty odmocniny na jejím odmocněnci a odmocniteli.

V následujících větách předpokládáme, že čísla v nich se vyskytující jsou *absolutní.*

1) *Je-li odmocněncem číslo* $\begin{matrix}\text{větší}\\ \text{menší}\end{matrix}$ *jedné, jest i hodnota odmocniny* (s abs. odmocnitelem) $\begin{matrix}\text{větší}\\ \text{menší}\end{matrix}$ *jedné.*

Podmínka. $a \gtrless 1$. *Tvrzení.* $\sqrt[n]{a} \gtrless 1$.

Důkaz. Srovnáme-li hodnoty dvou čísel, na př. $\sqrt[n]{a}$ a 1, jest buď

$$\sqrt[n]{a} > 1 \text{ nebo } \sqrt[n]{a} = 1 \text{ nebo konečně } \sqrt[n]{a} < 1.$$

Je-li $a > 1$, nemůže býti $\sqrt[n]{a} \leqq 1$,

neboť by potom byla $(\sqrt[n]{a})^n \leqq 1^n$ (§ 86., 3. a 4.)

čili $a \leqq 1$, což se protiví podmínce. Tudíž musí býti $\sqrt[n]{a} > 1$.

Je-li $a < 1$, nemůže býti $\sqrt[n]{a} \geqq 1$,

neboť by potom byla $(\sqrt[n]{a})^n \geqq 1^n$ (§ 86., 3. a 4.)

čili $a \geqq 1$, což se protiví podmínce. Tudíž musí býti $\sqrt[n]{a} < 1$.

2) *Odmocníme-li obě strany rovnice týmž číslem, povstane opět rovnice.*

Podmínka. $a = b$. *Tvrzení.* $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$.

Důkaz. Pravdivosť tvrzení patrna jest z toho, že za b lze položiti a a tudíž $\sqrt[n]{a}$ za $\sqrt[n]{b}$.

3) *Odmocníme-li obě strany nerovnosti týmž číslem, povstane nerovnost téhož směru s nerovností danou.*

Podmínka. $a > b$. *Tvrzení.* $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

Důkaz. Poněvadž jest $a > b$, lze položiti $a = b + x$, kdež jest $x > 0$.

Potom jest $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b+x} = \sqrt[n]{b\left(1+\frac{x}{b}\right)} = \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{1+\frac{x}{b}}$.

Poněvadž jest $1 + \frac{x}{b} > 1$, jest dle 1. věty $\sqrt[n]{1+\frac{x}{b}} > 1$

a tudíž $\sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{1+\frac{x}{b}} > \sqrt[n]{b}$. Dosadíme-li za levou stranu této nerovnosti $\sqrt[n]{a}$,

obdržíme $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, jak bylo tvrzeno.

Z této věty vychází na jevo: *Roste-li odmocněnec odmocniny při témž odmocniteli, roste i abs. hodnota odmocniny.*

4) *Absolutní hodnota odmocniny, jejímž odmocněncem jest číslo větší jedné, klesá s rostoucím odmocnitelem, ale jest stále jedné větší.*

Podmínka: $a > 1$.

Tvrzení. $a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} \ldots > 1$.

Důkaz. Je-li $a > 1$, jest $a^{n+1} > a^n$. (§ 89.)

a tudíž dle 3. věty $\sqrt[n(n+1)]{a^{n+1}} > \sqrt[n(n+1)]{a^n}$. Zkrátíme-li na obou stranách této nerovnosti mocnitele a odmocnitele, nabudeme $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n+1]{a}$.

Kladouce v této nerovnosti za n postupně 1, 2, 3 ... obdržíme

$a > \sqrt{a}$, $\sqrt{a} > \sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a}$, ... čili $a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} \ldots$

Že každé z těchto čísel jest větší jedné, vysvítá z věty 1.

5) *Absolutní hodnota odmocniny, jejímž odmocněncem jest číslo menší jedné, roste s rostoucím mocnitelem, ale stále jest menší jedné.*

Podmínka. $a < 1$.

Tvrzení. $a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} \ldots < 1$.

Důkaz. Je-li $a < 1$, jest $a^{n+1} < a^n$ (§ 89.)

a tudíž dle 3. věty $\sqrt[n(n+1)]{a^{n+1}} < \sqrt[n(n+1)]{a^n}$. Zkrátíme-li na obou stranách této nerovnosti mocnitele a odmocnitele, nabudeme

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n+1]{a}.$$

Kladouce v této nerovnosti za n postupně 1, 2, 3 ... obdržíme

$$a < \sqrt{a},\ \sqrt{a} < \sqrt[3]{a},\ \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} \ldots \text{ čili } a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} \ldots$$

Že každé z těchto čísel jest menší jedné, vysvítá z věty 1.

§ 97. O číselných hodnotách odmocnin.

1) *Není-li $n^{tá}$ odmocnina libovolného celého čísla* **a** *číslem celým, nelze ji vyjádřiti ani zlomkem.*

Důkaz. Kdyby $\sqrt[n]{a}$ byla rovna zlomku $\frac{c}{d}$, o němž můžeme vždy předpokládati, že c a d jsou čísla nesoudělná,

$$\text{bylo by } a \text{ rovno } \left(\frac{c}{d}\right)^n \quad \text{čili } a \text{ „ } \frac{c^n}{d^n}.$$

Poněvadž c a d jsou čísla nesoudělná, jsou i c^n a d^n čísla nesoudělná a zlomek $\frac{c^n}{d^n}$ jest tudíž zlomek nezkratitelný. Výsledek naposled obdržený žádá tudíž, aby celé číslo bylo rovno zlomku (vlastnímu), což jest nemožné. Z toho jde, že $n^{tá}$ odmocnina čísla a, není-li rovna číslu celému, nemůže býti rovna ani žádnému zlomku. Tím jest pravdivosť našeho tvrzení dokázána.

Přirozenými jeví se býti nyní otázky: a) *Kdy jest odmocnina nějakého čísla celého rovna číslu celému* a b) *jakým číslem ji lze vyjádřiti, není-li rovna číslu celému?*

a) Má-li býti $\sqrt[n]{a} = b$, kdež a a b jsou čísla celá,
musí býti $a = b^n$, ze kteréž rovnice vychází na jevo:

Aby bylo lze n^{tou} odmocninu libovolného čísla vyjádřiti číslem celým, musí býti ono číslo n^{tou} mocninou nějakého čísla celého.

Odpověď ke druhé otázce vyjde na jevo z věty:

b) *Není-li $\sqrt[n]{a}$, v níž* **a** *jest číslo celé, číslem celým, lze vždy hodnotu této odmocniny sevříti ve dvě meze, které libovolně zúžiti lze.*

Důkaz. Poněvadž $\sqrt[n]{a}$ není číslem celým, není dle výsledku v a) nabytého číslo a rovno žádnému z čísel

$$1^n,\ 2^n,\ 3^n,\ 4^n,\ 5^n,\ \ldots\ c^n,\ (c+1)^n,\ \ldots \qquad (1.)$$

Z toho jde, že lze vždy najíti dvě taková čísla v této řadě, mezi nimiž číslo a jest. Buďtež to na př. čísla c^n a $(c+1)^n$, tak že platí nerovnosť

$$c^n < a < (c+1)^n.$$

Dobudeme-li ze všech členů této nerovnosti kořen n^{ho} stupně, vznikne nerovnosť

$$c < \sqrt[n]{a} < c+1,$$

z níž vysvítá, že hodnota $\sqrt[n]{a}$ sevřena jest v mezích c a $c+1$.

Mezi čísla c a $c+1$ lze vložiti libovolný počet čísel jiných na př.

$$c,\ c+\frac{1}{p},\ c+\frac{2}{p},\ c+\frac{3}{p},\ \ldots\ c+\frac{k}{p},\ c+\frac{k+1}{p},\ \ldots\ c+\frac{p-1}{p},\ c+1, \qquad (2)$$

jichž umocněním vzniknou čísla

$$c^n,\ \left(c+\frac{1}{p}\right)^n,\ \left(c+\frac{2}{p}\right)^n,\ \left(c+\frac{3}{p}\right)^n,\ \ldots\ \left(c+\frac{k}{p}\right)^n,\ \left(c+\frac{k+1}{p}\right)^n\ \ldots.$$

$$\ldots\ \left(c+\frac{p-1}{p}\right)^n,\ (c+1)^n. \qquad (3)$$

Poněvadž odmocninu $\sqrt[n]{a}$ nelze vyjádřiti zlomkem (1. tohoto §), není rovna žádnému číslu z řady 2. a tudíž a není rovno žádnému číslu z řady 3., ale, že jest a mezi c^n a $(c+1)^n$, lze v řadě 3. najíti vždy taková dvě čísla, mezi nimiž a^n jest. Buďtež to čísla

$$\left(c+\frac{k}{p}\right)^n \text{ a } \left(c+\frac{k+1}{p}\right)^n, \text{ tak že platí nerovnost}$$

$$\left(c+\frac{k}{p}\right)^n < a < \left(c+\frac{k+1}{p}\right)^n.$$

Dobudeme-li ze všech členů této nerovnosti kořen n^{ho} stupně, vznikne nerovnost

$$c+\frac{k}{p} < \sqrt[n]{a} < c+\frac{k+1}{p},$$

z níž jde, že hodnota $\sqrt[n]{a}$ obsažena jest v mezích $c+\frac{k}{p}$ a $c+\frac{k+1}{p}$.

Poněvadž rozdíl mezi těmito dvěma mezemi jest

$$c+\frac{k+1}{p}-\left(c+\frac{k}{p}\right)=\frac{1}{p}$$

a číslo p lze zvoliti libovolně veliké, lze ony meze libovolně zúžiti.

Tím jest pravdivosť našeho tvrzení dokázána.

Z toho jde dále, že chyba, kterou učiníme kladouce za $\sqrt[n]{a}$ číslo $c+\frac{k}{p}$ anebo $c+\frac{k+1}{p}$, jest menší než $\frac{1}{p}$. Že však jmenovatele p lze zvoliti libovolně velkého, lze chybu $\frac{1}{p}$ učiniti libovolně malou.

Z vyšetřování v tomto § vykonaných jest patrno, že n^{tou} odmocninu z nějakého čísla, není-li rovna číslu celému, nelze sice vyjádřiti žádným zlomkem, ale že hodnotu její lze určiti s libovolnou přesností.

Čísla, jichž hodnoty nelze vyjádřiti úplně žádným zlomkem, ale která nicméně jsou čísly zcela určitými, poněvadž jich hodnotu s libovolnou přesností udati lze, nazýváme čísly *irracionálnými* (nesměrnými). Na rozdíl od nich jmenujeme čísla *celá* a *zlomky* čísly *racionálnými* (směrnými). Můžeme tudíž vysloviti větu:

Není-li odmocnina nějakého čísla celého číslem celým, jest číslem iracionálným, která jest určitější věty v čelo tohoto § postavené.

2) Kdybychom volili za číslo p mocninu čísla 10, na př. 10^r, byla by $\sqrt[n]{a}$ obsažena mezi dvěma zlomky desetinnými a to

$$c + \frac{k}{10^r} \text{ a } c + \frac{k+1}{10^r}$$

a chyba tím učiněná, že místo $\sqrt[n]{a}$ položíme některý z těchto zlomků, byla by menší než $\frac{1}{10^r}$.

Chyba zmizela by úplně teprve pro $\frac{1}{10^r} = 0$, t. j. pro $r = \infty$, z čehož jest patrno, že k úplnému vyjádření $\sqrt[n]{a}$ bylo by potřebí zlomku desetinného o nekonečném počtu míst desetinných, čili jinými slovy, že úplné vyjádření $\sqrt[n]{a}$ jest *nemožné.*

Může-li býti $n^{tá}$ odmocnina čísla celého rovna periodickému zlomku desetinnému?

3) *Má-li býti $n^{tá}$ odmocnina zlomku číslem racionálným, musí býti jeho čítatel i jmenovatel $n^{tými}$ mocninami čísel celých.*

V této větě předpokládáme, že čítatel a jmenovatel daného zlomku jsou nesoudělná čísla celá, kteréž podmínce vždy vyhověti lze.

Důkaz. Aby byla $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ rovna zlomku $\frac{c}{d}$, o němž vždy předpokládati lze, že jeho čítatel a jmenovatel jsou čísla nesoudělná,

$$\text{musí býti } \frac{a}{b} = \frac{c^n}{d^n}.$$

Poněvadž c a d jsou čísla nesoudělná, platí to i o číslech c^n a d^n. Rovnice poslední žádá, aby se sobě rovnaly dva zlomky nezkratitelné, což může nastati jen, když jich čítatelé, jakož i jich jmenovatelé se sobě rovnají (§ 41., b),

t. j. $a = c^n$, $b = d^n$, jak bylo tvrzeno.

4) *Nejsou-li čítatel a jmenovatel zlomku $n^{tými}$ mocninami čísel celých, jest $n^{tá}$ odmocnina tohoto zlomku číslem irracionálným.*

Důkaz. Z důkazu věty 3. jest patrno, že v tomto případě hodnota

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

nemůže býti racionálnou. Abychom mohli tvrditi, že jest číslem irracionálným, jest nám ještě dokázati, že ji přibližně s libovolnou přesností určiti lze (1).

K tomu cíli dejme nejprve výrazu $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ jiný tvar. Jest totiž

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{a \,.\, b^{n-1}}{b \,.\, b^{n-1}}} = \sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}} = \frac{1}{b}\sqrt[n]{ab^{n-1}}.$$

Nazveme-li číslo ab^{n-1} kratšeji A, jest $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{1}{b}\sqrt[n]{A}$.

Poněvadž $\sqrt[n]{A}$ lze určiti s libovolnou přesností, platí to i o $\frac{1}{b}\sqrt[n]{A}$, t. j. o $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Z toho jde, že tato odmocnina jest číslem irracionálným.

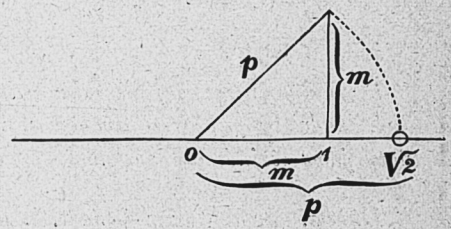
1) Dokažte, že $n^{tá}$ odmocnina zlomku desetinného, v němž počet míst desetinných není násobkem čísla n, jest vždy číslem irracionálným. Na př. $\sqrt{2{\cdot}5}$, $\sqrt{0{\cdot}036}$ jsou čísla irracionálná, ačkol $2{\cdot}5$ a $0{\cdot}36$ jsou dvojmoci čísel celých.

2) Ve kterých případech může býti $n^{tá}$ odmocnina periodického zlomku desetinného racionálnou? Dokažte, že v těchto případech jest tato odmocnina zase zlomkem desetinným periodickým a to $\frac{\text{ryzím,}}{\text{neryzím,}}$ je-li odmocněnec zlomkem periodickým $\frac{\text{ryzím.}}{\text{neryzím.}}$

5) Na tomto místě naskytuje se nám příležitosť ukázati, jak lze alespoň některá čísla irracionálná, a to irracionálné oddvojmoci, znázorniti na ose číselné.

Jde-li na př. o bod osy číselné, jímž znázorněna jest $\sqrt{2}$, sestrojme pravoúhlý trojúhelník z odvěsen rovných jednotce délkové m, načež dle věty Pythagorovy jest jeho přepona $p = \sqrt{m^2 + m^2}$ čili $p = \sqrt{2m^2}$, $p = m\sqrt{2}$, t. j. poměr $p : m = \sqrt{2}$. Z toho jde, že bod, který obdržíme nanesouce délku p na osu číselnou ve směru kladném znázorňuje irracionálné číslo $\sqrt{2}$.

Obr. 6.



Jinak bylo lze sestrojiti délku p, jakožto geometrický střed, mezi délkami m a $2m$, neboť $m : p = p : 2m$.

Podobně sestrojíme $\sqrt{7}$, určíce délku p, která vyhovuje podmínce

$$m : p = p : 7m \text{ atd.}$$

Jde-li o bod, který znázorňuje na př. $\sqrt{\frac{3}{5}}$, pišme tento výraz ve tvaru $\sqrt{\frac{3 \,.\, 5}{5 \,.\, 5}} = \frac{1}{5}\sqrt{15}$, potom sestrojme délku $m\sqrt{15}$ a rozdělme ji na 5 stejných dílů. Nanesouce jeden takový díl na osu číselnou od bodu nullového ve směru kladném, obdržíme bod, který znázorňuje $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Poznámka. Bylo by ukvapeno souditi z toho, že hodnoty odmocnin z čísel racionálných jsou všeobecně čísly irracionálnými, že naopak každé číslo irracionálné jest odmocninou nějakého čísla racionálného.

6) *Odmocninu, jejímž odmocnitelem jest číslo liché, lze vyjádřiti jediným číslem z řady číselné, které jest* $\begin{matrix}\text{kladné,}\\ \text{záporné,}\end{matrix}$ *je-li odmocněnec* $\begin{matrix}\text{kladný.}\\ \text{záporný.}\end{matrix}$

Důkaz. Je-li $\sqrt[2n+1]{a} = x$,

musí býti $a = x^{2n+1}$, z čehož jde, že pro $\begin{matrix}\text{kladné}\\ \text{záporné}\end{matrix}$ a musí býti x $\begin{matrix}\text{kladné,}\\ \text{záporné,}\end{matrix}$ neboť jen $\begin{matrix}\text{kladné}\\ \text{záporné}\end{matrix}$ číslo x umocněno jsouc číslem lichým dá $\begin{matrix}\text{kladný}\\ \text{záporný}\end{matrix}$ výsledek a (§ 84., 4).

Že žádné jiné číslo z řady číselné nemůže býti rovno $\sqrt[2n+1]{a}$, jest patrno z toho, že číslo řady číselné, jehož abs. hodnota jest $\gtrless$ abs. hodnoty čísla x, umocněno jsouc číslem $(2n+1)$, poskytne výsledek $\gtrless x^{2n+1}$, t. j. $\gtrless a$. (§ 86., 4.)

Na př. $\sqrt[3]{1} = 1$ a žádnému jinému číslu z řady číselné,

$\sqrt[3]{-1} = -1$ „ „ „ „ „ „

$\sqrt[5]{32} = 2$ „ „ „ „ „ „ atd.

7) *Odmocninu, jejímž odmocnitelem jest číslo sudé a odmocněncem číslo kladné, lze vždy vyjádřiti dvěma a ne více čísly z řady číselné, jichž absolutní hodnoty jsou stejné, ale znaménka protivná.*

Důkaz. Je-li $\sqrt[2n]{a} = +x$, t. j. $a = (+x)^{2n}$,

jest i $\sqrt[2n]{a} = -x$, neboť $(-x)^{2n} = (+x)^{2n}$ a tudíž i $(-x)^{2n} = a$.

Že žádné jiné číslo z řady číselné nemůže býti rovno $\sqrt[2n]{a}$, jest patrno z toho, že číslo řady číselné, jehož abs. hodnota $\gtrless$ abs. hodnoty čísla x, umocněno jsouc číslem $2n$, poskytne výsledek $\gtrless x^{2n}$, t. j. $\gtrless a$. (§ 86., 4.)

Na př. $\sqrt{4} = \pm 2$ a žádnému jinému číslu z řady číselné,

$\sqrt[4]{81} = \pm 3$ „ „ „ „ „

$\sqrt[6]{1} = \pm 1$ „ „ „ „ „ atd.

8) *Odmocnina, jejímž odmocnitelem jest číslo sudé a odmocněncem číslo záporné, nemůže býti vyjádřena žádným číslem z řady číselné.*

Důkaz. Je-li číslo a záporné, nemůže býti $\sqrt[2n]{a}$ rovna číslu x z řady číselné, budiž toto číslo kladné nebo záporné, neboť by muselo býti $a = x^{2n}$, což jest nemožné, poněvadž číslo a jest záporné a x^{2n} kladné (§ 84., 4).

Odmocniny sudého stupně z čísel záporných pokládáme za nová čísla a nazýváme je *čísly imaginárnými* (pomyslnými). Na rozdíl od nich nazýváme čísla, jimiž dosud jsme se zanášeli, t. j. čísla, která jsou v řadě číselné, čísly *reálnými* (skutečnými).

§ 98. O určování druhého a třetího kořene z výrazů mnohočlenných.

I) Zdvojmocněním mnohočlenu $a + b + c + \ldots$ povstane dle § 87., 2.

$$(a + b + c + \ldots)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + \ldots$$

Z toho soudíme, že

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + \ldots} = a + b + c + \ldots$$

$$\begin{array}{lll} & -a^2 & \\ N_1 & = 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + \ldots : 2a & \\ & \quad 2ab + b^2 & \\ & - \quad - & \\ N_2 & = \quad 2(a+b)c + c^2 + \ldots : 2(a+b) & \\ & \quad 2(a+b)c + c^2 & \\ & - \quad - & \\ & \quad + \ldots & \end{array}$$

Zkoumáme-li, jak výsledek $a + b + c$ povstane z

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + \ldots},$$

dospíváme k tomuto pravidlu pro oddvojmocňování mnohočlenného výrazu

$$N = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + \ldots$$

1) Oddvojmocníme první člen daného mnohočlenu, t. j. a^2, čímž obdržíme první člen kořene, t. j. a.

2) Zdvojmocnivše první člen kořene, odečteme jej od N. Tím obdržíme zbytek $N_1 = N - a^2 = 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + \ldots$, jehož první člen dělíme $2a$. Podíl tím nabytý, t. j. b, jest druhým členem kořene.

3) Členem b proveďme dva výkony: a) násobme jím $2a$ a b) zdvojmocněme jej, načež součet výsledků tím nabytých, t. j. $2ab + b^2$, odečtěme od N_1. Tím nabudeme zbytku $N_2 = N_1 - (2ab + b^2) = 2(a + b)c + c^2 + \ldots$, jehož první člen dělme $2(a + b)$. Podíl tím nabytý, t. j. c, jest třetím členem kořene.

4) Členem c proveďme dva výkony jako prve členem b, a) násobme jím $2(a + b)$ a b) zdvojmocněme jej, načež součet výsledků tím nabytých, t. j. $2(a + b)c + c^2$, odečteme od zbytku N_2.

Se zbytkem odtud povstalým a s částí $a + b + c$ kořene učiňme totéž, co prve se zbytkem N_2 a s částí $a + b$ kořene.

Tímto způsobem pokračujme, až vyčerpáme všecky členy odmocněnce.

Neobjeví-li se potom zbytek, jest oddvojmoc daná racionálná, v protivném případě irracionálná.

Aby byl výkon zjednodušen, tvoříme součty, jako jsou $2ab + b^2$, $2(a + b)c + c^2$ atd. na základě toho, že lze je psáti ve tvaru

$$(2a + b)b,\ [2(a + b) + c]c \text{ atd.}$$

Celý postup patrn jest z následujících příkladů.

Příklad 1.

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{4x^4 - 12x^3y + 9x^2y^2 + 16x^2y^3 + 24xy^4 + 16y^6} & \overset{a}{2x^2} \overset{+\ b}{-\ 3xy} \overset{+\ c}{+\ 4y^3} \\
4x^4 & \\
\hline
-12x^3y + 9x^2y^2 & \overset{2a}{(4x^2} - 3xy)\ (-3xy) \\
-12x^3y + 9x^2y^2 & \\
\hline
16x^2y^3 + 24xy^4 + 16y^6 & \overset{2(a+b)}{(4x^2 - 6xy} + 4y^3)\ 4y^3 \\
16x^2y^3 - 24xy^4 + 16y^6 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Příklad 2.

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \ldots & \\
1 & \\
\hline
x : \left(2 + \frac{x}{2}\right) \frac{x}{2} & \\
x + \frac{x^3}{4} & \\
\hline
-\frac{x^2}{4} : \left(2 + x - \frac{x^2}{8}\right)\left(-\frac{x^2}{8}\right) & \\
-\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{64} & \\
\hline
\frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{64} : \left(2 + x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16}\right)\frac{x^3}{16} & \\
\frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^5}{64} + \frac{x^6}{256} & \\
\hline
-\frac{5x^4}{46} + \frac{x^5}{64} - \frac{x^6}{256} &
\end{array}$$

Jest patrno, že výkon tento nemá konce.

Pro $\sqrt{1 - x}$ obdrželi bychom podobným způsobem

$$\sqrt{1 - x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} \ldots\ldots$$

Vypočtěte dle příkladu 2. $\sqrt{1 + \frac{1}{100}}$ a $\sqrt{1 - \frac{1}{100}}$ a na základě toho $\sqrt{101}$ a $\sqrt{99}$. Podobně vypočtěte $\sqrt{10100}$, $\sqrt{50}$ a $\sqrt{84}$.

Poznámka. Ve vytčených příkladech vypočetli jsme jen jednu hodnotu oddvojmoci. Kromě ní i hodnota protivně označená vyhovuje dle § 97., 7. dané úloze.

II) Ztrojmocněním mnohočlenu $a+b+c+\ldots$ nabýváme (§ 88., 3.)

$$(a+b+c+\ldots)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3+\ldots$$

Z toho soudíme, že

$$\sqrt{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3+\ldots} = a+b+c+\ldots$$

$$\begin{array}{l} a^3 \\ \hline N_1 = \quad 3a^2b+3ab^2+b^3 \\ \quad\; 3a^2b+3ab^2+b^3 \\ \quad - \quad - \quad - \\ \hline N_2 = \end{array} \begin{array}{l} +3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3 : 3a^2 \\ +3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3 \\ \quad - \quad - \\ \hline +\ldots \end{array} \quad : 3(a+b)^2$$

Z toho plyne následující pravidlo pro odtrojmocňování mnohočlenu

$$N = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3+\ldots$$

1) Odtrojmocníme první člen daného mnohočlenu, t. j. a^3, čímž obdržíme první člen kořene, t. j. a.

2) Ztrojmocnivše první člen kořene, odečteme jej od N. Tím nabudeme zbytku

$$N_1 = N - a^3 = 3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3+\ldots,$$

jehož první člen dělíme $3a^2$. Podíl tím nabytý, t. j. b, jest druhým členem kořene.

3) Členem b proveďme tři výkony, totiž a) násobme jím $3a^2$, b) vytvořme $3ab^2$ a konečně c) b^3, načež součet výsledků tím nabytých, t. j. $3a^2b+3ab^2+b^3$ odečtěme od N_1. Tím vznikne zbytek

$$N_2 = 3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3,$$

jehož první člen dělme $3(a+b)^2$. Podíl tím obdržený, t. j. c, jest třetím členem kořene.

4) Členem c a součtem $a+b$ vykonejme vzhledem ke zbytku N_2 totéž, co bylo dříve vykonáno členy b a a „ „ „ N_1 a tak pokračujeme stále, až vyčerpáme všecky členy odmocněnce.

Neobjeví-li se potom na konci zbytek, jest odtrojmoc racionálná, ve případě protivném irracionálná.

Příklad 1.

$$\sqrt[3]{8x^9+36x^7y+12x^6y^2+54x^5y^2+36x^4y^3+6x^3y^4+27x^3y^3+27x^2y^4+9xy^5+y^6}=$$

$$8x^9 \qquad\qquad = \overset{a}{2x^3}+\overset{b}{3xy}+\overset{c}{y^2}$$

$$36x^7y+12x^6y^2+54x^5y^2+36x^4y^3+6x^3y^4+27x^3y^3+27x^2y^4+9xy^5+y^6 : 12x^6$$

$$36x^7y+\quad +54x^5y^2\qquad\qquad +27x^3y^3$$

$$12x^6y^2+36x^4y^3+6x^3y^4+27x^2y^4+9xy^5+y^6 : 12x^6+36x^4y+27x^2y^2$$

$$3(a+b)^2c \ldots\ldots \quad .12x^6y^2+36x^4y^2\qquad\qquad +27x^2y^4$$

$$3(a+b)c^2 \ldots\ldots \quad .\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6x^3y^4\qquad\qquad +9xy^5$$

$$c^3 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad .\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +y^6$$

$$0$$

Příklad 2.

$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3-\ldots$$

$$1$$

$$+x:3$$

$$x+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{27}$$

$$-\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{27} : 3+2x+\frac{x^2}{3}$$

$$-\frac{x^2}{3}-\frac{2}{9}x^3+\frac{x^5}{81}-\frac{x^6}{729}$$

$$\frac{5}{27}x^3+\frac{x^4}{27}$$

Jest patrno, že výkon tento nemá konce.

Pro $\sqrt[3]{1-x}$ obdržíme

$$\sqrt[3]{1-x}=1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2-\frac{5}{81}x^3-\ldots$$

Vypočtěte dle příkladu 2. $\sqrt[3]{1+\frac{1}{1000}}$, $\sqrt[3]{1-\frac{1}{1000}}$ a na základě toho $\sqrt[3]{1001}$ a $\sqrt[3]{999}$. Podobně vypočtěte $\sqrt[3]{900}$, $\sqrt[3]{66}$ a $\sqrt[3]{214}$.

§ 99. Vypočítávání druhého a třetího kořene čísel soustavy desítkové.

I. *Vypočítávání kořene druhého* (oddvojmocňování).

1) Jak vypočteme druhý kořen *celého* čísla soustavy desítkové, poznáme nejsnáze zdvojmocníce nejprve určité číslo A způsobem vytčeným v § 90. a zkoumajíce potom, jak z obdržené dvojmoci odvoditi lze číslo A. Na př.

$3476^2 = 9$

2	56		
	48	09	
	4	16	76
12	08	25	76

$\sqrt{12}\,|\,08\,|\,25\,|\,76 = 3476.$

9		
3	08	: 64
2	56	
	52	25 : 687
	48	09
4	16	76 : 6946
4	16	76
	0	

Pravidlo, k němuž tim dospějeme, jest známo ze tříd nižších.

Kromě čísla 3476 i číslo — 3476 rovno jest dané oddvojmoci. (§ 97., 7.)

2) Jde-li o vypočtení druhého kořene *zlomku desetinného* Z o sudém počtu míst desetinných, suďme takto:

Poněvadž $Z = \frac{A}{10^{2n}}$, jest $\sqrt{Z} = \frac{\sqrt{A}}{10^n}$, t. j.:

Zlomek desetinný o $2n$ místech desetinných oddvojmocníme, oddvojmocníme-li jej nejprve jako číslo celé a vytvoříme-li potom ve výsledku n desetinných míst.

Má-li zlomek desetinný, o jehož druhý kořen jde, lichý počet desetinných míst, připišme k němu 0 (nebo lichý počet null) a máme případ předešlý.

3) Objeví-li se při výpočtu druhého kořene po vyčerpání všech míst odmocněnce zbytek, jest druhý kořen z daného čísla irracionálný (§ 97.).

4) Z postupu, jímž dospíváme ke druhému kořeni čísla soustavy desítkové, jest zřejmo, že první číslice kořene závisí *jen* na nejvyšší třídě odmocněnce, dále že číslo složené ze dvou, tří atd. nejvyšších číslic kořene závisí *jen* na čísle složeném ze dvou, tří atd. nejvyšších tříd odmocněnce.

Odmocníme-li tedy na př. ve případě svrchu vytčeném místo čísla 12082576 jen třídu nejvyšší, t. j. 12 millionů, nabudeme výsledku na tisíce správného, odmocníme-li číslo složené ze dvou nejvyšších tříd, nabudeme výsledku na *sta* správného atd.

5) Jestliže jsme určili druhý kořen a čísla N_1, které se skládá z r nejvyšších dvojciferných tříd daného čísla N, lze dalších $r-1$ míst kořene vypočísti, dělíme-li zbytek, k němuž jsme naposled dospěli, číslem $2a$.

Důkaz. Pro jednoduchost předpokládejme, že číslo N_1 končí se v pravo jednotkami 0^{ho} řádu.

Dle 4. jest potom $a < \sqrt{N} < a+1$,

z čehož jde, že $\sqrt{N} = a + \alpha$, kdež jest $\alpha < 1$.

Tím jest $N = a^2 + 2a\alpha + \alpha^2$,

$$N - a^2 = 2a\alpha + \alpha^2$$

a $$\frac{N - a^2}{2a} = \alpha + \frac{\alpha^2}{2a}. \qquad (1)$$

Poněvadž číslo N_1 složeno jest z r tříd, z nichž nejnižší značí jednotky, jest číslo a $r$ciferné číslo celé a tudíž $a > 10^{r-1}$

$$\text{a } 2a > 2 \,.\, 10^{r-1}. \qquad (2)$$

Dále jest $\alpha < 1$ a tudíž i $\alpha^2 < 1$. (3)

Dělíce nerovnosť 3. nerovností 2., nabýváme $\frac{\alpha^2}{2a} < \frac{1}{2 \,.\, 10^{r-1}}$, z čehož jde, že druhý člen na pravé straně rovnice 1. nemá účinku na prvních $(r-1)$ míst desetinných.

Vypočteme-li tudíž podíl $\frac{N - a^2}{2a}$ na $r-1$ míst desetinných, nabudeme $r-1$ míst desetinných čísla (irracionálného) α, t. j. dalších $r-1$ míst $\sqrt{N}$. Uvážíme-li, že $N - a^2$ jest zbytkem nabytým po vypočtení čísla a, jest věta svrchu vyrčená dokázána.

Na př. pro $\sqrt{193428 : 75}$ nabudeme vypočítajíce

5 nejvyšších míst oddvojmocňováním:

$\sqrt{193428 \cdot 75} = \pm 439 \cdot 80 \ldots$

16

334 : 83.3

249

8528 : 869.9

7821

70775 : 8788 . 8

70304

47100 : 87960

3 nejvyšší místa oddvojmocňováním a ostatní dvě dělením:

$\sqrt{193428 \cdot 75 \ldots} = \pm 439 \cdot 80 \ldots$

16

334 : 83.3

249

8528 : 869.9

7821

70775 : 978

535

Pro $\sqrt{35}$ obdržíme vypočítajíce 4 nejvyšší místa oddvojmocňováním a tři dělením:

2) $\sqrt{35 \cdot 00|00|00} = \pm 5 \cdot 916797 \ldots$

25

1000 : 109.9

981

1900 : 1181.1

1181

71900 : 11826.6

70956

94400 : 11832

115760

92720

9896

Dokažte: Je-li první číslice kořene ≥ 5, lze vypočísti dělením ještě o jedno místo více než jest ve větě 4. udáno, tedy r dalších míst.

6) Počítáme-li místa odmocněnce a oddvojmoci od jednotek řádů, jimiž se tato čísla začínají, platí věta: *Oddvojmoc jest správna na tolik míst, na kolik míst jest správný odmocněnec.*

Důkaz. Vypočteme-li místo oddvojmoci z úplného čísla $(a+\alpha)$ oddvojmoc z čísla neúplného a, učiníme chybu

$$ch = \sqrt{a+\alpha} - \sqrt{a} = \sqrt{a}\left(\sqrt{1+\frac{\alpha}{a}} - 1\right).$$

Položíme-li ve 2 příkl. k § 98 místo x výraz $\frac{\alpha}{a}$, nabudeme

$$\sqrt{1+\frac{\alpha}{a}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{a} - \frac{1}{8}\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{\alpha}{a}\right)^3 \cdots$$

Je-li α proti a malé, mají členy pravé strany od třetího počínajíc velmi malé hodnoty, tak že lze položiti přibližně

$$\sqrt{1+\frac{\alpha}{a}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{a} \text{ a tedy } ch = \sqrt{a}\cdot\frac{\alpha}{2a} \text{ čili } ch = \frac{\alpha}{2\sqrt{a}}.$$

Na př.

a) pro $\sqrt{285\cdot3\ldots}$ jest $ch < \frac{1}{2.10\sqrt{285\cdot3}}$, t. j. $ch < \frac{1}{2.10.17}$ čili

$$ch < \frac{1}{340}.$$

Z toho jde, že oddvojmoc bude na setiny správna a poněvadž se začíná desítkami, bude míti tolik míst správných jako odmocněnec.

b) Pro $\sqrt{0\cdot000341\ldots}$ obdržíme $ch < \frac{1}{2.10^6.\sqrt{0\cdot000341}}$ čili

$$ch < \frac{1}{3600},$$

t. j. kořen bude na desetiny tisíců správný a poněvadž začíná se setinami, bude míti tři místa správná, t. j. tolik jako odmocněnec.

7) Jiný způsob vypočítávání oddvojmocí záleží v tom, že danou oddvojmoc vyjádříme řetězcem, načež sblížené hodnoty tohoto řetězce jsou zároveň sbližovacími hodnotami hledaného kořene.

Příklad. Budiž na př. oddvojmoc z čísla 31 vyjádřena řetězcem.

$$x = \sqrt{31}.$$

Poněvadž jest $5 < x < 6$, jest $x = 5 + \frac{1}{x_1}$,

t. j. $\sqrt{31} = 5 + \frac{1}{x_1}$, tudíž $x_1 = \frac{1}{\sqrt{31}-5}$,

čili, násobíme-li čitatele i jmenovatele výrazem $\sqrt{31}+5$,

$$x_1 = \frac{\sqrt{31}+5}{6}.$$

Z výrazu pro x_1 jest patrna nerovnost

$$1 < x_1 < 2, \text{ tedy } x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$$

čili

$$\frac{\sqrt{31}+5}{6} = 1 + \frac{1}{x_2}, \ldots . x_2 = \frac{6}{\sqrt{31}-1} = \frac{6(\sqrt{31}+1)}{(\sqrt{31}-1)(\sqrt{31}+1)} = \frac{\sqrt{31}+1}{5}.$$

Dále jest

$$1 < x_2 < 2, \text{ tedy } x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}$$

čili

$$\frac{\sqrt{31}+1}{5} = 1 + \frac{1}{x_3}, \ldots x_3 = \frac{5}{\sqrt{31}-4} = \frac{\sqrt{31}+4}{3};$$

$$3 < x_3 < 4, \ldots x_3 = 3 + \frac{1}{x_4},$$

$$\frac{\sqrt{31}+4}{3} = 3 + \frac{1}{x_4}, \ldots x_4 = \frac{3}{\sqrt{31}-5} = \frac{\sqrt{31}+5}{2};$$

$$5 < x_4 < 6, \ldots x = 5 + \frac{1}{x_5},$$

$$\frac{\sqrt{31}+5}{2} = 5 + \frac{1}{x_5}, \ldots x_5 = \frac{2}{\sqrt{31}-5} = \frac{\sqrt{31}+5}{3};$$

$$3 < x_5 < 4, \ldots x_5 = 3 + \frac{1}{x_6},$$

$$\frac{\sqrt{31}+5}{3} = 3 + \frac{1}{x_6}, \ldots x_6 = \frac{3}{\sqrt{31}-4} = \frac{\sqrt{31}+4}{5};$$

$$1 < x_6 < 2, \ldots x_6 = 1 + \frac{1}{x_7},$$

$$\frac{\sqrt{31}+4}{5} = 1 + \frac{1}{x_7}, \ldots x_7 = \frac{5}{\sqrt{31}-1} = \frac{\sqrt{31}+1}{6};$$

$$1 < x_7 < 2, \ldots x_7 = 1 + \frac{1}{x_8}.$$

$$\frac{\sqrt{31}+1}{6} = 1 + \frac{1}{x_8}, \ldots x_8 = \frac{6}{\sqrt{31}-5} = \sqrt{31}+5$$

čili $x_8 = 5 + x$.

Z rovnic pro $x, x_1 \ldots . x_8$ jest patrno, že

$$x = 5 + 1/1 + 1/1 + 1/3 + 1/5 + 1/3 + 1/1 + 1/1 + 1/5 + x.$$

Vložíme-li za x v posledním článku se vyskytující výraz pro x právě nabytý a učiníme-li tak s každým na konci se vyskytujícím x, obdržíme pro abs. hodn. $\sqrt{31}$ periodický řetězec

$$\sqrt{31} = 5 + 1/1 + 1/1 + 1/3 + 1/5 + 1/3 + 1/1 + 1/1 + 1/10 + 1/1 + 1/1 + 1/3 + \ldots .$$

Sblížené hodnoty tohoto řetězce a tudíž i $\sqrt{31}$ jsou hodnotou nulltou počínajíc

$$5,\ 6,\ \frac{11}{2},\ \frac{39}{7},\ \frac{206}{37},\ \frac{657}{118},\ \frac{6776}{1217} \text{ a t. d.}$$

Klademe-li za $\sqrt{31}$ zlomek $\frac{6776}{1217}$, učiníme chybu $< \frac{1}{1217^2}$. (§ 79., 8.).

Jako $\sqrt{31}$, tak i každou jinou oddvojmoc z čísla celého lze vyjádřiti řetězcem periodickým. Periodičnosť jeho začíná se vždy ve článku prvním a podíl posledního článku periody jest dvakráte větší než celé číslo řetězce. Ostatní podíly (mimo poslední podíl periody) tvoří řadu souměrnou, jako v našem případě jest 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1.

II. *Vypočítávání kořene třetího.*

1) Jak vypočteme třetí kořen *celého* čísla soustavy desítkové, poznáme nejsnáze, ztrojmocníce nejprve určité číslo A způsobem vytčeným v

§ 91. zkoumajíce potom, jak z obdržené trojmoci odvoditi lze číslo A. Na příklad

$$247^3 = 8$$

	4	8	
		96	
		64	
	1	209	6
		35	28
			343
	15	069	223

$$\sqrt{15\,069\,223} = 247$$

	8		
	7	069	: 12
− +	4	8	(3.2^2)
		96	
		64	
	1	245	223 : 1728
− +	1	209	6 (3.24^2)
		35	28
			343
		0	

z daného čísla irracionálný (§ 97.)

Pravidlo, k němuž tím dospějeme, jest známo ze tříd nižších.

2) Jde-li o vypočtení třetího kořene ze *zlomku desetinného* Z, v němž počet desetinných míst jest násobkem čísla 3, suďme takto:

Poněvadž $Z = \frac{A}{10^{3n}}$, jest $\sqrt[3]{Z} = \frac{\sqrt[3]{A}}{10^n}$, t. j.:

Zlomek desetinný o 3 n místech desetinných odtrojmocníme, odtrojmocníme-li jej nejprve jako číslo celé a vytvoříme-li potom ve výsledku n míst desetinných.

Nemá-li zlomek desetinný, o jehož třetí kořen jde, $3n$ desetinných míst, připíšeme k němu dle potřeby jednu nebo dvě nully a máme případ předešlý.

3) Objeví-li se po vyčerpání všech míst odmocněnce zbytek, jest třetí kořen

4) Z postupu, jímž dospíváme k třetímu kořeni čísla soustavy desítkové, jest zřejmo, že první číslice kořene závisí *jen* na nejvyšší třídě odmocněnce a dále že číslo složené ze dvou, tří atd. nejvyšších číslic kořene závisí jen na čísle složeném ze dvou, tří atd. nejvyšších tříd odmocněnce.

5) Jestliže jsme určili třetí kořen a čísla N_1, které se skládá z r nejvyšších tříd daného čísla N, lze dalších $(r-1)$ míst kořene vypočísti, dělíme-li zbytek, k němuž jsme naposled dospěli, číslem $3a^2$.

Důkaz. Pro jednoduchost předpokládejme, že číslo N_1 končí se (v pravo) jednotkami.

Dle 4. jest potom $a < \sqrt[3]{N} < a+1$,

tudíž $\sqrt[3]{N} = a + \alpha$, kdež jest $\alpha < 1$.

Z této rovnice jde, že $N = a^3 + 3a^2\alpha + 3a\alpha^2 + \alpha^3$,

$$N - a^3 = 3a^2\alpha + 3a\alpha^2 + \alpha^3$$

a

$$\frac{N-a^3}{3a^2} = \alpha + \frac{\alpha^2}{a} + \frac{\alpha^3}{3a^2}. \qquad (1)$$

Poněvadž číslo N_1 složeno jest z r tříd, z nichž nejnižší značí jednotky, jest číslo a $r$ciferné číslo celé a tudíž

$$a > 10^{r-1}, \tag{2}$$

$$3a^2 > 3 \,.\, 10^{2r-2}. \tag{3}$$

Dále jest $\alpha < 1$ a tudíž $\alpha^2 < 1$ (4)

$$\text{i } \alpha^3 < 1. \tag{5}$$

Dělíme-li nerovnost (4) nerovností (2), nabudeme

$$\frac{\alpha^2}{a} < \frac{1}{10^{r-1}},$$

z čehož vysvítá, že druhý člen na pravé straně rovnice 1. nemá účinku na prvních $(r-1)$ desetinných míst podílu $\frac{N-a^3}{3a^2}$. Ještě menší účinek má třetí člen rovnice 1., neboť dělíme-li nerovnost 5. nerovností 3., obdržíme

$$\frac{\alpha^3}{3a^2} < \frac{1}{3 \,.\, 10^{2r-2}},$$

z čehož jde, že třetí člen na pravé straně rovnice 1. nepůsobí v prvních $(2r-2)$ místech podílu $\frac{N-a^3}{3a^2}$.

Vypočteme-li tudíž podíl $\frac{N-a^3}{3a^2}$ na $(r-1)$ míst desetinných, nabudeme $(r-1)$ míst desetinných čísla α, t. j. dalších $(r-1)$ míst $\sqrt[3]{N}$. Uvážíme-li, že $N-a^3$ jest zbytkem nabytým po vypočtení čísla a, jest věta svrchu vytčená dokázána.

Na př.: Pro $\sqrt[3]{15252991}$ nabudeme vypočítajíce

5 nejvyšších míst odtrojmocňováním:

$\sqrt[3]{15|252|991} = 247{\cdot}99$
7252 : 12
48
96
64
1428991 : 1728
12096
3528
343
183768000 : 183027
1647243
60021
729
18443761000 : 18436323
⋮

3 nejv. místa odtrojmocňováním a ostatní dvě dělením:

$\sqrt[3]{15|252|991} : 247{\cdot}$
7252 : 12 1·00
48 248·00
96
64
1428991 : 1728
12096
3528
343
183768 : 183027 = 1·00
-74100

Výsledky 247·99 a 248·00 se sice ve svých posledních místech liší, ale chyba, kterou učiníme kladouce 248·00 za $\sqrt[3]{15252991}$, jest menší než $\frac{1}{10^{r-1}}$, t. j. v tomto případě $< \frac{1}{10^2}$.

5) Jako v odstavci I., 6. odvodíme, že chyba v odtrojmoci z neúplného čísla a jest přibližně rovna $\frac{\alpha}{3\sqrt[3]{a^2}}$, kdež α značí chybu v odmocněnci.

§ 100. O výrazech surdických.

Dvojčleny, jejichž jeden člen jest číslem *racionálným* a druhý *irracionálnou* odmocninou z čísla racionálného, jmenujeme *výrazy surdickými.*

Nejjednodušší tvar výrazu surdického jest

$$a \pm \sqrt{b}.$$

Vytkneme zde některé vlastnosti výrazů surdických tohoto tvaru.

1) *Jsou-li dva výrazy surdické sobě rovny, jsou sobě rovny jich části racionálné i jich části irracionálné.*

Tvrzení. Je-li $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$, při čemž a, b, c a d jsou čísla racionálná a $\sqrt{b}$ a $\sqrt{d}$ čísla irracionálná, jest $a=c$,

$$\sqrt{b}=\sqrt{d}.$$

Důkaz. Z rovnice $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ jde rovnice

$$\sqrt{b}=c-a+\sqrt{d},$$

jejímž zdvojmocněním nabýváme $b=(c-a)^2+2(c-a)\sqrt{d}+d$.

Převedeme-li v této rovnici racionálné členy pravé strany na stranu levou, vznikne rovnice

$$b-(c-a)^2-d=2(c-a)\sqrt{d}.$$

Poněvadž na levé straně této rovnice jest číslo racionálné, kdežto na straně pravé jest číslo irracionálné, nemůže býti tato rovnice správna, leč by levá i pravá její strana rovny byly 0. Avšak to žádá, jsou-li čísla a, b, c a d od nully různa, aby $c=a$

a tudíž $b=d$, čili $\sqrt{b}=\sqrt{d}$, čímž jest naše tvrzení dokázáno.

Dva výrazy surdické, které se od sebe liší jen znaménkem před částí irracionálnou, jmenujeme *sdruženými.* Na př. $a+\sqrt{b}$, $a-\sqrt{b}$ jsou výrazy surdické sdružené.

2) *Součet a součin dvou výrazů surdických sdružených jsou racionálné, kdežto jich rozdíl a podíl jsou irracionálné.*

Důkaz. $(a+\sqrt{b})+(a-\sqrt{b})=2a,$

$$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b,$$

$$a+\sqrt{b}-(a-\sqrt{b})=2\sqrt{b},$$

$$\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}=\frac{(a+\sqrt{b})(a+\sqrt{b})}{(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})}=\frac{a^2+b+2a\sqrt{b}}{a^2-b}=\frac{a^2+b}{a^2-b}+\frac{2a}{a^2-b}\sqrt{b}.$$

3) *Oddvojmoc z výrazu surdického lze vždy vyjádřiti součtem nebo rozdílem dvou oddvojmocí z výrazů surdických spolu sdružených.*

Důkaz. Z rovnice

$$(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2,$$

která platí pro každé x a y, jde, že

$$x \pm y = \sqrt{x^2 \pm 2xy + y^2}.$$

Položíme-li v této rovnici $x = \sqrt{a + \sqrt{b}}$ a $y = \sqrt{a - \sqrt{b}}$, nabudeme

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2-b}} \text{ čili}$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2-b})}. \quad (1)$$

V této rovnici obsaženy jsou rovnice dvě, a to

a) $\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2(a+\sqrt{a^2-b})}$,

b) $\sqrt{a+\sqrt{b}} - \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2(a-\sqrt{a^2-b})}$.

Sečtouce tyto rovnice, obdržíme rovnici

$$2\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{2(a+\sqrt{a^2-b})} + \sqrt{2(a-\sqrt{a^2-b})},$$

z níž jde $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{2(a+\sqrt{a^2-b})} + \sqrt{2(a-\sqrt{a^2-b})}}{2}$

čili $$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}. \quad (2)$$

Odečtouce od sebe rovnice a) a b), nabudeme týmž postupem

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}. \quad (3)$$

Uvážíme-li, že $\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}$ a $\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$ jsou dva výrazy surdické sdružené, jest naše tvrzení rovnicemi 2. a 3. dokázáno.

Ve zvláštních případech může býti $\sqrt{a^2-b}$ racionálná. Potom užíváme vzorců 2. a 3. ke zjednodušení oddvojmoci z čísla surdického.

Na př. pro $\sqrt{4+\sqrt{12}}$ jest $a = 4$, $b = 12$ a tudíž $\sqrt{a^2-b} = \sqrt{4} = 2$ a podle vzorce 2. obdržíme

$$\sqrt{4+\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{6}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2}} = \sqrt{3} + 1.$$

Podobně jest pro $\sqrt{6-4\sqrt{2}}$ číslo $a = 6$, $\sqrt{b} = 4\sqrt{2}$, tudíž $b = 32$ a $\sqrt{a^2-b} = \sqrt{4} = 2$ a podle vzorce 3. obdržíme

$$\sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6+2}{2}} - \sqrt{\frac{6-2}{2}} = 2 - \sqrt{2}.$$

Na základě vzorce (1) tohoto odstavce lze zjednodušiti součet nebo rozdíl oddvojmocí ze dvou výrazů surdických spolu sdružených, zvláště je-li $\sqrt{a^2-b}$ racionálná.

Na př.

$$\sqrt{7+\sqrt{13}} + \sqrt{7-\sqrt{13}} = \sqrt{2(7+2\sqrt{49-13})} = \sqrt{2(7+2\sqrt{36})} = \sqrt{38}.$$

§ 101. Jak lze odstraniti odmocniny ze jmenovatele zlomku.

Je-li vypočísti co možná přesně na př. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, jest nejprve určiti $\sqrt{3}$ na mnoho míst desetinných a obdrženým číslem mnohociferným děliti číslo 2.

Avšak uvážíme-li, že

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

lze hodnotu výrazu $\frac{2}{\sqrt{3}}$ vypočísti i tím, že číselnou hodnotu $\sqrt{3}$ násobíme $\frac{2}{3}$ a tento způsob jest zajisté kratší než způsob napřed vytčený. Tak jako v tomto případě, tak i ve případech jiných odstraňujeme odmocniny ve jmenovatelích, a to buď abychom si výpočet číselné hodnoty zlomků usnadnili, nebo abychom je uvedli na tvar jednodušší.

Abychom zlomek, jehož jmenovatelem jest výraz, obsahující jednu nebo několik odmocnin, převedli na zlomek s *racionálným* jmenovatelem, násobíme čítatele i jmenovatele daného zlomku přiměřeným výrazem.

Jak tento výraz voliti jest v jednotlivých případech, jest patrno z následujících příkladů.

1) $$\frac{C}{\sqrt{b}} = \frac{C\sqrt{b}}{\sqrt{b}.\sqrt{b}} = \frac{C\sqrt{b}}{b}.$$

2) $$\frac{C}{\sqrt[n]{b^r}} = \frac{C\sqrt[n]{b^{n-r}}}{\sqrt[n]{b^r}.\sqrt[n]{b^{n-r}}} = \frac{C\sqrt[n]{b^{n-r}}}{\sqrt[n]{b^r . b^{n-r}}} = \frac{C\sqrt[n]{b^{n-r}}}{b}.$$

3) $$\frac{C}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{C(a \mp \sqrt{b})}{(a \pm \sqrt{b})(a \mp \sqrt{b})} = \frac{C(a \mp \sqrt{b})}{a^2 - b}.$$

4) $$\frac{C}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{C(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \frac{C(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}.$$

5) Je-li odstraniti irracionálnosť jmenovatele ve zlomku $\frac{C}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$, mysleme si nejprve místo $\sqrt[3]{a} \ldots x$ a místo $\sqrt[3]{b} \ldots y$ a postarejme se o to, aby ve jmenovateli nového zlomku bylo x^3 a y^3. Bude-li novým jmenovatelem součet $x^3 + y^3$ či rozdíl $x^3 - y^3$, rozhodneme uvážíce, že nový jmenovatel má býti původním jmenovatelem dělitelen. V tomto případě bude to tudíž součet $x^3 + y^3$. Uvážíme-li, že $(x^3 + y^3) : (x + y) = x^2 - xy + y^2$, obdržíme

$$\frac{C}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{C}{x + y} = \frac{C(x^2 - xy + y^2)}{(x+y)(x^2 - xy + y^2)} = \frac{C(x^2 - xy + y^2)}{x^3 + y^3} = \frac{C(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{a + b}.$$

Podobně soudíme ve případech $\frac{C}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$, $\frac{C}{\sqrt[5]{a} \pm \sqrt[5]{b}}$, $\frac{C}{\sqrt[4]{a} \pm \sqrt[4]{b}}$ a. t. d.

6) Na základě případů 1., 2., 4. a 5. lze učiniti racionálnými jmenovatele zlomků

$$\frac{C}{\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}}, \quad \frac{C}{\sqrt[r]{\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}}} \text{ a } \frac{C}{\sqrt[r]{\left(\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}\right)^s}}.$$

7) $\dfrac{C}{a \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c}} = \dfrac{C(a \pm \sqrt{b} \mp \sqrt{c})}{(a \pm \sqrt{b})^2 - c} = \dfrac{C(a \pm \sqrt{b} \mp \sqrt{c})}{a^2 + b - c \pm 2a\sqrt{b}} =$

$= \dfrac{C(a \pm \sqrt{b} \mp \sqrt{c})(a^2 + b - c \mp 2a\sqrt{b})}{(a^2 + b - c)^2 - 4a^2 b}$

Způsobem podobným odstraníme irracionálnost jmenovatele ve zlomku

$$\frac{C}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c}},$$

načež jsme s to, abychom učinili totéž u zlomků tvaru $\dfrac{C}{\sqrt[r]{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c})^s}}$.

§ 102. O číslech imaginárních.

Seznali jsme, že odmocniny sudého stupně z čísel záporných nelze vyjádřiti čísly z řady číselné (§ 97., 8.). Odmocniny takové pokládáme za čísla nová a nazýváme je čísly *imaginárnými* čili *pomyslnými*.

Výraz $\sqrt{-1}$ nazýváme imaginárnou jednotkou a označujeme ji i.

Jest tedy $i = \sqrt{-1}$, při čemž $i^2 = -1$.

Výrazy, jichž nabýváme násobíce imaginárnou jednotku čísly reálnými, slovou čísly *ryze imaginárnými*. Takovými jsou na př. $2i$, $-3i$, $\frac{1}{2}i$, $a\,i$.

Dvojčleny složené ze členu *reálného* a *ryze imaginárného* slovou výrazy *soujemné* (komplexní). Obecný tvar výrazu soujemného jest $a \pm bi$.

Dva výrazy soujemné, které se od sebe liší jen znaménkem části ryze imaginárné, jmenujeme *sdruženými* (konjugovanými).

Počítajíce čísly imaginárnými předpokládáme, že platí základní pravidla udaná pro počítání čísly reálnými.

1) *Oddvojmoc z každého čísla záporného jest číslem ryze imaginárným.*

Důkaz. Budiž číslo $a > o$, tedy $-a < o$.

Potom jest $\sqrt{-a} = \sqrt{a \,.\, (-1)} = \sqrt{a} \,.\, \sqrt{-1}$

čili $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \,.\, i$.

Poněvadž $\sqrt{a}$ jest číslem reálným (racionálným nebo irracionálným) a tudíž $\sqrt{a} \,.\, i$ číslem ryze imaginárným, jest tvrzení naše dokázáno.

2) *Mocniny imaginárné jednotky, jichž mocniteli jsou čísla celá, jsou rovny jednotce kladné nebo záporné, reálné nebo imaginárné.*

Důkaz. $i = \sqrt{-1}$,

$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$,

$i^3 = i^2 \,.\, i = -i$,

$i^4 = i^2 \,.\, i^2 = (-1) \,.\, (-1) = +1$.

Jde-li nyní všeobecně o n^{tou} mocninu čísla i, uvažme, že číslo n musí míti některý z tvarů $4k$, $4k+1$, $4k+2$ a $4k+3$.

Ve případě prvním jest $i^n = i^{4k} = (i^4)^k = (+1)^k = +1$,
„ „ druhém „ $i^n = i^{4k+1} = i^{4k} . i = i$,
„ „ třetím „ $i^n = i^{4k+2} = i^{4k} . i^2 = i^2 = -1$ a
„ „ čtvrtém „ $i^n = i^{4k+3} = i^{4k} . i^3 = i^3 = -i$.

Poněvadž úvahy poslední jsou správny i pro záporné n (a tudíž i záporné k), jest pravdivosť našeho tvrzení dokázána.

Na př. $i^{25} = i^{4 . 6 + 1} = i$, $i^{-3} = i^{4(-1)+1} = i$, $i^{-25} = i^{4(-7)+3} = i^3 = -i$.

3) *Rovnají-li se sobě dva výrazy soujemné, rovnají se sobě jich části reálné i jich části imaginárné.*

Podmínka. $a + bi = c + di$, kdež a, b, c a d jsou čísla reálná.

Tvrzení. $a = c$, $bi = di$.

Důkaz. Z rovnice $a + bi = c + di$
jde, že $a - c = (d - b) i$.
Zdvojmocněním této rovnice nabudeme rovnice

$$(a - c)^2 = -(d - b)^2,$$

která žádá, aby číslo kladné $(a - c)^2$ rovno bylo číslu zápornému $-(d - b)^2$. To není možné, leč obě-li ta čísla rovna jsou 0, (§ 9., 3), t. j.

$(a - c)^2 = 0$ čili $a = c$
$-(d - b)^2 = 0$ „ $d = b$ tedy i $di = bi$, čímž jest naše tvrzení dokázáno.

4) *Součet, rozdíl, součin a podíl výrazů soujemných jsou všeobecně zase výrazy soujemné.*

Důkaz. Označíme-li krátce písmeny s a s' dva výrazy soujemné $a + bi$ a $a' + b'i$, jest

$$s + s' = a + a' + (b + b') i,$$
$$s - s' = a - a' + (b - b') i,$$
$$ss' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' - bb' + (ab' + a'b) i,$$
$$\frac{s}{s'} = \frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{(a + bi)(a' - b'i)}{(a' + b'i)(a' - b'i)} = \frac{aa' + bb' + (a'b - ab')i}{a'^2 + b'^2} =$$
$$= \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2} i.$$

Poněvadž výrazy, k nimž jsme pro $s + s'$, $s - s'$, ss' a $\frac{s}{s'}$ dospěli, jsou soujemné, jest tím tvrzení naše dokázáno.

Že ve zvláštních případech můžeme při početních výkonech čísly soujemnými nabyti výrazů reálných, poznali jsme již konajíce ve jmenovateli výrazu $\frac{s}{s'}$ násobení $(a' + b'i)(a' - b'i)$, které vedlo k výsledku $a'^2 + b'^2$.

Nejdůležitější dva případy tohoto druhu obsaženy jsou ve větě:

5) *Součet a součin dvou výrazů soujemných sdružených jsou reálné.*

Je-li totiž $s = a + bi$ a $s' = a - bi$,

jest $s + s' = 2a$

a $s \,.\, s' = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$.

Výsledku, že součin dvou výrazů soujemných sdružených jest reálný, užíváme, abychom zlomek, jehož jmenovatelem jest výraz soujemný, vyjádřili zlomkem o reálném jmenovateli. K tomu cíli násobíme čítatele i jmenovatele daného zlomku výrazem sdruženým s jeho jmenovatelem.

Na př. $\frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{2+3i}{13}$.

6) Z věty 4. vychází na jevo, že i *každá mocnina výrazu soujemného, jejímž mocnitelem jest číslo celé, jest zase výrazem soujemným.*

Neboť pro kladné a jest $(a + bi)^n = \underbrace{(a + bi)(a + bi)(a + bi)\ldots}_{n\text{kráte}}$.

Avšak součin prvních dvou činitelů pravé strany jest výrazem soujemným. Násobíme-li tento výraz činitelem dalším, povstane zase výraz soujemný atd., tak že celý součin čili $(a + bi)^n$ jest výrazem soujemným.

Je-li mocnitel $-n$ záporný, jest $(a + bi)^{-n} = \frac{1}{(a+bi)^n}$,

ve kterémž výraze jest dle předešlého $(a + bi)^n$ výrazem soujemným.

Označíme-li tento výraz krátce $A + Bi$, jest

$$(a+bi)^{-n} = \frac{1}{A+Bi} = \frac{A-Bi}{(A+Bi)(A-Bi)} = \frac{A-Bi}{A^2+B^2} = \frac{A}{A^2+B^2} + \frac{B}{A^2+B^2} i,$$

čímž jest naše tvrzení dokázáno.

7) *Oddvojmoc z výrazu soujemného i z výrazu ryze imaginárného jest výrazem soujemným.*

Důkaz.

Položme v rovnici $x \pm y = \sqrt{x^2 + y^2 \pm 2xy}$, jíž bylo již v § 100., 3. užito,

$$x = \sqrt{a + bi} \text{ a } y = \sqrt{a - bi}.$$

Potom jest $\sqrt{a + bi} \pm \sqrt{a - bi} = \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2 + b^2}}$.

V této rovnici obsaženy jsou dvě rovnice

a) $\sqrt{a + bi} + \sqrt{a - bi} = \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 + b^2}}$

a b) $\sqrt{a + bi} - \sqrt{a - bi} = \sqrt{2a - 2\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Sečtením těchto rovnic nabudeme

$$2\sqrt{a+bi} = \sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}} + \sqrt{2a-2\sqrt{a^2+b^2}}$$

a tedy $$\sqrt{a+bi} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}}. \quad (2)$$

Odečtením rovnice b) od a) vznikne týmž postupem rovnice

$$\sqrt{a-bi} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}}. \quad (3)$$

Ježto jest $a^2+b^2 > a^2$, jest $\sqrt{a^2+b^2} > a$

a rozdíl $a - \sqrt{a^2+b^2} < 0$, tudíž i $\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2} < 0$.

Z té příčiny jest výraz $\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$ imaginárný. Abychom do tohoto výrazu zavedli imaginárnou jednotku, pišme jej nejprve ve tvaru

$$\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}} = \sqrt{(-1)\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}},$$

t. j. $$\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}} = i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Tím nabývají vzorce 2. a 3. tvaru

$$\sqrt{a+bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}, \quad (4)$$

$$\sqrt{a-bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}},$$

a poněvadž odmocniny na pravých stranách se vyskytující jsou reálné, jest první část našeho tvrzení dokázána.

Pro $a=0$ nabýváme ze vzorců 4.

$$\sqrt{bi} = \sqrt{\frac{b}{2}} + i\sqrt{\frac{b}{2}}, \quad (5)$$

$$\sqrt{-bi} = \sqrt{\frac{b}{2}} - i\sqrt{\frac{b}{2}},$$ čímž jest dokázána druhá část našeho tvrzení.

Pro $b=1$ obdržíme zvláště

$$\sqrt{i} = \sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ a } \sqrt{-i} = \sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Dle vzorců 4. jest na př.

$$\sqrt{3+4i} = \sqrt{\frac{\sqrt{25}+3}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{25}-3}{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} + i\sqrt{\frac{2}{2}} = 2+i.$$

Z rovnic a) a b) tohoto odstavce vyplývají věty:

Součet / Rozdíl dvou oddvojmocí z výrazů soujemných sdružených jest reálný. / výraz imaginárný.

Na př. $\sqrt{8+6i}+\sqrt{8-6i}=\sqrt{2\,(8+\sqrt{64+36})}=\sqrt{2\,.\,18}=6,$

$\sqrt{8+6i}-\sqrt{8-6i}=\sqrt{2\,(8-10)}=\sqrt{-4}=2i.$

Dokažte na základě věty 7.:

Každá odmocnina z výrazu soujemného, jejímž odmocnitelem jest mocnina čísla 2, jest výrazem soujemným. —

§ 103. Dodatky o poměrech a úměrách geometrických a o rovnicích.

1) V § 60., 4. jsme předpokládali, že veličiny A a B, o jichž geometrický poměr jde, mají společnou míru, čili že jsou *souměřitelny. Potom lze vyjádřiti poměr* $(A:B)$ *číslem racionálným.*

Neboť je-li M onou společnou měrou, a tudíž $A=Ma$, $B=Mb$, kdež a a b jsou čísla celá, jest poměr $(A:B)=\frac{a}{b}$, t. j. číslu racionálnému.

Naopak lze dokázati: *Je-li poměr dvou veličin roven číslu racionálnému, jsou tyto dvě veličiny souměřitelny,* neboť je-li $A:B=\frac{a}{b}$, jest $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}$, t. j $a^{tý}$ díl veličiny A čili $b^{tý}$ díl veličiny B jest společnou měrou veličin A a B.

Z obou vět vyplývá, že poměr dvou *nesouměřitelných* veličin A a B nelze vyjádřiti číslem racionálným, neboť kdyby to bylo možno, byly by dle druhé věty tyto veličiny souměřitelny.

Dokážeme, že *poměr nesouměřitelných veličin A a B lze vyjádřiti přibližně, a to s libovolnou přesností.*

Budiž M díl $b^{tý}$ veličiny B. Díl M nemůže býti v A beze zbytku obsažen, poněvadž by potom veličiny A a B byly souměřitelny. Bude tedy M obsaženo v A na př. více než $a$krát, ale méně než $(a+1)$ krát. Potom platí nerovnosť

$$\frac{a+1}{b}>(A:B)>\frac{a}{b},$$

z níž jde, že chyba, kterou učiníme kladouce za poměr $(A:B)$ přibližně číslo $\frac{a}{b}$, jest menší než $\frac{a+1}{b}-\frac{a}{b}$, t. j. menší než $\frac{1}{b}$. A poněvadž číslo b lze zvoliti libovolně velké, lze onu chybu učiniti libovolně malou.

Z tohoto výsledku a výměru čísel irracionálných vyplývá, že *poměr dvou veličin nesouměřitelných roven jest číslu irracionálnému.*

Poměr rovný číslu $\begin{matrix}\text{racionálnému}\\ \text{irracionálnému}\end{matrix}$ jmenujeme $\begin{matrix}\text{racionálným.}\\ \text{irracionálným.}\end{matrix}$

Dokažte pravdivosť těchto tvrzení:

1) Je-li jeden člen poměru číslem irracionálným, jest tento poměr irracionálný.

2) Jsou-li oba členy poměru čísla irracionálná, může býti poměr racionálný neb irracionálný.

2) Ze způsobu, kterým čísla znázorňujeme (§ 10., 2) a z výsledků tohoto § jest patrna věta:

Libovolný bod osy číselné znázorňuje jisté číslo $\begin{matrix}\text{racionálné}\\ \text{irracionálné}\end{matrix}$, *je-li jeho vzdálenost od bodu nullového s jednotkou délkovou, která byla vzata za základ znázornění čísel,* $\begin{matrix}\text{souměřitelna.}\\ \text{nesouměřitelna.}\end{matrix}$

Že naopak každému číslu irracionálnému přísluší určitý bod osy číselné, lze poznati takto: Každé číslo irracionálné x obsaženo jest mezi dvěma racionálnými mezemi $\frac{a}{b}$ a $\frac{a+1}{b}$, které libovolně zúžiti lze. Buďtež Y a Y' body osy číselné znázorňující dvě určité hodnoty oněch mezí. Zúžují-li se tyto meze, blíží se sobě body Y a Y' a splynou-li obě meze pro $b = \infty$ s číslem irracionálným x, splynou oba body Y a Y' v bod X toto číslo znázorňující. Čísla irracionálná vyplňují tu jaksi mezery obsažené mezi čísly racionálnými. Zavedením jich do řady číselné stala se řada číselná řadou *spojitou*. Její čísla jdou za sebou tak, jako na př. body přímky.

A tak jako každou částí úsečky na př. OX (O značiž bod nullový) jest zase úsečka lišící se od OX jen velikostí, tak jest i každou částí čísla x znázorněného bodem X zase číslo, lišící se od čísla x jen velikostí. Z toho vysvítá, že číslo jest *veličinou* (§ 55).

3) *Správnosť úměry geometrické se neporuší, umocníme-li všecky její členy týmž číslem.*

Tvrzení: Platí-li úměra $a : b = c : d$,

jest i úměra $a^n : b^n = c^n : d^n$ správna pro každé n.

Důkaz. Z podmínečné úměry jde,

že $bc = ad$,

tudíž jest i $(bc)^n = (ad)^n$ pro každé n (§ 86., 3; § 96., 2)

čili $b^n \,.\, c^n = a^n \,.\, d^n$,

t. j. úměra $a^n : b^n = c^n : d^n$ jest správna.

Je-li číslo $n = \frac{1}{r}$, kdež r jest číslo celé,

$$\text{jest } a^n = \sqrt[r]{a},\ b^n = \sqrt[r]{b},\ c^n = \sqrt[r]{c} \text{ a } d^n = \sqrt[r]{d}$$

a poslední úměra nabývá tvaru

$$\sqrt[r]{a} : \sqrt[r]{b} = \sqrt[r]{c} : \sqrt[r]{d}.$$

Srovnajíce tuto úměru s úměrou danou, nabýváme věty:

Správnosť úměry se neporuší, odmocníme-li všecky její členy týmž číslem.

4) *Geometrický střed dvou čísel roven jest oddvojmoci z jich součinu.*

Dle § 62., 8 vyhovuje geometrický střed x dvou čísel a a b spojité úměře

$$a : x = x : b,$$

z níž jde $x^2 = ab$ a tudíž $x = \sqrt{ab}$.

5) *Arithmetický střed dvou čísel jest vždy větší než jich střed geometrický.*

Jsou-li totiž a a b dvě libovolná reálná čísla, jest vždy

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 > 0 \text{ čili } a+b-2\sqrt{ab} > 0,$$

$$a+b > 2\sqrt{ab},$$

$$\text{tedy } \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}, \text{ jak bylo tvrzeno.}$$

V obou posledních větách přihlíženo bylo jen k číslům absolutním.

6) *Arithmetickým středem n čísel* $a, b, c, d \ldots$ *jmenujeme výraz* $\frac{1}{n}(a+b+c+\ldots)$. *Geometrickým středem týchž čísel jest* $\sqrt[n]{abc\ldots}$

7) Je-li veličina X na veličině Z tak závislá, že *zvětší-li se* jistá část veličiny Z na př. a^nkrát, $\begin{matrix}\text{zvětší}\\\text{zmenší}\end{matrix}$ se k ní příslušná část veličiny X $a$krát, pravíme, že veličina X jest $\begin{matrix}\text{přímo}\\\text{nepřímo}\end{matrix}$ úměrna $n^{té}$ *odmocnině* veličiny Z.

Každé dva páry k sobě příslušných čísel poměrných těchto veličin spojeny jsou v prvním případě rovnicí $x_1 : x_2 = \sqrt[n]{z_1} : \sqrt[n]{z_2}$

a ve druhém „ $x_1 : x_2 = \sqrt[n]{z_2} : \sqrt[n]{z_1}$.

Dokažte věty:

1) Geometrický střed dvou čísel jest zároveň geometrickým středem mezi arithmetickým a harmonickým středem týchž čísel.

2) Arithmetický střed čísel a, a, b jest větší než jich střed geometrický. Totéž dokažte pro středy čísel a, a, a, b; potom pro a, a, a, a, b atd.

Návod. Polož $b = a + r$, vyjádři potom oba středy a srovnej v prvním případě jejich třetí, ve druhém jejich čtvrté mocniny atd.

3) Pro $a \gtrless b$ jest arithmetický střed

$$\frac{a+a+a+a+b}{5} \gtrless \frac{a+a+a+b}{4} \gtrless \frac{a+a+b}{3} \gtrless \frac{a+b}{2} \gtrless b.$$

Návod. Napiš $\frac{a+a+a+a+b}{5}$ čili $\frac{4a+b}{5}$ ve tvaru $a-\frac{a-b}{5}$ a podobně učiň s ostatními arithm. středy.

4) Platí-li úměra postupná

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots b_n,$$

platí i rovnice

$$\sqrt{(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)(b_1+b_2+b_3+\ldots b_n)} = \sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\sqrt{a_3b_3}+\ldots\sqrt{a_nb_n}.$$

Návod. Násob první členy obou poměrů b_1, druhé členy b_2 a t. d. a oddvojmocni potom všecky členy a t. d.

8) Jsou-li v rovnici odmocniny, v jichž odmocněncích jest číslo neznámé, jmenujeme ji *rovnicí irracionálnou.* Užívajíce věty: *Umocníme-li obě strany*

rovnice týmž číslem, povstane opět rovnice, můžeme tyto odmocniny z rovnice odstraniti, t. j. učiniti rovnici *racionálnou*. Jak si při tom počínáme, jest patrno z následujících příkladů:

a) Je-li v rovnici *jediná odmocnina, jejíž odmocněnec neznámou v sobě chová*, upravme nejprve rovnici tak, aby ona odmocnina byla na jedné straně rovnice *samotna*. Potom *umocněme obě strany rovnice číslem rovným odmocniteli oné odmocniny*.

Příklad. Rovnici $5 - 3\sqrt{2x-1} = 2$

uveďme nejprve na tvar $3\sqrt{2x-1} = 5-2$

čili $\sqrt{2x-1} = 1$

a zdvojmocněme ji. Tím nabudeme rovnice

$$2x - 1 = 1,$$

z níž jde $x = 1$.

Rovnice umocněním rovnice dané vzniklá může míti kořeny, které nevyhovují rovnici dané, hledíme-li jen k absolutním hodnotám odmocnin v ní se vyskytujících.

Na př. z rovnice $7 - \sqrt{x+3} = 9$ obdržíme nejprve $-\sqrt{x+3} = 2$ a zdvojmocněním $x + 3 = 4$, t. j. $x = 1$. Vložíme-li tento kořen za x do rovnice dané, obdržíme $7 - \sqrt{1+3} = 9$, kteráž rovnice není správna, hledíme-li jen k absolutní hodnotě $\sqrt{1+3} = 2$. Avšak dbáme-li toho, že oddvojmoc $\sqrt{1+3}$ jest též rovna -2, obdržíme správnou rovnici $7 - (-2) = 9$.

Všeobecně můžeme tvrditi: *Rovnice vzniklá umocněním dané rovnice obsahuje kromě kořenů této rovnice i kořeny rovnice jiné (nebo rovnic jiných).*

Na př. zdvojmocněním rovnice $X = AX_1$, v níž X a X_1 značí výrazy obsahující neznámou x, obdržíme rovnici $X^2 = A^2X_1^2$. Že této rovnici kromě kořenů rovnice dané vyhovují i kořeny rovnice jiné, poznáme, píšíce ji ve tvaru $X^2 - A^2X_1^2 = 0$ čili $(X - AX_1)(X + AX_1) = 0$.

Této rovnici bude vyhověno nejen, je-li $X - AX_1 = 0$ čili $X = AX_1$,

nýbrž i je-li $X + AX_1 = 0$ čili $X = -AX_1$.

Na př. rovnici $x + 3 = 5$ vyhovuje jediný kořen a to $x = 2$. Zdvojmocnivše danou rovnici obdržíme rovnici $(x+3)^2 = 5^2$ čili $(x+3)^2 - 5^2 = 0$, již lze psáti ve tvaru $(x-2)(x+8) = 0$, z něhož jde, že kromě kořene rovnice dané $(x+3) - 5 = 0$ vyhovuje jí i kořen rovnice $(x+3) + 5 = 0$, t. j. $x = -8$.

Povýšíme-li rovnici na mocnost vyšší než druhou, obdržíme rovnici, která v sobě tají kořeny několika jiných rovnic. Tak na př. povýšíce na čtvrtou rovnici

$X = AX_1$ nabudeme rovnice $X^4 = A^4X_1^4$, jíž lze dáti tvar

$X^4 - A^4X_1^4 = 0$ čili $(X^2 - A^2X_1^2)(X^2 + A^2X_1^2) = 0$ a konečně

$(X - AX_1)(X + AX_1)(X - iAX_1)(X + iAX_1) = 0$.

Z tohoto tvaru jde, že rovnici $X^4 = A^4X_1^4$ vyhovují kromě kořenů rovnice dané $X - AX_1 = 0$ i kořeny rovnic

$$X + AX_1 = 0,\ X - iAX_1 = 0 \text{ a } X + iAX_1 = 0.$$

Na př. z rovnice $x = 1$, která má jediný kořen, a to 1, obdržíme povýšením na čtvrtou rovnici $x^4 = 1^4$, jíž vyhovují kromě kořene 1 i kořeny rovnic $x + 1 = 0$, $x + i = 0$ a $x - i = 0$, t. j. čísla -1, $-i$ a $+i$.

Z příčin tuto vyložených jest důležito zkoumati, které kořeny rovnice vzniklé umocněním dané rovnice této rovnici vyhovují.

b) Jsou-li v rovnici *dvě neznámé oddvojmoci*, upravme ji tak, aby *jedna* z nich byla na jedné straně rovnice *samotna*, potom rovnici zdvojmocněme. V rovnici tím vzniklé bude se vyskytovati jediná neznámá oddvojmoc, již odstraníme způsobem v a) vytčeným.

Na př. rovnici $\sqrt{3x-5} + \sqrt{3x+12} = 17$,

uveďme na tvar $\sqrt{3x+12} = 17 - \sqrt{3x-5}$ a zdvojmocněme ji.

Tím vznikne rovnice $3x + 12 = 17^2 - 2 \cdot 17 \sqrt{3x-5} + 3x - 5$,

z níž vyplývá rovnice

$$2 \cdot 17 \sqrt{3x-5} = 17^2 - 17$$

a po krácení číslem $2 \cdot 17$

$$\sqrt{3x-5} = 8.$$

Tato rovnice zdvojmocněna jsouc poskytne

$3x - 5 = 64$, t. j. $x = 23$.

c) Jsou-li v rovnici *tři nebo více neznámých oddvojmocí*, převeďme dvě z nich na jednu a ostatní i se členy racionálnými na druhou stranu rovnice, načež rovnici *zdvojmocněme*.

Na př. rovnici $\sqrt{x-7} + \sqrt{x-2} - \sqrt{x-10} = \sqrt{x+5}$ uveďme nejprve ve tvar

$$\sqrt{x-7} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+5} + \sqrt{x-10}$$ a zdvojmocněme ji.

Tím obdržíme rovnici

$$x - 7 + 2\sqrt{(x-7)(x-2)} + x - 2 = x + 5 + 2\sqrt{(x+5)(x-10)} + x - 10,$$

z níž nabudeme, sloučíce členy stejnojmenné a osamotníce jednu z oddvojmocí,

$$2\sqrt{(x-7)(x-2)} = 4 + 2\sqrt{(x+5)(x-10)}$$

a po krácení dvěma $\sqrt{(x-7)(x-2)} = 2 + \sqrt{(x+5)(x-10)}$.

Tato rovnice má tvar v b) vytčený. Pokračujíce způsobem tam vytčeným obdržíme $x = 11$.

d) Jsou-li v rovnici *dvě neznámé odtrojmoci*, převeďme je na jednu, ostatní pak členy na druhou stranu rovnice, načež rovnici *ztrojmocněme*. Potom užijeme této poznámky:

Je-li $u + v = a$, *jest* $u^3 + 3u^2v + 3vu^2 + v^3 = a^3$

čili $u^3 + 3uv(u + v) + v^3 = a^3$ a užijeme-li rovnice

$u + v = a$, nabudeme $u^3 + 3auv + v^3 = a^3$.

A podobně, je-li $u - v = b$, jest $u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 = b^3$

čili $u^3 - 3buv - v^3 = b^3$.

Na př. rovnici $\sqrt[3]{23 + 2x} - 2 = \sqrt[3]{15 + 2x}$ dáme nejprve tvar

$\sqrt[3]{23 + 2x} - \sqrt[3]{15 + 2x} = 2$, načež ji ztrojmócníme.

Tím vznikne rovnice

$$23+2x-3\left(\sqrt[3]{23+2x}\right)^2\sqrt[3]{15+2x}+3\sqrt[3]{23+2x}\left(\sqrt[3]{15+2x}\right)^2-(15+2x)=8$$

čili dle vytčené poznámky

$$8-3\sqrt[3]{(23+2x)\,(15+2x)}\left(\frac{\sqrt[3]{23+2x}-\sqrt[3]{15+2x}}{2}\right)=8,$$

t. j.

$$\sqrt[3]{(23+2x)\,(15+2x)}=0,$$

ze kteréž rovnice jde ztrojmocněním $(23+2x)\,(15+2x)=0$.

Této rovnici bude vyhověno, 1) je-li $23+2x=0$ t. j. $x=-\frac{23}{2}=-11\frac{1}{2}$

a 2) „ $15+2x=0$ „ $x=-\frac{15}{2}=-7\frac{1}{2}$.

Podobným způsobem počínáme si i ve případech jiných.

9) Z odstavce 8. jest patrno, *že rovnice vzniklá z dané rovnice, odmocníme-li obě její strany týmž číslem, neobsahuje všech kořenů rovnice dané, přihlížíme-li vždy jen k jedné hodnotě odmocnin při tom se vyskytujících.*

Na př. z rovnice $x^4=1$ obdržíme, odmocníce obě její strany číslem 4, $x=\sqrt[4]{1}$ čili, přihlížíme-li jen k absolutní hodnotě $\sqrt[4]{1}$, kteráž jest rovna 1,

$$x=1.$$

Rovnice poslední má jen jeden kořen, kdežto rovnice $x^4=1$ má, jak jsme v odstavci 8. seznali, kořeny čtyři.

Později prozkoumáme případy tohoto druhu bedlivěji. Nyní budiž jen k tomu poukázáno, že dobytím druhého kořene z obou stran rovnice $X^2=A^2X_1^2$, v níž X a X_1 jsou výrazy obsahující neznámou, povstanou dvě od sebe různé rovnice,

$$\text{a to 1) } X=AX_1,\ \text{a 2) } X=-AX_1,$$

jichž kořeny vyhovují dle odst. 8. dané rovnici.

Vynecháme-li, řešíce rovnici $X^2=A^2X_1^2$, některou z rovnic 1. a 2, jest řešení oné rovnice *kusé.*

Příklad.

Budiž dána rovnice $4x^2-4x+1=64-16x+x^2$

čili $(2x-1)^2=(8-x)^2$.

Dobytím kořene druhého stupně z obou stran nabudeme dvou rovnic, a to

1) $2x-1=8-x$ a 2) $2x-1=-(8-x)$.

Z první rovnice jde $x=3$ a z druhé $x=-7$.

O logarithmech.

§ 104. Vysvětlení.

Známe-li v rovnici

$$a^b=c \tag{1}$$

čísla c a a, vypočteme číslo b *logarithmováním* (§ 92.).

Číslo b jmenujeme *logarithmem* (poměročtem) čísla c pro základ a a vyznačujeme tuto souvislosť rovnicí

$$b = \log_a c. \tag{2}$$

Srovnajíce rovnici 1. s 2. seznáváme:

Logarithmus (b) nějakého čísla (c) pro určitý základ (a) jest mocnitel, kterým umocniti jest základ, aby povstalo číslo, jehož logarithmus hledáme.

Na př. $\log_2 8 = 3$, poněvadž $2^3 = 8$,
$\log_9 81 = 2$, „ $9^2 = 81$,
$\log_{10} 10 = 1$, „ $10^1 = 10$,
$\log_{10} 100 = 2$, „ $10^2 = 100$.

Z definice logarithmu libovolného čísla c vyplývá, že základem logarithmů nemůže býti ani 1 ani 0, neboť
1 umocněna jsouc jakýmkoli číslem z řady číselné dá zase 1 a nikoli číslo c,
0 „ „ „ kladným „ „ „ „ „ 0 „ „ c
0 „ „ „ záporným „ „ „ „ „ ∞ „ „ c

§ 105. Výsledky.

1) Vložíme-li výraz $\log_a c$ za b z rovnice 2. do rovnice 1., vznikne rovnice

$$a^{\log_a c} = c,$$

t. j.: *Umocníme-li základ logarithmem libovolného čísla c pro tento základ, obdržíme číslo c.*

2) Vložíme-li výraz a^b za c z rovnice 1. do rovnice 2., obdržíme rovnici

$$b = \log_a a^b,$$

t. j.: *Logarithmus libovolné mocniny základu pro tento základ roven jest jejímu mocniteli.*

Věty 1. a 2. obsaženy jsou v definici logarithmu podané v § 104.

Zvláštním případem věty 2. jsou věty:

Logarithmus základu rovná se 1,

neboť, poněvadž $a = a^1$, jest $\log_a a = \log_a a^1 = 1$.

Logarithmus 1 *pro každý základ rovná se* 0,

neboť poněvadž $1 = a^0$, jest $\log_a 1 = \log_a a^0 = 0$.

3) *Logarithmus racionálného čísla, které není mocninou základu rovněž racionálného, jest číslo irracionálné.*

Tvrzení: Není-li číslo c rovno a^n, kdež n jest číslo celé (kladné nebo záporné) a c a a čísla racionálná, není $\log_a c$ číslem racionálným.

Důkaz. Položíme-li $\log_a c = x$, jest $c = a^x$.

Poněvadž c není mocninou základu a o mocniteli celistvém, není x číslem celým.

Že nemůže býti x rovno racionálnému zlomku $\frac{r}{s}$, jest patrno z toho, že $a^{\frac{r}{s}}$ čili $\sqrt[s]{a^r}$ jest číslo irracionálné, které nemůže býti rovno racionálnému číslu c.

Je-li tudíž číslo x reálné, musí býti irracionálné, neboť řada čísel reálných složena jest jen z čísel racionálných a irracionálných (§ 103., 2.).

§ 106. O logarithmu součinu, podílu, mocniny a odmocniny.

1) *Logarithmus součinu rovná se součtu logarithmů jeho činitelů.*

Tvrzení. $\log_z a \,.\, b = \log_z a + \log_z b.$

Důkaz. Budiž 1) $\log_z a = x$, tudíž 1') $a = z^x$,
2) $\log_z b = y$, „ 2') $b = z^y$.

1) + 2) ... $\log_z a + \log_z b = x + y$	1') × 2') ... $a \,.\, b = z^{x+y}$, tudíž $\log_z ab = x + y$.

Srovnáním obou výsledků obdržených pro $x + y$ povstane

$$\log_z ab = \log_z a + \log_z b,$$

jak jsme tvrdili.

Všeobecněji jest

$$\log_z a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \ldots = \log_z a + \log_z b + \log_z c + \ldots,$$

jak snadno lze odvoditi, uvážíme-li, že $abcd = (abc)d$ atd.

Dle toho jest na př. $\log_z 6 = \log_z 2 + \log_z 3$,

$$\log_z 8 = \log_z 2 + \log_z 2 + \log_z 2 = 3\log_z 2,$$

vůbec jest patrno, že *logarithmus čísla složeného roven jest součtu logarithmů jeho prvočinitelů.* Známe-li tudíž logarithmy prvočísel, můžeme vypočísti logarithmy všech čísel složených pouhým sčítáním.

Dokažte, že

$$\log_z az = 1 + \log a,\ \log_z az^2 = 2 + \log a,\ \log_z \frac{a}{z} = \log_z a - 1,\ \log_z \frac{a}{z^n} = \log a - n.$$

Naopak lze souditi z věty 1., že

$$\log a + \log b = \log ab,\ \log a + \log 2 = \log 2a,\ \log_z x + 1 = \log xz \text{ atd.}$$

2) *Logarithmus podílu (zlomku) rovná se logarithmu dělence zmenšenému o logarithmus dělitele.*

Tvrzení. $\log_z \frac{a}{b} = \log_z a - \log_z b.$

Důkaz. Budiž 1) $\log_z a = x$, tudíž 1') $a = z^x$,
2) $\log_z b = y$, „ 2') $b = z^y$.

1) − 2) ... $\log_z a - \log_z b = x - y$	1') : 2') .... $\frac{a}{b} = z^{x-y}$, tudíž $\log_z \frac{a}{b} = x - y$.

Srovnáním obou výsledků pro $x - y$ povstane

$$\log_z \frac{a}{b} = \log_z a - \log_z b,$$

jak jsme tvrdili.

Dle toho jest na př. $\log_z \frac{3}{2} = \log_z 3 - \log_z 2$,

$$\log_z \frac{1}{2} = \log_z 1 - \log_z 2 = 0 - \log_z 2 = -\log_z 2,$$

$$\log \frac{a \cdot b}{c} = \log ab - \log c = \log a + \log b - \log c,$$

$$\log \frac{ab}{cd} = \log a + \log b - \log c - \log d.$$

Naopak jest $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$.

3) *Logarithmus mocniny rovná se logarithmu mocněnce násobenému mocnitelem.*

Tvrzení. $\log_z a^n = n \log_z a$ pro každé číslo n z řady číselné.

Důkaz. Budiž 1) $\log_z a = x$, tudíž 1') $a = z^x$.

1) $\times n \ldots n \log_z a = nx.$	1')$^n \ldots a^n = z^{nx}$, tedy $\log_z a^n = nx.$

Srovnajíce oba výsledky pro nx, nabudeme

$$\log_z a^n = n \log_z a,$$

jak bylo tvrzeno.

Dle toho jest $\log a^2 = 2 \log a$, $\log a^2 b = 2 \log a + \log b$,

$$\log \frac{a^2 b^3}{c^5} = 2 \log a + 3 \log b - 5 \log c$$

a naopak $2 \log x = \log x^2$,

$$2 \log x + 3 \log y = \log x^2 + \log y^3 = \log x^2 y^3,$$

$$\log a + 2 \log b - 3 \log c = \log a + \log b^2 - \log c^3 = \log \frac{ab^2}{c^3}.$$

Poznámka. Pro celistvé n bylo by lze větu 3. odvoditi z rovnice

$$\log_z abcd \ldots = \log_z a + \log_z b + \log_z c + \log_z d \ldots,$$

v níž by bylo položiti

$$a = b = c = d = \ldots$$

4) Pro $n = \frac{r}{s}$ obdržíme na základě věty 3.

$\log a^{\frac{r}{s}} = \frac{r}{s} \log a$ a poněvadž $a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$, máme též $\log \sqrt[s]{a^r} = \frac{r}{s} \log a$.

Je-li nám tudíž logarithmovati odmocninu, mysleme si ji napsánu ve tvaru mocniny s lomeným mocnitelem a užijme pravidla pro logarithmování mocniny.

Dle toho jest $\log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \log a$,

$$\log a \sqrt{a} = \frac{3}{2} \log a,$$

$$\log \sqrt[3]{\frac{ab^2}{c^3}} = \frac{1}{3} \log \frac{ab^2}{c^3} = \frac{1}{3} (\log a + 2 \log b - 3 \log c).$$

Naopak soudíme, že

$$\frac{1}{2} \log a = \log a^{\frac{1}{2}} = \log \sqrt{a},$$

$$\frac{r}{s} \log x = \log x^{\frac{r}{s}} = \log \sqrt[s]{x^r},$$

$$\frac{1}{2}\log a + \frac{1}{3}\log b - \frac{1}{6}\log c = \log \sqrt{a} + \log \sqrt[3]{b} - \log \sqrt[6]{c} =$$

$$= \log \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} - \log \sqrt[6]{c} = \log \frac{\sqrt{a}\,\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{c}} = \log \sqrt[6]{\frac{a^3 b^2}{c}},$$

$$\frac{1}{2} + \log_z a + \frac{1}{2}\log_z b = \log_z z^{\frac{1}{2}} a b^{\frac{1}{2}} = \log_z a\sqrt{bz}.$$

§ 107. Logarithmování rovnic a nerovností.

1) *Stejná / Nestejná čísla mají při témž základě stejné / nestejné logarithmy*, t. j. je-li $a = b$, jest i $\log a = \log b$, a není-li a rovno b, není $\log a$ roven $\log b$.

Neboť logarithmus nějakého čísla jest mocnitel, kterým jest základ umocniti, aby ono číslo povstalo. Mají-li umocňováním téhož čísla (základu) postati čísla stejná, / nestejná, musí býti mocnitelé (logarithmy) stejní. / nestejní. (§ 86., 3. a § 96., 2.)

Z věty 1. vychází na jevo věta:

2) *Ke stejným / nestejným logarithmům náležejí při témž základě čísla stejná. / nestejná.*

T. j. je-li a) $\log a = \log b$, jest i $a = b$,

neboť kdyby číslo a nebylo rovno číslu b, nebyl by dle věty 1. ani $\log a$ roven $\log b$, což jest proti podmínce.

Kdyby b) $\log a$ nebyl roven $\log b$, nebylo by ani a rovno b.

Neboť kdyby bylo $a = b$, byl by dle 1. i $\log a = \log b$, což odporuje podmínce.

§ 108. O soustavách logarithmických.

Z věty 1. a 2. § 107. jest patrno, že k určitému číslu náleží jediný určitý logarithmus (reálný) a naopak. *Souhrn všech čísel a jich logarithmů pro určitý základ* **z** *jmenujeme soustavou logarithmů o základě* **z**.

Z § 104. jest patrno, že ani 1 ani 0 nemohou býti základem soustavy logarithmické.

Po vyloučení těchto dvou čísel jako základů mohou ještě nastati případy tři, totiž

a) základ $z > 1$,

b) „ $z < 1$, ale > 0,

c) „ $z < 0$.

Jaký průběh mají logarithmy čísel absolutních v těchto případech, rostou-li nebo klesají-li čísla, poznáme z vět následujících:

a) *V soustavě, jejímž základem jest číslo větší než jedna, roste logarithmus čísla, roste-li toto číslo.*

Tvrzení. Pro $z > 1$ roste $\log_z a$, roste-li číslo a.

Důkaz. Budiž $\log_z a = m$.

Potom jest $a = z^m$.

Roste-li v této rovnici číslo a, musí vzrůstati i její pravá strana, t. j. mocnina z^m.

Avšak poněvadž číslo z se nemění a jest větší než 1, musí vzrůstati mocnitel m, t. j. $\log_z a$. (§ 89., 1.)

Z téhož důkazu jest patrno, že *roste-li číslo* **a** *do nekonečna že i* **m**, *čili* $\log_z a$, *musí vzrůstati do nekonečna*

t. j. pro $z > 1$ jest $\log_z \infty = \infty$.

Je-li číslo $a = 1$, jest jeho logarithmus roven 0, a poněvadž pro $z > 1$ klesá logarithmus, klesá-li číslo, jsou v tomto případě logarithmy čísel menších než 1 menší než 0, t. j. záporné.

Klesne-li absolutní číslo **a** *na nejmenší hodnotu, t. j. na nullu, stane se jeho logarithmus roven* $-\infty$.

Neboť položíme-li $\log_z 0 = x$, musí býti $z^x = 0$, kteréž rovnici vyhovuje pro $z > 1$ jen $x = -\infty$.

Jaký průběh má logarithmus čísla absolutního pro základ $z > 1$, nabývá-li toto číslo všech hodnot, patrno jest z tohoto sestavení:

Číslo $a =$	0,	1,	z,	∞,
$Log_z\ a =$	$-\infty$,	0,	1,	∞.

b) *V soustavě, jejímž základem jest číslo menší než jedna, ale větší než* 0, *klesá logarithmus čísla, roste-li toto číslo.*

Tvrzení. Pro $z < 1$ klesá $\log_z a$, roste-li číslo a.

Důkaz. Budiž $\log_z a = m$.

Potom jest $a = z^m$.

Roste-li v této rovnici číslo a, musí vzrůstati i její pravá strana, t. j. mocnina z^m. Avšak poněvadž číslo z se nemění a jest menší než 1, musí mocnitel m, t. j. $\log_z a$, klesati (§ 89., 2.).

Je-li číslo $a = 1$, jest jeho logarithmus roven 0. Z toho a z věty právě dokázané jest patrno, že logarithmy čísel $\begin{matrix}\text{větších}\\ \text{menších}\end{matrix}$ než 1 jsou v tomto případě $\begin{matrix}\text{menší}\\ \text{větší}\end{matrix}$ než 0, t. j. $\begin{matrix}\text{záporné.}\\ \text{kladné.}\end{matrix}$

Vzrůstá-li číslo **a** *do nekonečna, zmenšuje se mocnitel* **m**, *čili* $\log_z a$, *do nekonečna*, t. j. pro

$$z < 1 \text{ jest } \log_z \infty = -\infty.$$

Neboť položíme-li $\log_z \infty = x$, musí býti $z^x = \infty$
a této rovnici vyhovuje jen $x = -\infty$.

Nabude-li absolutní číslo **a** *nejmenší hodnoty, t. j. nully, stane se jeho logarithmus v tomto případě roven* ∞.

Neboť položíme-li opět $\log_z 0 = x$, musí býti $z^x = 0$,
kteréž rovnici vyhovuje jen $x = \infty$, poněvadž pro $z < 1$ jest $z^\infty = 0$.

Jak závisí průběh logarithmu pro základ < 1 na průběhu čísla, jest patrno z tohoto sestavení:

Číslo $a = 0$,	z,	1,	∞.
$Log_z a = \infty$,	1,	0,	$-\infty$.

Ve případech a) i b) vyplňují logarithmy čísel absolutních celou řadu číselnou sahající od $-\infty$ až do $+\infty$. Z toho a z vět 1. a 2. v § 107. jde, že pro základ větší než 0 logarithmy čísel záporných nejsou čísly reálnými. V algebraické analysi se dokazuje, že jsou to čísla soujemná.

c) Co se týče čísel záporných, seznáme z příkladu, že se nehodí za základ soustavy logarithmův.

Jesti totiž na př.

$log_{-2} 1 = 0$, poněvadž $(-2)^0 = 1$;

$log_{-2} 2$ není roven žádnému číslu z řady čísel reálných, poněvadž žádné číslo x této řady nevyhovuje rovnici $(-2)^x = 2$;

$log_{-2} 4 = 2$. poněvadž $(-2)^2 = 4$;

$log_{-2} 8$ není roven žádnému číslu reálnému atd.

Z toho vidíme, že pro záporný základ jsou logarithmy mocnin, jichž mocněnec jest roven absolutní hodnotě základu, střídavě reálné a imaginarné. Již tato okolnost, nehledě k jiným, o nichž jednati zde místa není, ukazuje, že sluší dáti přednost soustavám logarithmickým, jichž základy jsou čísla kladná, před soustavami se základy zápornými.

Srovnáme-li případ a) s případem b), poznáme, že případ a) jest přirozenější, poněvadž tu logarithmus s rostoucím číslem roste, kdežto ve případě b) klesá.

A skutečně užívá se jen čísel větších než 1 za základy soustav logarithmických a to čísla 10 a irracionálného čísla e, které se vyjadřuje součtem $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots$ o nekonečně mnoha členech a přibližně rovno jest 2·718281828459.....

Soustava logarithmův o základě 10 jmenuje se *soustavou logarithmů dekadických*, *obyčejných* anebo dle svého vynálezce *Jindřicha Briggsa* (1550—1630) soustavou logarithmův *Briggsových*.

Obyčejný logarithmus libovolného čísla x budeme krátce označovati $log\, x$ nepřipisujíce základu 10.

Soustava logarithmův o základě e, která jest prvé starší, slove soustavou logarithmů *přirozených* čili dle lorda *Johna Napiera* (1550—1617), který jí r. 1614 zavedl, soustavou *Napierovou*. Poněvadž logarithmy této soustavy lze vyjádřiti jisté části plochy obsažené mezi hyperbolou a jejími asymptotami, zvána jest také soustavou logarithmů *hyperbolických*.

Přirozený logarithmus libovolného čísla x budeme označovati krátce lx.

Dokažte, že 1^∞ a ∞^0 jsou výrazy *neurčité* (§ 50., 4.)

§ 109. Jak na sobě závisejí logarithmy čísel ve dvou různých soustavách logarithmických.

Buďtež $a, b, c, d \ldots$ libovolná čísla

a $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ jich logarithmy pro základ z,

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \ldots$ „ „ „ „ z_1.

Potom jest $z^\alpha = a$, $z^\beta = b$, $z^\gamma = c \ldots$,

$z_1^{\alpha_1} = a$, $z_1^{\beta_1} = b$, $z_1^{\gamma_1} = c, \ldots$

Srovnajíce výrazy pro $a, b, c, \ldots$, obdržíme rovnice

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1},\ z^\beta = z_1^{\beta_1},\ z^\gamma = z_1^{\gamma_1} \ldots$$

čili $$z^{\frac{\alpha}{\alpha_1}} = z_1,\ z^{\frac{\beta}{\beta_1}} = z_1,\ z^{\frac{\gamma}{\gamma_1}} = z_1 \ldots,$$

z nichž jde $$z^{\frac{\alpha}{\alpha_1}} = z^{\frac{\beta}{\beta_1}} = z^{\frac{\gamma}{\gamma_1}} = \ldots$$

a tudíž dle § 86., 3. a § 96., 2) $$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = \ldots$$

t. j.: *Poměr mezi logarithmy libovolného čísla ve dvou různých soustavách jest pro všecka čísla stejný.*

Nazveme-li μ hodnotu tohoto stálého poměru, máme rovnici

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = \ldots = \mu, \text{ z níž jde}$$

$$\alpha = \mu\alpha_1,\ \beta = \mu\beta_1,\ \gamma = \mu\gamma_1 \ldots$$

Známe-li tudíž logarithmy čísel v jedné soustavě (z_1), nabudeme jich logarithmů v soustavě jiné (z), násobíce dané logarithmy určitým číslem μ.

Číslo μ slove *modulem* soustavy dané (z_1) vzhledem k soustavě nové. Bližšího ponětí nabudeme o něm takto:

Poněvadž jest dle věty svrchu dokázané pro každé číslo x

$\frac{log_z x}{log_{z_1} x} = \mu$, obdržíme pro $x = z$, $\frac{log_z z}{log_{z_1} z} = \mu$. A poněvadž

$log_z z = 1$, jest $\frac{1}{log_{z_1} z} = \mu$, t. j.:

Modul μ soustavy z_1 jest převrácenou hodnotou logarithmu základu nové soustavy v dané soustavě z_1.

Pro logarithmy přirozené a obyčejné obdržíme zvláště

$$\frac{log\, a}{la} = \mu \text{ čili } log\, a = \mu la,$$

kde $\mu = \frac{1}{l10} = 0{\cdot}43429448190325182765112 89 \ldots$ (Viz § 111.)

Na základě rovnice $log\, a = \mu la$ lze vypočísti obyčejné logarithmy čísel, známe-li jich logarithmy přirozené.

1) Odvoďte vzorec pro vypočtení logarithmů přirozených z logarithmův obyčejných.

2) Dokažte, že modul μ logarithmů přirozených jest s modulem μ_1 logarithmův obyčejných spojen rovnicí $\mu\mu_1 = 1$. *)

§ 110. O soustavě logarithmův obyčejných.

1) Obyčejný logarithmus každého čísla a (soustavy dekadické) složen jest všeobecně ze dvou částí: z části celistvé a lomené.

Část celistvá rovna jest vždy udavateli jednotek nejvyššího řádu čísla **a**; *část lomená závisí jen na soustavě číslic, jimiž jest číslo* **a** *napsáno*, jsouc na poloze desetinné tečky a na počtu null k číslu a v pravo nebo v levo připsaných nezávislá.

Důkaz. Buďtež nejvyšší jednotky čísla a řádu n^{ho}, při čemž jest číslo n kladné nebo záporné.

Potom platí nerovnosť $10^{n+1} > a > 10^n$. (1)

Na př. v čísle 723·4 jsou nejvyšší jednotky řádu 2. a

$$10^3 > 723{\cdot}4 > 10^2,$$

v čísle 0·0076 jsou nejvyšší jednotky řádu -3 a

$$10^{-3+1} > 0{\cdot}0076 > 10^{-3}.$$

Z nerovnosti 1. vysvítá, že jest i

$$log\ 10^{n+1} > log\ a > log\ 10^n \qquad (\S\ 107.)$$

$$\text{čili } n+1 > log\ a > n.$$

Z toho jde

$$log\ a = n + \alpha,$$

při čemž jest $\alpha < 1$.

Skládá se tudíž $log\ a$ z části celistvé n rovnající se udavateli nejvyšších jednotek čísla a a z části lomené α.

Každé číslo, které se liší od čísla a jen polohou desetinné tečky, nebo nullami v pravo připsanými, má tvar $a \,.\, 10^r$, kdež r jest kladné nebo záporné číslo celé. Na př. je-li $a = 25{\cdot}4378$,

jest $2543{\cdot}78 = a \,.\, 10^2$,

$254378 = a \,.\, 10^4$,

$25437800 = a \,.\, 10^6$,

$2{\cdot}54378 = a \,.\, 10^{-1}$,

$0{\cdot}0254378 = a \,.\, 10^{-4}$ atd.

Dle § 106., 1. obdržíme

$$log\ a \,.\, 10^r = log\ a + log\ 10^r,$$

a poněvadž $log\ 10^r = r$ a $log\ a = n + \alpha$,

jest $log\ a \,.\, 10^r = n + \alpha + r$

čili $log\ a \,.\, 10^r = (n + r) + \alpha$, kdež $n + r$ jest číslo celé.

---

*) Při tom značí $\frac{\mu}{\mu_1}$ modul soustavy $\frac{\text{přirozené}}{\text{obyčejné}}$ vzhledem k soustavě $\frac{\text{obyčejné.}}{\text{přirozené.}}$

Z této rovnice vysvítá, že se $log\ a \,.\, 10^r$ liší od $log\ a$ jen částí celistvou, nikoli lomenou částí α, t. j. tato část jest na poloze desetinné tečky a na počtu null k číslu a připsaných nezávislá. Tím jest věta 1. dokázána.

Z této věty jest patrno, že na př. logarithmy čísel 2543·78, 254378, 25437800, 2·54378, 0·0254378 budou se shodovati ve svých částech lomených, kdežto jich části celistvé budou různé.

Bude totiž

$$log\ 2543{\cdot}78 = 3 + \alpha = 3{\cdot}\ldots\ldots,$$
$$log\ 254378 = 5 + \alpha = 5{\cdot}\ldots\ldots,$$
$$log\ 25437800 = 7 + \alpha = 7{\cdot}\ldots\ldots,$$
$$log\ 2{\cdot}54378 = 0 + \alpha = 0{\cdot}\ldots\ldots,$$
$$log\ 0{\cdot}0254378 = -2 + \alpha = 0{\cdot}\ldots\ldots -2 \text{ atd.}$$

Celistvou část logarithmu jmenujeme jeho *charakteristikou*, část lomenou jeho *mantissou*.

Mantissa jest vždy číslem kladným (všeobecně irracionálným, § 105., 3.), které jest menší než 1.

Poněvadž charakteristiku logarithmu poznati lze vždy z tvaru daného čísla a, jde při vypočítávání logarithmů čísel jen o jich mantissy. A tu desetinné tečky čísla a dbáti netřeba.

§ 111. Jak lze vypočísti obyčejné logarithmy.

Hledaný logarithmus vyjádříme nejprve řetězcem a vypočteme potom jeho sblížené hodnoty.

Je-li na př. vypočísti logarithmus čísla 5 pro základ 10, položme

$$log_{10} 5 = x, \text{ tedy } 10^x = 5. \tag{1}$$

Z této rovnice vysvítá nerovnost

$$0 < x < 1,$$

tudíž jest $x = \frac{1}{y}$, kdež $y > 1$. (a)

Vložíce tento výsledek do rovnice 1., obdržíme

$$10^{\frac{1}{y}} = 5, \text{ tedy } 10 = 5^y. \tag{2}$$

Z této rovnice jde, že jest

$$1 < y < 2, \text{ tudíž } y = 1 + \frac{1}{z}. \tag{b}$$

Z b) do 2)... $10 = 5^{1+\frac{1}{z}}$, čili $10 = 5 \,.\, 5^{\frac{1}{z}}$, tudíž $2 = 5^{\frac{1}{z}}$ a $2^z = 5$. (3)

$$2 < z < 3, \ldots z = 2 + \frac{1}{u}. \tag{c}$$

Z c) do 3)... $2^{2+\frac{1}{u}} = 5$, ze kteréž rovnice týmž postupem jako prve obdržíme $2 = 1{\cdot}25^u$.

Z toho jde, že jest

$$3 < u < 4, \ldots u = 3 + \frac{1}{v}. \tag{d}$$

Z d) do 4)... $2 = 1{\cdot}25^{3+\frac{1}{v}}$ a z této rovnice jde $(1{\cdot}024)^v = 1{\cdot}25$.

Pokusy přesvědčíme se, že jest

$$6 < v < 7, \text{ tudíž } v = 6 + \frac{1}{t}. \qquad (e)$$

a t. d.

Z rovnic a), b), c), d) a e) vyplývá, že

$$x = 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/6 + \ldots.$$

Může-li býti řetězec pro x konečný?

Poznámka. Z příkladu tohoto jest patrno, že by bylo lze vypočísti vytčeným způsobem logarithmy čísel; ale zároveň jest zřejmo, že tento způsob jest velmi zdlouhavý. Z té příčiny užívá se k vypočtení logarithmů cesty jiné, které učí algebraická analyse.

V algebraické analysi dokáže se totiž, že

$$lx = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right],$$

při čemž *počet* členů v závorce vzrůstá do nekonečna. Poněvadž jest $\frac{x-1}{x+1} < 1$, zmenšují se stále hodnoty těchto členů, tak že k přibližnému vypočtení přirozeného logarithmu libovolného čísla dostačí sečísti několik členů prvních. Položíme-li nejprve $x = 10$, vypočteme z onoho vzorce $l\,10$, z čehož se určí dříve udaná hodnota modulu $\left(\frac{1}{l\,10}\right)$ soustavy obyčejné. Jde-li potom na př. o *log* 1·5, vypočteme nejprve $l\,1{\cdot}5$, položíce v udaném vzorci $x = 1{\cdot}5$ a násobíme výsledek dříve nabytým modulem. Obdržíme tu

$$l\,1{\cdot}5 = 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7} + \ldots\right).$$

Vypočtouce hodnoty čtyř členů v závorce, nabudeme $l\,1{\cdot}5 = 0{\cdot}405465$, při čemž jest chyba $< \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^6}$. Násobíce tento logarithmus modulem (0·43429448.....), obdržíme *log* $1{\cdot}5 = 0{\cdot}176091$, při čemž jest chyba $< \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^6}$.

§ 112. Jak jsou zařízeny tabulky logarithmické a jak se jich užívá.

1) Některá čísla s logarithmy k nim příslušnými zapsána jsou v *tabulkách logarithmických.* Podle počtu míst desetinných, jimiž jsou mantissy vyjádřeny, rozeznáváme tabulky *čtyřmístné, pětimístné, šestimístné* atd. Zařízení tabulek nebývá vždy stejné. Vyložíme jen, jak jsou zařízeny tabulky sestavené od prof. Dr. Studničky, jichž se na českých středních školách užívá. Tabulky tyto jsou *pětimístné* a lze v nich vyhledati bez dalších výpočtů obyčejný logarithmus čísla nejvýše čtyřciferního, t. j. čísla obsaženého mezi 1 a 10.000. Jich zařízení patrno jest z tohoto výňatku:

N		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
560	74	819	827	834	842	850	858	865	873	881	889	
561		896	904	912	→ 920	927	935	943	950	958	966	8
562		974	981	989	997	*005	*012	*020	*028	*035	*043	
563	75	051	059	066	074	082	089	097	105	113	120	
564		128	136	143	151	159	166	174	182	189	197	

V prvním sloupci, označeném písmenem N, jsou vypsána tři nejvyšší místa čísel čtyřmístných; místa čtvrtá jsou v řádku, v němž jest napsáno N. Na př. tři nejvyšší místa čísla 5613 najdeme ve sloupci N a místo čtvrté, t. j. 3, ve vodorovném řádku, v němž jest N. Postupujíce nyní v řádku, ve kterém jest číslo 561, až ke sloupci, ve kterém jest 3, dospějeme ke *třem nejnižším místům* (920) pětimístné mantissy logarithmu čísla 5613. Dvě *nejvyšší* místa této mantissy (74), celé řadě po sobě jdoucích mantiss společná, jsou napsána v levo nahoře hned za sloupcem N. Jesti tudíž mantissa logarithmu čísla 5613 rovna 0·74920 a $log\ 5613 = 3{\cdot}74920$.

Podobně jest $log\ 56{\cdot}06 = 1{\cdot}74865$,

$log\ 0{\cdot}05641 = 0{\cdot}75136 - 2$,

$log\ 563000 = 5{\cdot}75051$.

Přijdeme-li, vyhledávajíce mantissu, k číslu, před nímž jest hvězdička, jest nám za první dvě místa mantissy vzíti číslo v levo níže napsané. Na př. $log\ 5628 = 3{\cdot}75035$.

2) Jde-li o vypočtení logarithmu čísla pěti- nebo šestimístného, nelze ho vyhledati z tabulek přímo. Máme-li na př. vyhledati logarithmus pětimístného čísla 56154, soudíme takto:

Z nerovnosti $56150 < 56154 < 56160$

vychází na jevo, že i $log\ 56150 < log\ 56154 < log\ 56160$. (§ 108., a)

Z tabulek obdržíme přímo, že $log\ 56150 = 4{\cdot}74935$,

$log\ 56160 = 4{\cdot}74943$,

kteréž hodnoty, vloženy jsouce do předcházející nerovnosti, poskytnou

$$4{\cdot}74935 < log\ 56154 < 4{\cdot}74943. \qquad (1)$$

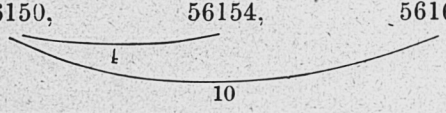
Z této nerovnosti jde, že jest

$$log\ 56154 = 4{\cdot}74935 + \Delta,$$

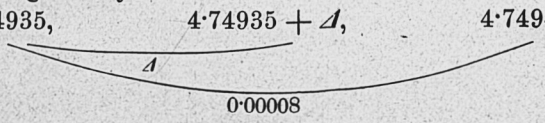
při čemž jest $\Delta < 0{\cdot}00008$, kteréž číslo udává rozdíl mezi prvním a posledním členem nerovnosti 1. Abychom toto Δ vypočetli, užíváme věty:

a) *Rozdíly čísel, která se málo od sebe liší, jsou přímo úměrny rozdílům jich logarithmů.*

V našem případě máme čísla



jichž rozdíly, tvořené způsobem oblouky naznačeným, jsou 4 a 10. K těmto číslům příslušejí logarithmy



jichž rozdíly, vytvořené týmž způsobem jako rozdíly čísel, jsou Δ a 0·00008. Podle oné věty bude tudíž

$$\Delta : 00008 = 4 : 10$$

$$\text{čili } \Delta = \frac{0{\cdot}00008 \times 4}{10} = \frac{0{\cdot}00032}{10} = 0{\cdot}000032.$$

Z toho jde, že jest

$$log\ 56154 = 4{\cdot}74935 + 0{\cdot}00003 = 4{\cdot}74938.$$

Číslo Δ, o něž zvětšiti jest *log* 56150, aby povstal *log* 56154, jmenuje se *opravou* (korrekturou). Nazveme-li D rozdíl dvou po sobě jdoucích mantiss v tabulkách, kterým v tomto případě bylo číslo 0·00008, a δ číslici stojící na pátém místě čísla, jehož logarithmus hledáme, máme pro vypočtení opravy Δ logarithmu čísla pětimístného vzorec

$$\Delta = D\frac{\delta}{10}. \qquad (2)$$

Rozdíly D jsou pro jistou řadu mantiss stejné a jsou zapsány v tabulkách v rubrice poslední, označené písmenem D. Čísla v této rubrice stojící značí *setiny tisícin*.

Jde-li o vypočtení logarithmu čísla šestimístného, na př. čísla 561547, soudíme takto:

Z nerovnosti $561500 < 561547 < 561600$

vysvítá, že i $log\ 561500 < log\ 561547 < log\ 561600$.

Avšak $log\ 561500 = 5{\cdot}74935$,

$log\ 561600 = 5{\cdot}74943$,

tudíž jest $5{\cdot}74935 < log\ 561547 < 5{\cdot}74943$.

Z této nerovnosti jde, že jest

$$log\ 561547 = 5{\cdot}74935 + \Delta.$$

Při tom jest $\Delta < 0{\cdot}00008$, kteréž číslo má týž jako prve význam.

Máme nyní čísla

561500, 561547, 561600

47

100

a jich logarithmy

5·74935, 5·74935 + Δ, 5·74943.

Δ

0·00008

Užijeme-li na rozdíly těchto čísel a jich logarithmů věty a) svrchu vytčené, nabudeme úměry

$$\Delta : 0{\cdot}00008 = 47 : 100$$

a tudíž jest $\Delta = 0{\cdot}00008 \times \frac{47}{100} = 0{\cdot}00008 \times 0{\cdot}47 = 0{\cdot}0000376$

čili přibližně $\Delta = 0{\cdot}00004$.

Logarithmus čísla 561547 jest tedy $5{\cdot}74935 + 0{\cdot}00004 = 5{\cdot}74939$.

Nazveme-li číslo skládající se ze dvou nejnižších míst čísla šestimístného všeobecně ε a podržíme-li ostatní označení užitá ve vzorci 2., obdržíme pro výpočet opravy logarithmu čísla šestimístného vzorec

$$\Delta = D\frac{\varepsilon}{100}. \qquad (3)$$

Jde-li tudíž o logarithmus čísla $\begin{matrix}\text{pěti-}\\ \text{šesti-}\end{matrix}$ciferného, počínáme si takto:

Určíme nejprve charakteristiku logarithmu. Po té vyhledáme v tabulkách mantissu příslušnou k číslu, které se skládá ze čtyř nejvyšších číslic daného čísla. K této mantisse připočteme opravu (udanou v setinách tisíciny), která se vypočte, násobíme-li differenci D číslem, které jest na $\begin{matrix}\text{pátém}\\ \text{pátém}\end{matrix}$ a šestém místě čísla daného a dělíme-li součin $\begin{matrix}\text{desíti.}\\ \text{stem.}\end{matrix}$

Při čísle více než šestimístném nelze již tímto způsobem vypočítávati logarithmů, poněvadž věta a) pozbývá tu platnosti.

3) Poněvadž logarithmy čísel jsou všeobecně čísla *irracionálná*, (§ 105., 3.) jsou pětimístné mantissy, jakož i rozdíly D v tabulkách udané, čísla *neúplná* a této okolnosti dbejme počítajíce jimi.

Chyba spojená s každou pětimístnou mantissou a rozdílem D v tabulkách jest $< \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^5}$. Z toho jde, že ani chyba v opravách Δ tuto mez nepřesáhne. Vypočítávajíce totiž opravu Δ, násobíme D *pravým* zlomkem $\frac{\delta}{10}$ nebo $\frac{\varepsilon}{100}$ a chybu v součinu $D\frac{\delta}{10}$ nebo $D\frac{\varepsilon}{100}$, jemuž se právě Δ rovná, bude tudíž při čísle pětimístném menší než $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^5}\cdot\frac{\delta}{10}$, tedy $< \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^5}$ (§ 57.)

a „ „ šestimístném „ „ $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^5}\cdot\frac{\varepsilon}{100}$, „ $< \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^5}$.

Millioniny opravy Δ mohou tudíž již býti nesprávné a z té příčiny podržujeme jen *setiny tisícin* opravy této, berouce z millionin, je-li jich 5 anebo více než 5, známým způsobem opravu.

Tak na př. při logarithmu čísla 56154 vzali jsme za opravu 0·00003 místo vypočtených 0·000032 a při logarithmu čísla 561547 bylo opravou 0·00004 místo vypočtených 0·0000376.

Poněvadž oprava Δ takto určená připočítává se k mantisse, s níž jest spojena chyba $< \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^5}$, jest chyba v součtu menší než $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^5}$ čili menší než $\frac{1}{10^5}$. Z toho vysvítá věta:

Chyba spojená s logarithmy čísel pěti- a šestimístných, vyhledaných z pětimístných tabulek logarithmických, jest menší než $\frac{1}{10^5}$.

Při logarithmech čísel méně než pětimístných nepřipočítává se oprava a proto jest chyba s nimi spojená menší než $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^5}$.

4) Jde-li o číslo (numerus), jehož logarithmus jest dán, poznáme nejprve podle charakteristiky řád nejvyšších jednotek žádaného čísla, načež podle mantissy určíme soustavu číslic, z nichž se číslo to skládá.

Budiž na př. $\log x = 4{\cdot}74935$.

Charakteristika 4 praví, že jednotky nejvyššího řádu čísla x mají udavatele 4. Hledajíce mantissu 0·74935 mezi mantissami v tabulkách, poznáváme, že náleží k číslu 5615. Jest tudíž

$$x = 56150$$

nebo, jak se často píše, *num. log* $4{\cdot}74935 = 56150$.

(numerus, jehož logarithmus jest $4{\cdot}74935 = 56150$).

Případ tento, že totiž mantissa daného logarithmu jest v tabulkách logarithmických, jest zvláštní. Častěji vyskytne se, že mantissy daného logarithmu v tabulkách není.

Budiž na př. $\log y = 2{\cdot}74938$, jehož mantissy v tabulkách není.

Vyhledejme nejprve v tabulkách mantissu, která jsouc menší než mantissa daná, nejvíce se jí blíží. V našem případě jest to 0·74935. Číslo k této mantisse náležející jest 5615. Tím nabyli jsme čtyř prvních číslic žádaného čísla.

Místo páté, kteréž bylo v odstavci 2. označeno δ, vypočísti lze z rovnice 2. v odst. 2., t. j. $\Delta = D\frac{\delta}{10}$, z níž jde $\delta = \frac{10 \cdot \Delta}{D}$.

V našem případě jest $\Delta = 0{\cdot}74938 - 0{\cdot}74935 = 0{\cdot}00003$,

$D = 0{\cdot}74943 - 0{\cdot}74938 = 0{\cdot}00008$,

tudíž jest $\delta = \frac{10 \cdot 3}{8} = \frac{30}{8} = 3{\cdot}7$ čili přibližně $\delta = 4$ a $x = 561{\cdot}54$.

Kdyby šlo o vypočtení pátého a šestého místa čísla x, t. j. o určení čísla v 2. odst. ε nazvaného, užijeme rovnice 3. (odst. 2.), t. j. $\Delta = D\frac{\varepsilon}{100}$, z níž jde $\varepsilon = \frac{100\Delta}{D}$ a tudíž v našem případě $\varepsilon = \frac{300}{8} = 37{\cdot}5$ čili přibližně $\varepsilon = 38$.

Potom jest $x = 561{\cdot}538$.

Vyhledávajíce číslo k danému logarithmu pokračujeme tudíž takto:

Najdeme v tabulkách mantissu, která jsouc menší mantissy dané nejvíce se jí blíží a vypíšeme čtyřciferné číslo k této mantisse příslušné. Odečtouce

mantissu v tabulkách nalezenou od mantissy dané, násobíme rozdíl desíti stem a dělíme součin rozdílem D, načež celky podílu udávají páté páté a šesté místo čísla hledaného.

Podle charakteristiky poznáme, kam položiti jest v nabytém čísle desetinnou tečku, nebo kolik null jest k němu připsati.

5) Že jen první místo čísla δ vypočteného ze vzorce $\delta = \frac{10\,\Delta}{D}$ jest spolehlivé, poznáme takto:

Při určování *num. log* 2·74938 bylo $\Delta = 0{\cdot}74938 - 0{\cdot}74935 \ldots = 0{\cdot}00003$ a je-li menšenec číslem úplným a menšitel neúplným jest chyba v rozdílu Δ vždy menší než $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^5}$ a tudíž chyba v součinu $10\,\Delta$ menší než $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4}$. Dříve již bylo vytčeno, že chyba v D jest menší než $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^5}$. Chyba podílu bude tudíž menší než

$$\frac{10\,\Delta \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^5} + D \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4}}{D^2} \text{ čili } < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4} \cdot \frac{1}{D} \left(\frac{\Delta}{D} + 1 \right). \quad (\S\ 57.)$$

A poněvadž $\frac{\Delta}{D} < 1$, jest $\frac{\Delta}{D} + 1 < 2$ a tudíž chyba spojená s δ jest $< \frac{1}{10^4} \cdot \frac{1}{D}$.

Ze vzorce tohoto jest patrno, že pro správnost výsledku nejnepříznivější případ jest ten, v němž jest D nejmenší. Avšak nejmenší D v tabulkách obnáší 0·00004, z čehož jde

$$\frac{1}{D} < \frac{1}{0{\cdot}00004} \text{ čili } \frac{1}{D} < 25000$$

a tudíž $\frac{1}{10^4} \cdot \frac{1}{D} < 2{\cdot}5$.

Z toho jde, že chyba může působiti v nejnepříznivějších případech i v jednotky čísla δ.

Poněvadž však mez této chyby, několika okolnostmi zvýšená, obnáší pouze 2 jednotky, bude první místo čísla δ, t. j. páté místo čísla hledaného, obyčejně správné. Jistě bude správné tenkráte, je-li $\frac{1}{D} < 10.000$, t. j.

$$D > \frac{1}{10.000} \text{ čili } D > \frac{1}{10^5},$$

t. j. když difference D bude *dvojmístná*.

Z tohoto vyšetření jest zároveň patrno, že druhé místo čísla ε vypočteného ze vzorce $\varepsilon = \frac{100\,\Delta}{D}$ čili šesté místo čísla žádaného bude všeobecně nespolehlivé. Obdržíme totiž v tomto případě jakožto mez chyby $\frac{1}{10^3} \cdot \frac{1}{D}$ a

aby byla tato mez menší než 1, muselo by býti $D > 100 . \frac{1}{10^5}$, kdežto největší D v tabulkách jest $44 . \frac{1}{10^5}$. Tím není ovšem řečeno, že by šesté místo žádaného čísla, určené tabulkami, bylo vždy nesprávné, ale nespolehlivé jest vždy a jmenovitě tenkráte, je-li číslo D číslem jednociferným.

6) Užití logarithmů zakládá se na větách § 106. Dle těchto vět promění se logarithmováním *násobení* čísel ve *sčítání* jich logarithmů,

dělení „ v *odčítání* „ „

umocňování čísla v *násobení* jeho logarithmu mocnitelem

a *odmocňování* „ v *dělení* „ „ odmocnitelem.

Jen sčítání a odčítání logarithmováním více zjednodušiti nelze.

Jde-li o určení číselné hodnoty x nějakého výrazu, logarithmujeme tento výraz a vypočteme číselnou hodnotu *log x*. Znajíce *log x*, určíme *numerus log x*, t. j. x.

Při výpočtu jest nám často užívati jistých obratů, které směřují k tomu, aby logarithmy čísel při výpočtu nabyté byly vyjádřeny *kladnými* mantissami a *celistvými* charakteristikami.

Je-li na př. od čísla 1·61646 *odečísti* číslo 3·43857 a je-li výsledek logarithmem, připočteme k menšenci tolik jednotek, kolik dostačí, aby se sta rozdíl kladným. Ovšem jest nám týž počet jednotek od menšence a tudíž i od kladného rozdílu odečísti, aby hodnota původního rozdílu zůstala nezměněna.

V našem příkladě dostačí připočísti a zároveň odečísti od menšence 2 jednotky,

$$\begin{array}{r} +2 \qquad -2 \\ 1{\cdot}61646 \\ 3{\cdot}43857, \\ \hline \end{array}$$

načež nabývá rozdíl tvaru $0{\cdot}17789 - 2$. Tento rozdíl praví, že číslo k němu přináležející začíná se setinami, t. j. že má tvar $0{\cdot}0\ldots\ldots$

Kdybychom daná čísla odčítali bez vytčené přípravy, nabyli bychom rozdílu ve tvaru $-1{\cdot}82211$, který se hodnotou svou prvému rozdílu rovná, ale z něhož nepoznáváme přímo ani mantissy ani charakteristiky.

Je-li *děliti* na př. číslo $0{\cdot}78076 - 3$ číslem 7 a značí-li výsledek logarithmus nějakého čísla, připočteme k dělenci a odečteme zároveň od něho tolik jednotek, kolik dostačí, aby se záporná charakteristika stala dělitelnou dělitelem. V našem případě dostačí připočísti a odečísti 4. Tím nabude dělenec tvaru $4{\cdot}78076 - 7$ a podíl jest $0{\cdot}68297 - 1$, z něhož vysvítá, že číslo k němu příslušné začíná se desetinami, že má tudíž tvar $0{\cdot}\ldots\ldots$

Kdybychom dělili dělence $(0{\cdot}78076 - 3)$ číslem 7 bez vytčené přípravy, vznikl by podíl $0{\cdot}11154 - \frac{3}{7} = 0{\cdot}11154 - 0{\cdot}42857 = -0{\cdot}31703$.

z něhož nepoznáváme ani mantissy ani charakteristiky.

Příklad 1.

$$x = \frac{48{\cdot}375 \times 0{\cdot}85473}{2745{\cdot}16}.$$

$$\log x = \log 48{\cdot}375 + \log 0{\cdot}85473 - \log 2745{\cdot}16.$$

$$\begin{array}{l} \log 48{\cdot}375 = 1{\cdot}68463 \\ \log 0{\cdot}85473 = 0{\cdot}93183 - 1 \end{array} \Big\} + \quad 2{\cdot}61646 - 1 \ldots ch < \frac{2}{10^5}$$

$$\text{čili } \overset{+2}{1{\cdot}61646} \quad \overset{-2}{} \qquad \log 2745{\cdot}16 = 3{\cdot}43857 \Big\} -$$

$$\log x = 0{\cdot}17789 - 2 \ldots ch < \frac{3}{10^5}$$

$$x = 0{\cdot}015062.$$

Ocenění chyby. Nejprve sčítali jsme dvě čísla neúplná o chybě $< \frac{1}{10^5}$. Chyba v součtu jest tudíž $< \frac{2}{10^5}$. Od tohoto součtu bylo odečteno číslo neúplné o chybě $< \frac{1}{10^5}$. Chyba v rozdílu, t. j. v $\log x$, jest tudíž $< \frac{3}{10^5}$ (§ 57.).

Horní mez $\log x$ jest $0{\cdot}17789 - 2 + 0{\cdot}00003 = 0{\cdot}17792 - 2$
a dolní „ „ „ $0{\cdot}17789 - 2 - 0{\cdot}00003 = 0{\cdot}17785\ 2.$

Poněvadž k horní mezi $\log x$ náleží číslo 0·015063 a k mezi dolní číslo 0·015061, jest horní mez čísla $x = 0{\cdot}015063$,
dolní „ „ $x = 0{\cdot}015061$,
a místa spolehlivá čísla x jsou 0·01506, při čemž jest chyba $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^5}$.

Příklad 2.

$$x = \sqrt[7]{\frac{3}{497}}.$$

$$\log x = \frac{1}{7}(\log 3 - \log 497).$$

$$\begin{array}{l} \log 3 = 0{\cdot}47712 \\ \log 497 = 2{\cdot}69635 \end{array} \Big\} - \quad 4{\cdot}78076 - 7, \ldots ch < \frac{1}{10^5}.$$

$$\log x = 0{\cdot}68297 - 1, \ldots ch < \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{10^5}.$$

$$x = 0{\cdot}48191 \ldots .$$ všecka místa jsou spolehlivá.

Mez chyby v $\log x$ byla takto určena: Místo čísla 4·78076 dělili jsme 7^{mi} číslo 4·78079 a chyba z toho pochodící jest $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{10^5}$. K tomu přistupuje chyba vzešlá z neúplnosti dělence, která jest menší než $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{10^5}$. Celá chyba jest tudíž menší než $\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{10^5}$.

Příklad 3.

$$x = \sqrt[4]{83 - 7\sqrt[3]{0{\cdot}947}}.$$

Položme $7\sqrt[3]{0{\cdot}947} = y$ a vypočtěme nejprve číselnou hodnotu tohoto y. Potom jest

$$x = \sqrt[4]{83 - y}.$$

$$\log y = \log 7 + \frac{1}{3}\log 0{\cdot}947.$$

$$\log 7 = 0{\cdot}84510 \quad \ldots ch < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^5},$$

$$\log 0{\cdot}947 = 0{\cdot}97635 - 1 \ldots \frac{1}{3}\log 0{\cdot}947 = 0{\cdot}99212 - 1 \ldots ch < \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10^5},$$

$$\log y = 0{\cdot}83722 \ldots ch < \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{10^5}, \text{ t. j. } < \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10^5}.$$

Horní mez $\log y = 0{\cdot}83723 \ldots y = 6{\cdot}8743.$
Dolní mez $\log y = 0{\cdot}83721 \ldots y = 6{\cdot}8740.$

Položíme-li tudíž $y = 6{\cdot}874$, jest $ch < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^3}$.

Vložíme-li vypočtenou hodnotu y do výrazu x, nabudeme

$$x = \sqrt[4]{83 - 6{\cdot}874\ldots} = \sqrt[4]{76{\cdot}126\ldots},$$

při čemž jest v odmocněnci chyba $< \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^3}$. Jeho horní mez jest dle předešlých hodno čísla y 76·126 a dolní mez 76·1257.

$$\log x = \frac{1}{4}\log 76{\cdot}126\ldots$$

$\log 76{\cdot}126\cdots = 1{\cdot}88154\ldots$ $ch < 2\cdot\frac{1}{10^5}$ (i s chybou z neúplnosti čísla 76·126... pochodící).

: 4) $\log x = 0{\cdot}47038\ldots$ $ch < \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{10^5} + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{10^5}$.

Druhá část chyby z toho pochází, že jsme místo podílu $\frac{1{\cdot}88154}{4}$ odvodili podíl $\frac{1{\cdot}88152}{4}$. Celá chyba jest $< \frac{1}{10^5}$.

Horní mez $\log x = 0{\cdot}47039\ldots$ $x = 2{\cdot}9539.$
Dolní mez $\log x = 0{\cdot}47037\ldots$ $x = 2{\cdot}9537.$

Položíme-li $x = 2{\cdot}954$, jest $ch < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^3}$.

Příklad 4.

$$x = \sqrt[3]{0{\cdot}09\sqrt[3]{-\frac{29}{71}}}.$$

Dle § 97., 6. jest $\sqrt[3]{-\frac{29}{71}} = -\sqrt[3]{\frac{29}{71}}$

a tudíž $x = \sqrt[3]{-0.09\sqrt[3]{\frac{29}{71}}} = -\sqrt[3]{0{\cdot}09\sqrt[3]{\frac{29}{71}}}$,

čili $x = -x'$, kdež $x' = \sqrt[3]{0{\cdot}09\sqrt[3]{\frac{29}{71}}}$.

Vypočteme nejprve x', načež hodnotu jeho vložíme do rovnice $x = -x'$.

$$\log x' = \frac{1}{3}\left[\log 0{\cdot}09 + \frac{1}{3}\left(\log 29 - \log 71\right)\right]$$

$\log 29 = 1{\cdot}46240$
$\log 71 = 1{\cdot}85126$

$2{\cdot}61114 - 3 \ldots ch < \frac{1}{10^5}$

$$: 3) \ldots 0{\cdot}87038 - 1 \cdot \ldots ch < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10^5}$$

$$\log 0{\cdot}09 = 0{\cdot}95424 - 2 \ldots ch < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^5}$$

$$1{\cdot}82462 - 3 \ldots ch < \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{10^5}$$

$$: 3) \ldots \log x' = 0{\cdot}60821 - 1 \ldots ch < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{10^5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10^5}.$$

Druhá část chyby z toho pochází, že jsme místo podílu $\frac{1{\cdot}82462}{3}$ odvodili podíl $\frac{1{\cdot}82463}{3}$. Celá chyba jest $< \frac{11}{18} \cdot \frac{1}{10^5}$, t. j. $< \frac{1}{10^5}$.

Horní mez $\log x' = 0{\cdot}60822 - 1 \ldots x' = 0{\cdot}40571$.
Dolní mez $\log x' = 0{\cdot}60820 - 1 \ldots x' = 0{\cdot}40569$.

Položíme-li tudíž $x' = 0{\cdot}4057$, jest $ch < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4}$.

Z toho jde $x = -0{\cdot}4057 \ldots, ch < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4}$.

§ 113. Řešení některých rovnic exponenciálních a logarithmických.

1) Rovnici, ve které se vyskytuje neznámá v mocniteli, jmenujeme rovnicí *exponenciální.*

Příklad 1. Nejjednodušší rovnice exponenciální mají tvar

$$a^x = b.$$

Logarithmujíce takovou rovnici převedeme ji na algebraickou.
Obdržíme totiž

$$x \log a = \log b \quad \text{a tudíž} \quad x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Podobně řešíme rovnice exponenciální tvaru

$$a^{mx+n} = b, \; a^{\frac{mx+n}{rx+s}} = b, \; \lambda a^{mx+n} = \mu b^{rx+s} \text{ atd.}$$

Příklad 2. Je-li nám řešiti rovnici

$$3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} 9^{x+2} = \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} 9^{x+1},$$

pišme ji ve tvaru

$$3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} 9^x \cdot 9^2 = 6 \cdot 4^x \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 9^x \cdot 9$$

$$\text{čili } 63 \cdot 9^x = 42 \cdot 4^x,$$

$$3 \cdot 9^x = 2 \cdot 4^x,$$

načež logrithmováním obdržíme rovnici

$$\log 3 + x \log 9 = \log 2 + x \log 4,$$

z níž jde $x = -\frac{\log 3 - \log 2}{\log 9 - \log 4} = -\frac{\log 3 - \log 2}{2(\log 3 - \log 2)} = -\frac{1}{2}$.

Výsledek tento bylo lze obdržeti i z rovnice

$$3 \cdot 9^x = 2 \cdot 4^x, \text{ jíž lze dáti tvar}$$

$3^{2x+1} = 2^{2x+1}$, z něhož vysvítá, že musí býti $2x + 1 = 0$,

t. j. $x = -\frac{1}{2}$.

Příklad 3. Jde-li o řešení exponenciálních rovnic o dvou neznámých

$$1)\quad 3^x \cdot 4^y = 15552,$$
$$2)\quad 4^x \cdot 5^y = 128000,$$

logarithmujme je. Tím nabudeme rovnic algebraických

$$x \log 3 + y \log 4 = \log 15552,$$
$$x \log 4 + y \log 5 = \log 128000,$$

z nichž vyplývá

$$x = \frac{\log 15552 \cdot \log 5 - \log 128000 \cdot \log 4}{\log 3 \cdot \log 5 - \log^2 4} = 5$$

a $$y = \frac{\log 3 \cdot \log 128000 - \log 4 \cdot \log 15552}{\log 3 \cdot \log 5 - \log^2 4} = 3.$$

K těmto výsledkům dospějeme též rozložíce čísla 15552 a 128000 na jich prvočinitele.

2) Rovnici, v níž jest logarithmus neznámé nebo výrazu na ní závislého, jmenujeme rovnicí *logarithmickou.*

Abychom logarithmickou rovnici rozřešili, hleďme najíti a rozřešiti rovnici, z níž daná rovnice vznikne logarithmováním. Kořen této nové rovnice jest i kořenem rovnice dané.

Příklad. 1. Vypočísti jest x z rovnice $2 \log (x+1) - \log a = 2 \log x.$

Poněvadž jest $2 \log (x+1) = \log (x+1)^2$, $2 \log x = \log x^2$

a $\log (x+1)^2 - \log a = \log \frac{(x+1)^2}{a}$, lze danou rovnici psáti ve tvaru

$$\log \frac{(x+1)^2}{a} = \log x^2, \text{ z níž jde dle věty 2. v § 107.}$$

$$\frac{(x+1)^2}{a} = x^2.$$

Oddvojmocnice obě strany této rovnice, obdržíme

po prvé $\frac{x+1}{\sqrt{a}} = x$ a po druhé $\frac{x+1}{\sqrt{a}} = -x$. Z první rovnice jde

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}-1} \text{ a z druhé } x = \frac{-1}{\sqrt{a}+1}.$$

Rovnice exponenciální a logarithmické náležejí k rovnicím transcendentním. (§ 70).

Část jedenáctá.

O rovnicích stupně druhého a vyššího.

Rovnice stupně druhého (kvadratické) o jedné neznámé.

§ 114. Vysvětlení.

Normálný tvar rovnice kvadratické o jedné neznámé jest

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kdež a, b a c jsou jakákoli čísla z řady čísel reálných. Jsou-li tato čísla racionálná, lze rovnici kvadratickou učiniti vždy zlomků prostou (§ 69., 2.), aniž se její kořeny změní.

Schází-li v rovnici kvadratické člen s první mocninou neznámé, t. j. je-li $b = 0$, tato rovnice nabývá tvaru

$$ax^2 + c = 0$$

a zove se rovnicí kvadratickou *ryzí* (prostou).

Na rozdíl od ní jmenujeme rovnici kvadratickou, v níž jest i člen s prvni mocninou neznámé, rovnicí kvadratickou *smíšenou* (úplnou).

§. 115. Jak řešíme ryzí rovnici kvadratickou.

Z rovnice $ax^2 + c = 0$ (1)

jde, že $ax^2 = -c$, tedy $x^2 = -\frac{c}{a}$

a $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. (2)

Z rovnice 2. jest zřejmo:

1) *Rovnice kvadratická ryzí má dva co do absolutní hodnoty stejné, ale protivně označené kořeny.*

Abychom tyto kořeny od sebe rozeznali, označíme jeden x_1 a druhý x_2.

Že oba kořeny x_1 a x_2 vyhovují rovnici 1., plyne již z řešení samého, ale přesvědčíme se o tom též, vložíce jich hodnoty do této rovnice.

2) *Kořeny* $\mathbf{x_1}$ *a* $\mathbf{x_2}$ *jsou oba* $\begin{matrix}\textit{reálné,}\\ \textit{ryze imaginárné,}\end{matrix}$ *jsou-li* $\mathbf{c}$ *a* $\mathbf{a}$ $\begin{matrix}\textit{nestejn}\\ \textit{stejně}\end{matrix}$ *označeny.*

3) Je-li $c = 0$ a $a \gtrless 0$, jest $x_1 = x_2 = 0$, což plyne i z rovnice $ax^2 - c = 0$, která v tomto případě nabývá tvaru $ax^2 = 0$, z něhož jde, že $x = 0$.

Oba kořeny splynou v tomto případě v jediný.

§ 116. Jak řešíme rovnici kvadratickou smíšenou.

1) Při rovnici kvadratické smíšené

$$ax^2 + bx + c = 0$$

rozeznávejme dva případy:

Buď jest a) $c = 0$ anebo jest b) $c \gtrless 0$.

Případ a). Rovnice kvadratická má tu tvar

$$ax^2 + bx = 0 \text{ čili } x(ax + b) = 0.$$

Tato rovnice žádá, aby součin byl roven 0. Tomu bude vyhověno po prvé, je-li $x = 0$ a po druhé, je-li $ax + b = 0$, t. j. $x = -\frac{b}{a}$.

Vyhovují tudíž dané rovnici dvě hodnoty x, a to

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Poznámka. Kdykoli v rovnici libovolného stupně schází člen absolutní, vždy jest aspoň jedním jejím kořenem 0. Neboť položením 0 za neznámou všecky její členy nabudou hodnoty 0 a vznikne stejnina

$$0 = 0.$$

Případ b). Není-li c rovno 0, má smíšená rovnice kvadratická tvar

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1$$

Dělíce tuto rovnici číslem a, obdržíme

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \text{ čili } x^2 + px + q = 0,$$

kdež p a q jsou jakákoli čísla z řady číselné. Tento tvar jmenujeme *redukovaným* tvarem rovnice kvadratické.

Přičtěme k levé i pravé straně této rovnice výraz $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, který tvoří se členy $x^2 + px$ dvojmoc dvojčlenu $x + \frac{p}{2}$. Tím nabude ona rovnice tvaru

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\text{čili } \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q,$$

$$\text{z níž jde } x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\text{a tudíž } x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \qquad (2)$$

V tomto vzorci obsaženy jsou dva kořeny, a to

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Že obě tyto hodnoty vyhovují rovnici dané, jest patrno již z řešení samého, ale můžeme se o tom též přesvědčiti, vložíce tyto hodnoty za x do oné rovnice. Nabudeme tím pokaždé stejniny $0 = 0$.

Srovnajíce vzorec $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ s rovnicí $x^2 + px + q = 0$, seznáme pravidlo:

Ve kvadratické rovnici tvaru redukovaného hodnota neznámé x jest rovna polovině součinitele první mocniny neznámé s protivným znaménkem.

vzaté více méně (±) *odmocnině ze čtverce této poloviny zvětšené o absolutní člen rovnice, vzatý taktéž se znaménkem protivným* (t. j. s takovým, jaký by měl na pravé straně rovnice).

Na př. z rovnice $x^2 - 8x + 15 = 0$ obdržíme

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{4^2 - 15},$$
$$x_{1,2} = 4 \pm 1, \text{ t. j.}$$
$$x_1 = 5, \; x_2 = 3.$$

2) Vložíme-li do 2. vzorce $\frac{b}{a}$ za p a $\frac{c}{a}$ za q, jak bylo původně, obdržíme po krátkém zjednodušení pro kořeny rovnice kvadratické

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{3}$$

vzorec

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{4}$$

Položíce v tomto vzorci $b = 0$, obdržíme

$$x = \frac{\pm\sqrt{-4ac}}{2a} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

jakožto kořeny rovnice ryze kvadratické $ax^2 + c = 0$, a položíme-li $c = 0$, nabudeme vzorce

$$x = \frac{-b \pm b}{2a}, \text{ t. j. } x_1 = 0 \text{ a } x_2 = -\frac{b}{a},$$

pro kořeny rovnice $ax^2 + bx = 0$.

Jest důležito prozkoumati ještě, jakých hodnot nabudou kořeny rovnice 3. pro $a = 0$.

Položíme-li ve 4. vzorci $a = 0$, obdržíme

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2}}{0} = \frac{0}{0}$$

a

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2}}{0} = -\frac{2b}{0} = \infty.$$

Abychom určili i hodnotu kořene x_1, která tuto jest vyjádřena neurčitým výrazem $\frac{0}{0}$, položme ve 3. rovnici $a = 0$. Tím povstane rovnice

$$bx + c = 0, \text{ t. j. } x = -\frac{c}{b},$$

čímž jest určena hodnota kořene prvního.

Že pro $a = 0$ jeden kořen rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ roven jest $-\frac{c}{b}$ a druhý číslu nekonečně velkému, lze poznati i takto:

Přetvořme vzorec 4. násobíce čitatele i jmenovatele zlomku, který jest na pravé straně tohoto vzorce, výrazem $-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}$. Tím x nabývá tvaru

$$x = \frac{(-b \pm \sqrt{b^2-4ac})(-b \mp \sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b \mp \sqrt{b^2-4ac})} = \frac{b^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{2a(-b \mp \sqrt{b^2-4ac})} =$$
$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a(-b \mp \sqrt{b^2-4ac})} = \frac{4ac}{2a(-b \mp \sqrt{b^2-4ac})},$$

a krátíme-li $2a$, obdržíme konečně

$$x = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2-4ac}}.$$

Kořeny v tomto vzorci obsažené jsou

$$x_1 = \frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}} \text{ čili } x_1 = -\frac{2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}},$$
$$x_2 = \frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}} \text{ „ } x_2 = -\frac{2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Z těchto vzorců jest patrno, že pro $a=0$

$$\text{jest } x_1 = -\frac{2c}{b+\sqrt{b^2}} = -\frac{c}{b}$$
$$\text{a } x_2 = -\frac{2c}{b-\sqrt{b^2}} = -\frac{2c}{0} = \infty.$$

Dokažte tyto věty:

1) Rovnice $ax^2+bx+c=0$ a $ax^2-bx+c=0$ mají co do absolutní hodnoty stejné, ale protivně označené kořeny.

2) Kořeny rovnice $ax^2+bx+c=0$ jsou převrácenými hodnotami kořenů rovnice $a+by+cy^2=0$.

Jak z věty té vyplývá, že pro $a=0$ jeden kořen rovnice 1. nabývá hodnoty nekonečně velké?

§ 117. Vlastnosti kořenů rovnice kvadratické.

1) Ze vzorce

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

pro kořeny rovnice kvadratické $x^2+px+q=0$ (1)
vysvítá:

Kořeny rovnice 1. jsou *reálné a různé,* *reálné splývající,* *imaginárné a různé,* *je-li* $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \gtreqless 0.$

V prvním případě jest totiž číslo $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ reálné, ve druhém rovno jest 0 a ve třetím jest ryze imaginárné. Kořeny x_1 a x_2 jsou v posledním případě *sdruženými čísly soujemnými* (§ 102.). Výraz $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ jmenujeme *discriminantem* rovnice 1.

Poněvadž $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ jest číslo kladné (pokud p jest reálné), nastane první případ vždy, je-li samostatný člen q záporný, neboť potom jest $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ součtem dvou čísel kladných a ten jest vždy kladný.

Je-li samostatný člen rovnice 1. kladný, mohou nastati všecky tři případy, neboť $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ jest potom rozdílem dvou kladných čísel a ten může býti $\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} 0$.

Ve případě druhém jest $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$, t. j. $q = \left(\frac{p}{2}\right)^2$.

Vložíce za q tuto hodnotu do rovnice 1., obdržíme

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 0 \text{ čili } \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0,$$

t. j.: *Má-li rovnice kvadratická tvaru redukovaného splývající kořeny, jest levá její strana dvojmocí.*

Naopak zase jest patrno, že *rovnice kvadratická má splývající kořeny, je-li levá její strana po uvedení na nullu dvojmocí.* Neboť z rovnice $(ax+b)^2=0$, kterou lze psáti i ve tvaru $(ax+b)(ax+b)=0$, jde, že jí bude vyhověno

po prvé, jest-li první činitel roven nulle, t. j. $ax+b=0$ čili $x=-\frac{b}{a}$

a po druhé „ druhý „ „ „ „ $ax+b=0$ „ $x=-\frac{b}{a}$.

Obdržíme tudíž pro rovnici $(ax+b)^2=0$ dva stejné kořeny.

Poznámka. Rovnice $ax^2+bx+c=0$ má kořeny $\begin{matrix}\textit{reálné různé},\\ \textit{reálné splývající},\\ \textit{imaginárné různé},\end{matrix}$

jest-li $b^2-4ac \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} 0$. (§ 116., 2.)

Výraz b^2-4ac jest tu *discriminantem* rovnice kvadratické.

2) *Součet kořenů rovnice kvadratické tvaru redukovaného roven jest součiniteli při první mocnině neznámé vzatému se znaménkem protivným.*

Důkaz.

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$x_1 + x_2 = -p, \text{ jak jsme tvrdili.}$$

3) *Součin kořenů rovnice kvadratické tvaru redukovaného roven jest jejímu členu samostatnému.*

Důkaz.

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$x_1 x_2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left[\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right]^2 =$$

$$= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right] = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = q,$$

jak bylo tvrzeno.

Poznámka. Rovnice $x_1 + x_2 = -p$ a $x_1 x_2 = q$
lze psáti $(-x_1) + (-x_2) = p$ a $(-x_1)(-x_2) = q$, z čehož jest patrna věta:

Součet / Součin kořenů rovnice kvadratické tvaru redukovaného vzatých s protivnými znaménky roven jest součiniteli při první mocnině neznámé. / členu samostatnému.

4) Jsou-li kořeny rovnice $x^2 + px + q = 0$ reálné, lze na základě vět 2. a 3. poznati, jsou-li kladné nebo záporné.

Jsou-li m a n čísla absolutní, jsou v rovnici $x^2 + px + q = 0$ obsaženy tyto případy:

1) $x^2 + mx + n = 0,$
2) $x^2 - mx + n = 0,$
3) $x^2 + mx - n = 0,$
4) $x^2 - mx - n = 0.$

Z věty 3. jde, že v 1. a 2. případě jsou oba kořeny x_1 a x_2 *souhlasné*, ve 2. a 3. případě *nesouhlasné*,

neboť v 1. a 2. případě jest $x_1 x_2 = +n$
a v 3. a 4. „ „ $x_1 x_2 = -n.$

Poněvadž dále v 1. případě $x_1 + x_2 = -m$, jsou tu *oba* kořeny *záporné*,
v 2. „ $x_1 + x_2 = +m$, t. j. *oba* kořeny jsou *kladné*,
v 3. „ $x_1 + x_2 = -m$, „ kořen, jehož absolutní hodnota jest větší, jest *záporný* a
ve 4. „ $x_1 + x_2 = +m$, t. j. kořen, jehož absolutní hodnota jest větší, jest *kladný*.

Srovnáme-li tyto výsledky se znaménky členů v rovnicích 1., 2., 3. a 4., seznáváme pro reálné kořeny rovnice kvadratické pravidlo:

Rovnice kvadratická $x^2 + px + q = 0$ má tolik kořenů kladných, záporných, kolik její znaménka měn. / shod.

Měnou / Shodou jest tu soustava dvou po sobě jdoucích znamének různých. / stejných.

Na př. rovnice $+x^2-5x+6=0$ má reálné kořeny, a to *oba kladné*, neboť jsou v ní *dvě měny* znamének,

„ $+x^2+5x+6=0$ má reálné kořeny, a to *oba záporné*, neboť jsou v ní *dvě shody* znamének,

„ $+x^2+5x-6=0$ má reálné kořeny, a to *jeden kladný* a *jeden záporný*, neboť jest v ní *jedna měna* a *jedna shoda* znamének,

„ $+x^2-5x-6=0$ má reálné kořeny, a to *jeden kladný* a *jeden záporný*, neboť jest v ní *jedna měna* a *jedna shoda* znamének.

5) Jsou-li x_1, x_2 kořeny rovnice $x^2+px+q=0$, lze dle věty 2. položiti za p výraz $-(x_1+x_2)$ a za q výraz $x_1 x_2$. Tím jest

$$x^2+px+q=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=$$
$$=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=(x-x_1)(x-x_2).$$

Nazveme-li výrazy $x-x_1$ a $x-x_2$ *kořenovými činiteli* rovnice

$$x^2+px+q=0,$$

jest v předcházejícím výsledku obsažena věta: *Levá strana rovnice*

$$x^2+px+q=0$$

rovna jest součinu kořenových činitelů této rovnice.

Na základě této věty lze a) sestaviti snadno rovnici kvadratickou, která má dané kořeny, a b) rozložiti pro x kvadratický trojčlen x^2+px+q v činitele pro x lineárné (§ 34., d).

Tak na př. jest

rovnice kvadratická, jejíž kořeny jsou 3 a 4, ... $(x-3)(x-4)=0$ čili $x^2-7x+12=0$.

„ „ „ „ „ 1 a -2, ... $(x-1)(x+2)=0$ „ $x^2+x-2=0$

Jde-li dále na př. o rozklad trojčlenu $x^2-10x+21$ v lineárné činitele, rozřešme rovnici $x^2-10x+21=0$. Tím nabudeme kořenů $x_1=7$ a $x_2=3$, načež jest

$$x^2-10x+21=(x-7)(x-3).$$

Je-li rozložiti trojčlen ax^2+bx+c v činitele pro x lineárné, pišme jej nejprve ve tvaru $a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ a rozložme způsobem zprvu vytčeným trojčlen $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ v lineárné činitele. Znásobíme-li součin činitelů tím nabytých číslem a, jsme u cíle.

Na př. pro trojčlen $6x^2+7x-20$ obdržíme nejprve $6x^2+7x-20=6\left(x^2+\frac{7}{6}x-\frac{20}{6}\right)$

Potom rozřešme rovnici $x^2+\frac{7}{6}x-\frac{20}{6}=0$, z níž jde $x_1=\frac{4}{3}$ a $x_2=-\frac{5}{2}$.

Jesti tudíž $x^2+\frac{7}{6}x-\frac{20}{6}=\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)$

a $6x^2+7x-20=6\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)=(3x-4)(2x+5)$.

Příklady na řešení rovnic kvadratických.

Příklad 1.

$$\frac{x+11}{x+3}=\frac{2x+1}{x+5}.$$

Násobíme-li tuto rovnici součinem $(x+3)(x+5)$ a uvedeme-li ji potom na 0 (§ 69., 3. a 1.), obdržíme rovnici $x^2-9x-52=0$, která má kořeny $x_1=13$ a $x_2=-4$.

Příklad 2.

$$2x-\sqrt{2x-1}=x+2.$$

Dle § 103. 8) dáme této rovnici nejprve podobu $\sqrt{2x-1}=x-2$, z níž jde zdvojmocněním a uvedením na 0 rovnice $x^2-6x+5=0$, která má kořeny $x_1=5$ a $x_2=1$. Zkoumáme-li, zdali oba kořeny vyhovují dané rovnici, shledáme, že jí vyhovuje jen kořen $x_1=5$, pokud přihlížíme pouze k absolutní hodnotě $\sqrt{2x-1}$. (§ 103., 8a.)

Jinak bylo lze řešiti danou rovnici takto: Položme $\sqrt{2x-1}=y$, tudíž $2x-1=y^2$, z čehož $x=\frac{y^2+1}{2}$. Tím rovnice daná nabude podoby $y^2-2y-3=0$, z níž jde $y_1=3$, $y_2=-1$. Vložíce tyto hodnoty do rovnice substituční, obdržíme po prvé $x_1=5$ a po druhé $x_2=1$.

Příklad 3.

$$\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{15x+4}.$$

Zdvojmocněním této rovnice a osamotněním zbývající oddvojmoci (§ 103., 8c) tato rovnice nabývá podoby $\sqrt{(4x-3)(5x+1)}=3x+3$. Z ní jde zdvojmocněním a uvedením na 0 rovnice $11x^2-29x-12=0$ s kořeny $x_1=3$ a $x_2=-\frac{4}{11}$, z nichž jen první vyhovuje rovnici dané, přihlížíme-li pouze k absolutním hodnotám odmocnin v ní se vyskytujících.

Příklad 4.

$$\sqrt[3]{60-x}+\sqrt[3]{x-11}=\sqrt[3]{4}.$$

Ztrojmocníce tuto rovnici a pokračujíce dle příkladu 8d) v § 103., obdržíme rovnici $\sqrt[3]{4(60-x)(x-11)}=-15$, z níž jde ztrojmocněním a uvedením na 0 rovnice $x^2-71x-\frac{735}{4}=0$, která má kořeny $x_1=73\frac{1}{2}$ a $x_2=-2\frac{1}{2}$.

Příklad 5. Abychom určili hodnotu výrazu $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$, který postupuje do nekonečna, uvažme, že část po první dvojce následující jest zase x. Platí tudíž rovnice $x=\sqrt{2+x}$, jejímž řešením obdržíme $x_1=2$ a $x_2=-1$. Přihlížíme-li jen k absolutní hodnotě $\sqrt{2+x}$, vyhovuje rovnici $x=\sqrt{2+x}$ jen kořen první.

Poznámka. K témuž výsledku lze dospěti i takto: Jest známo, že strana čtverce do kružnice o poloměru r vepsaného jest $r\sqrt{2}$, strana osmiúhelníku $r\sqrt{2-\sqrt{2}}$, šestnáctiúhelníku $r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ a všeobecně strana 2^núhelníku $r\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}}_{(n-1)\text{krát}}$. Pro $n=\infty$ rovná se strana pravidelného mnohoúhelníku do kruhu vepsaného nulle, z čehož jde, že v tomto případě musí býti

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ldots}}}}=0 \text{ a tudíž } \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}=2.$$

Příklad 6. Budiž určena hodnota řetězce periodického.

a) Perioda začínej se členem prvním.

$$X=a_0+1/a_1+1/a_2+\ldots.1/a_k+1/a_0+1/a_1\ldots.1/a_k+1/a_0\ldots.$$

Poněvadž řetězec po první periodě následující jest týž, jako řetězec původní, máme rovnici $X=a_0+1/a_1+1/a_2+\ldots.1/a_k+1/X$.

Označíme-li $(k-1)^{ní}$ a k^{tou} sblíženou hodnotu daného řetězce

$$\frac{C_{k-1}}{J_{k-1}} \text{ a } \frac{C_k}{J_k},$$

jest dle § 78..... $X = \frac{XC_k + C_{k-1}}{XJ_k + J_{k-1}}$, ze kteréž rovnice stupně 2^{ho} vyplývá

$$X_{1,2} = \frac{1}{2J_k}\left[C_k - J_{k-1} \pm \sqrt{(C_k - J_{k-1})^2 + 4C_{k-1}J_k}\,\right].$$

Předpokládáme-li, že podíly daného řetězce jsou čísla kladná, jest i jeho hodnot kladná a tudíž jest nám voliti ve výraze pro X jen znaménko hoření.

Jesti tedy $X = \frac{1}{2J_k}\left[C_k - J_{k-1} + \sqrt{(C_k - J_{k-1})^2 + 4C_{k-1}J_k}\,\right]$.

Uveďte odmocněnce ve výraze pro X na jiný tvar užijíce rovnice

$$C_{k-1}J_k - C_kJ_{k-1} = (-1)^k.$$

Ustanovte hodnotu periodického řetězce

$$1/a_1 + 1/a_2 .... 1/a_k + 1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 .... 1/a_k + 1/a_1 + ...$$

b) Perioda začínej se článkem $(r+1)^{ním}$.

$$X = a_0 + 1/a_1 + 1/a_2 + ... 1/a_r \underbrace{+ 1/a_{r+1} + 1/a_{r+2} + ... 1/a_{r+k}}_{\text{perioda}} + 1/a_{r+1} + ... \quad (1)$$

Položme $Y = a_{r+1} + 1/a_{r+2} + ... 1/a_{r+k} + 1/a_{r+1} + 1/a_{r+2} + ... \quad (2)$

Potom jest $= c_0 + 1/a_1 + 1/a_2 + ... 1/a_r + 1/Y.$

Označíme-li všeobecně $\frac{C_k}{J_k}$ k^{tou} sblíženou hodnotu řetězce v rovnici 1.), jest jak

v a) $$X = \frac{YC_r + C_{r-1}}{YJ_r + J_{r-1}}. \quad (3)$$

Poněvadž periodičnosť řetězce Y začíná se prvním členem, jest dle a)

$$Y = \frac{1}{2J'_k}\left[C'_k - J'_{k-1} + \sqrt{(C'_k - J'_{k-1})^2 + 4C'_{k-1}J'_k}\,\right], \quad (4)$$

kdež $\frac{C'_{k-1}}{J'_{k-1}}$ a $\frac{C'_k}{J'_k}$ značí $(k-1)^{ní}$ a k^{tou} sblíženou hodnotu řetězce Y.

Dosadíce hodnotu za Y z rovnice 4. do 3., obdržíme X.

Srovnej s těmito výsledky § 99., 7.

Ustanovte hodnotu periodického řetězce

$$X = 1/a_1 + 1/a_2 + ... 1/a_r + \underbrace{1/a_{r+1} + 1/a_{r+2} + ... 1/a_{r+k}}_{\text{perioda.}} + 1/a_{r+1} + 1/a_{r+2} + ...$$

Příklad 7. Některé rovnice exponenciální lze převésti logarithmováním na kvadr tické, na př. rovnici

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\sqrt[x]{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{3^{3x-4}}.$$

Logarithmujíce tuto rovnici, obdržíme

$$(x-1)(log\,3 - log\,4) + \frac{1}{x}(log\,4 - log\,3) = -log\,2 + \frac{3x-4}{4}\,log\,3.$$

Označíme-li v této rovnici pro krátkosť $log\ 3$ písmenem a a $log\ 2$ písmenem b upravíme-li ji, nabudeme rovnice $x^2 - \frac{12b}{8b-a}x - \frac{4(2b-a)}{8b-a} = 0,$

z níž jde $$x_{1,2} = \frac{6b \pm \sqrt{36b^2 + 4(2b-a)(8b-a)}}{8b-a} = \frac{6b \pm (10b-2a)}{8b-a}.$$

Jesti tedy $x_1 = 2$ a $x_2 = \frac{-4b+2a}{8b-a} = -1{\cdot}48893...$

Rovnice, jež lze řešiti na základě rovnic kvadratických.

§ 118. O rovnicích převratných (reciprokých).

Rovnice reciproké jsou dvojího druhu.

K $\begin{matrix}\text{prvému}\\ \text{druhému}\end{matrix}$ druhu náležejí všeobecně rovnice stupně n^{ho}, v nichž mimo členy tvaru $\lambda_r x^r$, přicházejí vždy ještě členy tvaru $\begin{matrix}\lambda_r x^{n-r}.\\ -\lambda_r x^{n-r}.\end{matrix}$

Podle toho jsou a) rovnice reciproké stupně třetího

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0,$$
$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0;$$

b) rovnice reciproké stupně čtvrtého:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0,$$
$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0.$$

Že první z rovnic b) vyhovuje definici rovnic reciprokých, vysvitne, píšeme-li člen cx^2 ve tvaru $\frac{c}{2}x^2 + \frac{c}{2}x^2$.

V rovnici druhé nesmí býti člen cx^2, neboť rovnice ta jest toho druhu, že ke každému členu $\lambda_r x^r$ řadí se člen $-\lambda_r x^{n-r}$ a náležel by tudíž ke členu cx^2 člen $-cx^2$, kteréžto členy se ruší.

Podobně jsou c) rovnice reciproké stupně pátého:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0,$$
$$ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0,$$

d) stupně šestého:

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0,$$
$$ax^6 + bx^5 + cx^4 - cx^2 - bx - a = 0,$$

o nichž sluší totéž poznamenati co o rovnicích stupně 4. a t. d.

Při tom značí $a, b, c, d \ldots$ čísla kladná nebo záporná.

Název *„rovnice převratné“* vyplývá z této věty:

Je-li číslo ξ kořenem rovnice převratné, jest i číslo $\frac{1}{\xi}$ jejím kořenem.

Důkaz. Vytkneme-li z každých dvou členů, které jsou v definici vytčeným způsobem spolu sdruženy, společného jich součinitele, bude se rovnice reciproká skládati ze součtu dvojin tvaru $\lambda_r(x^r \pm x^{n-r})$. Užijeme-li písmeny Σ, jakožto znaménka pro součet, lze danou rovnici napsati zkráceně

$$\Sigma\lambda_r(x^r \pm x^{n-r}) = 0, \qquad (1)$$

při čemž r značí kladné číslo celé, které může nabyti hodnot od 0 do n.

Poněvadž jest ξ kořenem rovnice 1., jest

$$\Sigma\lambda_r(\xi^r \pm \xi^{n-r}) = 0. \qquad (2)$$

Vložíme-li do levé strany rovnice 1. za x hodnotu $\frac{1}{\xi}$, nabude každá dvojina tvaru

$$\lambda_r\left(\frac{1}{\xi^r} \pm \frac{1}{\xi^{n-r}}\right) \text{ čili } \pm\lambda_r \frac{\xi^r \pm \xi^{n-r}}{\xi^n}$$

a tudíž celá levá strana bude míti tvar

$$\Sigma \pm \lambda_r \frac{\xi^r \pm \xi^{n-r}}{\xi^n},$$

čili, poněvadž znaménka $\pm$ a jmenovatel ξ^n jsou všem dvojinám společny,

$$\pm \frac{\Sigma \lambda_r(\xi^r \pm \xi^{n-r})}{\xi^n}. \tag{3}$$

Budiž poznamenáno, že ξ nerovná se 0, poněvadž v rovnici reciproké jest vždy samostatný člen (pozn. k § 116., 1.).

Dle rovnice 2. jest čítatel zlomku 3. roven 0 a poněvadž, jak právě bylo podotčeno, ξ a tudíž ani ξ^n nulle se nerovná, jest

$$\frac{\pm \Sigma \lambda_r(\xi^r \pm \xi^{n-r})}{\xi^n} = 0.$$

Vložíme-li tudíž do rovnice 1., jejímž kořenem jest číslo ξ, za x hodnotu $\frac{1}{\xi}$, obdržíme z ní stejninu $0 = 0$, z čehož jde, že i $\frac{1}{\xi}$ jest jejím kořenem.

Vykonejte tento důkaz zvláště pro rovnice reciproké 3., 4. a 5. stupně, neužívajíce označení zkráceného.

2) Jde-li a) o řešení rovnice reciproké stupně 3.

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0,$$

pišme ji nejprve ve tvaru $a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0$, v němž za $x^3 + 1$ položiti lze $(x + 1)(x^2 - x + 1)$. Tím nabudeme rovnice

$a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = 0$ čili $(x + 1)[a(x^2 - x + 1) + bx] = 0$.

Této rovnici bude vyhověno po prvé, je-li $x + 1 = 0$, t. j. $x_1 = -1$ a po druhé, je-li $a(x^2 - x + 1) + bx = 0$ čili $x^2 + \frac{b - a}{a} x + 1 = 0$, ze kteréž rovnice jde

$$x_{2,3} = \frac{-(b - a) \pm \sqrt{(b - a)^2 - 4a^2}}{2a} = \frac{a - b \pm \sqrt{(b + a)(b - 3a)}}{2a}.$$

Daná rovnice má tudíž tři kořeny.

Řešíce b) rovnici $ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$, pišme ji nejprve ve tvaru $a(x^3 - 1) + bx(x - 1) = 0$ a potom $a(x - 1)(x^2 + x + 1) + bx(x - 1) = 0$ čili $(x - 1)[a(x^2 + x + 1) + bx] = 0$. Týmž způsobem jako prve obdržíme i tu tři kořeny, a to

$$x_1 = 1,\ x_{2,3} = \frac{-(a + b) \pm \sqrt{(a + b)^2 - 4a^2}}{2a}$$

$$= \frac{-(a + b) \pm \sqrt{(3a + b)(b - a)}}{2a}.$$

Dokažte ve případě a) i b), že jest $x_3 = \frac{1}{x_2}$. Jak to lze poznati ze tvaru rovnice kvadratické, z níž kořeny x_2 a x_3 vznikly?

3) Abychom rozřešili a) rovnici reciprokou stupně 4.

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0,$$

vytkněme nejprve ze členů levé její strany x^2. Tím nabude tvaru

$$x^2\left(ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2}\right) = 0.$$

Poněvadž $x = 0$ není kořenem rovnice dané, nemůže býti x^2 rovno 0 a tudíž jest

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0 \text{ čili } a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0. \quad (1)$$

Rovnici 1. lze převésti na rovnici kvadratickou zavedením nové neznámé, a to

$$y = x + \frac{1}{x}. \quad (2)$$

Abychom vyjádřili i výraz $x^2 + \frac{1}{x^2}$ novou neznámou y, zdvojmocněme rovnici předcházející. Tím vznikne nejprve rovnice $y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, z níž jde $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Užitím tohoto výsledku nabude rovnice 1. tvaru

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0 \text{ čili } y^2 + \frac{b}{a}y + \frac{c - 2a}{a} = 0,$$

$$\text{z níž jde } y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - 2a)}}{2a}.$$

Vložíce po prvé y_1 do rovnice 2., obdržíme

$$x + \frac{1}{x} = y_1 \text{ čili } x^2 - xy_1 + 1 = 0,$$

$$\text{z čehož } x_{1,2} = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4}}{2}.$$

Učiníme-li totéž s y_2, obdržíme $x_{3,4} = \frac{y_2 \pm \sqrt{y_2^2 - 4}}{2}$.

Má tudíž předložená rovnice čtyři kořeny.

Jde-li b) o řešení rovnice $ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$, pišme ji ve tvaru $a(x^4 - 1) + bx(x^2 - 1) = 0$, který lze proměniti v $a(x^2 - 1)(x^2 + 1) + bx(x^2 - 1) = 0$ a konečně v $(x^2 - 1)[a(x^2 + 1) + bx] = 0$.

Této rovnici bude vyhověno po prvé, je-li

$$x^2 - 1 = 0, \text{ tedy } x_{1,2} = \pm 1$$

a po druhé, je-li

$$a(x^2 + 1) + bx = 0 \text{ čili } x^2 + \frac{b}{a}x + 1 = 0,$$

ze kteréž rovnice obdržíme

$$x_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2a}.$$

VEŘEJNÁ A UNIVERSITNÍ KNIHOVNA V PRAZE

Dokažte o kořenech x_1, x_2, x_3 a x_4 rovnic tohoto odst., že jest $x_1 = \frac{1}{x_2}$, $x_3 = \frac{1}{x_4}$. Jak poznati lze tuto vlastnost kořenů na rovnicích kvadratických, z nichž tyto kořeny vyšly?

4) Při řešení rovnic reciprokých stupně 5. počínejme si tak, jako při řešení rovnic stupně 3. Tím obdržíme z rovnice

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

rovnici

$$(x + 1)[ax^4 + (b - a)x^3 + (a - b + c)x^2 + (b - a)x + a] = 0.$$

Této rovnici bude vyhověno po prvé, je-li

$$x + 1 = 0, \text{ t. j. } x = -1$$

a po druhé, je-li

$$ax^4 + (b - a)x^3 + (a - b + c)x^2 + (b - a)x + a = 0.$$

Rovnice tato jest reciproká rovnice stupně 4. Řešíce ji dle 3a), nabudeme dalších čtyř kořenů dané rovnice stupně 5.

Máme tudíž pro tuto rovnici celkem pět kořenů.

Podobně dělí se řešení rovnice

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0$$

na řešení dvou rovnic, a to na řešení lineárné rovnice

$$x - 1 = 0, \text{ z níž jde } x_1 = 1$$

a na řešení reciproké rovnice 4. stupně

$$ax^4 + (a + b)x^3 + (a + b + c)x^2 + (a + b)x + a = 0,$$

z níž obdržíme další čtyři kořeny rovnice dané.

5) Při rovnicích reciprokých *šestého* stupně jest nám přestati na tvaru

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 - cx^2 - bx - a = 0.$$

Rovnici tuto rozřešíme podobným způsobem jako rovnici reciprokou 4. stupně ve případě b).

Spojíce členy se stejnými součiniteli, obdržíme

$$a(x^6 - 1) + bx(x^4 - 1) + cx^2(x^2 - 1) = 0, \text{ čili}$$

$$a(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) + bx(x^2 - 1)(x^2 + 1) + cx^2(x^2 - 1) = 0,$$

$$(x^2 - 1)[ax^4 + bx^3 + (a + c)x^2 + bx + a] = 0.$$

Této rovnici bude vyhověno pro

$$x^2 - 1 = 0, \text{ tedy } x_{1,2} = \pm 1 \text{ a pro}$$

$$ax^4 + bx^3 + (a + c)x^2 + bx + a = 0,$$

ze kteréž reciproké rovnice stupně 4. obdržíme další čtyři kořeny rovnice předložené. Máme tudíž pro tuto rovnici celkem šest kořenů.

Poznámka. Reciprokou rovnici stupně 6.

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \qquad (1)$$

lze uvésti dělením x^3 a spojením členů se stejnými součiniteli na tvar

$$a\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + b\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + c\left(x + \frac{1}{x}\right) + d = 0. \qquad (2)$$

Položíme-li $x+\frac{1}{x}=y$, jest $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$. Znásobením těchto dvou rovnic obdržíme rovnici $x^3+\frac{1}{x^3}+x+\frac{1}{x}=y^3-2y$, z níž obdržíme odečtením rovnice

$$x+\frac{1}{x}=y \text{ rovnici } x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y.$$

Zavedením neznámé y do rovnice 2. nabývá tato rovnice tvaru
$a(y^3-3y)+b(y^2-2)+cy+d=0$ čili $ay^3+by^2+(c-3a)y+d-2b=0$,
kterou dle toho, co dosud jsme poznali, řešiti nedovedeme.

§ 119. O rovnicích binomických.

1) Každá rovnice, již lze uvésti na tvar $ax^n+b=0$, jest rovnicí *binomickou*.

Rovnice lineárná $ax+b=0$ a rovnice ryze kvadratická $ax^2+b=0$ jsou zvláštním případem rovnic binomických.

Dělíme-li rovnici $ax^n+b=0$ číslem a, nabývá tvaru $x^n+\frac{b}{a}=0$, při čemž $\frac{b}{a}$ jest libovolným číslem z řady číselné.

Jmenujeme-li λ absolutní hodnotu čísla $\frac{b}{a}$, jsou v rovnici $x^n+\frac{b}{a}=0$ obsaženy dva případy, a to $x^n+\lambda=0$ a $x^n-\lambda=0$.

Zavedeme-li do těchto rovnic novou neznámou y, která souvisí s neznámou x rovnicí $x=\varrho.y$, při čemž ϱ značí absolutní hodnotu $\sqrt[n]{\lambda}$ (§ 97., 6. a 7.), ony rovnice nabývají tvaru

$$(\varrho.y)^n+\lambda=0, \text{ čili, poněvadž } \varrho^n=\lambda,\ y^n+1=0,$$
$$(\varrho.y)^n-\lambda=0 \quad „ \quad „ \quad \varrho^n=\lambda,\ y^n-1=0.$$

Řešení rovnice $ax^n+b=0$ jest tu převedeno na řešení jednodušší rovnice binomické $y^n+1=0$ nebo $y^n-1=0$.

Obě tyto rovnice binomické jsou zároveň rovnicemi *reciprokými* a jako takové dovedeme je řešiti, pokud jest v prvním případě ($y^n+1=0$) $n<6$ a ve druhém ($y^n-1=0$) $n<7$ (§ 118.).

2) Budiž a) řešena rovnice

$$x^3-\lambda=0. \tag{1}$$

Položíme-li, jak ve všeobecném případě vytčeno,

$$x=\varrho y, \tag{2}$$

kdež ϱ značí absolutní hodnotu třetí odmocniny z čísla λ, nabývá rovnice první tvaru

$$y^3-1=0 \tag{3}$$

čili $(y-1)(y^2+y+1)=0$. Této rovnici jest vyhověno po prvé pro

$$y-1=0, \text{ t. j. } y=1$$

a po druhé pro

$$y^2+y+1=0, \text{ z čehož jde } y_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Vložíce tyto hodnoty po sobě za y do rovnice 2., obdržíme

$$x_1=\varrho.1,\ x_2=\varrho\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ x_3=\varrho\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

jakožto kořeny rovnice 1. První z nich jest reálný, ostatní dva jsou *soujemné sdružené*. Že všecky tři vyhovují dané rovnici, vyplývá již z řešení samého, ale i dosazením jich za x do rovnice 1. lze se o tom přesvědčiti.

b) Budiž řešena rovnice

$$x^3+\lambda=0.$$

Týmž způsobem jako ve případě a) nabudeme tří kořenů této rovnice, a to

$$x_1=-\varrho,\ x_2=-\varrho\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\ x_3=-\varrho\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Jeden z nich jest opět reálný a dva jsou *soujemně sdružené*.

c) Případy a) i b) obsaženy jsou v rovnici $x^3\mp\lambda=0$, z níž jde, že $x^3=\pm\lambda$ a tudíž $x=\sqrt[3]{\pm\lambda}$, při čemž $\sqrt[3]{\pm\lambda}$ jest číslo (reálné nebo imaginárné), které umocněno jsouc 3 dá $\pm\lambda$.

Avšak ve případě a) jsme poznali, že jsou tři čísla, která ztrojmocněna jsouce dají λ, a to

$$x_1=\varrho,\ x_2=\varrho\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ a } x_3=\varrho\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

z čehož jde, že výraz $\sqrt[3]{\lambda}$ jest *trojznačný*, a to tak, že

$$\sqrt[3]{\lambda}=\begin{cases}\varrho,\\ \varrho\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2},\\ \varrho\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}.\end{cases}\qquad(1)$$

Podobně jsme poznali ve případě b), že jsou tři čísla, a to

$$-\varrho,\ -\varrho\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \text{ a } -\varrho\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},$$

která ztrojmocněna jsouce dají $-\lambda$. Jest nám tudíž výrazu $\sqrt[3]{-\lambda}$ přikládati tři hodnoty, a to

$$\sqrt[3]{-\lambda}=\begin{cases}-\varrho,\\ -\varrho\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2},\\ -\varrho\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2},\end{cases}\qquad(2)$$

kdež ϱ značí zase absolutní hodnotu třetí odm. z čísla λ. Tedy na př. při $\sqrt[3]{8}$ jest $\varrho=2$, při $\sqrt[3]{1}$ jest $\varrho=1$ atd.

Význam soujemných činitelů $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ poznáme, položíce ve vzorcích 1. číslo $\lambda=1$. Potom jest i $\varrho=1$ a ze vzorců 1. obdržíme

$$\sqrt[3]{1}=\begin{cases}1,\\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

Na základě tohoto výsledku lze psáti vzorce 1. a 2. krátce

$$\sqrt[3]{\lambda}=\varrho\sqrt[3]{1} \quad \text{a} \quad \sqrt[3]{-\lambda}=-\varrho\sqrt[3]{1}.$$

Dokažte větu: Značí-li α jednu z imaginárných hodnot $\sqrt[3]{1}$, lze touž hodnotu vyjádřiti i kterýmkoli členem z řady $\ldots, \frac{1}{\alpha^5}, \frac{1}{\alpha^2}, \alpha, \alpha^4, \alpha^7, \ldots$ a druhou hodnotu imaginárnou $\sqrt[3]{1}$ kterýmkoli členem z řady $\frac{1}{\alpha^7}, \frac{1}{\alpha^4}, \frac{1}{\alpha}, \alpha^2, \alpha^5, \alpha^8, \ldots$

3) Budiž a) řešena rovnice

$$x^4-\lambda=0. \qquad (1)$$

Položíme-li

$$x=\varrho y, \qquad (2)$$

kdež ϱ značí absolutní hodnotu čtvrté odmocniny z λ, nabývá daná rovnice tvaru

$$y^4-1=0 \text{ čili } (y^2+1)(y^2-1)=0,$$

z něhož jde po prvé

$$y^2-1=0, \text{ t. j. } y_{1,2}=\pm 1$$

a po druhé

$$y^2+1=0, \text{ t. j. } y_{3,4}=\pm i.$$

Dosadíce tyto výsledky do rovnice 2., obdržíme

$$x_1=\varrho(+1)=\varrho,\ x_2=\varrho(-1)=-\varrho,\ x_3=\varrho i,\ x_4=-\varrho i$$

jakožto kořeny rovnice 1. Dva z nich jsou reálné a dva ryze imaginárné.

b) Z rovnice $x^4+\lambda=0$ (1)

obdržíme, položíce $x=\varrho y$, (2)

rovnici

$$y^4+1=0 \text{ čili } y^2+\frac{1}{y^2}=0. \qquad (\S\ 118.,\ 3a)$$

Položíme-li $y+\frac{1}{y}=z$, jest $y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2$ a rovnice $y^2+\frac{1}{y^2}=0$ nabývá tím tvaru $z^2-2=0$, z níž jde $z_{1,2}=\pm\sqrt{2}$.

Dosadíce tento výsledek za z do rovnice $y+\frac{1}{y}=z$ a řešíce rovnici tím vzniklou, obdržíme pro y čtyři hodnoty obsažené ve vzorci

$$y=\sqrt{2}\,\frac{\pm 1\pm i}{2}.$$

Užitím tohoto výsledku nabudeme z rovnice 2.

$$x=\varrho\sqrt{2}\,\frac{\pm 1\pm i}{2},$$

ve kterémž vzorci obsaženy jsou čtyři kořeny rovnice 1., a to

$$x_1=\varrho\sqrt{2}\,\frac{1+i}{2},\quad x_2=\varrho\sqrt{2}\,\frac{1-i}{2},\quad x_3=\varrho\sqrt{2}\,\frac{-1+i}{2},\quad x_4=\varrho\sqrt{2}\,\frac{-1-i}{2}.$$

Všecky tyto kořeny jsou soujemné. První dva, jakož i poslední dva jsou sdruženy.

Poznámka. Rovnici $y^4+1=0$ bylo lze řešiti i takto:

Poněvadž jest $y^4+1=(y^2+i)(y^2-i)$, bude oné rovnici vyhověno, 1) je-li $y^2+i=0$, tedy $y_{1,2}=\pm\sqrt{-i}$ a 2) je-li $y^2-i=0$, tedy $y_{3,4}=\pm\sqrt{i}$.

Užijeme-li vzorců 5. v § 102., obdržíme pro y a tudíž i pro x týž jako prve výsledek.

Rozřešte rovnice binomické stupně 4. ve případech a) a b) položíce $x^2=z$.

c) Případy a) a b) obsaženy jsou v rovnici $x^4\mp\lambda=0$, z níž jde $x^4=\pm\lambda$ a tudíž $x=\sqrt[4]{\pm\lambda}$.

Srovnajíce tento výsledek s výsledky v a) a b) nabytými, poznáváme, že jest nám míti výrazy $\sqrt[4]{\lambda}$ a $\sqrt[4]{-\lambda}$ za *čtyřznačné*, a to tak, že

$$\sqrt[4]{\lambda}=\begin{cases}\varrho(+1),\\ \varrho(-1),\\ \varrho(+i),\\ \varrho(-i)\end{cases}\quad\text{a}\quad\sqrt[4]{-\lambda}=\begin{cases}\varrho\sqrt{2}\,\frac{1+i}{2},\\ \varrho\sqrt{2}\,\frac{1-i}{2},\\ \varrho\sqrt{2}\,\frac{-1+i}{2},\\ \varrho\sqrt{2}\,\frac{-1-i}{2},\end{cases}$$

při čemž ϱ značí absolutní hodnotu výrazu $\sqrt[4]{\lambda}$.

Pro $\lambda=1$ obdržíme zvláště

$$\sqrt[4]{1}=\begin{cases}+1,\\ -1,\\ +i,\\ -i\end{cases}\quad\text{a}\quad\sqrt[4]{-1}=\begin{cases}\sqrt{2}\,\frac{1+i}{2},\\ \sqrt{2}\,\frac{1-i}{2},\\ \sqrt{2}\,\frac{-1+i}{2},\\ \sqrt{2}\,\frac{-1-i}{2}.\end{cases}$$

Na základě tohoto výsledku lze první dva vzorce psáti

$$\sqrt[4]{\lambda}=\varrho\sqrt[4]{1} \text{ a } \sqrt[4]{-\lambda}=\varrho\sqrt[4]{-1}.$$

4) Z rovnice a) $x^5-\lambda=0$ obdržíme, položíce $x=\varrho y$, při čemž ϱ značí absolutní hodnotu výrazu $\sqrt[5]{\lambda}$, rovnici

$$y^5-1=0 \text{ čili } (y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)=0,$$

které bude vyhověno po prvé pro

$$y-1=0, \text{ tedy } y_1=1$$

a po druhé pro

$$y^4+y^3+y^2+y+1=0.$$

Z této reciproké rovnice stupně 4. vyplývají kořeny

$$y_{2,3}=\frac{-1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4} \text{ a } y_{4,5}=\frac{-1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}.$$

Z toho jde

$$x_1=\varrho,\ x_{2,3}=\varrho\cdot y_{2,3} \text{ a } x_{4,5}=\varrho\cdot y_{4,5}.$$

Podobně obdržíme ve případě b) pro rovnici $x^5+\lambda=0$ kořeny

$$x_1=-\varrho,\ x_{2,3}=-\varrho\,\frac{-1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$$

$$\text{a } x_{4,5}=-\varrho\,\frac{-1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}.$$

V obou případech jest jediný kořen reálný, ostatní pak jsou soujemné a to po dvou sdružené.

c) Případy a) a b) obsaženy jsou v rovnici $x^5\mp\lambda=0$, z níž jde $x=\sqrt[5]{\pm\lambda}$. Jako v odstavci 2. a 3. poznáme, že $\sqrt[5]{\pm\lambda}$ přikládati jest *pět* hodnot, z nichž jediná jest reálná (§ 97., 6.), ostatní pak jsou soujemné a to po dvou sdružené.

Vůbec poznáváme řešením vytčených rovnic binomických větu: *Odmocnina z libovolného čísla má tolik různých hodnot, kolik má její odmocnitel jednotek*, alespoň pro odmocnitele 2, 3, 4 a 5. Její platnosť obecná bude v dodatku dokázána.

Poznámka. Z řešení rovnic binomických jest zřejmo, jak důležito jest přihlížeti při odmocňování rovnic ke mnohoznačnosti odmocnin. Kdybychom na př. nedbali toho, že $\sqrt[3]{8}$ má tři hodnoty a přihlíželi jen k její hodnotě reálné, t. j. 2, obdrželi bychom z rovnice $x^3=8$ odtrojmocněním jediný kořen $x=2$ a řešení bylo by kusé. Dbáme-li mnohoznačnosti kořenův, obdržíme z rovnice $X^2=X_1{}^2$ (v níž X a X_1 značí výrazy obsahující neznámou) oddvojmocněním dvě rovnice, a to $X=X_1$ a $X=-X_1$, z rovnice $X^3=X_1{}^3$ odtrojmocněním tři rovnice, totiž $X=X_1$, $X=\alpha X_1$, $X=\alpha^2 X_1$, při čemž α a α^2 značí imaginárné hodnoty $\sqrt[3]{1}$ a t. d. (Srovnej s tím § 103., 8.).

§ 120. Řešení některých rovnic trinomických.

Na řešení rovnic kvadratických a binomických lze uvésti řešení rovnic trinomických tvaru

$$ax^{2n}+bx^n+c=0. \tag{1}$$

Dostačí tu položiti

$$x^n=y, \tag{2}$$

tudíž

$$x^{2n}=y^2,$$

načež rovnice 1. nabývá tvaru $ay^2+by+c=0$.

Řešením této kvadratické rovnice obdržíme dva kořeny y_1 a y_2. Vložíce tyto hodnoty do rovnice 2., nabudeme dvou rovnic binomických,

$$x^n=y_1,\ x^n=y_2,$$

z nichž vypočteme dle toho, je-li $n=2$, 3, 4 nebo 5, dohromady 4, 6, 8 nebo 10 kořenů pro x.

Podobný tvar mají rovnice

$$a\sqrt[n]{x}+b\sqrt[2n]{x}+c=0 \text{ čili } ax^{\frac{1}{n}}+bx^{\frac{1}{2n}}+c=0,$$

kdež položíme

$$x^{\frac{1}{2n}}=y, \text{ tudíž } x^{\frac{1}{n}}=y^2,$$

načež přejde předložená rovnice v rovnici kvadratickou

$$ay^2+by+c=0,$$

z níž obdržíme dvě hodnoty y_1 a y_2. Vložíce je do rovnice $x^{\frac{1}{2n}}=y$, obdržíme po prvé $x_1=y_1{}^{2n}$ a po druhé $x_2=y_2{}^{2n}$, jakožto kořeny rovnice dané.

Konečně sem náležejí rovnice exponenciální tvaru

$$ap^{2nx}+bp^{nx}+c=0,$$

kdež dostačí položiti

$$p^{nx}=y, \text{ tudíž } p^{2nx}=y^2,$$

aby daná rovnice přešla ve kvadratickou rovnici

$$ay^2+by+c=0.$$

Z této rovnice obdržíme dvě hodnoty y_1 a y_2, a vložíce je do rovnice $p^{nx}=y$, nabudeme dvou rovnic exponenciálních

$$p^{nx}=y_1 \text{ a } p^{nx}=y_2,$$

z nichž jde logarithmováním

$$x_1=\frac{\log y_1}{n\log p} \text{ a } x_2=\frac{\log y_2}{n\log p}.$$

Týmž způsobem jako rovnici

$$ap^{2nx}+bp^{nx}+c=0$$

řešíme i rovnici

$$a\sqrt[nx]{p}+b\sqrt[2nx]{p}+c=0 \text{ čili } ap^{\frac{1}{nx}}+bp^{\frac{1}{2nx}}+c=0.$$

Položíme tu

$$p^{\frac{1}{2nx}} = y,$$

načež daná rovnice nabude tvaru

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Určíce z této rovnice y_1 a y_2, vložíme je do rovnice $p^{\frac{1}{2nx}} = y$, čímž nabudeme dvou rovnic exponenciálních, jež známým způsobem rozřešíme.

Poznámka. Při všech rovnicích algebraických o jedné neznámé, jež dosud jsme řešili, shledali jsme, že počet kořenů rovnice roven jest udavateli jejího stupně. Ve vyšší algebře dokazuje se, že tato vlastnost jest obecnou vlastností rovnic algebraických.

Rovnice stupně druhého i vyššího o dvou i více neznámých.

§ 121. Řešení rovnic kvadratických o dvou i více neznámých.

I) Normálný tvar rovnice kvadratické o dvou neznámých jest

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \quad (1)$$

Členy ax^2, bxy, cy^2 jsou její členy kvadratické, dx a ey lineárné a f jest člen samostatný.

Jedna rovnice stupně druhého nedostačí k určení dvou neznamých, neboť zvolíce za jednu z neznámých libovolnou hodnotu, můžeme druhou neznámou vypočísti: vyhovuje tudíž dané rovnici nekonečné množství hodnot. Z té příčiny budiž dána ještě jedna rovnice o týchž dvou neznámých.

Rovnice tato budiž a) lineárná, b) kvadratická.

a) *Rozřešiti jest soustavu dvou rovnic, z nichž jedna jest kvadratická a druhá lineárná.*

$$1)\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$
$$2)\ mx + ny + p = 0.$$

Užijme k rozřešení těchto dvou rovnic methody substituční.

Z rovnice 2. jde, že

$$y = \frac{-mx - p}{n}. \quad (3$$

Poněvadž y má značiti v obou daných rovnicích totéž číslo neznámé, lze výraz z rovnice 3. položiti za y do rovnice 1. Tím nabudeme rovnice

$$ax^2 + bx\frac{-mx-p}{n} + c\left(\frac{-mx-p}{n}\right)^2 + dx + e\frac{-mx-p}{n} + f = 0,$$

jejímž upravením vznikne rovnice tvaru

$$Ax^2 + Bx + C = 0. \quad (4)$$

Z této rovnice obdržíme pro x dvě hodnoty, které vloženy jsouce do rovnice 3. poskytnou dvě k nim příslušné hodnoty y.

Z toho vychází na jevo:

1) Řešení rovnice kvadratické a lineárné o dvou neznámých lze převésti methodou substituční na řešení rovnice kvadratické (4) o jedné neznámé.

2) Soustavě těchto dvou rovnic vyhovují vždy dva páry kořenů.

Poznámka. Ve zvláštních případech může býti rovnice 4. lineárná. To nastane, je-li $A = 0$. Potom ji lze míti za zvláštní rovnici kvadratickou, jejíž jeden kořen jest nekonečně velký (§ 116., 2.).

Příklad 1. Vypočísti jest x a y z rovnic

$$\begin{array}{rl} 1) & 7(x+5)^2 - 9(y+4)^2 = 118, \\ 2) & x - y = 1. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Z } 2) & x = 1 + y, \\ \text{do } 1) & 7(6+y)^2 - 9(y+4)^2 = 118 \text{ čili } y^2 - 6y + 5 = 0, \end{array} \tag{3}$$

tedy $y_1 = 5$ a $y_2 = 1$. Vložíce tyto hodnoty do 3. obdržíme $x_1 = 6$, $x_2 = 2$.

Příklad 2.

$$\begin{array}{rl} 1) & xy = a^2, \\ 2) & x + y = b. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Z } 2) & y = b - x \\ \text{do } 1) & x(b-x) = a^2 \text{ čili } x^2 - bx + a^2 = 0, \text{ tedy } x_{1,2} = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2} \end{array} \tag{3}$$

$$\text{a z rovnice 3. } y_{1,2} = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}.$$

Jinak lze dospěti k cíli takto:

Zdvojmocníce rovnici druhou a odečtouce od ni čtyřmi násobenou rovnici první, vypočteme $(x-y)^2$ a z toho $x - y$. Ze známého součtu a rozdílu neznámých vypočteme potom snadno obě neznámé.

Konečně budiž vytčeno, že kvadratickou rovnici $x^2 - bx + a^2 = 0$, k níž jsme dospěli při prvním způsobu řešení, bylo lze hned napsati. Neboť dané dvě rovnice žádají, aby byla vyhledána dvě čísla, jichž součet jest roven b a součin roven a^2. Avšak takovými čísly jsou kořeny z_1 a z_2 rovnice kvadratické

$$z^2 - bz + a^2 = 0.$$

Jesti tudíž

$$x = z_1 \text{ a } y = z_2 \text{ nebo } x = z_2 \text{ a } y = z_1.$$

Z této poslední úvahy, jakož i z výsledků dříve pro x_1, y_1, x_2 a y_2 nabytých jest patrno, že

$$\begin{array}{c} x_1 = y_2 \\ \text{a } x_2 = y_1, \end{array} \tag{6}$$

tak že oba páry kořenů x_1, y_1 a x_2, y_2 vyjádřeny jsou týmiž výrazy. Tento zjev není nahodilý, nýbrž má příčinu svou ve zvláštním tvaru daných rovnic.

Ani první ani druhá z těchto rovnic se totiž nezmění, píšeme-li x za y a naopak y za x. Je-li tudíž těmto rovnicím vyhověno pro $x = x_1$ a $y = y_1$, bude jim vyhověno též pro $x = y_1$ a $y = x_1$, t. j., je-li x_1, y_1 jedním párem kořenů daných rovnic, vyhovuje jich druhý pár $x_2 y_2$ rovnicím $x_2 = y_1$ a $y_2 = x_1$.

Rovnici o dvou neznámých, která se nezmění, změníme-li spolu tyto neznámé, jmenujeme *rovnicí souměrnou* (*symmetrickou*).

Obecný tvar souměrné rovnice stupně prvního o dvou neznámých jest

$$ax + ay + b = 0 \text{ čili } a(x+y) + b = 0$$

a souměrné rovnice stupně druhého

$$ax^2 + bxy + ay^2 + cx + cy + d = 0 \text{ čili } a(x^2 + y^2) + bxy + c(x+y) + d = 0.$$

Úvaha pronesená svrchu o kořenech zvláštních rovnic souměrných platí pro každé dvě rovnice souměrné vůbec, t. j. *je-li* $x_1 y_1$ *jedním párem kořenů takových dvou rovnic, tvoří* $x_2 = y_1$ *a* $y_2 = x_1$ *nový pár jich kořenů.*

Příklad 3.

$$1) \quad x^2 + y^2 = a^2,$$
$$2) \quad x + y = b.$$

Buď vyjádříme z druhé rovnice x a vložíme výsledek do rovnice 1. nebo, zdvojmocníce rovnici 2., odečteme od ní rovnici 1. Tím vznikne rovnice

$$2xy = b^2 - a^2,$$

která odečtena jsouc od rovnice 1. poskytne

$$(x-y)^2 = 2a^2 - b^2, \text{ tudíž } x - y = \pm\sqrt{2a^2 - b^2}.$$

Z této rovnice a z rovnice 2. vypočteme x a y.

b) *Rozřešiti jest soustavu dvou rovnic kvadratických o dvou neznámých.*

$$1) \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$
$$2) \quad a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0.$$

Řešení lze provésti takto:

Z některé rovnice, na př. z 2., vyjádříme jednu neznámou, na př. y, neznámou druhou a vložíme výsledek do rovnice 1. Tím nabudeme rovnice o jedné neznámé, již rozřešíme.

Řešení toto jest z té příčiny nepohodlné, že rovnice 2. jest pro y kvadratická, a rozřešíce ji, obdržíme za y hodnotu, v níž přichází odmocnina s odmocněncem závislým na x. Tato odmocnina dostane se dosazením i do rovnice 1. a jest nám ji potom z této rovnice odstraniti.

Chtějíce se vyhnouti tomuto odstraňování odmocnin, pokračujme takto:

Vylučme z 1. a 2. rovnice y^2. K tomu cíli násobme první rovnici c_1, druhou c a potom je odečtěme. Tím dospějeme rovnice tvaru

$$Ax^2 + Bxy + Cx + Dy + F = 0,$$

z níž jde

$$y = -\frac{Ax^2 + Cx + F}{Bx + D}. \tag{3}$$

Vložíce tento výsledek za y do rovnice 1., obdržíme po náležitém upravení rovnici tvaru

$$Mx^4 + Nx^3 + Px^2 + Qx + R = 0. \tag{4}$$

Této rovnici vyhovují čtyři kořeny x_1, x_2, x_3 a x_4 (pozn. k § 120), jichž vložením do rovnice 3. nabudeme čtyř hodnot pro y.

Z tohoto vyšetřování jest patrno:

1) Řešení dvou rovnic kvadratických o dvou neznámých lze převésti na řešení rovnice stupně 4. o jedné neznámé.

2) Soustavě těchto dvou rovnic vyhovují čtyři páry kořenů.

Ve zvláštních případech může přejíti ona rovnice stupně 4. v rovnici stupně nižšího.

Poněvadž jsme neodvodili vzorce pro kořeny obecné rovnice stupně 4., bude nám omeziti se při řešení rovnic kvadratických o dvou neznámých na některé případy zvláštní. Budou to případy:

α) v nichž rovnice 4. jest takové podoby, že ji dovedeme řešiti,

β) v nichž zavedením nových neznámých aneb jinými umělými obraty podaří se nám převésti dané rovnice na jiné, jež řešiti dovedeme.

Příklad 1. Rozřešiti jest dle x a y soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} &1) \quad x^2 + y^2 = a^2, \\ &2) \quad xy = b^2. \end{aligned}$$

Ze 2) $$y = \frac{b^2}{x}, \quad \ldots\ldots (3)$$

do 1) $$x^4 - a^2x^2 + b^4 = 0.$$

Z této rovnice obdržíme

$$x^2 = \frac{a^2 + \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2},$$

tedy $$x = \pm \sqrt{\frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2}}.$$

V tomto vzorci obsaženy jsou čtyři kořeny, a to

$$x_1 = \sqrt{\frac{a^2 + \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2}}, \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{a^2 + \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2}},$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{a^2 - \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2}}, \qquad x_4 = -\sqrt{\frac{a^2 - \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2}},$$

k nimž náležejí čtyři hodnoty y, jež vypočteme z rovnice 3.

Jinak rozřešíme tyto rovnice připočtouce po prvé a odečtouce po druhé dvěma násobenou rovnici druhou od rovnice první. Tím nabudeme nejprve $(x + y)^2$ a $(x - y)^2$, z čehož určíme $x + y$ a $x - y$ a potom x a y.

Příklad 2. Vyskytují-li se v obou rovnicích po náležitém jich upravení jen dvojmoci neznámých, vede řešení takových rovnic vždy na rovnici kvadratickou o jedné neznámé.

Neboť takové dvě rovnice mají tvar

$$ax^2 + by^2 = c,$$
$$a_1x^2 + b_1y^2 = c_1,$$

a vyjádříce ze kterékoli této rovnice dvojmoc jedné neznámé a vložíce výsledek tím nabytý do rovnice 2., obdržíme rovnici kvadratickou.

Příklad 3. Je-li jedna z daných rovnic *stejnoměrná* (§ 70.), vypočteme z ní poměr obou neznámých; tím nabudeme lineárné rovnice

$$\frac{x}{y} = m,$$

která ve spojení s rovnicí druhou tvoří soustavu rovnice lineárné s kvadratickou, již dle *a)* rozřešíme.

$$1) \quad ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \quad \ldots\ldots \text{(rovnice stejnoměrná)}.$$
$$2) \quad a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \ldots\ldots \text{(rovnice obecná)}.$$

Poněvadž hodnoty $x = 0$ a $y = 0$ netvoří pár kořenů této soustavy rovnic, lze první rovnici děliti y^2. Tím nabudeme rovnice

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b\frac{x}{y} + c = 0,$$

v níž pokládáme za neznámou poměr $\frac{x}{y}$. Rozřešíce ji dle této neznámé, obdržíme

$$\frac{x}{y} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

tudíž po prvé

$$\frac{x}{y} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (3)$$

a po druhé

$$\frac{x}{y} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (4)$$

Nyní jest nám rozřešiti po prvé soustavu rovnic 2. a 3. a po druhé soustavu rovnic 2. a 4., čímž obdržíme celkem čtyři páry kořenů daných rovnic.

Příklad 4. Někdy lze si opatřiti z daných rovnic, které nejsou stejnoměrny, rovnici stejnoměrnou, načež jest případ tento převeden na případ 5. Jsou-li dány na př. rovnice

$$1) \quad ax^2 + bxy + cy^2 = d$$
$$\text{a } 2) \quad a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 = d_1,$$

vylučme z nich samostatný člen. K tomu cíli násobme první rovnici d_1, druhou d a odečtěme rovnice tím nabyté. Tím vznikne stejnoměrná rovnice

$$(ad_1 - a_1 d)\, x^2 + (bd_1 - b_1 d)\, xy + (cd_1 - c_1 d)\, y^2 = 0,$$

která, spojena jsouc s rovnicí 1. nebo 2., tvoří soustavu rovnic ve příkladě 3. vytčenou.

Podobně opatříme si z rovnic obecnějších

$$ax^2 + bxy + cy^2 + \lambda (dx + ey + f) = 0,$$
$$a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 + \lambda_1 (dx + ey + f) = 0,$$

rovnici stejnoměrnou, vyloučíme-li z nich trojčlen $dx + ey + f$.

Příklad 5. Jsou-li *obě* dané rovnice souměrné, vykonáme řešení zavedouce nové neznámé.

$$1) \quad a(x^2 + y^2) + bxy + c(x + y) + d = 0,$$
$$2) \quad a_1 (x^2 + y^2) + b_1 xy + c_1 (x + y) + d_1 = 0.$$

Položme

$$x + y = u, \qquad (3)$$
$$xy = v, \qquad (4)$$

tudíž

$$x^2 + y^2 = u^2 - 2v.$$

Tím nabudou dané rovnice tvaru

$$1) \quad au^2 + cu + (b - 2a)\, v + d = 0,$$
$$2) \quad a_1 u^2 + c_1 u + (b_1 - 2a_1)\, v + d_1 = 0.$$

Vyloučíce z těchto dvou rovnic v, obdržíme rovnici

$$(ab_1 - a_1 b)\, u^2 + [(b_1 - 2a_1)\, c - (b - 2a)\, c_1]\, u + (b_1 - 2a_1)\, d - (b - 2a)\, d_1 = 0,$$

z níž nabudeme dvou hodnot u_1 a u_2 pro u.

Vložíce tyto hodnoty do rovnice 1. nebo 2., obdržíme dvě hodnoty v_1 a v_2 za v, načež dosazením těchto hodnot do *substitučních* rovnic 3. a 4. vzniknou dvě soustavy rovnic, a to

$$x + y = u_1, \quad xy = v_1 \qquad \text{a} \qquad x + y = u_2, \quad xy = v_2,$$

jež rozřešíme dle *a*).

Z každé té soustavy obdržíme dvě hodnoty za x a dvě k nim příslušné hodnoty za y, tedy v celku 4 páry kořenů.

Jsou-li x_1, y_1, x_2 a y_2 páry vzniklé ze soustavy první a x_3, y_3, x_4 a y_4 páry vzniklé ze soustavy druhé, platí rovnice

$$x_2 = y_1,\ y_2 = x_1,\ x_4 = y_3,\ y_4 = x_3 \text{ (př. 2. v } a).$$

II) Jsou-li dány tři rovnice o třech neznámých, z nichž jedna jest kvadratická, ostatní dvě pak lineárné, dovedeme tyto rovnice řešiti vždy. Neboť vyjádříce z obou rovnic lineárných dvě neznámé, na př. z a y, neznámou x a vložíce výsledky tím nabyté do rovnice kvadratické, obdržíme kvadratickou rovnici o jedné neznámé.

Příklad 1.

$$\begin{aligned} &1) \quad xy + xz + yz = 27,\\ &2) \quad x - y = 6,\\ &3) \quad y - z = 3. \end{aligned}$$

Ze 2) $x = 6 + y,$ (4)

ze 3) $z = y - 3;$ (5)

do 1)

$$(6 + y)\,y + (6 + y)(y - 3) + y\,(y - 3) = 27 \text{ čili } y^2 + 2\,y - 15 = 0,$$

z níž jde

$$y_1 = -5,\ y_2 = 3,$$

načež z rovnice 4) obdržíme $x_1 = 1$, $x_2 = 9$ a z rovnice 5) $z_1 = -8$ a $z_2 = 0$.

Jsou-li dvě z daných rovnic kvadratické, třetí pak lineárná, vede řešení všeobecně na rovnici stupně čtvrtého. Z té příčiny jest nám omeziti se jen na případy zvláštní.

Příklad 2.

$$\begin{aligned} &1) \quad x : y = y : z \text{ (rovnice kvadratická)},\\ &2) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 133 \text{ („ \quad „)},\\ &3) \quad x + y + z = 19 \text{ (rovnice lineárná)}. \end{aligned}$$

Z 1)

$$xz = y^2, \text{ tudíž } 2\,xz = 2\,y^2. \quad (4)$$

4) + 2)] $(x + z)^2 + y^2 = 133 + 2\,y^2.$ (5)

Ze 3) $x + z = 19 - y,$

do 5) $(19 - y)^2 + y^2 = 133 + 2\,y^2$ čili $38\,y = 228,$

t. j. $y = 6.$

Z rovnice 1. jde potom $xz = 36$

a z rovnice 3. $x + z = 13,$

tudíž $x_1 = 4, \quad x_2 = 9$

a $z_1 = 9, \quad z_2 = 4.$

§ 122. Řešení rovnic stupně vyššího než 2^{ho} o několika neznámých.

Řešení takových rovnic vede všeobecně na řešení rovnic vyšších než kvadratických o jedné neznámé a proto jest nám omeziti se jen na případy zvláštní.

Příklad 1.

$$\begin{aligned} &1) \quad x^3 + y^3 = a^3,\\ &2) \quad x + y = b. \end{aligned}$$

1) : 2) $x^2 - xy + y^2 = \frac{a^3}{b}.$ (3)

Rovnice 3. s 2. tvoří soustavu rovnice kvadratické s lineárnou, již řešiti dovedeme. Zdvojmocníce rovnici 2. a odečtouce od výsledku rovnici 3., nabudeme

$$3\,xy = b^2 - \frac{a^3}{b} \text{ čili } xy = \frac{b^3 - a^3}{3\,b}.$$

Odečtením rovnice poslední od rovnice 3. obdržíme

$$x^2 - 2\,xy + y^2 = \frac{4\,a^3 - b^3}{3\,b} \text{ čili } (x - y)^2 = \frac{4\,a^3 - b^3}{3\,b},$$

t. j.

$$x - y = \pm \sqrt{\frac{4\,a^3 - b^3}{3\,b}}.$$

Spojíce tuto rovnici s rovnicí druhou, vypočteme x a y.

Z daných rovnic lze si opatřiti rovnici kvadratickou též methodou substituční, nebo tím, že druhou rovnici ztrojmocníme a potom od ni odečteme rovnici první.

Příklad 2.

$$\begin{aligned} &1)\quad x^3+y^3=35,\\ &2)\quad xy=6.\end{aligned}$$

Ze 2) $$y=\frac{6}{x}.$$

do 1. $$x^3+\frac{216}{x^3}=35 \text{ čili } x^6-35x^3+216=0,$$

z níž jde $$x^3=\frac{35\pm 19}{2}$$

a tudíž po prvé $$x^3=27 \qquad (3)$$

a po druhé $$x^3=8. \qquad (4)$$

Z binomické rovnice 3. vysvítá, že

$$x_1=3,\ x_2=3\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ a } x_3=3\,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

a podobně z rovnice 4.

$$x_4=2,\ x_5=-1+i\sqrt{3} \text{ a } x_6=-1-i\sqrt{3}.$$

Vložíce tyto hodnoty do rovnice 2., nabudeme šesti hodnot pro y.

Jinak lze tyto rovnice rozřešiti, zdvojmocníme-li rovnici první a odečteme-li potom od ni čtyřnásobnou trojmoc rovnice druhé. Tím nabudeme výrazu pro $(x^3-y^3)^2$, z čehož vypočteme x^3-y^3 a potom užitím tohoto výsledku a rovnice první x^3 a y^3.(Viz 2. příkl. k § 121., I.)

Příklad 3.

$$\begin{aligned} &1)\quad \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=12\frac{4}{9} \text{ (rovnice stupně 4.)}\\ &2)\quad x+y=4.\end{aligned}$$

Položme $$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=u, \qquad (3)$$

tudíž $$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=u^2-2. \qquad (\S\ 118,\ 3a.)$$

Tím rovnice 1. nabude tvaru

$$u^2-2+u=12\frac{4}{9} \text{ čili } u^2+u-14\frac{4}{9}=0,$$

z níž jde

$$u_1=\frac{10}{3} \text{ a } u_2=-\frac{13}{3}.$$

Vložíce tyto hodnoty do rovnice (3), nabudeme po prvé

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{10}{3} \text{ a po druhé } \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-\frac{13}{3},$$

ze kterýchž rovnic jde

$$a)\ \frac{x}{y}=3 \qquad \alpha)\ \frac{x}{y}=\frac{-13+\sqrt{133}}{6},$$

a po druhé

$$b)\ \frac{y}{x}=\frac{1}{3} \qquad \beta)\ \frac{x}{y}=\frac{-13-\sqrt{133}}{6}.$$

Spojením těchto výsledků s rovnicí 2. vzniknou následující soustavy lineárných rovnic:

2., α), 2., b), 2., α), 2., β),

jež snadno rozřešíme.

Příklad 4.

$$\begin{aligned} &1)\ \sqrt[3]{x+10}+\sqrt[3]{y+14}=12,\\ &2)\qquad\qquad x+y=444. \end{aligned}$$

$$1)^3 \ldots\ x+10+y+14+3\sqrt[3]{(x+10)(y+14)}\left(\sqrt[3]{x+10}+\sqrt[3]{y+14}\right)=12^3 \ldots$$

(§ 103., 8d)

$$\text{čili } 36\sqrt[3]{(x+10)(y+14)}=1704-(x+y).$$

Dosadíme-li za $x+y$ hodnotu z rovnice 2., jakož položíme-li $y=444-x$, obdržíme rovnici

$$36\sqrt[3]{(x+10)(458-x)}=1260,$$

z níž vychází krácením a ztrojmocněním rovnice

$$x^2-448x+38295=0.$$

Řešením této rovnice obdržíme

$$x_1=333,\ x_2=115 \text{ a tudíž } y_1=111,\ y_2=329.$$

Příklad 5.

Jsou-li dány dvě souměrné rovnice stupně třetího, v nichž kromě členů stupně třetího jest jen člen samostatný, jako v rovnici

$$ax^3+bx^2y+bxy^2+ay^3=c,$$

uvedeme každou z nich na tvar

$$(x+y)[ax^2+(b-a)xy+ay^2]=c,$$

načež dělením obou nabudeme rovnice stejnoměrné stupně 2. Z této vypočteme $\frac{x}{y}$ a spojíce tuto rovnici s některou rovnicí danou, obdržíme rovnici binomickou stupně třetího.

Dále jest patrno, jak bychom řešili soustavu rovnic, z nichž jedna jest $x+y=m$ a druhá rovnicí symmetrickou vytčeného druhu.

Příklad 6.

Jsou-li dány dvě souměrné rovnice stupně čtvrtého toho druhu, jako jest rovnice

$$ax^4+bx^3y+cx^2y^2+bxy^3+ay^4=d,$$

uvedeme je na tvar

$$a(x^2+y^2)^2+b(x^2+y^2)xy+(c-2a)x^2y^2=d$$

a položíme

$$x^2+y^2=u,\ xy=v,$$

čímž obě rovnice nabudou tvaru

$$au^2+buv+(c-2a)v^2=d,$$

z nichž si opatříme dle příkl. 4. na str. 235 stejnoměrnou rovnici stupně 2. a t. d.

Příklad 7.

$$1)\ \frac{xyz}{y+z}=a,\quad 2)\ \frac{xyz}{z+x}=b,\quad 3)\ \frac{xyz}{x+y}=c.$$

Rovnice tyto bylo by lze řešiti tím, že bychom dělením první rovnice rovnicí druhou a rovnicí třetí nabyli dvou rovnic lineárných pro x, y a z.

Z těchto dvou rovnic vyjádřili bychom na př. z a y neznámou x, načež bychom výrazy tyto položili za z a y do některé z daných rovnic. Tím vznikne rovnice o jedné neznámé, již dovedeme rozřešiti.

Jinak lze dospěti k cíli tímto způsobem:

$$\text{Z 1)}\ \frac{y+z}{xyz}=\frac{1}{a},\ \text{ze 2)}\ \frac{z+x}{xyz}=\frac{1}{b},\ \text{ze 3)}\ \frac{x+y}{xyz}=\frac{1}{c}.$$

Sečtouce tyto tři rovnice a označíce pro krátkost $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ písmenem s, obdržíme po krácení dvěma rovnici

$$\frac{x+y+z}{xyz}=s.$$

Odečtouce od této rovnice postupně každou z předposledních rovnic, obdržíme rovnice

$$\frac{1}{yz}=s-\frac{1}{a},\quad \frac{1}{zx}=s-\frac{1}{b},\quad \frac{1}{xy}=s-\frac{1}{c},$$

jichž násobením a potom odmocněním vznikne rovnice

$$\frac{1}{xyz}=\pm\sqrt{\left(s-\frac{1}{a}\right)\left(s-\frac{1}{b}\right)\left(s-\frac{1}{c}\right)}.$$

Dělíme-li touto rovnicí každou z předposledních rovnic, obdržíme

$$x=\pm\sqrt{\frac{s-\frac{1}{a}}{\left(s-\frac{1}{b}\right)\left(s-\frac{1}{c}\right)}}\ \text{a t. d.}$$

§ 123. O neurčitých rovnicích stupně druhého.

Jedinou rovnicí kvadratickou o dvou neznámých x a y nejsou neznámé x a y určeny. Neboť položíce za jednu z nich libovolnou hodnotu, můžeme vypočísti z rovnice tím povstalé neznámou druhou (§ 121., 1.).

Je-li daná rovnice pro jednu neznámou, na př. pro y, lineárná, přísluší ke každému x jediná hodnota y a sice jest — má-li daná rovnice vesměs racionálné součinitele — vždy racionálná, je-li x racionálné.

Při řešení takových rovnic jde obyčejně o to, aby byly vypočteny páry celistvých kořenů těchto rovnic. Totéž platí, je-li daná rovnice pro každou z neznámých lineárná.

Je-li daná rovnice pro každou z neznámých kvadratická, náležejí ke každé hodnotě jedné neznámé, na př. x, dvě hodnoty neznámé y, a to reálné nebo imaginárné. Jsou-li tyto hodnoty reálné, jsou všeobecně irracionálné a jen ve zvlaštních případech racionálné. Při řešení takových rovnic jde obyčejně o páry jejich *racionálných* kořenů.

Příklad 1. Budiž řešena čísly celistvými rovnice

$$xy+ax+by=c,$$

v níž a, b a c jsou čísla celá.

Z dané rovnice jde

$$x=\frac{c-by}{a+y}\ \text{čili}\ x=\frac{c+ab-ab-by}{a+y},$$

$$x=\frac{c+ab-b(a+y)}{a+y},\ x=\frac{c+ab}{a+y}-b.$$

Z poslední rovnice vysvítá, že k celému číslu y náleží celé číslo x jen tenkráte, je-li číslo $(c+ab)$ dělitelno číslem $(a+y)$. Daná rovnice má tudíž tolik párů celistvých kořenů, kolik jest celých čísel y, pro něž jest číslo $(a+y)$ dělitelem čísla $c+ab$.

Příklad 2. Obecnější než rovnice ve příkl. 1. jest rovnice

$$mxy + ax + by = c, \text{ z níž jde } x = \frac{c - by}{a + my},$$

$$\text{tedy } mx = \frac{mc - mby}{a + my} \text{ čili } mx = \frac{cm + ab - ab - bmy}{a + my},$$

$$mx = \frac{cm + ab - b(a + my)}{a + my}, \quad mx = \frac{cm + ab}{a + my} - b.$$

Abychom pro celé číslo y obdrželi z této rovnice celé číslo mx, jest nám voliti za y takové hodnoty, aby číslo $(cm + ab)$ bylo dělitelno číslem $(a + my)$. Jsou-li mezi čísly, jichž tím pro mx nabudeme, i násobky čísla m, lze dané rovnici vyhověti celistvými čísly x a y.

Rovnice vytčené ve příkladě 1. a 2. zoveme *rectangulárnými*.

Příklad 3. Vyhledati jest celistvá řešení rovnice

$$xy + x^2 = 2x + 3y + 29.$$

Z dané rovnice jde

$$y = \frac{2x - x^2 + 29}{x - 3} \text{ čili } y = -x - 1 + \frac{26}{x - 3}.$$

Abychom obdrželi z této rovnice pro celé číslo x i celé číslo y, musí býti číslo 26 dělitelno $x - 3$. Avšak dělitelé čísla 26 jsou 1, 2, 13, 26, —1, —2, —13 a —26. Tudíž lze zvoliti za x takové číslo, pro něž jest

$x - 3 =$	1,	2,	13,	26,	—1,	—2,	—13,	—26,
t. j. $x =$	4,	5,	16,	29,	2,	1,	—10,	—23,
načež jest $y =$	21,	7,	—15,	—29,	—29,	—15,	— 7,	—21.

Příklad 4. Buďtež vypočteny páry racionálných kořenů rovnice $1 + x^2 = y^2$.

K tomu cíli položme $y = 1 + \frac{m}{n}x$, kdež m a n jsou čísla celá. Potom jest

$$1 + x^2 = \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^2,$$

$$1 + x^2 = 1 + 2\frac{m}{n}x + \frac{m^2}{n^2}x^2,$$

$$(n^2 - m^2)x^2 - 2mnx = 0,$$

$$x[(n^2 - m^2)x - 2mn] = 0.$$

Této rovnici jest vyhověno po prvé pro $x = 0$, načež jest $y = 1$ a po druhé pro

$$x = \frac{2mn}{n^2 - m^2},$$

k čemuž náleží hodnota

$$y = \sqrt{1 + x^2} = \frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2}.$$

Příkladem neurčitých rovnic 2. st. a více než dvou neznámých budiž úloha:

Kterými poměrnými čísly celými vyjádřiti jest odvěsny pravoúhlého trojúhelníku, aby i poměrné číslo přepony bylo číslem celým?

Označíme-li poměrná čísla odvěsen písmeny x a y a poměrné číslo přepony písmenem z, platí rovnice $x^2 + y^2 = z^2$, již řešiti jest čísly celými.

Položme

$$z = x + \frac{m}{n}y,$$

kdež m a n jsou čísla celá.

Potom jest

$$x^2 + y^2 = (x + \frac{m}{n} y)^2,$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + 2\frac{m}{n} xy + \frac{m^2}{n^2} y^2,$$

$$y^2 = 2\frac{m}{n} xy + \frac{m^2}{n^2} y^2,$$

$$y\,[(n^2 - m^2)\,y - 2\,mnx] = 0.$$

Této rovnici jest vyhověno po prvé pro $y = 0$, načež jest

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = x,$$

a po druhé pro

$$y = \frac{2\,mn}{n^2 - m^2}\,x \text{ čili } \frac{y}{x} = \frac{2\,mn}{n^2 - m^2},$$

kdež m a n jsou libovolná čísla celá.

Poslední rovnici bude vyhověno, je-li

$$y = 2\,mn\,\lambda \text{ a } x = (n^2 - m^2)\,\lambda,$$

načež jest

$$z = (n^2 + m^2)\,\lambda.$$

V těchto rovnicích položiti jest za n, m a λ libovolná čísla celá, abychom nabyli celistvých kořenů rovnice $x^2 + y^2 = z^2$.

Poněvadž podstata dané úlohy žádá, aby x, y a z byla čísla absolutní, voliti jest $n > m$

Tím nabudeme pro $\lambda = 1$ následujících hodnot za x, y a z.

n	m	x	y	z
2	1	3	4	5
3	1	8	6	10
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	2	12	16	20

a t. d.

Pro $\lambda = 2$, 3, 4 a t. d. obdržíme za x, y a z hodnoty dvakráte, třikráte, čtyřikráte a t. d. větší nežli hodnoty svrchu udané.

Trojúhelníky pravoúhlé, jichž strany jsou vyjádřeny celými čísly poměrnými, zoveme *Pythagorovými*.

Část dvanáctá.

O řadách.

§ 124. Vysvětlení. Soustavu čísel vytvořených dle určitého zákona jmenujeme *řadou*. Čísla, z nichž se řada skládá, jsou její *členy*.

Na př. soustavy čísel

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\ldots.$$
$$1,\quad 2,\quad 4,\quad 8,\ldots.$$
$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\ldots.$$
$$\frac{x}{1},\quad \frac{x^2}{1.2},\quad \frac{x^3}{1.2.3},\quad \frac{x^4}{1.2.3.4},\ldots$$

tvoří řady o různých *zákonech výtvarných*. V první řadě povstává každý člen následující z předcházejícího přičtením 1, ve druhé násobením dvěma, ve třetí rostou jmenovatelé členů jako čísla přirozené řady číselné, kdežto jich čítatelé jsou vesměs rovni 1 a t. d.

Podle zákona výtvarného rozeznáváme řady několika druhů: *arithmetické, geometrické, složené* a t. d.

Členy řady označujeme vesměs stejnými písmeny, k nimž v pravo dole připojíme *udavatele* (indices), t. j. číslo, které značí, kolikátým onen člen v řadě jest. Na př. a_3 značí člen $3^{tí}$, a_k člen $k^{tý}$.

Rostou-li členy řady zároveň se svými udavateli, jmenujeme řadu řadou *rostoucí*, kdežto ve případě opačném jest řada řadou *klesající*.

Řadu o *konečném* počtu členů jmenujeme *konečnou*, řadu o *nekonečném* počtu členů *nekonečnou*.

Vzorec, který udává závislost libovolného členu a_n na udavateli n, nazýváme vzorcem pro *obecný člen* řady. Na př. v poslední ze čtyř vytčených řad jest $a_n = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$ vzorcem pro člen obecný.

Vzorec, jímž se určuje součet prvních n členů řady, jmenujeme vzorcem *součtovým*.

Roste-li *počet členů* řady *bez meze* (do nekonečna) a blíží-li se při tom *její součet určité mezi*, jest řada ta *konvergentní* (sbíhavou).

Roste-li součet řady s rostoucím počtem členů bez meze, jest řada *divergentní* (rozbíhavou).

§ 125. Řady arithmetické.

1) Řadu, v níž *rozdíl* každých dvou po sobě jdoucích členů, vzatý vždy v témž směru, jest stálý, jmenujeme *řadou arithmetickou*.

Abychom vypočetli rozdíl dvou po sobě jdoucích členů řady arithmetické, budeme od členu následujícího odečítati předcházející.

§ 126. Řady geometrické.

1. Řadu, v níž *podíl* každých dvou po sobě jdoucích členů, vzatý vždy v témž směru, jest stálý, jmenujeme *řadou geometrickou*.

Abychom vypočetli podíl dvou po sobě jdoucích členů, řady geometrické, budeme člen následující děliti předcházejícím.

Rozdíl tím nabytý jmenujeme *rozdílem* řady arithmetické. V následujícím vyšetřování bude označován písmenem d (difference).

2) Značí-li a_k a a_{k+1} dva po sobě jdoucí členy řady arithmetické, jest dle 1. odst. definice této řady obsažena v rovnici

$$a_{k+1} - a_k = d, \qquad (1)$$

která platí pro každého udavatele k.

Ze vzorce 1. jde

$$a_{k+1} = a_k + d. \qquad (2)$$

Vzorec 2. praví, že *každý člen řady arithmetické zvětšen jsa o její rozdíl, dá její člen následující.*

3) *V řadě arithmetické každý člen jest arithmetickým středem členů sousedních*, neboť o každých třech po sobě jdoucích členech a_{k-1}, a_k, a_{k+1} platí spojitá úměra arithmetická

$$\underbrace{a_{k+1} - a_k}_{d} = \underbrace{a_k - a_{k-1}}_{d}. \qquad (\S\ 62.,\ 8.)$$

4) Ze vzorce 2. obdržíme

pro $k = 1 \ldots$ $a_2 = a_1 + d$,
„ $k = 2 \ldots$ $a_3 = a_2 + d$,
„ $k = 3 \ldots$ $a_4 = a_3 + d$,
⋮ ⋮ ⋮ ⋮
„ $k = n-2 \ldots$ $a_{n-1} = a_{n-2} + d$,
„ $k = n-1 \ldots$ $a_n = a_{n-1} + d$.

Sečtením těchto rovnic nabudeme rovnice

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots a_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_{n-1} + (n-1)\,d,$$

čili, poněvadž součty $(a_2 + a_3 + a_4 \ldots a_{n-1})$ na obou stranách rovnice se *ruší*,

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d. \qquad (3)$$

Vzorec tento určuje závislost členu a_n na jeho udavateli; jest to

Podíl tím nabytý jmenujeme *podílem* řady geometrické. V následujícím vyšetřování bude označován písmenem q (quotient).

2) Značí-li a_k a a_{k+1} dva po sobě jdoucí členy řady geometrické, jest dle 1. odst. definice této řady obsažena v rovnici

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = q, \qquad (1)$$

která platí pro každého udavatele k.

Ze vzorce 1. jde

$$a_{k+1} = a_k\, q. \qquad (2)$$

Vzorec 2. praví, *že každý člen řady geometrické násoben jsa jejím podílem, dá její člen následující.*

3) *V řadě geometrické každý člen jest geometrickým středem členů sousedních*, neboť o každých třech po sobě jdoucích členech a_{k-1}, a_k, a_{k+1} platí spojitá úměra geometrická

$$\underbrace{a_{k+1} : a_k}_{q} = \underbrace{a_k : a_{k-1}}_{q}. \qquad (\S\ 62.,\ 8.)$$

4) Ze vzorce 2. obdržíme

pro $k = 1 \ldots$ $a_2 = a_1\, q$,
„ $k = 2 \ldots$ $a_3 = a_2\, q$,
„ $k = 3 \ldots$ $a_4 = a_3\, q$,
⋮ ⋮ ⋮ ⋮
„ $k = n-2 \ldots$ $a_{n-1} = a_{n-2}\, q$,
„ $k = n-1 \ldots$ $a_n = a_{n-1}\, q$.

Násobením těchto rovnic nabudeme rovnice

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \ldots a_{n-1}\, a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots \ldots a_{n-1} \cdot q^{n-1},$$

čili, poněvadž součiny $(a_2\, a_3\, a_4 \ldots a_{n-1})$ na obou stranách rovnice se *krátí*,

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \qquad (3)$$

Vzorec tento určuje závislost členu a_n na jeho udavateli; jest to

tudíž vzorec pro *obecný člen* řady arithmetické.

Znajíce člen první a rozdíl řady arithmetické, vypočteme z rovnice 3. kterýkoli člen této řady.

Ze vzorce 3. vysvítá:

Řada arithmetická jest $\begin{matrix}\text{rostoucí,}\\ \text{klesající,}\end{matrix}$ je-li její rozdíl $\begin{matrix}>0.\\ <0.\end{matrix}$ Pro $n = \infty$ jest i $a_n = \pm\infty$, dle toho, je-li $d \gtrless 0$.

Připomenuto budiž, že *absolutní* hodnoty členů arithmetické řady $\begin{matrix}\text{klesající}\\ \text{rostoucí}\end{matrix}$ od toho místa rostou, v němž člen $\begin{matrix}\text{kladný}\\ \text{záporný}\end{matrix}$ přešel v $\begin{matrix}\text{záporný.}\\ \text{kladný.}\end{matrix}$

5) *Součet každých dvou členů řady arithmetické od obou jejích krajů stejně vzdálených jest stálý, roven jsa součtu členu prvního a posledního.*

Důkaz. Řada arithmetická mějž n členů. Člen $r^{tý}$ po členu prvním jest a_{1+r} a člen $r^{tý}$ před členem posledním a_n jest a_{n-r}.

Dle vzorce 3. jest

$$a_{1+r} = a_1 + rd,$$
$$a_{n-r} = a_1 + (n-r-1)\,d = a_n - rd.$$

Sečtením těchto dvou rovnic nabudeme

$$a_{1+r} + a_{n-r} = a_1 + a_n,$$

jak jsme tvrdili.

6) *Součet prvních* n *členů řady arithmetické roven jest arithmetickému středu ze členu prvního a* n*ho násobenému počtem členů* (n).

Důkaz. Označíme-li s_n součet prvních n členů řady arithmetické

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n,$$

tudíž vzorec pro *obecný člen* řady geometrické.

Znajíce člen první a podíl řady geometrické, vypočteme z rovnice 3. kterýkoli člen této řady.

Ze vzorce 3. vysvítá:

Řada geometrická jest $\begin{matrix}\text{rostoucí,}\\ \text{klesající,}\end{matrix}$ je-li její podíl $\begin{matrix}>1\\ <1\end{matrix}$. Pro $n = \infty$ jest v řadě rostoucí $a_n = a_1 q^{n-1} = \pm\infty$ a v řadě klesající

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 0.\ (\S\ 89.,\ 1.,\ 2.)$$

Je-li podil řady geometrické > 0, jsou všecky její členy stejně označeny, kdežto, je-li podíl < 0, střídají se pravidelně znaménka členů.

5) *Součin každých dvou členů řady geometrické od obou jejích krajů stejně vzdálených jest stálý, roven jsa součinu členu prvního a posledního.*

Důkaz. Řada geometrická mějž n členů. Člen $r^{tý}$ po členu prvním jest a_{1+r} a člen $r^{tý}$ před členem posledním a_n jest a_{n-r}.

Dle vzorce 3. jest

$$a_{1+r} = a_1 q^r,$$
$$a_{n-r} = a_1 q^{n-r-1} = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q^{-r} = a_n q^{-r}.$$

Znásobením těchto dvou rovnic nabudeme

$$a_{1+r} \cdot a_{n-r} = a_1\, a_n,$$

jak jsme tvrdili.

6) *Součet prvních* n *členů řady geometrické udán jest vzorcem*

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Důkaz.

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots . a_1 q^{n-1},$$
$$s_n q = a_1 q + a_1 q^2 + \ldots . a_1 q^{n-1} + a_1 q^n.$$

jest především

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

čili

$$s_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} \dots + a_2 + a_1.$$

Sečtouce tyto dvě rovnice nabudeme

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots$$
$$\dots (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Avšak dle věty 5. jest

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots,$$

tudíž jest $2s_n = (a_1 + a_n)\, n$

a $$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\, n. \qquad (4)$$

7) Je-li počet členě řady arithmetické nekonečně velký, jest dle 4. odstavce $a_\infty = \pm\infty$, a tudíž dle vzorce (4) i

$$s_\infty = \pm\infty,$$

t. j. řádu arithmetická jest *vždy divergentní.*

8) V rovnicích

1) $a_n = a + (n-1)\, d,$

2) $s_n = \frac{a + a_n}{2}\, n,$ v nichž

značí a první člen řady arithm., vyskytuje se pět čísel, a to a, d, n, a_n a s_n. Jsou-li tři z nich dána, lze ostatní dvě vypočísti z oněch rovnic. Celkem jest tu možno 10 případů. (Viz příkl. 1. k § 132.).

Buďtež dána čísla:

a) a, d a n. Čísla a_n a s vyplývají tu přímo z rovnice 1. a 2.*)

b) d, n, s.

Z 2.... $a_n + a = \frac{2s}{n}$,

z 1.... $a_n - a = (n-1)d.$

$$a_n = \frac{2s + n(n-1)d}{2n}$$

$$a = \frac{2s - n(n-1)\, d}{2n}.$$

Odečtením rovnice 1. od 2. obdržíme

$$s_n (1-q) = a_1 (1 - q^n),$$

tudíž $$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}. \qquad (4)$$

Vzorec 4. lze psáti též ve tvaru

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

7) Je-li počct členů řady geometrické nekonečně velký a podíl $q < 1$, jest $q^\infty = 0$ (§ 89., 2) a tudíž $s_\infty = \frac{a}{1-q}$, t. j. řada geometrická jest pro $q < 1$ *konvergentní.*

Pro $q > 1$ a $n = \infty$, jest $q^\infty = \infty$ (§ 89., 1.) a tudíž i $s_\infty = \infty$, t. j. řada geom. jest v tomto případě *divergentní.*

8) V rovnicích

1) $a_n = a\, q^{n-1}$,

2) $s_n = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$, v nichž

značí a první člen řady geom., vyskytuje se pět čísel, a to a, q, n, a_n a s_n. Jsou-li tři z nich dána, lze ostatní dvě vypočísti z oněch rovnic. Celkem jest tu možno 10 případů.

Buďtež dána čísla:

a) a, q a n. Čísla a_n a s vyplývají tu přímo z rovnice 1. a 2.*)

b) q^n, n, s.

Z 2).... $a = \frac{s\,(q-1)}{q^n - 1}$, načež

z 1) jde $a_n = \frac{s\,(q-1)\, q^{n-1}}{q-1}$.

c) q, n, a_n.

Z 1).... $a = \frac{a_n}{q^{n-1}}$ a

z 2).... $s = a_n \frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)}$.

*) První člen řady označen jest ve všech následujících případech písmenem a a součet jejích prvních n členů písmenem s.

c) d, n, a_n.

Z 1).... $a = a_n - (n-1)\,d$, načež jde

z 2).... $s = n\left(a_n - \frac{n-1}{2}\,d\right)$.

d) a, a_n n.

Z 1).... $d = \frac{a_n - a}{n-1}$; s plyne přímo z 2.

e) a, d, a_n,

Z 1).... $n = \frac{a_n - a + d}{d}$ a tudíž

z 2).... $s = \frac{a_n - a + d}{2d}(a + a_n)$.

f) a, a_n, s.

Z 2).... $n = \frac{2s}{a + a_n}$ a tím

z 1).... $d = \frac{a_n{}^2 - a^2}{2s - (a + a_n)}$.

g) a, d, s.

Vložíce výraz za a_n z rovnice 1. do 2., nabudeme pro n rovnice kvadratické $dn^2 - (d - 2a)\,n - 2s = 0$, z níž vypočteme n (kladné), načež z rovnice 1. určíme a_n.

h) a_n, d, s.

Z 2).... $n = \frac{2s}{a + a_n}$,

do 1).... $a^2 - da + 2ds - a_n d - a_n{}^2 = 0$.

Z této rovnice vypočteme a_1 a vložíce je do rovnice předcházející, určíme n.

i) a, n, s.

Vložíce hodnotu za a_n z 1) do druhé, obdržíme $s = n\left(a + \frac{n-1}{2}\,d\right)$, z čehož jde

$d = \frac{2(s - an)}{n(n-1)}$ a tudíž $a_n = \frac{2s}{n} - a$.

d) a, a_n, n.

Z 1).... $q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a}}$, načež obdržíme

z 2).... $s = \frac{a_n \sqrt[n-1]{a_n} - a \sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{a_n} - \sqrt[n-1]{a}}$.

e) a, q, a_n.

Logarithmujíce rovnici 1. obdržíme $\log a_n = \log a + (n-1)\log q$, z čehož jde

$$n = \frac{\log a_n - \log a}{\log q} + 1,$$

načež vypočteme s z rovnice 2.

f) a, a_n, s.

Z 1).... $q^{n-1} = \frac{a_n}{a}$ a tudíž $q^n = \frac{a_n}{a}\,q$;

do 2).... $s = a\,\frac{\frac{a_n}{a}\,q - a}{q - 1}$,

z níž jde $q = \frac{s - a}{s - a_n}$.

Vložíce tento výsledek do rovnice 1. obdržíme pro n rovnici exponenciální, již rozřešíme logarithmováním.

g) a, q, s.

Z 2).... $q^n = \frac{s}{a}(q-1) + 1$, z níž obdržíme n logarithmujíce, načež vypočteme a_n z rovnice 1.

h) q, a_n, s.

Rovnici 2. lze psáti $s = \frac{aq^{n-1}.q - a}{q - 1}$

čili $s = \frac{a_n q - a}{q - 1}$,

z níž jde $a = a_n\,q - s\,(q-1)$, načež vypočteme z rovnice 1. číslo n logarithmováním.

i) a, n, s.

Z rovnice 2. obdržíme tu pro q rovnic $(n-1)^{ho}$ stupně $s = a_n\,(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^2 + q + 1)$.

Rovnici jednoduššího tvaru obdržíme pro q z rovnice 2. neprovádějíce v ní dělení. Jesti to rovnice $aq^n - s\,q + s - a = 0$, jejímž jedním kořenem jest 1. Avšak kořen tento, který se do rovnice 2) dostal tím, že

k) n, a_n, s.

Z 2).... $a_1 = \frac{2s}{n} - a_n$,

načež jde z 1).... $d = \frac{2(na_n - s)}{n(n-1)}$.

Příklady.

1) Vypočísti jest součet prvních n čísel přirozené řady číselné

$$1, 2, 3, \ldots (n-1), n.$$

Čísla tato tvoří řadu arithmetickou, v níž jest $a_1 = 1$, $d = 1$ a počet členů $= n$, tudíž jest $s_n = \frac{1+n}{2} n = \frac{n(n+1)}{2}$.

S tímto příkladem souvisejí úzce úlohy: Vypočísti jest součet všech čísel celých od celého čísla a až do čísla a^2, od čísla a^2 až do a^3, od a^3 do a^4, od a do a^3, od a^2 do a^4 atd.

2) Vypočísti jest $n^{té}$ číslo liché a součet prvních n lichých čísel.

Čísla lichá

$$1, 3, 5, 7 \ldots$$

tvoří arithmetickou řadu, v níž jest $a_1 = 1$, $d = 2$. Jest tudíž $n^{té}$ číslo liché

$$a_n = 1 + (n-1)\,2 = 2n - 1$$

a součet $s_n = \frac{1 + (2n-1)}{2} n = n^2$.

Rozřešte touž úlohu pro čísla sudá.

Vypočtěte součet čísel, jichž nabudeme kladouce ve výraze $4x - 3$ za x postupně všecka čísla celá od 1 až do n.

jsme ji násobili činitelem $(q-1)$, nevyhovuje podstatě úlohy.

Vypočetše q, určíme potom a_n z rovnice 1.

k) n, a_n, s.

Z 1).... $a = \frac{a_n}{q^{n-1}}$, což vloženo jsouc do 2. poskytne po náležitém upravení rovnici

$$\left(1 - \frac{s}{a_n}\right) q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots . q + 1 = 0.$$

Vypočetše q, určíme a z rovnice 1.

Příklady.

1) Vyssaje-li se při každém tahu z recipientu nějaké vývěvy 8. díl vzduchu v ní obsaženého, kolik vzduchu v ní zůstane po 20. tahu?

Poněvadž při každém tahu vyssaje se $\frac{1}{8}$ vzduchu v recipientu, zůstane v něm $\frac{7}{8}$ toho množství, které tam před tahem bylo.

Nazveme-li tudíž původní množství vzduchu v recipientu a, bude tam po prvním tahu $\frac{7}{8} a$, po druhém $\left(\frac{7}{8} a\right)\frac{7}{8} = \left(\frac{7}{8}\right)^2 a$ atd.

Jednotlivá ta množství tvoří tudíž řadu geometrickou, v níž jest

$a_1 = \frac{7}{8} a$, $q = \frac{7}{8}$ a $n = 20$, tudíž

$$a_{20} = \frac{7}{8} a \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{19} = \left(\frac{7}{8}\right)^{20} a$$

množství vzduchu v recipientu po 20. tahu.

2) Pravidelnému šestiúhelníku o straně a vepsána jest kružnice, které jest vepsán opět pravidelný šestiúhelník, jemu opět kružnice atd.

Vypočísti jest a) součet ploch prvních čtyř šestiúhelníků a b) součet ploch nekonečného množství šestiúhelníků, které se udaným způsobem vytvoří.

Označíme-li stranu kteréhokoli z těch šestiúhelníků x, jest strana šestiúhelníku po něm následujícího $x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$, z čehož jde, že tyto strany tvoří řadu geometrickou, jejíž podíl $q = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Vypočtěte součet čísel celých, jichž nabudeme kladouce ve výraze $2(x-n)-1$ za x postupně všecka čísla celá od 0 do n.

3) Při volném pádu proběhne těleso za první vteřinu dráhu $\frac{g}{2}$ m a v každé následující vteřině dráhu o g m větší nežli v předcházející.

Jak velkou dráhu proběhne těleso za n vteřin?

Čísla poměrná drah vykonaných v první, druhé, třetí.... vteřině, t. j. $\frac{g}{2}$, $\frac{g}{2}+g$, $\frac{g}{2}+2g$.... tvoří řadu arithmetickou, v níž jest $a_1=\frac{g}{2}$ a $d=g$. Jesti tudíž číslo poměrné dráhy v $n^{té}$ vteřině $a_n=\frac{g}{2}+(n-1)g$ a dráha za prvních n vteřin má číslo poměrné

$$s_n=\frac{\frac{g}{2}+\frac{g}{2}+(n-1)g}{2}n=\frac{gn^2}{2}.$$

4) Při kopání studně platilo se za první metr 5 zl. a za každý následující o 2 zl. více než za předcházející. Jak hluboká byla tato studně, platilo-li se za její vykopání celkem 480 zl.?

Částky, které byly zaplaceny za jednotlivé metry činí řadu arithmetickou, v níž jest $a_1=5$, $d=2$ a $s_n=480$ a jde o n.

Dle g) obdržíme pro n rovnici $2n^2+8n-960=0$ čili $n^2+4n-480=0$, z níž jde $n=-2+\sqrt{4+480}=20$. Jest tedy studně 20 m hluboká.

5) Člen $n^{tý}$ jisté řady arithmetické jest $\frac{4n-3}{4}$; vypočísti jest součet jejích prvních n členů.

Ze vzorce $a_n=\frac{4n-3}{4}$

Poněvadž tyto šestiúhelníky jsou obrazce podobné, platí o jejich plochách p_1, p_2, p_3... úměra $p_1:p_2:p_3:\ldots=a^2:(aq)^2:(aq^2)^2\ldots$, z čehož jde, že tyto plochy tvoří řadu geometrickou, jejímž podílem jest $q^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2=\frac{3}{4}$.

Ježto $p_1=\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$, jest v této řadě $a_1=\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$ a tudíž

$$s_4=\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}\,\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^4}{1-\frac{3}{4}}=\frac{525}{128}a^2\sqrt{3},$$

a dále jest $s_\infty=\frac{\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}}{1-\frac{3}{4}}=6a^2\sqrt{3}$.

3) Vypočísti jest hodnotu periodického zlomku desetinného, a) začíná-li se periodičnosť hned za desetinnou tečkou, b) je-li před první periodou r desetinných míst.

a) Zlomek má tu tvar

$$\frac{\alpha}{10^n}+\frac{\alpha}{10^{2n}}+\frac{\alpha}{10^{3n}}+\ldots,$$

kdež α značí n místné číslo celé. Sčítanci $\frac{\alpha}{10^n}$, $\frac{\alpha}{10^{2n}}$,.... tvoří řadu geometrickou nekonečnou, v níž jest $a_1=\frac{\alpha}{10^n}$ a $q=\frac{1}{10^n}$. Poněvadž jest $q<1$, jest

$$s_\infty=\frac{\frac{\alpha}{10^n}}{1-\frac{1}{10^n}}=\frac{\alpha}{10^n-1}$$

hodnota onoho zlomku periodického.

b) V tomto případě periodický zlomek desetinný má tvar

$$\frac{\beta}{10^r}+\frac{\alpha}{10^{r+n}}+\frac{\alpha}{10^{r+2n}}+\ldots,$$

při čemž β značí r místné číslo celé, obsažené mezi desetinnou tečkou a první periodou, kdežto α týž jako prve má význam.

Od druhého počínajíc sčítanci tvoří řadu geometrickou nekonečnou, v níž jest

jde $a_1 = \frac{4.1-3}{4} = \frac{1}{4}$

a tudíž $s_n = \frac{\frac{1}{4} + \frac{4n-3}{4}}{2} n = \frac{n(2n-1)}{4}$

Podobně lze rozřešiti úlohu:

Součet prvních n členů jisté řady arithmetické $= n(n-1)$. Vypočtěte její první člen a rozdíl.

9) Řadu arithmetickou *prokládati* (interpolovati) značí vložiti mezi každé dva její členy sousední určitý počet členů nových, které tvoří s původními řadu arithmetickou.

Abychom na př. mezi členy a_k a a_{k+1} vložili r členů nových, které s nimi tvoří řadu arithmetickou, suďme takto:

Členy a_k a a_{k+1} s novými r členy tvoří $(r+2)$ člennou řadu arithmetickou, jejíž první člen $b_1 = a_k$ a poslední člen $b_{r+2} = a_{k+1}$.

Závislosť členu b_{r+2} na členu b_1, počtu členů $r+2$ a rozdílu d_1 této nové řady, vyjadřena jest dle § 125., 4. rovnicí $b_{r+2} = b_1 + (r+1)d$, čili $a_{k+1} = a_k + (r+1)d_1$, ze kteréž rovnice jde $d_1 = \frac{a_{k+1} - a_k}{r+1}$.

A poněvadž rozdíl $(a_{k+1} - a_k)$ roven jest rozdílu d řady původní, jest $d_1 = \frac{d}{r+1}$.

Budou tudíž mezi a_k a a_{k+1} vloženy členy

$$a_k + \frac{d}{r+1}, \; a_k + \frac{2d}{r+1}, \ldots . a_k + \frac{rd}{r+1}.$$

$a_1 = \frac{\alpha}{10^{r+n}}$, $q = \frac{1}{10^n}$ a tudíž její součet jest $s_\infty = \frac{\alpha}{(10^n-1)10^r}$.

Hodnota daného periodického deset. zlomku jest tedy

$$\frac{\beta}{10^r} + \frac{\alpha}{(10^n-1)10^r} = \frac{\beta 10^n + \alpha - \beta}{(10^n-1)10^r}.$$

(§ 58.)

9) Řadu geometrickou *prokládati* (interpolovati) značí vložiti mezi každé dva její členy sousední určitý počet členů nových, které tvoří s původními řadu geometrickou.

Abychom na př. mezi členy a_k a a_{k+1} vložili r členů nových, které s nimi tvoří řadu geometrickou, suďme takto:

Členy a_k a a_{k+1} s novými rčleny tvoří $(r+2)$ člennou řadu geometrickou, jejíž první člen $b_1 = a_k$ a poslední člen $b_{r+2} = a_{k+1}$.

Závislosť členu b_{r+2} na členu b_1, počtu členů $r+2$ a podílu q_1 této nové řady, vyjádřena jest dle § 126., 4. rovnicí $b_{r+2} = b_1 . q_1^{r+1}$, čili $a_{k+1} = a_k q_1^{r+1}$, ze kteréž rovnice jde $q_1 = \sqrt[r+1]{\frac{a_{k+1}}{a_k}}$.

A poněvadž podíl $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ roven jest podílu q řady původní, jest $q_1 = \sqrt[r+1]{q}$.

Budou tudíž mezi a_k a a_{k+1} vloženy členy $a_k . \sqrt[r+1]{q}$, $a_k . \sqrt[r+1]{q^2}$, ... $a_k . \sqrt[r+1]{q^r}$.

§ 127. Řady složené.

Členy řady složené vzniknou, znásobíme-li soulehlé členy řady arithmetické a geometrické.

Je-li tudíž řada arithmetická

$$a, \quad a+d, \quad a+2d \quad \ldots \quad a+(n-1)d$$

a geometrická

$$b, \quad bq \quad bq^2 \quad \ldots \quad bq^{n-1},$$

jest

$$ab, \quad (a+d)bq, \quad (a+2d)bq^2 \ldots [a+(n-1)d]bq^{n-1}$$

řada složená.

Z toho jde, že vzorec pro obecný člen A_n řady složené jest

$$A_n = [a+(n-1)d]bq^{n-1}.$$

Součet S_n prvních n členů řady složené obdržíme takto:

Především jest

$$S_n = ab + (a+d)bq + (a+2d)bq^2 + \ldots + [a+(n-1)d]bq^{n-1}.$$

Vynásobíce na pravé straně této rovnice a vytknouce z prvních členů ab a z druhých bdq, obdržíme

$$S_n = ab(1+q+q^2+\ldots q^{n-1}) + bdq[1+2q+3q^2+4q^3+\ldots (n-1)q^{n-2}]. \quad (1)$$

Poněvadž součet geometrické řady

$$1+q+q^2 \ldots q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

půjde jen o součet řady *složené*

$$s = 1+2q+3q^2+4q^3+\ldots (n-1)q^{n-2}.$$

Násobíme-li tuto rovnici q, obdržíme

$$sq = q+2q^2+3q^3+\ldots (n-2)q^{n-2}+(n-1)q^{n-1}.$$

Odečtením této rovnice od předcházející vyjde rovnice

$$s(1-q) = 1+q+q^2+q^3+\ldots q^{n-2}-(n-1)q^{n-1}$$

čili, poněvadž všecky členy pravé strany kromě posledního tvoří $(n-1)$ člennou řadu geometrickou,

$$s(1-q) = \frac{1-q^{n-1}}{1-q} - (n-1)q^{n-1},$$

$$s(1-q) = \frac{1-nq^{n-1}+(n-1)q^n}{1-q}$$

$$\text{a } s = \frac{1-nq^{n-1}+(n+1)q^n}{(1-q)^2}. \quad (3)$$

Vložíce výsledky z rovnice 2. a 3. do 1. obdržíme

$$S_n = ab\frac{1-q^n}{1-q} + bdq\,\frac{1-nq^{n-1}+(n-1)q^n}{(1-q)^2}.$$

Příklady. 1) Ustanovte součet n členné řady složené, která vznikla z řady arithmetické a geometrické, jichž první dva členy a a b se sobě rovnají.

2) Kterou řadu obdržíme vypočtouce podíl $1:(1-q)^2$?

3) Užívajíce poznámky, že řada, již ve příkladu 2. obdržíte, jest pro $q<1$ konvergentní, ustanovte součty těchto nekonečných řad:

a) $0{\cdot}1 + 0{\cdot}02 + 0{\cdot}003 + \ldots$ *b*) $0{\cdot}1 + 0{\cdot}04 + 0{\cdot}007 + 0{\cdot}0010 \ldots$

c) $1 + 0{\cdot}02 + 0{\cdot}0004 + 0\,000006 + \ldots$

Bylo-li by lze tyto součty i jinak určiti?

§ 128. O složeném úrokování.

1. *Vysvětlení.* Bylo-li 100 zl. uloženo na 5% při úrokování jednoduchém, obnášely úroky za 1 rok 5 zl., za 2 léta 10 zl., za 3 léta 15 zl. a všeobecně za n let 5 zl. $\times n$. Úroky byly tu stále počítány jen z částky původně uložené **a** z té příčiny byly přímo úměrny času. (§ 66.)

Avšak nebylo-li na konci prvního roku věřiteli vyplaceno 5 zl. úroků, jest přirozeno počítati ve druhém roce úroky nejen ze 100 zl. původně uložených, ale i z úroků 5 zl., tedy celkem ze 105 zl. Budou tudíž 5% úroky obnášeti za druhý rok 5·25 zl. a úroky za první dva roky budou (5 zl. + 5·25 zl.) = = 10·25 zl. Ve třetím roce budou úroky počítány ze 110·25 zl. a budou tudíž obnášeti 5·51 .. zl., tak že úroky za první tři roky činí

(5 zl. + 5·25 zl. + 5·51 .. zl.) = 15·76 .. zl. a t. d.

Z příkladu tohoto vysvítá, že úroky nejsou tu přímo úměrny počtu let, jako při úrokování jednoduchém. Úrokování tohoto druhu jmenujeme *složeným. Při úrokování složeném přičítají se tedy úroky na konci každého období k částce* **x**, *na niž jistina původní až do tohoto období vzrostla, a v následujícím období počítají se úroky nejen z částky* **x**, *ale i z úroků k ní přičtených.*

Podle velikosti období rozeznáváme složené úrokování *roční, pololetní, čtvrtletní, měsíční* a t. d.

Během jednoho období pokládáme úrokování vždy za jednoduché, t. j. za přímo úměrné času. Tak na př. z úroků 5·51 .. zl., vzešlých ve příkladě svrchu vytčeném ze 100 zl. původně uložených za třetí rok (období), připadá na každý měsíc tohoto roku (5·51 .. zl. : 12) úroků a nikoliv za druhý měsíc více než za první, za třetí více než za druhý a t. d.

V následujícím vyšetřování pokládáme za jednotku peněžitých obnosů 1 zl. a za jednotku času jedno období (rok, pololetí, čtvrtletí) a t. d.

Číslo poměrné jistiny původně uložené označíme k,
„ „ výnosu ze 100 zl. za jedno období „ p,
„ „ času „ n,
„ „ částky, na niž jistina k vzroste za n období, označíme k_n.

Potom jest číslo poměrné u úroků vzešlých z jistiny k za n období rovno rozdílu $(k_n - k)$.

2) *Úloha základní. — Na kterou částku vzroste jistina* **k** *uložená na* **p**% *za* **n** *období při složeném úrokování?*

Rozřešení. Částky, na které vzroste jistina k za

1, 2, 3, ... r, $(r+1)$, ... n období,

nazveme k_1, k_2, k_3, ... k_r, k_{r+1}, ... k_n.

Jak na sobě závisejí každé dva po sobě jdoucí členy k_r a k_{r+1} řady

$$k,\ k_1,\ k_2,\ \ldots\ k_r,\ k_{r+1},\ \ldots\ k_n, \tag{1}$$

poznáme soudíce takto:

1 zl. vzroste za 1 období na $(1 + \frac{p}{100})$ zl.,

tudíž k_r zl. „ „ „ „ $k_r(1 + \frac{p}{100})$ zl.

Avšak poněvadž částka, na niž k_r vzroste za jedno období, byla označena k_{r+1}, máme rovnici

$$k_{r+1} = k_r(1 + \frac{p}{100}). \tag{2}$$

Tato rovnice praví, že každý člen v řadě 1. obdržíme ze členu předcházejícího, násobíce jej číslem $(1 + \frac{p}{100})$.

Z toho jde, že řada 1. jest $(n + 1)$ člennou řadou geometrickou, v níž první člen jest roven k a podíl roven číslu $(1 + \frac{p}{100})$. Jesti tudíž dle § 126., 4.

$$k_n = k(1 + \frac{p}{100})^n, \tag{3}$$

kterýmž vzorcem rozřešena jest daná úloha.

Číslo $1 + \frac{p}{100}$, jež budeme krátce označovati q, nazýváme *úročitelem.**)

Ve vzorci 3. jest obsaženo pravidlo:

Částku, na niž vzroste nějaká jistina za n *období při úrokování složeném, obdržíme násobíce jistinu* n^{tou} *mocninou úročitele.*

Na kterou částku vyroste jistina 10 000 zl. za 10 let *a*) při 4% ročním, *b*) 2% pololetním, *c*) 1% čtvrtletním úrokování složeném?

3) Poněvadž jsme částku k_n vypočítali jakožto $(n + 1)$ člen řady geometrické, pokládati jest ve vzorci 3. číslo n za číslo *celé.* Kdyby bylo vypočísti částku k_n, na niž vzroste jistina k za čas $n = m + \frac{r}{s}$, bylo by nám vypočísti nejprve dle vzorce 3. částku k_m, na niž vzroste částka k za m celistvých období a k ní bylo by připočísti jednoduché úroky vzešlé z částky k_m za $\frac{r}{s}$ období. (§ 128., 1.)

Poněvadž jednoduché úroky z jistiny k_m za $\frac{r}{s}$ období jsou

$$\frac{k_m \cdot p}{100} \cdot \frac{r}{s},$$

---

*) Často jmenujeme úročitelem i mocniny čísla $1 + \frac{p}{100}$.

jest

$$k_n = k_m + \frac{k_m p}{100} \cdot \frac{r}{s} = k_m \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{r}{s}\right).$$

Avšak dle vzorce 3. jest $k_m = k \cdot q^m$, tudíž jest

$$k_n = kq^m \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{r}{s}\right). \qquad (4)$$

V tomto vzorci jest $n = m + \frac{r}{s}$ a $\frac{r}{s} < 1$.

Obyčejně užívá se vzorce 3. místo složitějšího vzorce 4., i když číslo n není číslem celým, poněvadž výsledky ze vzorce 3. a 4. nabyté velmi málo od sebe se liší.

Na př. pro částku, na niž vzroste 100 zl. při 5% ročním úrokování

za	10·2,	10·4,	10·6,	10·8 let,
nabudeme ze vzorce 3.)	164·49,	166·10,	167·73,	169·34 zlatého
a ze vzorce 4.)	164·53,	166·15,	167·79,	169·41 „ ,

činí tudíž za 10·8 roku při jistině 100 zl. rozdíl mezi výsledky ze vzorců 3. a 4. nabytými asi 7 kr.

4) Na základě vzorce 3. lze odpovědíti na otázku: *Na kolik % uložiti jest jistinu při úrokování pololetním, čtvrtletním a všeobecně* $\frac{1}{r}$ *letním, aby vzrostla za* n *let na touž částku, jako při* p *% složeném úrokování ročním?*

Jmenujeme-li žádaná procenta x (t. j. výnos ze 100 zl. za $\frac{1}{r}$ roku), vzroste jistina k za n let čili za nr období při $\frac{1}{r}$ letním úrokování na $k\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{nr}$ a za týž čas při p % složeném úrokování ročním na $k\,q^n$. Obě tyto částky mají býti stejné, t. j.

$$k\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{nr} = k\,q^n \text{ čili } \left(1 + \frac{x}{100}\right)^r = q.$$

Z této rovnice jde

$$x = 100\left(\sqrt[r]{q} - 1\right).$$

Pro $p = 4$ a $\frac{1}{r} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{12}$

jest přibližně $x = 1{\cdot}98, \quad 0{\cdot}98, \quad 0{\cdot}32,$

z čehož jde, že při 4% složeném úročení ročním vzroste jistina za celistvý počet období na touž částku jako při 1·98 % pololetním,

„ 0·98 % čtvrtletním,

„ 0·32 % měsíčním.

Poznámka. V životě praktickém udávají se procenta i při složeném úrokování pololetním, čtvrtletním atd. jakožto výnos ze 100 zl. za 1 rok. Platí-li na př. záložna 4% ze sta při ½ ročním úrokování složeném, značí to, že platí ze 100 zl. za ½ roku 2 zl., tak že s tímto pololetním úrokováním equivalentní úrokování roční bylo by více než čtyřprocentové.

5) *Úlohy odvozené.* Ve vzorci $k_n = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ vyskytují se čtyři čísla, a to k, k_n, p a n.

Jsou-li tři z těchto čísel známa, lze ze vzorce onoho vypočísti číslo čtvrté. Kromě případu vytčeného v úloze základní jsou tu ještě tyto tři případy možné:

a) dána jsou čísla k_n, n a p, vypočísti jest k,
b) „ „ „ k, k_n a p, „ „ n,
c) „ „ „ k, k_n a n, „ „ p.

Ve případě a) jde o vypočtení *částky, která za* **n** *období vzroste při* **p** % *úročení složeném na určitou částku* k_n.

Ze vzorce 3. obdržíme, že žádaná částka

$$k = \frac{k_n}{q^n} \text{ čili } k = k_n\left(\frac{1}{q}\right)^n. \qquad (5)$$

Číslo $\frac{1}{q}$ jmenujeme *odúročitelem* nebo též *rovnatelem.*

Vzorcem 5. rozřešena jest též úloha: *Kterou částku zaplatiti jest hned místo dluhu splatného po* **n** *obdobích při* **p** % *úročení složeném?* Jest tu jen položiti ve vzorci 5. za k_n onen dluh, načež k jest částkou žádanou.

Částku k jmenujeme tu *diskontovanou* čili *nynější hodnotou* částky k_n. (§ 66., příkl. 5.). Ve vzorci 5. obsaženo jest pro vypočtení diskontované hodnoty pravidlo: *Diskontovanou hodnotu částky splatné po* **n** *obdobích obdržíme, násobíce tuto částku* $\mathbf{n}^{tou}$ *mocninou odúročitele.*

Diskonto v tomto případě jest

$$k_n - \frac{k_n}{q^n} \text{ čili } k_n \frac{q^n - 1}{q^n}.$$

Poznámka 1. Důležito jest vytknouti, jak důležitým činitelem při srovnávání dvou částek jest čas, za který jsou splatny. Abychom srovnali hodnoty dvou částek splatných po nestejných dobách, dlužno jest vypočísti, kterých hodnot nabudou po určité době nebo kterou hodnotu mají nyní.

Ve případě b) jde o *počet období, za který určitá jistina vzroste při složeném úrokování na určitou částku.*

Z rovnice $k_n = k\,q^n$, která jest pro n rovnicí exponenciální, obdržíme logarithmujíce

$$\log k_n = \log k + n \log q^n,$$

z čehož

$$n = \frac{\log k_n - \log k}{\log q}.$$

Sem náleží též vypočtení času, za který se jistina při úrokování složeném zdvojnásobí a všeobecně z r násobí. K tomu cíli položiti jest ve vzorci základním $k_n = rk$, načež z něho obdržíme, krátíce číslem k, rovnici

$$r = q^n, \text{ z níž jde } n = \frac{\log r}{\log q}.$$

Na př. pro	$p=4$,	2,	1,	
při úrokování	ročním,	$\frac{1}{2}$ letním,	$\frac{1}{4}$ letním	se jistina
zdvojnásobí za	17·68 roku,	35 pololetí,	69·68 čtvrtletí,	
ztrojnásobí za	28·02 „	55·48 „	110·44 „	.

Poznámka 2. Kdybychom chtěli užívati vzorce $k_n = k \cdot q^n$ jen pro celistvé n, bylo by nám při výpočtu času na základě tohoto vzorce určiti jen celistvou část čísla n, načež by se zlomek období $\frac{r}{s}$ určil ze vzorce 4.

Ve případě c) jde o *vypočtení procent, na která jest jistinu uložiti, aby za udaný čas jistina nabyla určité hodnoty.*

Ze vzorce

$$k_n = k\, q^n$$

obdržíme tu nejprve

$$q = \sqrt[n]{\frac{k_n}{k}}, \text{ z čehož vyplývá } p = 100\left(\sqrt[n]{\frac{k_n}{k}} - 1\right).$$

6) Užitím vzorce 5. lze vypočísti *střední lhůtu platební* při úrokování složeném.

Soudíce jako ve př. 3. § 75. obdržíme:

$$q^x = \frac{k + k_1 + k_2 + \ldots}{\frac{k}{q^n} + \frac{k_1}{q^{n_1}} + \frac{k_2}{q^{n_2}} + \ldots}$$

čili

$$q^x = \frac{\Sigma k_n}{\Sigma \text{ disk. hodnot } k_n}.\ ^*)$$

Z této rovnice určí se střední lhůta platební x logarithmováním.

§ 129. O vypočítání úspory, důchodu, úmoru a výkupného.

Základní úloha při vypočítávání *úspory* jest:

Kterou částku $\mathbf{A_n}$ *nastřádá si do konce* $\mathbf{n^{ho}}$ *roku osoba ukládající od nynějška počínajíc na počátku každého roku částku* $\mathbf{a}$ *při* $\mathbf{p\,\%}$ *složeném úrokování ročním?*

Jest patrno, že úspora A_n = součtu hodnot, jichž nabudou vklady a do konce n^{ho} roku.

Avšak

vklad ulož. na poč. roku				n^{ho}	(posl.)	vzroste do konce roku		n^{ho}	na aq,
„	„	„	„	$(n-1)^{ho}$	„	„	„	n^{ho}	„ aq^2,
„	„	„	„	$(n-2)^{ho}$	„	„	„	n^{ho}	„ aq^3,
				⋮				⋮	⋮
„	„	„	„	2^{ho}	„	„	„	n^{ho}	„ aq^{n-1},
„	„	„	„	1^{ho}	„	„	„	n^{ho}	„ aq^n.

*) Srovnej s tímto vzorcem vzorec, kterého nabudeme v § 75., příkl. 3 a) pro $1 + \frac{p}{100}x$.

tudíž jest

$$A_n = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots . aq^{n-1} + aq^n.$$

Řada na pravé straně se vyskytující jest řadou geometrickou, jejíž první člen jest aq, podíl q a počet členů n Užijíce vzorce 4. v § 126., obdržíme

$$A_n = aq\,\frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ čili kratšeji } A_n = a\,Q_n,$$

kdež činitel

$$Q_n = q\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

střadatelem se nazývá.

Hodnoty střadatelů pro určitá procenta a pro určitý počet roků sestaveny jsou v tabulky.*) Užívajíce těchto tabulek při výpočtu úspory, násobíme vklad střadatelem z tabulek vzatým a obdržíme žádanou úsporu.

Příklady.

1) Pro který vklad jest poměrné číslo úspory rovno střadateli?

2) Kterou částku uspoří si do konce n^{ho} roku osoba, která na konci každého roku ukládá částku a při $p\,\%$ složeném úrokování ročním?

3) Kterou částku uspoří si do konce n^{ho} $\frac{\text{půlletí}}{\text{čtvrtletí}}$ osoba, která na počátku nebo na konci každého $\frac{\text{půlletí}}{\text{čtvrtletí}}$ uloží částku a při $p\,\%$ složeném úrokování $\frac{\text{půlletním?}}{\text{čtvrtletním?}}$

4) Kterou částku uspoří si do konce n^{ho} roku osoba, která na $\frac{\text{počátku}}{\text{konci}}$ každého roku uloží částku a při $p\,\%$ složeném úrokování $\frac{1}{r}$letním?

5) Kterou částku nastřádá si do konce n^{ho} roku osoba při $p\,\%$ úrokování složeném, činí-li její vklady na počátku každého roku ukládané řadu arithmetickou? (Viz § 127.)

2) Dostává-li nějaká osoba v určitých obdobích z jistiny zvláště k tomu uložené určité částky, pravíme, že požívá *důchodu* čili *renty*.

Je-li ustanoveno, *kolik let* bude důchod vyplácen, jmenujeme jej *důchodem dočasným*, kdežto trvá-li důchod až do smrti osoby užívající, jest *důchodem doživotným*. Zemře-li osoba dočasného důchodu užívající dříve než vyprší čas k užívání důchodu určený, přejde důchod na její dědice. Při důchodu doživotném přestane smrtí osoby, která důchodu užívala, jeho vyplácení.

Na tomto místě přestaneme na důchodech dočasných, důchody doživotné až do nauky o pravděpodobnosti odkládajíce.

Základní úlohou při dočasném důchodu jest:

Kterou částku $\mathbf{S}_n$ *uložiti jest nyní, aby stačila po* **n** *let na vyplácení důchodu* **a** *zl., který se vyplácí vždy na konci roku, při* $\mathbf{p}\,\%$ *složeném úrokování ročním?*

---

*) Viz Studničkovy tabulky log.

Jest patrno, že jest

$S_n =$ součtu disk. hodnot všech důchodů a.

Avšak

diskontovaná hodnota posl. důchodu a splatného po n letech jest $\frac{a}{q^n}$,

„ „ předposl. „ a „ „ $(n-1)$ „ „ $\frac{a}{q^{n-1}}$,

⋮ ⋮ ⋮

„ „ druhého „ a „ „ 2 „ „ $\frac{a}{q^2}$,

„ „ prvního „ a „ „ 1 roce „ „ $\frac{a}{q}$,

tudíž jest

$$S_n = \frac{a}{q^n} + \frac{a}{q^{n-1}} + \ldots\ldots \frac{a}{q^2} + \frac{a}{q}.$$

Na pravé straně poslední rovnice jest řada geometrická, jejíž první člen jest $\frac{a}{q^n}$ podíl q a počet členů n. Jesti tudíž

$$S_n = \frac{a}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ čili kratšeji } S_n = a\,R_n,$$

kdež činitel

$$R_n = \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

zásobitelem se nazývá.

Máme-li tabulky zásobitelů, vypočteme nynější hodnotu všech důchodů (S_n), násobíce důchod zásobitelem v tabulkách vyhledaným.*)

Příklady. 1) Pro který vklad rovno jest poměrné číslo nynější hodnoty všech důchodů zásobiteli?

2) Která jest nynější hodnota důchodů a zlatových vyplácených po n let vždy na *počátku* roku při p % složeném úrokování ročním, půlletním, čtvrtletním atd.?

3) Která jest nynější hodnota n důchodů ročních po a zl., z nichž první začne se vypláceti na konci r^{ho} roku při p % složeném úrokování ročním?

4) Kterou částku ukládati jest po r let na počátku každého roku, aby bylo těmito vklady pojištěno n ročních důchodů po a zl., z nichž první bude vyplacen na počátku roku $(r+1)^{ho}$? (p % složené úrokování roční.)

3) Týmž způsobem jako úlohy o důchodu řešíme i úlohy o *úmoru* (amortisaci) a *výkupném*.

Základní úloha při vypočítávání úmoru jest:

Kterou částku **a** *splatiti jest na konci každého roku, aby dluh* **S** *na konci* $\mathbf{n}^{ho}$ *roku byl umořen při* $\mathbf{p}$ *% složeném úrokování ročním.*

---

*) Viz Studničkovy tabulky log.

Základní rovnice jest zde jako při důchodu:

Součet disk hodnot všech splátek = S,

t. j. dle 2.)

$$a R_n = S,$$

z čehož jde

$$a = \frac{S}{R_n} \text{ čili kratšeji } a = SU_n,$$

kdež

$$U_n = \frac{1}{R_n} = q^n \frac{q-1}{q^n-1}$$

nazvati lze *umořovatelem.*

Často se žádá, aby splátky a byly udány v procentech dluhu S. Obnáší-li splátka a $x\%$ dluhu S, jest $a = \frac{S \cdot x}{100}$, což vloženo jsouc do posledního vzorce pro a poskytne rovnici

$$\frac{S \cdot x}{100} = S U_n, \text{ z níž jde } x = 100 \cdot U_n$$

jakožto procenta dluhu původního, která stačí k jeho umoření za n let.

Ze vzorce $x = 100\, U_n$ čili $x = 100\, q^n \frac{q-1}{q^n-1}$, lze též vypočísti čas, za který bude umořen dluh určitými, ve stejných lhůtách splatnými splátkami.

Obdržíme tu nejprve

$$q^n = \frac{x}{x - 100\,(q-1)} \text{ čili } \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = \frac{x}{x-p},$$

tudíž

$$n = \frac{log\, x - log\,(x-p)}{log\, q}.$$

Splácí-li se na př. na 6% dluh na konci každého roku při složeném úrokování ročním

7%, 8%, 9%, 10%

původního dluhu, bude dluh umořen

za 33·39, 23·74, 18·85, 15·72 let.

Z odvození vzorců $a = S\,U_n$ a $x = 100\,U_n$ jest patrno, že jich a tudíž i posledně nabytého vzorce pro n lze užiti i pro amortisaci, při které se splátky dějí vždy po $\frac{1}{r}$ roku, je-li úročení $\frac{1}{r}$ roční. Potom značí p, na němž U_n závisí, výnos ze sta za $\frac{1}{r}$ roku a n počet $\frac{1}{r}$ ročních lhůt.

Platí-li se na př. pololetně z dluhu 3% a splácí-li se na konci každého pololetí při složeném úročení pololetním

3½%, 4%, 4½%, 5%

dluhu původního, bude dluh umořen

za 65·82, 46·89, 37·15, 30·99 pololetí.

Příklady. 1) Za kolik let bude umořen dluh, splácí-li se na konci každého roku $(2p + p')\,\%$ dluhu původního, je-li vzato za základ $p\,\%$ úrokování pololetní? (p značí výnos ze 100 zl. za $\frac{1}{2}$ roku.)

2) Za kolik let bude umořen 4% dluh, splácí-li se na konci každého roku $4\frac{3}{4}\%$ dluhu původního?

3) Jistý dluh lze umořiti n splátkami a zlatovými, které jsou splatny od nynějška počínajíc vždy na počátku roku. Za který čas bylo by lze celý dluh zaplatiti najednou částkou na zlatých při $p\,\%$ složeném úrokování ročním?

4) Konečně při vypočítání *výkupného* jest úlohou základní:

Kterou částku složiti jest při $\mathbf{p}\,\%$ *ročním úročení složeném na vykoupení se z povinnosti, dle níž vždy na konci roku a to celkem* $\mathbf{n}$ *kráte platiti jest určitý poplatek* $\mathbf{a}$ *zl.?*

Poněvadž základní rovnice jest zde jako při důchodu

$$S = \Sigma \text{ disk. hodnot všech poplatků,}$$

máme pro S rovnici

$$S = \frac{a}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ čili } S = a R_n. \qquad (a)$$

Téhož vzorce bylo by užiti při výpočtu výkupného v tom případě, že by byly poplatky placeny vždy na konci $\frac{1}{r}$ roku při $\frac{1}{r}$ ročním úrokování složeném. Při tom značilo by p, na němž závisí q, výnos ze 100 zl. za $\frac{1}{r}$ roku.

Kdyby povinnosť záležela v tom, že na konci každého r^{ho} roku odváděti jest poplatek a a to celkem n kráte, obdrželi bychom při složeném úrokování ročním pro výkupné nejprve rovnici

$$S = \Sigma \text{ disk. hodnot všech poplatků,}$$

z níž jde dosazením disk. hodnot jednotlivých poplatků a sečtením povstalé tím řady geometrické

$$S = \frac{a}{q^{nr}} \frac{q^{nr} - 1}{q^r - 1}. \qquad (b)$$

Vzorec (a) vyplývá z (b) pro $r = 1$.

Je-li povinnosť platiti poplatky *věčna*, t. j. je-li $n = \infty$, jest i $q^n = \infty$ a $q^{nr} = \infty$ a ze vzorců a) a b) obdržíme pro S výrazy neurčitého tvaru $\frac{\infty}{\infty}$. Abychom hodnoty těchto výrazů poznali, pišme vzorce a) a b) ve tvaru

$$S = \frac{a}{q - 1}\left(1 - \frac{1}{q^n}\right), \quad S = \frac{a}{q^r - 1}\left(1 - \frac{1}{q^{nr}}\right).$$

Položíce v těchto vzorcích $n = \infty$, obdržíme ze vzorce a)

$$S = \frac{a}{q - 1} \text{ čili } S = \frac{a}{\frac{p}{100}} \ldots S = \frac{100\,a}{p}$$

a ze vzorce b)

$$S = \frac{a}{q^r - 1}.$$

Ze vzorce $S = \frac{100\,a}{p}$ jest patrno, že S značí jistinu, která uložena jsouc na $p\,\%$, nese ročně a zl. úroků.

Snadno poznáme, že i S ve vzorci $S = \frac{a}{q^r - 1}$ má podobný význam: značíť jistinu, která uložena jsouc na $p\,\%$, nese za r let úroky a. Neboť jistina S vzroste za r let na Sq^r a tudíž vynese úroky $Sq^r - S$ čili $S(q^r - 1)$. Mají-li býti tyto úroky rovny a, máme rovnici $S(q^r - 1) = a$, z níž jde

$$S = \frac{a}{q^r - 1}$$

jakožto jistina, která nese za r let úroky a.

Že k vykoupení se z povinnosti věčné jest potřeba jistiny, která nese za období, po němž se vždy poplatky platí, úroky rovné onomu poplatku, jest patrno z této úvahy. Jistina menší než jistina tuto vytčená, nesla by za jedno období menší úroky než jest příslušný poplatek: bylo by tudíž na uhrazení poplatků ubírati z jistiny a tato by se za čas strávila. Že však jistina svrchu vytčená úplně dostačí k uhrazení všech poplatků, jest patrno z toho, že jistina větší nesla by za každé období větší úroky než obnášejí příslušné poplatky. Úroků z větší jistiny by se tudíž na poplatky nespotřebovalo a jistina původní, zvětšována jsouc o přebytky, by rostla.

Kdyby se první poplatek (a) při povinnosti věčné odváděl hned, bylo by jistiny S ze dvou posledních vzorců vypočtené zvětšiti o a.

Část třináctá.

O skupinách. O poučce binomické.

§ 130. Vysvětlení.

Máme-li několik věcí, jež nazveme $a, b, c, d\ldots$, můžeme je

a) několikerým způsobem seřaditi, tak že za sebou následují buď v pořádku $abcd$, nebo $bacd$, $bcda$ a t. d.,

b) můžeme z nich několikerým způsobem určitý počet vybrati.

Je-li na př. ze čtyř věcí a, b, c, d vybrati věci dvě, mohou to býti buď věci a a b, nebo b a c, c a d, a a c atd.

Při tom lze zase přihlížeti k pořádku, ve kterém věci za sebou jdou, nebo pořádku toho nedbati, t. j. lze na př. rozeznávati spojení ab od spojení ba, nebo je míti za stejná.

Každé spojení všech anebo několika daných věcí jmenujeme *skupinu* či *soujem* (komplex) a věci, z nichž se skupiny tvoří, *prvky*.

Úkolem nauky o skupinách jest

1) *podati návod, jak se z daných prvků tvoří skupiny vyhovující určitým podmínkám,*

2) *určiti z těchto podmínek počet skupin jim vyhovujících, aniž by byly tyto skupiny vytvořeny.*

Podle druhu skupin dělí se nauka o skupinách

a) v nauku o *přestavách* či *permutacích*,
b) „ *sestavách* či *kombinacích*,
c) „ *nástavách* či *variacích*.

Prvky označujeme různými písmeny abecedy, nebo stejnými písmeny s připojenými udavateli, nebo konečně číslicemi. Pro tvoření skupin jest důležito rozeznávati prvky i skupiny *nižší* a *vyšší*.

Ze dvou prvků jest vyšší ten, který jest označen pozdějším písmenem abecedy nebo větší číslicí.

Na př. prvek b jest vyšší než a, prvek 2 jest vyšší než 1, a_3 vyšší než a_2 atd. Ze dvou skupin téhož druhu jest ta vyšší, v níž přijdeme dříve, postupujíce od levé ruky k pravé, na prvek vyšší. Na př. skupina *bac* jest vyšší než skupina *abc*, ale nižší než skupina *bca*, 1243 jest skupina vyšší než 1234 atd.

Z toho jde, že ze skupin složených z týchž prvků jest ta nejnižší, v níž jsou prvky v pořádku abecedním nebo přirozeném, kdežto ta jest nejvyšší, v níž jest pořádek prvků obrácený.

Na př. ze skupin

složených z prvků a, d, e jest skupina *ade* nejnižší a *eda* nejvyšší,
„ „ 2, 3, 5 „ „ 235 „ 532 „ .

§ 131. O přestavách čili permutacích.

1) *Vysvětlení.* Každou skupinu obsahující *všecky* dané věci v libovolném pořádku za sebou, jmenujeme *přestavou* či *permutací*.

Jednotlivé přestavy liší se tudíž od sebe jen seřaděním prvků.

Dané prvky přestavovati či permutovati značí vytvořiti z nich *všecky* možné přestavy.

Abychom vyznačili, že prvky a, b, $c\ldots$ jest přestavovati, píšeme $P(a, b, \ldots c)$. Počet přestav z n prvků vesměs různých označíme P_n; počet přestav z n prvků, mezi nimiž jest α prvků stejných jednoho, β prvků stejných jiného druhu atd., označíme $P_{\alpha, \beta, \ldots}^{n}$.

2) *Jak tvoříme přestavy.* Nejblíže vyšší přestavu k libovolné přestavě (která není nejvyšší) obdržíme takto:

Prohlížíme prvky této přestavy od *pravé* ruky *k levé* a jakmile přijdeme z vyššího prvku na nižší, nahradíme tento nižší prvek nejblíže vyšším prvkem v pravo stojícím, načež prvek nahrazený i s prvky v pravo stojícími seřadíme v abecedním pořádku. Na př. čteme-li prvky přestavy $c\,b\,e\,d\,a$ od pravé ruky k levé, přijdeme nejprve z a na vyšší prvek d, z d na vyšší prvek e a z toho na nižší prvek b. Prvek b nahradíme tudíž nejblíže vyšším prvkem v pravo stojícím, t. j. prvkem d a ostatní prvky v pravo od b stojící, t. j. e a a, jakož i nahrazený prvek b seřadíme v pořádku abecedním. Tím nabudeme přestavy $c\,d\,a\,b\,e$, která jest ke přestavě $c\,b\,e\,d\,a$ přestavou nejblíže vyšší.

Na základě toho lze vytvořiti všecky přestavy z daných prvků.

K tomu cíli vytvořme nejprve přestavu nejnižší, z ní pak přestavu nejblíže vyšší, z této opět nejblíže vyšší atd., až dospějeme k přestavě nejvyšší.

Tím obdržíme ze dvou prvků přestavy ab, ba; ze tří prvků abc, acb, bac, bca, cab, cba; ze čtyř prvků

$abcd$,	$bacd$,	$cabd$,	$dabc$,
$abdc$,	$badc$,	$cadb$,	$dacb$,
$acbd$,	$bcad$,	$cbad$,	$dbac$,
$acdb$,	$bcda$,	$cbda$,	$dbca$,
$adbc$,	$bdac$,	$cdab$,	$dcab$,
$adcb$	$bdca$	$cdba$	$dcba$

atd.

Podobně tvoříme přestavy z prvků, z nichž některé jsou stejné. Na př. přestavy z prvků a, a a b jsou

aab, a z prvků a, a, b, b, ...	$aabb$,	$baab$,
aba,	$abab$,	$baba$,
baa,	$abba$,	$bbaa$.

Povšimnutí zasluhuje, že, tvoříce přestavy na př. z prvků a, b, c a d, přestavujeme nejprve dva prvky nejvyšší c a d, tak že dostaneme tolik přestav počínajících dvojinou ab, kolikrát lze prvky c a d přestaviti.

Podobně obdržíme tolik přestav počínajících prvkem a, kolikrát lze přestaviti prvky b, c a d, tolik přestav počínajících prvkem b, kolikrát lze přestaviti prvky a, c a d atd.

3) *Jak určíme počet přestav.* Majíce určiti počet všech přestav z určitého počtu prvků, rozeznávejme dva případy: a) dané prvky buďtež vesměs *různé*, b) některé z daných prvků buďtež *stejné*.

a) Prvky, jež přestavujeme, buďtež *různé*.

Počet přestav v tomto případě určíme na základě věty: *Počet přestav z* $\mathbf{k}$ *různých prvků jest* $\mathbf{k}$ *kráte větší než počet přestav z* $(\mathbf{k}-\mathbf{1})$ *různých prvků, t. j.* $P_k = k\,P_{k-1}$.

Důkaz. V každé $(k-1)$ prvkové přestavě může prvek $k^{tý}$ zaujati k různých míst, může totiž býti položen buď před ní, nebo za ní, nebo do některé z $(k-2)$ mezer, obsažených mezi jejími sousedními prvky. Z toho jde, že z *každé* $(k-1)$ prvkové přestavy vznikne připojením prvku k^{ho} k, *nových* přestav $k$prvkových.

Platí tudíž rovnice $P_k = k\,P_{k-1}$, jak jsme tvrdili.

Kladouce v rovnici této postupně za k čísla 2, 3, 4,..... $(n-1)$, n, obdržíme řadu rovnic

$$P_2 = 2\,P_1,$$
$$P_3 = 3\,P_2,$$
$$P_4 = 4\,P_3,$$
$$\vdots$$
$$P_{n-1} = (n-1)P_{n-2},$$
$$P_n = n\,P_{n-1},$$

z nichž jde násobením a potom krácením rovnice

$$P_n = P_1 . 2 . 3 . 4 .... (n-1)\,n.$$

Poněvadž jest z jednoho prvku jen jedna přestava možná, jest $P_1 = 1$ a tudíž

$$P_n = 1 . 2 . 3 . 4 ... (n-1)\,n. \qquad (1)$$

Z této rovnice jest patrno, *že počet přestav z* **n** *různých prvků roven jest součinu všech čísel celých od* **1** *až do* **n**.

Součin $1 . 2 . 3 . 4 .... (n-1)\,n$ jmenujeme *faktorialem* čísla n a označujeme jej $n!$

Vzorec 1. lze potom psáti ve tvaru

$$P_n = n!$$

b) Některé z prvků, jež přestavujeme, buďtež *stejné.*

Počet přestav z **n** *prvků, mezi nimiž jest* α *prvků stejných jednoho druhu,* β *stejných prvků jiného druhu atd., jest*

$$\frac{n!}{\alpha!\ \beta!...}$$

Důkaz. Prvek, jenž se vyskytuje αkráte mezi danými prvky, budiž na př. b a prvek βkráte se vyskytující d.

Označme nejprve i tyto stejné prvky různým způsobem, na př. prvky b označme $b_1, b_2, b_3 ... b_\alpha$.

a „ d „ $d_1, d_2, d_3 ... d_\beta$.

Potom tvořme přestavy ze všech n prvků, jakoby byly vesměs různé. Tím nabudeme P_n přestav.

Tyto přestavy seřaditi lze ve skupiny toho druhu, že v přestavách každé skupiny jsou pouze prvky $b_1, b_2, b_3 ... b_\alpha$ mezi sebou přestavovány, kdežto prvky ostatní svá místa podržují. Poněvadž α prvků $b_1, b_2 ... b_\alpha$ lze přestaviti $P_\alpha$kráte, jest v každé takové skupině P_α přestav. Položíme-li nyní

$b_1 = b_2 = \ldots = b_\alpha = b$, stanou se přestavy každé té skupiny vesměs stejnými, tak že zastupují přestavu jedinou. Počet přestav z n prvků, mezi nimiž jest α prvků stejných, činí tudíž jen $P_\alpha^{tý}$ díl počtu přestav z n různých prvků, t. j. $P_{\frac{n}{\alpha}} = \frac{P_n}{P_\alpha}$.

Tyto přestavy lze opět seřaditi ve skupiny toho druhu, že v přestavách každé skupiny jsou pouze prvky d_1, $d_2 \ldots d_\beta$ mezi sebou přestavovány, kdežto ostatní prvky svá místa podržují.

Poněvadž β různých prvků d_1, $d_2 \ldots d_\beta$ lze přestaviti P_β kráte, jest v každé takové skupině P_β přestav. Položíme-li nyní $d_1 = d_2 = \ldots d_\beta = d$, stanou se přestavy každé té skupiny vesměs stejnými, tak že zastupují přestavu jedinou.

Z toho jde, že počet přestav z n prvků, mezi nimiž jest α prvků stejných jednoho druhu a β prvků stejných jiného druhu, jest

$$\frac{P_{\frac{n}{\alpha}}}{P_\beta}, \text{ t. j. } P_{\frac{n}{\alpha, \beta}} = \frac{P_n}{P_\alpha . P_\beta}.$$

Poněvadž jest $P_n = n!$, $P_\alpha = \alpha!$ a $P_\beta = \beta!$, lze poslední vzorec psáti ve tvaru

$$P_{\frac{n}{\alpha, \beta}} = \frac{n!}{\alpha!\ \beta!},$$

jímž jest pravdivosť našeho tvrzení dokázána.

Kdyby mezi danými n prvky bylo ještě γ prvků stejných třetího druhu, byl by počet přestav roven $\frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!}$ atd.

Příklady.

1) Kolikerým způsobem lze 5 žáků v jedné lavici sedících přesaditi? Kolikrát jest při tom žák A krajním? Kolikerým způsobem lze přesazení vykonati, mají-li a) žáci A a B, b) žáci A, B a C vždy zůstati vedle sebe?

5 žáků lze přesaditi na P_5, t. j. na 120 způsobů. Žák A jest při tom na místě prvním nebo posledním $2P_4$kráte, žáci A a B zůstanou vedle sebe $2P_4$kráte a žáci A, B a C P_3^2kráte.

2) Kolik čtyřciferných čísel lze napsati číslicemi 1, 3, 5 a 7? Kolik číslicemi 1, 1, 3, 5 a kolik číslicemi 1, 1, 3, 3?

Prvními číslicemi lze napsati P_4, druhými $P_{\frac{4}{2}}$ a třetími $P_{\frac{4}{2,2}}$ čísel.

§ 132. O sestavách čili kombinacích.

1) *Vysvětlení.* Sestavou $r^{té}$ třídy z n prvků jmenujeme skupinu kterýchkoli r z oněch n prvků, při čemž pořádku, ve kterém prvky za sebou jdou, nedbáme.

Jednotlivé sestavy téže třídy liší se tudíž od sebe aspoň jedním prvkem.

Dle toho, skládá-li se každá sestava z prvků vesměs *různých* anebo jsou-li v některých sestavách i prvky *stejné*, rozeznáváme sestavy *bez opakování* a sestavy *s opakováním*.

Na př. *ab*, *ac*, *bc* jsou sestavy druhé třídy bez opakování z prvků *a*, *b* a *c*, kdežto *aa*, *ab*, *ac*, *bb*, *bc*, *cc* jsou sestavy druhé třídy z týchž prvků s opakováním.

Abychom vyznačili, že tvořiti jest z prvků *a*, *b*, *c*... sestavy třídy $r^{té}$ bez opakování, píšeme C^r (*a*, *b*, *c*,...), totéž označujeme při sestavách s opakováním C'^r (*a*, *b*, *c*,...).

Počet sestav třídy $r^{té}$ z *n* prvků bez opakování označíme C_n^r a s opakováním $C'^r{}_n$.

Číslo *r* jmenujeme *udavatelem* třídy.

2) *Jak tvoříme sestavy bez opakování.*

Dané prvky buďtež *a*, *b*, *c*, *d* a *e*.

Sestavy třídy *první* (uniony, extrata) jsou *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

Sestavy třídy *druhé* (biniony, amba) obdržíme spojíce postupně každý prvek s každým prvkem vyšším:

ab, *ac*, *ad*, *ae*,
bc, *bd*, *be*,
cd, *ce*,
de.

Sestavy třídy *třetí* (terna) obdržíme ze sestav třídy 2., jakož vůbec sestavy třídy $(r+1)^{ní}$ ze sestav třídy $r^{té}$, spojíce postupně každou sestavu třídy $r^{té}$ s každým prvkem vyšším než jsou prvky v ní obsažené.

Jsou tudíž sestavy třídy *třetí* *abc*, *abd*, *abe*, *acd*, *ace*, *ade*,
bcd, *bce*, *bde*,
cde;

sestavy třídy *čtvrté* (kvaterna) *abcd*, *abce*, *abde*, *acde*,
bcde;

sestava třídy *páté* (kvinterno) *abcde*.

Že tímto způsobem vytvoříme z daných prvků všecky sestavy určité třídy, jest patrno z toho, že přecházíme vždy od určité sestavy, sestavou nejnižší počínajíce, k sestavě *nejblíže vyšší*, až dospějeme k sestavě nejvyšší: nevynecháme tudíž sestavy žádné.

Jest patrno, že při sestavách bez opakování nesmí udavatel třídy (*r*) býti větší než počet prvků. Je-li udavatel třídy roven počtu prvků, obdržíme jedinou sestavu. Dále jest zřejmo, že počet kombinac třídy 1. roven jest vždy počtu prvků.

3) *Jak tvoříme sestavy s opakováním.*

Dané prvky buďtež *a*, *b*, *c* a *d*.

Sestavy třídy *první* jsou *a*, *b*, *c*, *d*.

Sestavy třídy *druhé* obdržíme spojíce a) každý prvek s ním samým a b) s každým prvkem vyšším. Tím nabudeme sestav

$$aa,\ ab,\ ac,\ ad,$$
$$bb,\ bc,\ bd,$$
$$cc,\ cd,$$
$$dd.$$

Sestavy třídy *třetí* obdržíme ze sestav třídy *druhé*, jakož vůbec sestavy třídy $(r+1)^{ni}$ ze sestav třídy $r^{té}$, spojíce a) každou sestavu třídy $r^{té}$ *s nejvyšším* prvkem v ní přicházejícím a b) se všemi ostatními prvky *vyššími*.

Jsou tudíž sestavy třídy *třetí* s opakováním

$$aaa,\ aab,\ aac,\ aad,\ abb,\ abc,\ abd,\ acc,\ acd,\ add,$$
$$bbb,\ bbc,\ bbd,\ bcc,\ bcd,\ bdd,$$
$$ccc,\ ccd,\ cdd,$$
$$ddd;$$

sestavy třídy *čtvrté* s opakováním

aaaa, aaab, aaac, aaad, aabb, aabc, aabd, aacc, aacd, aadd, abbb, abbc, abbd, abcc, abcd, abdd, accc, accd, acdd, addd, bbbb, ... bccc, bccd .... cccc, ... dddd;

sestavy třídy *páté* s opakováním

aaaaa, aaaab, ..., aaabb, aaabc, aaabd, aaacc, aaacd, ..., aabbb, aabbc, aabbd, aabcc, ..., abbbb, ..., bbbbb atd.

Že tímto způsobem vytvoříme z daných prvků všecky sestavy určité třídy s opakováním, jest patrno z toho, že počínajíce nejnižší sestavou, přecházíme postupně k sestavám *nejblíže vyšším*, až dospějeme k sestavě nejvyšší. Nevynecháme tudíž sestavy žádné.

Jest také zřejmo, že v tomto případě není udavatel třídy (r) nijak obmezen, může totiž býti i větší než počet prvků daných.

Počet sestav třídy 1. jest i v tomto případě roven počtu prvků.

4) *Počet sestav z* **n** *prvků třídy* **r**^{té} *bez opakování.*

a) Počet sestav bez opakování z n prvků třídy $k^{té}$ jest $\frac{n-k+1}{k}$ kráte větší než počet sestav bez opakování z n prvků třídy $(k-1)^{ni}$, t. j.

$$C_n{}^k = \frac{n-k+1}{k} C_n{}^{(k-1)}.$$

Důkaz. Z každé *kombinace* třídy $(k-1)^{ni}$ tvořme *nové skupiny* tím, že ji spojíme postupně s každým z $[n-(k-1)]$ prvků, které v ní nejsou (tedy nikoli jen s prvky vyššími, než jsou prvky v ní obsažené, jako jsme činili tvoříce z kombinac třídy $(k-1)^{ni}$ kombinace třídy $k^{té}$). Tím nabudeme z každé $(k-1)$ prvkové *kombinace* $(n-k+1)$, tudíž ze všech $(k-1)$ prvkových *kombinac* $(n-k+1)$ $C_n{}^{(k-1)}$ **k** *prvkových skupin.*

Snadno poznáme, že, tvoříce tyto skupiny, vytvoříme každou k prvkovou *kombinaci* k kráte. Tak na př. *čtyřprvková* kombinace $a\,b\,c\,d$ vznikne při tom

z kombinace $a\,b\,c$, spojíme-li ji s d,
„ „ $b\,c\,d$, „ „ „ a,
„ „ $a\,c\,d$, „ „ „ b,
„ „ $a\,b\,d$, „ „ „ c,

tedy celkem *čtyřikráte*. Z toho jde, že počet *kombinac* k prvkových (třídy $k^{té}$) jest $k^{tým}$ dílem počtu oněch skupin.

t. j. $$C_n{}^k = \frac{n-k+1}{k} C_n{}^{k-1}. \qquad (1)$$

b) Kladouce ve vzorci 1. postupně za k čísla 2, 3, 4, ... $(r-1)$, r, obdržíme rovnice

$$C_n{}^2 = \frac{n-1}{2} C_n{}^1,$$
$$C_n{}^3 = \frac{n-2}{3} C_n{}^2,$$
$$C_n{}^4 = \frac{n-3}{4} C_n{}^3,$$
$$\vdots$$
$$C_n{}^{(r-1)} = \frac{n-r+2}{r-1} C_n{}^{(r-2)},$$
$$C_n{}^{(r)} = \frac{n-r+1}{r} C_n{}^{(r-1)},$$

jichž násobením a potom krácením vznikne rovnice

$$C_n{}^r = C_n{}^1 \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdots \frac{n-r+2}{r-1} \cdot \frac{n-r+1}{r}.$$

Avšak

$$C_n{}^1 = n \text{ čili } \frac{n}{1},$$

tudíž

$$C_n{}^r = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+2)(n-r+1)}{1.2.3.4\ldots(r-1)r}. \qquad (2)$$

Vzorcem 2. určen jest počet kombinac z n prvků třídy $r^{té}$ bez opakování. Číslo $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+2)(n-r+1)}{r!}$ označujeme kratšeji $\binom{n}{r}$, což čteme „n nad r“ anebo je píšeme $(n)_r$, čtouce „n v závorce s příponou r“.

Dle toho jest na př.

$C_4{}^1 = \binom{4}{1} = 4$, $C_4{}^2 = \binom{4}{2} = \frac{4.3}{2!} = 6$, $C_4{}^3 = \binom{4}{3} = \frac{4.3.2}{3!} = 4$, $C_4{}^1 = \binom{4}{4} = \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} = 1$.

Jako v posledním příkladě $\binom{4}{4} = 1$, tak jest všeobecně $\binom{n}{n} = 1$, jak se rozvinutím tohoto výrazu přesvědčiti lze. Týmž způsobem lze se přesvědčiti, že $\binom{n}{n+1} = 0$, $\binom{n}{n+2} = 0$ atd., jak i z toho jest patrno, že z n prvků není kombinac třídy $(n+1)^{ní}$, $(n+2)^{té}$ atd. bez opakování.

5) *Počet sestav z* **n** *prvků třídy* **k**^{té} *s opakováním.*

a) Počet sestav z n prvků třídy $k^{té}$ s opakováním jest $\frac{n+k-1}{k}$ kráte větší než počet sestav z n prvků třídy $(k-1)^{ní}$ s opakováním, t. j.

$$C'_{n}{}^{k} = \frac{n+k-1}{k} C'_{n}{}^{(k-1)}.$$

Důkaz. Z každé *kombinace* třídy $(k-1)^{ní}$ tvořme *nové skupiny k prvkové* tím, že ji spojíme postupně a) s každým prvkem v ní se vyskytujícím, t. j. s $(k-1)$ prvky a b) se všemi n prvky bez výjimky (tedy nikoliv jen s nejvyšším prvkem v ní se vyskytujícím a potom s každým z prvků vyšších, jak jsme činili tvoříce z kombinac třídy $(k-1)^{ní}$ kombinace třídy $k^{té}$ s opakováním).

Tím nabudeme z každé $(k-1)$ prvkové kombinace $(n+k-1)$, tudíž ze všech $(k-1)$ prvkových *kombinac* $(n+k-1)\,C'_{n}{}^{(k-1)}$ *nových* **k** *prvkových skupin.* Snadno poznáme, že tvoříce tyto skupiny, vytvoříme každou **k** *prvkovou kombinaci* **k** kráte. Tak na př. *čtyřprvková* kombinace $a\,a\,a\,a$ vznikne při tomto tvoření

z kombinace $a\,a\,a$, spojíme-li ji s prvním a,
„ „ $a\,a\,a$, „ „ s druhým a,
„ „ $a\,a\,a$, „ „ s třetím a

a konečně z téže kombinace $a\,a\,a$, spojujeme-li ji se všemi prvky bez výjimky tedy také s prvkem a.

Podobně vznikne čtyřikráte kombinace $a\,a\,a\,b$,

a to po prvé spojením kombinace $a\,a\,b$ s prvním a,
„ „ „ druhé „ „ $a\,a\,b$ „ druhým a,

po třetí obdržíme ji, spojujíce kombinaci $a\,a\,b$ postupně se všemi prvky bez výjimky, tudíž také s prvkem a a konečně objeví se po čtvrté, spojujeme-li kombinaci $a\,a\,a$ postupně se všemi prvky bez výjimky, tudíž také s prvkem b.

Z toho jde, že počet kombinac k prvkových ($k^{té}$ třídy) jest $k^{tým}$ dílem počtu oněch skupin, t. j.

$$C'_{n}{}^{k} = \frac{n+k-1}{k} C'_{n}{}^{(k-1)}. \qquad (3)$$

b) Kladouce ve vzorci 3. postupně za k čísla 2, 3, 4 ... $(r-1)$, r, obdržíme rovnice

$$C'^{2}_{n} = \frac{n+1}{2} C'^{1}_{n},$$

$$C'^{3}_{n} = \frac{n+2}{3} C'^{2}_{n},$$

$$C'^{4}_{n} = \frac{n+3}{4} C'^{3}_{n},$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$C'^{(r-1)}_{n} = \frac{n+r-2}{r-1} C'^{(r-2)}_{n}$$

$$C'^{r}_{n} = \frac{n+r-1}{r} C'^{r-1}_{n},$$

jichž znásobením a potom krácením vznikne rovnice

$$C'^{r}_{n} = C'^{1}_{n} \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} \cdot \frac{n+3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n+r-2}{r-1} \cdot \frac{n+r-1}{r}.$$

Poněvadž $C'^{1}_{n} = n = \frac{n}{1}$,

jest $C'^{r}_{n} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+r-2)(n+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (r-1) \cdot r}$, čili, převrátíme-li pořádek činitelů v čítateli,

$$C'^{r}_{n} = \frac{(n+r-1)(n+r-2)\ldots(n+3)(n+2)(n+1)n}{r!}. \qquad (4)$$

Vzorcem tímto určen jest počet sestav z n prvků třídy $r^{té}$ s opakováním. Dle označení v odstavci 4. zavedeného lze výraz na pravé straně vzorce 4. označiti $\binom{n+r-1}{r}$, tak že lze vzorec tento psáti ve tvaru

$$C'^{r}_{n} = \binom{n+r-1}{r}. \qquad (4)$$

Poněvadž jest též $C^{r}_{n+r-1} = \binom{n+r-1}{r}$.

jest $C'^{r}_{n} = C^{r}_{n+r-1}$, t. j.:

Počet kombinac z **n** *prvků třídy* **r**^{té} *s opakováním jest roven počtu kombinac z* $(\mathbf{n}+\mathbf{r}-\mathbf{1})$ *prvků třídy* **r**^{té} *bez opakování.*

Příklady.

1) Ve vzorcích pro obecný člen a součet n členů řady $\begin{matrix}\text{arithmetické}\\ \text{geometrické}\end{matrix}$ vyskytuje se 5 čísel. Jsou-li tudíž tři z těchto čísel dána, lze ostatní dvě z těchto vzorců vypočísti. Kolik jest tu případů možných?

Všech možných případů jest $\binom{5}{3}$, t. j. 10.

2) Kolikerým způsobem lze 30 různých koulí rozděliti ve skupiny po 10 a 20 koulích?

$\binom{30}{10}$ způsoby.

3) Kolikerým způsobem lze 15 různých koulí rozděliti ve tři skupiny po 3, 5 a 7 koulích?

Z 15ti koulí lze vybrati 3 koule $\binom{15}{3}$ a ze zbývajících 12ti 5 koulí $\binom{12}{5}$ způsoby. V udané tři skupiny lze tudíž 15 koulí rozděliti $\binom{15}{3} \cdot \binom{12}{5}$ způsoby.

4) Kolik přímek jest určeno n body, z nichž vždy jen dva jsou na přímce?

Za kolikeronásobnou bylo by pokládati přímku, na níž by bylo r těchto bodů?

Kolik přímek jest tudíž určeno n body, z nichž r jest na přímce, jsou-li kromě těchto r bodů vždy jen dva na přímce?

Poněvadž přímka jest určena dvěma body, jest n body určeno $\binom{n}{2}$ přímek. Je-li r těchto bodů na přímce, nutno ji tudíž míti za $\binom{r}{2}$-násobnou. Z toho jde, že n body, z nichž r jest na přímce, určeno jest $\binom{n}{2} - \binom{r}{2} + 1$ přímek. Podobně rozřešiti lze příklady 5., 6., 7., 8. a 9.

5) V kolika bodech protíná se n přímek, procházejí-li vždy jen dvě bodem? Za kolikeronásobný bylo by pokládati bod, jímž by r těchto přímek procházelo? V kolika bodech protíná se tudíž n přímek, z nichž r procházejí bodem?

6) V kolika bodech protínají se úhlopříčny v $n$úhelníku vrcholy nepočítajíc?

7) Kolik kružnic určeno jest n body v rovině?

8) Kolik rovin určeno jest n body v prostoru?

9) Kolik koulí určeno jest n body v prostoru?

10) Kolik členů má stejnoměrný mnohočlen stupně 5. pro x, y a z, obsahuje-li všecky členy stupně 5., které lze z činitelů x, y a z vytvořiti?

Tento mnohočlen má tolik členů kolik lze vytvořiti kombinac páté třídy ze tří prvků x, y a z s opakováním, tedy $\binom{3+5-1}{5}$ členů.

11) V úloze Apollonické jde o sestrojení kružnice, která se tří daných kružnic dotýká. Ve zvláštních případech mohou některé nebo všecky dané kružnice přejíti v body nebo přímky, tak že jde potom o sestrojení kružnice, která se na př. kružnice a dvou přímek, nebo tří přímek dotýká, nebo která třemi body prochází atd. Kolik různých úloh jest tu možno?

6) Z významu symbolu $\binom{n}{k}$ v nauce o kombinacích vyplývají některé vlastnosti čísla jím vyznačeného, z nichž nejdůležitější tuto vytkneme.

a) Zavedeme-li do rovnice 1. v odstavci 4. za C_n^k a C_n^{k-1} symboly $\binom{n}{k}$ a $\binom{n}{k-1}$, obdržíme rovnici

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}, \tag{1}$$

která nás učí, jak z $\binom{n}{k-1}$ vypočísti lze $\binom{n}{k}$.

b) Jest patrno, že *z* **n** *prvků jest možno tolik kombinac třídy* **k**^{té}, *kolik* (**n** — **k**)^{té}.

Neboť vybéřeme-li z daných n prvků kteroukoli kombinaci třídy $^{k}_{n-k}$, zbude z nich $^{n-k}_{k}$ prvků tvořících *jedinou* kombinaci třídy $^{n-k}_{k}$. Z toho jde, že ke každé kombinaci třídy $^{k}_{n-k}$ náleží jediná kombinace třídy $^{n-k}_{k}$: jest tedy kombinac obého druhu stejný počet.

Máme tudíž rovnici

$$C_n^k = C_n^{(n-k)} \text{ čili } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{2}$$

c) Vzorec 2. vyplývá též z rovnice

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}, \tag{3}$$

jejíž platnost nyní dokážeme.

Dle § 132., 4. jest $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$.

Násobíme-li čítatele i jmenovatele pravé strany číslem $(n-r)!$, nabude předcházející rovnice tvaru

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)!}{r!\,(n-r)!}.$$

A poněvadž jest

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)! = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\underbrace{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\ldots 3.2.1}_{(n-r)!} = n!,$$

lze ji též psáti $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, jak jsme tvrdili.

Kladouce v tomto vzorci po prvé za r číslo k a po druhé číslo $(n-k)$, nabudeme dvou rovnic, a to

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, z nichž jde,

jest $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, jako v b).

d) Kombinace $k^{té}$ třídy bez opakování z n prvků a, b, c, d, ... lze rozděliti dle každého prvku, na př. dle prvku a, ve dva druhy: kombinace prvního druhu neobsahují prvku a, v kombinacích druhého druhu prvek tento jest.

Jest patrno, že kombinac prvního druhu jest tolik, kolik lze vytvořiti kombinac třídy $k^{té}$ z $(n-1)$ prvků b, c, d... (t. j. bez prvku a). Avšak těchto kombinac jest $\binom{n-1}{k}$.

Abychom určili počet kombinac druhého druhu, soudíme takto: Vynecháme-li v každé této kombinaci prvek a, vzniknou z nich vesměs různé a to všecky kombinace třídy $(k-1)^{ní}$ prvek a neobsahující, vytvořené z $(n-1)$ prvků b, c, d...*) Poněvadž kombinac třídy $(k-1)^{ní}$ z $(n-1)$ prvků jest $\binom{n-1}{k-1}$, jest tolikéž kombinac druhého druhu. A poněvadž všech kombinac z n prvků třídy $k^{té}$ jest $\binom{n}{k}$, platí rovnice $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

§ 133. O nástavách čili variacích.

1) *Výměr variac a jich tvoření. Variace* $\begin{matrix}\textit{bez opakování}\\ \textit{s opakováním}\end{matrix}$ *třídy* $\mathbf{k}^{té}$ *z* $\mathbf{n}$ *prvků obdržíme vytvoříce všecky přestavy z každé kombinace* $\begin{matrix}\textit{bez opakování}\\ \textit{s opakováním}\end{matrix}$ *třídy* $\mathbf{k}^{té}$ *z daných* $\mathbf{n}$ *prvků.*

Tvoření variac vyžaduje tudíž dvou výkonů: *tvoření kombinac a jich permutování.*

---

*) Že vynecháním prvku a ve *všech* kombinacích druhého druhu, vzniknou *všecky* kombinace třídy $(k-1)^{ní}$ z $(n-1)$ prvků b, c, d, ..., jest patrno z toho, že, kdyby kromě nich byly ještě jiné kombinace třídy $(k-1)^{ní}$, obdrželi bychom z nich, spojíce je s prvkem a, kombinace třídy $k^{té}$, které mezi kombinacemi 2^{ho} druhu třídy $k^{té}$ původně nebyly. To však protiví se podmínce, že v kombinacích 2^{ho} druhu jsou všecky kombinace třídy $k^{té}$ obsahující prvek a.

Abychom vyznačili, že tvořiti jest z n prvků $a, b, c, d, \ldots$ variace třídy $k^{té}$ *bez opakování*, *s opakováním*, píšeme $V^k(abcd\ldots)$ / $V'^k(abcd)$ a jich počet označujeme V_n^k / $V'_n{}^k$.

Jsou-li a, b, c, d dané prvky, jsou

$V^1(abcd)$: a, b, c, d;

$C^2(abcd)$:	$V^2(abcd)$:	$C^3(abcd)$:	$V^3(abcd)$:
ab,	ab, ba,	abc,	$abc, acb, bac, bca, cab, cba$,
ac,	ac, ca,	abd,	$abd, adb, bad, bda, dab, dba$,
ad,	ad, da,	acd,	$acd, adc, cad, cda, dac, dca$,
bc,	bc, cb,	bcd,	$bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb$;
bd,	bd, db,		
cd,	cd, dc;		

a t. d.

$V'^1(abcd)$: a, b, c, d;

$C'^2(abcd)$:	$V'^2(abcd)$:	$C'^3(abcd)$:	$V'^3(abcd)$:
aa,	aa	aaa,	aaa,
ab,	ab, ba,	aab,	aab, aba, baa,
ac,	ac, ca,	aac,	aac, aca, caa,
ad,	ad, da,	aad,	aad, ada, daa,
bb,	bb,	abb,	abb, bab, bba,
bc,	bc, cb,	abc,	$abc, acb, bac, bca, cab, cba$,
bd,	bd, db,	abd	$abd, adb, bad, bda, dab, dba$
cc,	cc,	a t. d.	a t. d.
cd,	cd, dc,		
dd,	dd;		

Všimneme-li si všech variac třídy druhé bez opakování, seznáme, že je lze přímo obdržeti, *spojíme-li každý prvek postupně se všemi ostatními.* Podobně obdržíme variace třídy třetí bez opakování z variac třídy druhé, jakož vůbec variace třídy $k^{té}$ bez opakování z variac třídy $(k-1)^{ní}$, *spojíce každou variaci třídy* $(k-1)^{ní}$ *postupně s každým prvkem, který v ní není* Tím obdržíme variace v tomto postupu:

$V^1(abcd)$: a, b, c, d.

$V^2(abcd)$: $ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc$.

$V^3(abcd)$: $abc, abd, acb, acd, adb, adc, bac, bad, bca, bcd$ a t. d.

Taktéž variace s opakováním lze tvořiti přímo. Pozorujíce totiž již vytvořené variace tohoto druhu, poznáváme, že variace třídy druhé s opakováním povstanou, spojíme-li postupně každý prvek se všemi prvky bez výjimky.

Podobně povstanou variace třídy třetí s opakováním z variac třídy druhé, jakož vůbec variace třídy $k^{té}$ s opakováním z variac třídy $(k-1)^{ní}$, spojíme-li postupně každou variaci třídy $(k-1)^{ní}$ se všemi prvky bez výjimky. Obdržíme tu z variac třídy první ... a, b, c, d nejprve $V'^2(abcd)$: aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd, ca, cb, cc, cd, da, db, dc, dd, potom $V'^3(abcd)$: aaa, aab, aac, aad, aba, abb, abc abd, aca, acb, acc, acd atd.

2) *O počtu variac třídy* r*té z* n *prvků.*

a) *Počet variac bez opakování třídy* r*té z* n *prvků rovná se*

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1).$$

Důkaz. Z přímého tvoření těchto variac jest patrno, že platí rovnice

$$V_n^k = (n-k+1)\,V_n^{(k-1)}.$$

Kladouce v této rovnici za k postupně čísla 2, 3, 4, ... $(r-1)$, r, nabudeme rovnic

$$\begin{aligned} V_n^2 &= (n-1)\,V_n, \\ V_n^3 &= (n-2)\,V_n^2, \\ &\vdots \\ V_n^{r-1} &= (n-r+2)\,V_n^{r-2}, \\ V_n^r &= (n-r+1)\,V_n^{r-1}, \end{aligned}$$

jichž násobením a potom krácením vznikne rovnice

$$V_n^r = V_n^1\,(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)(n-r+1).$$

Poněvadž jest $V_n^1 = n$, jest pravdivosť našeho tvrzení dovozena.

Poznámka. K témuž výsledku bylo lze dospěti takto: Poněvadž variace bez opakování třídy $r^{té}$ vzniknou přestavováním kombinac bez opakování třídy $r^{té}$, jest $V_n^r = C_n^r$. P_r čili $V_n^r = \binom{n}{r} r! = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$, jako prve.

b) *Počet variac s opakováním třídy* r*té z* n *prvků jest* n^r.

Důkaz. Z přímého tvoření těchto variac vyplývá, že platí rovnice

$$V'^k_n = nV'^{(k-1)}_n.$$

Kladouce v této rovnici za k postupně čísla 2, 3, 4, ... $(r-1)$, r, nabudeme rovnic:

$$\begin{aligned} V'^2_n &= nV'^1_n, \\ V'^3_n &= nV'^2_n, \\ &\vdots \\ V'^{(r-1)}_n &= nV'^{(r-2)}_n, \\ V'^r_n &= nV'^{(r-1)}_n, \end{aligned}$$

jichž násobením a potom krácením vznikne rovnice

$V'^r_n = V'^1_n \cdot n^{r-1}$, čili, poněvadž jest $V'^1_n = n$,

$V'^r_n = n^r$, jak jsme tvrdili.

Lze-li i v tomto případě souditi jako v poznámce k větě a)?

§ 134. O variacích ve smyslu širším.

1) Tvoření variac s opakováním lze též takto vysvětliti:

Jsou-li dány *stejné* řady prvků

$$a, b, c, d \ldots$$
$$a, b, c, d \ldots$$
$$a, b, c, d \ldots$$
$$a, b, c, d \ldots,$$

obdržíme variace třídy druhé s opakováním, spojíce každý prvek první řady s každým prvkem řady druhé. Spojíce potom každou variaci třídy druhé postupně s každým prvkem řady třetí, obdržíme variace třídy třetí atd. K vytvoření variac třídy $k^{té}$ bylo by tu potřebí k řad.

Týmž způsobem, jako variace s opakováním vznikají ze stejných řad, vznikají variace ve smyslu širším z řad nestejných. Máme-li na př. řady prvků

$$a_1, b_1, c_1,$$
$$a_2, b_2,$$
$$a_3, b_3, c_3,$$

jsou variace třídy druhé z prvků prvních dvou řad

$$a_1a_2, a_1b_2, b_1a_2, b_1b_2, c_1a_2, c_1b_2$$

a variace třídy třetí z prvků všech tří řad

$$a_1a_2a_3, a_1a_2b_3, a_1a_2c_3, a_1b_2a_3, a_1b_2b_3, a_1b_2c_3, b_1a_2a_3, b_1a_2b_3, b_1a_2c_3 \text{ atd.}$$

Jest patrno, že každý prvek jedné řady objeví se tu ve spojení s každým prvkem řad ostatních, ale se žádným prvkem z téže řady.

Z tvoření těchto variac jest zřejmo, že, je-li v první řadě prvků n_1, ve druhé n_2, ve třetí $n_3, \ldots$ v $k^{té}$ n_k, *že jest počet všech variac třídy* $k^{té}$ *z těchto prvků roven součinu* $n_1 n_2 n_3 \ldots n_k$. Pro $n_1 = n_2 = n_3 = \ldots n_k = n$ přejde tento součin v n^k, což se srovnává s výsledkem, kterého jsme nabyli pro počet variac s opakováním.

2) Variace tohoto druhu tvoříme, násobíce spolu několik mnohočlenů, na př. $(a_1 + b_1 + c_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3 + c_3)$.

Násobíme tu totiž nejprve první mnohočlen druhým, obdržený mnohočlen mnohočlenem třetím atd.

Avšak násobíce první mnohočlen druhým, spojujeme každý člen jednoho s každým členem druhého v součin, čili jinými slovy, tvoříme variace třídy druhé, při čemž místo prvků řad máme členy prvních dvou mnohočlenů. Násobíce potom obdržený součin mnohočlenem třetím, tvoříme variace třídy třetí a t. d.

3) Pro další vyšetřování jest důležit případ, jsou-li při tvoření variac třídy $n^{té}$ v každé z n řad jen dva prvky.

$$a_1, b_1,$$
$$a_2, b_2,$$
$$a_3, b_3,$$
$$\vdots$$
$$a_n, b_n.$$

Mezi variacemi třídy $n^{té}$, vytvořenými z těchto řad, budou variace obsahující z prvního sloupce prvků n, $(n-1)$, $(n-2)$, ... 2, 1, 0. Snadno rozhodneme, kolik variac do každého toho druhu náleží.

Mysleme si k libovolných prvků z prvního sloupce. Abychom vytvořili k nim příslušnou variaci třídy $n^{té}$, jest nám spojiti je s $(n-k)$ zcela určitými prvky sloupce druhého, totiž s prvky, které nejsou s prvními k prvky v týchž k řadách. Z toho jde, že jest mezi všemi variacemi třídy $n^{té}$ tolik variac obsahujících k prvků prvního sloupce, kolikrát lze z n prvků tohoto sloupce vybrati k prvků, t. j. kolik jest kombinac bez opakování z n prvků třídy $k^{té}$. A poněvadž těchto kombinac jest $\binom{n}{k}$, jest tolikéž variac třídy $n^{té}$, v nichž jest k prvků z prvního sloupce.

Kladouce za k postupně čísla n, $(n-1)$, $(n-2)$... 2, 1, 0, dospějeme k výsledku, že mezi variacemi třídy $n^{té}$ z daných n dvojprvkových řad jest variac obsahujících z prvního sloupce prvků

$$n,\ (n-1),\ (n-2)\ldots\ 2.\ 1,\ 0,$$
$$\binom{n}{n},\ \binom{n}{n-1},\ \binom{n}{n-2}\ \ldots\ \binom{n}{2},\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{0}$$

čili dle § 132., 6 b) $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}\ \ldots \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$.

4) Z 2. a 3. odstavce jest patrno, že součin $(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)\ldots(a_n+b_n)$ skládá se

z $\binom{n}{0}$, t. j. jednoho členu, který obsahuje n činitelů a a žádného činitele b,

z $\binom{n}{1}$ členů, které obsahují $(n-1)$ činitelů a a 1 činitele b,

„ $\binom{n}{2}$ „ „ „ $(n-2)$ „ „ „ 2 „ „

„ $\binom{n}{3}$ „ „ „ $(n-3)$ „ „ „ 3 „ „

⋮ ⋮

„ $\binom{n}{n-2}$ „ „ „ 2 „ „ „ $(n-2)$ „ „

„ $\binom{n}{n-1}$ „ „ „ 1 „ „ „ $(n-1)$ „ „

„ $\binom{n}{n}$, t. j. z jednoho členu, který neobsahuje žádného činitele a a n činitelů b.

Je-li $a_1=a_2=a_3=\ldots.a_n=a$, mají členy, v nichž jest k činitelů a, společného činitele a^k a každý z nich skládá se mimo to z $(n-k)$ činitelů b. Vytknouce tudíž z těchto členů společného jich činitele a^k, obdržíme v závorce součet všech kombinac bez opakování třídy $(n-k)^{té}$ z prvků b. Z toho jde, že jest

$$(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)\ldots.(a+b_n)=a^n+a^{n-1}\Sigma C^1(b_1,\ b_2,\ b_3\ldots.b_n)+$$
$$+a^{n-2}\Sigma C^2(b_1,\ b_2\ldots.b_n)+\ldots.a^k\Sigma C^{(n-k)}(b_1,\ b_2\ldots.b_n)+\ldots.$$
$$\ldots a\Sigma C^{(n-1)}(b_1,\ b_2,\ldots b_n)+b_1.\ b_2.\ b_3\ldots b_n,$$

při čemž lze i za součin $b_1.b_2.b_3\ldots b_n$, jakožto jedinou kombinaci z n prvků třídy $n^{té}$, psáti $C^n(b_1,\ b_2\ldots.b_n)$.

Příklady.

1) Kolik částečných součinů obdržíme vykonajíce násobení obsažené ve výraze $(a+b+c)^4$?

Kolik členů obdržíme po sloučení stejnojmenných částečných součinů?

Vytčeným násobením nabudeme 3^4 členů a po sloučení stejnojmenných částečných součinů $\binom{3+4-1}{4}$ členů.

2) Kolik dělitelů má číslo, které se skládá z n různých prvočinitelů?

3) Kolik dělitelů má číslo, v němž jest číslo a prvočinitelem α kráte, číslo b prvočlenem β kráte a číslo c γ kráte?

Návod. Žádaný počet roven jest počtu variac třídy 3., vytvořených z prvků

$$\begin{array}{llll} 1, & a, & a^2, & a^3 \ldots . a^{\alpha} \\ 1. & b, & b^2, & b^3 \ldots . b^{\beta} \\ 1, & c, & c^2, & c^3 \ldots . c^{\gamma}. \end{array}$$

Tím podán jest i návod k řešení příkl. 2.

§ 135. O poučce binomické.

1) Jsou-li v součinu

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3) \ldots . (a_n + b_n) \qquad (1)$$

čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_n$ vesměs stejna a to rovna číslu a

a i „ $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ vesměs rovna číslu b, přejde tento součin v mocninu $(a+b)^n$.

Členy jednoho druhu, které vynásobením součinu 1. vzniknou, na př. členy obsahující k činitelů a a tudíž $(n-k)$ činitelů b, stanou se v tomto zvláštním případě vesměs stejnými, nabývajíce tvaru $a^k b^{(n-k)}$ a poněvadž takových členů vznikne násobením $\binom{n}{k}$ (§. 134., 3.), obdržíme jich sloučením $\binom{n}{k} a^k b^{(n-k)}$.

Kladouce v tomto výraze za k postupně $0, 1, 2, 3, \ldots . k \ldots . (n-1), n$, obdržíme $\binom{n}{0} a^n, \binom{n}{1} a^{n-1} b, \binom{n}{2} a^{n-2} b^2, \binom{n}{3} a^{n-3} b^3, \ldots \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \ldots . \binom{n}{n-1} a b^{n-1}, \binom{n}{n} b^n$, jakožto členy nabyté sloučením stejnojmenných členů, které vzniknou vynásobením v tomto zvláštním případě. Jesti tudíž

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots . \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \ldots .$$
$$\binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n,$$

kdež n, značíc počet činitelův $(a+b)$, jest kladné číslo *celé*. Poučku v tomto vzorci obsaženou jmenujeme poučkou *binomickou*.

Součinitele $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2} \ldots$, všeobecně $\binom{n}{k}$ jmenujeme součiniteli *binomickými*.*)

2) Ze vzorce pro $(a+b)^n$ odvozeného jest patrno:

a) $n^{tá}$ mocnina dvojčlenu skládá se z $(n+1)$ členů tvaru $\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ čili, poněvadž $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, ze členů tvaru $\binom{n}{n-k} a^{n-k} b^k$, kdež k nabývá všech hodnot celých od 0 do n.

---

*) O součinitelích binomických viz § 88. Vytvoření Pascalova trojúhelníku odů vodněno jest vzorcem $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$. (§ 132 6*d*).

b) Jsou-li čísla a a b kladná, jsou všecky tyto členy kladné; je-li některé z čísel a a b záporné nebo jsou-li obě záporná, jsou ty členy $\begin{matrix}\textit{kladné,}\\ \textit{záporné,}\end{matrix}$ v nichž jest $\begin{matrix}\textit{sudý}\\ \textit{lichý}\end{matrix}$ počet záporných činitelův a a b.

Na př. $(a-b)^{10} = a^{10} - \binom{10}{1} a^9 b + \binom{10}{2} a^8 b^2 - \binom{10}{3} a^7 b^3 + \binom{10}{4} a^6 b^4 - \binom{10}{5} a^5 b^5 \ldots . - \binom{10}{9} a b^9 + b^{10}$.

c) Binomičtí součinitelé členův od obou krajů stejně vzdálených se sobě rovnají, neboť poněvadž $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, jest $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$ atd.

Abychom po sobě jdoucí binomické součinitele rychle vypočetli, užíváme vzorce

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \frac{n-k+1}{k}. \qquad (\S\ 132.,\ 6a)$$

Na př. pro součinitele mocniny 10. obdržíme

$$\binom{10}{0} = 1, \binom{10}{1} = 10, \binom{10}{2} = 10\,\frac{9}{2} = 45, \binom{10}{3} = 45\,\frac{8}{3} = 120, \binom{10}{4} = 120\,\frac{7}{4} = 210. \binom{10}{5} =$$

$$= 210\,\frac{6}{5} = 252.$$

Poněvadž jest $\binom{10}{6} = \binom{10}{4}$, $\binom{10}{7} = \binom{10}{3}$, $\binom{10}{8} = \binom{10}{2}$, $\binom{10}{9} = \binom{10}{1}$, jsou součinitelé 10. mocniny dvojčlenu 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.

Odvoďte z těchto součinitelů součinitele 11. mocniny dvojčlenu (§ 132., 6*d*).

Dokažte, že součet binomických součinitelů $n^{té}$ mocniny dvojčlenu jest pro celistvé a kladné n roven 2^n.

Dokažte, že pro celistvé a kladné n jest

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots = 0.$$

Poznámka. Newton (1642—1727) dokázal (r. 1675), že pro *každé* n platí rovnice

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{4}x^4 + \ldots .,$$

kdež řada na pravé straně se vyskytující jest pro záporné nebo lomené n nekonečná, jsouc $\begin{matrix}\textit{konvergentní}\\ \textit{divergentní}\end{matrix}$ pro $\begin{matrix}x < 1.\\ x \geqq 1.\end{matrix}$ Je-li číslo n celistvé a kladné, stává se z oné řady nekonečné řada konečná přestávající členem $\binom{n}{n}x^n$, poněvadž jest potom $\binom{n}{n+1} = 0$, $\binom{n}{n+2} = 0$ atd.

Poučka binomická svrchu odvozená jeví se tím jakožto zvláštní případ poučky Newtonovy. —

Užívajíce poučky Newtonovy vypočteme na př. $\sqrt{101}$ takto:

$$\sqrt{101} = \sqrt{100+1} = 10\sqrt{1+\frac{1}{100}} = 10\left(1+\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Avšak

$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}\frac{1}{100} + \binom{\frac{1}{2}}{2}\frac{1}{100^2} + \binom{\frac{1}{2}}{3}\frac{1}{100^3} + \ldots .$$

Poněvadž

$$\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}-1}{2} = -\frac{1}{8}, \binom{\frac{1}{2}}{3} = -\frac{1}{8}\cdot\frac{\frac{1}{2}-2}{3} = \frac{1}{16}^{*)} \text{ atd.},$$

jest $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10000} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1000000} + \ldots.$

Podržíme-li jen první tři členy, obdržíme $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}} = 1{\cdot}0049875\ldots.$, kdež všech 7 míst desetinných jest správno, poněvadž člen 4. působí až v setiny millionin. Tím jest $\sqrt{101} = 10{\cdot}049875\ldots.$ (Srovnej s tím příklady k § 98.)

Podobným způsobem jako $\sqrt{101}$ vypočtěte $\sqrt{37}$, $\sqrt{35}$, $\sqrt[3]{990}$ a $\sqrt[5]{33}$.

3) Na základě poučky binomické lze umocniti každý mnohočlen libovolným kladným číslem celým. Je-li na př. trojčlen $a+b+c$ umocniti číslem n, položme nejprve $b+c=d$, načež jest $(a+b+c)^n = (a+d)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}d + \binom{n}{2}a^{n-2}d^2 \ldots \binom{n}{n-1}d^{n-1} + d^n$.

Vložíme-li za d^2, d^3, …., d^{n-1}, d^n výrazy vzniklé povýšením dvojčlenu $b+c$ na mocnosť 2., 3., …. $(n-1)^{ni}$, n^{tou}, vynásobíme-li potom a sloučíme členy stejnorodé, jsme u cíle.

Část čtrnáctá.

O počtu pravděpodobnosti.

§ 136. Vysvětlení.

Může-li míti jistý výkon za výsledek některý ze *stejně možných* případů A, B, C, D .., není jisto, že nastane případ A, ani že nastane případ B nebo C, D atd., ale jest stejně *pravděpodobno*, že nastane buď A nebo B nebo C, D atd.

Vrhneme-li na př. kostkou zhotovenou z látky úplně stejnorodé, na jejíchž stěnách napsány jsou číslice od 1 do 6, může se po vrhu na hoření stěně objeviti 1 nebo 2 nebo 3 atd. Všecky tyto případy jsou stejně možné čili pravděpodobnosť vyskytnutí se jest pro každý z nich táž.

Kdybychom místo kostkou vrhli pravidelným 12tistěnem, na jehož stěnách jsou napsány číslice od 1 do 12, může nastati některý z 12 stejně možných případů. Jest patrno, že pravděpodobnosť vrhnouti kostkou na př. 1 jest větší, než že bude táž číslice vržena dvanáctistěnem, poněvadž při prvním výkonu jest jen 6, kdežto při druhém 12 případů možných.

---

*) Užito tu vzorce $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k}$, jehož platnosť pro každé n snadno dokážeme, dosadíce za symboly $\binom{n}{k}$ a $\binom{n}{k-1}$ jich hodnoty.

Vrhněme nyní dvanáctistěnem, na jehož třech stěnách napsána jest 1 a na ostatních stranách číslice jiné. Snadno lze nahlédnouti, že jest v tomto případě pravděpodobnosť vrhnouti 1 větší, než ve případě druhém. Neboť při obou jest sice stejně případů možných, ale v prvním případě jen jeden z nich vyhovuje našemu přání čili jest případem příznivým, kdežto ve druhém jsou takové případy tři.

Z těchto úvah vychází na jevo, že pravděpodobnosť určitého případu při určitém počtu případů $\frac{\text{příznivých}}{\text{možných}}$ jest tím větší, čím jest $\frac{\text{méně}}{\text{více}}$ případů $\frac{\text{možných.}}{\text{příznivých.}}$ Tím jeví se býti přirozenou následující definice:

Může-li nějaký výkon míti za výsledek některý z **v** *stejně možných případů, z nichž* **a** *případů vyhovuje určité podmínce, nazýváme poměr* $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{v}}$ *mathematickou pravděpodobností, že některý z případů* **a** *bude výsledkem předsevzatého výkonu.*

Je-li pravděpodobnosť $\frac{a}{v} = 1$, jest žádaný výsledek *jistý*,

" " $\frac{a}{v} > \frac{1}{2}$, " " " *pravděpodobný*,

" " $\frac{a}{v} = \frac{1}{2}$, " " " *pochybný*,

" " $\frac{a}{v} < \frac{1}{2}$, není " " *pravděpodobný*,

" " $\frac{a}{v} = 0$, jest " " *nemožný*.

Příklady.

1) Jaká jest pravděpodobnosť, že bude kostkou vržena určitá číslice, na př. 5? V tomto případě jest $v = 6$, $a = 1$ a tedy $p = \frac{1}{6}$.

2) Jaká jest pravděpodobnosť, že mezi 5 čísly v loterii taženými budou 3 urč. vsazená čísla? Poněvadž z 90 čísel jest 5 čísel taženo, jest $v = \binom{90}{5}$. Z toho počtu 5 prvkových kombinac jsou ty příznivé, v nichž jsou vsazená 3 čísla. Tyto kombinace lze si mysliti vytvořené tak, že ona 3 čísla spojujeme s dvojprvkovými kombinacemi, které jsou vytvořeny z 87 ostatních čísel. Z toho jde, že $a = \binom{87}{2}$ a tudíž $p = \frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{11748}$.

3) Z nádoby, v níž jsou 4 koule bílé, 7 červených a 10 modrých, jsou vytaženy 4 koule. Jaká jest pravděpodobnosť, a) že tyto koule jsou modré, b) že jsou 3 modré a 1 červená, c) 2 modré, 2 červené, d) 2 modré, 1 červená a 1 bílá?

Ve všech těchto případech jest $v = \binom{21}{4}$. Ve případě a) $a = \binom{10}{4}$, v b) $a = \binom{10}{3}\binom{7}{1}$, v c) $a = \binom{10}{2}\binom{7}{2}$, v d) $a = \binom{10}{2}\binom{7}{1}\binom{4}{1}$.

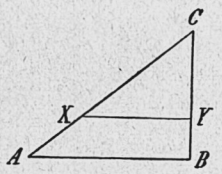
Jesti tudíž

$$p_a = \frac{\binom{10}{4}}{\binom{21}{4}} = \frac{2}{57},\quad p_b = \frac{\binom{10}{3}\binom{7}{1}}{\binom{21}{4}} = \frac{8}{57},\quad p_c = \frac{\binom{10}{2}\binom{7}{2}}{\binom{21}{4}} = \frac{3}{19},\quad p_d = \frac{\binom{10}{2}\binom{7}{1}\binom{4}{1}}{\binom{21}{4}} = \frac{4}{19}.$$

Ve mnohých případech nelze vyjádřiti čísly počet případů možných a příznivých, ale lze určiti jich poměr a tudíž pravděpodobnosť příslušného zjevu.

Příklad. V trojúhelníku sestrojena jest se základnou rovnoběžka. Jaká jest pravděpodobnosť, že trojúhelník, který při vrcholu vznikl, jest menší než polovina daného trojúhelníku?

Obr. 7.



Je-li $\Delta CXY = \frac{1}{2}\Delta ABC$, jsou patrně ty případy příznivé, v nichž vytčená rovnoběžka sestrojena jest některým bodem úsečky XC. Poněvadž dále onu rovnoběžku sestrojiti lze každým bodem úsečky AC, jest poměr $(a:v) = (XC:AC)$ čili žádaná pravděpodobnosť $p = \frac{XC}{AC}$. Dle známé věty planimetrické jest poměr $(\Delta CXY:\Delta ABC) = (XC:AC)^2$,

dle podmínky „ „ „ „ $= \frac{1}{2}$,

tudíž $(XC:AC)^2 = \frac{1}{2}$

a $(XC:AC) = p = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Podobně rozřešíme příklady:

1) Středy stran čtvercové desky jsou vrcholy nového čtverce, z něhož odvozen jest čtverec týmž způsobem a t. d. do nekonečna. Jaká jest pravděpodobnosť, že bod na této desce vytčený jest uvnitř n^{ho} čtverce, okraj desky za 1. čtverec počítajíc?

2) Do kruhové desky vepsán jest pravidelný šestiúhelník, do něho kružnice, do ní zase šestiúhelník atd. do nekonečna. Jaká jest pravděpodobnosť, že bod na této desce vytčený jest uvnitř n^{ho} kruhu?

Poznámka. Z definice mathematické pravděpodobnosti vysvítá: Je-li mezi v možnými případy a případů příznivých, jest pravděpodobnosť příznivého případu táž, jako je-li nv případů možných a na příznivých. Na základě této poznámky lze uvésti pravděpodobnosti o nestejném počtu případů možných na pravděpodobnosti se stejným počtem těchto případů.

§ 137. Poučky.

1) *Pravděpodobnosť, že určitý výkon bude míti za výsledek jeden z několika příznivých případů vzájemně se vylučujících,* (t. j. nastane-li jeden, nemůže nastati zároveň žádný z ostatních) *rovná se součtu pravděpodobností jednotlivých těchto případů.*

Důkaz. Budtež pravděpodobnosti případů příznivých $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ Všecky tyto pravděpodobnosti lze vyjádřiti zlomky o stejných jmenovatelích. (Pozn. k § 136.) Budiž $p_1 = \frac{a_1}{v}, p_2 = \frac{a_2}{v}, \ldots p_n = \frac{a_n}{v}$.

Poněvadž našemu přání bude vyhověno, nastane-li kterýkoli z těchto vzájemně se vylučujících případů příznivých, jest všech případů příznivých $a = a_1 + a_2 + a_3 + .. a_n$, a poněvadž dále případů možných jest v, jest pravděpodobnost, že nastane některý z případů příznivých

$$p = \frac{a}{v} = \frac{a_1 + a_2 + .. a_n}{v} = \frac{a_1}{v} + \frac{a_2}{v} + .. \frac{a_n}{v},$$

čili dle předcházejících rovnic, $p = p_1 + p_2 + p_3 + .. p_n$, jak jsme tvrdili.

Pro $a_1 + a_2 + a_3 + .. a_n = v$ jsou všecky případy možné zároveň příznivými a $p = p_1 + p_2 + p_3 + .. p_n = 1$, t. j.:

Součet pravděpodobností všech případů možných rovná se 1.

Příklady.

1) Jaká jest pravděpodobnost, že dvěma kostkami bude vržen součet 6 nebo 7?

Pravděpodobnost pro 6 jest $\frac{5}{36}$ a pro 7.. $\frac{6}{36}$, tudíž žádaná pravděp. $= \frac{11}{36}$.

2) Jaká jest pravděpodobnost, že z 5 do loterie vsazených čísel vyjde buď jen jedno nebo jen dvě?

Pravděp. pro jedno číslo $= \frac{\binom{5}{1}\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}}$ a pro dvě $= \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$, tudíž žádaná pravděpodobnost $= \frac{\binom{5}{1}\binom{85}{4} + \binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$.

3) *Značí-li* **p** *pravděpodobnost, že nastane některý z příznivých případů, jest* **p′ = 1 − p** *pravděpodobnost, že nenastane.*

Důkaz. Jsou jen dva vzájemně se vylučující výsledky možné: buď některý z příznivých případů nastane nebo nenastane. Z té příčiny jest $p + p' = 1$ a tudíž $p' = 1 - p$.

Dva případy, jichž pravděpodobnosti doplňují se na 1, jmenujeme *protivnými.*

Na př. pravděpodobnost, že kostkou nebude vrženo číslo 5, jest $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, že z 32 koulí, z nichž 4 jsou bílé, nebude vytažena koule bílá, $= 1 - \frac{4}{32} = \frac{7}{8}$ atd.

4) *Pravděpodobnost, že každý z několika výkonů bude míti určitý výsledek, rovna jest součinu pravděpodobností jednotlivých těch výsledků.*

Důkaz. Budiž celkem n výkonů. Při prvním budiž v_1 případů možných a a_1 příznivých, při druhém v_2 možných a a_2 příznivých, při třetím v_3 a a_3 atd., při $n^{tém}$ v_n a a_n. Pravděpodobnosti případů příznivých při jednotlivých těch výkonech jsou potom $p_1 = \frac{a_1}{v_1}, p_2 = \frac{a_2}{v_2}, p_3 = \frac{a_3}{v_3}, .. p_n = \frac{a_n}{v_n}$.

Každý *možný* případ prvního výkonu může se objeviti ve spojení s *každým* případem výkonů ostatních. Z toho jde, že jest případů *možných* $v_1 v_2 v_3 .. v_n$.

Každý *příznivý* případ prvního výkonu poskytne, spojen byv s každým příznivým případem výkonů ostatních, příznivé spojení. Z toho vysvítá, že jest $a_1 a_2 a_3 .. a_n$ spojení příznivých.

Jesti tedy pravděpodobnosť, že některé z těchto spojení nastane, rovna

$$\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n}{v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \ldots v_n} = \frac{a_1}{v_1} \cdot \frac{a_2}{v_2} \cdot \frac{a_3}{v_3} \ldots \frac{a_n}{v_n} = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n,$$

jak jsme tvrdili.

Z věty 4. vysvítá: *Pravděpodobnosť, že určitý případ nastane* **n**-*kráte při výkonu* **n**-*kráte opakovaném, rovna jest* **n**^{té} *mocnině pravděpodobnosti, že tento případ nastane při jednom výkonu.* Jesti totiž v tomto případě $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots p_n$ a tudíž vytčená pravděpodobnosť $= p_1{}^n$.

Příklady.

1) Jest vrženo nejprve kostkou a potom pravidelným dvanáctistěnem.*) Jaká jest pravděpodobnosť, že na obou tělesech padne 1?

Pravděpodobnosť pro 1 na kostce $= \frac{1}{6}$ a pro 1 na dvanáctistěnu $= \frac{1}{12}$, tudíž žádaná pravděp. $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{72}$.

2) V první ze dvou úplně stejných nádob jest 5 koulí bílých a 6 červených a ve druhé 7 bílých a 3 červené. Z těchto nádob tažena jest 1 koule. Jaká jest pravděpodobnosť, že to bude koule bílá?

Pravděp., že sáhneme do 1. nádoby $= \frac{1}{2}$ a pravd., že z ní vytáhneme kouli bílou $= \frac{5}{11}$, tudíž pravděpodobnosť, že do 1. nádoby sáhneme a vytáhneme kouli bílou, jest $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{11}$. Podobně jest pravděpodobnosť, že sáhneme do nádoby 2. a vytáhneme kouli bílou $= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10}$.

Poněvadž oba tyto případy jsou příznivé a vzájemně se vylučují, jest dle poučky 1. žádaná pravděpodobnosť $= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} = \frac{127}{220}$.

Jinak lze tuto úlohu řešiti následovně:

Převeďme tuto úlohu na jinou, v níž pravděpodobnosti jednotlivých případů zůstanou jako v úloze původní, ale počet možných případů v obou nádobách jest stejný, a to 10. 11 (Pozn. k § 136.). Potom by bylo v první nádobě 5. 10 a ve druhé 7. 11 koulí bílých.

Poněvadž v tomto případě jest pravděpodobnosť vytaženu býti pro každou jednotlivou kouli táž, jest to tak, jako by bylo $2 . 10 . 11$ koulí, mezi nimiž $(5 . 10 + 7 . 11)$ bílých, v jedné nádobě. Žádaná pravděpodobnosť jest tudíž $= \frac{5 . 10 + 7 . 11}{2 . 10 . 11} = \frac{127}{220}$.

3) Jaká jest pravděpodobnosť, že kostkou bude vrženo 3 kráte po sobě číslo 5?

Pravděp., že číslo 5 bude vrženo jednou, $= \frac{1}{6}$ a tudíž, že bude vrženo třikráte po sobě, $= \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$.

5) Z věty 4. vyplývají některé důležité výsledky, jež tuto vytkneme.

---

*) nebo oběma tělesy najednou.

a) Buďtež provedeny dva výkony. Pravděpodobnosť příznivých případů budiž v 1. výkonu p_1, ve druhém p_2. Potom jsou možna tato čtyři spojení případů:

Případ příznivý

při 1. výkonu	při 2. výkonu
α) nastane (pravd. p_1),	nastane (pravd. p_2);
β) „ „ „	nenastane („ $1-p_2$);
γ) nenastane (pravd. $1-p_1$),	nastane („ p_2);
δ) „ „ „	nenastane („ $1-p_2$).

Jmenujeme-li pravděpodobnosti v těchto čtyřech případech, jak po sobě jdou, P_1, P_2, P_3 a P_4, jest dle věty 4.

$$P_1=p_1p_2,\ P_2=p_1(1-p_2),\ P_3=(1-p_1)p_2,\ P_4=(1-p_1)(1-p_2).$$

Poněvadž některý z těchto případů nastati musí, jest

$$P_1+P_2+P_3+P_4=1. \qquad (\S\ 137.,\ 1.)$$

b) Na základě odst. a) lze odpověděti na otázky:

Jaká jest pravděpodobnosť, že *nejméně* / *nejvýše* při jednom z vytčených výkonů nastane případ příznivý?

Co se týče 1. otázky, bude našemu přání vyhověno, nastane-li některé ze tří spojení vytčených v α, β a γ. Z toho jde dle věty 1. v § 137., že žádaná pravděpodobnosť jest $P_1+P_2+P_3$, čili dle poslední rovnice v odstavci a), $1-P_4$, jak bylo lze bezprostředně tvrditi, poněvadž případ, o nějž v 1. otázce jde, jest protivný ku případu δ. Případ, o nějž jde v otázce 2., nastane, nastane-li kterýkoli z případů β, γ a δ. Z toho jde, že žádaná pravděpodobnosť jest $P_2+P_3+P_4$, čili dle poslední rovnice v odstavci a), $1-P_1$. I tento výsledek vychází na jevo z toho, že případ v otázce 2. vytčený jest protivný ke případu α.

Je-li na př. z nádoby, v níž jest 7 koulí bílých a 9 červených, dvakráte taženo po jedné kouli,*) jest pravděpodobnosť, že *nejméně* při jednom tahu bude vytažena koule bílá, rovna

$$1-\left(1-\frac{7}{16}\right)\left(1-\frac{7}{16}\right)=\frac{175}{256}$$

a pravděpodobnosť, že *nejvýše* při jednom tahu bude vytažena koule bílá, rovná se

$$1-\frac{7}{16}\cdot\frac{7}{16}=\frac{207}{256}.$$

§ 138. Jak jsou zařízeny tabulky úmrtnosti a jak se jich užívá.

V tabulkách úmrtnosti zapsáno jest, kolik z určitého počtu lidí zůstává jich každým rokem na živě.

*) Koule v 1. tahu vytažená vloží se do nádoby zpět.

Z té příčiny složeny jsou ze dvou sloupců: v jednom udáno jest *stáří* osob žijících, ve druhém pak *počet* těchto osob. První sloupec počíná 0 a druhý určitým počtem lidí novorozených (0letých), na př. 1000, jako v tabulkách, jež sestavil Deparcieux, nebo 10000, jako v tabulkách, jichž původcem jest J. Milne.*)

Na základě tabulek úmrtnosti lze řešiti tyto úlohy:

1) *Jaká jest pravděpodobnosť, že osoba* **n**-*letá dosáhne stáří* $(n+r)$ *let?*

V tabulkách najdeme, že z počtu osob za základ vzatých dosáhlo jich stáří n let a_n. Poněvadž všecky tyto osoby mohou dosáhnouti stáří $(n+r)$ let, jest případů možných a_n. Avšak dle tabulek dosáhne tohoto stáří jen a_{n+r} osob, z čehož jde, že jest tolikéž případů příznivých. Žádaná pravděpodobnosť jest tedy $\frac{a_{n+r}}{a_n}$.

Z věty 2. v § 137. jest zřejmo, že $\left(1-\frac{a_{n+r}}{a_n}\right)$ jest pravděpodobnosť, že osoba n-letá bude po r letech mrtva.

Na př. pravděpodobnosť, že 30letá osoba dosáhne stáří 40 let, jest $\frac{657}{734}$ a že toho stáří nedosáhne, $\left(1-\frac{657}{734}\right)=\frac{77}{734}$.

Počet let (r), za nějž pravděpodobnosť, že osoba $n$letá bude na živě, rovna jest pravděpodobnosti, že bude mrtva, jmenujeme *pravděpodobným trváním života* osoby $n$leté a počet let $(n+r)$ jest jejím *pravděpodobným věkem*. Platí tudíž pro pravděpodobný věk osoby $n$leté rovnice

$$\frac{a_{n+r}}{a_n}=1-\frac{a_{n+r}}{a_n},$$

z níž jde $\frac{a_{n+r}}{a_n}=\frac{1}{2}$.

Jde-li tedy o pravděpodobný věk osoby n-leté, hledejme v tabulkách číslo a_{n+r} rovnající se úplně nebo přibližně polovině čísla a_n, načež jest $(n+r)$ let žádaným pravděpodobným věkem.

Na př. pro osobu 30letou obdržíme jakožto pravděpodobný věk 67 let. Jest totiž v tab. úmrtnosti osob 30letých 734 a polovina tohoto čísla blíží se nejvíce číslu 364 tabulek, které náleží ke stáří 67 let.

2) *Jaká jest pravděpodobnosť, že osoba* **m**-*letá i osoba* **n**-*letá budou po* **r** *letech na živě?*

Pravděpodobnosť, že osoba m-letá bude po r letech na živě $p_1=\frac{a_{m+r}}{a_m}$,

„ „ „ n-letá „ „ „ „ „ $p_2=\frac{a_{n+r}}{a_n}$,

„ „ obě tyto osoby budou po r letech na živě, jest tedy dle věty 4. v § 137. rovna $p_1 p_2$.

**) Viz Studničkovy tab. log.

Z odstavce 5. v § 137. jest dále zřejmo:

Pravděpodobnosť, že bude po r letech osoba

m-letá	n-letá	
živa,	mrtva,	jest $p_1(1-p_2)$,
mrtva,	živa,	„ $(1-p_1)p_2$,
„ ,	mrtva,	„ $(1-p_1)(1-p_2)$.

Dále jest pravděpodobnosť, že nejvýše jedna bude $\begin{matrix}\text{živa,}\\ \text{mrtva,}\end{matrix}$ rovna $1-p_1p_2$; $1-(1-p_1)(1-p_2)$; že obě osoby budou do konce $r$ho roku na živě, ale že v $(r+1)$ním roce obě zemrou, $p_1p_2\left(1-\frac{a_{m+r+1}}{a_{m+r}}\right)\left(1-\frac{a_{n+r+1}}{a_{n+r}}\right)$ atd.

Počet let (r), za nějž pravděpodobnosť, že obě osoby (m-letá a n-letá) budou na živě, rovná se pravděpodobnosti, že nebudou *obě* na živě (t. j. že nejvýše jedna bude živa) jmenujeme *pravděpodobným trváním svazku* (na př. manželství) osoby m-leté a osoby n-leté. Pro tento počet let (r) platí tedy rovnice $p_1p_2=1-p_1p_2$, z níž jde, že $p_1p_2=\frac{1}{2}$ čili, zavedeme-li výrazy původní, $\frac{a_{m+r}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+r}}{a_n}=\frac{1}{2}$.

Je-li tedy vypočísti pravděpodobné trvání svazku osoby $m$leté a $n$leté, jdeme v tabulkách od m a n let o takový počet let (r) dále, až součin $a_{n+r}a_{m+r}=\frac{1}{2}a_ma_n$. O kolik let tu v tabulkách pokročiti jest, určíme pokusem.

Na př. pravděpodobné trvání svazku osoby 30ti- a 40tileté obnáší 22 let. Jesti totiž $a_{30}\cdot a_{40}=734\cdot 657=482238$, tedy $\frac{1}{2}a_{30}a_{40}=241119$ a tomuto součinu blíží se nejvíce součin $a_{52}\cdot b_{62}=560\cdot 437=244720$.

§ 139. O sázce a výhře při spravedlivé hře.

1) Při jistém výkonu může nastati kterýkoli z (a_1+a_2) stejně možných případů. Osoba A_1 vsadí s_1 (zl., kr. atd.), že nastane některý z případů a_1, a osoba A_2 vsadí s_2 (zl., kr. atd.), že nastane některý z případů a_2. Jest otázka, v jakém poměru musí býti sázky s_1 a s_2, aby hra byla *spravedlivá*?

Jest pravděpodobno, že při (a_1+a_2) výkonech (hrách) nastane případ, na nějž sází osoba $\begin{matrix}A_1,\\ A_2,\end{matrix}$ $\begin{matrix}a_1\\ a_2\end{matrix}$kráte. Poněvadž jedna výhra osoby $\begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}$ obnáší $\begin{matrix}s_2,\\ s_1,\end{matrix}$ jest pravděpodobno, že její výhra při (a_1+a_2) hrách bude $\begin{matrix}s_2\\ s_1\end{matrix}$ $\begin{matrix}a_1.\\ a_2.\end{matrix}$ Aby byla hra spravedlivá, musí býti patrně tyto výhry stejné, t. j. $s_2a_1=s_1a_2$. Dělíme-li obě strany této rovnice součtem (a_1+a_2), obdržíme $s_2\frac{a_1}{a_1+a_2}=s_1\frac{a_2}{a_1+a_2}$,

kdež $\frac{a_1}{a_1+a_2}$ značí pravděpodobnosť, že při předpokládaném výkonu nastane některý z případů a_1, a $\frac{a_2}{a_1+a_2}$ pravděpodobnosť, že nastane některý z případů a_2. Označíme-li tyto pravděpodobnosti krátce p_1 a p_2, obdržíme podmínku pro spravedlivou hru ve tvaru $s_2 p_1 = s_1 p_2$

čili $s_1 : s_2 = p_1 : p_2$, (1)

t. j.: *Při spravedlivé hře musí se míti sázky hrajících osob k sobě tak, jako pravděpodobnosti, že tyto osoby vyhrají.*

Označíme-li $\frac{s_2}{s_1}$ jakožto čistou výhru osoby $\frac{A_1}{A_2}$ písmenem $\frac{v_1}{v_2}$, nabývá rovnice $s_2 p_1 = s_1 p_2$ podoby $v_1 p_1 = v_2 p_2$. Nazveme-li součin z čisté výhry a pravděpodobnosti, že tato výhra bude učiněna, *mathematickou nadějí*, lze podmínku pro spravedlivou hru obsaženou v poslední rovnici vyjádřiti větou: *Při spravedlivé hře musí býti mathematické naděje hrajících osob stejné.*

Konečně lze ještě jiným způsobem touž podmínku vyjádřiti.

Z úměry 1. jde totiž dle věty 10. v § 62. $s_1 : (s_1 + s_2) = p_1 : (p_1 + p_2)$. Uvážíme-li, že $p_1 + p_2 = \frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_2}{a_1+a_2} = 1$ a že $s_1 + s_2$ značí hrubou výhru v při vytčené hře, obdržíme z poslední úměry $s_1 = v p_1$, t. j.: *Při spravedlivé hře musí býti sázka rovna hrubé výhře (součtu obou sázek) násobené pravděpodobností,* že tato výhra bude učiněna.

Na př. vsadí-li někdo s (zl., kr.), že bude kostkou vržena určitá číslice, má býti sázka jeho protivníka $5s$, poněvadž pravděpodobnosti pro výhry v obou těchto případech jsou $\frac{1}{6}$ a $\frac{5}{6}$.

Vsadí-li někdo do loterie s (zl., kr.) na extrato nebo ambo, terno, kvaterno, kvinterno a vyhraje-li, měla by mu býti vyplacena hrubá výhra $18s$, $\frac{801}{2}s$, $11748s$, $511038s$, $43949268s$, poněvadž pravděpodobnosti výher v těchto případech jsou $\frac{1}{18}$, $\frac{2}{801}$, $\frac{1}{11748}$, $\frac{1}{511038}$, $\frac{1}{43949268}$. Avšak ve skutečnosti vyplácí se jen $14s$, $240s$, $4800s$, $19200s$, $48000s$.

2) Podobným způsobem jako v odst. 1. poznáme podmínku pro spravedlivou hru ve případě složitějším.

Při jistém výkonu může nastati kterýkoli z $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$ stejně možných případů.

Nastane-li některý z příp. a_1, vyhraje osoba $A_1 \ldots\ldots v_1$,
„ „ „ a_2, „ „ $A_1 \ldots\ldots v_2$,
„ „ „ a_3, „ „ $A_2 \ldots\ldots v_3$,
„ „ „ a_4, „ „ $A_2 \ldots\ldots v_4$,
„ „ „ a_5, „ „ $A_2 \ldots\ldots v_5$.

Jest otázka, které rovnici musí vyhověti výhry v_1, v_2, v_3, v_4 a v_5, aby byla hra spravedlivá?

Jest pravděpodobno, že při $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$ výkonech (hrách) nastane $\begin{matrix}\text{první}\\ \text{druhý}\end{matrix}$ případ, na nějž sází osoba A_1, $\begin{matrix}a_1\\ a_2\end{matrix}$ kráte a $\begin{matrix}\text{první}\\ \text{druhý případ, na}\\ \text{třetí}\end{matrix}$ nějž sází osoba A_2, $\begin{matrix}a_3\\ a_4\\ a_5\end{matrix}$ kráte.

Z toho jde, že pravděpodobná výhra osoby $\begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}$ při $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$ hrách obnáší $\begin{matrix}v_1 a_1 + v_2 a_2\\ v_3 a_3 + v_4 a_4 + v_5 a_5.\end{matrix}$ Aby byla hra spravedlivá, musí býti obě tyto výhry stejné, t. j. $v_1a_1 + v_2a_2 = v_3a_3 + v_4a_4 + v_5a_5$. Dělíme-li tuto rovnici součtem $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$ a označíme-li jako v 1. pravděpodobnosti při tom se vyskytující p_1, p_2, p_3, p_4 a p_5, obdržíme podmínku pro spravedlivou hru ve tvaru $v_1p_1 + v_2p_2 = v_3p_3 + v_4p_4 + v_5p_5$, t. j.: *Při spravedlivé hře musí býti součty mathematických nadějí hrajících osob stejné.*

Podmínka tato jest obecnější podmínky v 1. vytčené, chovajíc ji v sobě jakožto zvláštní případ.

V následujícím zvláštním případě dáme této podmínce ještě jiný tvar, jehož později užijeme.

Jistý výkon měj za následek kterýkoli z $(a_1+a_2+a_3+\ldots a_n)$ případů. Nastane-li některý z případů a_1, vyhraje osoba A_1 částku v_1,

„ „ „ a_2, „ „ A_2 „ v_2,
„ „ „ a_3, „ „ A_2 „ v_3,
⋮ ⋮ ⋮
„ „ „ a_n, „ „ A_2 „ v_n.

Hned z předu budiž na to poukázáno, že v_1 jest tu sázkou s_2 osoby A_2. Dle výsledků svrchu nabytých musí býti při této hře splněna podmínka $v_1p_1 = v_2p_2 + v_3p_3 + \ldots v_np_n$, kdež p_1, $p_2 \ldots p_n$ mají týž jako prve význam.

Přičtěme k této rovnici stejninu

$$v_1(p_2 + p_3 + \ldots p_n) = v_1(p_2 + p_3 + \ldots p_n).$$

Tím obdržíme

$$v_1(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n) = (v_1 + v_2)p_2 + (v_1 + v_3)p_3 + \ldots (v_1 + v_n)p_n.$$

Uvážíme-li, že $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n = 1$, $v_1 = s_2$ a dále, že $(v_1 + v_2)$, $(v_1 + v_3) \ldots (v_1 + v_n)$ jsou hrubé výhry osoby A_2 v jednotlivých případech, obdržíme v tomto případě podmínku pro spravedlivou hru ve tvaru

$$s_2 = (v_1 + v_2)p_2 + (v_1 + v_3)p_3 + \ldots (v_1 + v_n)p_n,$$

t. j. *sázka osoby A_2 musí tu býti rovna součtu součinů, jichž nabudeme násobíce každou hrubou výhru osoby A_2 pravděpodobností, že bude tato výhra učiněna.*

§ 140. Příklady výpočtů, které závisejí na úmrtnosti.

Ve všech následujících příkladech budeme předpokládati p % složené úrokování roční, počet osob n-letých, udaných v tabulkách úmrtnosti, budeme označovati a_n a úročitele q.

Příklad 1. Který vklad zaplatiti jest nyní za **n**-*leté dítě, aby mu byla pojištěna částka (výbava)* **K**, *až se dožije* **(n + r)***let?*

Žádaný vklad označíme k. Mysleme si, že jest tímto způsobem pojištěno najednou a_n dětí $n$letých. Potom jest nynější příjem ústavu pojišťovacího $k.a_n$. Z a_n dětí dožije se jich dle tabulek úmrtnosti a_{n+r} stáří $(n+r)$let a bude jim tudíž od nynějška za r let vyplaceno Ka_{n+r}. Nynější hodnota této částky jest $\frac{Ka_{n+r}}{q^r}$. Aby bylo pojištění spravedlivé, musí býti nynější příjem ústavu roven nynější hodnotě jeho vydání, t. j.

$$ka_n = \frac{Ka_{n+r}}{q^r}, \text{ z čehož jde } k = \frac{K}{q^r}\,\frac{a_{n+r}}{a_n}. \qquad (1)$$

Rovnici 1. lze dáti též tvar $k = K\frac{a_{n+r} : q^{n+r}}{a_n : q^n}$ a označíme-li všeobecně podíl $a_m : q^m$ písmenem A_m, jest

$$k = K\,\frac{A_{n+r}}{A_n}.$$

Hodnoty čísel A_m zapsány jsou v log. tab. Studničkových.*)

Poznámka. Vzorec 1. bylo lze napsati ihned, pokládáme-li pojištění ve případě 1. vytčené za hru, na niž užijeme věty: Sázka rovná se hrubé výhře násobené pravděpodobností, že bude výhra učiněna. Při tom jest k sázkou, $\frac{K}{q^r}$ nynější hodnotou výhry a $\frac{a_{n+r}}{a_n}$ pravděpodobností, že bude učiněna.

Příklad 2. Který vklad **(k)** *platiti jest od nynějška po* **r** *let na počátku každého roku za* **n**-*leté dítě, aby mu byla pojištěna částka* **K**, *až se dožije stáří* **(n + r)** *let?*

Základní rovnicí jest i v tomto, jakož vůbec ve všech příkladech následujících, rovnice:

Nynější hodnota pravděpodobného příjmu = nyn. hodnotě pravděpod. vydání ústavu.

Mysleme si, že jest vytčeným způsobem najednou pojištěno a_n dětí.

Z nich zůstane na živě na konci

1ho, 2ho, 3ho, ... $(r-1)$ho, $r$ho roku

a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3} ... a_{n+r-1}, a_{n+r} dětí.

---

*) Vezmeme-li za základ tab. úmrtnosti od Deparcieuxa, příslušejí hodnoty čísel A_n v log. tab. Studničkových pro stáří větší než 30 let přibližně k 6%.

Na začátku

1ho roku obdrží ústav částku ka_n, jejíž disk. hodnota jest ka_n,

2ho „ „ „ „ ka_{n+1}*), „ „ „ „ $\frac{ka_{n+1}}{q}$,

3ho „ „ „ „ ka_{n+2}*), „ „ „ „ $\frac{ka_{n+2}}{q^2}$,

⋮ ⋮ ⋮

$r$ho „ „ „ „ ka_{n+r-1}*), „ „ „ „ $\frac{k.a_{n+r-1}}{q^{r-1}}$,

na konci

$r$ho roku vydá „ „ Ka_{n+r}*), „ „ „ „ $\frac{K.a_{n+r}}{q^r}$.

Jesti tudíž nyn. hodn. pravd.

$$\text{příjmu} = ka_n + \frac{ka_{n+1}}{q} + \frac{ka_{n+2}}{q^2} + \ldots \frac{ka_{n+r-1}}{q^{r-1}}$$

a nyn. hodn. pravd. vydání $= \frac{Ka_{n+r}}{q^r}$.

Vložíce tyto hodnoty do základní rovnice, obdržíme pro žádaný vklad k rovnici

$$k\left(a_n + \frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \ldots \frac{a_{n+r-1}}{q^{r-1}}\right) = K\frac{a_{n+r}}{q^r}. \quad (1)$$

Pro snadné vypočtení vkladu k dáme této rovnici jiný tvar.

Dělíme-li tuto rovnici q^n a užijeme-li označení ve příkl. 1. zavedeného, nabývá tvaru

$$k(A_n + A_{n+1} + A_{n+2} + \ldots A_{n+r-1}) = K.A_n.$$

Označíme-li součet všech A sahajících všeob od A_m až k A, které jest rovno 0, písmenem S_m, jest $A_n + A_{n+1} + A_{n+2} + \ldots A_{n+r-1} = S_n - S_{n+r}$ a naše rovnice nabývá tvaru $k(S_n - S_{n+r}) = KA_n$, z níž jde

$$k = K\frac{A_n}{S_n - S_{n+r}}.$$

Čísla S_m zapsána jsou též v log. tabulkách Studničkových.

Poznámka. Dělíme-li rovnici 1. číslem a_n a znásobíme-li na levé straně číslem k, nabývá tvaru

$$k \cdot 1 + \frac{k}{q}\frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{k}{q^2}\frac{a_{n+2}}{a_n} + \ldots \frac{k}{q^{r-1}}\frac{a_{n+r-1}}{a_n} = \frac{K}{q^r}\cdot\frac{a_{n+r}}{a_n}.$$

Rovnici tuto mohli jsme hned napsati, pokládajíce pojištění ve příkl. 2. vytčené za hru. Na levé straně její jest totiž součet diskontovaných hodnot všech sázek dle pravděpodobnosti, že budou učiněny, a na pravé straně jest disk. hodnota hrubé výhry násobena pravděpodobností, že výhra nastane.

---

*) Ovšem s pravděpodobností takovou, s jakou se uskuteční udání v tabulkách úmrtnosti obsažená.

Příklad 3. Kterým vkladem (k) složeným jednou pro vždy pojistí si osoba n-letá doživotní roční důchod K, který se jí začne vypláceti, jakmile se dožije (n + r) let?

Mysleme si, že tímto způsobem pojištěn jest najednou důchod a_n n-letým osobám. Z nich dosáhne stáří $(n+r)$, $(n+r+1)$, $(n+r+2)$,... let

$$a_{n+r}, \quad a_{n+r+1}, \quad a_{n+r+2}, \ldots\ldots \text{ osob.}$$

Z toho jde, že pojišťovací ústav přijme nyní ka_n a že nynější hodnota jeho pravděpodobných vydání jest

$$\frac{K.a_{n+r}}{q^r} + \frac{Ka_{n+r+1}}{q^{r+1}} + \frac{K.a_{n+r+2}}{q^{r+2}} + \ldots \text{ (až do konce tab. úmrt.).}$$

Dle základní rovnice obdržíme v tomto případě

$$ka_n = \frac{Ka_{n+r}}{q^r} + \frac{Ka_{n+r+1}}{q^{r+1}} + \frac{Ka_{n+r+2}}{q^{r+2}} + \ldots,$$

kterouž rovnicí jest určeno k. Aby bylo lze užiti tabulek ve příkl. 2. vytčených, dělme obě strany této rovnice číslem q^n. Tím nabudeme

$$kA_n = K(A_{n+r} + A_{n+r+1} + A_{n+r+2} + \ldots)$$

čili dle označení již jednou užitého $kA_n = KS_{n+r}$, z čehož $k = K\frac{S_{n+r}}{A_n}$.

Jak zní předložená úloha a) pro $r=0$ a b) pro $r=1$?

Příklad 4. Který vklad (k) platiti jest do ústavu pojišťovacího osobě nyní n-leté na počátku každého roku po r let, aby si pojistila doživotní roční důchod K, který se jí začne vypláceti, jakmile dosáhne stáří (n + r) let?

Soudíce jako ve příkl. předcházejících, seznáme, že nynější hodnota

pravděpod. příjmu $= ka_n + \frac{ka_{n+1}}{q} + \frac{ka_{n+2}}{q^2} + \ldots \frac{ka_{n+r-1}}{q^{r-1}}$,

„ vydání $= -\frac{Ka_{n+r}}{q^r} + \frac{Ka_{n+r+1}}{q^{r+1}} + \frac{Ka_{n+r+2}}{q^{r+2}} + \ldots$,

tak že rovnice základní jest

$$k\left(a_n + \frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \ldots \frac{a_{n+r+1}}{q^{r-1}}\right) = K\left(\frac{a_{n+r}}{q^r} + \frac{a_{n+r+1}}{q^{r+1}} + \frac{a_{n+r+2}}{q^{r+2}} + \ldots\right)$$

čili, dělíme-li obě strany číslem q^n,

$$k(A_n + A_{n+1} + A_{n+2} + \ldots A_{n+r-1}) = K(A_{n+r} + A_{n+r+1} + A_{n+r+2} + \ldots)$$

$$k(S_n - S_{n+r}) = KS_{n+r},$$

$$\text{tedy } k = K\frac{S_{n+r}}{S_n - S_{n+r}}.$$

Ve kterou úlohu přejde úloha příkl. 4. pro $r=1$?

Příklad 5. Který vklad (k) platiti jest do úst. poj. osobě nyní n-leté na počátku každého roku po r let, aby si pojistila po s let (bude-li na živě), roční důchod K, který se jí začne vypláceti, jakmile se dožije (n + r) let?

Nyn. hodn. pravd. příjmu $= ka_n + \frac{ka_{n+1}}{q} + \frac{ka_{n+2}}{q^2} + \ldots \frac{ka_{n+r-1}}{q^{r-1}}$,

„ „ „ vydání $= \frac{Ka_{n+r}}{q^r} + \frac{Ka_{n+r+1}}{q^{r+1}} + \ldots \frac{Ka_{n+r+s-1}}{q^{r+s-1}}$.

Základní rovnice poskytne tu po krátké proměně

$$k(S_n - S_{n+r}) = K(S_{n+r} - S_{n+r+s}), \text{ tedy } k = K\frac{S_{n+r} - S_{n+r+s}}{S_n - S_{n+r}}.$$

Která úloha plyne z této úlohy, a) je-li $s = 1$, b) je-li s tak veliké, že $n + r + s$ jest poměrným číslem nejvyššího stáří, které jest v tabulkách úmrtnosti, c) pro $r = 1$?

*Příklad 6. Který vklad (*k*) zaplatiti jest jednou pro vždy do poj. úst. osobě* n*-leté, aby pojistila po své smrti dědicům částku* K*, která se jim vyplatí na konci roku, ve kterém ona osoba zemře?*

Příjem ústavu $= ka_n$.

Z a_n osob n-letých, které současně se pojistily, zemře jich

v 1ním, 2hém, 3tím..... roce

$a_n - a_{n+1}$, $a_{n+1} - a_{n+2}$, $a_{n+2} - a_{n+3}$....

Z toho jde, že nynější hodnota pravděpodobného vydání ústavu jest

$$\frac{K(a_n - a_{n+1})}{q} + \frac{K(a_{n+1} - a_{n+2})}{q^2} + \frac{K(a_{n+2} - a_{n+3})}{q^3} + \ldots$$

čili $K\left[\frac{a_n}{q} + \frac{a_{n+1}}{q^2} + \frac{a_{n+2}}{q^3} + \ldots - \left(\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \frac{a_{n+3}}{q^3} + \ldots\right)\right]$.

Srovnajíce příjem a vydání obdržíme

$$ka_n = K\left[\frac{a_n}{q} + \frac{a_{n+1}}{q^2} + \frac{a_{n+2}}{q^3} + \ldots - \left(\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \frac{a_{n+3}}{q^3} + \ldots\right)\right],$$

čili, dělíme-li obě strany číslem q^n,

$$kA_n = K\left[\frac{1}{q}(A_n + A_{n+1} + A_{n+2} + \ldots) - (A_{n+1} + A_{n+2} + A_{n+3} + \ldots)\right],$$

$$kA_n = K\left(\frac{1}{q} S_n - S_{n+1}\right), \text{ z čehož jde } k = K\frac{\frac{1}{q} S_n - S_{n+1}}{A_n}.$$

Vzorci tomuto lze dáti ještě jiný tvar, uvážíme-li, že $S_{n+1} = S_n - A_n$.

Jak bylo by lze příklady 3.—6. rozřešiti, máme-li pojištění v nich přicházející za spravedlivou hru? (Viz pozn. ke příkl. 1. a 2. jakož i řešení příkl. 7.).

*Příklad 7. Který vklad (*k*) zaplatiti jest jednou pro vždy do úst. poj. muži* m*-letému, aby po své smrti pojistil své ženě nyní* z*-leté částku* K*, která se jí vyplatí na konci toho roku, ve kterém on zemře?*

Pokládejme toto pojištění za hru, v níž k jest sázkou a K výhrou, která bude vyplacena

buď na konci 1. r., zemře-li m. a zůstane-li ž. na živě,

nebo „ 2. r., budou-li oba v 1. roce na živě, zemře-li m. ve 2. r. a ž. zůstane na živě,

nebo na konci 3. r., budou-li oba v 2. roce na živě, zemře-li m. ve 3. r. a ž. zůstane na živě atd.

Pravděpodobnosti pro tyto jednotlivé případy jsou dle § 138., 5.

$$\left(1-\frac{a_{m+1}}{a_m}\right)\frac{a_{z+1}}{a_z},\quad \frac{a_{m+1}}{a_m}\,\frac{a_{z+1}}{a_z}\left(1-\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}}\right)\frac{a_{z+2}}{a_{z+1}},$$

$$\frac{a_{m+2}}{a_m}\,\frac{a_{z+2}}{a_z}\left(1-\frac{a_{m+3}}{a_{m+2}}\right)\frac{a_{z+3}}{a_{z+2}}\ldots..$$

čili $\frac{a_m-a_{m+1}}{a_m a_z}a_{z+1}$, $\frac{a_{m+1}-a_{m+2}}{a_m a_z}a_{z+2}$, $\frac{a_{m+2}-a_{m+3}}{a_m a_z}a_{z+3}\ldots.$

a diskontované hodnoty hrubých výher v týchž případech jsou

$$\frac{K}{q},\quad \frac{K}{q^2},\quad \frac{K}{q^3},\ldots$$

Z toho jde dle poslední věty v § 139.

$$k=\frac{K}{q}\,\frac{a_m-a_{m+1}}{a_m a_z}a_{z+1}+\frac{K}{q^2}\,\frac{a_{m+1}-a_{m+2}}{a_m a_z}a_{z+2}+$$

$$\frac{K}{q^3}\,\frac{a_{m+2}-a_{m+3}}{a_m a_z}a_{z+3}+\ldots$$

čili $k=\frac{K}{a_m a_z}\left(\frac{a_m-a_{m+1}}{q}a_{z+1}+\frac{a_{m+1}-a_{m+2}}{q^2}a_{z+2}+\frac{a_{m+2}-a_{m+3}}{q^3}a_{z+3}+\ldots\right)$,

čímž jest úloha naše rozřešena.

Poznámka. Ve všech příkladech svrchu řešených určili jsme vklady k tak, aby pravd. hodnota všech disk. příjmů = pravd. hodn. všech disk. vydání. Vklady tímto způsobem vypočtené zvětšují ústavy pojišťovací o několik % (mnohdy až o 30 i více), jednak aby přirážkami kryty byly výlohy spojené s vedením ústavu, jinak také, aby bylo docíleno větší jistoty pro pojišťujícího i pojištěnce.

Dodatek

o výrazech soujemných.

§ 141. O kanonickém tvaru výrazů soujemných.

Výraz $a+bi$ (§ 102.), v němž a a b jsou čísla reálná, nazýváme *normálním* tvarem výrazu soujemného, číslo (a^2+b^2) jeho *normou* a *absolutní* hodnotu ϱ výrazu $\sqrt{a^2+b^2}$ jeho *modulem* (měrou).

Poněvadž jest modul ϱ buď větší než $\frac{a}{b}$, nebo aspoň některému z těch čísel roven, lze položiti

$$\frac{a}{\varrho} = \cos\varphi, \text{ tudíž } a = \varrho\cos\varphi \text{ a } a^2 = \varrho^2\cos^2\varphi.$$

Z rovnice $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$ jde, že jest $a^2 = \varrho^2 - b^2$,

tedy $\varrho^2 - b^2 = \varrho^2\cos^2\varphi$,

ze kteréž rovnice obdržíme nejprve $b^2 = \varrho^2(1 - \cos^2\varphi)$, potom, poněvadž $1 - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi$, $b^2 = \varrho^2\sin^2\varphi$ a konečně $b = \varrho\sin\varphi$. Máme tudíž a a b vyjádřené rovnicemi $a = \varrho\cos\varphi$ a $b = \varrho\sin\varphi$. Poněvadž ϱ jest číslo absolutní, voliti jest úhel φ tak, aby znaménko $\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ se shodovalo se znaménkem čísla $\frac{a}{b}$.*) Vložíce výrazy za a a b do výrazu $a + bi$, obdržíme

$$a + bi = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Výraz $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ jmenujeme *kanonickým tvarem* výrazu soujemného a úhel φ jeho *amplitudou* čili *obloukem*.

Je-li modul $\varrho = 1$, přejde *kanonický tvar* ve výraz $\cos\varphi + i\sin\varphi$, který jmenujeme *redukovaným* (zkráceným).

§ 142. Násobení a dělení výrazů soujemných ve tvaru kanonickém.

1) Značí-li σ_1 a σ_2 výrazy $\varrho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ a $\varrho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, jest

$$\sigma_1 . \sigma_2 = \varrho_1\varrho_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$
$$= \varrho_1\varrho_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)]$$

a poněvadž $\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$

a $\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$,

jest $\sigma_1 . \sigma_2 = \varrho_1\varrho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$. (1)

Přistoupí-li ke dvěma činitelům σ_1 a σ_2 ještě činitel třetí

$$\sigma_3 = \varrho_3(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3),$$

jest součin

$$\sigma_1 . \sigma_2 . \sigma_3 = \varrho_1\varrho_2\varrho_3[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)](\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_4)$$

a tudíž dle rovnice 1.

$$\sigma_1 . \sigma_2 . \sigma_3 = \varrho_1\varrho_2\varrho_3[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)].$$

Z toho poznáváme, že platí všeobecně rovnice

$$\sigma_1 . \sigma_2 \ldots \sigma_n = \varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots\varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots\varphi_n)], \quad (2)$$

t. j. *Součin činitelů soujemných jest výrazem soujemným, jehož modulem jest součin modulů a amplitudou součet amplitud všech činitelů.*

Poněvadž jest $\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2 = \cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)$, obdržíme dle rovnice 1.

---

*) Rovnici $b^2 = \varrho^2\sin^2\varphi$ jest též vyhověno, je-li $b = -\varrho\sin\varphi$. Potom bylo by voliti úhel φ tak, aby b a $\sin\varphi$ byly protivně označeny.

$$(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (3)$$

a tedy zvláště pro $\varphi_2 = \varphi_1$

$$(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1) = 1, \quad (4$$

jak i z toho jest patrno, že součin na levé straně roven jest $\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1$.

2) Užívajíce téhož označení jako v odst. 1., obdržíme

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\varrho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\varrho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}.$$

Abychom učinili jmenovatele pravé strany reálným, násobme čítatele i jmenovatele výrazem $\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2$. Tím obdržíme dle rovnice 3. a 4. v odst. 1.

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad (5)$$

t. j.: *Podíl dvou výrazů soujemných jest výrazem soujemným, jehož modulem jest podíl modulů a amplitudou rozdíl amplitud dělence a dělitele.*

§ 143. O poučce Moivreově.

Položíme-li v rovnici 2. předcházejícího § $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots \varphi_n = \varphi$ a $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \ldots \varrho_n = \varrho$, bude $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots \sigma_n = \sigma = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ a rovnice 2. nabude tvaru

$$[\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \varrho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \quad (1)$$

Ve vzorci tomto obsažena jest pro absolutní, celistvé n poučka: *Mocnina $n^{tá}$ výrazu soujemného jest výrazem soujemným, jehož modulem jest $n^{tá}$ mocnina modulu a amplitudou n-násobná amplituda daného výrazu*, která se poučkou Moivreovou nazývá.

Že platí pro záporné i lomené n, dokážeme takto: Pro mocnitele celistvého a záporného jest

$$[\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-n} = \varrho^{-n}\frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n} = \varrho^{-n}\frac{1}{\cos n\varphi + i\sin n\varphi} =$$
$$= \varrho^{-n}(\cos n\varphi - i\sin n\varphi) = \varrho^{-n}[\cos(-n)\varphi + i\sin(-n)\varphi],$$

čímž jest pravdivosť našeho tvrzení pro tento případ dokázána.

Pro lomeného mocnitele $\frac{p}{n}$, kdež p a n jsou čísla celá, jest především

$$[\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{\frac{p}{n}} = \varrho^{\frac{p}{n}}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{n}}. \quad (2)$$

Položme

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{n}} = \cos\psi + i\sin\psi \quad (3)$$

a určeme z této rovnice ψ. K tomu cíli umocněme ji nejprve číslem n a užijme potom na obou stranách věty obsažené v rovnici 1.

Tím nabudeme

$$\cos p\varphi + i\sin p\varphi = \cos n\psi + i\sin n\psi.$$

Z této rovnice vysvítá dle věty 3. v § 102., že jest

$$\cos n\psi = \cos p\varphi \text{ a } \sin n\psi = \sin p\varphi.$$

Aby bylo oběma těmto rovnicím vyhověno, musí býti $n\psi = p\varphi + 2k\pi$, kdež k může býti rovno 0 i každému číslu celému (kladnému i zápornému).

Z této rovnice jde $\psi = \frac{p\varphi + 2k\pi}{n}$.

Vložíce tento výsledek do rovnice 3. a potom do 2., obdržíme rovnici

$$[\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{\frac{p}{n}} = \varrho^{\frac{p}{n}}\left(\cos\frac{p\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{p\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad (4)$$

která obsahuje *rozšířenou poučku Moivreovu.*

Pro $k = 0$ obdržíme z ní

$$[\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{\frac{p}{n}} = \varrho^{\frac{p}{n}}(\cos\tfrac{p}{n}\varphi + i\sin\tfrac{p}{n}\varphi),$$

čímž jest dokázáno, že rovnice 1. platí i pro lomené n.

Z toho, co bylo řečeno o čísle k, mohlo by se dle vzorce 4. souditi, že mocnina výrazu soujemného, jejímž mocnitelem jest číslo lomené, má nekonečné množství hodnot. Tomu však není tak. Dokážeme především, že dostačí pokládati za k kladná čísla celá nullou počínajíc.

Položíme-li totiž za k záporné číslo $-l$, nabývá pravá strana vzorce 4. téže hodnoty jako pro k rovné kladnému číslu $mn - l$,*) ježto pro tyto dvě hodnoty čísla k jest amplituda ψ rovna $\frac{p\varphi - 2l\pi}{n}$ a $\frac{p\varphi - 2l\pi}{n} + 2m\pi$ a oba ty úhly mají stejné siny i cosiny.

Dále poznáme snadno, že ze kladných k jen hodnoty $0, 1, 2, \ldots n-1$ poskytnou na pravé straně vzorce 4. různé hodnoty. Neboť pro $k > n-1$ lze vždy položiti $k = r + mn$, kdež r může nabyti hodnot od 0 do $n-1$ a m jest kladné číslo celé, načež amplituda ψ nabývá tvaru $\frac{p\varphi + 2r\pi}{n} + 2m\pi$, pro nějž pravá strana vzorce 4. má touž hodnotu jako pro $k = r$.

Z toho jde, že pravá strana vzorce 4. tají v sobě jen n různých hodnot, jež obdržíme kladouce za k postupně $0, 1, 2, 3, \ldots n-1$.

Pro $p = 1$ obdržíme ze vzorce 4.

$$[\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{\frac{1}{n}} = \varrho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

čili $\sqrt[n]{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$,

kteráž rovnice nás poučuje, že *odmocnina z výrazu soujemného má tolik hodnot kolik má odmocnitel jednotek.*

K tomu budiž poznamenáno, že výraz $\sqrt[n]{\varrho}$, který se vyskytuje na pravé straně poslední rovnice, značí, jakožto modul výrazu soujemného, číslo absolutní. Abychom tuto okolnosť stále měli na mysli, pišme tuto rovnici

*) Při tom jest m kladné číslo celé, a to tak veliké, že číslo $mn - l$ jest kladné.

$$\sqrt[n]{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = (\text{abs. hodn.}\sqrt[n]{\varrho})\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right). \quad (5)$$

Pro $\varphi = 0$ a pro $\varphi = \pi$ obdržíme z této rovnice

$$\sqrt[n]{\varrho} = (\text{abs. hodn.}\sqrt[n]{\varrho})\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right), \quad (6)$$

$$\sqrt[n]{-\varrho} = (\text{abs. hodn.}\sqrt[n]{\varrho})\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right), \quad (7)$$

kteréž rovnice praví, že *odmocnina z libovolného čísla (budiž kladné nebo záporné) má tolik hodnot, kolik její odmocnitel jednotek.*

Poněvadž vzorci 6. a 7. řešeny jsou zároveň binomické rovnice, $x^n \mp \varrho = 0$, jest zřejmo, že *binomická rovnice stupně* n^{ho} *má* n *kořenů.* (Srovnej s tím pozn. k § 120.)

Je-li n číslo *liché*, obdržíme ze vzorce $\begin{matrix}6.\\7.\end{matrix}$ jedinou reálnou hodnotu $\begin{matrix}\sqrt[n]{\varrho}\\ \sqrt[n]{-\varrho}\end{matrix}$ pro $k = 0$.

pro $k = \frac{n-1}{2}$. Ostatní hodnoty jsou soujemné.

Je-li n číslo sudé, obdržíme ze vzorce 6. pro $k = 0$ a $k = \frac{n}{2}$ reálné hodnoty $\sqrt[n]{\varrho}$, kdežto vzorec 7. takových hodnot pro žádné k neposkytne. (Srovnej s tím věty 6., 7. a 8. v § 97.)

Příklady.

1) Vyhledejte všecky hodnoty 3tí, 4té, 5té a 6té odmocniny z libovolného čísla kladného, záporného, užívajíce poučky Moivreovy.

2) Dokažte, že každá odmocnina z imaginárné jednotky jest výrazem soujemným a vyjádřete zvláště výrazy soujemnými $\sqrt[3]{i}$ a $\sqrt[4]{i}$.

3) Který vzorec obdržíme ze vzorce 5. pro $n = 2$ a jak lze z tohoto vzorce odvoditi vzorce 4. v § 102?

4) Umocněte $\cos\varphi + i\sin\varphi$ celým kladným číslem n jednou dle poučky Moivreovy, po druhé dle poučky binomické a srovnajíce výsledky tím nabyté, odvoďte vzorce pro $\cos n\varphi$ a $\sin n\varphi$.

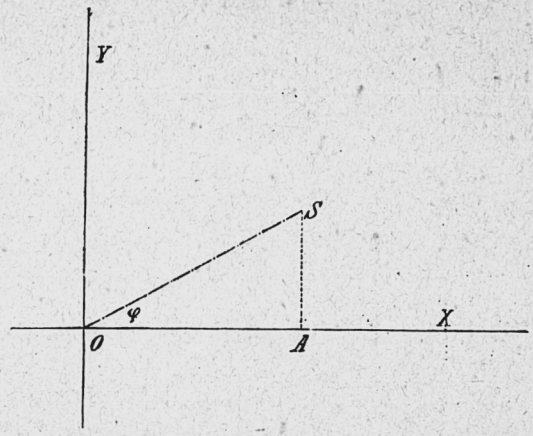
§ 144. O znázornění čísel soujemných.

1) Vyjádříme-li číslo soujemné jednou tvarem normálným $a + bi$ a po druhé kanonickým $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, jest souvislosť mezi oběma tvary vyjádřena rovnicemi

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \frac{a}{\varrho} = \cos\varphi, \quad \frac{b}{\varrho} = \sin\varphi.$$

Z těchto rovnic jest patrno, že lze čísla a a b pokládati za poměrná čísla hlavního a pobočného průmětu délky, mající číslo poměrné ϱ a odchylující se od hlavní osy (OX) o úhel φ.

Obr. 8.



Učiníme-li tedy (obr. 8.)

$OA = a$ jedn. délkovým,

$AS \parallel OY$ a rovno b „ „ dbajíce při tom znamének čísel a a b,

jest $OS = \varrho$ „ „

a $\sphericalangle XOS = \varphi$.

Jest patrno, že veličinami a a b, jakož i veličinami ϱ a φ jest bod S v dané soustavě XOY dokonale určen a naopak, že vytčením tohoto bodu určeny jsou veličiny a a b i ϱ a φ. Z té příčiny pravíme, že jest bodem S číslo soujemné znázorněno. Mění-li se veličiny a a b, tedy i ϱ a φ, mění se i poloha bodu S v soustavě XOY a nabudou-li postupně čísla a a b všech možných hodnot, nabude bod S každé polohy v rovině XOY.

Zvláště pak obdržíme pro $\begin{matrix} b=0, \\ a=0, \end{matrix}$ k němuž přísluší φ rovné $\begin{matrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{matrix}$ nebo $\begin{matrix} \pi \\ \frac{3\pi}{2} \end{matrix}$

dle toho, je-li $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$ kladné nebo záporné, z výrazu soujemného $(a+bi)$ číslo

reálné a,
ryze imaginárné bi, znázorněné na přímce $\begin{matrix} OX. \\ OY. \end{matrix}$ Z této příčiny jmenujeme přímku

$\begin{matrix} OX \\ OY \end{matrix}$ osou čísel $\begin{matrix} \text{reálných.} \\ \text{imaginárných.} \end{matrix}$

2) *O znázornění součtu a rozdílu čísel soujemných.*

Je-li bodem S_1 (obr. 9.) znázorněno číslo $s_1 = a_1 + b_1 i$ a bodem S_2 číslo $s_2 = a_2 + b_2 i$, jest číslo $s = s_1 + s_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$ znázorněno bodem S, jehož nabudeme učiníce $S_1 S \parallel OS_2$ a $S_2 S \parallel OS_1$.

Učiníme-li totiž $SA \parallel OY$ a $S_2 M \parallel OX$, jest $\triangle S_2 MS \cong \triangle OA_1 S_1$,

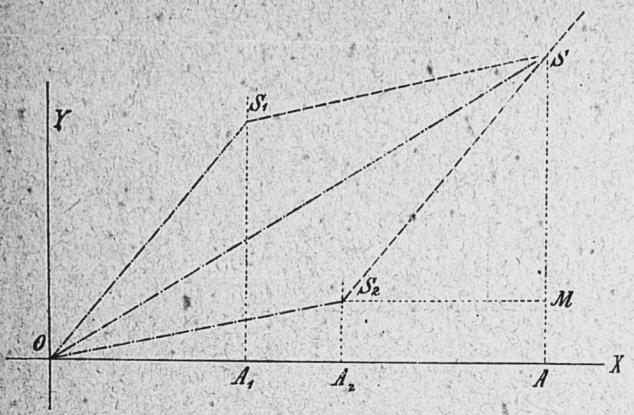
tudíž $S_2 M = A_2 A = OA_1 = a_1$ jedn. délk.,

$MS = A_1 S_1 = b_1$ „ „

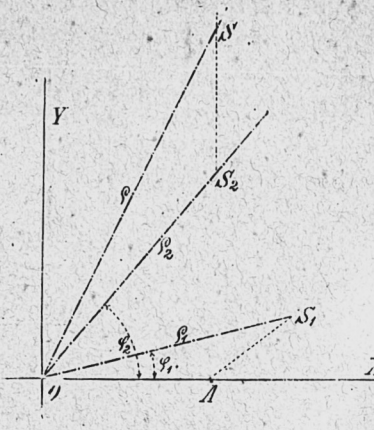
a $OA = OA_2 + A_2 A = (a_1 + a_2)$ jedn. délk.,

$AS = AM + MS = (b_1 + b_2)$ „ „

Obr. 9.



Obr. 10.



Ze dvou posledních rovnic vysvítá, co jsme tvrdili.

Z téhož obrazce vychází na jevo, jak znázorniti jest rozdíl dvou čísel soujemných. Z rovnice $s = s_1 + s_2$ jde totiž, že číslo s_2 rovno jest rozdílu $s - s_1$.

Jsou-li tedy dány body S a S_1 znázorňující čísla soujemná s a s_1, obdržíme bod S_2, znázorňující číslo $(s - s_1)$, učiníme-li $OS_2 \parallel S_1S$ a $SS_2 \parallel OS_1$.

3) *O znázornění součinu a podílu čísel soujemných.*

Značí-li OA jednotku délky a znázorňují-li body S_1 a S_2 (obr. 10.) čísla soujemná $s_1 = \varrho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ a $s_2 = \varrho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, obdržíme bod S, znázorňující číslo soujemné $s = s_1 s_2 = \varrho_1\varrho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$, učiníme-li $\sphericalangle AOS = \varphi_1 + \varphi_2$ a $\sphericalangle OS_2S = \sphericalangle OAS_1$.

Jesti totiž $\triangle OS_2S \sim \triangle OAS_1$ a tudíž $OS : OS_2 = OS_1 : OA$, čili, nahradíme-li poměry délek poměry jich čísel poměrných, $x : \varrho_2 = \varrho_1 : 1$, z čehož jde $x = \varrho_1\varrho_2$.

Bodem S znázorněno jest tedy číslo soujemné mající modul $\varrho = \varrho_1\varrho_2$ a amplitudu $\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)$, t. j. číslo s.

Z rovnice $s = s_1 . s_2$ jest zřejmo, že číslo s_1 jest podílem, jehož nabudeme dělíce číslo s číslem s_2. Bod S_1 tento podíl znázorňující obdržíme, učiníce $\sphericalangle AOS_1 = \varphi - \varphi_2$ a $\sphericalangle OAS_1 = \sphericalangle OS_2S$.

Příklady.

1) Znázorněte kořeny rovnic

$\alpha)$ $x^3 \pm a^3 = 0$, $\beta)$ $x^4 \pm a^4 = 0$, $\gamma)$ $x^5 \pm a^5 = 0$.

2) Sestrojte užívajíce obrazu v 1. nabytého *a*) součet, *b*) součin kořenů každé z oněch rovnic, *c*) dvojmoci kořenů rovnic α a γ, *d*) trojmoci kořenů rovnice α.

Kterých výsledků nabudeme ve případech *c*) a *d*) pro $a = 1$?

VEŘEJNÁ A UNIVERSITNÍ KNIHOVNA