260

OD TÉHOŽ AUTORA:

Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických. Čtvrté vydání. Část 1. 1928. Kč 52·—. Část 2. 1931. Kč 60·—.

Geometrie projektivní. 1932. Kč 260·—.

Geometrie pro IV. a V. třídu škol středních. 5. vyd. 1924. Kč 30·—.

Geometrie pro VI. třídu škol středních. 4. vyd. 1925. Kč 17·—.

Geometrie pro VII. třídu škol středních. 4. vyd. 1928. Kč 17·40.

Sbírka úloh z matematiky pro vyšší třídy středních škol. 3. vyd. 1924. Kč 28·—.

Trigonometrie pro ústavy učitelské. 1922. Rozebrána.

Matematika pro nejvyšší třídu gymnasií a reál. gymnasií. 1912. Rozebrána.

Matematika pro nejvyšší tř. reálek. 1912. Rozebrána.

SBORNÍK
JEDNOTY ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
ČÍSLO XIX.

GEOMETRIE PROJEKTIVNÍ

SYNTHETICKÉ I ANALYTICKÉ VYŠETŘOVÁNÍ PROJEKTIVNÍCH PŘÍBUZNOSTÍ A ÚTVARŮ

NAPSAL

JAN VOJTĚCH,

PROFESOR VYSOKÉHO UČENÍ TECHNICKÉHO V PRAZE

NÁKLADEM A TISKEM
JEDNOTY ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
V PRAZE 1932

Své drahé ženě

připisuje

autor.

PŘEDMLUVA.

Spis tento pojednává o projektivních transformacích a útvarech: chce podati jednotný celkový obraz geometrie projektivní podle dosažených výsledků. Maje zřetel k současnému stavu této větve geometrické, věnoval spisovatel pozornost nejen předmětům, jež obyčejně a také našimi odborníky dost často byly pěstovány, nýbrž zamýšlel uspořádati projektivní geometrii ve tvaru, který je v několika směrech (aspoň u nás) nový.

V tomto smyslu vychází se zde od logických základů, jak u geometrie projektivní pro její jednoduchost a postavení je zvláště záhodno; bylo však nezbytné omeziti se na věci nejnutnější, jednak aby rozsah knihy nebyl přílišný, jednak aby zájem čtenáře nebyl jednostranně zatížen. Jak souhlasí s významem věci, tvoří věcný základ a značnou část obsahu spisu úvahy o projektivních transformacích; přesto ani tuto látku nebylo možno vyčerpati. Hlavní zásadou autora bylo pojmouti do knihy výhradně věty projektivní, tak aby charakter její po této nejdůležitější stránce byl jednotný; na příbuzné speciální věty geometrie obyčejné, které k nim velmi často bývají připojovány, upozorňuje se (hlavně s počátku) jen v poznámkách. Pokud jde o nástroj geometrických úvah, bylo postupováno metodou jak synthetickou, tak analytickou, protože obě mají značné výhody, a nelze se při žádoucí jednoduchosti, přístupnosti a přesnosti omeziti na jednu z nich; přirozeně se užívá prvé metody hlavně v úvahách počátečních a jednodušších, druhé později při výkladech soustavných a složitějších (některé předměty byly však vyloženy — jak bylo nutné neb aspoň pro ocenění vhodné — oběma metodami). Konečně podle moderního, stále více se uplatňujícího stanoviska připojen jest v ukončujícím oddílu knihy výběr úvah z projektivní geometrie prostoru s libovolným počtem rozměrů; stalo se takto za tím účelem, aby celek, aniž by hlavní obsah spisu pozbyl přirozené jednoduchosti, přece nezůstal bez tohoto vyššího hlediska.

Rozdělení obsahu spisu je průhledné: po krátké přípravě obsahuje kniha ve 13 oddílech (o 150 článcích, s řadou odstavců v každém) vedle úvodu o základech projektivní geometrie na počátku a vedle doplňku o projektivní geometrii prostoru r-rozměrného na konci tři části o geometrii útvarů jednorozměrných, dvourozměrných a třírozměrných, vždy napřed o projektivních transformacích útvarů základních, obecně položených a soumístných, potom syntheticky o útvarech odvozených, konečně analyticky soustavně o útvarech příslušného oboru. Z rozsáhlé oblasti geometrie projektivní bylo zde zpracováno — jak se spisovatel domnívá — více než

obvykle, zejména máme-li na zřeteli široké meze spisu a nehledíme-li tedy k četným knihám, jež se věnují jen částem této nauky. Přece však množství látky vynutilo si značná omezení: čím dále tím více bylo se spokojovati výběrem úvah (zejména složitějších, synthetických i analytických, a o předmětech velmi obšírně zpracovaných); z téhož důvodu věnováno bylo poměrně málo pozornosti útvarům imaginárním; stejně jest odůvodniti na jedné straně omezení (v poznámkách) vůči geometrii obyčejné, na straně druhé uzavření vůči geometrii transformací biracionálních; vynecháno bylo také vyšetřování transformací a útvarů jinými metodami, spec. úvahy diferenciální, což vše lze zajisté snadno vysvětliti. K některým omezením vedla konečně důvodná snaha po úměrnosti rozmanitých částí spisu (které se často sice nedbá, bez níž však stavba knihy netvoří správného celku).

Po stránce formální snažil se autor podati látku způsobem co možná jednoduchým, přehledným a neunavujícím (bez předpokladu speciálních teorií, hlavně algebraických). Pokud jde o názvosloví a označení, zvoleno bylo leccos nově, při čemž vodítkem byly zvl. výraznost, krátkost a jednota. Obrázky připojeny byly jen nejdůležitější v počtu poměrně malém jednak pro obecnost předmětů a nezbytnou představivost čtenáře, jednak z důvodů úsporných (narýsoval je autorův syn Jaromír, strojní inženýr).

Do poznámek umístěny byly věci vedlejší a vzdálenější: rozmanitá upozornění věcná (předběžná a hlavně doplňující), poukazy na úvahy další, zmínky o specialisacích metrických, data historická a dosti hojná literatura. V literárních odkazech jest podán ovšem jenom výběr publikací důležitějších a obsáhlejších (při tom, možno-li, také prací s údaji historickými a literárními), jenž má stačiti k informaci pro studium podrobnější a dále jdoucí; vynechány byly zpravidla publikace věcně nebo historicky méně významné nebo těžko přístupné. U publikací knižních je uveden pro stručnost obyčejně jen rok vydání; u pojednání vedle spisovatele úplný titul (mající charakterisovati obsah), zkrácené jméno časopisu nebo sborníku (hlavní název s vydavatelem a místem vydání) a k tomu serie (v závorkách), číslo ročníku i rok (pro zařadění historické). Z citované literatury bylo přirozeně mnohého použito, což se někde zvlášť uvádí.

Jest — doufám — patrno, že rozsah i dosah projektivní geometrie je veliký. Tím potřebnější je synthese látky, kterou si odborník musí tvořiti, a kterou pokládám za stejně významnou jako vyšetřování jednotlivostí; pro naše poměry může tato knížka snad přinésti prospěch také v některých zvláštních směrech vpředu vytčených.

Spis o projektivní geometrii (dávno chystaný a slíbený), třebas jsem jej přes své úsilí nemohl (pro velké zatížení povinnostmi učitelskými na technice) dříve dokončiti, měl jsem už několik roků připraven; v poslední době provedl jsem jen soustavnou revisi a připojil některé doplňky, hlavně údajů literárních. Jeho uveřejnění uskutečňuje se však podle disposic nakladatele teprve letos.

V Praze 27. října 1932.

Dr. *Jan Vojtěch.*

OBSAH.

Článek | Úvod. | Strana

Geometrická věda 1
Korespondence (transformace) 2
Metoda geometrická a analytická 4
Prvky nevlastní 5
Projektivní geometrie 6
Vývoj geometrie projektivní 9
Literatura 12

I. Základy projektivní geometrie.

1. Postuláty I. (o incidenci prvků) 15
2. Jednoduché věty a konstrukce 17
3. Základní útvary 18
4. Základní výkony 20
5. Princip (zákon) duálnosti 22
6. Jednoduché konfigurace 24
7. Věta Desarguesova (o trojúhelnících) 27
8. Užití a rozšíření věty Desarguesovy 32
9. Postuláty II. (o uspořádání prvků v jednomocných útvarech zákl.) 36
10. Postulát III. (o spojitosti jednomocných útvarů zákl.) 39

II. Projektivnost mezi základními útvary prvního řádu.

11. Útvary perspektivní 44
12. Útvary projektivní 45
13. Čtyřrohové skupiny prvků 51
14. Harmonické skupiny prvků 55
15. Konstrukce a projektivnost harmonických skupin 58
16. Racionální soustava prvků 62
17. Určenost projektivní transformace (základní věta o projektivnosti) 63
18. Konstrukce projektivnosti 66
19. Zavedení souřadnic 72
20. Rovnice projektivnosti 77
21. Jiné rovnice projektivnosti; projektivnost zvrhlá 83
22. Dvojpoměr 86
23. Další vlastnosti dvojpoměru 91

III. Projektivnost soumístných útvarů jednomocných.

24. Samodružné prvky 97
25. Význam prvků samodružných 101
26. Prvky imaginární 106

Článek Strana
27. Involuční projektivnost 109
28. Rovnice involuční projektivnosti 113
29. Involuce k projektivnosti přidružená 117
30. Produkt dvou involucí 122
31. Periodické projektivnosti 125
32. Jeden a dva prvky v základním útvaru jednomocném 129
33. Skupiny n prvků 134
34. Invarianty forem binárních 140
35. Grupy projektivností v základním útvaru jednomocném 148

IV. Útvary odvozené z projektivních útvarů jednomocných.

36. Křivka druhého stupně a křivka druhé třídy 156
37. Kužel druhého stupně a kužel druhé třídy 164
38. Přímková řada druhého stupně a druhé třídy 168
39. Souvislost přímkové řady kvadratické s útvary předcházejícími . 172
40. Věty Pascalova a Brianchonova 177
41. Desarguesova věta o kuželosečkách 185
42. Svazek a řada kuželoseček 187
43. Projektivní útvary kvadratické 191
44. Projektivnost soumístných útvarů kvadratických 196
45. Úlohy druhého stupně 202
46. Útvary vytvořené projektivními útvary lineárním a kvadratickým 207
47. Křivka třetího stupně v prostoru (a útvar duální) 211
48. Projektivnost bodových řad kubických 216
49. Útvary vytvořené dvěma projektivními útvary kvadratickými . 219

V. Projektivnost mezi základními útvary druhého řádu.

50. Definice projektivnosti, její určení a konstrukce 224
51. Útvary odpovídající sobě v kolineaci nebo v korelaci 232
52. Útvary perspektivní 235
53. Souřadnice bodu a souřadnice přímky v rovině 237
54. Rovnice přímky a bodu v rovině; kuželosečka 245
55. Analytické vyjádření kolineace 250
56. Analytické vyjádření korelace 254

VI. Kolineace a korelace soumístných útvarů dvojmocných.

57. Typy kolineací v rovině 257
58. Homologie (a elace) 264
59. Kolineace nehomologické 271
60. Involuční kolineace; kolineace periodické 274
61. Kolineace s invariantní kuželosečkou 279
62. Konečné grupy kolineací v rovině 283
63. Spojité grupy kolineací v rovině 287
64. Vlastnosti korelace rovinné 291
65. Typy korelací v rovině 296
66. Involuční korelace čili polárnost 299
67. Vlastnosti korelace polárné 302
68. Kuželosečka jako incidenční čára polárnosti rovinné 307
69. Rovinná polárnost určená kuželosečkou; vztahy analytické . . 315

VII. Čáry rovinné.

70. Čáry druhého stupně a druhé třídy 320
71. Polárné vlastnosti kuželoseček 334

Článek Strana
72. Kuželosečka jako křivka racionální; příslušné projektivnosti . . 342
73. Svazek a řada kuželoseček 347
74. Algebraické čáry n-tého stupně (a ν-té třídy) 358
75. Singulární body a přímky 364
76. Čáry polárné 371
77. Čára Hesseova 377
78. Parametrické vyjádření; čáry racionální 383
79. Soustavy čar algebraických 387
80. Čáry třetího stupně 394
81. Kovariantní čáry kubiky 405
82. Racionální čáry 3. stupně 411
83. Čáry čtvrtého stupně 416
84. Racionální čáry bikvadratické 425

VIII. Útvary odvozené z projektivních útvarů dvojmocných.

85. Přímkové kongruence 1. stupně nebo 1. třídy; kongruence lineární 433
86. Kongruence prvního stupně druhé nebo třetí třídy a útvary duální 437
87. Prostorová čára třetího stupně (a útvar duální) 441
88. Určenost prostorové čáry 3. stupně 445
89. Plocha druhého stupně a plocha druhé třídy 449
90. Polárné prvky vzhledem k ploše 2. stupně 453
91. Druhy ploch kvadratických 458
92. Soustavy ploch kvadratických 463
93. Sestrojení plochy kvadratické z devíti bodů 472
94. Plocha třetího stupně 479
95. Přímky na ploše 3. stupně 485
96. Plocha 3. stupně s bodem dvojným 491

IX. Kolineace základních útvarů trojmocných.

97. Kolineace a její stanovení 495
98. Souřadnice v prostoru 500
99. Rovnice roviny, bodu i přímky v prostoru 509
100. Analytické vyjádření kolineace 514
101. Typy kolineací v prostoru 519
102. Analytická klasifikace kolineací prostorových 526
103. Homologie 529
104. Dvojosá kolineace 532
105. Kolineace osová a kolineace s invariantním čtyrstěnem 537
106. Involuční kolineace prostorové 542
107. Kolineace periodické 547
108. Útvary odpovídající sobě v kolineaci 549
109. Kolineace s invariantní plochou 2. stupně 554
110. Kolineace s invariantní prostorovou čarou 3. stupně 560
111. Konečné grupy kolineací v prostoru 564
112. Spojité grupy kolineací prostorových 568

X. Korelace základních útvarů trojmocných.

113. Korelace a její stanovení 578
114. Analytické vyjádření korelace 584
115. Vlastnosti korelace v prostoru 586
116. Involuční korelace prostorové, polárná a nulová 592
117. Vlastnosti korelace polárné 596
118. Plocha kvadratická jako základní útvar polárné korelace . . . 600
119. Lineární komplex přímek jako základní útvar nulové korelace . 605

Článek XI. Plochy a čáry prostorové. Strana

120. Plochy druhého stupně a druhé třídy 613
121. Roztřídění ploch kvadratických 620
122. Polárné vlastnosti ploch kvadratických 625
123. Svazek (a řada) ploch kvadratických 630
124. Algebraické plochy n-tého stupně (a plochy ν-té třídy) 638
125. Plochy polárné; plocha Hesseova 644
126. Plochy třetího stupně 653
127. Plochy čtvrtého stupně 659
128. Algebraické čáry prostorové a útvary duální 674
129. Prostorová čára třetího stupně 685
130. Prostorové čáry čtvrtého stupně 690

XII. Útvary přímkové.

131. Souřadnice přímky v prostoru; přímkové útvary 698
132. Lineární komplex přímek 706
133. Soustavy lineárních komplexů 712
134. Kvadratický komplex 718
135. Některé jednoduché komplexy kvadratické 726
136. Algebraický komplex n-tého stupně 735
137. Algebraické kongruence 742
138. Kongruence druhého stupně 749
139. Algebraické plochy zborcené 755
140. Zborcené plochy třetího a čtvrtého stupně 761

XIII. Projektivnost a útvary prostoru r-rozměrného.

141. Prostor r-rozměrný 768
142. Projektivnost dvou (různých) prostorů 779
143. Souřadnice v S_r; rovnice prostorů nižších, rovnice projektivnosti 787
144. Kolineace prostoru S_r 796
145. Korelace prostoru S_r 805
146. Nadplochy kvadratické a jejich svazky 816
147. Algebraické nadplochy 826
148. Čáry, hlavně racionální 837
149. Plochy, zejména racionální přímkové 846
150. Algebraické variety bodové 856

Seznam věcný 865

ÚVOD.

Geometrická věda. Geometrie jest uspořádaný soubor poznatků o útvarech prostorových. Poznatků geometrických nabýváme jednak z názoru a zkušenosti, zjednodušujíce jejich výsledky, jednak ze známých poznatků usuzováním.

Útvary geometrické myslíme si složeny z prvků (elementů), mezi nimiž platí vztahy (relace); vzájemné vztahy mezi prvky čili vlastnosti útvarů geometrických vyjadřujeme větami. Protože geometrické pojmy (prvků i vztahů) a věty nejsou logicky nezávislé, vzniká požadavek, abychom složitější pojmy definovali a věty dokázali na základě jiných, jednodušších pojmů a vět. Při této redukci nutně však — nechceme-li se pohybovati v logickém kruhu — dospějeme k některým pojmům, kterých nelze už definovati (*pojmy základní*), a k některým větám, kterých nemůžeme dokázati (*věty základní* čili *postuláty*, axiomy). Pojmů, které zavádíme bez definice, a vět, které přijímáme bez důkazu, může v geometrii jakožto vědě matematické býti velmi málo.[1])

Chceme-li geometrické poznatky uspořádati ve vědecký systém, musíme tedy učiniti základem soustavu nedefinovaných pojmů a nedokázaných vět (pojmy ty obsahujících), o nichž to výslovně uvedeme; vše ostatní musíme logickým postupem vyvoditi z těchto pojmů a vět.[2])

Volba základních pojmů a postulátů není nijak určitá; jest možno ovšem uvésti přirozený, ale neurčitý požadavek, aby pro naše pojímání byly základní pojmy jednoduché a postuláty názorné. Nezbytné vlastnosti základních pojmů a postulátů jsou však: *nesmějí sobě navzájem odporovati*[3]) a *musí stačiti k definování i důkazu ostatních pojmů a vět.*

[1]) Postuláty jsou se stanoviska logického úmluvy, definující základní pojmy v nich obsažené, se stanoviska věcného skutečnosti, ze zkušenosti zjednodušením abstrahované, jež vědomě za východisko přijímáme.

[2]) Tato logická stavba nemusí se opírati o názor, nýbrž jen o soustavu základních pojmů a vět. Je možno tak zbudovati *abstraktní geometrii*, která připouští rozmanité výklady (konkretní geometrie) podle toho, jaký názorný smysl dáme pojmům základním. Viz na př. *E. H. Moore*, On the foundations of mathematics, Bulletin Amer. math. soc. (2) 9 (1903), nebo *J. W. Young*, Lectures on fundamental concepts of algebra and geometry, 1920; také *F. Enriques*, Per la storia della logica, 1922.

[3]) Jsou-li základní pojmy a postuláty vzaty z názoru, snadno zjistíme, zdali si neodporují. Učiní-li se však základem nauky pojmy a věty abstraktní, dokážeme jejich vzájemnou přípustnost (nespornost, kompatibilnost) tím, že pro ně nalezneme nějaké vyjádření konkretní.

Soustava geometrická byla by i formálně dokonalá, kdyby základní pojmy a postuláty byly také *nezávislé* (čímž by jich bylo co nejméně); nezávislé jsou totiž tehdy, není-li možno žádný logicky vyvodit z ostatních.[4]) Ale pozbývá-li tím základ geometrie názornosti, jest záhodno rozvážiti, není-li lépe obětovati nezávislost názornosti.

Korespondence (transformace). *a*) Z obecných pojmů matematiky má pro tuto vědu a pro geometrii zvlášť základní význam pojem korespondence. Mysleme si dvě soustavy matematických prvků. Jestliže mezi oběma systémy stanovíme závislost takovou, že každému prvku první soustavy přiřadíme n prvků druhé soustavy a každému prvku druhé soustavy přidružíme m prvků první soustavy, pravíme, že soustavy ty *sobě odpovídají* (m, n)*-značně* čili *jsou v* (m, n)*-značné korespondenci* (příbuznosti).

Nejdůležitější jest korespondence (1, 1)-značná (jednojednoznačná) čili obapolně jednoznačná, kdy totiž každému prvku první soustavy odpovídá jeden a jediný prvek soustavy druhé a každému prvku druhé soustavy jeden a jediný prvek soustavy první. Budeme se zabývati zde jenom korespondencemi obapolně jednoznačnými.[5])

Mějme na zřeteli soustavy prvků geometrických. Korespondenci jejich sledujeme často jako přechod od jedné soustavy k druhé (udávajíce smysl postupu); proto ji nazýváme *transformací* (proměnou, také substitucí). Že transformací $\mathbf{T}$ přecházíme od soustavy σ k soustavě σ', píšeme symbolicky

$$\mathbf{T}(\sigma) = \sigma'.$$

Pravíme, že prvkům soustavy σ, první či původní, *odpovídají* (*korespondují*) v určité transformaci prvky soustavy σ', druhé či odvozené; nedbáme-li pořadí soustav, nazýváme sobě odpovídající prvky obou systémů *sdruženými*.[6]) Je-li prvek jedné soustavy totožný se sdruženým prvkem soustavy druhé, sluje *samodružný* (soběsdružený, také dvojný nebo při transformaci *invariantní*).

b) Jestliže transformace $\mathbf{T}_1$ převádí soustavu σ v soustavu σ', transformace $\mathbf{T}_2$ pak soustavu σ' v soustavu σ'', existuje transformace, jež má týž výsledek jako $\mathbf{T}_1$ a $\mathbf{T}_2$ po sobě provedeny, převádějíc σ v σ''; tato transformace $\mathbf{T}$ sluje *produkt* (součin, resultant) obou transformací $\mathbf{T}_1$ a $\mathbf{T}_2$. Píšeme stručně

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1,$$

[4]) Nezávislost určitého postulátu na ostatních se dokáže, když se dovodí, že v nauce na těchto ostatních postulátech založené onen vynechaný platit nemusí; to se provádí tak, že se zjistí nespornost jeho opaku s postuláty ostatními.

[5]) Jestliže hodnotám veličiny proměnné příslušejí hodnoty jiné proměnné, sluje jedna *funkcí* druhé; přiřadíme-li prvkům geometrickým určitým způsobem čísla, slují tato *souřadnicemi* oněch; sestávají-li obě soustavy prvků sobě odpovídajících z elementů geometrických, mluvíme o *korespondenci geometrické*.

[6]) Elementy sobě odpovídající bývají někdy nazývány také homologické (v nejširším slova smyslu), což není dosti vhodné, protože slovem tím se označuje speciální důležitá korespondence.

protože platí $\mathbf{T}_1(\sigma) = \sigma'$, $\mathbf{T}_2(\sigma') = \sigma''$, $\mathbf{T}(\sigma) = \sigma''$, a tedy $\mathbf{T}(\sigma) = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1(\sigma)$. Transformace $\mathbf{T}$ a $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ jsou si tedy rovny (jsou ekvivalentní), vedou-li od téže soustavy (zde σ) zase k téže soustavě (zde σ''). Pořádek transformací $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ je udán v jejich produktu sledem od pravé strany k levé.[7]) Stejně produkt transformací $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$, . . ., $\mathbf{T}_{n-1}$, $\mathbf{T}_n$, postupně aplikovaných, je transformace $\mathbf{T}$, mající týž výsledek jako ony:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_n\mathbf{T}_{n-1} \ldots \mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1.$$

Korespondence, která přiřaďuje každému prvku jej sama (při níž tedy každý prvek soustavy je samodružný), sluje *identická*; značí se symbolem $\mathbf{I}$ (protože její produkt s každou transformací je této roven).

Transformace převádějící soustavu σ v σ' budiž $\mathbf{T}$; transformace, která naopak systém σ' převádí v σ, sluje *inversní* k oné a označuje se symbolem $\mathbf{T}^{-1}$ (protože produkt $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}$ je roven transformaci identické $\mathbf{I}$).

Pro tvoření produktů (násobení) transformací platí zákon asociativní, t. j. v součinu $\mathbf{T}_n\mathbf{T}_{n-1} \ldots \mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ lze kterékoli dvě (tři, . . .) transformace po sobě jdoucí nahraditi jejich produktem:

$$\mathbf{T}_n\mathbf{T}_{n-1} \ldots \mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_n\mathbf{T}_{n-1} \ldots \mathbf{T}_3(\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1) = \mathbf{T}_n\mathbf{T}_{n-1} \ldots (\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2)\mathbf{T}_1 = \ldots$$

Neplatí však zákon komutativní: pořádek transformací nelze obecně měniti. Dvě transformace, u nichž v produktu jejich na pořádku nezáleží (platí-li tedy $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$), slují *komutativní* (záměnné).

Odtud vyplývá zejména: Transformace inversní k produktu $\mathbf{T}_n\mathbf{T}_{n-1} \ldots \mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ jest $\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{T}_3^{-1} \ldots \mathbf{T}_{n-1}^{-1}\mathbf{T}_n^{-1}$ (neboť součin obou je $\mathbf{I}$). Jsou-li sobě rovny transformace $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, jsou si rovny i transformace $\mathbf{CA}$ a $\mathbf{CB}$, jakož i $\mathbf{AC}$ a $\mathbf{BC}$.

c) Je-li dána korespondence $\mathbf{K}$ mezi dvěma skupinami prvků σ a ϱ a převádí-li transformace $\mathbf{T}$ skupinu σ v skupinu σ' i ϱ v ϱ', obdržíme patrně transformací $\mathbf{T}^{-1}$ ze skupiny σ' skupinu σ, z této transformací $\mathbf{K}$ skupinu ϱ a z této konečně transformací $\mathbf{T}$ skupinu ϱ', takže korespondence $\mathbf{K}'$ mezi skupinami σ' a ϱ' jest vyjádřena produktem

$$\mathbf{K}' = \mathbf{TKT}^{-1};$$

pravíme, že korespondence $\mathbf{TKT}^{-1}$ je korespondence *transformovaná* z korespondence $\mathbf{K}$ transformací $\mathbf{T}$. Převádí-li transformace $\mathbf{T}$ korespondenci $\mathbf{K}$ v $\mathbf{K}' = \mathbf{TKT}^{-1}$, převádí $\mathbf{T}^{-1}$ korespondenci $\mathbf{K}'$ v $\mathbf{K}$, neboť $\mathbf{K} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{K}'\mathbf{T}$.

Jestliže speciálně v případě, kdy skupiny prvků σ a σ', rovněž ϱ a ϱ' jsou totožny, je korespondence $\mathbf{K}'$ totožna s $\mathbf{K}$, platí

$$\mathbf{TKT}^{-1} = \mathbf{K} \text{ čili } \mathbf{TK} = \mathbf{KT},$$

t. j. transformace $\mathbf{K}$ a $\mathbf{T}$ jsou *záměnné*; obráceně, jsou-li $\mathbf{K}$ a $\mathbf{T}$ záměnné, převádí $\mathbf{T}$ korespondenci $\mathbf{K}$ v ni samu.

[7]) Což je odůvodněno hořejším označením transformace (s připojenou značkou systému); leckdy se však volí u produktu pořádek obrácený (od levé strany k pravé).

d) Transformace mohou tvořit skupinu, jež obsahuje inversní transformaci každého svého členu a produkt kterýchkoli transformací skupiny (tedy také transformaci identickou); takto uzavřená skupina transformací sluje *grupa transformací*. Jestliže část transformací v grupě obsažených tvoří sama grupu, sluje tato *subgrupou* (podgrupou, užší grupou) vzhledem k oné.

Grupy transformací rozeznáváme diskretní a kontinuitní. Diskretní grupy obsahují buď konečný počet transformací nebo počet nekonečný: *konečné* grupy transformací mají omezený počet členů, jenž sluje *stupněm* grupy. *Spojité* (kontinuitní) grupy transformací jsou takové, u nichž výsledek každé transformace grupy přechází transformacemi jejími spojitě ve výsledek jiné transformace grupy; lišíme je podle počtu *parametrů*, na kterých závisí. Existují také grupy smíšené (složené z diskretních řad transformací, z nichž aspoň jedna řada je grupou spojitou).[8])

Jestliže každý prvek útvaru přechází při transformaci v prvek téhož útvaru, sluje útvar ten při transformaci *invariantní* (neproměnný). Útvary při transformacích invariantní jsou velmi důležité. *Všechny transformace* patřící do dané grupy, *při nichž jest určitý útvar invariantní, tvoří grupu* (subgrupu uvedené grupy). Neboť jednak útvar, invariantní při některých transformacích, jest invariantní i při jejich produktech a při transformacích k nim inversních, jednak patří všechny takové transformace do oné grupy.

Metoda geometrická a analytická. Úvahy geometrické mohou býti vedeny prostým usuzováním ze známých vlastností útvarů geometrických; vydatnou pomůckou při tom jsou geometrické konstrukce. Tato metoda sluje podle vytčené povahy své *ryze geometrická* nebo *konstruktivní* nebo také *synthetická*, protože postupuje přirozeně od jednodušších útvarů a vět skládáním jejich k útvarům a větám složitějším.

Jiný způsob, kterým je možno při vyšetřování geometrickém postupovati, jest užití počtu (algebry a analyse) na útvary geometrické; metoda ta sluje proto *analytická* (početní). Její podstata jest tato: Mezi geometrickými prvky a čísly ustanovíme korespondenci obapolně jednoznačnou tím, že určitým zákonem prvkům těm přiřadíme čísla, jež pak nazýváme *souřadnicemi* prvků. Vedle jednojednoznačné korespondence je nutno toho dbáti, aby geometrickým prvkům spojitě se měnícím odpovídaly souřadnice taktéž spojitě proměnlivé; jinak volba souřadnic může býti velmi rozmanitá. Ve zvolené soustavě souřadnic vyjádříme potom geometrické útvary *rovnicemi*, platnými o jejich prvcích. Na tomto základě můžeme každou otázku geometrickou nahraditi otázkou analytickou. Řešení této děje se ovšem metodami algebry a analyse. Výsledku řešení analytického jest nutno nakonec dáti výklad geometrický.

[8]) Pro teoretický úvod o tomto předmětu viz na př. *H. Weber*, Lehrbuch der Algebra, 2. vyd. 1898 a 1899, nebo *W. Burnside*, Theory of groups of finite order, 2. vyd. 1911; *S. Lie* a *G. Scheffers*, Vorlesungen über continuierliche Gruppen, 1893, nebo *E. Pascal*, I gruppi continui di trasformazioni, 1903.

Je nesporno, že metoda ryze geometrická je v základě jednodušší a předmětu přiměřenější, kdežto metoda analytická, postupujíc ve třech uvedených stadiích, je složitější a vnáší do úvah geometrických pojmy jim cizí. Prostá metoda geometrická stává se však obtížnou (a tím někdy méně bezpečnou) při vyšetřování útvarů složitějších; metoda analytická jest v takových případech zpravidla výhodnější, mohouc užívati postupů a výsledků jinde vyzkoušených.[9])

Prvky nevlastní. Všimněme si některých zcela jednoduchých vět geometrických. Věta, že dva (různé) body určují (jedinou) přímku, platí bez výjimky. Věta však, že dvě (různé) přímky v rovině určují (jediný) bod, platí až na případ přímek se neprotínajících čili rovnoběžných. Aby i tato věta platila bez výjimky, řekněme, že dvě přímky rovnoběžné mají společný (tentýž) směr čili společný bod v nekonečnu.[10]) Přisuzujeme pak každé přímce (ve shodě s perspektivní představou) jeden bod v nekonečnu; chceme-li jej rozlišiti od skutečných bodů (v konečnu), říkáme mu *bod nevlastní*.[11]) Jest společný všem rovnoběžným přímkám (v rovině i v prostoru); přímky nerovnoběžné mají ovšem různé body nevlastní.

Musíme se nyní vrátiti k první větě (dva body určují přímku). Zůstává v platnosti, i když jeden bod je nevlastní (je to přímka jdoucí bodem v konečnu rovnoběžně k soustavě rovnoběžných přímek). Chceme-li, aby platila i pro dva body nevlastní, musíme zavésti přímku v nekonečnu čili *přímku nevlastní* jakožto přímku určenou dvěma body v nekonečnu. K témuž požadavku dospějeme žádajíce, aby věta, že dvě (různé) roviny určují (jedinou) přímku, platila bez výjimky; tedy i v případě dvou rovin se neprotínajících čili rovnoběžných, jež mají, jak říkáme, společnou (tutéž) polohu. Každá rovina má jednu přímku nevlastní, jež je společná všem rovinám rovnoběžným; roviny nerovnoběžné mají ovšem různé přímky nevlastní. Nevlastní přímka, určená dvěma body nevlastními, je tedy přímka společná rovinám, rovnoběžným k dvěma (různým) soustavám rovnoběžných přímek v prostoru.

Protějškem k uvedené větě, že dvě přímky ležící ve společné rovině určují bod, jest věta, že dvě přímky mající společný bod určují rovinu. Vidíme, že věta tato platí nejen v případě, kdy obě přímky jsou v konečnu (majíce společný bod vlastní nebo nevlastní), nýbrž i v případě, kdy jedna z nich je nevlastní (rovina určená přímkou vlastní a přímkou nevlastní je rovina jdoucí přímkou v konečnu, rovnoběžnou k soustavě rovnoběžných rovin, rovnoběžně k této soustavě). Jestliže

[9]) Třetí způsob úvah geometrických je metoda t. zv. *geometrického počtu* (bodového); tato metoda, založená hlavně *H. Grassmannem* r. 1844 a dosud málo obvyklá, počítajíc přímo s body, přímkami a rovinami, má spojovati výhody obou metod uvedených.

[10]) Jsme k tomuto pojímání vedeni, sledujíce na pevné přímce průsečíky její s přímkou, jež se otáčí kolem bodu mimo pevnou přímku ležícího.

[11]) Sluje také ideální (myšlený). Obyčejná představa přímky upravuje se tím v představu čáry uzavřené.

konečně obě přímky jsou nevlastní, mají společný bod (nevlastní bod přímek, v nichž se protínají dvě různé soustavy rovnoběžných rovin); aby tedy i v tomto případě byla dvěma přímkami se společným bodem určena rovina, zavádíme rovinu v nekonečnu čili *rovinu nevlastní*. Jako nevlastní přímka roviny obsahuje nevlastní body všech jejích přímek, tak nevlastní rovina (jediná v prostoru) obsahuje nevlastní body všech přímek a nevlastní přímky všech rovin v prostoru.[12])[13])[14])

Projektivní geometrie. Zavedením nevlastních prvků dosáhli jsme značného zjednodušení už při primitivních větách geometrických v tom, že uvedené věty platí bez výjimky. (Chceme-li ovšem rozlišovat prvky nevlastní od vlastních, zahrnuje každá všeobecná věta několik zvláštních.) Docílená tím jednota je cenná po stránce formální; avšak hluboký a hlavní význam má s následujícího hlediska:

---

[12]) Při zavedení prvků nevlastních bylo (zde v úvodě) použito formálního důvodu jednoduchosti a také názoru proto, aby prostor projektivní geometrie, různý od obyčejného prostoru geometrie Eukleidovy, byl učiněn přijatelným, ač jest možno prostor ten vhodnou soustavou vět prostě definovat (jak se stane v části hlavní). Ostatně lze nevlastní bod přímky a ostatní prvky nevlastní zavésti bez základní věty obyčejné geometrie o rovnoběžkách (bez t. zv. postulátu Eukleidova, že totiž bodem mimo přímku ležícím lze k ní vésti jednu a jedinou přímku rovnoběžnou), jak vytkl *F. Klein* (r. 1871) a provedl *M. Pasch* (r. 1882 a později). Pasch podává nejprve soustavu postulátů pro *omezenou část prostoru* a definuje pak systém přímek, jež po dvou leží v jedné rovině, ale všechny nejsou v téže rovině (na základě věty: Jestliže dvě přímky a, b leží v jedné rovině a z jiných dvou přímek c, d každá jest s a v jedné rovině a taktéž s b, leží také c, d v jedné rovině). Společný bod všech přímek uvedené soustavy je (vzhledem k prostoru omezenému) buď vlastní nebo nevlastní, t. j. ležící buď v prostoru tom nebo mimo něj. Nevlastními prvky rozšiřuje se omezený prostor v úplný. Viz zejména *R. Bonola*, Sulla introduzione degli enti improprii in geometria proiettiva, Giornale mat. 38 (1900), a *F. Schur*, Grundlagen der Geometrie, 1909; dále *O. Veblen*, A system of axioms for geometry, Transactions Amer. math. soc. 5 (1904), a *F. W. Owens*, The introduction of ideal elements and a new definition of projective n-space, Transactions Amer. math. soc. 11 (1910).

[13]) Bod a přímku v nekonečnu zavedl do geometrie *Desargues* r. 1639, rovinu v nekonečnu *Poncelet* r. 1822.

[14]) Že zavedené pojmy nevlastních prvků spolu s prvky vlastními sobě neodporují, dokáže se na analytickém vyjádření elementů prostorových. Bod v prostoru určuje se obyčejně třemi pravoúhlými souřadnicemi x, y, z. Chceme-li však také body v nekonečnu uvésti do počtu, zavádíme čtyři (homogenní) souřadnice x_1, x_2, x_3, x_4 a bod určujeme jejich poměrem $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ (při čemž vylučujeme poměr $0 : 0 : 0 : 0$). Místo souřadnic x, y, z můžeme totiž pro stanovení bodu (vyjma počátek) zvoliti směrové kosiny přímky, spojující jej s počátkem soustavy souřadnic, a převratnou hodnotu vzdálenosti jeho od počátku, takže $x_1 = k \,.\, x/v$, $x_2 = k \,.\, y/v$, $x_3 = k \,.\, z/v$, $x_4 = k \,.\, 1/v$, kde $v = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ a $k \neq 0$ jest konstanta úměrnosti ($v \neq 0$); vzdaluje-li se bod na pevné přímce do nekonečna, zvětšuje se v bez omezení a x_4 se blíží bez omezení nule, čímž jsme vedeni k definici bodu $(x_1, x_2, x_3, 0)$ jako bodu nevlastního (na zvolené přímce). Z bodů (x_1, x_2, x_3, x_4) mají tudíž vlastní body souřadnici $x_4 \neq 0$ a obyčejné souřadnice $x = x_1/x_4$, $y = x_2/x_4$, $z = x_3/x_4$, body nevlastní pak mají souřadnici $x_4 = 0$. Rovina určena je rovnicí

Mysleme si na př. dvě různé roviny α, β a bod mimo ně ležící S. Paprsek bodem S jdoucí ať protíná rovinu α v bodě A, rovinu β v bodě B. Pojímejme věc tak, že bodu A odpovídá bod B; odpovídá tedy bodu A na α bod B na β, v němž přímka SA protíná rovinu β. Každému bodu na α odpovídá takto jeden a jediný bod na β, ale jen tehdy, jestliže na rovině β existuje jedna přímka nevlastní; potom totiž také každému bodu na průsečnici roviny α s rovinou, jdoucí bodem S rovnoběžně k β, odpovídá jeden a jediný bod na nevlastní přímce roviny β. Při vztahu obráceném, kdy bodům roviny β odpovídají body na α (na uvedeném podkladě), má nevlastní přímka roviny α obdobný význam. Korespondence mezi body dvou rovin takto uskutečněná je tedy obapolně jednoznačná; poněvadž přechod od bodů (a přímek) roviny α k bodům (a přímkám) roviny β a naopak sluje promítání (projekce), nazývá se tato korespondence mezi prvky (a útvary) obou rovin *korespondencí* (*transformací*) *projektivní*.

Některé vlastnosti, platné o útvarech prostorových, platí také pro útvary, které z nich vzniknou transformacemi projektivními; *vlastnosti*, jež jsou společny útvarům odpovídajícím sobě v korespondencích projektivních (t. j. vlastnosti, jež se nemění promítáním, jsou invariantní při projekci), slují *projektivní*. Projektivní vlastnosti týkají se patrně toho, jak prvky útvarů prostorových sobě náležejí (jsou incidentní, t. j. ze dvou prvků různého druhu jeden leží na druhém nebo druhým prochází): *incidence* prvků je charakteristický obsah vlastností projektivních. Rozšiřujíce svůj zřetel vedle útvarů v rovině na útvary v prostoru, nazýváme korespondenci mezi nimi také projektivní, jestliže bodům, přímkám a rovinám odpovídají jednojednoznačně prvky téhož druhu a jestliže zůstávají zachovány při přechodu tom incidence prvků. Odtud je spolu patrno, že transformace projektivní tvoří grupu (projektivní).[15])

Projektivní geometrie je nauka o projektivních vlastnostech útvarů geometrických, t. j. *o těch vlastnostech, jež jsou invariantní při grupě transformací projektivních.*[16])

1. stupně $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$, rovina nevlastní pak rovnicí $x_4 = 0$. Přímka určena je dvěma rovnicemi takovými $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$, $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0$ (jejichž koeficienty nejsou úměrny); přímka nevlastní na rovině $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ určena jest rovnicí této roviny a roviny $x_4 = 0$. Snadno zjistíme, že nevlastní prvky zde vytčené mají vlastnosti prvků nahoře uvedených. Že body, přímky a roviny vlastní i nevlastní tvoří prostorovou soustavu pojmů sobě neodporujících, zaručeno jest tedy algebrou; při tom jest vytknouti, že prvky v nekonečnu nezaujímají zvláštního místa, protože to platí o souřadnici x_4. (Viz na př. *Veblen* a *Young*, Projective geometry I, p. 9).

[15]) Grupu projektivní zde uvedenou doplníme v širší grupu transformací, jež neruší incidence prvků, ale prvkům (bodům, přímkám a rovinám) přiřaďuje prvky jiného druhu (z nich, na př. v rovině bodu přímku a přímce bod).

[16]) Protože vlastnosti projektivní se týkají vzájemné polohy prvků v útvarech geometrických, nazývá se projektivní geometrie též *geometrií polohy*. Mimo to se vyskytují pro tento obor geometrický také nevhodná jména geometrie *novější*, geometrie *vyšší* (obě bezobsažná a pomíjející),

Pravíme, že geometrie projektivní přísluší ke grupě transformací projektivních. Podle pojmu transformací projektivních je možno říci, že geometrie projektivní jedná o těch vlastnostech prostorových útvarů, jež lze převésti na incidence prvků (je tedy projektivní geometrie *geometrií incidencí*).

V geometrii projektivní nelze lišiti prvků vlastních a nevlastních, protože při promítání jedny v druhé přecházejí. Zavedením nevlastních bodů, nevlastních přímek a nevlastní roviny upraveno bylo obyčejné pojímání útvarů prostorových pro úvahy geometrie projektivní; prostor tak doplněný sluje proto *prostor projektivní*.[17])

Vyloučeny jsou z úvah projektivní geometrie všechny vlastnosti útvarů, jež se promítáním mění, zejména rovnoběžnost prvků, jejich kolmost, velikost jejich částí (úseček, ploch, těles). O těchto vlastnostech útvarů jedná *geometrie obyčejná* čili *elementární* (*metrická*).

Geometrii obyčejnou jest možno jako speciální vyvoditi z geometrie projektivní;[18]) v geometrii té lze rozeznávati dva stupně: Jestliže z transformací projektivních vybéreme ty, při nichž prvky vlastní přecházejí ve vlastní a prvky nevlastní v nevlastní, obdržíme užší grupu t. zv. *transformací afinních* (subgrupu grupy projektivní). Při transformacích afinních zaujímá rovina v nekonečnu zvláštní postavení, přecházejíc v sebe samu; přímkám a rovinám rovnoběžným odpovídají přímky a roviny rovnoběžné, nerovnoběžným nerovnoběžné. *Geometrie*, příslušná ke grupě transformací afinních, sluje *afinní*; jedná o těch vlastnostech útvarů prostorových, jež lze převésti na incidenci a rovnoběžnost prvků. — Zvolíme-li konečně z transformací projektivních jen ty, při kterých zůstává zachována vedle rovnoběžnosti i kolmost prvků, dostaneme ještě užší grupu t. zv. *transformací podobnostních* čili ekviformních (subgrupu grupy afinní). *Geometrie podobnostní* čili ekviformní, příslušná k této grupě, zabývá se vlastnostmi prostorových útvarů, které lze převésti na incidenci, rovnoběžnost a kolmost prvků. Jako geometrie afinní je obsahem bohatší než geometrie projektivní, tak geometrie podobnostní je opět obsažnější než geometrie afinní.[19])

geometrie *synthetická* (udává místo obsahu jednu z možných metod), geometrie *novější synthetická* a j.

[17]) Tomuto pojímání prostoru říkalo se také „perspektivní názor na prostor".

[18]) Některé věty této (mnohem obsáhlejší) geometrie budou (aspoň s počátku) uváděny v poznámkách jako dodatky k větám projektivním (*metrické specialisace vět projektivních*). Ve vývoji projektivní geometrie hrál velikou úlohu postup opačný: metodou „*centrální projekce*" odvozovány byly často z vět geometrie elementární obecnější věty projektivní.

[19]) Viz hlavně *F. Klein*, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen (Erlanger Programm), 1872 (také Math. Annalen 43, 1893 nebo Gesam. math. Abhandlungen I, 1921); *L. Heffter*, Über das Lehrgebäude der Geometrie, insbesondere bei analytischer Behandlung, Jahresbericht Deut. Math. Ver. 12 (1903), nebo *Heffter* a *Koehler*, Lehrbuch der analytischen Geometrie I, 1905; *L. Heffter*, Analyse und Synthese in der Geometrie, Jahresbericht Deut. Math. Ver. 27 (1918).

Rozdíl mezi vlastnostmi projektivními (polohovými) a metrickými jeví se už psychologicky: projektivní poznatky získáváme z počitků zrakových, metrické z počitků hmatových.[20])

Vývoj geometrie projektivní. Ráz projektivní geometrie vysvitne také z krátkého přehledu jejího vývoje. Ačkoli lze zárodky některých vět této geometrie nalézti už ve starověku ve spisech *Apolloniově* a *Pappově*, není přece radno hledati tam její původ, protože geometrie řecká postrádala obecných hledisek. Teprve perspektiva za doby renaissanční, potřebná v malířství a architektuře, poskytla podklad k obecné myšlence nové geometrie. V polovici století 17. byli to pak geometři *G. Desargues* a *B. Pascal*, u nichž se vyskytují první začátky projektivního nazírání geometrického (u kuželoseček). V téže době však vznikla geometrie analytická a brzy potom mocný počet infinitesimální, jež plně zaujaly pozornost matematiků; tím byla geometrie synthetická zatlačena do pozadí. Teprve na konci 18. století nastal obrat: potřeby technické obracely pozornost k poloze a tvaru útvarů geometrických i k vyšetřování jejich velikosti z příhodného zobrazení. Tvůrce geometrie deskriptivní *G. Monge* stal se svými obecnými vodítky při popisu a zkoumání geometrických útvarů, spec. soustavným využitím pravoúhlých průmětů jejich a obratným rozšiřováním vlastností z případů zvláštních na obecné, předchůdcem geometrie projektivní. K němu se druží *L. N. M. Carnot* soustavným vyšetřováním útvarů při rozmanitých polohách a zobecněním pojmu čtyrúhelníku rovinného.

Geometrii projektivní jako samostatný a nový obor geometrický založil *J. V. Poncelet*, zejména svým klasickým spisem *Traité des propriétés projectives des figures*, jehož základní myšlenkou zabýval se spisovatel za svého zajetí v Rusku r. 1813 a jejž uveřejnil roku 1822 (2. vyd. ve 2 sv. 1865—66). Zde po prvé vyšetřují se výslovně a soustavně projektivní vlastnosti geometrických útvarů; obecnou methodou (středového promítání) nalézá Poncelet ze speciálních útvarů polohové vlastnosti útvarů projektivních (na př. z vlastností rovnoběžníku a kružnice vlastnosti čtyrstranu a kuželosečky), jakož i metrické vlastnosti při promítání invariantní. Prvky imaginární snažil se Poncelet, pokračuje v myšlence Mongeově, zavésti na základě spojitých proměn útvarů geometrických. Poncelet první vyšetřoval obecně útvary homologické i útvary polárné a používal důležitých těchto korespondencí speciálních k odvození nových vět. Od polárnosti, jejíž význam u čar a ploch kvadratických vytkl Poncelet, dospěl *J. D. Gergonne* k obecnému zákonu duálnosti, platnému už v základech geometrie projektivní.

Odtud postupovalo budování projektivní geometrie velmi rychle. *A. F. Möbius* v díle svém *Der barycentrische Calcül* z roku 1827 (také Gesam. Werke I, 1885), kde užívá po prvé pro bod souřadnic homo-

[20]) Viz na př. *F. Enriques*, Problemi della scienza, 1906 (něm. překlad 1910). Vlastnosti polohové slují proto také visuální (zrakem poznávané); někdy též deskriptivní nebo grafické.

genních, pokládaje jej za těžiště soustavy tří základních bodů s určitými hmotami, jednak počal projektivní vlastnosti útvarů vyšetřovati analyticky, jednak vyslovil obecný pojem korespondence jednoznačné i mnohoznačné, s korespondujícími prvky téhož druhu i různých druhů, spec. pak pojem korespondencí projektivních, kolineace i korelace, uváděje, obecněji než Poncelet, v příbuznost všechny elementy dvou přímek, rovin i celého prostoru. Tvořivý geometr rázu synthetického *J. Steiner* podal v roce 1832 ve hlavním spise svém *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (také Gesam. Werke I, 1881 a Klassiker der exakten Wiss. č. 82. a 83.), vycházeje od nejjednodušších útvarů základních a uváděje v soustavu všechny věty geometrie projektivní, obecnou a plodnou metodu vytvořování geometrických útvarů z útvarů základních: Steiner ucelil také teorii čar a ploch stupně druhého. Uvedenou myšlenku Steinerovu dále sledovali při útvarech vyšších *J. Seydewitz*, *H. Schroeter*, *Th. Reye* a *F. Schur*. Obdobně jako Möbius a Steiner zasloužil se o hlavní pojmy a metody projektivní geometrie *M. Chasles*, především svým *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* z r. 1837 (3. vyd. 1889, přel. do němčiny 1839, do ruštiny 1871). Ve směru analytickém pak při vyjádření příbuzností projektivních a při budování základních pomůcek pokračoval vedle Möbia *J. Plücker*.

Prudkým, třebas krátkým vývojem geometrie projektivní získána byla řada vedoucích myšlenek a bohatý obsah nového oboru geometrického. V proudu četných výsledků nedbalo se, jak tomu bývá, na logickou nesrovnalost v tom spočívající, že základem pro obecné věty projektivní geometrie zůstávají speciální pojmy a věty metrické. *G. K. Ch. v. Staudt* ve svých dílech *Geometrie der Lage*, jež vyšlo r. 1847, a *Beiträge zur Geometrie der Lage* (3 sešity) z r. 1856—60 (přel. do italštiny 1889) osamostatnil projektivní geometrii od geometrie elementární, podávaje novou nauku metodou jednotnou a ryzí. Staudtovo východisko z konstrukce harmonických čtveřin a příslušná definice projektivní příbuznosti, jeho odvození t. zv. základní věty o projektivnosti, jeho definice kuželosečky reálné i imaginární ze speciální korelace jsou nová a významná hlediska v geometrii projektivní. Nemenší zásluhou Staudtovou jest jeho geometrické zavedení prvků imaginárních a dokonce rozlišení obou komplexních prvků sdružených; ba i zárodek pro zavedení souřadnic bez pojmů metrických nalézá se u tohoto vynikajícího geometra.

Po skvělém tomto rozvoji projektivní geometrie nastoupila v následující době klidná práce ve směrech dříve naznačených. Byly propracovány a doplněny rozmanité obory nové geometrie (na př. rozsáhlé teorie rozmanitých útvarů vyšších, teorie imaginárních prvků i útvarů a j.), při čemž vedle metody synthetické prve převládající bylo soustavně užíváno také metody analytické; na krajních křídlech jsou tu po stránce analytické teorie invariantů, se stanoviska synthetického pokusy o ryze

geometrickou definici algebraických čar rovinných. Nejdůležitější však nové rysy současné geometrie projektivní, jež mají svůj původ jednak v předcházejícím vývoji této geometrie, jednak v moderních směrech jiných oborů geometrických, jsou důsledný a přísný zřetel k základům nauky, samostatné vybudování její a podřadění speciálních geometrií, soustavné vyšetřování projektivních transformací i jejich grup a konečně obsáhlé rozšíření úvah na prostor s libovolným počtem rozměrů.[21])

---

[21]) O dějinách projektivní geometrie pojednávají *M. Chasles*, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, 1837 (3. vyd. 1889) a téhož Rapport sur les progrès de la géométrie, 1870; *E. Kötter*, Die Entwickelung der synthetischen Geometrie, 1901 (do Staudta, sleduje velmi podrobně jednotlivé předměty). Hojná historická a literární data jsou v *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, III. svazek (Geometrie) 1. díl (AB), hlavně čl. 4*a* (*G. Fano*, Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung im XIX. Jahrhundert) a 5 (*A. Schoenflies*, Projektive Geometrie), částečně doplněno ve zpracování francouzském (Encyclopédie des sciences mathématiques, III, 2, seš. 1 [III 8, *A. Tresse*, Géométrie projective]). Četné údaje literární obsahuje také *G. Loria*, Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche, 4. vyd. 1931. Stručný náčrtek nynějšího stavu nauky je podán v čl. *J. Vojtěch*, O projektivní geometrii, Časopis mat. a fys. 52 (1922).

LITERATURA.

a) Mimo uvedené už spisy zakladatelů projektivní geometrie Ponceleta, Möbia, Steinera, Chaslesa a Staudta patří k prvním učebnicím této geometrie:

M. Chasles, Traité de géométrie supérieure, 1852 (2. vyd. 1880, přel. do němč. 1856); a jako pokračování Traité des sections coniques, 1865.

J. Steiner, Vorlesungen über synthetische Geometrie, 2 díly 1867 (1. díl zpracoval Geiser, 2. díl Schröter; 3. vyd. 1887 a 1898).

Th. Reye, Die Geometrie der Lage, 2 díly 1866—68 (od 3. vyd. 3 díly; 1. dílu 6. vyd. 1923, 2. dílu 5. vyd. 1923, 3. dílu 5. vyd. 1923; přel. do franč. 1881—82, do ital. 1884, do angl. 1898); obšírná učebnice ryze synthetická.

Em. a *Ed. Weyrové*, Základové vyšší geometrie, 3 díly 1871—78.

L. Cremona, Elementi di geometria proiettiva, 1873 (přel. do franč. 1875, do němč. 1882, do angl. 1894).

J. Thomae, Ebene geometrische Gebilde erster und zweiter Ordnung vom Standpunkte der Geometrie der Lage betrachtet, 1873; a téhož obšírnější Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung, 1894.

H. Hankel, Die Elemente der projectivischen Geometrie in synthetischer Behandlung, 1875 (z pozůstalosti autorovy vydal Harnack); obsahuje poutavý úvod historický, poukazuje na obecné metody, hojně užívá pomůcek metrických, $\frac{4}{5}$ knihy věnovány jsou útvarům 1. řádu.

b) Pozdější učebnice staršího konstruktivního založení různé délky jsou:

Em. Weyr, Die Elemente der projectivischen Geometrie, 2 díly 1883 až 1887.

K. Bobek, Einleitung in die projektivische Geometrie der Ebene, 1889 (podle přednášek Küpperových; 2. vyd. 1897).

A. Sannia, Lezioni di geometria proiettiva, 1891 (2. vyd. 1895); obšírná.

E. Aschieri, Geometria projettiva del piano e della stella, Geometria projettiva dello spazio, 2 svazečky 2. vyd. 1895.

J. W. Russell, An elementary treatise on pure geometry, 1893 (2. vyd. 1905).

Ed. Weyr, Projektivná geometrie základných útvarů prvního řádu, 1898 (2. vyd. 1911).

R. Böger, Ebene Geometrie der Lage, 1900.

V. Jarolímek, Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru, 5 sešitů 1908—18.

c) Úzká souvislost projektivní geometrie s geometrií deskriptivní přes různost cílů způsobila, že v učebnicích této geometrie věnována je leckdy geometrii projektivní značná pozornost; v tom ohledu jest uvésti:

W. Fiedler, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, 2. vyd. 1875 (3. vyd. 1883—88, 1. dílu 4. vyd. 1904).

G. A. v. Peschka, Darstellende und projektive Geometrie nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft, 4 díly 1883—85 (1. díl nově 1899).

Ch. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 2 díly 1884—87.

d) Z elementárních učebnic, jež užívají metody synthetické i analytické (jak to v přednáškách italských universit vlivem Cremonovým bylo zavedeno), budtež uvedeny:

G. Castelnuovo, Lezioni di geometria analitica e proiettiva, 2 díly 1904—05; od 2. vyd. (1909) přepracována s názvem Lezioni di geometria analitica (5. vyd. 1922).

E. Ciani, Lezioni di geometria proiettiva ed analitica, 1912 (3. vyd. 1922); jejím doplňkem jest téhož autora Il metodo delle coordinate proiettive omogenee nello studio degli enti algebrici, 1915 (2. vyd. 1928).

G. Fano a *A. Terracini*, Lezioni di geometria analitica e proiettiva, 1930.

A. Comessatti, Lezioni di geometria analitica e proiettiva, ze 3 částí dosud 2, 1930—31; pozoruhodná.

Praktického rázu jest kniha *A. Emch*, An introduction to projective geometry and its applications, 1905.

e) Ryze analytické učebnice geometrie projektivní (a geometrie obyčejné) jsou:

W. Killing, Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten, 2 díly 1900—01.

E. d'Ovidio, Geometria analitica, 1896 (4. vyd. 1912).

L. Berzolari, Geometria analitica, 2 díly 1911 a 1916 (1. dílu 3. vyd. 1925); 1. sv. o „metodě souřadnic", 2. sv. o „čarách a plochách 2. stupně".

L. Bianchi, Lezioni di geometria analitica, 1915.

L. Heffter a *C. Koehler*, Lehrbuch der analytischen Geometrie, 2 díly 1905 a 1923 (1. dílu 2. vyd. podstatně přepracované a rozšířené 1927).

F. S. Woods, Higher geometry, 1922; úvod do vyšších metod analytické geometrie, většinou projektivní.

G. Scorza, Elementi di geometria analitica, 1925.

f) Metodou geometrického počtu vyloženy jsou základní části geometrie projektivní ve spisech:

C. Burali-Forti, Lezioni di geometria metrico-proiettiva, 1904 (asi $\frac{1}{3}$ spisu).

H. Grassmann ml., Projektive Geometrie der Ebene (unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt), 1. díl 1909, 2. dílu 1. část 1913, 2. část 1927.

R. Mehmke, Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung, 1. svazku 1. díl 1913 (základy proj. geom. zabírají 190 str.).

g) O projektivních transformacích jednají zejména:

K. Doehlemann, Geometrische Transformationen, 1902; 1. díl spisu dvoudílného (2. vyd. v 1 sv. 1930); přihlíží k aplikacím.

R. Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandschaften, 1908 až 1909; 1. až 3. díl spisu čtyrdílného; bohatá kniha.

h) Moderního rázu jsou učebnice:

F. Enriques, Lezioni di geometria proiettiva, 1898 (4. vyd. 1920; přel. do němč. 1903, 2. vyd. 1915, do franč. 1930); věnuje zvl. pozornost základům, přístupná.

F. Amodeo, Lezioni di geometria proiettiva, 1905 (3. vyd. 1912 a 1920).

P. del Pezzo, Principi di geometria projettiva, 3. vyd. 1913; směr jest patrný z nadpisů čtyř oddílů: obecná geom. proj., proj. geom. útvarů algebraických, prostor komplexní, kuželosečky.

F. Severi, Geometria proiettiva, 1921 (2. vyd. 1925, elementární) a téhož autora Complementi di geometria proiettiva, 1906 (sbírka úkolů s řešením).

G. B. Mathews, Projective geometry, 1914; jednoduchá.

O. Veblen a *J. W. Young*, Projective geometry, 1. díl 1910, 2. díl 1918; samostatná a zajímavá.[1])[2])

---

[1]) Od základů k vyšším úvahám ve výběru vede *E. Bertini*, Complementi di geometria proiettiva, 1928; *H. F. Baker*, Principles of geometry, 4 díly (základy, rovinná geom., prostorová geom., vyšší geom.) 1922—25 (1. dílu 2. vyd. 1929).

[2]) Jsou zde uvedeny jen (hlavní) knihy souborné; speciální monografie (knihy i pojednání) budou vytčeny na příslušných místech. Z knih jinojazyčných budtež připojeny: *C. F. E. Björling*, Lärobok i nyare plan geometri, 1896; *M. J. Vaščenko-Zacharčenko*, Projektivnaja geometrija, 1897. K úvodním krátkým učebnicím patří na př. *K. Doehlemann*, Projektive Geometrie in synthetischer Darstellung; *E. Duporcq*, Premiers principes de géométrie moderne; *J. Sachs*, Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie; *J. J. Milne*, An elementary treatise on cross-ratio geometry; *Ch. A. Scott*, An introductory account of certain modern ideas and methods in plane analytical geometry; *R. M. Winger*, An introduction to projective geometry; *F. Field*, Projective geometry with applications to engineering; *J. W. Young*, Projective geometry, 1930; a mn. j.

I. ZÁKLADY PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE.

1. Postuláty I. (o incidenci prvků). Za základní prvky projektivní geometrie zvolíme *bod*, *přímku* (čili paprsek) a *rovinu*. Body budeme označovati velkými latinskými písmeny (A, B, C, ...), přímky malými latinskými (a, b, c, ...), roviny malými řeckými (α, β, γ, ...). Základní vztah dvou různojmenných prvků budiž *sobě náležeti*: dva prvky sobě náležejí čili *jsou incidentní*,[1]) když jeden leží na druhém nebo prochází druhým.[2])

První skupina postulátů projektivní geometrie týká se toho, *jak* zvolené *elementy* bod, přímka a rovina *sobě náležejí*. Majíce zřetel k prvkům nevlastním, jimiž jsme elementy vlastní, názorem dané, doplnili, vidíme, že platí bez výjimky tyto jednoduché věty, jež přijímáme za postuláty:

1a. *Dva různé body určují přímku, na níž leží.*

2a. *Tři různé body neležící na téže přímce určují rovinu, na níž leží.*

3a. *Bod a přímka jím neprocházející určují rovinu, na níž leží.*

1b. *Dvě různé roviny určují přímku, kterou procházejí.*

2b. *Tři různé roviny neprocházející touže přímkou určují bod, jímž procházejí.*

3b. *Rovina a přímka na ní neležící určují bod, jímž procházejí.*[3])[4])

Rčení „dva body určují přímku" značí, že existuje vždy jedna a pouze jedna přímka stanovená dvěma body; obdobně v případech ostatních. Přímku určenou body A, B (jejich spojnici) budeme značiti AB, obdobně přímku určenou rovinami α, β (jejich průsečnici) stručně

[1]) Incidence prvků je vztah vzájemný, t. j. je-li první prvek incidentní s druhým, jest druhý incidentní s prvním (je-li na př. bod incidentní s rovinou, je rovina incidentní s bodem, a obráceně).

[2]) Tento vztah vyjadřuje se rozmanitým rčením, na př. místo „bod a přímka sobě náležejí" říkáme: bod jest na přímce, bod leží na přímce, bod je bodem přímky, přímka prochází bodem, přímka obsahuje bod a pod.

[3]) Chceme-li, aby se postuláty týkaly vždy jen dvou prvků, můžeme místo 2*ab* zvoliti dva postuláty o dvou přímkách (bez společných prvků nebo se spol. bodem a rovinou).

[4]) K těmto postulátům lze připojiti (pro úplnou představu, třebas je to obsaženo v postulátech dále uvedených): Existuje na přímce neomezené množství bodů, existuje na rovině neomezené množství přímek (a tedy bodů), existuje neomezené množství rovin.

$\alpha\beta$; dále body A, B, C určují rovinu ABC, roviny α, β, γ bod (prusečík) $\alpha\beta\gamma$, bod A a přímka a rovinu Aa, konečně rovina α a přímka a bod (průsečík) αa.[5])[6])[7])

[5]) Je-li potřeba, píšeme skupinu určujících prvků do závorek. Dvojí označení téhož útvaru spojováno jest znaménkem = (místo $\equiv$ pro jednoduchost); o velikosti nebude ovšem řeč.

[6]) Uvedené postuláty I. skupiny, jak je přijímá *F. Enriques*, jsou názorné, nejsou však nezávislé. Lze se omezit na postuláty $1ab$, $3ab$ a z nich odvodit věty $2ab$; ony čtyři postuláty jsou nezávislé (viz *F. Severi*, Geometria proiettiva, p. 328).

Můžeme však postuláty nahoře uvedené nahradit jen dvěma a mimo to můžeme zmenšit i počet základních prvků na dva. Buďtež základní prvky *bod* a *přímka*; pomocí jich lze definovati pojem roviny. Obdobně totiž jako přímku pokládáme za soustavu bodů, definujeme rovinu jako systém bodů, z nichž každý leží na přímce procházející daným bodem A a bodem na přímce a (kde A neleží na a). Zjednodušená soustava postulátů obsahuje pak tyto dva postuláty:

1. *Dva různé body určují přímku, je obsahující.*

2. *Jsou-li A, B, C body neležící na téže přímce a obsahuje-li přímka p bod ležící na přímce AB a bod ležící na přímce BC* (různý od onoho), *obsahuje také bod ležící na přímce CA.*

Postulát 1., totožný s hořejším postulátem I. $1a$, je možno rozložiti ve dva jednodušší: Dva různé body náležejí aspoň jedné přímce oba obsahující. Dva různé body nenáležejí více než jedné přímce oba obsahující.

Předpokládáme ovšem, že prvky, o nichž se v postulátech mluví, existují, což můžeme výslovně uvésti. Definice roviny jest umožněna předpokladem, že mimo přímku existuje aspoň jeden bod. Předpokládajíce dále, že mimo rovinu existuje aspoň jeden bod, můžeme prostor třírozměrný definovati obdobně jako rovinu.

Řadu předpokladů musíme konečně uzavřít postulátem, jenž vylučuje existenci prostorů s více než třemi rozměry, třebas ve tvaru: Neexistuje žádný bod mimo prostor třírozměrný. Postulát tento lze nahradit jiným, na př.: Pět bodů leží vždy v prostoru třírozměrném. Nebo: Přímka a rovina mají vždy aspoň jeden bod společný. Nebo: Dvě různé roviny mají vždy společnou přímku.

Postuláty zde (v poznámce) uvedené shodují se v podstatě se systémem, od něhož (v cit. knize) vycházejí *O. Veblen* a *J. W. Young*; svědčí o tom, jak velice lze základ projektivní geometrie zjednodušiti. Od podobného základu (který je možno obdobně rozšířiti pro geometrii prostoru n-rozměrného při $n > 3$) vychází ve svém (cit.) spise *F. Amodeo*. Takový systém je vhodný zejména pro abstraktní soustavu geometrickou; také pro projektivní *geometrii konečného počtu bodů* [viz *O. Veblen* a *W. H. Bussey*, Finite projective geometries, Transactions Amer. math. soc. 7 (1906)].

[7]) Soustava postulátů projektivní geometrie rozšiřuje se v základ *geometrie afinní* postulátem: V prostoru existuje invariantní rovina nevlastní (v nekonečnu), soubor bodů a přímek nevlastních [dvě přímky, dvě roviny, přímka a rovina, jež se protínají v bodě nebo v přímce této roviny, slují rovnoběžné]. Pro *geometrii ekviformní* (obyčejnou) přistupuje konečně postulát: V nevlastní rovině prve zavedené existuje invariantní imaginární nezvrhlá kuželosečka [dva prvky nevlastní roviny, sdružené vzhledem k této kuželosečce, slují k sobě kolmé; z ostatních prvků slují kolmé ty, jejichž průsečíky s onou rovinou jsou kolmé]. Jako lze z projektivní geometrie odvoditi obyčejnou geometrii Eukleidovu, připojíme-li k postulátům geometrie projektivní dva postuláty zde uvedené, jest možno také dospěti

2. Jednoduché věty a konstrukce. *a*) Na základě uvedených postulátů lze dokázati na př. tyto jednoduché věty odvozené:

4a. Přímka c jdoucí dvěma různými body A a B, jež leží v téže rovině γ, leží v této rovině (t. j. všechny body, ležící na přímce c, leží na rovině γ).

Neboť bod ležící mimo c na rovině γ určuje podle postulátu *3a* s přímkou c rovinu, jež obsahuje c; rovina ta je totožná s rovinou γ, určenou podle postulátu *2a* zvoleným bodem a body A, B. Obsahuje tedy γ přímku c (určenou podle *1a* body A, B).[1])

5a. Dvě různé přímky a, b, ležící v téže rovině γ, určují bod C, jímž procházejí.

Neboť bod mimo γ ležící určuje (podle *3a*) s a, b dvě roviny, jež se s γ protínají (podle *2b*) v bodě C, který leží (podle *4b*) na a i b. Bod určený přímkami a, b značíme jako bod (průsečík) ab; bod pak určený spojnicemi AB, CD píšeme stručně (AB, CD) a pod. v jiných případech.

4b. Přímka c ležící ve dvou různých rovinách α a β, jež procházejí týmž bodem C, prochází tímto bodem (všechny roviny, jdoucí přímkou c, jdou bodem C).

Neboť rovina jdoucí mimo c bodem C určuje podle postulátu *3b* s přímkou c bod, jímž prochází c; bod ten je totožný s bodem C, určeným podle postulátu *2b* zvolenou rovinou a rovinami α, β. Leží tedy C na přímce c (určené podle *1b* rovinami α, β).[1])

5b. Dvě různé přímky a, b, jdoucí týmž bodem C, určují rovinu γ, na níž leží.

Neboť rovina ležící mimo C určuje (podle *3b*) s a, b dva body, jež spolu s C určují (podle *2a*) rovinu γ, která obsahuje (podle *4a*) a i b. Rovinu určenou přímkami a, b značíme jako rovinu ab; rovinu pak určenou průsečnicemi $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ píšeme stručně ($\alpha\beta$, $\gamma\delta$) a pod. v jiných případech.

Dvě přímky, nemající společné roviny a tedy ani společného bodu, slují *mimoběžné*.[2])[3])

---

od projektivní geometrie k dvěma *geometriím neeukleidských*, hyperbolické a eliptické, ze suposice, že existuje při transformacích projektivních invariantní plocha druhého stupně, buď reálná nepřímková nebo imaginární. Jiný jest ovšem systém postulátů pro obyčejnou geometrii, samostatně (bez zřetele ke geometrii projektivní) sestavený.

[1]) Postuláty *3ab* lze nahraditi větami *4ab*, takže první skupina postulátů proj. geometrie by obsahovala věty *1ab*, *2ab*, *4ab*. Věta *3a* odtud plyne takto: Bod v ní uvedený určuje s dvěma body zvolenými na uv. přímce (podle *2a*) rovinu, na níž leží uv. bod a (podle *4a*) celá uv. přímka. Obdobně se dokáže věta *3b*.

[2]) Existence mimoběžných přímek plyne z uvedených postulátů a existence neomezeného množství prvků.

[3]) Dvě přímky, ležící v jedné rovině a jdoucí tedy jedním bodem nebo jdoucí týmž bodem a ležící tedy v téže rovině (přímky nemimoběžné), bývají také nazývány incidentní.

6*a*. Přímky, jež se po dvou protínají v bodech, všechny buď procházejí týmž bodem nebo leží v téže rovině (nebo mají obě tyto vlastnosti).

Neboť dvě přímky se společným bodem A leží (5*b*) v rovině α; třetí přímka, obě protínající, protíná je buď v A (ležíc v rovině α nebo ne) nebo je protíná jinde a, majíc tu s rovinou α dva body společné, leží tedy (4*a*) v jejich rovině α.

6*b*. Přímky, jež po dvou leží v rovinách, všechny buď leží v téže rovině nebo jdou týmž bodem (nebo mají obě tyto vlastnosti).

Neboť dvě přímky ležící v rovině α mají (5*a*) společný bod A; třetí přímka, mající společnou rovinu s první i druhou, leží buď v α (procházejíc bodem A nebo ne) nebo leží jinde a, jsouc obsažena ve dvou rovinách se společným bodem A, prochází tedy (4*b*) jejich bodem A.

b) Z daných prvků je možno určitými požadavky podle postulátů skupiny I. nalézti prvky nové, jejichž *sestrojení* (konstrukci) provádíme, popisujíce postup od oněch k těmto. Na př.:

7*a*. Daným bodem C jest vésti přímku protínající dvě dané přímky mimoběžné a, b (z nichž žádná neprochází bodem C).

Hledaná přímka musí ležeti v rovině Ca i v rovině Cb; sestrojíme tedy roviny Ca, Cb (určené podle 3*a*) a jejich průsečnici (podle 1*b*).

7*b*. V dané rovině γ jest vésti přímku protínající dvě dané přímky mimoběžné a, b (z nichž žádná neleží v rovině γ).

Hledaná přímka musí procházeti bodem γa i bodem γb; sestrojíme tedy body γa, γb (určené podle 3*b*) a jejich spojnici (podle 1*a*).

Kdežto v obou úlohách uvedených existuje jen jedno řešení (jeden element úloze vyhovující), jest možno vésti neomezeně mnoho přímek, protínajících tři dané přímky (po dvou) mimoběžné. Stačí totiž kterýmkoli bodem ležícím na jedné z nich (v kterékoli rovině jdoucí jednou z nich) položiti přímku podle 7*a* (7*b*); všechny přímky ty jsou ovšem mimoběžné. Tím více jest přímek, protínajících dvě dané přímky mimoběžné; soustava tohoto nekonečně velikého počtu přímek je taková, že každým bodem a v každé rovině prostoru jde jediná přímka soustavy (vyjma body na každé z obou mimoběžek a roviny každou z nich, kde je přímek soustavy nekonečně mnoho).[4])

3. Základní útvary. Každé seskupení geometrických prvků (v počtu omezeném nebo neomezeném) nazýváme útvarem geometrickým. Ze základních prvků (bodů, přímek a rovin) základním vztahem (sobě

[4]) Soustava přímek, protínajících tři nebo dvě pevné přímky mimoběžné, sluje zborcená kvadratická řada přímková, resp. lineární kongruence přímková.

náležeti) složeny jsou *základní útvary geometrie projektivní*,[1]) u nichž dlužno rozeznávati *vytvořující prvek* a *nosič*, jemuž prvky vytvořující náležejí.

Z bodů mohou býti vytvořeny tyto základní útvary:

1. *řada bodová* je soustava všech bodů ležících na přímce; nosičem je tedy přímka, jež sluje osa řady;

2. *pole bodové* je soustava všech bodů v rovině, jež je nosičem útvaru;

3. *prostor bodový* je soustava všech bodů v prostoru; nosičem je zde prostor.

Z rovin vznikají tyto útvary základní:

4. *svazek rovinový* (jednomocný svazek rovin) je soustava všech rovin procházejících přímkou; nosičem útvaru je přímka rovinám společná, jež sluje osa svazku;

5. *trs rovinový* (dvojmocný svazek rovin) je soustava všech rovin jdoucích bodem; tento nosič se nazývá střed (vrchol) trsu;

6. *prostor rovinový* je soustava všech rovin v prostoru, jenž je zde nosičem.

Z přímek konečně jsou složeny základní útvary:

7. *svazek paprskový* (jednomocný svazek paprsků)[2]) je soustava všech přímek v rovině jdoucích bodem; nosiči jsou bod, jenž sluje střed (vrchol) svazku, a rovina;

8. *pole paprskové* je soustava všech přímek v rovině, která je nosičem útvaru;

9. *trs paprskový* (dvojmocný svazek paprsků)[3]) je soustava všech přímek jdoucích bodem; nosičem je společný bod, střed (vrchol) trsu.[4])

Pole bodové a pole paprskové slují společně prostě *pole* (čili soustava rovinná), trs paprskový a trs rovinový dohromady *trs* (čili svazek prostorový), prostor bodový a prostor rovinový spolu *prostor* (čili soustava prostorová).[5])[6])

---

[1]) Základní útvary zavedl do geometrie projektivní *Steiner* r. 1832 (svazek paprskový a rovinový uvádí už *Desargues* r. 1639).

[2]) Svazek jednomocný (rovinový, paprskový) čili prostě *svazek* sluje franc. *faisceau* (de plans, de rayons), něm. *Büschel* (Ebenen-, Strahlen-), ital. *fascio* (di piani, di raggi), angl. axial *pencil*, flat pencil.

[3]) Svazek dvojmocný (rovinový, paprskový) čili prostě *trs* (hvězda) sluje franc. *gerbe*, něm. *Bündel*, ital. *stella*, angl. *pencil* (of planes, of lines).

[4]) Soustava všech přímek v prostoru nepřijímá se mezi útvary základní.

[5]) Někteří z těchto důvodů rozeznávají (místo 9) jen šest základních útvarů (na př. *Reye*).

[6]) V poli bodovém je nutno pojímati přímku jako řadu bodovou, v poli paprskovém bod jako svazek paprskový, v trsu rovinovém přímku jako svazek rovin, v trsu paprskovém rovinu jako svazek paprsků, v prostoru bodovém přímku jako řadu bodovou a rovinu jako pole bodové, v prostoru rovinovém přímku jako svazek rovinový a bod jako trs rovinový.

Řada bodová, svazek paprskový a svazek rovinový slují základní útvary *prvního řádu* čili *jednomocné* (jednorozměrné), pole bodové i paprskové, trs paprskový i rovinový jsou základní útvary *druhého řádu* čili *dvojmocné* (dvourozměrné), prostor bodový i rovinový jsou základní útvary *řádu třetího* čili *trojmocné* (třírozměrné).[7][8][9])

Dva základní útvary téhož druhu mohou míti týž nosič; tehdy slují *soumístné* (kolokální, konjektivní). Takovými jsou dvě řady bodové na téže přímce, dva svazky paprskové s týmž středem v téže rovině, dva svazky rovinové s touže osou atd.[10])

4. Základní výkony. Na základě postulátů skupiny I. jsou možny základní výkony geometrie projektivní, jimiž jsou *promítání* a *protínání* (sečení).[1])

1*a*. Daný útvar složený z bodů $A, B, C, \ldots$ a přímek $a, b, c, \ldots$ *promítneme z bodu* (středu) S,

1*b*. Daný útvar složený z rovin $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ a přímek $a, b, c, \ldots$ *protneme rovinou* (příčnou) σ,

[7]) Předpokládáme-li, že řada bodová (útvar 1. řádu vůbec) má $n + 1$ prvků, má pole bodové (útvar 2. řádu) $n^2 + n + 1$ prvků, prostor bodový (útvar 3. řádu) $n^3 + n^2 + n + 1$ prvků a prostor $(n^2 + 1)(n^2 + n + 1)$ přímek. Počet (reálných) prvků v základních útvarech 1., 2. a 3. řádu lze symbolicky udati ve tvaru ∞^1, ∞^2, ∞^3. Řád útvarů základních počal rozeznávati *Staudt* r. 1847.

Existenci neomezeného počtu prvků v uvedených útvarech základních lze výslovně prohlásiti za postuláty.

[8]) Nejdůležitějším rozdělením základních útvarů je dělení podle řádu; vedle prvků vytvořujících mohou býti dělidlem také nosiči.

[9]) Postuláty skupiny I. můžeme nyní vysloviti kratčeji. Místo rozmanitých rčení „bod leží na přímce nebo rovině“, „rovina prochází bodem nebo přímkou“ atd. užijme společného „bod, přímka, rovina sobě náležejí“; dvojice vět *ab* shrňme pak vždy v jednu (se zřetelem k základním útvarům a jejich prvkům vytvořujícím). Tak obdržíme uvedené postuláty v tomto tvaru:

1. *Dva různé prvky v základním útvaru 3. řádu určují základní útvar 1. řádu, jemuž náležejí.*

2. *Tři různé prvky v základním útvaru 3. řádu, jež nenáležejí základnímu útvaru 1. řádu, určují základní útvar 2. řádu, jemuž náležejí.*

3. *Prvek v základním útvaru 3. řádu a základní útvar 1. řádu, jemuž onen nenáleží, určují základní útvar 2. řádu, jemuž oba náležejí.*

[10]) Metricky speciální útvary základní obdržíme ze suposice, že nosič (bez vytvořujících prvků nebo s nimi) jest v nekonečnu. Jsou to svazek paprskový se středem nevlastním (soustava rovnoběžných přímek v rovině), svazek rovinový s osou nevlastní (soustava rovnoběžných rovin), trs paprskový se středem nevlastním (soustava rovnoběžných přímek v prostoru) a trs rovinový se středem nevlastním (soustava rovinových svazků s rovnoběžnými osami čili soustava rovin rovnoběžných k přímce). Dále řada bodová v nekonečnu (souhrn všech směrů přímek v rovinách rovnoběžných), svazek paprskový v nekonečnu (souhrn všech poloh rovin rovnoběžných k přímce), pole bodové v nekonečnu (souhrn všech směrů přímek v prostoru) a pole paprskové v nekonečnu (souhrn všech poloh rovin v prostoru).

[1]) Výkonů těchto užíval už *Desargues* (1639), *Pascal* a jiní, soustavně první *Poncelet* (1822).

jestliže ustanovíme přímky SA, SB, SC, ... a roviny Sa, Sb, Sc, ...

2*a*. Daný útvar složený z bodů $A, B, C, \ldots$ *promítneme z přímky* (osy) s, jestliže ustanovíme roviny $sA, sB, sC, \ldots$

V obou případech sluje útvar tak vzniklý *promítající* (promítka) daného útvaru a označuje se $S(A, B, C, \ldots, a, b, c, \ldots)$ resp. $s(A, B, C, \ldots)$. Tak slují i jednotlivé součástky útvaru vznikajícího SA, Sa, sA, pokud S a A jsou různé, S neleží na a, s neprochází bodem A.

jestliže ustanovíme přímky $\sigma\alpha$, $\sigma\beta$, $\sigma\gamma$, ... a body σa, σb, σc, ...

2*b*. Daný útvar složený z rovin $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *protneme přímkou* (příčkou) s, jestliže ustanovíme body $s\alpha, s\beta, s\gamma, \ldots$

V obou případech sluje útvar tak vzniklý *průsečný* (průsek, řez) daného útvaru a označuje se $\sigma(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, a, b, c, \ldots)$ resp. $s(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$. Tak slují i jednotlivé součástky útvaru vznikajícího $\sigma\alpha$, σa, $s\alpha$, pokud σ a α jsou různé, σ neprochází přímkou a, s neleží v α.

V uvedené definici obsaženo jest i promítání a protínání v soustavě rovinné:

3*a*. Daný útvar, složený z bodů $A, B, C, \ldots$ ležících v rovině, promítneme z bodu S (této roviny), ustanovíme-li promítající přímky $SA, SB, SC, \ldots$

3*b*. Daný útvar, složený z přímek $a, b, c, \ldots$ ležících v rovině, protneme přímkou s (této roviny), ustanovíme-li průsečné body $sa, sb, sc, \ldots$

A také ve svazku prostorovém:

4*a*. Daný útvar, složený z přímek $a, b, c, \ldots$ jdoucích bodem, promítneme z přímky s (bodem tím jdoucí), ustanovíme-li promítající roviny $sa, sb, sc, \ldots$

4*b*. Daný útvar, složený z rovin $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ jdoucích bodem, protneme rovinou σ (bodem tím jdoucí), ustanovíme-li průsečné přímky $\sigma\alpha, \sigma\beta, \sigma\gamma, \ldots$

Jak patrno, dostaneme základními výkony z elementů, jež sobě náležejí, opět elementy sobě náležející: Bod a přímka jej obsahující promítají se z bodu, mimo přímku tu ležícího, přímkou a rovinou ji obsahující. Rovina a přímka v ní ležící protínají se rovinou, jež přímkou tou neprochází, v přímce a bodě na ní ležícím.

Proto obdržíme promítáním a sečením ze základních útvarů zase útvary základní (téhož řádu), a to

promítnutím

a_1) řady bodové z bodu (mimo osu řady ležícího) svazek paprskový;

a_2) řady bodové z přímky (osu neprotínající) svazek rovinový;

protnutím

b_1) svazku rovinového rovinou (neprocházející osou svazku) svazek paprskový;

b_2) svazku rovinového přímkou (osu neprotínající) řadu bodovou;

a_3) pole bodového nebo paprskového z bodu (mimo jeho rovinu ležícího) trs paprskový nebo rovinový.

b_3) trsu paprskového nebo rovinového rovinou (jež nejde středem jeho) pole bodové nebo paprskové.

V soustavě rovinné přistupuje jako protějšek k a_1: protnutím svazku paprskového přímkou (jež neprochází středem svazku) dostaneme řadu bodovou.

Ve svazku prostorovém přistupuje jako protějšek k b_1: promítnutím svazku paprskového z přímky (jež neleží v rovině svazku) dostaneme svazek rovinový.[2])

Základní útvar daný a útvar jej promítající (z bodu nebo z přímky) slují *perspektivní*, rovněž tak základní útvar daný a jeho průsek (rovinou nebo přímkou), při čemž sobě odpovídají vždy dva incidentní elementy (obou útvarů těch).

Spojíme-li oba základní výkony, pravíme: v 1. případě promítáme útvar ze středu na rovinu, v 2. případě promítáme útvar z osy na přímku, v 3. případě promítáme útvar ze středu na přímku, ve 4. případě promítáme útvar z osy na rovinu; výsledný útvar sluje vždy *průmětem* daného.[3])

5. Princip (zákon) duálnosti. *a*) Jestliže v postulátech I. skupiny, uvedených v čl. 1 (1*ab*, 2*ab*, 3*ab*), užijeme místo různých rčení, že bod leží na přímce, že rovina prochází přímkou atd., všude stejného, že bod, přímka a rovina sobě náležejí, pozorujeme, že každá věta na straně levé (*a*) přejde ve větu na straně pravé (*b*), nahradíme-li v oné slovo bod slovem rovina a slovo rovina slovem bod. Celou projektivní geometrii jest možno vyvoditi z uvedených postulátů (a z dalších jiného rázu, jež platí pro základní útvary jednomocné, vytvořené kterýmkoli prvkem). Můžeme proto vysloviti tento obecný *princip duálnosti v prostoru*:

Každá věta projektivní geometrie zůstává v platnosti, jestliže v ní (po úpravě slohové) *zaměníme slovo bod slovem rovina a naopak.*

Neboť uvažovanou větu nějakou lze odvoditi logickým postupem z postulátů. Jestliže v postulátech těch vyměníme slova bod a rovina za slova rovina resp. bod a použijeme téhož logického postupu, do-

[2]) Protože promítáním a protínáním incidence prvků se nemění a protože promítáním z bodu přechází bod v přímku a přímka v rovinu, protínáním rovinou pak rovina v přímku a přímka v bod, jest možno z každé projektivní vlastnosti rovinné soustavy odvoditi projektivní vlastnost prostorového svazku, nebo obráceně, prostou záměnou slov bod a přímka ve slova přímka resp. rovina, nebo obráceně. (Vůbec vlastnosti jednoho útvaru 1. nebo 2. řádu přejdou ve vlastnosti jiného útvaru téhož řádu, který lze z onoho obdržeti promítnutím nebo protnutím.)

[3]) Důležitým metricky speciálním případem promítání z bodu (promítání *středového*, centrálního) jest promítání *rovnoběžné* (paralelní).

staneme větu druhou, která musí býti stejně správná jako věta původní. Na doklad toho všimněme si vět odvozených v čl. 2 (*4ab*, *5ab*, *6ab*).[1])

Dvě věty takto sdružené slují *prostorově duální*[2]) (někdy je jedna z nich obrácenou k druhé nebo s ní totožna). Prostorově duální jsou prvky bod a rovina, soběduální jest prvek přímka. Duální jsou také útvary geometrické, jichž se věty duální týkají: jeden odvodíme z druhého uvedenou záměnou. Zejména z útvarů základních jsou duální: prostor bodový a prostor rovinový, pole bodové a trs rovinový, pole paprskové a trs paprskový, řada bodová a svazek rovinový; svazek paprskový je útvar soběduální.

Duální jsou i základní výkony geometrie projektivní: promítání z bodu a protínání rovinou, promítání z přímky a protínání přímkou.

Duální jsou také geometrické konstrukce (úlohy a jejich řešení), jak je patrno na příkladech *7ab* a dalších (dvojice přímek mimoběžných stejně jako dvojice přímek se protínajících je soběduální).

Věty duální sestavujeme často do skupin po dvou (píšíce je souběžně vlevo a vpravo), aby jejich vzájemnost dobře vynikla.[3])

b) Z obecného zákona duálnosti, platného pro útvary v prostoru, je možno vyvoditi dva užší zákony duálnosti pro soustavu rovinnou a pro svazek prostorový.

K útvaru, složenému z bodů a přímek v rovině, jest perspektivní útvar, složený z přímek a rovin jdoucích bodem (mimo rovinu ležícím); k tomuto duální (prostorově) jest útvar, složený z přímek a bodů ležících v rovině. Věta platná pro útvar rovinný přechází takto (nakonec) v jinou větu, platnou o útvaru rovinném, který dostaneme z prvního záměnou prvků bod a přímka. Obě věty souvisí spolu *principem duálnosti v poli*:

Každá věta projektivní geometrie o útvarech soustavy rovinné zůstává v platnosti, jestliže v ní (po úpravě slohové) *zaměníme slovo bod slovem přímka a naopak.*

Ze základních útvarů jsou v rovině duální: pole bodové a pole paprskové, řada bodová a svazek paprskový; rovněž základní výkony: promítání z bodu a protínání přímkou.[4])

[1]) Tyto a další věty projektivní geometrie mohli bychom (jako jsme učinili s postuláty v pozn. [9]) čl. 3) vysloviti o elementech základního útvaru 3. řádu a o základních útvarech 2. a 1. řádu v něm obsažených (jichž vytvořujícím prvkem je prvek útvaru 3. řádu). Na př. větám *4ab* lze dáti tvar: Přímka náležející dvěma prvkům základního útvaru 3. řádu, jež náležejí témuž základnímu útvaru 2. řádu, náleží tomuto útvaru. Tak byly by v každé větě obsaženy dvě věty (*a*, *b*).

[2]) Místo duální říká se také (méně vhodně) reciproký nebo korelativní.

[3]) Důkazy vět duálních jsou ovšem duální a tedy stejně složité; protože však bod a rovina jako prvky útvarů prostorových nejsou našemu názoru stejně obvyklé, nejsou tyto důkazy (a věty samy) vždy stejně přístupné.

[4]) Princip duálnosti v rovině bylo by možno odůvodnit (jako princip duálnosti v prostoru) tím, že platí pro nejjednodušší věty o útvarech rovinných, zejména pro věty: Dva různé body v rovině určují přímku, na které

Prostorovým zákonem duálnosti vyplývá z tohoto rovinného principu duálnosti *princip duálnosti v trsu*:

Každá věta projektivní geometrie o útvarech svazku prostorového zůstává v platnosti, jestliže v ní (po úpravě slohové) *zaměníme slovo rovina slovem přímka a naopak.*

Ze základních útvarů jsou v bodě duální: trs paprskový a trs rovinový, svazek paprskový a svazek rovinový; rovněž základní výkony: promítání z přímky a protínání rovinou.

Uvedené zákony duálnosti[5]) mají veliký význam: dovolují k větě, nalezené a dokázané pro určitý útvar, připojiti bez hledání a důkazu větu duální (jednu nebo tři), platnou o útvaru duálním.[6])[7])

6. Jednoduché konfigurace. Mnohé útvary geometrie projektivní skládají se z konečného počtu prvků.

a) n bodů v prostoru, z nichž žádné čtyři neleží v téže rovině, spolu s přímkami a rovinami, jež určují, tvoří (úplný) (*prostorový*) *n-roh*; tento má n rohů čili vrcholů, $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ přímek (hran), spojujících jeho vrcholy po dvou, a $\frac{1}{6}n\,(n-1)\,(n-2)$ rovin (stěn), jdoucích trojicemi jeho vrcholů. K němu duální je útvar složený z n rovin, z nichž žádné čtyři neprocházejí týmž bodem, a z elementů jimi určených; sluje (úplný) (*prostorový*) *n-stěn* a má vedle n stěn $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ hran a $\frac{1}{6}n\,(n-1)\,(n-2)$ vrcholů.

Nejjednodušší prostorový n-roh je prostorový čtyřroh, jenž má vedle 4 vrcholů 6 hran a 4 stěny; je soběduální, protože je totožný s (prostorovým) čtyrstěnem. Prostorový pětiroh má vedle 5 vrcholů 10 hran a 10 stěn; duální k němu (prostorový) pětistěn má 5 stěn, 10 hran a 10 vrcholů.

---

leží. Dvě různé přímky v rovině určují bod, kterým procházejí (postulát 1*a* v čl. 1 a odvozená věta 5*a* v čl. 2). Tento důkaz by však předpokládal, že k logickému odůvodnění vět o útvarech rovinných užíváme pouze útvarů rovinných (a ne útvarů v prostoru), kteréžto omezení by vyžadovalo nových postulátů a je vůbec nemístné.

[5]) Hojné úvahy o principu duálnosti vedli v první čtvrtině stol. 19. mnozí geometři, zejména *Poncelet* (na základě polárnosti). Obecně vyslovil princip ten (bez ohledu na geom. transformace) po prvé *Gergonne* r. 1826; analyticky jej správně osvětlili *Möbius* (1827) a *Plücker* (1828).

[6]) Vyslovujíce větu o geom. útvaru, jenž patří do základního útvaru 2. řádu, můžeme mluviti všeobecně o útvaru 2. řádu, jeho prvcích a útvarech 1. řádu, bez bližšího udání, o který útvar 2. řádu (ze známých čtyř) běží. V jedné větě, takto obecně vyslovené, obsaženy jsou čtyři věty, jejichž souvislost (při patřičném očíslování) je následující: Věty 1. a 2. jsou duální v rovině, 3. a 4. duální v trsu, 1. a 3. duální v prostoru, 2. a 4. také duální v prostoru, 1. a 4. plynou jedna z druhé promítnutím resp. protnutím, rovněž tak 2. a 3.

[7]) Princip duálnosti v prostoru neplatí pro věty a útvary geometrie obyčejné, protože k nevlastní soustavě rovinné neexistuje duální útvar nevlastní. Stejně neplatí princip duálnosti pro obyčejnou geometrii v rovině, protože pole bodové má nevlastní celou soustavu prvků tvořících řadu bodovou, kdežto pole paprskové má nevlastní jen jeden prvek; platí však i pro metrické útvary v geometrii trsu.

b) V poli tvoří n bodů, z nichž žádné tři neleží v téže přímce, spolu s přímkami, jež určují, (úplný) *rovinný n-roh*, jenž má n vrcholů a $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ přímek (stran), určených dvojicemi jeho vrcholů. Duální v rovině k rovinnému n-rohu jest (úplný) *n-stran*, tvořený n přímkami, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem, a body, jež jsou jimi určeny; má vedle n stran $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ vrcholů, určených dvojicemi jeho stran.[1])

Nejjednodušší rovinný n-roh je trojroh, jenž je spolu trojstranem (trojúhelník). Velmi důležitý je rovinný čtyřroh, mající 4 vrcholy a 6 stran, a duální k němu čtyrstran se 4 stranami a 6 vrcholy.

c) V trsu skládá n rovin (stěn), z nichž žádné tři neprocházejí touže přímkou, a $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ přímek (hran) jimi určených (úplný) *středový n-stěn*. Duální v trsu k tomuto n-stěnu jest (úplný) *n-hran*, složený z n přímek (hran), z nichž žádné tři neleží v téže rovině, a z $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ rovin (stěn) jimi určených.[2]) Oba tyto útvary, n-stěn a n-hran v trsu, jsou prostorově duální k n-rohu resp. n-stranu v rovině; středový n-stěn a n-hran jsou také promítající útvary rovinného n-stranu resp. n-rohu z bodu (mimo jejich rovinu ležícího), naopak průsekem roviny (neprocházející středem trsu) se středovým n-stěnem a n-hranem vzniknou rovinný n-stran resp. n-roh.

Nejjednodušším případem středového n-stěnu a n-hranu je trojstěn, jenž je spolu trojhranem; středový čtyrstěn má 4 stěny a 6 hran, duální k němu čtyrhran má 4 hrany a 6 stěn.[3])

d) V každém z hořejších útvarů, určených n prvky téhož jména, sluje útvar, určený m prvky z prvků těch (kde $m < n$), *protější* k útvaru, určenému ostatními $n - m$ prvky. Na př. v prostorovém i rovinném čtyřrohu jest každý vrchol protější k trojrohu určenému ostatními třemi vrcholy, každá hrana nebo strana protější k hraně nebo straně jdoucí ostatními dvěma vrcholy.

Průsečíky dvou stran v (úplném) rovinném n-rohu, jež nejsou vrcholy, slují *úhlopříčné* (diagonální) *vrcholy*. Duálně spojnice dvou vrcholů v (úplném) n-stranu, jež nejsou stranami, slují *úhlopříčné* (diagonální) *strany*. Úhlopříčných vrcholů (stran) v rovinném n-rohu (n-stranu) jest $\frac{1}{8}n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)$; neboť každou z $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ stran n-rohu protíná v takových bodech každá z $\frac{1}{2}\,(n-2)\,(n-3)$ stran protějšího $(n-2)$-rohu (a duálně), každý pak úhlopříčný prvek vznikne tak dvakrát. Na př. rovinný čtyřroh má 3 úhlopříčné vrcholy, čtyrstran 3 úhlopříčné strany; tyto úhlopříčné vrcholy se svými spojnicemi u čtyřrohu a duálně úhlopříčné strany se svými průsečíky u čtyrstranu tvoří *úhlopříčný trojúhelník*.

[1]) Úplný rovinný n-roh a n-stran mají původ v *Carnotově* zavedení úplného čtyrstranu r. 1801.

[2]) Středovým n-stěnem resp. n-hranem jest rozuměti útvar tvořený neomezenými rovinami a přímkami (na rozdíl od geometrie elementární, kde se rozeznávají n-hrany podle vrcholu souměrné, jichž nelze ztotožniti).

[3]) Jako v základních útvarech 3. a 2. řádu můžeme také v zákl. útvarech 1. řádu vzíti v úvahu skupinu n prvků, jež je ovšem nejjednodušší.

Obdobně jsou určeny *úhlopříčné stěny* a *hrany* v (úplném) středovém n-stěnu resp. n-hranu.

e) Proti uvedeným *úplným* útvarům, jež jsou složeny z n prvků a všech prvků jimi určených, slují *jednoduché* ty útvary, které jsou určeny n elementy téhož jména v určitém pořádku. Jednoduchý rovinný n-roh čili *rovinný n-úhelník* je určen n body v rovině v určitém pořádku vzatými, z nichž žádné tři po sobě jdoucí neleží v téže přímce, a má mimo n bodů (vrcholů) n přímek (stran), spojujících dvojice bodů těch po sobě jdoucích; je v rovině soběduální (jednoduchý n-roh a spolu n-stran). Prostorově k němu duální je *jednoduchý n-hran* (a spolu středový n-stěn), tvořený n přímkami (hranami) v trsu, z nichž žádné tři po sobě jdoucí neleží v téže rovině, a n rovinami (stěnami), jež dvojicemi přímek sousedních jsou určeny; je v trsu soběduální.[4]) Jednoduchý prostorový n-roh čili *prostorový n-úhelník* je složen z n bodů (vrcholů), z nichž žádné čtyři po sobě jdoucí neleží v téže rovině, z n přímek (hran) spojujících dvojice bodů sousedních a z n rovin (stěn) jdoucích trojicemi bodů po sobě následujících; je v prostoru soběduální.

Protějšími slují v (jednoduchém) rovinném n-úhelníku z $2n$ jeho prvků ty dva prvky, mezi nimiž v jednom i druhém (opačném) pořadí je týž počet $n-1$ elementů.[5]) Obdobně v ostatních uvedených útvarech.

f) Útvar složený z konečného počtu elementů (bodů, přímek a rovin) té vlastnosti, že každý element náleží témuž počtu elementů jiného jména, sluje *konfigurace*. Konfigurace obsahující a_{11} bodů, a_{22} přímek, a_{33} rovin, v níž náleží každý bod témuž počtu a_{12} přímek a témuž počtu a_{13} rovin, každá přímka témuž počtu a_{21} bodů a témuž počtu a_{23} rovin, každá rovina témuž počtu a_{31} bodů a témuž počtu a_{32} přímek, značí se symbolem

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$[6])

[4]) Z vrcholů a stran úplného rovinného n-rohu nebo n-stranu, rovněž ze stěn a hran úplného středového n-stěnu nebo n-hranu je možno utvořiti $\frac{1}{2}(n-1)!$ jednoduchých útvarů, rovinných n-úhelníků, resp. n-hranů; neboť n prvků lze uspořádati na $n!$ způsobů, ale vždy n cyklických permutací a tolikéž permutací smyslu opačného dávají týž útvar jednoduchý. Obráceně však jednoduchý útvar uv. druhu nemusí býti částí příslušného útvaru úplného, protože na př. v rovinném n-úhelníku mohou tři vrcholy ležeti v přímce, jen když nejsou sousední, v úplném n-rohu však tak ležeti nesmějí.

[5]) Úhlopříčkami slují v (jednoduchém) rovinném n-úhelníku přímky, spojující každý vrchol s každým z ostatních, vyjma předcházející a následující. Jednoduchý rovinný n-úhelník spolu s úhlopříčkami tvoří úplný rovinný n-roh.

[6]) Jest patrno, že o číslech a_{hk} v uvedeném symbolu konfigurace platí $a_{hh}a_{hk} = a_{kk}a_{kh}$.

Útvary prve uvedené jsou jednoduché konfigurace.[7]) Úplný prostorový n-roh resp. n-stěn mají symboly

$$\begin{array}{|ccc|} n & n-1 & \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \\ 2 & \frac{1}{2}n(n-1) & n-2 \\ 3 & 3 & \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) \end{array}, \qquad \begin{array}{|ccc|} \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) & 3 & 3 \\ n-2 & \frac{1}{2}n(n-1) & 2 \\ \frac{1}{2}(n-1)(n-2) & n-1 & n \end{array};$$

úplný rovinný n-roh resp. n-stran mají symboly

$$\begin{array}{|cc|} n & n-1 \\ 2 & \frac{1}{2}n(n-1) \end{array}, \qquad \begin{array}{|cc|} \frac{1}{2}n(n-1) & 2 \\ n-1 & n \end{array}.$$

7. Věta Desarguesova (o trojúhelnících). K důležitým větám o trojúhelnících vedou (úplný) prostorový pětistěn a (úplný) pro-

Jednodušší označení pro konfiguraci rovinnou jest (a_b, d_c), jestliže má a bodů, d přímek, v každém bodě b přímek, na každé přímce c bodů; je-li spec. $d = a$, $c = b$, píše se stručně a_b. Pro konfiguraci prostorovou užívá se označení (a_b^c, e_d^f, k_g^h), obsahuje-li a bodů, e přímek, k rovin a je-li s každým bodem incidentních b přímek a c rovin, s každou přímkou d bodů a f rovin, s každou rovinou g bodů a h přímek.

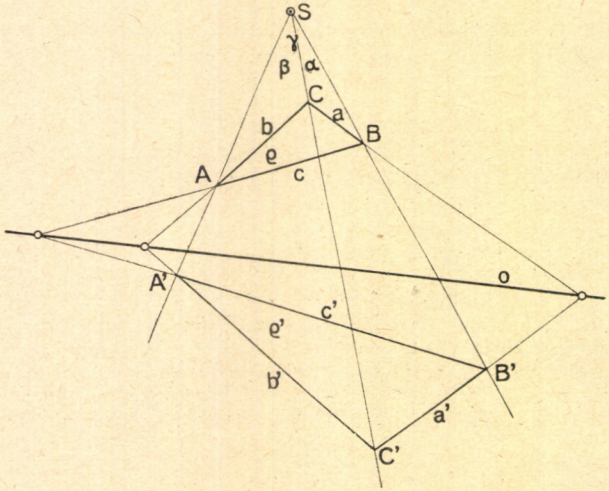
[7]) Jméno konfigurace zavedl (ve spec. případě) *Reye* (v Geometrie der Lage, 2. vyd. 1876). Konfigurace záleží, jak patrno, pouze v incidenci určitého počtu tří základních prvků; souvisí však často s vyššími útvary a pojmy geometrie projektivní. K všeobecné informaci poslouží *E. Steinitz*, Konfigurationen der projektiven Geometrie v Encyklopädie der math. Wissenschaften, III. AB 5a (k tomu téhož doplněk Über Konfigurationen, Archiv Math. Phys. (3) 16, 1910); dále *G. Gallucci*, Le configurazioni, Atti Accad. Napoli (2) 15 (1911) (obšírná bibliografie); *F. Levi*, Geometrische Konfigurationen, 1929.

O prostorových útvarech uvedeného druhu pro $n = 5, 6$ jednají *E. Ciani*, Sul pentaedro completo, Rendiconti Accad. Lincei (4) 7_1 (1891); *A. Grüttner*, Das räumliche Fünfeck, Dissertation Breslau 1903; *E. Ciani*, Sopra la configurazione del pentaedro, Rendiconti Circolo mat. Palermo 21 (1906); *O. Hermes*, Das allgemeine Sechsflach, Journal r. a. Math. 100 (1886); *A. Zoukis*, Sur l'hexacoryphe complet, Journal math. p. a. (5) 8 (1902); *H. Reckhaus*, Über das räumliche Sechseck, Dissertation Strassburg 1904. — Z rovinných konfigurací symbolu a_b byly vyšetřovány zejména n_3 (obsahující n bodů a n přímek, v každém bodě 3 přímky a na každé přímce 3 body) pro n od (nejmenší možné hodnoty) 7 do 12: *S. Kantor*, Die Configurationen $(3,3)_{10}$, Sitzungsberichte Akad. Wien 84 (1881); *V. Martinetti*, Sulle configurazioni piane μ_3, Annali mat. (2) 15 (1887); *H. Schröter*, Über die Bildungsweise und geometrische Construction der Configuration 10_3, Göttinger Nachrichten 1889; *R. Daudlebsky v. Sterneck*, Die Configurationen 11_3, Monatshefte Math. Phys. 5 (1894); *R. Daudlebsky v. Sterneck*, Die Configurationen 12_3, Monatshefte Math. Phys. 6 (1895); *H. Schröter*, Über lineare Constructionen zur Herstellung der Configurationen n_3, Göttinger Nachrichten 1888; *E. Steinitz*, Über die Construction der Configurationen n_3, Dissertation Breslau 1894; *F. Levi*, Geometriche Konfigurationen, 1929. — Z konfigurací v prostoru, složených z bodů a rovin, jsou nejjednodušší n_4 (obsahující n bodů a n rovin, každým bodem 4 roviny a na každé rovině 4 body); odvodil je pro $n = 8, 9$ *V. Martinetti*, Le configurazioni $(8_4, 8_4)$ di punti e piani, Giornale mat. 35 (1897); *V. Martinetti*, Un gruppo di configurazioni $(9_4, 9_4)$ di punti e piani, Atti Accad. Peleritana 15 (1901).

storový pětiroh. Jsou to konfigurace duální, z nichž první má symbol

$$\begin{vmatrix} 10 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \end{vmatrix},$$ druhá symbol $$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 10 & 3 \\ 3 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$[1])

a) Kterékoli tři roviny α, β, γ z pěti rovin pětistěnu protínají každou ze zbývajících dvou rovin ϱ, ϱ' v trojúhelníku. Přímky $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, v nichž se ony tři roviny protínají, jsou spojnice vrcholů obou těchto trojúhelníků a procházejí společným bodem $\alpha\beta\gamma$ tří oněch rovin.



Obr. 1.

V každé z rovin α, β, γ leží po jedné straně každého z obou trojúhelníků; tyto dvojice stran protínají se na průsečnici $\varrho\varrho'$ rovin obou trojúhelníků. Mezi oběma trojúhelníky zde uvedenými ustanovme korespondenci tak, aby sobě odpovídaly vrcholy jejich na přímce jdoucí bodem $\alpha\beta\gamma$ a strany jejich protínající se na přímce $\varrho\varrho'$. Platí pak obecně:

1*a*. *Jestliže spojnice korespondujících vrcholů dvou trojúhelníků, jež jsou v různých rovinách, procházejí týmž bodem, leží průsečíky korespondujících stran jejich na téže přímce.*

1*b*. *Jestliže průsečíky korespondujících stran dvou trojúhelníků, jež jsou v různých rovinách, leží na téže přímce, procházejí spojnice korespondujících vrcholů jejich týmž bodem.*

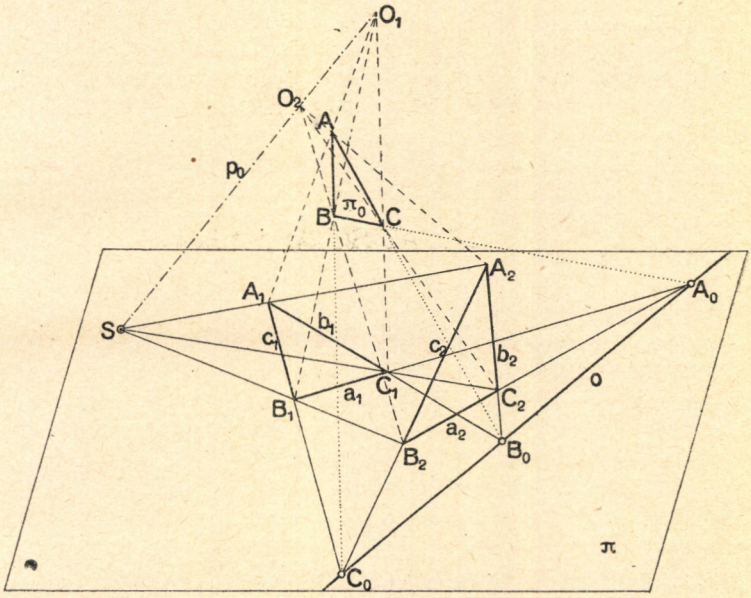
Neboť k trojúhelníkům sobě odpovídajícím ABC a $A'B'C'$ (obr. 1), jež leží v rovinách ϱ a ϱ', lze v obou případech připojiti tři roviny α, β, γ, jež spolu s ϱ a ϱ' určují pětistěn, mající k trojúhelníkům těm vztah nahoře popsaný. Jestliže totiž (v případě *a*) spojnice vrcholů AA', BB', CC' jdou

[1]) Stručněji (10_3^3, 10_3^2, 5_6^4), resp. (5_4^6, 10_2^3, 10_3^3).

týmž bodem S, zvolíme $SBCB'C' = \alpha$, $SCAC'A' = \beta$, $SABA'B' = \gamma$. Jestliže naopak (v případě b) průsečíky stran aa', bb', cc' leží na $o = \varrho\varrho'$, zvolíme $aa' = \alpha$, $bb' = \beta$, $cc' = \gamma$. Věty 1ab jsou navzájem obrácené.[2])

K větám 1ab jsou prostorově duální věty:

1′ab. *Jestliže průsečnice korespondujících stěn dvou trojhranů s různými vrcholy leží v téže rovině, procházejí roviny korespondujících hran jejich touže přímkou. A obráceně.*



Obr. 2.

Jako lze oba trojúhelníky vět 1ab pokládati za průseky téhož trojhranu dvěma rovinami, tak je možno oba trojhrany vět 1′ab pokládati za promítky téhož trojúhelníku ze dvou bodů.[3])

b) Kterékoli tři z pěti vrcholů prostorového pětirohu (obr. 2) označme A, B, C (a jejich rovinu π_0), ostatní dva vrcholy označme O_1, O_2 (což možno učiniti desíti způsoby). Pětiroh protněme rovinou π,

[2]) Podrobněji lze věty 1ab (a obdobně další v tomto čl.) formulovati takto: Jestliže u dvou trojúhelníků v různých rovinách, jichž vrcholy a strany jsou uvedeny v korespondenci a z nichž žádný se nezvrhne v přímku nebo v bod, vždy dvě sobě odpovídající strany se protínají a jejich tři průsečíky leží v téže přímce, procházejí spojnice vždy dvou vrcholů sobě odpovídajících týmž bodem; a obráceně.

[3]) Takové dva trojúhelníky, jež jsou průseky téhož trojhranu, slují *perspektivní*; duálně dva trojhrany promítající týž trojúhelník slují *perspektivní*.

jež neprochází žádným jeho vrcholem; každá hrana pětirohu protne π v bodě, každá stěna v přímce. Tyto body a přímky tvoří konfiguraci se symbolem $\begin{matrix} 10 & 3 \\ 3 & 10 \end{matrix}$ čili stručně 10_3. Z 10 bodů této konfigurace pokládejme tři za průměty A_1, B_1, C_1 vrcholů trojúhelníku ABC z bodu O_1 do roviny π, další tři za průměty A_2, B_2, C_2 vrcholů trojúhelníku ABC z bodu O_2 do π; jeden za průsečík S přímky O_1O_2 v π a zbývající tři za průsečíky A_0, B_0, C_0 stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC v π. Ustanovíme-li mezi trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ korespondenci tak, aby sobě odpovídaly vrcholy i strany označené týmž písmenem (s různými indexy), vidíme, že spojnice korespondujících vrcholů A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 procházejí týmž bodem S a průsečíky korespondujících stran a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 leží na téže přímce $o = \pi\pi_0$. Neboť přímka A_1A_2 ležíc v rovině O_1O_2A protíná O_1O_2 a ležíc v rovině π protíná O_1O_2 v S; obdobně ostatní spojnice B_1B_2 a C_1C_2. Strana $a_1 = B_1C_1$ ležíc v rovině O_1BC protíná BC a ležíc v π protíná ji v A_0, strana $a_2 = B_2C_2$ ležíc v rovině O_2BC protíná BC a ležíc v π protíná ji v A_0, protínají se tedy a_1, a_2 v A_0 na o; obdobně ostatní dvojice stran b_1b_2, c_1c_2. Platí obecně:

2*a*. *Jestliže spojnice korespondujících vrcholů dvou trojúhelníků, jež jsou v téže rovině* (bez společných prvků), *procházejí týmž bodem, leží průsečíky korespondujících stran jejich na téže přímce.*

2*b*. *Jestliže průsečíky korespondujících stran dvou trojúhelníků, jež jsou v téže rovině* (bez společných prvků), *leží na téže přímce, procházejí spojnice korespondujících vrcholů jejich týmž bodem.*

Neboť v obou případech je možno daný útvar doplniti na prostorový pětiroh, jehož je řezem. V případě *a* totiž položíme společným bodem S spojnic A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 přímku p_0 (mimo rovinu obou trojúhelníků π) a zvolíme na ní body O_1, O_2. Přímky O_1A_1 a O_2A_2, ležíce v téže rovině $A_1A_2p_0$, protínají se v A; obdobně O_1B_1 a O_2B_2 protínají se v B, O_1C_1 a O_2C_2 protínají se v C. Pětiroh $ABCO_1O_2$ je proťat rovinou π v dané konfiguraci.

V případě *b* položíme přímkou o, na níž leží průsečíky A_0, B_0, C_0 dvojic korespondujících stran a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, rovinu π_0 (různou od π) a mimo π i π_0 zvolíme bod O_1. Průmět trojúhelníku $A_1B_1C_1$ z O_1 na π_0 budiž trojúhelník ABC; trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a ABC mají průsečíky korespondujících stran podle věty 1*a* na téže přímce o a ovšem v bodech A_0, B_0, C_0. Avšak trojúhelníky ABC a $A_2B_2C_2$ mají průsečíky korespondujících stran na přímce o rovněž v bodech A_0, B_0, C_0; spojnice korespondujících vrcholů jejich protínají se proto podle věty 1*b* v témž bodě O_2. Tak nalezen pětiroh $ABCO_1O_2$ příslušný k dané konfiguraci.[4])

Věta 2*b* je duální v rovině k větě 2*a*, a není jí tedy ani potřeba dokazovat. Konfiguraci, k níž se vztahují věty 2*ab* (navzájem obrácené),

[4]) Dva trojúhelníky, o nichž platí věty 2*ab*, slují *homologické* (podle *Ponceleta*; také perspektivní).

možno také pokládati za řez útvaru, o němž mluví věty $1'ab$, s rovinou, která nenáleží společné rovině ani přímce tam uvedeným.

K větám $2ab$ jsou prostorově duální:

$2'ab$. *Jestliže průsečnice korespondujících stěn dvou trojhranů s týmž vrcholem leží v téže rovině, procházejí roviny korespondujících hran jejich touže přímkou. A obráceně.*

Konfiguraci, které se týkají věty $2'ab$, je možno pokládati za promítku útvaru, o němž mluví věty $1ab$, z bodu, který nenáleží společnému bodu ani společné přímce tam uvedeným. Z konfigurací vět $2ab$ a $2'ab$ jest první řezem druhé, druhá pak promítá prvou. Věty 1. a 2. (rovněž 1'. a 2'.) je ovšem možno shrnouti v jednu.[5])[6])[7])

[5]) Věty $1ab$ a $2ab$ slují *věty Desargovy o trojúhelnících*. Jest záhodno si všimnouti, že věty zde uvedené byly dokázány jenom na základě postulátů skupiny I.

Konfigurace 10_3, které se týká věta $2ab$, sluje proto také *Desargova* (lze ji 10 způsoby pokládat za útvar dvou trojúhelníků homologických); jest z nejstarších konfigurací, kterým byla věnována pozornost (konfigurací typu 10_3 je však geometricky možno devět). Protože prostorový pětiroh lze (5 způsoby) pokládati za prostorový čtyřroh (čtyrstěn) a čtyrhran, můžeme konfiguraci Desargovu (průsek pětirohu rovinou) pokládati (5 způsoby) za soubor (úplného) rovinného čtyřrohu a (úplného) čtyrstranu (průseků čtyrhranu resp. čtyrstěnu); každá ze šesti stran čtyřrohu prochází zde jedním ze šesti vrcholů čtyrstranu. O konfiguraci Desargově viz na přísl. místech, cit. v pozn. [7]) čl. 6, na př. *F. Levi*, Geometrische Konfigurationen, 1929, p. 139 a n.; také *F. E. Wood*, A canonical lettering of a general Desargues configuration, Giornale mat. 67 (1929).

Větu Desargovu uveřejnil po prvé *A. Bosse* v Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective, 1648; důkaz Desargův je metrický. Výhradně pomocí postulátů skupiny I. (s použitím prostoru) dokázal Desargovu větu o homologických trojúhelnících ($2ab$) první *Staudt*. Kdežto *Klein* dovodil, že důkaz věty té není možný bez prostora (pouze z postulátů pro geometrii v rovině), ukázal *Hilbert*, že pro geometrii rovinnou stačí tato jediná pomůcka z prostoru. (Viz také *Vahlen*, Abstrakte Geometrie, p. 67 a n., 128 a n.)

Lze udati geometrie rovinné, založené na projektivních postulátech o bodech a přímkách v rovině, v nichž však věta Desargova neplatí (*geometrie nedesargské*); viz *Hilbert*, Grundlagen der Geometrie, *Vahlen* na uv. místě, *R. F. Moulton*, A simple non-desarguesian plane geometry, Transactions Amer. math. soc. 3 (1902).

[6]) Pomocí hořejších vět o homologických trojúhelnících a trojhranech ($2ab$ a $2'ab$) lze krátkou poměrně cestou — nezávisle na geometrii Eukleidově — zavésti prvky nevlastní a tím *samostatně zbudovati prostor projektivní*, v němž bez omezení platí postuláty uvedené v čl. 1 (a ovšem jejich důsledky). Vycházeje od omezeného prostoru (jako M. Pasch a F. Schur) učinil tak (odchylně od nich) *R. Bonola* v cit. dříve pojednání (pozn. [12]) úvodu, Giornale mat. 34, 1900): S použitím věty, kterou lze snadno odůvodniti, že je-li dán libovolný počet přímek v trsu, jest možno přímkou, jež s žádnou danou neleží v téže rovině, položiti vždy rovinu, protínající všechny přímky ty, dokazuje obě věty o homologických trojúhelnících s výhradou, pokud korespondující strany resp. spojnice korespondujících vrcholů jejich se protínají, a věty o homologických trojhranech bez výhrady. Na tom spočívají důkazy čtyř vět dalších, z nichž prvá a druhá zní: Jsou-li a, b, c průsečnice tří rovin svazku s rovinou π, patří roviny, jež promítají tyto přímky a, b, c

8. Užití a rozšíření věty Desargovy. *a*) Pomocí věty Desargovy lze řešiti na př. tyto konstruktivní úlohy rovinné:

1. Sestrojiti jest spojnici daného bodu P s bodem, daným jako průsečík dvou přímek a, b (z nichž žádná nejde bodem P), bez užití tohoto.

Průsečík přímek a, b jest třeba nepřístupný. Zvolíme (obr. 3) na přímkách a, b body A, A', resp. B, B' a mimo ně bod P' tak, aby korespondující strany trojúhelníků ABP a $A'B'P'$ protínaly se v bodech téže přímky. K tomu cíli sestrojíme libovolnou přímku o, jejím bodem vedeme dvě přímky, jež protnou přímky a, b jedna v bodech A, B, druhá v bodech A', B'. Sestrojíme dále přímky AP a BP a jejich průsečíky s přímkou o spojíme s bodem A' resp. B'. Průsečík těchto spojnic P' určuje s bodem P hledanou přímku.

2. Sestrojiti jest průsečík dané přímky p s přímkou, danou dvěma průsečíky dvojic přímek r, r' a s, s' (bez užití této přímky).

Přímky r, s a p určují trojúhelník (obr. 4), k němu sestrojíme

---

z libovolného bodu ležícího mimo π, rovněž do svazku (obdobně pro libovolný počet přímek). Jestliže ze čtyř přímek a, b, c, d leží a, b v jedné rovině a s jednou i druhou leží c i d vždy v jedné rovině, leží také c, d v jedné rovině. Odtud plyne možnost definovati trs paprskový jako soustavu přímek ležících po dvou v jedné rovině, určenou dvěma danými přímkami roviny, a v případě, že přímky ty se neprotínají, zvoliti tento trs (jinak týchž vlastností jako trs obyčejný) za zástupce *bodu nevlastního*. Pomocí třetí věty, že jsou-li dány tři body společné dvěma různým rovinám, každá rovina jdoucí dvěma z nich prochází také bodem třetím (rovněž pro libovolný počet bodů), dokázané i v případě uvedených bodů nevlastních, lze potom definovati svazek rovin jako soustavu rovin, jdoucích body společnými dvěma různým rovinám, a užíti takového svazku (jinak týchž vlastností jako svazek obyčejný) k zavedení *přímky nevlastní*. Konečně čtvrtá věta, že průměty tří bodů v přímce ležících z libovolného bodu na libovolnou rovinu leží také v přímce, dokázaná také pro případ všech bodů nevlastních (a její důsledek, že přímka protínající dvě přímky svazku paprskového, t. j. soustavy přímek jdoucích bodem a protínajících přímku, protíná všechny přímky svazku toho), umožňuje obvyklé vytvoření roviny přímkou, jež jde bodem a protíná přímku jím neprocházející, rozšířiti na případ nevlastních prvků zde uvedených a tím zahrnouti *rovinu nevlastní*.

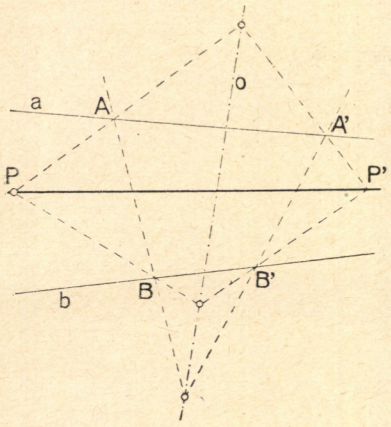
[7]) Větu Desargovu (2*b*) lze uvésti ve tvaru: Jestliže strany trojúhelníku se otáčejí kolem tří pevných bodů přímky a dva vrcholy jeho se pohybují po dvou pevných přímkách, pohybuje se také třetí vrchol po přímce jdoucí průsečíkem prvých dvou. To, jak se zdá, bylo známo už starověkému *Pappovi* (podle výkladu *Simsonova*).

Metrické důsledky uvedených vět Desargových jsou na př.: Jestliže korespondující vrcholy dvou trojúhelníků (v téže rovině nebo v různých rovinách) leží na přímkách rovnoběžných, protínají se korespondující strany jejich v bodech téže přímky nebo jsou rovnoběžny nebo dvě dvojice stran protínají se na přímce, k níž jsou třetí strany rovnoběžny (z 1*a*, 2*a*). Jestliže spojnice korespondujících vrcholů dvou trojúhelníků v téže rovině jdou týmž bodem a dvě dvojice korespondujících stran jsou rovnoběžny, jsou rovnoběžny i třetí strany jejich (z 2*a*). Spojnice korespondujících vrcholů dvou trojúhelníků, jejichž korespondující strany jsou rovnoběžny, procházejí týmž bodem nebo jsou rovnoběžny (z 1*b*, 2*b*).

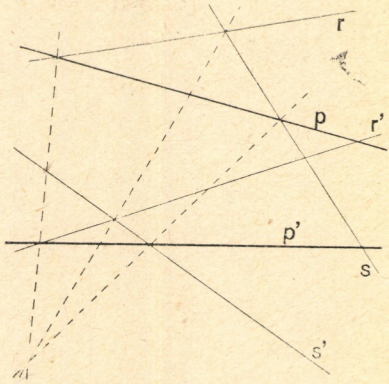
trojúhelník homologický se stranami r', s'; strana (p') v tomto, odpovídající straně p onoho, protíná p v hledaném bodě.

3. Sestrojiti jest spojnici dvou bodů, daných jako průsečíky dvojic přímek r, r' a s, s' (bez těchto bodů).

Sestrojíme (obr. 5) dvakrát dva homologické trojúhelníky tak, aby spojnice korespondujících vrcholů procházely týmž zvoleným bodem a dva z průsečíků korespondujících stran byly v daných bodech. Na spojnici $(rs, r's') = a$ zvolíme O, bodem tím vedeme b, c; homo-



Obr. 3.



Obr. 4.

logické trojúhelníky mají vrcholy jednak rs, rb, sc a $r's'$, $r'b$, $s'c$, jednak rs, sb, rc a $r's'$, $s'b$, $r'c$. Průsečíky korespondujících stran třetích určují hledanou přímku.

4. Sestrojiti jest trojúhelník, jehož vrcholy leží na třech daných přímkách a, b, c, jdoucích týmž bodem, a jehož strany procházejí každá daným bodem P_1, P_2 a P_3.

Zvolme na b (třebas, obr. 6) bod B' a promítněme jej z P_3 a P_1 na přímku a resp. c do bodu A' resp. C'; spojnice $A'C'$ protne P_1P_3 v bodě Q. Přímka P_2Q protne a, c v bodech A, C, jež se z bodu P_3 resp. P_1 promítají do téhož bodu B. Neboť spojnice vrcholů trojúhelníku $A'B'C'$ a bodů A, (b, P_3A), C procházejí týmž bodem, musí tedy průsečíky přímek body těmi určených ležeti na přímce P_3Q; pročež P_1C jde bodem (b, P_3A). Trojúhelník ABC vyhovuje úloze. Leží-li dané body P_1, P_2, P_3 v přímce, nemá úloha řešení (trojúhelník hledaný se zvrhne na přímku) nebo má nekonečně mnoho řešení (trojúhelníky homologické).

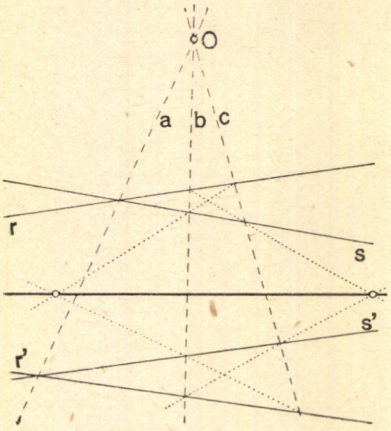
Konstrukce zde uvedené (a mnoho jiných toho druhu) provádějí se *pouhým pravítkem*.[1])

[1]) Zajímavé jsou metricky zvláštní případy úlohy 1 a 2: Daným bodem sestrojiti k dvěma daným rovnoběžkám přímku rovnoběžnou. K dané

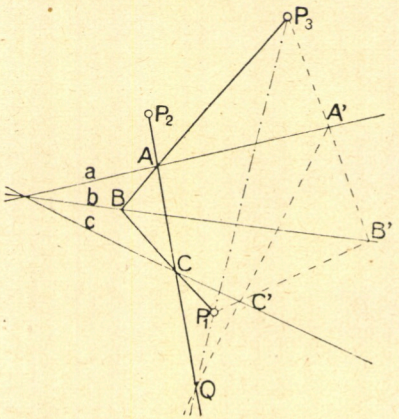
b) Důležitou větu Desargovu jest možno (vedle toho, co bylo už uvedeno) rozmanitými způsoby rozšířiti; buďtež vytčeny některé z takových vět.

Jestliže u *dvou* sobě odpovídajících *úplných n-rohů rovinných* $2n-3$ strany, jdoucí dvěma vrcholy, protínají se se stranami sdruženými v bodech téže přímky, platí to i o ostatních dvojicích sdružených stran, a spojnice sdružených vrcholů procházejí týmž bodem; také spojnice dvojic sdružených bodů úhlopříčných jdou oním bodem.[2])

Jestliže u *dvou* sobě odpovídajících *úplných n-stranů* $2n-3$ vrcholy, ležící na dvou stranách, určují se sdruženými vrcholy přímky jdoucí týmž bodem, platí to i o ostatních dvojicích sdružených vrcholů, a sdružené strany protínají se na téže přímce; také dvojice sdružených stran úhlopříčných protínají se na oné přímce.



Obr. 5.



Obr. 6.

Obě tyto věty platí i o útvarech různých rovin; jejich důkaz spočívá v užití vět 1*ab*, 2*ab*. Buďtež třebas uvažované n-rohy $A_1A_2 \ldots A_n$ a $A'_1A'_2 \ldots A'_n$; strany v předpokladu uvedené ať jdou vrcholy A_1, A_2,

přímce sestrojiti přímku rovnoběžnou, jsou-li dány dvě dvojice rovnoběžek. A spojením obou: Daným bodem k dané přímce vésti přímku rovnoběžnou, je-li v rovině dán rovnoběžník (dvě dvojice rovnoběžek). Řešení těchto konstruktivních úloh podle hořejšího je důležité tím, že je lze uskutečniti pouhým pravítkem. Řešení uvedených úloh na podkladě projektivním podal Poncelet (1822); jiné řešení (Lambertovo, 1774) užívá homologických úplných čtyřrohů. Stejně důležité jest řešení pouhým pravítkem úlohy: Sestrojiti k dané přímce daným bodem přímku kolmou, je-li v rovině dán čtverec (dvě dvojice přímek kolmých).

[2]) Příslušná konfigurace rovinná je tu průsekem úplného prostorového $(n+2)$-rohu.

a sdruženými A'_1, A'_2. Protože strany trojúhelníků $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, ... , $A_1A_2A_n$ protínají sdružené strany trojúhelníků $A'_1A'_2A'_3$, $A'_1A'_2A'_4$, . . . , $A'_1A'_2A'_n$ v bodech téže přímky o, procházejí spojnice $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$, $A_4A'_4$, . . . , $A_hA'_n$ (podle vět 1*b*, 2*b*) týmž bodem $O = (A_1A'_1, A_2A'_2)$; ostatní dvojice sdružených stran protínají se pak (podle vět 1*a*, 2*a*) rovněž na přímce o, neboť v případě n-rohů různých rovin je to průsečnice jejich rovin, v případě n-rohů téže roviny je to u stran A_hA_k a $A'_hA'_k$ $(h, k = 3, 4, \ldots, n)$ táž přímka jako prve, jsouc určena u homologických trojúhelníků $A_1A_hA_k$ a $A'_1A'_hA'_k$ průsečíky $(A_1A_h, A'_1A'_h)$ a $(A_1A_k, A'_1A'_k)$. Konečně spojnice sdružených vrcholů úhlopříčných $V = (A_hA_k, A_rA_s)$ a $V' = (A'_hA'_k, A'_rA'_s)$ (kde h, k, r, s jsou čtyři libovolná čísla od 1 do n) jdou také bodem O, protože sdružené strany trojúhelníků VA_hA_k a $V'A'_hA'_k$ se protínají na o. Jest patrno, že vrcholy A_1, A'_1, rovněž A_2, A'_2 a strany A_1A_2, $A'_1A'_2$ musí býti různé.

Mimořádně důležité jsou věty tyto pro $n = 4$:

Jestliže ze stran *dvou* úplných *rovinných čtyřrohů* (bez společných prvků) protíná se pět dvojic korespondujících stran v bodech jedné přímky, protínají se šesté strany jejich na téže přímce, a spojnice korespondujících vrcholů procházejí jedním bodem; rovněž spojnice sdružených vrcholů úhlopříčných jdou oním bodem, a průsečíky sdružených stran úhlopříčného trojúhelníku leží na oné přímce.

Stejně platí věty duální (v rovině, v prostoru a potom v trsu): o úplných čtyrstranech, o úplných středových čtyrstěnech a o úplných čtyrhranech. Rovněž mohou útvary ty ležeti v různých rovinách nebo v různých trsech.

c) Jestliže spojnice korespondujících vrcholů *dvou* úplných prostorových *čtyrstěnů* či *čtyřrohů* (bez společných prvků) procházejí týmž bodem, protínají se korespondující (hrany a) stěny jejich (v bodech a) v přímkách téže roviny (a duálně, obráceně).[3])

Neboť jestliže u čtyřrohů $P_1P_2P_3P_4$ a $P'_1P'_2P'_3P'_4$ sobě odpovídajících spojnice $P_kP'_k$ procházejí bodem O, protínají se přímky P_hP_k a $P'_hP'_k$ v bodech P_{hk}; protože sdružené vrcholy trojúhelníků $P_1P_2P_3$ a $P'_1P'_2P'_3$ leží na přímkách jdoucích bodem O, leží (podle 1*a*) body P_{12}, P_{13}, P_{23} v přímce, obdobně leží v přímkách trojice bodů P_{12}, P_{14}, P_{24}; P_{13}, P_{14}, P_{34}; P_{23}, P_{24}, P_{34}. Vždy dvě z těchto čtyř trojic mají jeden bod společný; pročež všechny body tyto leží v jedné rovině, a přímky jejich, průsečnice sdružených stěn útvarů uvažovaných, leží v jedné rovině.[4])[5])

[3]) Soubor dvou takových čtyřrohů prostorových (s elementy ve větě uvedenými) tvoří konfiguraci symbolu $(15_4^6, 20_3^3, 15_6^4)$; lze ji 15 způsoby pokládati za útvar dvou čtyřrohů uvedené vlastnosti.

[4]) Čtyrstěny uvedené věty slují *homologické* (v prostoru); věta ta může býti základem úvah o útvarech homologických v prostoru.

[5]) Dva trojúhelníky nebo dva čtyrstěny mohou býti n-násobně homologické, při čemž u trojúhelníků jest $n = 2, 3, 4, 6$ (poslední případ není možný u reálných útvarů), u čtyrstěnů $n = 2, 4$. Viz *J. Rosanes*, Über Dreiecke in perspektivischer Lage, Math. Annalen 2 (1870); *H. Schröter*,

Jestliže vrcholy *tří trojúhelníků* (v různých rovinách nebo v téže rovině) leží na třech přímkách jdoucích týmž bodem, mají tři přímky, z nichž na každé se protínají korespondující strany vždy dvou z těchto trojúhelníků, společný průsečík.[6])

Jsou-li *tři trojúhelníky v rovině* tak položeny, že spojnice korespondujících vrcholů vždy dvou z nich jdou jedním bodem a tři tyto body leží na jedné přímce, protínají se korespondující strany všech tří trojúhelníků ve třech bodech jedné přímky.[7])[8])

9. Postuláty II. (o uspořádání prvků v jednomocných útvarech základních). Druhá skupina postulátů projektivní geometrie vyjadřuje, *jak prvky* řady bodové, svazku paprskového a svazku rovinového *po sobě následují.*

Názorem poznáváme, že elementy základního útvaru prvního řádu můžeme, vycházejíce od kteréhokoli prvku, sledovati v přirozeném pořádku určitého smyslu nebo smyslu opačného. Postupujeme-li ve svazku (paprskovém nebo rovinovém) od zvoleného elementu stále týmž smyslem, projdeme všecky elementy a vrátíme se k tomu, od něhož jsme vyšli. Totéž bude platit i pro řadu bodovou (kterou si můžeme představiti jako perspektivní ke svazku), myslíme-li si, že body její na jedné i druhé straně od zvoleného bodu v konečnu spolu souvisí bodem nevlastním (že přímka jest bodem nevlastním „uzavřena"); vyjdeme-li od kteréhokoli bodu určitým smyslem, projdeme všechny

Über perspektivisch liegende Dreiecke, tamtéž; *E. Hess*, Beiträge zur Theorie der mehrfach perspectiven Dreiecke und Tetraeder, Math. Annalen 28 (1886); *J. Valyi*, Über die Gruppen von mehrfach perspektiven Dreiecken in der Ebene, Monatshefte Math. Phys. 9 (1898); *L. Klug*, Über mehrfach perspektive Tetraeder, Archiv Math. Phys. (2) 6 (1888); *G. Gallucci*, Discussione elementare dei casi di pluriomologia dei tetraedri, Periodico mat. 13 (1898), a Complementi di geometria proiettiva, 1928.

Dva čtyrstěny čtyrnásobně homologické dávají důležitou skupinu tří čtyrstěnů v poloze t. zv. *desmické*; o nich na př. *C. Stephanos*, Sur les systèmes desmiques de trois tetraèdres, Bulletin sc. math. (2) 3 (1879); *H. Schröter*, Elementare Construction der Figur dreier in desmischer Lage befindlichen Tetraeder, Journal r. a. Math. 109 (1892).

[6]) Jsou-li trojúhelníky ty v různých rovinách, tvoří celek úplný prostorový šestistěn (jejž lze 20 způsoby pokládati za uv. útvar). Jsou-li trojúhelníky v téže rovině, je tu konfigurace symbolu $(20_3, 15_4)$.

[7]) Konfigurace k této větě příslušná má symbol $(15_4, 20_3)$ a je průsekem úplného prostorového šestirohu. Věta duální (v rovině) k předešlé (pro jednu rovinu) je obrácená k této a naopak.

[8]) O konfiguracích příbuzných konfiguraci Desargově (slují Cayleyovy nebo polyedrální) viz *A. Cayley*, Sur quelques théorèmes de la géométrie de position, Journal r. a. Math. 31 (1846); *S. Kantor*, Über eine Gattung von Configurationen in der Ebene und im Raume, Sitzungsberichte Akad. Wien 80 (1879); *J. Vries*, Über polyedrale Configurationen, Math. Annalen 34 (1889); *H. W. Richmond*, On the figure of six points in space of four dimensions, Quart. Journal math. 31 (1899); *F. Levi*, Geometrische Konfigurationen, 1929, p. 152 a n. Také *J. Sobotka*, O n-úhelnících a n-stranech v poloze perspektivní a o konfiguraci rovinné soustavy sil v rovnováze, Rozpravy Čes. akad. 11 (1902).

body a vrátíme se k východisku.[1]) Základ těch vlastností útvarů jednomocných, jež se týkají uspořádání jejich prvků, můžeme vyjádřiti takto:

Pravíme, že soustava prvků (čísel, bodů, . . .) jest *uspořádaná*, jestliže máme možnost o kterýchkoli dvou prvcích A, B rozhodnouti, zdali B následuje za A nebo A následuje za B (v prvním případě A předchází před B, v druhém prvek B předchází prvku A); při tom musí platiti, že následuje-li B za A a C za B, následuje také C za A. Jako postulát o uspořádání prvků v útvarech jednomocných přijímáme:

1. *Vytkneme-li v základním útvaru prvního řádu určitý prvek O, jest možno prvky útvaru dvěma způsoby pokládati za uspořádanou soustavu, v níž O předchází každému jinému prvku; v uspořádání tom každý prvek útvaru předchází některému jinému, a byly-li zvoleny dva různé prvky A, B, z nichž B následuje za A, existuje vždy některý prvek následující za A a předcházející před B.*

V postulátu tomto obsaženo jest také, že v základním útvaru jednomocném existuje mezi kterýmikoli dvěma různými prvky neomezeně mnoho prvků.[2])

Jsou-li A, B dva různé prvky útvaru jednomocného, a provedeme-li v jednom ze dvou způsobů uspořádání, v němž je A prvním elementem, cyklickou záměnu, kterou se element B dostane na první místo, obdržíme jeden ze dvou způsobů uspořádání, majících B za první element; toto uspořádání sluje *souhlasné* s původním. To, co je všem souhlasným uspořádáním (jež se liší prvkem počátečním) společno, sluje *smysl* útvaru; základní útvar jednomocný má dva a pouze dva smysly navzájem opačné. Jest dále podstatně důležité, že uspořádaný útvar základní přechází promítáním a protínáním v útvar rovněž uspořádaný. Jako postulát o projektivní povaze obou smyslů v uspořádání prvků útvarů jednomocných uvádíme:

2. *Oba navzájem opačné smysly přirozeného uspořádání prvků v každém základním útvaru prvního řádu jsou projektivní tak, že u kterýchkoli dvou perspektivních útvarů prvního řádu odpovídá jednomu ze smyslů jednoho útvaru jeden ze smyslů útvaru druhého.*[3])

Jak je z uvedeného patrno, nedělí jeden element A útvaru jednorozměrného ve dvě části:[4]) teprve dva elementy A, B dělí útvar jednomocný ve dvě části tak, že každý další prvek C útvaru toho náleží jedné nebo druhé části jeho.[5]) Dvěma elementy A, B není stanoven smysl

[1]) Jest tedy pojímati základní útvary prvního řádu jako uzavřené.

[2]) V aritmetice pravíme, že taková soustava prvků je *všude hustá* (to platí na př. o soustavě čísel racionálních, nikoli o soustavě čísel celých).

[3]) Postulát 2. o projektivní vlastnosti uspořádání dovoluje v předcházejícím 1. postulátu požadovati uspořádání jen u speciálního ze základních útvarů jednomocných.

[4]) Ale odstraněním (vytčením) jeho stává se uzavřený útvar otevřeným.

[5]) Ze dvou těchto částí řady bodové (doplňujících se na celou řadu) obsahuje jedna body ležící za A a před B, druhá body ležící za B a před A

útvaru; teprve tři elementy A, B, C určují smysl jeho; smysly ABC (nebo BCA nebo CAB) a ACB (nebo CBA nebo BAC) jsou opačné.

Jestliže ze čtyř prvků A, B, C, D útvaru jednomocného dva prvky C, D patří do různých částí, ve které prvky A, B dělí útvar ten, patří i obráceně prvky A, B do různých částí, v něž prvky C, D útvar rozdělují; pravíme tu, že dvojice prvků AB a CD (navzájem) *se oddělují* (separují). Patří-li C a D do téže z obou částí útvaru, v něž jej prvky A a B dělí, a tedy i A a B do téže z obou částí útvaru, prvky C a D rozděleného, pravíme, že dvojice prvků AB a CD *se neoddělují*.[6]) Dvojicím prvků, jež se oddělují (neoddělují), odpovídají v perspektivním útvaru dvojice se oddělující (neoddělující).[7])[8])

(v témž smyslu; jedna z obou částí obsahuje bod nevlastní). Ze dvou částí svazku paprskového, omezených paprsky a, b, (obě části se doplňují na celý svazek) obsahuje jedna paprsky (neomezené přímky) od a do b, druhá od b do a (v témž smyslu; každá část je tvořena souborem „vrcholových úhlů"). Obdobně u svazku rovin.

[6]) Ze tří způsobů, jimiž čtyři dané prvky A, B, C, D útvaru jednorozměrného lze roztříditi ve dvě dvojice, jen jeden vede k dvojicím, jež se oddělují (oddělují-li se na př. AB a CD, neoddělují se AC a BD, AD a BC).

[7]) Postuláty o uspořádání prvků v základním útvaru jednomocném po prvé formuloval *M. Pasch* (Vorlesungen über neuere Geometrie, 1882). Zde přijaté postuláty skupiny II. jsou zvoleny v podstatě podle rozboru *F. Enriquesa* a *F. Severiho*; mimo jejich (cit.) spisy viz též *A. Comessatti*, Lezioni di geometria analitica e proiettiva I, p. 189 a n., II, p. 356 a n. Jinak jest možno místo nich na př. zvoliti za postuláty: 1. Dvojice prvků A, B základního útvaru prvního řádu dělí ostatní prvky útvaru ve dvě třídy po nekonečném počtu prvků tak, že každý prvek mimo A a B patří jedné a jediné třídě. 2. Mezi čtyřmi prvky základního útvaru prvního řádu patří ke každému prvku jeden a jediný prvek, oddělený od něho oběma ostatními. 3. Promítáním a protínáním přecházejí oddělující se (neoddělující se) dvojice prvků opět v takové. (Tak *L. Heffter*, Die Grundlagen der Geometrie, 1921). O pojmu uspořádání (a smyslu) viz také na př. *A. N. Whitehead*, The axioms of projective geometry, 1906; *O. Veblen - J. W. Young*, Projective geometry II, 1918.

[8]) Obdobně jako bod nedělí přímku, nerozděluje přímka rovinu ve dvě části; teprve dvě přímky dělí rovinu ve dvě, tři přímky bez společného bodu ve čtyři části (každá ze tří přímek je svými průsečíky s ostatními dvěma rozdělena ve dvě části, každá ze šesti částí těch je hranicí mezi dvěma ze čtyř částí roviny). A dále dělí čtyři roviny bez společného bodu a společné přímky prostor v osm částí. Projektivní rovina je (se stanoviska topologického) *jednostranná*: omezenou část její s ohraničením určitého smyslu ze spojitými změnami převésti v plochu jinou nebo tutéž smyslu opačného. Podle kriteria Möbiova dokážeme tuto vlastnost roviny takto: Rozdělíme-li rovinu třemi přímkami bez společného bodu ve čtyři části a přisoudíme-li obvodu jedné z nich určitý smysl, není možno obvodům ostatních přiděliti takový smysl, aby každá ze šesti částí uvedených tří přímek obdržela oba smysly (označíme-li totiž obě části zvolených přímek a, a', resp. b, b', resp. c, c' — a', b', c' ať obsahují body nevlastní — a zvolíme-li u jedné plochy oběh $+a$, $+b$, $+c$, u druhé $-a$, $+c'$, $+b'$, musíme u další zvoliti $-c'$, $-a'$, $+b$ nebo $-b'$, $+c$, $-a'$, takže buď b nebo c se objeví se smyslem týmž jako dříve). Proti tomu projektivní prostor jest *dvoustranný*, jak zjistíme obdobně jako u roviny pomocí smyslů na plochách omezujících jeho osm částí, ve které je čtyřmi rovinami rozdělen (zde jest totiž možno

10. Postulát III. (o spojitosti jednomocných útvarů základních). Všimněme si, že v uspořádaném útvaru prvního řádu (kde byl vytknut jeden prvek a zvolen jeden z obou způsobů uspořádání) nebo v uspořádané části jeho (dvěma prvky omezené) můžeme volbou elementu X prvky útvaru rozvrhnouti ve dvě třídy, a to: v první, jež obsahuje všechny prvky předcházející elementu X; a v druhou, která obsahuje X a všechny prvky následující za X.[1]) Třídy tyto mají vlastnosti: 1. Každý element útvaru patří do první nebo do druhé třídy; 2. každý element druhé třídy následuje za každým elementem prvé třídy.

Dejme tomu však, že naopak zavedeme v uspořádaném útvaru jednomocném (nebo v uspořádané části jeho) roztřídění prvků do dvou skupin s uvedenými dvěma vlastnostmi; nemůžeme dokázati, že roztříděním tím stanoven je vždy element X té vlastnosti, že každý element jemu předcházející patří do první skupiny, každý pak element za ním následující do druhé skupiny. Nelze toho zajisté vyvoditi z postulátů dosavadních (skupin I. a II.), jež jsou jiné povahy. Protože však existence elementu X odpovídá přirozené naší představě, přijímáme postulát III.:

Jestliže v uspořádaném základním útvaru prvního řádu rozvrhneme prvky jeho ve dvě třídy tak, že 1. každý prvek přísluší do první nebo do druhé třídy, a že 2. každý prvek druhé třídy následuje za každým prvkem první třídy, pak existuje (jeden) určitý element X té vlastnosti, že každý prvek jemu předcházející patří do prvé třídy a každý prvek za ním následující do druhé třídy. Element X sám patří podle volby do třídy prvé nebo druhé.[2])

Tento postulát stačí zavésti pro jeden ze základních útvarů 1. řádu, třebas pro řadu bodovou; pro svazky vyplývá odtud promítnutím.[3])[4])

---

každé ze šestnácti styčných ploch vždy dvou částí přiděliti dva smysly opačné). Viz *D. König*, Über Ein- und Zweiseitigkeit mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten, Archiv Math. Phys. (3) 19 (1912); *F. Klein*, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, 1928, p. 12; dále *W. Boy*, Über die Abbildung der projektiven Ebene auf eine im Endlichen geschlossene singularitätenfreie Fläche, Göttinger Nachrichten 1901; *F. Schilling*, Über die Abbildung der projektiven Ebene auf eine geschlossene singularitätenfreie Fläche im erreichbaren Gebiet des Raumes, Math. Annalen 92 (1924), a zejména Projektive und nichteuklidische Geometrie I, 1931, p. 187 a n.; *J. A. Séguier*, Sur les surfaces unilatères fermées du genre un, Bulletin Soc. math. France 55 (1927).

[1]) X lze ovšem čítati stejně dobře do prvé třídy místo do druhé.

[2]) Postulát tento (přijatý podle volby *F. Enriquesovy*) je geometrický výraz postulátu, jímž v aritmetice soustava čísel racionálních doplňuje se čísly iracionálními (v soustavu čísel reálných) a jejž po prvé tak formuloval *R. Dedekind* r. 1872. Místo něho lze také zvoliti ekvivalentní postulát *K. Weierstrassův*: Jestliže omezená část základního útvaru jednorozměrného obsahuje neomezenou řadu prvků po sobě jdoucích $A_1, A_2, A_3, \ldots$, existuje prvek mezní B takový, že v okolí jeho, ať je zvolíme sebe menší, vyskytuje se aspoň jeden prvek této řady.

[3]) Vyjadřuje základ tohoto důležitého poznatku názorného: Jestliže po úseku přímky (po přímce uzavřené) pohybují se dva body opačnými

Je patrno, že obsahem postulátu III. je *spojitost* základních útvarů jednomocných.[5])

Z uvedeného postulátu III. vyplývá důležitý důsledek: *Je-li dána mezi dvěma soumístnými útvary jednomocnými obapolně jednoznačná korespondence, při které uspořádanému útvaru odpovídá útvar uspořádaný* (téhož nebo opačného smyslu)[6]) *a části AB prvního útvaru koresponduje v útvaru druhém část A'B' v oné obsažená* (při čemž body sdružené jsou označeny týmž písmenem), *existuje samodružný prvek S, patřící do části A'B'* (a tedy do *AB*) *takový, že v části AB není prvku samodružného jemu předcházejícího.*

Neboť (vyloučíme-li možnost $A' = A$ jako případ větu hned splňující) sobě odpovídající části AB a $A'B'$ daných útvarů jsou uspořádány buď souhlasně nebo opačně. V případě souhlasného uspořádání následují uvedené prvky po sobě v pořadí $AA'B'B$ (při čemž může býti $B' = B$); prvky ležící v tomto smyslu mezi A a B rozložme ve dvě třídy tak, aby do první třídy patřil prvek tehdy, jestliže sám a každý jemu předcházející předchází svému korespondujícímu (patří tam aspoň A), do druhé třídy pak aby patřil prvek tehdy, jestliže některý jemu předcházející nebo aspoň on sám nepředchází svému korespondujícímu, t. j. následuje za svým korespondujícím nebo s ním splývá (patří tam aspoň B). Toto roztřídění vyhovuje předpokladům postulátu III.: každý prvek ležící mezi A a B (v udaném smyslu) patří do jedné z obou tříd a každý prvek 1. třídy předchází každému prvku 2. třídy. Existuje tedy určitý prvek S, jenž roztřídění to uskutečňuje (každý element jemu předcházející patří do 1. třídy, každý za ním následující do 2. třídy). Prvek tomuto S odpovídající budiž S'; musí býti $S' = S$. Neboť kdyby S' byl různý od S, musily by prvky ty (ve zvoleném pro celou úvahu smyslu) jíti po sobě v pořadí SS' nebo $S'S$: v prvním případě každý prvek L ležící mezi S a S' předcházel by svému korespondujícímu L' (uspořádání jsou souhlasná) a patřil by (protože to platí i o prvcích mezi A a L) do třídy 1., což odporuje uvedenému; v druhém případě prvku L mezi S' a S odpovídal by prvek L' jemu předcházející, takže by L následoval za L', což opět odporuje významu prvku S. Jest tudíž prvek S samodružný; spolu je patrno, že žádný prvek jemu předcházející není samodružný.

V případě opačných uspořádání následují uvedené prvky po

---

smysly, setkají se v určitém jednom bodě (ve dvou bodech, jež oddělují ony dva pohybující se body v každém okamžiku).

[4]) Na základě postulátu III. jest možno ustanoviti jednojednoznačnou korespondenci mezi prvky útvaru jednomocného a čísly reálnými.

[5]) Definujeme-li spojitou soustavu jako uspořádanou a všude hustou soustavu té vlastnosti, že každé rozvržení její ve dvě třídy s uvedenými dvěma vlastnostmi určuje jeden prvek do ní patřící a všechny prvky její roztřiďující, pak lze stručně říci (postulát III.): *Prvky základního útvaru prvního řádu tvoří spojitou soustavu.*

[6]) Taková korespondence sluje také *uspořádaná.*

sobě v pořadí $AB'A'B$; roztřiďme opět prvky ležící v tomto smyslu mezi A a B ve dvě třídy tak, že patří do 1. třídy prvek H předcházející svému korespondujícímu H', do 2. třídy prvek K nepředcházející svému korespondujícímu K'. Toto roztřídění splňuje podmínky postulátu III.: každý prvek ležící mezi A a B (v udaném smyslu) je buď typu H nebo typu K (A patří k prvkům H, B ke K); každý prvek předcházející některému H má svůj korespondující, protože řady jsou nesouhlasné, v prvku následujícím za H', předchází tedy svému korespondujícímu, takže žádný takový prvek nemůže býti typu K, pročež každý prvek typu H předchází prvku typu K. Podle uv. postulátu existuje tudíž prvek S mezi A a B (v uvažovaném smyslu) takový, že každý element před ním patří do 1. třídy, za ním do 2. třídy; jest opět samodružný. Neboť odpovídá-li prvku S prvek S', nemůže S' ani předcházeti prvku S ani za ním následovati. Všimněme si totiž nejprve, že prvek H ležící v AS (smyslu nahoře i pro další zvoleného) má korespondující prvek H' ležící v SB (prvek H_1 mezi H a S má svůj korespondující H'_1 před H', takže H' následuje za H'_1 i za H_1 a za všemi prvky, jež předcházejí prvku S); a obdobně prvek K ležící v SB má korespondující prvek K' ležící v AS. Kdyby tedy S' předcházel prvku S, odpovídaly by různé prvky A' a S' různým prvkům A resp. S, a prvky mezi oněmi ležící prvkům mezi těmito ležícím (v opačných smyslech); obě tyto části sobě odpovídající měly by nekonečně mnoho prvků společných (mezi S' a S), z nichž H' odpovídal by prvku H ležícímu v AS, což odporuje předcházejícímu. Obdobně kdyby S' následoval za S, měl by prvek K, ležící mezi S a S', korespondující prvek K', ležící mezi S a B, což opět předcházejícímu odporuje. Pročež musí býti prvek S samodružný; a protože každý prvek, předcházející prvku S, předchází svému korespondujícímu, není před S prvku samodružného.

Postuláty skupiny I. (vyjadřující, jak prvky bod, přímka a rovina sobě náležejí), skupiny II. (o tom, jak prvky základního útvaru jednorozměrného po sobě následují) a postulát III. charakterisují *projektivní prostor* (lineární, třírozměrný reálný) a stačí k vybudování celé geometrie projektivní (v tomto prostoru).[7])[8])[9])

---

[7]) Chceme-li se omeziti na projektivní geometrii v rovině, vybéřeme z uvedeného systému postuláty týkající se útvarů rovinných, musíme však připojiti ještě Desargovu větu o trojúhelnících (homologických) jako nový postulát.

[8]) Že postuláty projektivní geometrie ve svém souboru (skupin I., II. a III.) sobě neodporují, lze dokázati převedením geometrických prvků v analytické z kompatibility postulátů aritmetiky, jež zase vyplývá z ryzí logiky (jak dokázal *M. Pieri* r. 1905). Bod nahradíme skupinou hodnot čtyř čísel reálných x_k ($k = 1, 2, 3, 4$), konečných a ne všech nulových, určitou až na libovolný (reálný, konečný, nenulový) faktor; přímku souborem bodů $\lambda x_k + \mu x'_k$, kde x_k a x'_k jsou dva různé body a λ, μ reálná čísla

ne obě nulová; rovinu souborem bodů $\lambda x_k + \mu x'_k + \nu x''_k$, kde x_k, x'_k, x''_k jsou tři body nepatřící téže přímce a λ, μ, ν reálná čísla ne všechna nulová. Postuláty I. redukují se na jednoduché vlastnosti lineárních rovnic, postuláty II. se potvrdí uspořádáním bodů přímky podle stoupajících nebo klesajících hodnot poměru λ/μ, postulát III. přejde v předpoklad čísel iracionálních. Podrobně prokazuje nespornost uv. soustavy postulátů (pomocí číselného prostoru reálného) na př. *A. Comessatti*, Lezioni di geometria analitica e proiettiva II, p. 345 a n.

[9]) Zkoumání základů geometrie je velmi staré, neboť na něm spočívají už *Eukleidova Stoicheia*; jde při tom v podstatě o logický rozbor prostorového názoru. Avšak teprve v poslední době dospělo se k uspokojivému výsledku, k přesným soustavám základních pojmů a vět, z nichž lze ryze logicky vyvoditi celou geometrii; literatura o základech geometrie projektivní (a obyčejné) je dost rozsáhlá (viz *F. Enriquesův* článek Prinzipien der Geometrie v Encyklopädie der math. Wissenschaften III. AB 1. (do r. 1904) a Principes de la géométrie v Encyclopédie des sciences math. III. 1, 1911). Bibliografii základů geometrie (vedle jiných předmětů příbuzných) podává částečně *D. M. J. Sommerville*, Bibliography of non-euclidean geometry, 1911.

Staudt r. 1847 první podnikl práci zbudovati projektivní geometrii nezávisle na metrické; *Klein* zdůraznil tuto nezávislost a poukázal na konečný prostor jako východisko. I podal *M. Pasch* ve spise svém Vorlesungen über neuere Geometrie, 1882 (2. vyd. doplněné 1912 a 1926, přel. do špaň. 1913) úplnou soustavu geometrických postulátů pro omezenou část prostoru, odkudž připojením elementů ideálních dospěl k prostoru projektivnímu. Tohoto směru jsou základy geometrie, jež sestavili *G. Peano*, I principii di geometria logicamento esposti, 1889, a Sui fondamenti della geometria, 1894 (Rivista mat. 4); a *F. Schur*, Grundlagen der Geometrie, 1909. — Jinou cestou, totiž abstrakcí zrakového názoru, nalezli úplný systém postulátů pro geometrii projektivní *F. Enriques*, Sui fondamenti della geometria proiettiva, 1894 (Rendiconti Ist. Lombardo (2) 27), a Lezioni di geometria proiettiva, 1898 (4. vyd. 1920); a *M. Pieri*, I principii della geometria di posizione composti in sistema logicodeduttivo, 1898 (Memorie Accad. Torino (2) 48). — V některých směrech (v obecnosti úvah, nezávislosti postulátů a j.) dále jdou *O. Veblen*, A system of axioms for geometry, 1904 (Transactions Amer. math. soc. 5) (za pojmy základní přijímá bod a uspořádání; jeho soustavu zjednodušil *R. L. Moore*, A note concerning Veblen's axioms for geometry, Transactions Amer. math. soc. 13, 1912); *O. Veblen* a *J. W. Young*, A set of assumptions for projective geometry, 1908 (Amer. Journal math. 30), a Projective geometry I, 1910 a II, 1918; k tomu *N. J. Lennes*, Duality in projective geometry (Annals math. (2) 13, 1911); dále *Ch. Müntz*, Ein nichtreduzierbares Axiomsystem der Geometrie, 1914 (Jahresbericht Deut. Math. Ver. 23) (přijímá za pojmy základní bod a ležeti mezi dvěma body). — Z ostatní literatury o základech jsou pozoruhodny: *D. Hilbert*, Grundlagen der Geometrie, 1899 (7. vyd. 1930); *Th. Vahlen*, Abstrakte Geometrie, 1905; *A. N. Whitehead*, The axioms of projective geometry, 1906; *J. Rey Pastor*, Fundamentos de la geometria proyectiva superior, 1916; *L. Heffter*, Die Grundlagen der Geometrie, 1921 (a 2. vyd. knihy Lehrbuch der analytischen Geometrie I, 1927); *G. Hessenberg*, Grundlagen der Geometrie, 1930; *K. Reidemeister*, Vorlesungen über Grundlagen der Geometrie, 1930 (hlavně pro geom. afinní). — Konečně budiž uvedeno: *W. Killing*, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, I. 1893, II. 1898; *F. Amodeo*, Sulla introduzione alla geometria proiettiva. Giornale mat. 34 (1896); *M. Pieri*, Nuovo metodo di svolgere deduttivamente la geometria proiettiva, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 31 (1898); *H. Weber* a *J. Wellstein*, Encyklopädie der Elementar-Mathematik II (Geometrie), 1905 (3. vyd. 1915); *H. F. Baker*, Principles of geometry I, 1922 (2. vyd. 1929); *A. Heyting*,

Intuitionistische Axiomatiek der projektieve Meetkunde, Dissertation Groningen 1925, a Zur intuitionistischen Axiomatik der projektiven Geometrie, Math. Annalen 98 (1927); *B. Russell*, An essay on the foundations of geometry, 1897 (s filosofického hlediska, přel. do franc. 1901); *V. Kagan*, Osnovanija geometriji, 1907 (historický přehled); *G. Giorgi*, Sui fondamenti della geometria, Bolletino Mathesis 4 (1912) (historický přehled); *M. G. Gaba*, A set of postulates for general projective geometry, Transactions Amer. math. soc. 16 (1915); *J. Vojtěch*, O základech geometrie projektivní, Jub. sborník techn. v Brně, 1924; *M. Dehn*, Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung (připojeno k 2. vyd. M. Paschových Vorlesungen über neuere Geometrie, 1926).

II. PROJEKTIVNOST MEZI ZÁKLADNÍMI ÚTVARY PRVNÍHO ŘÁDU.

11. Útvary perspektivní. Základní útvary prvního řádu jsou — jak bylo uvedeno — trojího druhu: řada bodová, svazek paprskový a svazek rovinový. Dva různé útvary tyto byly nazvány perspektivními, jestliže jeden promítá nebo protíná druhý. Perspektivním útvarem k řadě bodové jest tedy svazek paprskový, je-li promítajícím útvarem jejím z bodu (svého středu, ležícího mimo její osu), a svazek rovinový, promítá-li ji z přímky (své osy, mimoběžné k její ose). Perspektivní k svazku paprskovému jest řada bodová, je-li jeho řezem (rovinou nejdoucí středem jeho nebo přímkou ležící v jeho rovině mimo střed), a svazek rovinový, je-li promítajícím útvarem jeho (z bodu ležícího mimo jeho rovinu nebo z přímky procházející jeho středem a neležící v jeho rovině). Perspektivní k svazku rovin jest konečně řada bodová, je-li jeho řezem přímkou (mimoběžnou k jeho ose), a svazek paprskový, protíná-li jej svou rovinou (jež neprochází jeho osou).

Mezi dvěma perspektivními útvary jednomocnými různého druhu (3 případy) můžeme ustanoviti jednojednoznačnou korespondenci takovou, aby každému prvku jednoho odpovídal ten prvek druhého, který mu náleží (je s ním incidentní). Definujeme tedy:

Dva základní útvary jednomocné různého druhu jsou perspektivní, jestliže každý element jednoho náleží korespondujícímu elementu druhého.[1])

Perspektivnost mezi dvěma základními útvary jednomocnými různého druhu je tedy *jednojednoznačná korespondence, v níž sdružené elementy sobě náležejí.*

Ustanovme podobně korespondenci mezi dvěma útvary stejného druhu (3 případy), definujíce:

Dva základní útvary jednomocné stejného druhu jsou perspektivní, jestliže každé dva korespondující elementy jejich náležejí jednomu elementu téhož třetího základního útvaru jednomocného.[2])

[1]) Jde-li o řadu bodovou a svazek rovin, nesmějí ovšem míti společnou osu.

[2]) Tento třetí útvar, je-li to řada bodová nebo svazek rovinový, nesmí ovšem míti osu společnou se žádným z obou oněch útvarů.

Perspektivnost mezi dvěma základními útvary jednomocnými stejného druhu je tedy *jednojednoznačná korespondence, v níž sdružené elementy náležejí jednomu elementu téhož třetího základního útvaru jednomocného.*

Rozeznáváme tuto perspektivnost útvarů stejného druhu trojí: *středovou* (podle středu), *osovou* (podle osy) a *rovinovou* (podle roviny) dle toho, má-li třetí útvar uvedený nosičem bod, přímku nebo rovinu.[3]) Tento bod, tato přímka nebo rovina slují *střed* resp. *osa* resp. *rovina perspektivnosti.*

Všimněme si všech případů, které jsou tu možny:

Dvě řady bodové na přímkách, jež leží v téže rovině, jsou perspektivní, jsou-li řezy téhož svazku paprskového: jsou středově perspektivní (podle středu svazku toho), při čemž sobě odpovídají dva body ležící na témž paprsku svazku. Dvě řady bodové na přímkách mimoběžných jsou perspektivní, jsou-li řezy téhož svazku rovinového: jsou osově perspektivní (podle osy svazku toho), při čemž jsou sdruženy dva body ležící v téže rovině svazku.

Dva svazky paprskové s týmž středem (v různých rovinách) jsou osově perspektivní, jsou-li řezy téhož svazku rovin. Dva svazky paprskové v téže rovině (s různými středy) jsou osově perspektivní, promítají-li tutéž řadu bodovou. Dva svazky paprskové s různými středy v různých rovinách jsou osově perspektivní, jestliže promítají tutéž řadu bodovou nebo protínají týž svazek rovin (což platí současně); korespondující přímky jejich protínají se v bodě řady a leží v rovině svazku.

Dva svazky rovinové, jejichž osy se protínají, jsou rovinově (středově) perspektivní, jestliže promítají týž svazek paprskový. Dva svazky rovin s osami mimoběžnými jsou osově perspektivní, jestliže promítají tutéž řadu bodovou.

12. Útvary projektivní. *a) Projektivnost mezi dvěma základními útvary prvního řádu jest korespondence, jež je produktem konečného počtu perspektivností.* Je to tedy korespondence jednojednoznačná; dva útvary, které v ní sobě odpovídají, slují *projektivní.*[1]) Dva projektivní útvary jsou tudíž krajní členy v řadě konečného počtu útvarů, z nichž každé dva sousední jsou perspektivní.[2])[3])

Symbolem projektivnosti jest $\overline{\wedge}$, symbolem perspektivnosti $\overline{\overline{\wedge}}$.[4])

---

[3]) Zpravidla se rozeznává perspektivnost jen *dvojí*: podle *středu* a podle *osy*. Neboť třetím útvarem, jemuž náležejí korespondující prvky dvou perspektivních útvarů jednomocných, může vedle řady bodové a svazku rovinového býti jen svazek paprsků, jehož nosičem je rovina i bod.

[1]) čili *homografické*, podle *Chaslesa* zejména ve francouzské literatuře.

[2]) Tak definují projektivnost dvou základních útvarů 1. řádu (*Poncelet*), *Cremona* (1873), *Thomae* a j.

[3]) Projektivnost jest, jak vysvítá z definice její a z postulátu II. 2, korespondence uspořádaná.

[4]) Symbol $\overline{\wedge}$ pro projektivnost pochází od *Staudta.*

Že dva útvary, v nichž prvku A odpovídá A', prvku B prvek B', prvku C pak C' atd., jsou projektivní, píšeme

$$ABC \ldots \barwedge A'B'C' \ldots;$$

že jsou perspektivní, píšeme

$$ABC \ldots \doublebarwedge A'B'C' \ldots;$$

ve dvou napsaných řadách sdružených elementů odpovídají sobě tedy prvky, stojící na místech stejně vzdálených.

Stručněji značíme útvar složený z elementů $A, B, C, \ldots$ nebo $a, b, c, \ldots$ nebo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ jedním písmenem v závorkách lomených $[A]$, $[a]$, $[\alpha]$, takže hořejší korespondence lze psáti

$$[A] \barwedge [A'], \quad [A] \doublebarwedge [A'].$$

Zabýváme-li se jen útvary téhož druhu, užíváme k jejich označení někdy nosičů jejich, u řad bodových na př. tedy přímek p a p', a píšeme

$$p \barwedge p' \text{ resp. } p \doublebarwedge p'.$$

Jsou-li dva útvary stejného druhu, na př. řady $[A]$, $[A']$ čili p, p', perspektivní podle středu S nebo osy o, píšeme někdy výrazně

$$p \overset{S}{\doublebarwedge} p' \text{ resp. } p \overset{o}{\doublebarwedge} p'.$$

b) Všimněme si nejprve projektivního vztahu mezi několika málo prvky. Platí především:

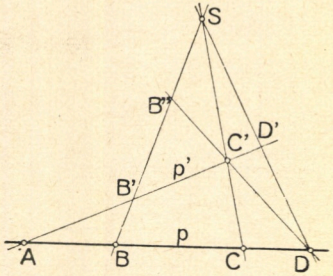
Dvě trojice (různých) *prvků dvou základních útvarů jednomocných jsou vždy projektivní.*

Při důkazu stačí omeziti se na dvě trojice bodů v řadách, protože jedna nebo dvě trojice paprsků nebo rovin ve svazcích převedou se duálností nebo řezem na trojice bodové. Buďtež tedy dány body A, B, C na jedné přímce a body A', B', C' na přímce mimoběžné. Bodům A, B, C můžeme body A', B', C' přiřaditi šesti způsoby (trojici ABC každou ze šesti permutací trojice $A'B'C'$); dejme tomu, že chceme, aby sobě projektivně odpovídaly body označené stejným písmenem (bez čárky a s čárkou), aby tedy platilo

$$ABC \barwedge A'B'C'.$$

Žádané projektivnosti dosáhneme, učiníme-li dané trojice osově perspektivní tím, že zvolíme za osu tří rovin, sdružené body obsahujících, přímku, jež protíná tři spojnice AA', BB', CC' (je to průsečnice dvou rovin určených libovolným bodem jedné spojnice a dvěma spojnicemi zbývajícími). Nebo můžeme z libovolného bodu S_1 spojnice AA' promítnouti body A, B, C na libovolnou přímku jdoucí bodem A' do bodů A', B'', C'', potom z průsečíku S_2 spojnic $B''B', C''C'$ promítnouti body A', B'', C'' do bodů A', B', C'; tyto dvě středové perspektivnosti jsou ekvivalentní prve uvedené perspektivnosti osové.

Leží-li trojice ABC a $A'B'C'$ na dvou přímkách se protínajících (do jejichž průsečíku však nespadají dva body sdružené), uskutečňují jejich projektivnost dvě středové perspektivnosti právě popsané. Protínají-li se přímky daných trojic v bodě samodružném $A = A'$, jsou trojice ty perspektivní podle průsečíku (BB', CC'). Leží-li dané trojice bodů na téže přímce, můžeme jednu trojici promítnouti z libovolného bodu na jinou přímku, onu protínající, nebo z libovolné přímky na jinou přímku, k oné mimoběžnou; projektivnost mezi danými trojicemi se pak objeví jako produkt tří perspektivností středových. Totéž platí v případě, že druhá z daných trojic jest pouze permutací prvé trojice.



Obr. 7.

Podle rozboru zde podaného můžeme hořejší větu pro trojice bodů doplniti takto: *Projektivnost dvou trojic* (různých) *bodů na dvou různých přímkách nebo na téže přímce jest produktem nejvýš dvou resp. tří středových perspektivností.*

c) O skupinách čtyř prvků v základním útvaru jednomocném lze dokázati: *Skupina čtyř různých prvků v základním útvaru jednomocném jest projektivní se skupinou, která z ní vznikne, zaměníme-li kterékoli dva a zároveň ostatní dva prvky její.*

Stačí ukázati, že o čtyřech bodech na přímce p platí

$$ABCD \barwedge BADC.$$

K tomu cíli (obr. 7) veďme bodem A přímku p'; spojnice bodu S (ležícího mimo p i p') s body B, C a D protnou ji v bodech B', C' a D'. Spojnice DC' ať protne SB v bodě B''. I jest

$$ABCD \overset{S}{\barwedge} AB'C'D' \overset{D}{\barwedge} BB'B''S \overset{C'}{\barwedge} BADC.$$

K důkazu projektivnosti $ABCD \barwedge CDAB$ zvolíme přechodní skupinu bodů na spojnici SC (místo na SB) nebo použijeme dokázané věty na jiné dvojice; stejně vyplývá $ABCD \barwedge DCBA$.

Jsou tedy celkem projektivními čtyři permutace (z možných 24) čtyř prvků:

$$ABCD \barwedge BADC \barwedge CDAB \barwedge DCBA.^{5})$$

Odtud také plyne: Jsou-li dvě skupiny po čtyřech (různých) prvcích dvou základních útvarů jednomocných projektivní, jsou projektivní čtyřmi různými způsoby.

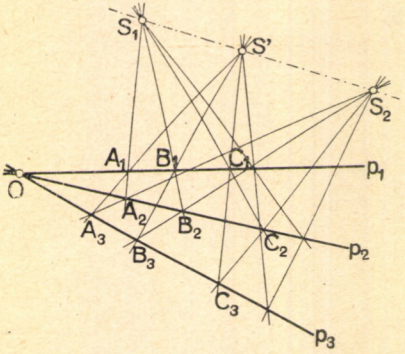
d) Přistupme k základním útvarům jednomocným (s neomezeně velikým spojitým množstvím prvků). Dva takové útvary mohou býti

[5]) Všimněme si, že tyto projektivní skupiny čtyř prvků začínají různými prvky.

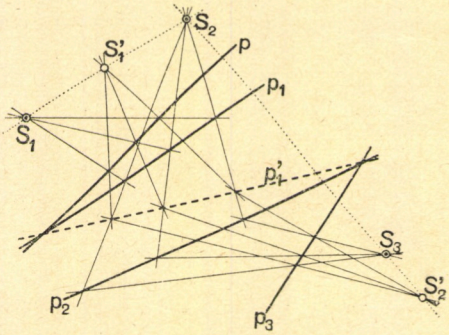
různého druhu nebo stejného druhu; tyto na různých nosičích nebo na témž nosiči čili soumístné.

Zabývejme se napřed dvěma projektivními řadami bodovými na různých přímkách. O nich můžeme dokázati větu:

Dvě projektivní řady bodové nesoumístné jsou buď perspektivní k sobě (podle středu nebo podle osy) aneb jsou perspektivní (podle dvou středů) k téže třetí řadě bodové.



Obr. 8.



Obr. 9.

Předpokládejme nejprve, že projektivní řady bodové $[A]$, $[A']$ jsou krajní členy v řadě útvarů (pouze) středově perspektivních

$$[A] \overset{S_1}{\overline{\wedge}} [A_1] \overset{S_2}{\overline{\wedge}} [A_2] \overset{S_3}{\overline{\wedge}} [A_3] \overline{\wedge} \ldots \overline{\wedge} [A_{n-1}] \overset{S_n}{\overline{\wedge}} [A'].$$

Budiž ovšem $n > 2$ (pro $n = 1$ nebo 2 jest věta vyhověno). Suponujme pak, že z přímek $p, p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{n-1}, p'$, na nichž jsou uvedené řady bodové, žádné dvě nesplývají a žádné tři sousední nejdou týmž bodem. Dokážeme, že čtyři řady bodové, z nichž dvě a dvě sousední jsou perspektivní,

$$[A] \overset{S_1}{\overline{\wedge}} [A_1] \overset{S_2}{\overline{\wedge}} [A_2] \overset{S_3}{\overline{\wedge}} [A_3]$$

je možno nahraditi třemi řadami takovými při týchž řadách krajních $[A]$ a $[A_3]$ na p a p_3 (čili, že dvě řady přechodní možno nahraditi jedinou).

K tomu cíli ukážeme předem, že platí: Jestliže řada bodová $A_1B_1C_1 \ldots$ na p_1 jest perspektivní v řadě $A_2B_2C_2 \ldots$ na p_2 podle středu S_1, $A_2B_2C_2 \ldots$ pak perspektivní k $A_3B_3C_3 \ldots$ na p_3 podle středu S_2 a jdou-li p_1, p_2, p_3 týmž bodem (O), jsou $A_1B_1C_1 \ldots$ a $A_3B_3C_3 \ldots$ perspektivní podle středu S', jenž leží na spojnici S_1S_2. Neboť (obr. 8) každé dva trojúhelníky tvořené sdruženými body na př. $A_1A_2A_3$ a $B_1B_2B_3$ $(C_1C_2C_3, \ldots)$ mají tu polohu, že spojnice jejich vrcholů p_1, p_2, p_3 procházejí týmž bodem O; proto podle věty Desargovy (věta $2a$ v čl. 7) protínají se sdružené strany jejich na téže přímce. A_1A_2 a B_1B_2 určují

bod S_1, A_2A_3 a B_2B_3 určují bod S_2; bod S', určený spojnicemi A_1A_3 a B_1B_3, leží na S_1S_2 a procházejí jím všechny další spojnice $C_1C_3, \ldots$.

Majíce nyní na zřeteli čtyři dané řady bodové na přímkách p, p_1, p_2, p_3, spojme (obr. 9) průsečík pp_1 s průsečíkem p_2p_3 přímkou p'_1 (abychom si zprostředkovali přechod od řad bodových na p a p_1 k řadám na p_2 a p_3, při čemž užijeme dokázané právě věty pomocné). Řadu bodovou na p_1 lze zaměniti řadou na p'_1 tak, že místo

$$p \overset{S_1}{\overset{=}{\wedge}} p_1 \overset{S_2}{\overset{=}{\wedge}} p_2 \text{ platí } p \overset{S'_1}{\overset{=}{\wedge}} p'_1 \overset{S_2}{\overset{=}{\wedge}} p_2.$$

Neboť promítneme-li řadu p_2 ze středu S_2 na p'_1, jsou na p_1, p'_1, p_2 tři řady, perspektivní podle téhož středu S_2. Na přímkách p, p_1, p'_1, jež procházejí týmž bodem, jsou pak řady

$$p \overset{S_1}{\overset{=}{\wedge}} p_1 \overset{S_2}{\overset{=}{\wedge}} p'_1;$$

a proto podle pomocné věty prve odvozené platí

$$p \overset{S'_1}{\overset{=}{\wedge}} p'_1, \text{ kde } S'_1 \text{ leží na } S_1S_2.$$

A protože řada p'_1 jest stejně jako p_1 perspektivní k p_2 podle středu S_2, jest možnost uvedené záměny dokázána.

Pouze v případě, kdy osa p'_1 prochází bodem S_2, není uvedené promítnutí řady p_2 z S_2 na p'_1 možno; je tu nutno řadu na p_1 nahraditi napřed řadou na přímce p''_1, jež prochází bodem p_1p_2 a protíná p (nejde však bodem S_1).

Teď však přímky p'_1, p_2, p_3 procházejí týmž bodem; použijeme-li znova pomocné věty hořejší, vyvodíme z perspektivností

$$p'_1 \overset{S_2}{\overset{=}{\wedge}} p_2 \overset{S_3}{\overset{=}{\wedge}} p_3$$

existenci perspektivnosti

$$p'_1 \overset{S'_2}{\overset{=}{\wedge}} p_3, \text{ kde } S'_2 \text{ leží na } S_2S_3.$$

Úhrnem jsme tedy nahradili čtyři řady (a tři středy perspektivností)

$$[A] \overset{S_1}{\overset{=}{\wedge}} [A_1] \overset{S_2}{\overset{=}{\wedge}} [A_2] \overset{S_3}{\overset{=}{\wedge}} [A_3]$$

třemi řadami (a dvěma středy perspektivností)

$$[A] \overset{S'_1}{\overset{=}{\wedge}} [A'_1] \overset{S'_2}{\overset{=}{\wedge}} [A_3].$$

Pokračujeme-li v této redukci perspektivních řad a středů, dospějeme nakonec k trojici

$$[A] \overset{S^*_1}{\overset{=}{\wedge}} [A^*] \overset{S^*_2}{\overset{=}{\wedge}} [A'],$$

t. j. projektivní řady $[A]$ a $[A']$ jsou perspektivní podle dvou středů S^*_1 a S^*_2 k téže řadě bodové $[A^*]$.

Aby však tento výsledek platil obecně, musíme se ještě zbaviti omezení vpředu učiněných. Splývají-li totiž některé dvě z přímek, na př. p_h a p_j, můžeme jednu z obou řad, třebas p_j, nahraditi řadou p''_j na přímce různé od p_h, při čemž p''_j musí jíti průsečíkem přímky p_j s její sousední a protínati druhou sousední. Jestliže pak tři nebo více přímek po sobě jdoucích prochází týmž bodem, můžeme vždy ze tří takových řad prostřední vypustiti (podle věty pomocné).

Předpokládali jsme na počátku, že perspektivnosti, jimiž se dospívá od řady $[A]$ k projektivní řadě $[A']$, jsou středové. Jsou-li mezi nimi také perspektivnosti osové, můžeme každou osovou nahraditi dvěma středovými: jsou-li na př. řady na přímkách p_1 a p_2 perspektivní podle osy o, stačí za středy S_1, S_2 středových perspektivností, nahrazujících osovou tuto perspektivnost, zvoliti kterékoli dva body na ose o, příslušná střední řada bodová leží pak na průsečnici rovin S_1p_1 a S_2p_2. Platí tedy dokázaná věta bez výjimky o projektivních řadách bodových na různých přímkách.

Jsou-li přímky s projektivními řadami bodovými mimoběžné, je možno dvě středové perspektivnosti, k nimž jsme nakonec dospěli, nahraditi jedinou perspektivností osovou. Jestliže totiž řady $[A]$ a $[A']$ jsou perspektivní k řadě $[A^*]$ podle středů S^*_1 a S^*_2, jsou perspektivní podle osy $o = S^*_1S^*_2$. Neboť paprsky S^*_1A a S^*_2A' určují, protínajíce se v A^*, rovinu svazku s osou $S^*_1S^*_2$. Tento případ jest záhodno vytknouti:

Dvě projektivní řady bodové na přímkách mimoběžných jsou vždy osově perspektivní.

Zbývá pak z dokázané věty obecné případ bodových řad v téže rovině:

Dvě projektivní řady bodové na přímkách se protínajících jsou buď středově perspektivní nebo lze od jedné ke druhé dospěti dvěma středovými perspektivnostmi.

Jsou-li dvě projektivní řady bodové soumístné, lze jednu z nich převésti na jinou přímku v perspektivní řadu bodovou. Platí tedy:

Projektivnost dvou bodových řad soumístných jest produktem dvou nebo tří perspektivností středových.

Na základě duálnosti lze obdobné věty uvésti o dvou projektivních svazcích rovin a o dvou projektivních svazcích paprsků. Jestliže pak projektivní útvary jsou druhu různého, stačí připojiti k jednomu z nich útvar promítající nebo protínající, který je téhož druhu jako útvar druhý.[6])

e) Z uvedené definice projektivní korespondence mezi dvěma útvary základními 1. řádu plyne bezprostředně:

Je-li základní jednomocný útvar projektivní k druhému a tento projektivní k třetímu, jest první útvar projektivní k třetímu.

[6]) Úvaha zde provedená platí také pro útvary s konečným nebo nekonečně velikým, ale přetržitým množstvím prvků.

Neboť od prvního útvaru můžeme (podle definice projektivnosti) přejíti k druhému konečným počtem perspektivností, od druhého k třetímu rovněž tak, pročež lze první útvar proměniti v třetí také konečným počtem perspektivností. Je-li projektivní transformace útvaru prvního v druhý P_1, transformace útvaru druhého v třetí P_2, jest projektivní transformace útvaru prvního v třetí P_2P_1. A obecně produkt libovolného počtu projektivností jest opět projektivnost.[7])

13. Čtyřrohové skupiny prvků. Úplný rovinný čtyřroh jest útvar pro geometrii projektivní velmi důležitý (také útvary duální: čtyrstran v rovině, čtyrstěn a čtyrhran v trsu).

a) Šest stran (úplného) rovinného čtyřrohu protněme přímkou (ležící ovšem v jeho rovině); vznikne skupina šesti bodů v řadě bodové. Duálně šest hran (úplného) středového čtyrstěnu promítněme z přímky (jdoucí ovšem jeho středem): povstane skupina šesti rovin ve svazku rovinovém. O takových skupinách šesti prvků u dvou čtyřrohů resp. čtyrstěnů platí:

Jestliže pět dvojic sobě odpovídajících stran ve dvou rovinných čtyřrozích bez společných vrcholů a stran (jež leží v téže rovině nebo v různých rovinách) *protíná se v bodech téže přímky* (neprocházející žádným vrcholem jejich), *protíná se i zbývající* (šestá) *dvojice stran jejich v bodě této přímky.*

Jestliže pět dvojic sobě odpovídajících hran ve dvou středových čtyrstěnech bez společných stěn a hran (jež mají společný střed nebo různé středy) *leží v rovinách jdoucích touže přímkou* (neležící v žádné stěně jejich), *leží i zbývající* (šestá) *dvojice hran jejich v rovině jdoucí touto přímkou.*

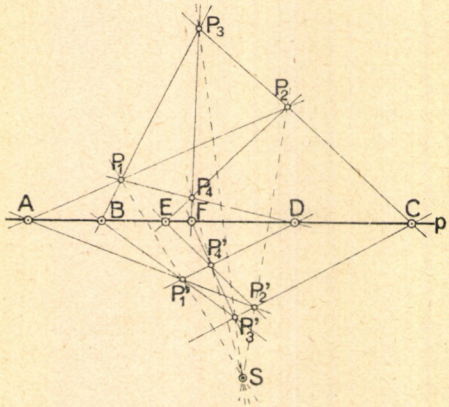
Leží-li oba čtyřrohy prvé věty v téže rovině nebo mají-li oba čtyrstěny druhé věty společný střed, jsou k větám těm duální (v rovině resp. v trsu) věty, týkající se šesti přímek ve svazku paprskovém, jež promítají v rovině šest vrcholů (úplného) čtyrstranu nebo jsou v trsu průsečnicemi šesti stěn (úplného) čtyrhranu; věty tyto jsou k sobě v prostoru duální a zní:

Jestliže pět dvojic sobě odpovídajících vrcholů ve dvou čtyrstranech (téže roviny, bez společných stran a vrcholů) *leží na přímkách jdoucích týmž bodem* (jenž není na žádné straně jejich), *leží i zbývající* (šestá) *dvojice vrcholů jejich na přímce jdoucí tímto bodem.*

Jestliže pět dvojic sobě odpovídajících stěn ve dvou čtyrhranech (se společným středem, bez společných hran a stěn) *protíná se v přímkách téže roviny* (jež neprochází žádnou hranou jejich), *protíná se i zbývající* (šestá) *dvojice stěn jejich v přímce této roviny.*

[7]) Obecnější povaha projektivnosti vůči perspektivnosti jeví se v tom, že produkt dvou projektivností je projektivnost, avšak produkt dvou perspektivností není (obecně) perspektivnost, nýbrž projektivnost.

Z těchto vět, uvedených už jako speciální případ věty Desargovy, rozšířené na úplné rovinné n-rohy a n-strany (v čl. 8*b*), stačí dokázati jednu; učiňme tak (pro důležitost věci samostatně) třebas u prvé. Buďtež dány (obr. 10) dva čtyřrohy $P_1P_2P_3P_4$ a $P'_1P'_2P'_3P'_4$, jejichž vrcholy (a tedy strany) stejně označené (bez čárky a s čárkou) sobě odpovídají.[1]) Předpokládáme, že průsečíky stran sobě odpovídajících $A = (P_1P_2,\ P'_1P'_2)$, $B = (P_1P_3,\ P'_1P'_3)$, $C = (P_2P_3,\ P'_2P'_3)$, $D = (P_1P_4,\ P'_1P'_4)$, $E = (P_2P_4,\ P'_2P'_4)$ leží na téže přímce p; dokážeme, že i průsečík F stran P_3P_4 a $P'_3P'_4$ leží na této přímce p. Protože strany trojúhelníků $P_1P_2P_3$ a $P'_1P'_2P'_3$ protínají se na p (v A, B, C), procházejí podle věty Desargovy (1*b* a 2*b* čl. 7) spojnice $P_1P'_1, P_2P'_2, P_3P'_3$ týmž bodem S; protože strany trojúhelníků $P_1P_2P_4$ a $P'_1P'_2P'_4$ protínají se na p (v A, D, E), jdou spojnice $P_1P'_1, P_2P'_2, P_4P'_4$ podle uvedené věty jedním bodem, tedy bodem S, určeným už spojnicemi $P_1P'_1$ a $P_2P'_2$. Protože pak spojnice vrcholů v trojúhelnících $P_1P_3P_4$ a $P'_1P'_3P'_4$ procházejí bodem S, protínají se podle věty Desargovy (1*a* a 2*a* v čl. 7.) strany jejich na téže přímce, tedy na přímce p, určené už průsečíky B a D stran P_1P_3 a $P'_1P'_3$, P_1P_4 a $P'_1P'_4$; proto se P_3P_4 a $P'_3P'_4$ protínají na p.



Obr. 10.

Uvedené skupiny šesti elementů (bodů v řadě, přímek ve svazku, rovin ve svazku) jsou pozoruhodné; z dokázaných vět vyplývá, že *pěti z prvků těch jest šestý jednoznačně určen.* Je-li totiž dáno pět prvků, lze šestý sestrojiti pomocí útvaru, určeného čtyřmi prvky téhož jména; takový útvar je možno zvoliti nekonečně mnohými způsoby, dospějeme však podle hořejších vět vždy k témuž šestému. Na př. k pěti bodům A, B, C, D, E řady bodové p sestrojíme šestý F tím, že bodem A vedeme přímku a na ní zvolíme dva body P_1 a P_2, vedeme dále přímky BP_1, CP_2, DP_1, EP_2; přímka spojující průsečíky $P_3 = (BP_1, CP_2)$, $P_4 = (DP_1, EP_2)$ protne danou přímku p v hledaném bodě F.[2])[3])

[1]) Žádný vrchol ani žádná strana jednoho z obou čtyřrohů ať nesplývá s vrcholem resp. stranou druhého. Jestliže tomu tak není, zvolíme pomocný čtyřroh třetí, obecně položený k oběma; dokážeme-li uv. větu o čtyřrohu prvém a třetím, potom o druhém a třetím, platí i o prvém a druhém čtyřrohu.

[2]) Nebo můžeme zvoliti jeden vrchol čtyřrohu kdekoli a jednu stranu jdoucí bodem dané skupiny (a nejdoucí oním zvoleným vrcholem); ostatní prvky čtyřrohu jsou tím už určeny.

[3]) Specialisujeme-li čtyřroh metricky, lze hořejší věty užíti k pěkné

b) Skupina šesti bodů řady bodové, v nichž strany (úplného) rovinného čtyřrohu přímku protínají, budiž nazvána *čtyřrohovou skupinou bodů*.[4]) V této skupině šesti bodů lze rozeznávati (čtyřmi způsoby) dvě trojice: strany čtyřrohu jdoucí třemi z bodů těch tvoří trojstran (a určují tři vrcholy čtyřrohu), strany jdoucí ostatními třemi body protínají se v bodě (čtvrtém vrcholu čtyřrohu, a promítají vrcholy onoho trojstranu).[5])[6])[7])

konstrukci (Lambertově, pouhým pravítkem) přímky, jdoucí daným bodem rovnoběžně k dané přímce, je-li v rovině dán rovnoběžník: Jsou-li dva vrcholy čtyřrohu v nekonečnu, tvoří čtyři ze šesti stran jeho rovnoběžník; na základě průsečíků pěti stran takového čtyřrohu v konečnu ležících s danou přímkou sestrojíme čtyřroh vyhovující předpokladu uv. věty, jehož jeden vrchol, odpovídající jednomu nevlastnímu vrcholu onoho, jest v daném bodě; druhý vrchol téhož druhu určuje spolu s daným bodem žádanou rovnoběžku.

[4]) Taková skupina bodů sluje často „šest bodů v involuci".

[5]) Čtyřrohová skupina bodů na přímce je obdobná konfiguraci Desargově v rovině (tato je průsekem roviny s prostorovým pětirohem, ona průsekem přímky s rovinným čtyřrohem). Jako v čtyřrohové skupině bodů rozeznáváme dvě různé trojice bodové, tak v konfiguraci Desargově (souboru dvou homologických trojúhelníků s příslušnými prvky) můžeme rozeznávati (úplný) čtyřroh a (úplný) čtyrstran (vrcholy tohoto leží na stranách onoho); tak konečně v prostoru existuje konfigurace (soubor dvou homologických čtyrstěnů s příslušnými prvky), složená z (úplného) pětirohu a (úplného) pětistěnu v prostoru (vrcholy tohoto leží na stěnách onoho).

[6]) Vedle věty odst. *a*, vedoucí k čtyřrohové skupině bodů na přímce, lze dokázati také větu: Jestliže u dvou rovinných (úplných) čtyřrohů každá z pěti stran jednoho protíná stranu, protější ke sdružené straně druhého, v bodech téže přímky, protíná i zbývající (šestá) strana onoho zbývající stranu tohoto v bodě přímky té. Kdežto v případě nahoře vytčeném každá trojice bodů čtyřrohové skupiny, dvěma sdruženými čtyřrohy vytvořené, jest u obou čtyřrohů téhož druhu (strany jejími body jdoucí protínají se v jednom bodě nebo tvoří trojstran), jest v případě zde zmíněném u čtyřrohů těch druhu různého.

[7]) Na základě hořejšího lze též poznati, že k danému čtyrstěnu jest možno připojiti neomezené množství čtyrstěnů jemu opsaných a zároveň vepsaných (*čtyrstěny Möbiovy*). Daný čtyrstěn totiž ať má vrcholy A, B, C, D a stěny $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, čtyrstěn opsaný i vepsaný pak vrcholy A', B', C', D' a stěny $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$; stěny $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ mají obsahovati vrcholy A, B, C, D, a vrcholy A', B', C', D' mají ležeti na stěnách $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Položme vrcholem A rovinu α', jež protne hrany BC, CD, DB v bodech D_1, B_1, C_1; na přímkách AB_1, AC_1, AD_1, průsečnicích roviny α' se stěnami β, γ, δ, zvolme po bodě B', C', D'. Body B_1, C_1, D_1 leží na přímce $p = \alpha\alpha'$; průsečíky této přímky p se stranami trojúhelníku $B'C'D'$ budtež B_2, C_2, D_2. Dvě trojice bodů $B_2C_2D_2$ a $B_1C_1D_1$ tvoří jako průsečíky přímky p se stranami čtyřrohu $AB'C'D'$ skupinu čtyřrohovou; a protože body B_1, C_1, D_1 leží na stranách trojúhelníku BCD, protínají se BB_2, CC_2, DD_2 v jediném bodě A'. Přímky posledně uvedené jsou však průsečnice stěny α s rovinami $BC'D', CD'B', DB'C'$; jest tedy A' čtvrtý vrchol hledaného čtyrstěnu. A z konstrukce vyplývá, že takových čtyrstěnů $A'B'C'D'$ jest nekonečně mnoho.

Dvojice uvedených čtyrstěnů, tvořící konfiguraci bodů a rovin typu 8_4, nalezena byla (r. 1828) Möbiem; rozbor možných případů dvou čtyrstěnů navzájem vepsaných i opsaných (celkem 5) podali *P. Muth*, Über Tetraederpaare, Zeitschrift Math. Phys. 37 (1892); *G. Bauer*, Von zwei Tetraedern,

Obdobné skupiny rovin a přímek, totiž skupinu šesti rovin ve svazku rovinovém, jež promítají hrany (úplného) středového čtyrstěnu z přímky (jdoucí jeho středem) a skupinu šesti přímek ve svazku paprskovém, promítek vrcholů (úplného) čtyrstranu z bodu (jeho roviny) nebo duálně průseků stěn (úplného) čtyrhranu rovinou (jdoucí jeho středem), nazveme *čtyřrohovou skupinou rovin* a *čtyřrohovou skupinou paprsků*.

Čtyřrohová skupina paprsků jest proťata libovolnou přímkou v čtyřrohové skupině bodů; naopak *čtyřrohová skupina bodů promítá se z libovolného bodu čtyřrohovou skupinou paprsků*.

Neboť čtyřrohová skupina paprsků promítá z bodu S (svého středu) vrcholy neomezeného množství čtyrstranů (podle věty v odst. *a*); za jednu stranu takového čtyrstranu ke skupině té příslušného (obr. 11) zvolme onu libovolnou přímku p, další tři strany buďtež a, b, c. Strany a, b, c protínají se v bodech A, B, C; body A, B, C, S jsou vrcholy čtyřrohu, jehož strany protínají p v těchže bodech jako paprsky, promítající vrcholy zvoleného čtyrstranu. Věta obrácená jest (v rovině) duální k větě právě dokázané (ze všech čtyřrohů k dané skupině bodů příslušných zvolíme čtyřroh $ABCS$, jehož jeden vrchol leží totiž ve středu skupiny paprskové; čtyrstran, jehož vrcholy skupina paprsková promítá, má tři strany určené body A, B, C a čtvrtou v přímce, na níž leží daná skupina bodů).

K větě uvedené jest prostorově duální:

Čtyřrohová skupina paprsků promítá se z libovolné přímky (jdoucí jejím středem) *v čtyřrohové skupině rovin*; naopak *čtyřrohová skupina rovin jest proťata libovolnou rovinou v čtyřrohové skupině paprsků*.

Druhá část této věty (obrácená k části prvé) jest k ní v trsu duální. Konečně platí věta, jejíž obě části jsou k sobě v prostoru duální:

Čtyřrohová skupina rovin jest proťata libovolnou přímkou v čtyřrohové skupině bodů; naopak *čtyřrohová skupina bodů promítá se z libovolné přímky čtyřrohovou skupinou rovin*.

Protneme-li totiž středový čtyrstěn rovinou (neobsahující jeho střed), jež prochází zvolenou přímkou p, dostaneme čtyrstran, a přímka p protínající skupinu rovin, příslušnou k onomu čtyrstěnu, protíná skupinu paprsků, příslušnou k tomuto čtyrstranu; promítneme-li duálně čtyrstran z bodu (ležícího mimo jeho rovinu), vznikne středový čtyrstěn, a skupina paprsků příslušná k čtyrstranu promítne se skupinou

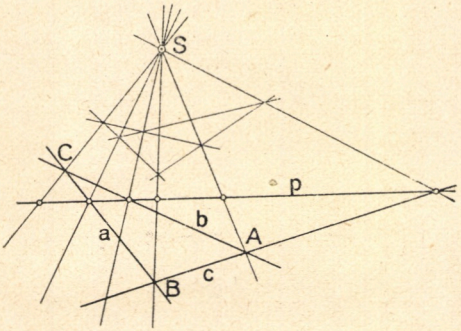
welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind, Sitzungsberichte Akad. München 27 (1897); konstrukci se zabýval *G. T. Bennett*, Mutually inscribed tetrahedra, Quart. Journal math. 42 (1911). Viz dále *J. Sobotka*, O vzájemných vztazích úplných čtyřrohů a čtyrstranů, Rozpravy Čes. akad. 36 (1927). Všechny případy tří čtyrstěnů, z nichž každý je oběma ostatním vepsán i opsán, (takže tvoří konfiguraci bodů a rovin symbolu 12_5, celkem 23 případy) vyšetřil *V. Martinetti*, I gruppi di tre tetraedri l'un l'altro inscritti e circoscritti, Giornale mat. 42 (1904).

rovin příslušnou k čtyrstěnu. Tím se tedy věta tato převádí na hořejší větu o sdružených skupinách bodů a paprsků.

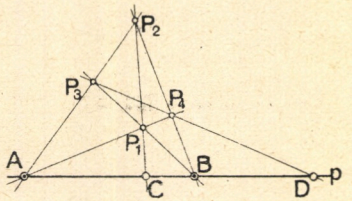
Z uvedených vět vyplývá, že útvar perspektivní k čtyřrohové skupině prvků (bodů, přímek nebo rovin) je čtyřrohová skupina prvků; a proto:

Skupina šesti prvků (v základním útvaru jednomocném), projektivní k čtyřrohové skupině prvků, je skupina čtyřrohová.

Spolu je platností vět těch odůvodněno pojmenování všech skupin (také skupin přímkových a rovinových) čtyřrohovými; můžeme totiž skupinu šesti paprsků ve svazku, jež promítají vrcholy čtyrstranu nebo



Obr. 11.



Obr. 12.

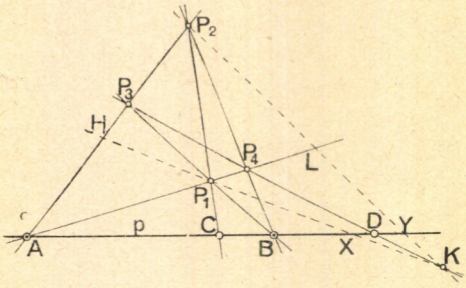
jsou průseky stěn čtyrhranu, a skupinu šesti rovin ve svazku, promítajících hrany středového čtyrstěnu, definovati jako skupiny promítající čtyřrohovou skupinu bodů (z bodu resp. z přímky).

14. Harmonické skupiny prvků. *a*) Speciálním případem skupin čtyřrohových jsou harmonické skupiny elementů. Na přímce p (obr. 12), která spojuje úhlopříčné vrcholy A, B (úplného) rovinného čtyřrohu $P_1P_2P_3P_4$, tvoří tyto dva body a průsečíky C, D zbývajících dvou stran čtyřrohu skupinu čtyř bodů, jež sluje *harmonická skupina* (čtyř) *bodů* $ABCD$. Pravíme, že body C a D jsou *harmonicky sdruženy* (konjugovány) vzhledem k bodům základním A a B; nebo že bod D (C) je harmonicky sdružen s bodem C (D) vzhledem k bodům A, B. Při bodech harmonické skupiny je nutno podle toho zachovati (do jisté míry) dané pořadí. Harmonická skupina čtyř bodů jest, jak patrno, čtyřrohovou skupinou šesti bodů, v níž dvě dvojice průsečíků protějších stran čtyřrohu na přímce splynuly.

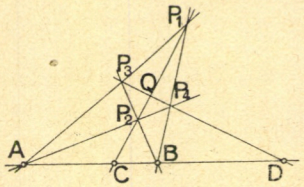
Obdobně (prostorově duální) *harmonickou skupinu* (čtyř) *rovin* $\alpha\beta\gamma\delta$ (v určitém pořádku) tvoří roviny, z nichž první dvě (základní) α, β jsou úhlopříčné roviny (úplného) středového čtyrstěnu a druhé dvě γ, δ promítají z průsečnice prvých zbývající dvě hrany čtyrstěnu. Harmonická skupina rovin takto definovaná je ekvivalentní se skupinou čtyř rovin, jimiž se z libovolné přímky promítá harmonická skupina bodů, protože totéž platí o čtyřrohové skupině rovin.

Konečně *harmonická skupina* (čtyř) *paprsků abcd* (v určitém pořádku) je tvořena buď dvěma úhlopříčnými paprsky a, b (úplného) čtyrstranu a dvěma paprsky c, d, jimiž se z bodu ab zbývající dva vrcholy jeho promítají, (a je v rovině duální k harmonické skupině bodů) nebo dvěma úhlopříčnými paprsky a, b (úplného) čtyrhranu a dvěma paprsky c, d, v nichž rovinu ab protínají dvě zbývající stěny jeho, (a je v trsu duální k harmonické skupině rovin). Harmonickou skupinu paprsků je možno zase definovati jako skupinu paprsků, promítajících z bodu harmonickou skupinu bodů (anebo duálně jako skupinu paprsků, v níž jest proťata rovinou harmonická skupina rovin).

b) V harmonické skupině čtyř bodů (prvků) *oddělují*



Obr. 13.



Obr. 14.

sdružené body (prvky) *C a D body* (prvky) *základní A a B.*

Dejme tomu totiž (obr. 13), že čtyřroh k harmonické skupině $ABCD$ na přímce p příslušný je označen tak, že strany jeho P_2P_3 a P_1P_4 procházejí bodem A, strany P_1P_3 a P_2P_4 bodem B, strana P_1P_2 bodem C a strana P_3P_4 bodem D. Na AP_3 zvolme bod H, jenž spolu s P_2 odděluje body A a P_3. Promítněme body A, P_3 a P_2, H z bodu P_1 na přímku p do bodů A, B a C, X; dvojice CX odděluje dvojici AB, protože to platí o dvojicích promítaných (podle postulátu II. 2. v čl. 9). Promítněme tytéž body A, P_3 a P_2, H z bodu $K = (P_3P_4, HP_1)$ na přímku AP_1 do bodů A, P_4 a L, P_1, tyto pak dále z bodu P_2 na přímku p do bodů A, B a Y, C; zase můžeme tvrditi, že dvojice YC odděluje dvojici AB. Body X a Y nalézají se tedy v té části řady bodové, body A a B ve dva díly rozdělené, v níž není bod C. Promítneme-li konečně z bodu K body A, P_3 a P_2, H do bodů A, D a Y, X, vidíme, že dvojice AD odděluje dvojici YX. Pročež leží bod D v tom z obou dílů řady bodové, body A a B rozdělené, jenž neobsahuje C, takže dvojice CD odděluje dvojici AB.[1]) Vedle toho poznáváme, že čtvrtý bod D je různý od bodů

[1]) Že dvojice AB a CD harmonické skupiny se oddělují, dokáže se také takto (obr. 14): Je-li $P_1P_2P_3P_4$ čtyřroh vedoucí k harmonické skupině $ABCD$, promítněme $ABCD$ z bodu P_3 do P_1P_2CQ, z bodu P_4 do P_2P_1CQ. Kdyby dvojice AC a BD se oddělovaly, platilo by totéž o dvojicích P_1C, P_2Q a také o dvojicích P_2C, P_1Q; avšak ze čtyř bodů může se oddělovat jen jedna dvojice dvojic. Obdobně poznáme, že se nemohou oddělovat dvojice AD

A, B, C.[2]) Vzhledem k větě právě odůvodněné říkáme, že dvojice bodů sdružených C a D *harmonicky odděluje* dvojici bodů základních A a B.[3])

c) V harmonické skupině čtyř prvků, na př. bodů $ABCD$, jest možno zaměniti oba základní prvky navzájem a oba k nim sdružené prvky rovněž navzájem, neboť v definici skupiny takové nečiní se rozdílu mezi prvky A a B ani mezi prvky C a D. Je však možno zaměniti také dvojici CD s dvojicí AB, t. j.

Jsou-li v harmonické skupině bodů (prvků) $ABCD$ *body* C *a* D *harmonicky sdruženy vzhledem k bodům* A *a* B, *jsou i body* A *a* B *harmonicky sdruženy vzhledem k bodům* C *a* D.

Neboť dejme tomu (obr. 15), že ke skupině $ABCD$ přísluší čtyřroh $P_1P_2P_3P_4$ tak, že dvě protější strany jeho P_1P_3 a P_2P_4 jdou bodem A, druhé dvě P_2P_3 a P_1P_4 bodem B, pátá a šestá P_1P_2 a P_3P_4 bodem C resp. D. Vedeme-li přímky CP_1, CP_3, a DP_1, DP_3 obdržíme nový čtyřroh $P_1P_3Q_1Q_2$, v němž $Q_1 = (CP_1, DP_3)$, $Q_2 = (CP_3, DP_1)$; jeho dvě dvojice protějších stran jdou body C a D, ze stran třetí dvojice pak P_1P_3 jde bodem A. Zbývá dokázati, že přímka Q_1Q_2 prochází bodem B. Vyplývá to podle věty Desargovy odtud, že strany trojúhelníků $P_1P_3Q_2$ a $P_4P_2Q_1$ protínají se po dvou na téže přímce; neboť v tom případě musejí spojnice korespondujících vrcholů jíti týmž bodem (B).[4])

Úhrnem lze tedy v harmonické skupině čtyř elementů provésti osm permutací (identickou v to počítaje), aniž skupina přestane býti harmonickou:

Je-li harmonickou skupina prvků $ABCD$, *jsou harmonické i skupiny* $BACD$, $ABDC$, $BADC$, $CDAB$, $CDBA$, $DCAB$, $DCBA$.[5])

---

a BC. Protože se však jedna dvojice dvojic musí oddělovat, oddělují se AB a CD.

[2]) Odtud vyplývá, že tři úhlopříčné vrcholy úplného rovinného čtyřrohu nemohou ležeti v jedné přímce. Kdyby tomu totiž tak bylo, t. j. kdyby na př. (obr. 12) bod (P_1P_2, P_3P_4) ležel na AB, musel by to býti spolu průsečík $(AB, P_1P_2) = C$ a průsečík $(AB, P_3P_4) = D$, čili dva body C a D, harmonicky sdružené vzhledem k A a B, by nebyly různé. Věta, že dva body harmonicky sdružené ve skupině čtyř bodů jsou různé, aneb že úhlopříčné vrcholy úplného rovinného čtyřrohu neleží v přímce, bývá někdy uváděna jako postulát (*Fanův*: *G. Fano*, Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva, Giornale mat. 30, 1892; viz i *Veblen* a *Young*, Projective geometry I, p. 45; *Whitehead*, The axioms of projective geometry, p. 14). Lze ji však, jak patrno, dokázati s použitím postulátů o uspořádání prvků (bez postulátu o spojitosti).

[3]) *Steiner* nazývá body C a D harmonicky sdruženými vzhledem k bodům A a B, *Staudt* harmonicky oddělujícími body A a B.

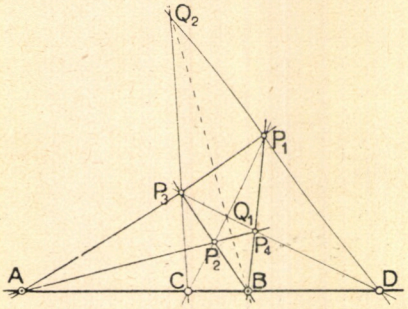
[4]) Podle věty právě dokázané nemá tedy v harmonické skupině čtyř prvků první dvojice jiného postavení než dvojice druhá, jak se prve jevilo.

[5]) jež obdržíme záměnou dvou prvků sdružených nebo záměnou obou dvojic sdružených prvků těch. Dalších 16 permutací, jež lze ještě z daných 4 prvků obdržeti, není však harmonických. Na př. skupina $ACBD$ nemůže býti harmonická, protože body B a D neoddělují bodů A a C.

15. Konstrukce a projektivnost harmonických skupin. *a*) Speciálním případem věty o čtyřrohových skupinách prvků (kde pěti prvky je určen jednoznačně prvek šestý, čl. 13*a*) jest:

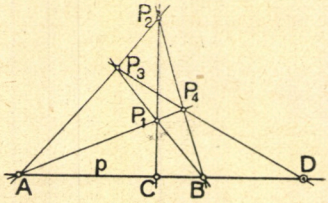
Jsou-li z harmonické skupiny elementů dány tři, jest jimi čtvrtý element jednoznačně určen.

Musí však býti udáno, které dva z daných tří prvků jsou sdruženy; vzhledem k tomu lze tedy určitěji říci: *K daným třem prvkům určitého pořádku* v základním útvaru jednomocném *existuje jediný čtvrtý harmonický.*[1])



Obr. 15.

Větu tuto je možno na př. pro body vysloviti také takto: Jestliže ke třem bodům A, B, C téže přímky sestrojíme dva rovinné čtyřrohy



Obr. 16.

(a libovolné jich množství, ležící v téže rovině nebo v různých rovinách), jež mají společné dva úhlopříčné vrcholy A, B a jejichž páté strany se protínají v C, protínají se jejich šesté strany v témž bodě D téže přímky AB.

Čtyřroh, kterého při daných třech bodech A, B, C použijeme uvedeným způsobem k sestrojení čtvrtého bodu harmonického D, můžeme nazvati *konstruktivním* čtyřrohem harmonické skupiny $ABCD$; každý z neomezeně velikého počtu takových čtyřrohů vede k témuž bodu D.

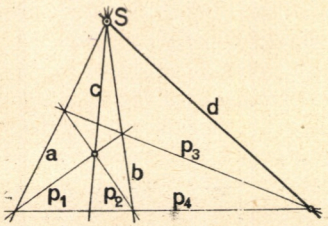
b) *Ke třem daným bodům řady sestrojíme* tedy *čtvrtý harmonický bod* tím, že sestrojíme příslušný (konstruktivní) rovinný čtyřroh. Jsou-li dány body A, B, C a má-li bod D býti harmonicky sdružen k C vzhledem k A, B, vedeme (obr. 16) bodem C paprsek a na něm zvolíme dva vrcholy P_1, P_2 čtyřrohu; vedeme dále čtyři spojnice bodů A, B s body P_1, P_2; novými dvěma průsečíky těchto spojnic $P_3 = (AP_2, BP_1)$, $P_4 = (AP_1, BP_2)$ je určena přímka, jež přímku AB protíná v hledaném bodě D.[2])

[1]) K daným třem prvkům vůbec jsou patrně tři (čtvrté) prvky harmonické podle toho, ke kterému z nich čtvrtý harmonický je sdružen. A platí tu: Jsou-li A, B, C tři různé prvky základního útvaru jednomocného a jsou-li harmonickými skupiny $ABCC'$, $BCAA'$, $CABB'$, jsou harmonické i skupiny $A'B'C'C$, $B'C'A'A$, $C'A'B'B$.

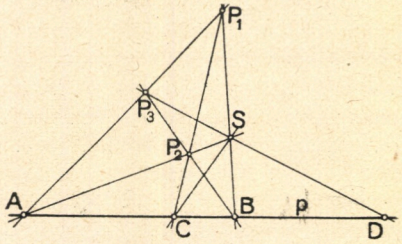
[2]) Tuto konstrukci čtvrtého bodu harmonického podal první *La Hire* r. 1685 (ve spise Sectiones conicae).

Ke třem daným paprskům a, b, c svazku sestrojíme čtvrtý harmonický paprsek d (oddělující spolu s *c* paprsky *a*, *b*), užijeme-li čtyrstranu: Na paprsku *c* zvolíme (obr. 17) bod, jímž vedeme dvě přímky p_1 a p_2, jejich průsečíky s paprsky *a*, *b* spojíme přímkami p_3 a p_4; průsečíkem p_3p_4 určen je paprsek *d*. Konstrukce tato, (v rovině) duální ke konstrukci čtvrtého bodu harmonického, může býti nahrazena tím, že ke třem bodům, v nichž libovolná přímka (nejdoucí středem svazku) dané paprsky protíná, sestrojíme čtvrtý harmonický a tento promítneme.

Je patrno, jak *ke třem daným rovinám* α, β, γ *svazku sestrojíme čtvrtou harmonickou rovinu* δ, sdruženou ke γ vzhledem k α, β, buď



Obr. 17.



Obr. 18.

sestrojením příslušného středového čtyrstěnu nebo pomocí harmonických paprsků nebo harmonických bodů.

Budiž vytčeno, že ke třem daným bodům (paprskům) lze čtvrtý harmonický sestrojiti pouhým pravítkem.

c) Z projektivní povahy čtyřrohových skupin elementů (čl. 13*b*) vyplývá i pro harmonické skupiny:

Skupina čtyř prvků, projektivní ke skupině harmonické, jest harmonická.[3])

Můžeme ostatně jádro této věty (pro její důležitost) znova dokázati na jednom případě (ostatní jsou obdobné): Harmonická skupina bodů (určených čtyřrohem) promítá se z libovolného bodu harmonickou skupinou paprsků (určených čtyrstranem) a naopak. Neboť je-li *ABCD* harmonická skupina bodů na *p* (obr. 18), je možno k ní připojiti čtyřroh, jehož dvě dvojice protějších stran jdou body *A* a *B* a zbývající dvě strany body *C* a *D*. Zvolme za jeden vrchol takového čtyřrohu bod *S*, z něhož skupinu *ABCD* promítáme; ostatní vrcholy jeho buďtež P_1, P_2, P_3 (tak třebas, že strany P_1P_3, P_2S jdou bodem *A*, strany P_2P_3, P_1S bodem *B*, P_1P_2 bodem *C* a P_3S bodem *D*). Paprsky *SA*, *SB*, *SC* a *SD* jsou vskutku harmonické, protože lze k nim připojiti čtyrstran se stra-

[3]) Odtud (a z věty čl. 12*c*, že skupina čtyř prvků je projektivní se skupinou, jež z ní vznikne záměnou dvou a dvou prvků, s ohledem na dovolenou záměnu prvků první a druhé dvojice) také plyne věta dříve samostatně dokázaná (čl. 14*c*), že spolu s danou skupinou harmonickou jest harmonických dalších sedm permutací jejích.

nami p, P_1P_3, P_1P_2, P_2P_3, v němž SA, SB jsou úhlopříčnými stranami a SC, SD promítají zbývající jeho vrcholy. Věta obrácená je k této (v rovině) duální.

Významnou větu uvedenou můžeme vysloviti také ve tvaru: *Při projektivní transformaci* základního útvaru jednomocného v základní útvar jednomocný *přecházejí harmonické skupiny ve skupiny harmonické*, t. j. harmoničnost jest pro skupinu čtyř prvků základního útvaru jednomocného vlastností projektivní.

Se zřetelem k tomu, že třemi prvky je čtvrtý harmonický jednoznačně určen, vyplývá odtud: Čtvrté harmonické body ke třem průsečíkům všech přímek s třemi rovinami svazku leží v rovině, harmonické k oněm třem. Obdobně platí pět dalších vět: jedna duální v prostoru k větě právě uvedené, dvě navzájem duální v rovině a dvě v trsu. Lze pak říci také o čtyřech různojmenných prvcích, že tvoří harmonickou skupinu (na př. o třech rovinách nebo přímkách ve svazku a o bodě, ležícím na čtvrté rovině resp. přímce svazku, harmonické k oněm třem); zejména o různojmenných dvojicích prvků říkáme, že se navzájem harmonicky oddělují (na př. dva body a dvě přímky, jestliže spojnice oněch protíná tyto v dvojici harmonicky je oddělující).[4])

Obráceně k hořejší větě platí: *Dvě harmonické skupiny prvků jsou vždy projektivní.* Neboť jsou-li skupiny $ABCD$ a $A'B'C'D'$ harmonické, platí podle věty o projektivnosti dvou trojic prvků (čl. 12*b*) $ABC \barwedge A'B'C'$, podle věty předcházející pak plyne ze vztahu $ABCD \barwedge A'B'C'D''$, že $A'B'C'D''$ je skupina harmonická, a konečně podle věty o jednoznačnosti čtvrtého prvku harmonického (odst. *a*) vychází $D'' = D'$, takže vskutku $ABCD \barwedge A'B'C'D'$.[5])

d) Z předchozích úvah poznáváme, že v (úplném) rovinném čtyřrohu a čtyrstranu (obdobně ve středovém čtyrstěnu a čtyrhranu) vyskytují se v každém vrcholu a úhlopříčném vrcholu, na každé straně a úhlopříčné straně (a v ostatních prvcích základních i úhlopříčných, jakož i v dalších odvozených) harmonické skupiny elementů. Zejména jsou důležité tyto případy (v rovině) duální:

---

[4]) Mimo to sluje *pólem* roviny γ vzhledem k dvěma bodům A, B čtvrtý bod harmonický D, sdružený v řadě na AB s průsečíkem (AB, γ) vzhledem k bodům A, B; a *polárnou rovinou* bodu C vzhledem k dvěma rovinám α, β čtvrtá rovina δ, harmonicky sdružená ve svazku $\alpha\beta$ s rovinou $(\alpha\beta, C)$ vzhledem k rovinám α, β; také rovina γ v prvním případě sluje polárnou rovinou bodu D a bod C v případě druhém pólem roviny δ.

Obdobně mluví se v rovině o *pólu* přímky vzhledem k dvěma bodům (nebo přímkám) a o *poláře* bodu vzhledem k dvěma přímkám (nebo bodům), jestliže dva základní prvky (stejnojmenné) v řadě nebo svazku jsou harmonicky odděleny uvedenými dvěma prvky (různojmennými). A duálně v trsu lze mluviti o *polárné rovině* přímky a o *poláře* roviny vzhledem k dvěma rovinám nebo přímkám svazku.

[5]) Že z úplného čtyřrohu rovinného vzniká harmonická skupina prvků a že harmonické skupiny jsou projektivní, bylo známo už ve starověku (*Apollonios*, *Pappos*).

V (úplném) čtyřrohu jsou dvě protější strany harmonicky odděleny dvěma stranami úhlopříčného trojúhelníku jeho (jež procházejí průsečíkem stran těch).

V (úplném) čtyrstranu jsou dva protější vrcholy harmonicky odděleny dvěma vrcholy úhlopříčného trojúhelníku jeho (jež leží na spojnici vrcholů těch).

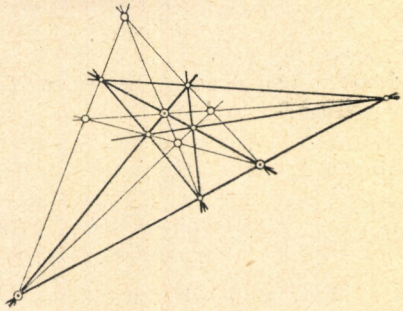
Stručněji lze říci: Dvě protější strany úplného rovinného čtyřrohu jsou harmonicky odděleny dvěma úhlopříčnými vrcholy jeho, kterých neobsahují. A pod.

Úplný rovinný čtyřroh jest, jak patrno, určen jedním vrcholem svým a trojúhelníkem úhlopříčným: k jeho sestrojení stačí konstrukce jedné strany jako čtvrtého paprsku harmonického k daným třem, ostatní prvky se pak obdrží bezprostředně. Obdobné věty platí ovšem o úplném čtyrstranu a o úplném středovém čtyrstěnu i čtyrhranu.[6])[7])

[6]) Z úplného čtyřrohu v rovině poznáváme (na základě jeho harmonických vlastností) bezprostředně: Poláry bodu P vzhledem ke dvojicím stran daného trojúhelníku tvoří trojúhelník danému opsaný a s ním homologický (sluje také kogredientní s daným): spojnice sdružených vrcholů těchto dvou trojúhelníků jdou bodem P, sdružené strany jejich protínají se v bodech přímky p. A duálně. Bod P a přímka p slují *pól* a *polára* vzhledem k trojúhelníku danému.

Indukcí lze tuto větu rozšířiti: Poláry bodu P vzhledem k n úplným $(n-1)$-stranům, obsaženým v úplném n-stranu, tvoří úplný n-stran, jehož strany protínají sdružené strany daného v bodech jedné přímky p, jež sluje polárou bodu P vzhledem k danému n-stranu.

U prostorového úplného čtyřrohu (čtyrstěnu) lze definovati *pól* P a *polárnou rovinu* π k sobě příslušné takto: Průměty daného bodu P ze čtyř vrcholů čtyřrohu na stěny jeho buďtež P_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ a poláry bodů P_k vzhledem k trojúhelníkům stěn těch buďtež p_k; průměty bodu P ze šesti hran čtyřrohu na hrany protější buďtež P_{hk} $(h \neq k; h, k = 1, 2, 3, 4)$ a body k nim harmonické na hranách těch vzhledem k vrcholům čtyřrohu buďtež P'_{hk}. Přímky p_k a body P'_{hk} jsou strany a vrcholy úplného čtyrstranu v rovině π; duálně lze od π dospěti k P.



Obr. 19.

[7]) Zajímavá je *konfigurace úplného čtyřrohu a úplného čtyrstranu se společným trojúhelníkem úhlopříčným* (obr. 19). Je to speciální případ konfigurace Desargovy (pokládané za útvar, složený ze čtyřrohu a čtyrstranu); trojúhelník diagonální a každý ze čtyř trojúhelníků čtyřrohu jsou homologické (spojnice korespondujících vrcholů jejich procházejí čtvrtým vrcholem čtyřrohu a korespondující strany jejich protínají se na jedné straně čtyrstranu). Daným čtyřrohem určen je čtyrstran a obráceně (duálně); celá konfigurace je soběduální. Na každé z devíti stran čtyřrohu a úhlopříčného trojúhelníku jest harmonická skupina bodů (celkem 13 bodů), duálně v každém z devíti vrcholů čtyrstranu a úhlopříčného trojúhelníku jest harmonická skupina paprsků (celkem 13 paprsků). Vzhledem k diago-

16. Racionální soustava prvků. Ke třem prvkům základního útvaru jednomocného nazývá se harmonickým ten čtvrtý prvek, který je harmonicky sdružen k jednomu z nich vzhledem k ostatním dvěma (jsou, jak bylo uvedeno, celkem tři takové prvky). *Racionální soustavou bodů* v řadě bodové (a duálně paprsků ve svazku paprskovém, rovin ve svazku rovinovém) sluje soustava bodů

$$A, B, C, H_1, H_2, H_3, \ldots$$

taková, že bod H_1 je harmonický k bodům A, B, C a obecně H_k je harmonický ke třem z řady $A, B, C, H_1, H_2, \ldots, H_{k-1}$. Racionální soustavu, jejímž základem jsou prvky A, B, C, značíme $R(ABC)$.[1])

Soustava prvků projektivní k soustavě racionální jest racionální.

Jestliže totiž ke skupině bodů $ABCH_1$ jest projektivní skupina $A'B'C'H'_1$ a je-li H_1 harmonický k ABC, jest i H'_1 harmonický k $A'B'C'$ (při čemž sdruženými jsou body, projektivní k sdruženým bodům první skupiny). Jestliže v téže projektivnosti dalšímu bodu H_k odpovídá H'_k a je-li H_k harmonický ke třem z bodů $A, B, C, H_1, H_2, \ldots, H_{k-1}$, jest H'_k harmonický ke korespondujícím třem z řady $A', B', C', H'_1, H'_2, \ldots, H'_{k-1}$.

Racionální soustava prvků je určena kterýmikoliv třemi svými různými prvky.

Jest ovšem určena první trojicí ABC, protože touto je určen bod čtvrtý H_1 a další. Je však také určena kterýmikoli třemi různými body svými L, M, N. Soustavy $R(ABC)$ a $R(ABL)$, kde bod L patří do soustavy určené body A, B, C, jsou totiž totožny; neboť skupina $ABCL$ je projektivní se skupinou $BALC$, takže bod C patří do soustavy určené trojicí ABL; a proto racionální soustava, jejímž východiskem jsou body A, B, L, je totožná se soustavou, jejímž základem jsou body A, B, C. Platí tedy

$$R(ABC) = R(ABL) = R(AML) = R(NML).$$

Racionální soustava bodů v řadě bodové je vytvořena čtvrtými body harmonickými; o bodech čtyřrohové skupiny, poněkud obecněji definovaných, platí:

Jsou-li všechny body čtyřrohové skupiny až na jeden členy racionální soustavy, jest i tento jejím členem.

Neboť dejme tomu, že z bodů čtyřrohové skupiny $ABCDEF$ jsou A, B, C, D, E obsaženy v racionální soustavě; promítneme-li (obr. 10)

nálnímu trojúhelníku přísluší ke každému vrcholu čtyřrohu strana čtyrstranu tak, že spojnice onoho s vrcholy trojúhelníku a průsečíky této s jeho stranami oddělují harmonicky vrcholy a strany trojúhelníku (pól a polára vzhledem k trojúhelníku tomu). Obdobné vlastnosti má konfigurace v prostoru složená z úplného pětirohu a úplného pětistěnu se společným útvarem diagonálním. Viz na př. *G. Kohn*, Über das Vierseit und sein associirtes Viereck, das Fünfflach u. sein associirtes Fünfeck, Sitzungsberichte Akad. Wien 93 (1886); *L. Berzolari*, Sulla lemniscata projettiva, Rendiconti Ist. Lombardo 37 (1904).

[1]) Racionální soustava prvků v základním útvaru 1. řádu sluje také (souhlasně s obdobnými v útvarech 2. a 3. řádu) *racionální síť* základního útvaru jednorozměrného.

skupinu $ACDE$ z P_2 na P_1P_4, dostaneme skupinu P_1RDP_4, kde $R = (P_1P_4, P_2P_3)$, promítneme-li pak tuto z P_3 na p, obdržíme skupinu $BCDF$; jest tedy $ACDE \barwedge BCDF$. A protože E je v soustavě $R(ACD) \equiv R(BCD)$, jest tam i bod F.

Ke třem daným bodům lze sestrojiti čtvrtý harmonický konstrukcí rovinného čtyřrohu, tedy pouhým pravítkem; jest proto možno pouhým pravítkem sestrojiti všechny prvky racionální soustavy bodů.[2])

Racionální soustava elementů obsahuje, jak patrno, neomezené množství prvků.

17. Určenost projektivní transformace (základní věta o projektivnosti). Obsahem t. zv. základní věty o projektivnosti jest odpověď na otázku, kolika dvojicemi korespondujících prvků jest projektivnost mezi dvěma základními útvary 1. řádu jednoznačně určena. Stačí omeziti se v úvaze na projektivnost mezi dvěma nesoumístnými řadami bodovými. Platí především:

Existuje vždy projektivnost mezi dvěma základními útvary jednomocnými, v níž třem různým prvkům jednoho útvaru odpovídají tři libovolné různé prvky útvaru druhého.

Vzhledem k definici projektivnosti musí býti možno dospěti od jednoho útvaru základního k druhému konečným počtem perspektivností tak, že tři dané prvky onoho přejdou ve tři dané prvky tohoto. Bylo však už dokázáno (v čl. 12*b*), že dvě trojice prvků dvou základních útvarů jednomocných jsou vždy projektivní (a nad to bylo u řad bodových nalezeno, že od jedné trojice bodů dospějeme k druhé jednou, dvěma nebo nejvýše třemi perspektivnostmi středovými); při tom ovšem ostatní prvky prvého útvaru základního transformují se v ostatní prvky útvaru druhého. Existuje tedy aspoň jedna projektivnost, stanovená mezi dvěma základními útvary jednomocnými třemi dvojicemi prvků korespondujících.

Vzniká však otázka, zdali také čtyřem prvkům útvaru jednomocného je možno projektivně přiřaditi čtyři libovolné prvky jednomocného útvaru. Poznáváme hned, že to není možno, protože čtyřem harmonickým prvkům musí projektivně odpovídati opět čtyři prvky harmonické a nikoli tedy libovolné. Vrátíme-li se ke třem dvojicím prvků korespondujících, tážeme se, zdali snad existuje více než jedna projektivnost, v níž třem daným prvkům odpovídají tři prvky dané.

Existuje pouze jedna projektivnost mezi dvěma základními útvary jednomocnými, v níž třem (různým) prvkům jednoho útvaru odpovídají tři libovolné (různé) prvky druhého.[1])

---

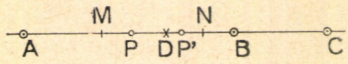
[2]) Nazveme-li racionálním útvar, který z daných prvků lze sestrojiti pravítkem, je tím odůvodněn název racionální soustavy prvků. Původ toho pojmenování při konstrukcích a při uvažované soustavě prvků jest však v aritmetice.

[1]) Rozumí se, že každému ze tří prvků jednoho útvaru přiřadíme určitý ze tří prvků druhého útvaru; jinak ovšem existuje mezi dvěma trojicemi prvků šest projektivností.

Věta tato sluje *základní větou o projektivnosti*. Můžeme ji vysloviti také tak, že *třemi dvojicemi korespondujících prvků jest projektivnost mezi dvěma základními útvary prvního řádu jednoznačně určena.*[2])

Kdyby totiž existovaly dvě různé projektivnosti $\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{P}_2$ mezi řadami bodovými na p a p', z nichž každá by body A, B, C na p převáděla v body A', B', C' na p', pak transformace $\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1$ byla by projektivností mezi dvěma soumístnými řadami na p, při níž by body A, B, C byly (jednotlivě) invariantní a jež by nebyla identická. Podle toho lze základní větě dáti tento tvar: *Jestliže v projektivnosti dvou soumístných útvarů prvního řádu existují tři prvky samodružné, jsou všechny prvky útvaru samodružné* (a projektivnost je identická).[3]) Přidržíme se tohoto znění.[4])

Základní větu lze snadno dokázati pro racionální soustavy prvků. Jestliže totiž v racionální soustavě bodů tři body A, B, C odpovídají projektivně sobě samým, odpovídá sobě samému každý další bod soustavy. Neboť z projektivnosti $ABCH_1 \overline{\wedge} ABCH'_1$ vyplývá (protože třemi prvky je čtvrtý harmonický určen jednoznačně) $H'_1 = H_1$ a dále $H'_k = H_k$.



Obr. 20.

Abychom však větu základní dokázali pro základní útvary jednomocné vůbec, užijeme postulátu o spojitosti útvarů těch.

Kdyby totiž existovala v řadě bodové neidentická projektivnost $\mathbf{P}$ s třemi body samodružnými A, B, C, existovala by na přímce část řady bodové s krajními body samodružnými M a N, mezi nimiž by nebylo bodů samodružných. Neboť dejme tomu, že C neleží mezi A a B v určitém smyslu (obr. 20, od opačné suposice přejde se k této obrácením smyslu). Je-li projektivnost $\mathbf{P}$ neidentická, musí býti v řadě bod P, jemuž odpovídá při $\mathbf{P}$ různý od něho bod P': bod P ať leží mezi A a B ve smyslu ABC. Bod P' musí býti také mezi A a B (ve zvoleném smyslu), protože dvojice CP odděluje dvojici AB a totéž musí platit o dvojicích korespondujících. Dejme tomu dále, že bod P' je za P ve smyslu ABC. Bodům mezi P a B (v uvedeném smyslu) odpovídají body mezi P' a B,

[2]) Protože za každý ze tří prvků druhého útvaru, jež odpovídají určitým třem prvkům prvního útvaru, lze zvoliti kterýkoli z nekonečně velikého počtu jeho prvků, pravíme, že existuje mezi dvěma základními útvary 1. řádu ∞^3 projektivností.

[3]) Mohou tedy dva projektivní soumístné útvary základní jednomocné míti nejvýše dva elementy samodružné, nemá-li jejich projektivnost býti identická. Z uvedené věty vyplývá: Jsou-li u dvou projektivních základních jednomocných útvarů různého druhu tři prvky sobě odpovídající incidentní, jest jeden útvar promítkou resp. průsekem druhého. A dále: *Dva projektivní základní jednomocné útvary téhož druhu jsou perspektivní, jsou-li tři dvojice korespondujících prvků jejich incidentní s prvky téhož základního útvaru jednomocného.*

[4]) Tak uvádí základní větu o projektivnosti po prvé *Staudt* r. 1847; sluje proto (v tomto tvaru) *větou Staudtovou.*

a tato část řady je obsažena v oné; ale pak musí podle věty, odvozené jako důsledek postulátu o spojitosti (v čl. 10), existovati (mezi P' a B) první samodružný element N takový, že před ním není bodů samodružných. Obdobně odvodíme, že při $\mathbf{P}^{-1}$ musí (mezi P a A ve smyslu CBA) existovati první samodružný bod M téhož druhu jako N, protože bodům mezi P' a A (v udaném zde smyslu) odpovídají body mezi P a A, při čemž část tato je obsažena v oné. K témuž výsledku přijdeme při opačné suposici o vzájemné poloze bodů P a P'. Mezi M a N (ve smyslu ABC) není tedy bodů samodružných.

Avšak v projektivnosti dvou řad bodových musí harmonické skupině odpovídati skupina harmonická. Jestliže s bodem C vzhledem k M a N je harmonicky sdružen bod D, leží D mezi M a N, protože tam neleží bod C a protože dvojice harmonicky sdružené se oddělují. Body M, N a C jsou samodružné, musí tedy i bod D býti samodružný, což odporuje hořejšímu; není tudíž mezi A a B prvků nesamodružných. Obdobně se dokáže, že ani mezi B a C ani mezi C a A (stále v témž zvoleném smyslu) neexistují body, jež by nebyly samodružné. Proto jsou všechny prvky řady bodové samodružnými: projektivnost dvou soumístných řad bodových, v níž existují tři samodružné body, jest identická.[5])[6])[7])

---

[5]) Dokázali jsme dříve (čl. 15c), že v projektivních útvarech harmonickým skupinám odpovídají skupiny harmonické. V obrácené úvaze lze předně z postulátu o spojitosti dokázati, že obapolně jednoznačná korespondence, v níž harmonickým skupinám odpovídají harmonické skupiny, jest uspořádaná (*G. Darboux*, Sur le théorème fondamental de la géométrie projective, Math. Annalen 17, 1880; nebo na př. *F. Severi*, Geometria proiettiva, p. 64). Z hořejšího pak plyne, že korespondenci obapolně jednoznačnou, jež harmonické skupiny převádí ve skupiny harmonické, lze (při daných třech dvojicích prvků korespondujících) vždy a jedinou uskutečniti konečným počtem perspektivností; je to tedy určitá projektivnost. Vzhledem k tomu všemu jest možno projektivnost definovati jako jednojednoznačnou korespondenci, v níž harmonickým skupinám odpovídají skupiny harmonické; to je *definice Staudtova* (1847), které užívá také Reye, Enriques a mn. j. Definice Poncelet-Cremonova může se však týkati i útvarů nespojitých a má hlavně tu přednost, že bezprostředně souvisí se základními výkony geometrie projektivní.

[6]) Staudtův důkaz základní věty o projektivnosti byl neúplný; doplnili jej *Lüroth, Zeuthen, Darboux, Schur* a *Enriques*. K důkazu věty té stačí při Poncelet-Cremonově definici projektivnosti místo postulátu Dedekindova o spojitosti (užší) postulát *Archimedův* (o měřitelnosti), jak v podstatě ukázal *Hilbert*. Archimedův postulát o měřitelnosti zní ve tvaru projektivním: Na každé přímce, vyjdouce od tří bodů, dospějeme pouhými konstrukcemi bodů harmonických k dvojici, oddělující dvojici tam danou. O základní větě projektivnosti viz literaturu, uvedenou pro základy na konci oddílu I; mimo to *M. Pieri*, Circa il teorema fondamentale di Staudt e i principi della geometria projettiva, Atti Accad. Torino 39 (1904); *C. Juel*, Om v. Staudt's definitioner, Meddelelser Danske vid. selskab 7 (1927); *A. Comessatti*, Lezioni di geometria analitica e proiettiva II, p. 84.

Při důkazu základní věty o projektivnosti užili jsme vedle postulátů o incidenci prvků také postulátů o uspořádání prvků a o spojitosti útvarů.

18. Konstrukce projektivnosti. *a*) Dva perspektivní útvary základní 1. řádu se společným prvkem (řady bodové v téže rovině, svazky paprskové téže roviny nebo téhož středu, svazky rovinové s osami se protínajícími) mají tento prvek za samodružný. Ze základní věty o projektivnosti vyplývá obráceně:

Dvě projektivní řady bodové na různých přímkách téže roviny, jejichž společný bod odpovídá sobě samému, jsou perspektivní (podle středu).

Dva projektivní svazky paprskové téže roviny s různými středy, jejichž společný paprsek odpovídá sobě samému, jsou perspektivní (podle osy).

Tyto věty jsou v rovině navzájem duální. K důkazu na př. první z nich stačí uvésti: Je-li projektivnost obou řad stanovena dvojicemi korespondujících bodů $A = A'$, B a B', C a C', jest průsečík S spojnic BB' a CC' středem svazku paprskového, v němž podle věty základní jest identická projektivnost $S\,(ABC) \barwedge S\,(A'B'C')$; tato je podkladem perspektivnosti obou řad $ABC \barwedge A'B'C'$ (podle středu S).[1])[2])

Protože však pro racionální soustavy prvků věta ta platí bezprostředně, jest nasnadě, chceme-li se obejíti bez postulátů skupiny II. a III. (jejichž podstata je složitější), zavésti základní větu o projektivnosti jako postulát pro základní útvary jednomocné vůbec; lze tak odvoditi velikou část projektivní geometrie, platnou tedy i v útvarech, kde uspořádání a spojitost neexistují. Tak činí (zatímně) *Veblen* a *Young*, Projective geometry I, p. 95. Dotčený postulát je nezávislý na postulátech o incidenci prvků, jak lze dokázati analyticky.

Založíme-li projektivní geometrii na postulátech skupiny I. a II. a na základní větě o projektivnosti (jako postulátu), dostaneme za suposice, že neplatí postulát Archimedův, t. zv. *geometrii nearchimedskou* (*Veronese, Levi-Cività*); viz (mimo literaturu o základech) na př. *G. Veronese*, La géométrie non-archimédienne, Bulletin sc. math. (2) 33 (1909); *A. Schoenflies*, Über die Möglichkeit einer projektiven Geometrie bei transfiniter (nicht-archimedischer) Massbestimmung, Jahresbericht Deut. Math. Ver. 15 (1906); *J. Hjelmslev*, Sur les principes fondamentaux de la géométrie, C. r. du Congrès des mathém. à Stockholm, 1909; Encyclopédie des sciences mathématiques, III. 1 a III. 1*a* (1911).

[7]) Abstraktní geometrie (spec. s konečným počtem prvků), v nichž projektivní transformace, mající tři body na přímce invariantní, není identická, studuje *B. Levi*, Geometrie proiettive di congruenza e geometrie proiettive finite, Transactions Amer. math. soc. 8 (1907). O větě Staudtově se zřetelem k postulátům projektivní geometrie a k jeho definici projektivnosti, jakož i o případech, kdy věta ta neplatí (takže jednojednoznačná korespondence, zachovávající skupiny harmonické, není uspořádaná), pojednává *A. Comessatti*, Geometria non staudtiana, Bolletino mat. 26 (1930); viz i téhož Lezioni di geometria analitica e proiettiva II, p. 417 a n.

[1]) Při definici harmonické skupiny čtyř prvků na základě čtyřrohu jsme poznali, že v takové skupině (třebas bodů) $ABCD$ lze zaměniti dva prvky sdružené (na př. C a D), t. j. že platí $ABCD \barwedge ABDC$. Pomocí prvé z uvedených zde vět lze dokázati, že platí obráceně:

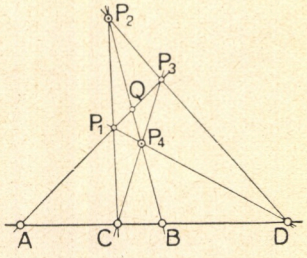
Jestliže skupina čtyř prvků je projektivní se skupinou, lišící se od ní jen pořádkem dvou prvků, je to skupina harmonická (v níž dotčené dva prvky jsou sdruženy).

Další dvě věty k hořejším prostorově duální (a navzájem v trsu duální) praví:

Dva projektivní svazky rovinové s různými osami se protínajícími, jejichž společná rovina odpovídá sobě samé, jsou perspektivní (podle roviny [středu]).

Dva projektivní svazky paprskové s týmž středem v různých rovinách, jejichž společný paprsek odpovídá sobě samému, jsou perspektivní (podle osy).

Všechny tyto věty lze shrnouti v jednu: *Dva projektivní útvary 1. řádu, jež náležejí témuž útvaru 2. řádu a jejichž společný prvek odpovídá sobě samému, jsou perspektivní.*[3])



Obr. 21.

K tomu budiž připomenuto, že dva projektivní útvary 1. řádu, náležejí-li témuž útvaru 3. řádu (a ne témuž útvaru 2. řádu), jsou vždy (osově) perspektivní; jsou to buď dvě řady bodové na mimoběžných přímkách nebo dva svazky rovin s mimoběžnými osami.

b) Na hořejších větách zakládá se *konstrukce projektivnosti* dvou základních útvarů jednomocných. Tím rozumíme udati způsob, jak k libovolnému prvku jednoho ze dvou útvarů, jejichž projektivnost je třemi dvojicemi sdružených prvků stanovena, sestrojiti prvek odpovídající.

Mějme na zřeteli dvě projektivní řady bodové (p, p') a (v rovině)

Neboť platí-li $ABCD \barwedge ABDC$, jest možno k bodům A, B, C, D řady bodové připojiti čtyřroh, jehož dvě dvojice protějších stran protínají se v bodě C resp. D a zbývající dvě strany jdou bodem A resp. B. Zvolíme-li totiž (obr. 21) přímku jdoucí bodem A a mimo ni bod P_2, můžeme $ABCD$ promítnouti na ni z P_2 do AQP_1P_3; platí pak (podle konstrukce) $ABCD \barwedge AQP_1P_3$, proto (jako důsledek tohoto a předpokladu) $AQP_1P_3 \barwedge ABDC$, tudíž podle hořejší věty $AQP_1P_3 \barwedge ABDC$, takže spojnice QB, P_1D a P_3C se protínají v jednom bodě (P_4): dvojice bodů A, B jest tedy harmonická k dvojici bodů C, D.

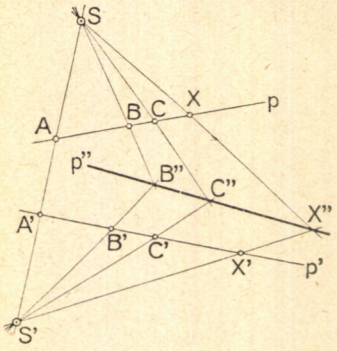
[2]) Pomocí hořejší věty (o řadách bodových) jest možno dokázati na př.: 1. Jestliže vrcholy každého z neomezeného počtu (rovinných) čtyrúhelníků leží na čtyřech pevných přímkách svazku a tři strany každého z nich jdou třemi pevnými body, procházejí i čtvrté strany jejich pevným bodem. (Větu tuto lze rozšířiti na úplný čtyřroh a na úplný n-roh; také na případ, kdy přímky patří svazku prostorovému. Platí ovšem i věta duální: o čtyrúhelníku, o úplném čtyrstranu a o úplném n-stranu.) 2. Je-li trojúhelník $A'B'C'$ vepsán trojúhelníku ABC, existuje neomezený počet trojúhelníků, opsaných trojúhelníku ABC a současně vepsaných trojúhelníku $A'B'C'$.

[3]) Je patrno, že perspektivní útvary 1. řádu (náležející témuž útvaru 2. řádu) vyznačují se mezi projektivními zvláštní polohou vzájemnou. Říkalo se proto útvarům perspektivním také *projektivní útvary v poloze perspektivní* (projektivním útvarům neperspektivním říkalo se pak projektivní v poloze šikmé).

duálně dva projektivní svazky paprskové (S, S') v téže rovině. Projektivnost prvních budiž stanovena body $ABC \barwedge A'B'C'$, projektivnost druhých paprsky $abc \barwedge a'b'c'$.

Jsou-li řady bodové nesoumístné a splývají-li dva body jedné dvojice dané, na př. A a A', jsou řady ty podle hořejší věty perspektivní. Sestrojíme střed perspektivnosti $S = (BB', CC')$; bod X', odpovídající bodu X, je průsečíkem spojnice SX s přímkou p'.

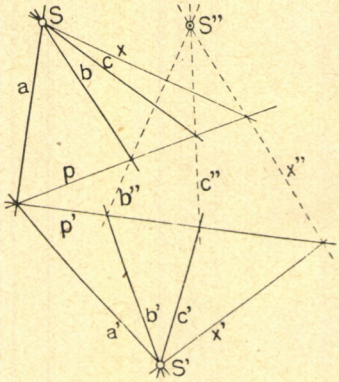
Jsou-li řady bodové nesoumístné a neperspektivní, přejdeme



Obr. 22.

Jsou-li svazky paprskové nesoumístné a splývají-li dva paprsky jedné dvojice dané, na př. a a a', jsou svazky ty podle hořejší věty perspektivní. Sestrojíme osu perspektivnosti $s = (bb', cc')$; paprsek x', odpovídající paprsku x, je spojnicí průsečíku sx se středem S'.

Jsou-li svazky paprskové ne-



Obr. 23.

u jedné i druhé řady k perspektivnímu svazku paprsků. Dva tyto svazky budou tedy navzájem projektivní; majíce pak volnost ve volbě jejich středů, zvolíme tyto tak, aby svazky byly perspektivní. Vedeme (obr. 22) dvěma body jedné dvojice dané (z níž jeden ani druhý bod není v průsečíku os obou řad) přímku, na př. AA', na ní zvolíme středy S a S'; svazky paprsků $S\,(ABC)$ a $S'\,(A'B'C')$ jsou perspektivní, protože, jsouce projektivní, mají společný paprsoumístné a neperspektivní, přejdeme u jednoho i druhého k perspektivním řadám bodovým. Dvě tyto řady budou tedy navzájem projektivní; majíce pak volnost ve volbě jejich os, zvolíme tyto tak, aby řady byly perspektivní. Určíme (obr. 23) průsečík jedné dané dvojice (z níž jeden ani druhý paprsek neprochází středy obou svazků), na př. aa', a vedeme jím dvě přímky p, p'; řady bodové $p\,(abc)$ a $p'\,(a'b'c')$ jsou perspektivní, protože, jsouce projektivní,

sek AA' sobě samému odpovídající. Sestrojíme osu perspektivnosti p'' obou svazků; je určena body $B'' = (SB, S'B')$, $C'' = (SC, S'C')$. K bodu X sestrojíme pak korespondující bod X' tím, že vedeme SX, určíme průsečík $X'' = (SX, p'')$, vedeme $S'X''$ a určíme průsečík $X' = (S'X'', p')$.[4]

Jsou-li řady bodové soumístné, promítneme jednu ze středu S, druhou z S', čímž úloha převedena na konstrukci sdružených paprsků dvou nesoumístných svazků.

mají společný bod aa' sobě samému odpovídající. Sestrojíme střed perspektivnosti S'' obou řad; je určen přímkami $b'' = (pb, p'b')$, $c'' = (pc, p'c')$. K paprsku x sestrojíme pak korespondující paprsek x' tím, že určíme px, vedeme $x'' = (px, S'')$, určíme $p'x''$ a vedeme spojnici $x' = (p'x'', S')$.

Jsou-li svazky paprskové soumístné, protneme jeden přímkou p, druhý přímkou p', čímž úloha převedena na konstrukci sdružených bodů dvou nesoumístných řad.

Důležité tyto konstrukce projektivních řad bodových a svazků paprskových provádějí se, jak patrno, pouhým pravítkem.

Sestrojení odpovídajících sobě rovin ve dvou svazcích rovinových s osami se protínajícími (nebo soumístnými), jejichž projektivnost je určena třemi dvojicemi korespondujících rovin, převádí se (řezem) na konstrukci projektivnosti dvou svazků paprskových v téže rovině s různými středy (nebo s týmž středem). Obdobně se redukuje sestrojení dvou projektivních svazků paprskových s týmž středem v různých rovinách (a také dvou svazků paprskových s různými středy v různých rovinách).

Abychom sestrojili projektivnost dvou řad bodových $ABC \barwedge A'B'C'$ na přímkách mimoběžných, jež jsou — jak víme — vždy osově perspektivní, stačí nalézti osu perspektivnosti jejich; vedeme spojnice AA', BB', CC' a sestrojíme přímku protínající tyto tři mimoběžky.[5] Obdobně u dvou projektivních (a tedy perspektivních) svazků rovin s osami mimoběžnými.

Jsou-li dva útvary, o jejichž projektivnost jde, různého druhu, převedeme napřed jeden z nich promítnutím nebo protnutím na útvar téhož druhu jako druhý.

c) Za středy S, S' dvou pomocných svazků paprskových jest možno v hořejší konstrukci projektivních nesoumístných řad bodových téže roviny zvoliti speciálně dva korespondující body řad těch (S ovšem na p', S' na p); obdobně v případě duálním. Odtud vyvodíme věty:

---

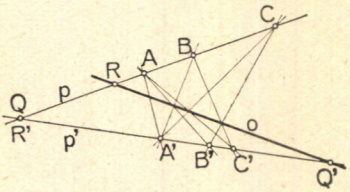
[4]) Speciálně můžeme voliti středy S a S' pomocných svazků v průsečících (AA', BB') resp. (AA', CC'); osou perspektivnosti je pak spojnice $B'C$. A duálně.

[5]) Jiná konstrukce projektivnosti nesoumístných řad bodových s osami se protínajícími nebo mimoběžnými byla uvedena v čl. 12*b* (na druhém místě; zvoleny tam pomocný střed a pomocná osa).

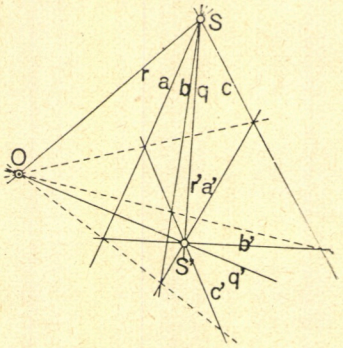
Jsou-li v rovině (obr. 24) *dvě projektivní řady bodové nesoumístné* $ABCD \ldots \overline{\wedge} A'B'C'D' \ldots$ *(na přímkách* p, p'*), leží body* $(AB', A'B), (AC', A'C), \ldots, (BC', B'C), \ldots$ *na téže přímce* o*, jež protíná* p (p') *v bodě, odpovídajícím průsečíku* pp' *v* p' (p).

Jsou-li v rovině (obr. 25) *dva projektivní svazky paprskové nesoumístné* $abcd \ldots \overline{\wedge} a'b'c'd' \ldots$ *(se středy* S, S'*), procházejí přímky* $(ab', a'b), (ac', a'c), \ldots, (bc', b'c), \ldots$ *týmž bodem* O*, jehož spojnice s bodem* S (S') *odpovídá spojnici* SS' *ve svazku* S' (S).

Větu o řadách dokážeme takto: Svazky A' $(ABCD \ldots)$ a A $(A'B'C'D' \ldots)$ jsou projektivní, promítajíce projektivní řady; jsou nadto perspektivní, mající společný paprsek AA' samodružný. Proto leží body $(A'X, AX')$ na téže přímce o, ose perspektivnosti obou svazků. Průsečík pp' označme Q, čítáme-li jej do řady na p, ale R',



Obr. 24.



Obr. 25.

jestliže jej čítáme do řady na p'. Bodu Q odpovídá průsečík $op' = Q'$, protože $A'Q$ a AQ' se musí protínati na o; z téhož důvodu jest průsečík $op = R$ bodem odpovídajícím bodu R'. Zvolíme-li pak středy pomocných svazků místo v A', A v bodech B', B, musí ležeti na jedné přímce body $(B'X, BX')$. Tato přímka je však totožná s přímkou o prve nalezenou, majíc s ní společné body $(A'B, AB')$, R a Q'.

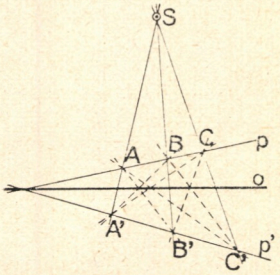
Přímka, na níž leží průsečíky spojnic XY' a $X'Y$ dvou libovolných bodů obou projektivních řad bodových a dvou bodů jim odpovídajících, sluje *osou projektivnosti* (nebo osou kolineace) řad těch. Duálně bod, jímž procházejí spojnice průsečíků xy' a $x'y$ dvou libovolných paprsků obou projektivních svazků paprskových a dvou paprsků jim odpovídajících, sluje *středem projektivnosti* (nebo středem kolineace) svazků těch.[6])[7])

[6]) Osa projektivnosti daných dvou projektivních řad bodových (nesoumístných) v téže rovině nezávisí tedy na volbě středů pomocných svazků perspektivních, jsouc určena neproměnnými body Q' a R; duálně střed projektivnosti daných dvou projektivních svazků paprskových je jimi samým i určen.

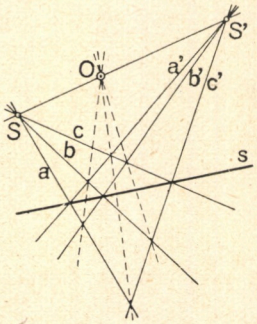
[7]) Jsou-li speciálně dvě projektivní řady bodové na přímkách p a p' perspektivní (podle středu S), prochází osa projektivnosti o průsečíkem

Podle věty právě dokázané můžeme při konstrukci projektivnosti nesoumístných řad bodových (svazků paprskových) s výhodou postupovati tak, že určíme napřed osu (střed) projektivnosti obou řad (svazků).

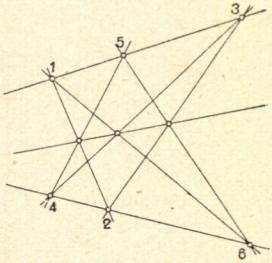
d) Jsou-li dány na dvou různých přímkách v rovině pouze tři dvojice bodů ABC, $A'B'C'$, lze hořejší větu vysloviti o průsečících spojnic těchto bodů: body $(AB', A'B)$, $(BC', B'C)$, $(CA', C'A)$ leží na přímce. Avšak body ty v pořadí $AB'CA'BC'$ určují (jednoduchý) šestiúhelník, jehož vrcholy leží střídavě na dvou přímkách p, p' (vrcholy



Obr. 26.



Obr. 27.



Obr. 28.

lichého čísla pořadového na p, sudého na p'), a jehož protější strany protínají se v bodech téže přímky o. Obdobně při větě duální. Proto:

Leží-li vrcholy (jednoduchého) *šestiúhelníku střídavě na dvou přímkách, leží tři průsečíky protějších stran jeho na třetí přímce.*

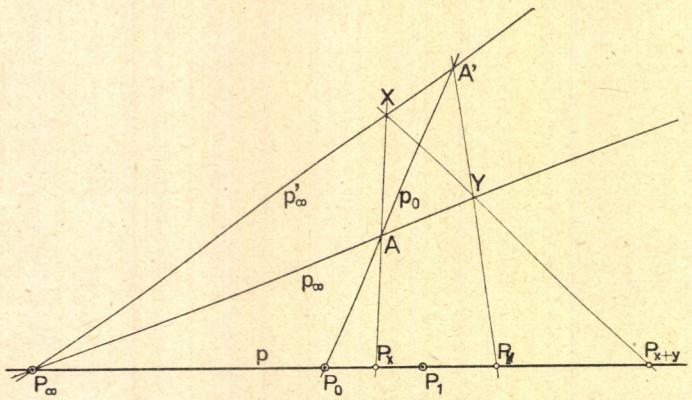
Procházejí-li strany (jednoduchého) *šestiúhelníku střídavě dvěma body, procházejí tři spojnice protějších vrcholů jeho třetím bodem.*[8])[9])

jejich os pp' a sluje *pólarou* bodu S vzhledem k dvojici přímek p a p' (obr. 26; jest geometrickým místem bodů harmonicky sdružených s bodem S vzhledem k paprskům p a p', t. j. bodů harmonicky oddělujících spolu s bodem S na paprscích svazku o středu S průsečíky jejich s přímkami p a p', o čemž svědčí čtyřroh, tvořený dvojicemi takových průsečíků). Duálně jsou-li dva projektivní svazky paprskové se středy S a S' perspektivní (podle osy s), leží střed projektivnosti O na spojnici jejich středů SS' a sluje *pólem* přímky s vzhledem k dvojici bodů S a S' (obr. 27). Na tom lze založiti konstrukci (pravítkem) spojnice daného bodu s nepřístupným průsečíkem dvou daných přímek (a konstrukci duální).

[8]) Věta na levé straně sluje *Pappova* (protože ji znal již *Pappos*) nebo *speciální Pascalova*. Příslušná konfigurace (*Pappova* nebo *Pascalova*, obr. 28) má symbol $\left|\begin{smallmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 9 \end{smallmatrix}\right|$ (čili stručně 9_3); jest dávno známa (konfigurací typu 9_3 jsou však možny celkem tři druhy; viz na př. *F. Levi*, Geometrische Konfigurationen, p. 102). Jednoduchý šestiúhelník, jehož tři dvojice protějších stran se protínají v bodech řady, sluje také *Pascalův* (osa řady pak přímkou Pascalovou); jednoduchý šestiúhelník, jehož tři dvojice protějších vrcholů leží (duálně) na paprscích svazku, sluje *Brianchonův* (střed svazku pak bodem Brianchonovým).

19. Zavedení souřadnic. Mezi body řady bodové a (reálnými) čísly můžeme ustanoviti korespondenci obapolně jednoznačnou (aby daným bodem určeno bylo jediné číslo, daným číslem pak jediný bod) a zavésti tím pro body čísla jim odpovídající jako jejich souřadnice.

a) Zvolme na přímce p *tři různé body základní* P_∞, P_0, P_1.[1]) Ke dvěma bodům P_x a P_y nalezneme *součtový* bod $P_x + P_y = P_{x+y}$ takto



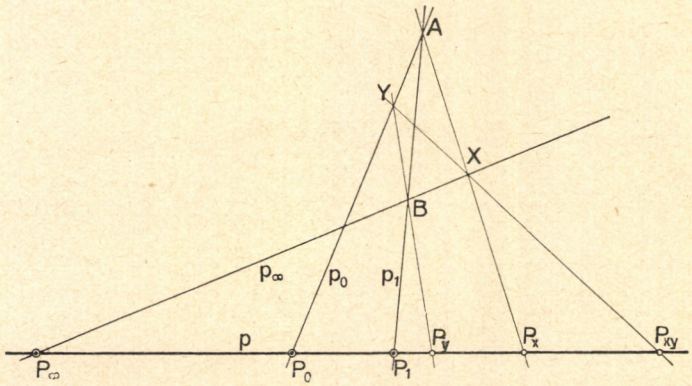
Obr. 29.

(obr. 29): V rovině jdoucí přímkou p vedeme bodem P_∞ dvě přímky p_∞ a p'_∞, bodem P_0 pak přímku p_0, jež protne p_∞ v bodě A, p'_∞ v bodě A'. Vedeme přímku P_xA, jež protne p'_∞ v bodě X, a přímku P_yA', jež protne p_∞ v bodě Y; přímka XY protne p v bodě P_{x+y}. Takto definovaná konstrukce bodu součtového má všechny vlastnosti aritmetického sčítání: Bod P_{x+y} určen je body P_x a P_y jednoznačně, protože je ve čtyřrohové skupině bodů (při čtyřrohu $AA'XY$) k bodům P_∞, P_0, P_x a P_y bodem zbývajícím; výjimku činí jen dvojice P_∞ a P_∞. Platí spe-

[9]) Při platnosti postulátů o incidenci a uspořádání prvků jest možno (podle *Hilberta*) sestrojiti abstraktní *geometrii nepaskalskou*, v níž věta Pappova (speciální Pascalova) neplatí. Tuto větu, vyplývající zde ze základní věty o projektivnosti, dlužno odvoditi pomocí nějakého (třebas užšího) postulátu o spojitosti (nebo pomocí základní věty o projektivnosti, přijaté za postulát); lze však obráceně základní větu o projektivnosti dokázati (z věty Desargovy a) z věty Pappovy bez postulátu o spojitosti (viz na př. *Schur*, Grundlagen der Geometrie, p. 48; *Whitehead*, The axioms of projective geometry, p. 19). Význam věty Pappovy vůči větě Desargově vysvítá odtud, že (při platnosti jen postulátů o incidenci prvků) nelze sice onu odvoditi z této, obráceně však ano; viz *G. Hessenberg*, Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen, Math. Annalen 61 (1905), a téhož Grundlagen der Geometrie, p. 74 a n.

[1]) Tři základní body jsou označeny indexy 0, 1 a ∞ se zřetelem ke svému významu v uvažované korespondenci, podle nich pak dále přímky jimi procházející; neznačí zde tedy symbol ∞ bodu v nekonečnu (leda v elementární soustavě souřadnic).

ciálně $P_x + P_0 = P_x$, $P_x + P_\infty = P_\infty$ (kde $P_x \neq P_\infty$), jak se přesvědčíme, volíce za P_y bod P_0 resp. P_∞. Platí zákon komutativní, t. j. $P_x + P_y = P_y + P_x$, protože strany čtyřrohů, příslušných k dvojicím P_x, P_y a P_y, P_x, mají společných pět průsečíků na p. Platí konečně zákon asociativní, t. j. $(P_x + P_y) + P_z = P_x + (P_y + P_z)$, protože užívajíce pevných dvou přímek p_∞, p'_∞ a dvou přímek p_0, p'_0 (druhou



Obr. 30.

přímku p'_0 vedeme body P_0 a Y) dojdeme oběma postupy k téže přímce XZ a tedy k témuž bodu na p.

Bod *rozdílový* k bodům P_z a P_x, totiž $P_z - P_x = P_{z-x}$, nalezneme cestou obrácenou: Vedeme jako prve p_∞, p'_∞ a p_0, potom vedeme P_xA, jež protne p'_∞ v X, a P_zX, jež protne p_∞ v Y; $A'Y$ protne p v P_{z-x}. Bod P_{z-x} je jednoznačně určen vyjma případ, kdy dány jsou body P_∞ a P_∞. Speciálně platí $P_x - P_x = P_0$ (kde $P_x \neq P_\infty$).

Ke dvěma daným bodům P_x a P_y nalezneme *součinový* bod $P_x \,.\, P_y = P_{xy}$ touto konstrukcí (obr. 30): V rovině jdoucí přímkou p vedeme bodem P_∞ přímku p_∞, bodem P_0 přímku p_0 a bodem P_1 přímku p_1, jež protne p_0 v bodě A, p_∞ v bodě B. Vedeme přímku P_xA, jež protne p_∞ v bodě X, přímku P_yB, jež protne p_0 v bodě Y; přímka XY protne p v bodě P_{xy}. Bod součinový, ke kterému dospějeme uvedenou konstrukcí, má všechny vlastnosti aritmetického součinu: Bod P_{xy} je určen jednoznačně vyjma případ, kdy dané body jsou P_0 a P_∞ (neboť je ve čtyřrohové skupině bodů při čtyřrohu $ABXY$ šestým bodem k bodům P_∞, P_0, P_1, P_x a P_y). Platí speciálně $P_x \,.\, P_1 = P_x$, $P_x \,.\, P_0 = P_0$ (kde $P_x \neq P_\infty$), $P_x \,.\, P_\infty = P_\infty$ (kde $P_x \neq P_0$). Platí zákon komutativní, t. j. $P_x \,.\, P_y = P_y \,.\, P_x$; neboť z konstrukce plyne $P_\infty P_0 P_1 P_x \barwedge P_\infty P_0 P_y P_{xy}$ (promítneme-li prvou skupinu z bodu A na přímku p_∞, tento průmět pak z Y na p) a $P_\infty P_0 P_1 P_y \barwedge P_\infty P_0 P_x P_{xy}$ (promítneme-li prvou skupinu z bodu B na přímku p_0, průmět ten z X na p); zamění-

me-li v druhé relaci x a y, dostaneme $P_\infty P_0 P_1 P_x \frown P_\infty P_0 P_y P_{yx}$, což spojeno s prvním vztahem projektivním dává $P_\infty P_0 P_y P_{xy} \frown P_\infty P_0 P_y P_{yx}$; odtud podle základní věty o projektivnosti vyplývá $P_{xy} = P_{yx}$.[2]) Platí zákon asociativní, t. j. $(P_x \,.\, P_y) \,.\, P_z = P_x \,.\, (P_y \,.\, P_z)$, protože užívajíce při konstrukcích pevných přímek p_∞, p_0 a dvou přímek p_1, p'_1 ($p'_1 = P_1 Y$), dospějeme v obou případech k témuž bodu. Platí konečně zákon distributivní, t. j. $(P_x + P_y) \,.\, P_z = P_x \,.\, P_z + P_y \,.\, P_z$, jak poznáváme z příslušných konstrukcí.

Bod *podílový* k bodům P_z a P_x, totiž $P_z : P_x = P_{z:x}$, obdržíme zase postupem obráceným: Vedeme p_∞, p_0 a p_1, potom vedeme $P_x A$, jež protne p_∞ v X, a $P_z X$, jež protne p_0 v Y; přímka BY protne p v bodě $P_{z:x}$. Bod podílový $P_{z:x}$ je jednoznačně určen vyjma dva případy, kdy dané body jsou P_0 a P_0 nebo P_∞ a P_∞. Speciálně platí $P_x : P_x = P_1$, $P_0 : P_x = P_0$, $P_\infty : P_x = P_\infty$ (kde $P_x \neq P_0, P_\infty$) a pod.

Uvedené konstrukce ukazují, že při zvolených třech bodech základních P_∞, P_0, P_1 můžeme ke každé dvojici bodů, vyjímaje případy vytčené, připojiti jediný další bod, jehož index je součtem, rozdílem, součinem nebo podílem indexů bodů daných.

b) Mějme na zřeteli body P_0 a P_1: popsanými konstrukcemi lze dospěti k bodu $P_1 + P_1$, který označíme P_2, dále k bodu $P_2 + P_1$ čili P_3 atd., také však k bodu $P_0 - P_1$ čili P_{-1}, $P_0 - P_2$ čili P_{-2} atd., potom k bodu $P_1 : P_2$ čili $P_{\frac{1}{2}}$, $P_1 : P_3$ čili $P_{\frac{1}{3}}$ atd., zkrátka ke všem bodům, jejichž indexy jsou čísla racionální. Tím způsobem lze tedy sestrojiti stupnici s indexy racionálními, tedy *racionální stupnici* bodů na přímce (určenou základními body P_∞, P_0, P_1): každému racionálnímu číslu danému přísluší v ní jediný bod a každému bodu jejímu (vyjma bod P_∞) přísluší jediné číslo racionální (index bodu toho.)[3]) Tuto obapolně jednoznačnou korespondenci mezi body a čísly racionálními rozšíříme použitím aritmetické definice čísel iracionálních a postulátu III. o spojitosti řady bodové na čísla a body iracionální.[4]) Řada bodů na přímce

[2]) K důkazu platnosti tohoto zákona je nutno užíti základní věty o projektivnosti. Bylo totiž ukázáno, že komutativní zákon při násobení je ekvivalentní větě Pappově (*Hilbert*, Grundlagen der Geometrie) nebo také základní větě o projektivnosti.

[3]) Uvedené konstrukce, jimiž bylo dosaženo racionální stupnice, určené body P_∞, P_0 a P_1, vedou vždy k poslednímu bodu skupiny čtyřrohové; o těchto však víme, že jsou všechny obsaženy v racionální soustavě $R\,(P_\infty P_0 P_1)$, vyvozené (podle čl. 16) z bodů P_∞, P_0 a P_1 konstrukcemi čtvrtých bodů harmonických. Protože také obráceně všechny body racionální soustavy $R\,(P_\infty P_0 P_1)$ mají, jak plyne z jejich vzniku a z analytického vyjádření harmonické skupiny (viz dále), souřadnice racionální, jest racionální stupnice bodů na přímce totožná s racionální soustavou bodů, prve nalezenou; odtud také jméno oné soustavy.

[4]) T. j. daný bod uspořádané řady, jenž nepatří do stupnice racionální, dělí body této stupnice a tedy racionální čísla jim příslušná ve dvě třídy (známých vlastností), jimiž je definováno číslo iracionální (t. zv. řezem Dedekindovým); toto číslo přísluší danému bodu. Obráceně číslu iracionálnímu, danému dvěma třídami čísel racionálních, odpovídá v uspořádané

objevuje se takto shodou v základních zákonech (o sčítání, násobení a operacích inversních) abstraktně ekvivalentní se soustavou všech čísel (reálných); vyloučen je pouze bod P_∞. I nazveme číslo příslušné k bodu, jeho index, *souřadnicí bodu* toho (nebo *parametrem* jeho);[5]) připisuje se často k jeho značce do závorek. Co bylo uvedeno o bodech řady, platí (podle zákona duálnosti) o prvcích základního útvaru jednomocného vůbec. Tuto korespondenci mezi body základního útvaru a čísly nazýváme *soustavou souřadnic*; body (prvky) P_∞, P_0 a P_1 slují základem soustavy souřadnic: bod P_0 má souřadnici 0, P_1 souřadnici 1, P_∞ nemá určité souřadnice, leda symbol ∞ (obvyklého významu).[6]) Tedy:

Zvolíme-li tři body (prvky) *základní* P_∞, P_0 a P_1, *jest možno mezi body na přímce* (mezi prvky základního útvaru jednomocného) *a reálnými čísly ustanoviti korespondenci obapolně jednoznačnou, z níž však je vyloučen bod* (prvek) P_∞; *číslo bodu* (prvku) *odpovídající sluje jeho* (nehomogenní) *souřadnicí.*[7])

c) Vyloučení jednoho bodu P_∞ nesrovnává se s povahou geometrie projektivní. Proto zavedeme pozměněnou soustavu souřadnic tím, že bodu přiřadíme dvojici čísel x_1, x_2 tak, aby pro každý bod o souřadnici x (vyjma tedy bod P_∞) platilo $x = \frac{x_1}{x_2}$; bodu P_∞ přisoudíme pak dvojici čísel, jejíž druhý člen je 0 a první má libovolnou hodnotu od nuly různou. I bude každému bodu bez výjimky příslušeti jediná dvojice (konečných) čísel (x_1, x_2), při čemž dvojice $(\varrho x_1, \varrho x_2)$, kde $\varrho \neq 0$ je libo-

řadě bodové (podle postulátu III.) bod, určený dvěma třídami bodů racionálních k oněm příslušnými.

[5]) Z konstruktivního zavedení souřadnic je spolu patrno, že ustanovená korespondence mezi body a čísly jest nejen obapolně jednoznačná, nýbrž i spojitá (jak tomu u soustavy souřadnic býti musí).

[6]) Elementům řady bodové (a základního útvaru jednorozměrného vůbec) můžeme přiřaditi čísla jako souřadnice také tímto (speciálnějším) způsobem: Tři různé body (základní) označíme ∞, 0, 1. Vycházejíce od nich označíme čtvrtý bod, harmonický k bodu k vzhledem k bodům ∞ a $k + 1$, číslem $k + 2$ (kde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$); čtvrtý bod, harmonický k bodu $k + 1$ vzhledem k ∞ a k, označíme pak $k - 1$ (kde $k = 0, -1, -2, -3, \ldots$). Tak obdržíme všechny body, jejichž souřadnice jsou čísla celá, kladná nebo záporná (*harmonická stupnice* čísel celých). K bodům o souřadnicích ∞, 0, q v druhé řadě bodové učiníme projektivními body o souřadnicích ∞, p, $p + 1$ řady dané; v této projektivnosti odpovídají bodům s čísly 1, 2, 3, . . ., $q - 1$ druhé řady body s čísly $p + 1/q$, $p + 2/q$, $p + 3/q$, . . ., $p + (q - 1)/q$ v řadě dané (harmonická stupnice čísel racionálních). Ostatním bodům přiřadíme čísla iracionální obvyklým způsobem. (Viz na př. *F. Amodeo*, Geometria proiettiva; srv. *R. Paolis*, Sui fondamenti della geometria proiettiva, Memorie Accad. Lincei (3) 9, 1881.)

[7]) Rozdíl (nehomogenních) projektivních souřadnic $x_2 - x_1$ dvou prvků X_1 a X_2 základního útvaru jednomocného byl nazván *projektivní vzdáleností* prvků těch (vzhledem k prvku P_∞); jest zobecněním vzdálenosti metrické.

volné číslo, nepokládáme za různé; obráceně každé dvojici (x_1, x_2), vyjímaje dvojici $(0, 0)$, bude příslušeti jediný bod.

Zvolíme-li tři body (prvky) *základní, jest možno mezi všemi body na přímce* (mezi prvky základního útvaru jednomocného) *a dvojicemi reálných čísel* (vyjma dvojici 0, 0) *ustanoviti korespondenci obapolně jednoznačnou; dvě čísla bodu* (prvku) *odpovídající* x_1, x_2 (také dvě čísla ϱx_1, ϱx_2, kde $\varrho \neq 0$) *slují homogenní souřadnice bodu* (prvku) *toho.*

Speciálně bod (prvek) P_0 má homogenní souřadnice $(0, 1)$ (nejjednodušeji místo $(0, x_2)$ s podmínkou $x_2 \neq 0$), P_∞ má homogenní souřadnice $(1, 0)$ (místo $(x_1, 0)$ při $x_1 \neq 0$), P_1 konečně $(1, 1)$.[8][9])

Protože soustava souřadnic je stanovena třemi prvky a k trojici prvků lze zvoliti kterékoli tři prvky za projektivní, čímž projektivnost jest už určena, je patrno, že (nehomogenní i homogenní) souřadnice tak zavedené se nemění u projektivních prvků v projektivnosti, v níž sobě odpovídají základní prvky téhož indexu. Proto slují *souřadnice* tyto *projektivní*.[10])[11])[12])

---

[8]) Užíváme-li souřadnic nehomogenních, leckdy pohodlnějších, přisuzujeme prvku P_∞ souřadnici ∞ ve smyslu zde uvedeném.

[9]) Prvky $(1, 0)$ a $(0, 1)$ nazývají se také *základními* (v užším smyslu, nebo počátečními) prvky soustavy souřadnic, prvek $(1, 1)$ prvkem *jednotkovým.*

[10]) Že analytickou metodu lze v projektivní geometrii založiti způsobem ryze projektivním (bez pojmů metrických), poznal po prvé *Staudt* (Beiträge zur Geometrie d. Lage 2, 1857) a provedl svou algebrou čtveřin bodových (Würfe); v tom směru pokračovali *W. Fiedler* a *J. Lüroth.* Zavedení souřadnic zjednodušili a vzhledem k základům geometrie objasnili *D. Hilbert, Th. Vahlen, F. Schur* (Über die Grundlagen der Geometrie, Math. Annalen 55, 1902), *G. Hessenberg* (Über einen geometrischen Calcül, Acta math. 29, 1905); viz také obšírná pojednání *O. Hölder,* Die Zahlenskala auf der projektiven Geraden und die independente Geometrie dieser Geraden, Math. Annalen 65 (1908), a Streckenrechnung und projektive Geometrie, Sitzungsberichte Akad. Leipzig 63 (1911); dále *Veblen* a *Young,* Projective geometry I; *Whitehead,* The axioms of projective geometry; a některé jiné publikace o základech geometrie projektivní.

Ryze analyticky lze soustavu projektivních homogenních souřadnic zavésti pro projektivní numerickou přímku a jednorozměrný prostor toho druhu vůbec; viz na př. *G. Scorza,* Geometria analitica, p. 481 a n.

[11]) Metrickou soustavu souřadnic pro řadu bodovou dostaneme z uvedené projektivní soustavy, jestliže za bod P_∞ zvolíme bod v nekonečnu, P_0 zvolíme za počátek a (pro násobení i dělení) vzdálenost bodu P_1 od P_0 za jednotku délky. Popsané konstrukce bodu součtového a součinového (a odtud bodu rozdílového a podílového) redukují se (tím, že přímky p_∞ a p'_∞ se stanou rovnoběžnými k p) na obvyklé sčítání a násobení (resp. odčítání a dělení) úseček (se zřetelem ke smyslu), vzdáleností totiž bodů P_x, P_y, ... od bodu P_0 (obr. 31 a 32). Lze ovšem tyto výkony početní s úsečkami prováděti při daných rovnoběžkách pouhým pravítkem.

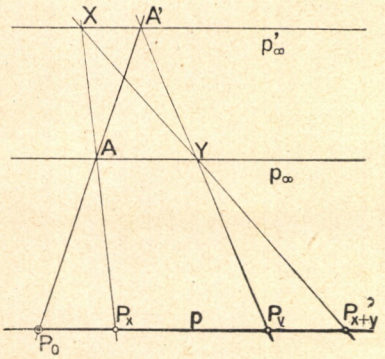
Jednodušeji jest možno zavésti souřadnice v základních útvarech jednorozměrných na podkladě metrickém. V řadě bodové (vlastní) zvolíme za tím účelem určitý z obou smyslů (postupu) za kladný, určitý bod O za počátek a určitou jednotku délkovou; jmenujeme pak souřadnicí (úsečkou) obecného bodu P jeho *vzdálenost* $x = \overline{OP}$, měřenou od počátku zvolenou

20. Rovnice projektivnosti. *a*) Projektivnost mezi dvěma řadami bodovými (základními útvary prvního řádu vůbec) je jednoznačně určena třemi dvojicemi korespondujících prvků

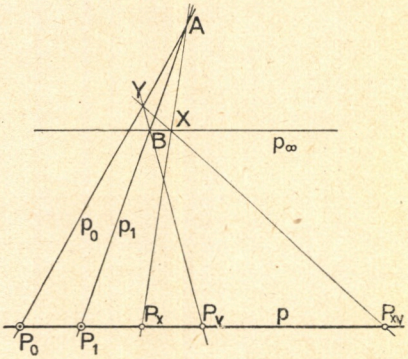
$$ABC \barwedge A'B'C'.$$

Jestliže v prvním útvaru zvolíme prvky A, B, C, jež předpokládáme různé, za P_∞, resp. P_0, resp. P_1, jest každý další prvek X stanoven svou souřadnicí x vzhledem k těmto třem. Obdobně v druhém útvaru, zvolíme-li různé prvky A', B', C' resp. za P'_∞, P'_0, P'_1, jest prvek X' dán

jednotkou se zřetelem ke smyslu. Tím je uskutečněna obapolně jednoznačná korespondence mezi body řady bodové (vyjma bod nevlastní)



Obr. 31.



Obr. 32.

a reálnými čísly x. Ve svazku paprskovém (vlastním) zvolíme obdobně jeden z obou smyslů (otáčení) za kladný, jeden paprsek (celý) o za počáteční a jednotku míry pro odchylku dvou paprsků (nejčastěji radián); poloha obecného paprsku (celého) p je pak určena úhlem jeho $\widehat{op}$, měřeným od o zvolenou jednotkou se zřetelem ke smyslu (při čemž všem paprskům odpovídají úhly od $-\frac{1}{2}\pi$ do $+\frac{1}{2}\pi$), za souřadnici paprsku p však volíme tangens tohoto úhlu $x = \operatorname{tg} \widehat{op}$. Tím je zavedena obapolně jednoznačná korespondence mezi paprsky svazku (vyjma paprsek kolmý k počátečnímu) a reálnými čísly x. Pro svazek rovinový (vlastní) zavádíme tytéž souřadnice jako pro svazek paprskový, který z rovinového dostaneme v průseku rovinou, kolmou k jeho ose.

Obecnější soustavu souřadnic obdržíme, vyjdeme-li od dvou prvků základních. V řadě bodové zvolíme dva různé body A a B za základní; obecnému bodu P pak přiřadíme *dělicí poměr* jeho $\lambda = AP/BP$, který píšeme stručně (ABP). Při tom nesejde, jak patrno, na volbě kladného smyslu v řadě bodové ani na jednotce míry. Bodům mezi A a B odpovídají záporná λ, bodům před A a za B kladná λ; spec. bod A má $\lambda = 0$, protože $(ABA) = 0$; protože pak $(ABP) = \dfrac{AB + BP}{BP} = 1 + \dfrac{AB}{BP}$, platí $(ABB) = \pm\infty$, t. j. bod B má $\lambda = \pm\infty$; bod v nekonečnu má pak $\lambda = 1$, jak vyplývá z téže úpravy. Bodu spějícímu v řadě bodové od B do A a odtud přes bod v nekonečnu zpět do B odpovídá tedy jediné číslo rostoucí od $-\infty$

svou souřadnicí x'. A prvek X' v druhém útvaru odpovídá danou projektivností prvku X útvaru prvého tehdy a pouze tehdy, jestliže platí

$$x' = x.$$

To je tedy *rovnice projektivnosti* mezi dvěma základními útvary jednomocnými, jestliže základní prvky soustavy souřadnic v obou útvarech sobě odpovídají (prvku P_∞ prvek P'_∞, prvku P_0 prvek P'_0 a konečně prvku P_1 prvek P'_1).

---

k 0 a odtud přes 1 k $+\infty$; naopak (reálnému) číslu λ odpovídá jediný bod P, o němž platí $BP = \frac{AB}{\lambda - 1}$. Souvislost dělicího poměru λ (při základních bodech o souřadnicích a, b) s hořejší souřadnicí x je pak vyjádřena rovnicemi $\lambda = \frac{x-a}{x-b}$, $x = \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda}$. Obdobně ve svazku paprskovém zvolíme dva základní paprsky a, b; obecný paprsek p pak určujeme poměrem sinů úhlů jeho s paprsky základními: $\lambda \equiv (abp) = \frac{\sin ap}{\sin bp}$. V jednom z obou vedlejších úhlů, sevřených paprsky a, b (ke každému z nich jest čítati také úhel vrcholový), jest λ záporné, v druhém kladné; průběh poměru λ je obdobný jako u řady bodové. Zcela podobně ve svazku rovin.

Konečně soustavu souřadnic projektivních obdržíme na uv. podkladě takto: V základním útvaru jednomocném zvolíme tři různé prvky A, B, C (resp. a, b, c, resp. α, β, γ) za základní; obecnému prvku P (resp. p, resp. π) přiřadíme jako souřadnici číslo ξ, udávající poměr dělicích poměrů prvku třetího C (c; γ) vzhledem k prvním dvěma A, B (a, b; a, β) a prvku daného P (p; π) vzhledem k týmž dvěma, tedy $\xi = (ABC) : (ABP)$, resp. $(abc) : (abp)$, resp. $(\alpha\beta\gamma) : (\alpha\beta\pi)$. Tento poměr poměrů $\frac{AC}{BC} : \frac{AP}{BP}$, resp. $\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ap}{\sin bp}$, resp. $\frac{\sin \alpha\gamma}{\sin \beta\gamma} : \frac{\sin \alpha\pi}{\sin \beta\pi}$ sluje *dvojpoměr* čtyř prvků a značí se stručně $(ABCP)$, resp. $(abcp)$, resp. $(\alpha\beta\gamma\pi)$.

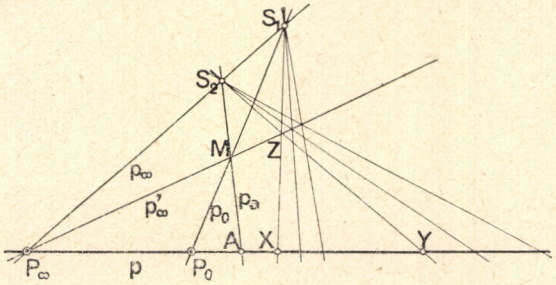
Že dvojpoměr takto definovaný jako souřadnice čtvrtého bodu (paprsku, roviny) vzhledem ke třem základním je projektivní, spočívá na větě: Dvojpoměr čtyř bodů A, B, C, P v řadě rovná se dvojpoměru čtyř paprsků a, b, c, p ve svazku, body ty promítajících. Její metrický důkaz lze vésti užitím věty sinové: $(ABC) = k \,.\, (abc)$, $(ABP) = k \,.\, (abp)$, kde $k = \frac{\sin bn}{\sin an}$, je-li n nosič řady bodové; odtud plyne $(ABCP) = (abcp)$. Prvkům P ležícím v téže části útvaru, prvky A a B na dva díly rozděleného, jako C přísluší kladná ξ, prvkům P ležícím v druhé části útvaru pak ξ záporná. Vzhledem k spec. hodnotám dělicího poměru přísluší k $P = A$ souřadnice $\xi = \pm\infty$, k $P = B$ souřadnice $\xi = 0$, k $P = C$ konečně souřadnice $\xi = 1$. Prvku P, probíhajícímu celý útvar ve smyslu ABC (od A zpět do A), odpovídá jednoznačně souřadnice ξ rostoucí od $-\infty$ do $+\infty$; naopak číslu ξ odpovídá jednoznačně prvek P, určený dělicím poměrem $\lambda = (ABP) \equiv \frac{(ABC)}{\xi}$. Jestliže body A, B, C mají obyčejné souřadnice (úsečky) a, b, c, souvisí projektivní souřadnice bodu P s jeho úsečkou x vztahem $\xi = \frac{c-a}{c-b} : \frac{x-a}{x-b}$. Souřadnice dvojpoměrové pro řadu bodovou nezávisí ani na volbě smyslu řady bodové ani na jednotce míry ani konečně na volbě počátku (pro úsečky a, b, c, x); obdobně u svazků.

b) Jestliže však základ souřadnic v obou projektivních útvarech zvolíme libovolně, jest rovnice jejich projektivnosti obecnější. Abychom ji nalezli, všimněme si tří speciálních projektivností v řadě bodové (mezi dvěma soumístnými řadami bodů).

Na přímce p se základními body P_∞, P_0, P_1 zvolme další bod $A(a)$, kde $a \neq \pm\infty$, a sestrojme (podle čl. 19*a*) k bodu $X(x)$ bod $Y(y)$ tak, aby platilo

$$y = x + a.$$

Řada bodů X na p (obr. 33) je perspektivní k řadě bodů Z na p'_∞ podle



Obr. 33.

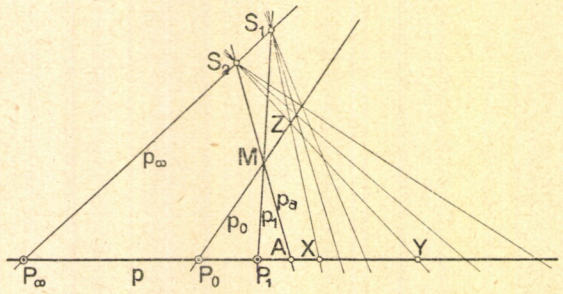
Jednoznačná korespondence v úvaze vytčená jest porušena u čísel v případě dělicího poměru jenom pro prvek B (b, β), v případě dvojpoměru pouze pro prvek A (a, α). Tuto závadu odstraníme tím, že zavedeme místo souřadnic nahoře uvedených souřadnice homogenní (dvojice čísel); téhož výsledku (vzhledem k prvkům vyloučeným, jimž se pro úplnost jednoduše, ale nepřesně, přisuzuje souřadnice ∞) docílíme touto cestou i u souřadnic prvního druhu.

Projektivní souřadnice zavedl metrickým způsobem první *Möbius* (1827), homogenní pak *Möbius* a *Plücker*.

Metrickou specialisací dostaneme z projektivních souřadnic $\xi = (ABCP)$ opět obě jednodušší soustavy prve uvedené: Je-li totiž v řadě bodové bod C v nekonečnu, jest $\xi = \frac{BP}{AP}$, jest to tedy dělicí poměr bodu P vzhledem k základním bodům B a A; je-li bod A v nekonečnu, jest $\xi = \frac{BP}{BC}$, t. j. úsečka bodu P vzhledem k počátku B při jednotce délky BC. U svazku paprskového pak obdržíme obdobně z uvedeného dvojpoměru, zvolíme-li za c osu úhlu ab (tak, aby úhly ac, bc se doplňovaly na π), dělicí poměr $\frac{\sin bp}{\sin ap}$; zvolíme-li mimo to úhel ab pravý, objeví se souřadnice $\operatorname{tg} bp$. Ovšem také u svazku rovinového.

[12]) O základech geometrického počtu v projektivní geometrii jednají *L. Silberstein*, Projective vector algebra, 1919 (projektivní tvar počtu vektorového; viz také *J. Vojtěch*, O základech geometrie projektivní, Jub. sborník techn. v Brně, 1924); (o založení počtu bodového) *W. Richter*, Das Rechnen mit Punktgrößen im projektiven und nichteuklidischen Raume, Archiv Math. Phys. (3) 28 (1920); *G. Schollmeyer*, Die arithmetischen Grundlagen der projektiven Geometrie, Jahresbericht Deut. Math. Ver. 37 (1928).

středu $S_1 = p_0 p_\infty$, tato pak perspektivní k řadě bodů Y na p podle středu $S_2 = p_\infty p_a$, kde $p_a = AM$ a $M = p_0 p'_\infty$. Je tedy řada bodů Y projektivní k řadě bodů X.

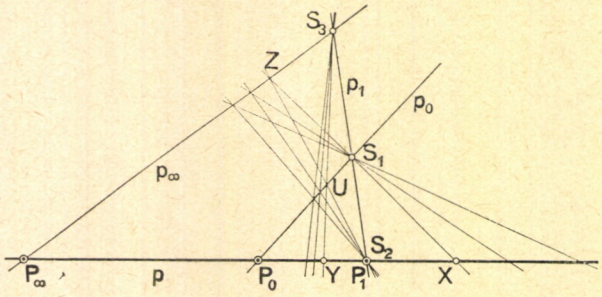


Obr. 34.

Sestrojme při zvoleném $A(a)$, kde $a \neq 0$, po druhé k bodu $X(x)$ bod $Y(y)$ tak, aby o jejich souřadnicích platilo

$$y = ax.$$

Řada $[X]$ na p (obr. 34) je perspektivní k řadě $[Z]$ na p_0 podle $S_1 = p_1 p_\infty$, tato pak perspektivní k řadě $[Y]$ na p podle $S_2 = p_\infty p_a$, kde $p_a = AM$ a $M = p_0 p_1$. Proto $[Y]$ je projektivní k $[X]$.



Obr. 35.

Konečně řada $[Y]$, sestrojená k řadě $[X]$ podle rovnice

$$y = \frac{1}{x},$$

jest k ní projektivní. Neboť $[X]$ na p (obr. 35) je perspektivní k $[Z]$ na p_∞ podle $S_1 = p_0 p_1$, $[Z]$ perspektivní k $[U]$ na p_0 podle $S_2 = P_1$ a $[U]$ perspektivní k $[Y]$ na p podle $S_3 = p_1 p_\infty$.

Produkt tří jednoduchých těchto projektivností (a libovolného jich počtu v libovolném pořádku) jest také projektivnost. Rovnice takového produktu vyjadřuje, jak z počtu vidíme, souřadnici bodu

v jedné řadě jako lineární lomenou funkci souřadnice korespondujícího bodu v řadě druhé. Naopak je možno obecnou lineární funkci lomenou $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ rozložiti v produkt substitucí tří hořejších tvarů. Odtud vyplývá:

Lineární lomená funkce $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ *vyjadřuje projektivnost mezi soumístnými řadami bodů* $X(x)$ *a bodů* $Y(y)$. *Každá projektivnost mezi soumístnými řadami bodů jest vyjádřena rovnicí tohoto tvaru.*

Abychom dokázali větu první, odstraňme x z čitatele zlomku dělením. Obdržíme (je-li $c \neq 0$)

$$y = \frac{a}{c} + \frac{b - \dfrac{ad}{c}}{cx+d}.$$

Transformaci proměnné x v proměnnou y, jež je definována touto rovnicí, lze rozložiti v produkt transformací $x_1 = cx$, $x_2 = x_1 + d$, $x_3 = \dfrac{1}{x_2}$, $x_4 = \left(b - \dfrac{ad}{c}\right) x_3$, $y = x_4 + \dfrac{a}{c}$.[1]) Tyto transformace jsou všechny tvarů nahoře uvedených, jež vyjadřují speciální projektivnosti; protože jejich produkt jest projektivnost, vyjadřuje obecná lineární lomená funkce transformaci projektivní.

Z uvedeného rozkladu lineární funkce lomené vidíme, že jest nutno vyloučiti případ, kdy čitatel proměnného členu $b - \dfrac{ad}{c} = \dfrac{bc-ad}{c}$ je roven nule; v takovém případě by totiž funkce y se stala konstantou a nevyjadřovala by uvažované korespondence (korespondence by nebyla obapolně jednoznačná, protože prvek $y = \dfrac{a}{c}$ by odpovídal každému prvku x). Hořejší větu jest tedy *doplniti podmínkou* $ad - bc \neq 0$.

Větu druhou (obrácenou k prvé) dokážeme se zřetelem ke třem speciálním projektivnostem prve uvedeným a jejich produktu na základě toho, že každá projektivnost mezi dvěma řadami je stanovena třemi dvojicemi bodů sdružených. Korespondující tyto dvojice buďtež $X_k(x_k)$ a $Y_k(y_k)$, kde $k = 1, 2, 3$. Suponujme, že pro každou dvojici platí

$$y_k = \frac{ax_k + b}{cx_k + d};$$

tím dostaneme tři lineární rovnice pro tři neznámé veličiny (třebas) a/d, b/d, c/d, jež odtud lze řešením jednoznačně nalézti. Hodnoty tak určené dosadíme pak za koeficienty do rovnice $y = (ax+b)/(cx+d)$: jest tedy možno ke každé projektivnosti nalézti rovnici uvedeného tvaru, ji

[1]) Je-li $c = 0$ (a ovšem $d \neq 0$), je rozklad jednodušší $x_1 = ax/d$, $y = x_1 + b/d$.

vyjadřující. Nejjednodušší je počet ten v případě, kdy je projektivnost dána vztahem $P_\infty P_0 P_1 \barwedge PQR$, při čemž různé prvky P, Q, R mají pořadem souřadnice p, q, r; objeví se $a/c = p$,[2]) $b/d = q$, $(a+b)/(c+d) = r$, odtud pak, určíce koeficienty výrazu a dosadíce je do něho, obdržíme vskutku $y = \dfrac{p(r-q)x + q(p-r)}{(r-q)x + (p-r)}$. (Podmínka $ad - bc \neq 0$ nabude zde tvaru $(p-q)(p-r)(r-q) \neq 0$ a jest splněna předpokladem různých bodů P, Q, R.)

Totéž, co platí o dvou soumístných řadách bodových, platí ovšem o soumístných útvarech 1. řádu vůbec.

c) Vraťme se k projektivnosti mezi dvěma jakýmikoli základními útvary jednomocnými (t. j. obecně různého druhu nebo nesoumístnými). Projektivní transformaci mezi dvěma útvary, definovanou tím, že základní prvky souřadnic v obou útvarech sobě odpovídají, a vyjádřenou rovnicí

$$x' = x,$$

označme $\mathbf{P}_0$ (prvek X přechází zde v prvek X'): pro další pak nahraďme označení prvku $X(x)$ označením $Y(y)$. Obecnou projektivnost v soumístných útvarech, vyjádřenou rovnicí $y=(ax+b)/(cx+d)$, označme $\mathbf{P}$; prvku $X(x)$ odpovídá v ní prvek $Y(y)$. I jest obecná projektivnost mezi dvěma libovolnými útvary jednomocnými, při níž základní prvky soustav souřadnicových sobě obecně neodpovídají, produktem transformací

$$\mathbf{P} \ldots y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

$$\mathbf{P}_0 \ldots x' = y,$$

tedy $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ a vyjádřena rovnicí $x'=(ax+b)/(cx+d)$, při čemž se prvek $X(x)$ transformuje v prvek $X'(x')$. Došli jsme takto výsledku:

Rovnice projektivnosti mezi dvěma základními útvary prvního řádu (různého druhu nebo téhož druhu, nesoumístnými nebo soumístnými) *jest* $x' = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, *kde* $ad - bc \neq 0$.[3])

Lineární lomená funkce jest tedy analytický výraz projektivní transformace mezi základními útvary prvního řádu, t. j. každá projektivnost jest vyjádřena touto rovnicí a každá taková rovnice vyjadřuje projektivnost. Jmenuje se proto projektivní transformace také *transformací lineární*.

---

[2]) Že v uvedené projektivnosti prvku o souřadnici ∞ odpovídá prvek o souřadnici a/c, poznáme buď způsobem obvyklým u nevlastní limity ∞ nebo podle hořejšího rozkladu uvažované transformace v pět jednodušších: při první a druhé je bod P_∞ invariantní, při třetí přejde v P_0, při čtvrté je tento invariantní, při páté přejde v bod o souřadnici a/c (vše podle konstrukce).

[3]) Koeficienty a, b, c, d v rovnici korespondence jsou ovšem čísla reálná (za tohoto předpokladu sluje projektivnost rovnicí vyjádřená *projektivností reálnou*).

21. Jiné rovnice projektivnosti; projektivnost zvrhlá. *a*) Zvolíme-li pro prvky $X(x)$ a $X'(x')$ souřadnice homogenní x_1, x_2, resp. x'_1, x'_2, nastoupí místo uvedené rovnice projektivnosti soustava dvou rovnic pro projektivnost mezi dvěma základními útvary jednorozměrnými, totiž

$$\varrho x'_1 = ax_1 + bx_2,$$
$$\varrho x'_2 = cx_1 + dx_2.$$

Obě jsou *lineární homogenní* (s konstantou úměrnosti ϱ) a odůvodňují tím spíše název transformací lineárních. Koeficienty (reálné) v těchto rovnicích volí se s výhodou ve tvaru a_{hk}, kde index h se vztahuje k souřadnicím bodu X', index k pak k souřadnicím bodu X; píšeme tedy

$$\varrho x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$
$$\varrho x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2.$$

Vylučující podmínka $ad - bc \neq 0$ přechází zde v podmínku

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.^{1})$$

b) Kdežto projektivní transformace $\mathbf{P}$, jež převádí elementy $X(x)$ v elementy $X'(x')$, jest analyticky vyjádřena rovnicí

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ nebo rovnicemi } \begin{aligned} \varrho x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \varrho x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned}$$

má *inversní transformace* projektivní $\mathbf{P}^{-1}$, převádějící prvky $X'(x')$ v prvky $X(x)$, rovnici, kterou obdržíme řešením uvedené rovnice podle x, resp. uvedených dvou rovnic podle x_1, x_2. Dostaneme pro tuto transformaci $\mathbf{P}^{-1}$ rovnici

$$x = \frac{-dx' + b}{cx' - a} \text{ resp. rovnice } \begin{aligned} \sigma x_1 &= \quad a_{22}x'_1 - a_{12}x'_2, \\ \sigma x_2 &= -a_{21}x'_1 + a_{11}x'_2, \end{aligned}$$

kde $\sigma = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{\varrho}$.

Aby však toto řešení bylo analyticky možné, musí platit

$$ad - bc \neq 0, \text{ resp. } a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,$$

čímž se znova objevuje podmínka dříve nalezená. Podmínku tu lze psáti ve tvaru determinantním $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, resp. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$; determinant tento sluje také *determinantem projektivnosti* (nebo *modulem* obou navzájem inversních transformací projektivních).

c) Jestliže uvedená podmínka není splněna, t. j. platí-li $ad - bc = 0$, redukuje se rovnice

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ čili rovnice } (ax + b) - (cx + d)x' = 0,$$

[1]) O dvou rovnicích uvedeného tvaru říká se také, že vyjadřují substituci (transformaci) prvního stupně o dvou proměnných (proměnných x_1, x_2 v proměnné x'_1, x'_2) čili *binární substituci lineární*; odtud sluje projektivnost v útvaru jednomocném také *projektivnost binární*.

dosadíme-li do ní třebas $d = bc/a$, na tvar

$$(ax + b)(cx' - a) = 0.$$

Odtud plyne, že pro libovolné x jest $x' = a/c$, pro $x = -b/a$ jest pak x' libovolné. Odpovídá tedy v takové projektivnosti každému prvku X jeden a týž prvek X' o souřadnici $x' = a/c$ (čili b/d), pouze prvku X o souřadnici $x = -b/a$ (čili $-d/c$) odpovídají všechny prvky X'.[2]) Taková projektivnost, jež tedy není bez výjimky jednoznačná, sluje projektivnost *zvrhlá* (degenerovaná, také pseudotransformace projektivní); v každém z obou útvarů korespondujících existuje prvek *singulární*, jemuž odpovídají všechny prvky druhého. Transformace inversní je ovšem také zvrhlá.[3])

Zvrhlá projektivnost existuje na př. mezi dvěma perspektivními řadami bodovými téže roviny (na přímkách p a p'), jestliže střed perspektivnosti leží na ose jedné z nich; leží-li tento střed na p, je singulárním bodem řady na p, kdežto průsečík pp' je singulárním bodem řady na p'.[4])

d) Rovnici projektivnosti $x' = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ můžeme psáti ve tvaru anulovaném a tedy souměrnějším

$$cxx' - ax + dx' - b = 0$$

čili

$$\alpha xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0.$$

Tato dvojnásobně lineární (v x i v x') čili *bilineární rovnice* mezi proměnnými x a x', souřadnicemi korespondujících prvků X a X' dvou základních útvarů jednomocných, (s reálnými součiniteli $\alpha, \beta, \gamma, \delta$) definuje tedy projektivnost $\mathbf{P}$ i inversní $\mathbf{P}^{-1}$ mezi útvary těmi, jestliže platí $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.[5])

---

[2]) V hořejší úvaze předpokládáme $a \neq 0$; je-li $a = 0$, jest také $bc = 0$, tedy třebas $c = 0$ a platí $b - dx' = 0$; jest proto $x' = b/d$ pro libovolné x.

[3]) Obráceně odpovídá-li v transformaci $x' = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ prvku X více než jeden prvek X', má rovnice $(cx + d)x' - (ax + b) = 0$ více než jedno řešení pro x', platí tedy $ax + b = 0$, $cx + d = 0$ a proto (po odstranění x) platí $ad - bc = 0$. Podmínka $ad - bc = 0$ jest tedy dostatečnou a nutnou podmínkou projektivnosti zvrhlé; rovněž tak podmínka $ad - bc \neq 0$ pro nezvrhlou (pravou) projektivnost.

[4]) Projektivnost je zvrhlá, jakmile v ní dvěma různým prvkům jednoho útvaru odpovídá týž prvek útvaru druhého (tento prvek je pak singulárním v tomto útvaru); zjistíme to krátce z rovnice projektivnosti. Je-li projektivnost určena relací $ABC \overline{\wedge} A'B'C'$, kde $A' \equiv B'$, je singulárním prvkem v útvaru druhém A' a v prvém C.

[5]) Rovnice bilineární nebo dvě rovnice lineární homogenní nebo rovnice, vyjadřující souřadnici prvku v jednom útvaru jako lineární lomenou funkci souřadnice korespondujícího prvku v útvaru druhém, jsou *analytickou definicí* projektivnosti. Od takové definice vyšel první *Möbius*. Má všechny přednosti analytického vyjádření pro geometrické vztahy.

V rovnici projektivní transformace jsou čtyři konstanty (a, b, c, d, resp. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$), jež však můžeme nahraditi veličinami úměrnými; jsou tam tedy jen *tři konstanty* nezávislé (za něž lze zvoliti na př. $a/c, b/c, d/c$ resp. $\beta/\alpha, \gamma/\alpha, \delta/\alpha$). Odtud vyplývá, že projektivnost jest jednoznačně určena třemi dvojicemi prvků sobě odpovídajících. Jsou-li totiž ve dvou útvarech jednomocných dány tři dvojice prvků sdružených o souřadnicích x_k a x'_k (pro $k = 1, 2, 3$), platí tři homogenní rovnice lineární pro neznámé $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$\alpha x_k x'_k + \beta x_k + \gamma x'_k + \delta = 0$$

(pro $k = 1, 2, 3$), z nichž lze určiti (postupný) poměr konstant $\alpha : \beta : \gamma : \delta$; dosadíme-li tento výsledek do obecné rovnice projektivnosti, obdržíme rovnici určité transformace projektivní.[6]) Počet bude nejkratší, připojíme-li k uvedeným třem rovnicím jako čtvrtou rovnici s proměnnými x, x'

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0$$

a vyloučíme-li ze čtyř rovnic těch koeficienty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; dostaneme hledanou rovnici projektivnosti ve tvaru determinantu

$$\begin{vmatrix} xx' & x & x' & 1 \\ x_1x'_1 & x_1 & x'_1 & 1 \\ x_2x'_2 & x_2 & x'_2 & 1 \\ x_3x'_3 & x_3 & x'_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.^{7})^{8})$$

[6]) Jestliže speciálně ve dvou projektivních útvarech základních odpovídá prvku P_∞ prvek P'_∞, jest v rovnici projektivnosti $\alpha = 0$, odpovídá-li prvku P_0 prvek P'_0, jest $\delta = 0$; platí-li oboje, redukuje se rovnice projektivnosti na $x' = kx$. Jestliže prvku P_∞ odpovídá P'_0, jest $\beta = 0$, odpovídají-li si P_0 a P'_∞, jest $\gamma = 0$; platí-li oboje, má rovnice projektivnosti tvar $xx' = k$.

[7]) Projektivní řady bodové (v konečnu) mají následující zajímavou vlastnost metrickou. Budiž projektivnost řady, jejíž body mají souřadnici x, a řady s body o souřadnici x' dána rovnicí

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0 \text{ s podmínkou } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

(Jestliže počátky souřadnic sobě neodpovídají, jest $\delta \neq 0$.) Nevlastnímu bodu první řady I_∞ odpovídá v druhé řadě bod I' s úsečkou

$$x' = \lim_{x \to \infty} \left(- \frac{\beta x + \delta}{\alpha x + \gamma} \right) = - \frac{\beta}{\alpha};$$

nevlastnímu bodu druhé řady J'_∞ odpovídá v první řadě bod J s úsečkou

$$x = \lim_{x' \to \infty} \left(- \frac{\gamma x' + \delta}{\alpha x' + \beta} \right) = - \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Bod odpovídající v jedné řadě bodu v nekonečnu druhé řady, totiž bod I' a bod J, slouje její bod *mezní* (limitní, úběžník).

Je-li daná projektivnost obecná, t. j. taková, že platí $\alpha \neq 0$, jsou limitní body I' a J v konečnu; za tohoto předpokladu zvolme jeden i druhý za počátek soustavy souřadnic v příslušné řadě bodové. Je-li J počátkem soustavy v první řadě, platí $\gamma = 0$; je-li I' počátkem soustavy v řadě druhé, platí $\beta = 0$. Při této volbě má tedy projektivnost rovnici

$$xx' = - \frac{\delta}{\alpha};$$

22. Dvojpoměr. *a*) Za projektivní souřadnici proměnného prvku v útvaru jednomocném zvolili jsme číslo, jež mu odpovídá v korespondenci obapolně jednoznačné vzhledem ke třem prvkům základním. Můžeme tedy souřadnici prvku v daném útvaru jednomocném pokládati za veličinu, příslušnou čtyřem prvkům útvaru, z nichž tři jsou pevné a čtvrtý proměnlivý.

---

vidíme zde, že součin souřadnic (úseček) bodů sobě odpovídajících X a X', totiž $JX \,.\, I'X'$ je konstantní ($= p$). *V projektivnosti mezi dvěma řadami bodovými jest součin vzdáleností dvou libovolných bodů sobě odpovídajících od mezních bodů jejich řad konstantní.* Tento konstantní součin p sluje *mocnost* projektivnosti (podle *Steinera*; uvedený vztah $xx' = p$ sluje *relací Steinerovou*).

Naopak na dvou přímkách proměnlivé body X a X', jejichž vzdálenosti od dvou pevných bodů mají konstantní součin, vyplňují projektivní řady (v nichž pevný bod prvé resp. druhé řady odpovídá nevlastnímu bodu druhé resp. prvé řady). Jest tedy možno touto vlastností projektivnost dvou řad definovati. Osa projektivnosti dvou projektivních řad bodových (téže roviny) jest rovnoběžná s přímkou spojující limitní body obou řad (protože musí procházeti průsečíkem spojnic JI' a $J'_\infty I_\infty$).

Ve dvou (vlastních) projektivních svazcích paprskových (rovinových) buďtež souřadnicemi sdružených prvků x, x' tangenty úhlů, jež svírají s prvky počátečními; zvolíme-li za tyto počáteční prvky dva paprsky (dvě roviny) sobě odpovídající, jest v rovnici projektivnosti

$$\alpha xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0$$

$\delta = 0$ (protože pro $x = 0$ musí býti $x' = 0$). V každém ze dvou projektivních svazků paprskových (rovinových) *existuje dvojice paprsků* (rovin) *svírajících pravý úhel, jež sobě odpovídají.* Abychom to dokázali, všimněme si, že dva k sobě kolmé paprsky v prvním svazku mají souřadnice x a $-1/x$ [totiž $\operatorname{tg}\xi$ a $\operatorname{tg}(\xi + \frac{1}{2}\pi)$], obdobně ve svazku druhém. Při jakýchkoli hodnotách konstant α, β, γ (t. j. v každé projektivnosti) musí tedy býti možno nalézti dvojici paprsků o souřadnicích x a $-1/x$, jimž odpovídají paprsky o souřadnicích x' a $-1/x'$. Musí proto současně platit

$$\alpha xx' + \beta x + \gamma x' = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\alpha}{xx'} - \frac{\beta}{x} - \frac{\gamma}{x'} = 0;$$

vyloučíme-li x', obdržíme rovnici pro x

$$\alpha\gamma x^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)\, x - \alpha\gamma = 0,$$

jejíž kořeny (vždy reálné) jsou x a $-1/x$.

[8]) Metricky specialisovanou projektivnost mezi dvěma (vlastními) řadami bodovými obdržíme ze suposice, že *bodu v nekonečnu* jedné řady *odpovídá bod v nekonečnu* řady druhé; tato projektivnost sluje *podobnost.* Analytický důsledek uvedené podmínky jest $\alpha = 0$ (neboť I' a J mají úsečku ∞); vzhledem k tomu, že $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, musí býti $\beta \neq 0$ i $\gamma \neq 0$. Jest tedy rovnicí této speciální projektivnosti

$$\beta x + \gamma x' + \delta = 0$$

čili

$$x' = px + m;$$

protože v této rovnici jsou dvě nezávislé konstanty, jest podobnost dvou řad bodových určena dvěma dvojicemi korespondujících bodů.

Zvolíme-li počátky souřadnic obou řad v bodech sobě odpovídajících, platí $\delta = 0$ a rovnice podobnosti se redukuje na tvar $\beta x + \gamma x' = 0$, z něhož vyplývá $x'/x = -\beta/\gamma$, t. j. konst. *Korespondující úsečky* (úsečky omezené

Definujeme *dvojpoměr*[1]) *čtyř prvků* $X_1(x_1)$, $X_2(x_2)$, $X_3(x_3)$, $X(x)$ v základním útvaru prvního řádu (v uvedeném pořadí, při čemž prvky X_1, X_2 a X_3 předpokládáme různé) jako číslo, v něž přejde souřadnice čtvrtého prvku x projektivností, jež prvé tři prvky promění resp. v prvky P_∞, P_0, P_1. Značíme jej $\mathrm{Dp}\,(X_1X_2X_3X)$.

---

body sdruženými) *ve dvou podobných řadách jsou si* tedy *úměrny*; konstantní poměr úseček sobě odpovídajících sluje *poměrem podobnosti*.

Dvě (vlastní) podobné řady bodové jsou perspektivní (a slují pak *homothetické* čili stejnolehlé), jestliže buď osy jejich jsou rovnoběžné nebo spojnice korespondujících bodů jsou rovnoběžny.

Dva nevlastní projektivní svazky paprskové slují podobné, jsou-li řady bodové je protínající podobné.

Speciálním případem podobnosti (a tím projektivnosti) dvou (vlastních) řad bodových (i nevlastních svazků paprskových) jest *shodnost*, totiž podobnost s poměrem + 1 nebo — 1; její rovnice jest

$$x' = x + m \text{ nebo } x' = -x + m.$$

Projektivnost metricky speciální mezi dvěma (vlastními) svazky paprsků (rovin) obdržíme ze suposice, že *prvkům* k sobě *kolmým odpovídají* vždy *prvky kolmé*; takové dva svazky paprsků (rovin) slují *shodné*. Uvedená podmínka značí, že odpovídají-li sobě prvky o souřadnicích $x = \operatorname{tg}\xi$ a $x' = \operatorname{tg}\xi'$, odpovídají sobě také prvky o souřadnicích $\operatorname{tg}(\xi + \frac{1}{2}\pi)$ a $\operatorname{tg}(\xi' + \frac{1}{2}\pi)$, tedy o souřadnicích $-1/x$ a $-1/x'$. Zvolíme-li za prvky počáteční dva paprsky sobě odpovídající, musí sobě odpovídati také paprsky o souřadnicích ∞ (k nim kolmé), platí tedy vedle $\delta = 0$ také $\alpha = 0$; ze zjednodušené rovnice projektivnosti $\beta x + \gamma x' = 0$ vychází pak uvedenou podmínkou druhá $\beta x' + \gamma x = 0$ a spojením obou $\beta^2 = \gamma^2$ čili $\beta = \pm\gamma$. Jest tedy rovnicí shodnosti dvou svazků, v nichž sobě odpovídají prvky počáteční,

$$x' = x \text{ nebo } x' = -x.$$

Jest patrno, že pro shodnost dvou (vlastních) svazků paprskových (rovinových) stačí podmínka, aby *dvěma dvojicím paprsků* (rovin) k sobě *kolmých* v jednom svazku *odpovídaly dvojice paprsků* (rovin) *kolmých* ve svazku druhém.

Hledejme obráceně rovnici projektivnosti dvou shodných svazků paprskových (rovinových) tím definovaných, že dvojice prvků sdružených svírají rovné úhly; zvolme však (obecně) za počáteční paprsky v obou svazcích dva paprsky sobě neodpovídající (o a p'). O dvou korespondujících paprscích x a x' platí

$$\operatorname{tg}\widehat{ox} = \pm\operatorname{tg}\widehat{o'x'} \text{ čili } \operatorname{tg}\widehat{ox} = \pm\operatorname{tg}(\widehat{o'p'} + \widehat{p'x'});$$

položíme-li $\operatorname{tg}\widehat{ox} = x$, $\operatorname{tg}\widehat{p'x'} = x'$ a $\operatorname{tg}\widehat{o'p'} = k$, dostaneme odtud jako analytický výraz shodnosti dvou svazků paprskových (rovinových)

$$x = \pm\frac{k + x'}{1 - kx'} \text{ čili } kxx' - x \pm x' \pm k = 0.$$

[1]) Pojem dvojpoměru čtyř prvků zavedl (metrickou definicí jako poměr dělicích poměrů) *Möbius* r. 1827 (původně Doppelschnitt-Verhältnis, později Doppelverhältnis). Podle *Chaslesa* (1837) sluje rapport anharmonique (hlavně ve francouzské literatuře); vlašsky doppio rapporto nebo birapporto, anglicky obyčejně cross-ratio.

Projektivnost určená třemi dvojicemi

$$X_1X_2X_3 \quad P_\infty P_0 P_1$$

má ovšem analytický výraz $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Aby vyhověla uvedeným třem podmínkám, musí koeficienty její rovnice býti řešením rovnic

$$cx_1 + d = 0, \quad ax_2 + b = 0, \quad \frac{ax_3+b}{cx_3+d} = 1;$$

odtud nalezneme

$$\frac{a}{d} = -\frac{1}{x_1}\cdot\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}, \quad \frac{b}{d} = \frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}, \quad \frac{c}{d} = -\frac{1}{x_1}.$$

Pro y pak obdržíme

$$y = \frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}\cdot\frac{x_2-x}{x_1-x}.$$

Proto:

Dvojpoměr (uspořádané) *skupiny čtyř prvků v základním útvaru jednomocném o souřadnicích* x_1, x_2, x_3, x *jest*

$$\mathrm{Dp}\,(X_1X_2X_3X) = \frac{x_1-x_3}{x_2-x_3} : \frac{x_1-x}{x_2-x}.^{2})$$

Ztotožní-li se prvek X s některým ze tří prvků X_1, X_2, X_3, nabude jeho dvojpoměr speciální hodnoty; podle definice (nebo z obecného výrazu pro dvojpoměr nalezeného) poznáváme:

$$\mathrm{Dp}\,(X_1X_2X_3X_1) = \infty, \quad \mathrm{Dp}\,(X_1X_2X_3X_2) = 0, \quad \mathrm{Dp}\,(X_1X_2X_3X_3) = 1.$$

Užijeme-li souřadnic homogenních pro čtyři prvky $A\,(a_1, a_2)$, $B\,(b_1, b_2)$, $C\,(c_1, c_2)$ a $D\,(d_1, d_2)$, dostaneme dvojpoměr jejich ve tvaru

$$\mathrm{Dp}\,(ABCD) = \frac{(ac)}{(bc)} : \frac{(ad)}{(bd)},$$

kde $(ac) = a_1c_2 - a_2c_1$, atd. (determinanty 2. stupně, jejichž prvky jsou dvojice souřadnic obou zúčastněných elementů v příslušném pořádku).[3])

b) Obecný prvek X daného útvaru jednomocného má v soustavě souřadnic, jejímiž základními prvky jsou P_∞, P_0, P_1, projektivní souřadnici x. *V soustavě souřadnic se základními prvky* X_1, X_2, X_3 (o souřadnicích x_1, x_2, x_3 v soustavě původní) *má týž obecný prvek* X *projektivní souřadnici* $x' = \dfrac{x_1-x_3}{x_2-x_2} : \dfrac{x_1-x}{x_2-x}$, rovnou dvojpoměru tří prvků základních a čtvrtého daného.

---

[2]) Při uvedeném výrazu pro dvojpoměr skupiny čtyř prvků $X_1X_2X_3X$ mluvíme také o dvojpoměru čtyř čísel, jejich souřadnic, a píšeme někdy $\mathrm{Dp}\,(x_1x_2x_3x)$.

[3]) Dvojpoměr čtyř daných prvků jednomocného útvaru základního (v daném pořadí) jest možno také přímo definovati výrazem, který zde na základě projektivní transformace byl vypočten; lze pak o něm dokázati, že udává souřadnici čtvrtého prvku vzhledem k prvním třem jako základu soustavy souřadnic.

Z výrazu pro x' vyplývá vskutku, že prvek X_1 má v nové soustavě souřadnici ∞, prvek X_2 souřadnici 0, prvek X_3 souřadnici 1; jest tedy x' souřadnice prvku X v soustavě, v níž X_1, X_2 a X_3 jsou prvky základními.

Odtud vidíme, že *transformace souřadnic* projektivních v jiné projektivní (transformace soustavy se základními prvky P_∞, P_0, P_1 v soustavu se základními prvky X_1, X_2, X_3) jest vyjádřena rovnicí, v níž nová souřadnice x' je lineární lomenou funkcí původní souřadnice x.

Také obráceně jest možno transformaci $x' = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (kde $ad - bc \neq 0$) v základním útvaru jednomocném pokládati za transformaci souřadnice x v souřadnici x' téhož proměnného prvku ze soustavy $P_\infty P_0 P_1$ do nové soustavy $X_1X_2X_3$, jejíž základní prvky mají v původní soustavě souřadnice $-d/c$, $-b/a$, $(d-b)/(a-c)$.

c) Z výrazu pro x', jenž je lineární lomenou funkcí proměnné x, poznáváme dále, že souřadnice prvku X, sledovaného v základním útvaru jednomocném ve smyslu $X_1X_2X_3$, nabývá všech hodnot od $-\infty$ do $+\infty$.

Dva prvky X_1 a X_2 rozdělují základní útvar jednomocný ve dvě části: jestliže prvek X leží v téže části jako X_3, jest jeho souřadnice, stejně jako souřadnice prvku X_3, kladná; je-li X v jiné části než X_3, jest jeho souřadnice záporná [změna znaménka nastává u souřadnice prvku X v $X_1(\infty)$ a v $X_2(0)$]. V prvním případě říkáme, jak známo, že dvojice X_1X_2 a X_3X se neoddělují, v druhém případě se oddělují. Také obráceně můžeme usuzovat.

Platí tedy o znaménku dvojpoměru: *Dvojpoměr čtyř prvků* X_1, X_2, X_3, X_4 *je kladný nebo záporný podle toho, jestliže prvky* X_3 *a* X_4 *neoddělují dvojice* X_1 *a* X_2 *nebo ji oddělují* (*a obráceně*).

d) Jak se změní dvojpoměr čtyř prvků X_1, X_2, X_3, X_4, přejdeme-li od nich k čtyřem projektivním prvkům X'_1, X'_2, X'_3, X'_4?

Z definice dvojpoměru čtyř prvků odvodíme, že se jejich dvojpoměr projektivní transformací nezmění. Neboť $\mathrm{Dp}\,(X_1X_2X_3X_4)$ je roven souřadnici prvku, v nějž přejde X_4 transformací $X_1X_2X_3 \barwedge P_\infty P_0 P_1$ (kterou označíme $\mathbf{P}_1$); $\mathrm{Dp}\,(X'_1X'_2X'_3X'_4)$ rovná se souřadnici prvku, ve který přejde X'_4 transformací $X'_1X'_2X'_3 \barwedge P_\infty P_0 P_1$ (budiž to $\mathbf{P}_2$); protože předpokládáme $X_1X_2X_3X_4 \barwedge X'_1X'_2X'_3X'_4$ (označme tuto projektivnost $\mathbf{P}$), musí prvek vzniklý z X_4 býti totožný s prvkem vzniklým z X'_4 (neboť transformace projektivní $\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{P}_2$. $\mathbf{P}$ vedou k témuž útvaru). Jest tedy $\mathrm{Dp}\,(X'_1X'_2X'_3X'_4) = \mathrm{Dp}\,(X_1X_2X_3X_4)$.

Můžeme však tuto důležitou vlastnost dvojpoměru dokázati i počtem. K tomu cíli vypočteme $\mathrm{Dp}\,(X'_1X'_2X'_3X'_4)$ pomocí rovnice předpokládané projektivnosti $x' = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (kde ovšem $ad - bc \neq 0$).

Dosadíce do výrazu $\frac{x'_1 - x'_3}{x'_2 - x'_3} : \frac{x'_1 - x'_4}{x'_2 - x'_4}$ hodnoty $x'_k = \frac{ax_k + b}{cx_k + d}$, obdržíme postupně:

$$x'_1 - x'_3 = (x_1 - x_3) \cdot \frac{ad - bc}{(cx_1 + d)(cx_3 + d)}$$

a obdobné tři vztahy;

$$\frac{x'_1 - x'_3}{x'_2 - x'_3} = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} \cdot \frac{cx_2 + d}{cx_1 + d},$$

při čemž jsme zkrátili faktorem $ad - bc \neq 0$ i $cx_3 + d$, a druhý vztah analogický; konečně

$$\frac{x'_1 - x'_3}{x'_2 - x'_3} : \frac{x'_1 - x'_4}{x'_2 - x'_4} = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4}$$

čili

$$\mathrm{Dp}\,(X'_1X'_2X'_3X'_4) = \mathrm{Dp}\,(X_1X_2X_3X_4).$$

Dospěli jsme tedy k odpovědi: *Dvojpoměr čtyř prvků v základním útvaru jednomocném se nemění při transformaci projektivní.*[4]) Pravíme, že dvojpoměr čtyř prvků je *projektivní invariant* jejich.[5])

Ale i naopak platí, že jednoznačná transformace, při níž se nemění dvojpoměr čtyř prvků (kde totiž dvojpoměr čtyř kterýchkoli prvků rovná se dvojpoměru čtyř prvků jim korespondujících), jest projektivnost. Neboť z rovnice

$$\mathrm{Dp}\,(A'B'C'X') = \mathrm{Dp}\,(ABCX)$$

čili

$$\frac{a' - c'}{b' - c'} : \frac{a' - x'}{b' - x'} = \frac{a - c}{b - c} : \frac{a - x}{b - x}$$

vyplývá

$$x' = \frac{mx + n}{px + q}.$$[6])

---

[4]) V definici dvojpoměru čtyř prvků X_1, X_2, X_3, X bylo suponováno, že první tři prvky X_1, X_2, X_3 jsou různé (musí tak býti, aby projektivnost tam uvedená byla možna). Jsou-li však dva ze tří prvků těch totožny (a prvek X od nich různý), nahradíme skupinu $X_1X_2X_3X$ projektivní skupinou týchž prvků, což podle hořejšího výsledku nemá na hodnotu dvojpoměru vlivu. Je-li $X_1 \equiv X_2$, užijeme skupiny $X_3XX_1X_2$, jejíž dvojpoměr má zde hodnotu 1; v případě $X_1 \equiv X_3$ užijeme skupiny $X_2X_1XX_3$ s hodnotou dvojpoměru 0; je-li konečně $X_2 \equiv X_3$, nahradíme skupinu $X_1X_2X_3X$ skupinou $X_2X_1XX_3$, takže hledaný dvojpoměr má hodnotu ∞.

[5]) Projektivní vlastnost dvojpoměru znal už *Pappos*, jak vysvítá z věty (jím v podstatě uvedené): *Čtyři přímky svazku protíná každá příčka v bodech téhož dvojpoměru.* Význam dvojpoměru, veličiny pro vývoj projektivní geometrie velmi důležité, prokázali hlavně *Möbius*, *Steiner* a *Chasles*. Důležitost dvojpoměru čtyř prvků v základním útvaru 1. řádu zakládá se na tom, že je to *nejjednodušší výraz invariantní* při transformacích projektivních (obdobně jako v elementární geometrii vzdálenost dvou bodů a úhel dvou přímek při shodnosti nebo úhel dvou přímek a poměr dvou úseček při podobnosti). Viz na př. *A. Comessatti*, Lezioni di geometria analitica e proiettiva II, p. 8 a n.

[6]) Z obou vět právě dokázaných vysvítá, že projektivnost dvou základních útvarů prvního řádu lze definovati jako *korespondenci obapolně jedno-*

Z rovnosti dvojpoměrů lze existenci projektivnosti dokázati (vzhledem k základní větě o projektivnosti) také na základě toho, že dvojpoměrem čtyř prvků jest při třech prvcích daných čtvrtý jednoznačně určen. Neboť dejme tomu, že platí

$$\mathrm{Dp}\,(ABCX) = \mathrm{Dp}\,(A'B'C'X').$$

V projektivnosti $ABC \barwedge A'B'C'$ přísluší prvku X prvního útvaru jediný prvek druhého X_1, o němž platí

$$\mathrm{Dp}\,(ABCX) = \mathrm{Dp}\,(A'B'C'X_1).$$

Z této rovnice a ze suponované rovnosti dvojpoměrů vyplývá tedy

$$\mathrm{Dp}\,(A'B'C'X_1) = \mathrm{Dp}\,(A'B'C'X')$$

čili souřadnice prvků X_1 a X' jsou si rovny, takže $X_1 \equiv X'$; a proto

$$ABCX \barwedge A'B'C'X'.^{7)8)}$$

23. Další vlastnosti dvojpoměru. *a*) Dvojpoměr čtyř prvků v základním útvaru jednomocném závisí na pořádku těchto prvků. Ze *čtyř daných prvků* A, B, C, D v útvaru takovém jest možno utvořiti $4! = 24$ permutace. O dvojpoměrech těchto 24 přestav daných čtyř prvků platí:

---

značnou, při níž dvojpoměr kterýchkoli čtyř prvků v jednom útvaru rovná se dvojpoměru čtyř prvků jim odpovídajících v útvaru druhém. To je *definice Steinerova* (a jiných); žádá příliš mnoho, protože dvojpoměry čtveřin v útvaru základním nejsou všechny nezávislé. Mívá (u Steinera a jinde) základ metrický (při definici dvojpoměru). Připustí-li se pak k úvaze o útvarech projektivních metrický pojem pohybu, můžeme projektivní útvary jednorozměrné definovati jako takové *útvary, jež lze pohybem uvésti do polohy perspektivní* (druhá *definice Steinerova*). Tato definice projektivnosti je sice elementární, je však vůči ostatním výměrům poněkud úzká, t. j. není jim ekvivalentní, leda s jistým omezením (na př. na útvary s nosiči vlastními); viz *R. Baldus*, Zur Steiner'schen Definition der Projektivität, Math. Annalen 90 (1923).

[7]) Dvojpoměr čtyř prvků analyticky zobecňuje na $2n$ prvků (bez valného významu) *G. Rémoundos*, Sur les rapports anharmoniques généralisés, Nouv. Annales math. (4) 7 (1907).

[8]) Metricky definuje se dvojpoměr čtyř bodů nejsnáze (bez souřadnic) na základě úseček orientovaných, jak bylo uvedeno: dvojpoměrem čtyř bodů A, B, C, D v řadě bodové jest (podle *Möbia*) poměr poměrů úseček jimi omezených

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

Podobně se definuje dvojpoměr čtyř paprsků a, b, c, d ve svazku jako poměr poměrů sinů orientovaných úhlů jimi sevřených

$$\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd};$$

rovněž tak pro čtyři roviny svazku. Rovnost dvojpoměrů čtyř bodů a čtyř paprsků (rovin) perspektivních dokáže se pomocí úměrnosti úseček v podobných trojúhelnících nebo pomocí ploch trojúhelníků.

1. Protože podle čl. 12*c* jest skupina čtyř prvků (v určitém pořádku) projektivní se skupinou týchž prvků, která z ní vznikne záměnou dvou kterýchkoli prvků a dvou zbývajících, t. j.

$$ABCD \sim BADC \sim CDAB \sim DCBA,$$

a protože dvojpoměry dvou projektivních skupin jsou si rovny, platí

$$\mathrm{Dp}\,(ABCD) = \mathrm{Dp}\,(BADC) = \mathrm{Dp}\,(CDAB) = \mathrm{Dp}\,(DCBA).$$

Totéž lze dokázati z analytického výrazu pro dvojpoměr čtyř prvků A, B, C, D s (projektivními) souřadnicemi a, b, c, d

$$\mathrm{Dp}\,(ABCD) = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = \frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)};$$

neboť záměna čísel a, b a současně čísel c, d, potom a, c a spolu b, d, konečně a, d a spolu b, c nezpůsobí změny v hodnotě dvojpoměru.

Z dvojpoměrů, příslušných ke všem 24 permutacím daných čtyř prvků, může tedy pouze šest býti různých: jsou to dvojpoměry přestav

$$ABCD,\ ABDC,\ ACBD,\ ACDB,\ ADBC,\ ADCB$$

(zvoleny přestavy počínající týmž prvkem).

2. Protože jest

$$\mathrm{Dp}\,(ABCD) = \frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)}, \quad \mathrm{Dp}\,(ABDC) = \frac{(a-d)(b-c)}{(b-d)(a-c)},$$

platí

$$\mathrm{Dp}\,(ABCD) \,.\, \mathrm{Dp}\,(ABDC) = 1.$$

A vůbec *dvojpoměry dvou skupin, lišících se pořádkem dvou posledních* (nebo dvou prvních) *prvků, mají součin* 1 (jeden je převratný k druhému).

Označíme-li

$$\mathrm{Dp}\,(ABCD) = k, \ \mathrm{Dp}\,(ACBD) = k', \ \mathrm{Dp}\,(ADBC) = k'',$$

jest tedy

$$\mathrm{Dp}\,(ABDC) = \frac{1}{k}, \ \mathrm{Dp}\,(ACDB) = \frac{1}{k'}, \ \mathrm{Dp}\,(ADCB) = \frac{1}{k''}.$$

3. Konečně *dvojpoměry dvou skupin, lišících se pořádkem dvou středních* (nebo dvou krajních) *prvků, mají součet* 1 (doplňují se na 1).

Neboť

$$\mathrm{Dp}\,(ABCD) + \mathrm{Dp}\,(ACBD) - 1 = \frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)} + \frac{(a-b)(c-d)}{(c-b)(a-d)} - 1 =$$

$$= \frac{(a-c)(b-d) - (a-b)(c-d) - (b-c)(a-d)}{(b-c)(a-d)} = 0,$$

jak se přesvědčíme výpočtem čitatele.

Proto platí

$$k' = 1 - k, \quad k'' = 1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}.$$

Úhrnem tedy jest jedním ze šesti (obecně) různých dvojpoměrů $\mathrm{Dp}\,(ABCD) = k$ určeno ostatních pět takto:

$$\mathrm{Dp}\,(ABDC) = \frac{1}{k},\quad \mathrm{Dp}\,(ACBD) = 1 - k,\quad \mathrm{Dp}\,(ACDB) = \frac{1}{1-k},$$

$$\mathrm{Dp}\,(ADBC) = \frac{k-1}{k},\quad \mathrm{Dp}\,(ADCB) = \frac{k}{k-1}.$$[1)2)3)]

b) Víme, že *harmonická skupina* čtyř (různých) prvků je charakterisována tím, že v ní lze zaměniti dva sdružené prvky, t. j. v harmonické skupině platí $ABCD \sim ABDC$, a naopak skupina této vlastnosti je harmonická. Avšak položíme-li $\mathrm{Dp}\,(ABCD) = k$, jest podle hořejšího $\mathrm{Dp}\,(ABDC) = 1/k$; o dvojpoměru harmonické skupiny platí tedy

$$k = \frac{1}{k} \quad \text{čili} \quad k^2 = 1.$$

Z hodnot ± 1 odtud pro k plynoucích má $+1$ jiný význam ($A \equiv B$ nebo $C \equiv D$), zbývá proto $k = -1$. Tedy:

Harmonická skupina čtyř prvků A, B, C, D v základním útvaru jednomocném (a pouze tato) *má dvojpoměr* -1.[4)]

Jestliže však v harmonické skupině $ABCD$, v níž A a B, rovněž C a D jsou prvky sdružené, tyto sdružené prvky rozloučíme, nabude dvojpoměr její jiné hodnoty; jest totiž

$$\mathrm{Dp}\,(ACBD) = \mathrm{Dp}\,(ADBC) = 2,\quad \mathrm{Dp}\,(ACDB) = \mathrm{Dp}\,(ADCB) = \tfrac{1}{2}.$$[5)]

[1)] Jsou-li dva z daných čtyř prvků totožny, má jejich dvojpoměr hodnotu 1 (je-li $A \equiv B$ nebo $C \equiv D$) nebo 0 (je-li $A \equiv C$ nebo $B \equiv D$) nebo ∞ (je-li $A \equiv D$ nebo $B \equiv C$). V každém ze šesti možných případů vyskytují se místo šesti různých hodnot dvojpoměrů jen tyto tři (každá z nich dvakrát). Splynou-li ze čtyř daných prvků (aspoň) tři (a jenom tehdy), stane se jejich dvojpoměr neurčitým.

[2)] Protože o dvojpoměrech čtyř prvků A, B, C, D platí (jak z hořejšího vyplývá) $\mathrm{Dp}\,(ABCD) \cdot \mathrm{Dp}\,(ADBC) + \mathrm{Dp}\,(ACBD) = 0$, poznáváme vzhledem k souvislosti mezi vzájemnou polohou první a druhé dvojice prvků ve skupině a znaménkem jejího dvojpoměru (čl. 22*c*), že ze tří způsobů, jimiž lze čtyři prvky útvaru jednomocného roztříditi ve dvě dvojice, jenom jeden dává dvojice se oddělující (pozn. [6)] v čl. 9).

[3)] Substituce $k' = 1/k$, $k' = 1 - k$, $k' = 1/(1-k)$, $k' = (k-1)/k$, $k' = k/(k-1)$ tvoří s identickou substitucí $k' = k$ grupu substitucí o šesti členech (jejíž vytvořující operace jsou první dvě, každá s periodou 2).

[4)] Odtud vysvítá, že Staudtova definice projektivnosti, podle níž harmonické skupině (t. j. skupině s dvojpoměrem -1) má odpovídati harmonická, žádá méně než definice Steinerova, jež u korespondujících prvků požaduje rovnost dvojpoměrů vůbec. Spolu můžeme vysloviti větu: Odpovídá-li ve dvou základních útvarech jednomocných každé skupině čtyř prvků s dvojpoměrem -1 v jednom útvaru skupina o témž dvojpoměru -1 v druhém útvaru, odpovídá každé skupině čtyř prvků vůbec (s jakýmkoli dvojpoměrem k) v jednom skupina téhož dvojpoměru (k) v druhém.

[5)] Šest obecně různých hodnot dvojpoměrů rozmanitých permutací z daných čtyř prvků A, B, C, D, totiž hodnoty k, $1/k$, $1-k$, $1/(1-k)$, $(k-1)/k$ a $k/(k-1)$, redukuje se tedy u harmonické skupiny $ABCD$ na tři -1, $\frac{1}{2}$, 2.

Protože o souřadnicích prvků $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $X(x)$ v harmonické skupině platí

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-x}{b-x} = -1,$$

jest souřadnice čtvrtého prvku harmonického X vyjádřena souřadnicemi tří daných prvků A, B, C ve vzorci

$$x = \frac{a-\lambda b}{1-\lambda}, \quad \text{kde } \lambda = -\frac{a-c}{b-c}, \quad \text{čili } x = \frac{2ab-(a+b)c}{(a+b)-2c}.$$

Jest tedy souřadnice x čtvrtého prvku harmonického *racionální funkcí* souřadnic a, b, c tří prvků daných.[6])

Jestliže ve zvláštním případě splyne bod C s A $(c = a)$, splyne s A také bod X, jak vychází z hořejší rovnice; podobně pro $c = b$ vychází také $x = b$. Splyne-li tedy jeden ze dvou sdružených prvků jedné dvojice harmonické skupiny s prvkem druhé dvojice, splyne s tímto prvkem i druhý prvek oné dvojice.[7])[8])

(Lze také říci: Jestliže jeden ze šesti uvedených dvojpoměrů nabude hodnoty -1 nebo 2 nebo $\frac{1}{2}$, jsou dva rovny -1, dva 2, dva $\frac{1}{2}$.) Můžeme podrobným počtem zjistiti, že je to jediný případ redukce oněch hodnot na menší počet než šest (jsou-li dané čtyři prvky různé a reálné).

[6]) Tím lze odůvodniti jméno soustavy, vyvozené (v čl. 16) konstrukcí čtvrtých prvků harmonických ke třem daným a odtud odvozeným (racionální).

[7]) Harmonická skupina čtyř prvků má významné vlastnosti metrické. Dejme tomu, že obyčejné souřadnice (úsečky) čtyř bodů A, B, C, D harmonické skupiny v řadě bodové jsou a, b, c, d. Rovnici o nich platící

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = -1$$

můžeme upraviti na tvar

$$ab + cd - \tfrac{1}{2}(a+b)(c+d) = 0.$$

Odtud vyplývá: 1. Položíme-li $a = 0$ (počátek souřadnic zvolíme v A), vychází $\frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$ čili $\frac{1}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}\right)$. T. j.: V harmonické skupině čtyř bodů jest vzdálenost bodu od bodu sdruženého harmonickým průměrem vzdáleností jeho od ostatních dvou bodů sdružených (a naopak). Odtud pochází jméno harmonické skupiny: *Pythagoras* a jeho škola nazývali totiž číslo b harmonickým průměrem (střední harmonicky úměrnou) čísel c, d, jestliže převratné hodnoty těchto tří čísel byly v spojité úměře aritmetické, t. j. $\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{d}$. Původ pojmenování toho je hudební: struny, jejichž délky jsou c, b, d, dávají harmonický trojzvuk (na př. 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$). Uvedenou větu lze zobecniti na případ libovolného dvojpoměru $\mathrm{Dp}(X_1X_2X_3X_4) = k$: platí $\frac{1-k}{x_2-x_1} = \frac{1}{x_4-x_1} - \frac{k}{x_3-x_1}$.

2. Pro $b = -a$ (počátek souřadnic S zvolíme uprostřed mezi A, B) obdržíme $a^2 = cd$ čili $\overline{SA}^2 = \overline{SB}^2 = \overline{SC} \cdot \overline{SD}$. T. j.: V harmonické skupině čtyř bodů jest vzdálenost středu dvou sdružených bodů od jednoho z nich

c) O dvojpoměrech různých skupin čtyř bodů v řadě bodové (prvků v základním útvaru jednomocném) platí rozmanité věty: na př.:

Jsou-li $A, B, C, D, E, \ldots, J, K$ prvky základního útvaru jednomocného, jest $\mathrm{Dp}\,(ABCD) \,.\, \mathrm{Dp}\,(ABDE) = \mathrm{Dp}\,(ABCE)$

a obecně

$$\mathrm{Dp}\,(ABCD) \,.\, \mathrm{Dp}\,(ABDE) \ldots \mathrm{Dp}\,(ABJK) = \mathrm{Dp}\,(ABCK).$$

Odvodíme z analytických výrazů pro uvedené dvojpoměry.

Protínají-li dvě příčky strany trojúhelníku ABC v bodech A', B', C' resp. A'', B'', C'', platí

$$\mathrm{Dp}\,(BCA'A'') \,.\, \mathrm{Dp}\,(CAB'B'') \,.\, \mathrm{Dp}\,(ABC'C'') = 1.$$

---

geometrickým průměrem jeho vzdáleností od ostatních dvou bodů sdružených (a naopak). Z toho plyne, že oba sdružené body C, D jsou na téže straně od S (středu úsečky AB); neboť SC a SD musí míti totéž znaménko.

Z těchto vlastností harmonické skupiny čtyř bodů nalezneme pro harmonickou skupinu čtyř paprsků a, b, c, d svazku paprskového (volíme-li $abcd \overline{\wedge} ABCD$ a paprsek jdoucí počátkem souřadnic na ose řady kolmý k této):

1. $\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,ab} = \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,ac} + \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,ad}\right)$ čili $\mathrm{cotg}\,ab = \frac{1}{2}\,(\mathrm{cotg}\,ac + \mathrm{cotg}\,ad)$.

2. $\mathrm{tg}^2\,sa = \mathrm{tg}^2\,sb = \mathrm{tg}\,sc \,.\, \mathrm{tg}\,sd$, je-li s paprsek půlící úhel paprsků a, b.

Vyjádříme-li dvojpoměr čtyř prvků A, B, C, D jako poměr dělicích poměrů prvků C, D vzhledem k základním prvkům A, B, totiž $\mathrm{Dp}(ABCD) = (ABC) : (ABD)$, vidíme, že platí:

Jestliže v harmonické skupině $ABCD$ dělicí poměr jednoho ze dvou sdružených prvků C (vzhledem k druhé dvojici A, B) jest λ, jest dělicí poměr druhého D téže velikosti, ale opačného znaménka — λ. Podle toho můžeme sestrojiti metricky ke třem daným bodům (na p) čtvrtý harmonický (D sdružený s C vzhledem k A a B): Vedeme body A a B dvě rovnoběžky, jež protneme příčkou jdoucí bodem C v A' resp. B'; naneseme na rovnoběžce bodem B úsečku $BB'' = B'B$; spojnice $A'B''$ protne p v bodě D.

[8]) Dvojice harmonicky sdružených bodů řady v metrické geometrii zvlášť významná je ta, jejíž dělicí poměry jsou + 1 a — 1: dělicí poměr + 1 má bod v nekonečnu, — 1 pak střed úsečky AB. Tvoří tedy střed úsečky AB a bod nevlastní na přímce její dvojici bodů harmonicky sdružených (vzhledem ke krajním bodům úsečky A, B). Pomocí této speciální skupiny harmonické lze jednoduše (metricky) sestrojiti čtvrtý bod harmonický D ke třem daným bodům A, B, C na přímce p: Na přímku vedenou bodem C naneseme $A'C = CB'$; bodem (AA', BB') vedeme rovnoběžku k $A'B'$; ta protne p v bodě D (neboť paprsky promítající body A', B', C, D'_∞, kde D'_∞ je nevlastní bod na $A'B'$, tvoří harmonickou skupinu).

Podle uvedeného sestrojíme také střed dané úsečky AB pouhým pravítkem, je-li dána rovnoběžka r k úsečce té; stačí sestrojiti čtvrtý bod harmonický k bodům A, B a bodu v nekonečnu pomocí čtyřrohu, jehož dva vrcholy jsou na r, dva pak v průsečících čtyř stran jeho, vedených body A, B a prvními dvěma vrcholy. Obráceně sestrojíme pravítkem rovnoběžku (jdoucí třebas daným bodem) k dané úsečce, daným bodem rozpůlené.

Dvojici sdružených paprsků s dělicími poměry + 1 a — 1 tvoří obě osy c, d dvou vedlejších úhlů sevřených paprsky a, b; jsou k sobě kolmé. Naopak jsou-li ze čtyř harmonických paprsků svazku dva sdružené k sobě kolmé, půlí úhly ostatních dvou paprsků; neboť oběma paprsky c, d k sobě kolmými a jedním ze zbývajících a je určen jednoznačně čtvrtý paprsek harmonický b (který tedy s a musí tvořiti úhly půlené paprsky c, d).

Neboť

$$A''A'CB \overset{S}{\wedge} B''B'CP, \quad C''C'BA \overset{S}{\wedge} B''B'PA$$

(kde jest $P = (SB, AC)$ a S průsečík obou příček), podle předešlé věty pak

$$\mathrm{Dp}\,(B''B'CP) \,.\, \mathrm{Dp}\,(B''B'PA) = \mathrm{Dp}\,(B''B'CA);$$

z obého plyne

$$\mathrm{Dp}\,(A''A'CB) \,.\, \mathrm{Dp}\,(C''C'BA) = \mathrm{Dp}\,(B''B'CA)$$

a odtud věta uvedená.

Jsou-li strany trojúhelníku ABC proťaty spojnicemi bodu s vrcholy jeho v bodech A_1, B_1, C_1 a příčkou v bodech A_2, B_2, C_2, platí

$$\mathrm{Dp}\,(BCA_1A_2) \,.\, \mathrm{Dp}\,(CAB_1B_2) \,.\, \mathrm{Dp}\,(ABC_1C_2) = -1.$$

Dokáže se obdobně jako věta předcházející.[9])

---

[9]) Z posledních dvou vět vyplývají, položíme-li příčku do nekonečna, věty afinní geometrie:

Příčka trojúhelníku určuje na stranách jeho tři body takové, že součin dělicích poměrů jejich vzhledem k vrcholům trojúhelníku (vzatým v cyklickém pořádku) jest roven 1 (věta *Menelaova*).

Spojnice bodu s vrcholy trojúhelníku určují na stranách jeho tři body takové, že součin dělicích poměrů jejich vzhledem k vrcholům trojúhelníku (vzatým v cyklickém pořádku) jest roven -1 (věta *Cevova*).

III. PROJEKTIVNOST SOUMÍSTNÝCH ÚTVARŮ JEDNOMOCNÝCH.

24. Samodružné prvky. *a*) Dva základní útvary jednomocné téhož druhu slují — jak známo — *soumístné*, jsou-li prvky jednoho z nich také prvky druhého útvaru; jsou tedy soumístnými dvě řady bodové na téže přímce, dva svazky paprskové v téže rovině se společným středem, dva svazky rovinové s touže osou. Každý prvek společného nosiče patří zde do obou útvarů, má tedy dvojí označení (na př. $A \equiv B'$).

Projektivnost dvou soumístných základních útvarů jednomocných, stanovenou třemi dvojicemi sdružených prvků, sestrojíme (jak bylo uvedeno v čl. 18*b*), přejdouce od útvarů těch k nesoumístným útvarům jiného druhu, jež jsou k daným útvarům perspektivní a navzájem tedy projektivní. Chtějíce na př. v soumístných řadách bodových (na přímce $p \equiv p'$), kde

$$ABC \barwedge A'B'C',$$

sestrojiti k bodu X jemu odpovídající bod X', promítneme první řadu svazkem paprskovým o středu S, druhou svazkem o středu S' (oba svazky volíme v téže rovině). Tyto svazky, jsouce perspektivní k projektivním řadám bodovým, jsou projektivní; k paprsku x, jenž promítá bod X, sestrojíme známým způsobem korespondující paprsek x'. Paprsek x' protne p' v bodě X'.

b) Při projektivnosti soumístných útvarů zvláštní pozornosti zaslouží prvky samodružné. Prvky *samodružné* (invariantní, dvojné) jsou v projektivnosti dvou soumístných útvarů (jak jméno svědčí) takové, jež odpovídají sobě samým. Podle základní věty o projektivnosti mají dva soumístné útvary jednomocné s třemi prvky samodružnými všechny prvky samodružné (projektivnost je identická); mohou tedy takové dva útvary v projektivnosti neidentické míti nejvýše dva prvky samodružné.

Že projektivnost s dvěma samodružnými prvky existuje, vidíme třebas na tomto případě: Dva projektivní, ne však perspektivní, nesoumístné svazky paprskové v téže rovině protněme přímkou, jdoucí dvěma průsečíky vždy dvou sdružených paprsků; dvě projektivní soumístné řady bodové na této přímce, řezy obou uvedených svazků

paprskových, mají v oněch průsečících body samodružné. Projektivní soumístné svazky paprskové s dvěma samodružnými paprsky nalezneme jako případ (v rovině) duální k uvedenému.[1])

Také projektivnost s jedním prvkem samodružným lze snadno nalézti: Protneme-li totiž dva perspektivní svazky paprskové v téže rovině přímkou, jdoucí průsečíkem společného paprsku jejich a osy perspektivnosti (různou od této osy), vzniknou na ní dvě projektivní soumístné řady bodové, jejichž jediný samodružný bod je onen průsečík. Duálně (v rovině) lze dostati dva projektivní soumístné svazky paprskové s jedním paprskem samodružným.

Existuje konečně také projektivnost bez prvků samodružných. V takové korespondenci jsou na př. dvě řady bodové, jejichž sdružené body X_1, X_2 oddělují harmonicky spolu s týmž bodem X dvě dvojice bodů A, B a C, D, které se harmonicky oddělují (tak totiž, že čtveřiny $ABCD$, $ABXX_1$, $CDXX_2$ jsou harmonické). Neboť samodružný bod O obou řad $[X_1]$ a $[X_2]$ musil by harmonicky oddělovati spolu s týmž bodem (P) obě dvojice AB i CD, což není možno. Je-li totiž bod P jako prvek řady $[X]$ položen mezi C a B (v určitém smyslu uspořádání, třebas ve smyslu ACB), musí bod O jako prvek řady $[X_1]$ ležeti mezi D a B v opačném smyslu (v smyslu ADB), protože uspořádané řadě $[X]$ odpovídá uspořádaná řada $[X_1]$ (jejich korespondence je totiž uskutečněna pomocí úplného čtyřrohu, tedy konečným počtem průmětů a řezů), bodu C pak a B odpovídá zde bod D, resp. B; pročež dvojice CD a PO se nemohou oddělovati, proti předpokladu, podle něhož dvojice sdružených bodů v řadách $[X]$ a $[X_2]$ odděluje dvojici CD.

Úhrnem tedy projektivnost dvou soumístných útvarů jednomocných může míti dva prvky samodružné a sluje *hyperbolická*, nebo má jeden prvek samodružný a sluje *parabolická*, nebo nemá prvku samodružného a sluje *eliptická*.

c) Kdy která projektivnost u dvou soumístných útvarů jednomocných existuje, souvisí se smyslem jejich uspořádání. Projektivnost je, jak víme, korespondence uspořádaná, t. j. útvaru uspořádanému odpovídá v ní útvar uspořádaný v témž nebo opačném smyslu; dva soumístné útvary uspořádané v témž smyslu slují *souhlasné*, *nesouhlasné* pak, jsou-li uspořádány ve smyslech opačných.

Na základě postulátu o spojitosti poznáváme, že *projektivnost dvou útvarů nesouhlasných je vždy hyperbolická*. Abychom to dokázali, dejme tomu, že v nesouhlasných útvarech prvku A (nesamodružnému, jaký se tam jistě vyskytuje, protože útvary v identické projektivnosti sdružené jsou souhlasné) odpovídá prvek A' a tomuto A' prvek A'';

[1]) Nebo, chtějíce obdržeti dvě projektivní řady soumístné s dvěma body samodružnými, protněme dva perspektivní svazky paprskové v rovině přímkou, různou od společného paprsku a od osy perspektivnosti; její průsečíky se společným paprskem svazků a s osou jejich perspektivnosti jsou samodružné body projektivních řad na této přímce.

uspořádané části $AA''A'$ odpovídá ta z obou částí $A'A''$, která je v oné obsažena, jsouc opačného smyslu vůči ní (je-li spec. prvek A'' totožný s A, platí totéž o části v AA' obsažené). Proto lze užíti důsledku postulátu o spojitosti (čl. 10): v části $A'A''$ (uvedeného smyslu, a tedy v $AA''A'$, ji obsahující) existuje samodružný prvek O_1, jemuž nepředchází žádný samodružný. Tento prvek O_1 je jediný samodružný v $AA''A'$; neboť každý element jemu v AA' (prvého smyslu) předcházející předchází svému korespondujícímu (jenž leží v $A'O_1$, druhého smyslu) a každý element za ním v AA' následující následuje za svým korespondujícím (jenž leží v O_1A''). Obdobně části $A'AA''$ odpovídá (v inversní projektivnosti) část AA' (opačného smyslu), v ní obsažená; také zde tedy existuje samodružný prvek O_2 a podle předcházející úvahy jediný (v části, doplňující se s částí prve uvažovanou na celý útvar). Má tudíž projektivnost dvou nesouhlasných útvarů dva prvky samodružné; tyto *samodružné prvky oddělují* sdružené prvky A, A', rovněž A', A'' a *každou dvojici prvků sobě odpovídajících*.[2])

Projektivnost dvou útvarů souhlasných jest však *buď hyperbolická nebo parabolická nebo eliptická*; to vyplývá ze dvou vět následujících. *V eliptické nebo parabolické projektivnosti jsou korespondující útvary vždy souhlasné*; neboť projektivnost útvarů nesouhlasných jest podle předchozího hyperbolická. *V projektivnosti hyperbolické jsou korespondující útvary buď souhlasné nebo nesouhlasné podle toho, zdali dvojice prvků sobě odpovídajících neodděluje nebo odděluje prvky samodružné.* Neboť buďtež na př. v projektivních řadách samodružné body O_1 a O_2, dvojice pak bodů sdružených A, A'; jestliže body A, A' neoddělují O_1 a O_2, jsou smysly O_1AO_2, $O_1A'O_2$ souhlasné; jestliže však A, A' oddělují O_1 a O_2, jsou smysly O_1AO_2, $O_1A'O_2$ nesouhlasné.

d) Jestliže jeden samodružný prvek je dán, sestrojíme druhý tímto způsobem:

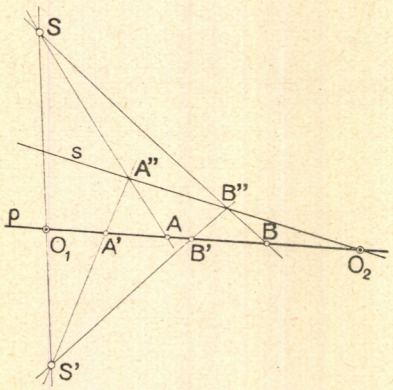
Projektivnost soumístných řad bodových na přímce p budiž určena samodružným bodem O_1 a dvojicemi bodů $A \neq A'$, $B \neq B'$ (obr. 36). Bodem O_1 veďme přímku a na ní zvolme středy S a S' dvou pomocných svazků paprskových (perspektivních k daným řadám i navzájem); osa jejich perspektivnosti s určena je body $A'' = (SA, S'A')$ a $B'' = (SB, S'B')$, protíná pak přímku p v druhém bodě samo-

Projektivnost dvou soumístných svazků paprskových se středem P budiž určena samodružným paprskem o_1 a dvojicemi paprsků $a \neq a'$, $b \neq b'$ (obr. 37). Na paprsku o_1 zvolme bod a veďme jím osy s a s' dvou pomocných řad bodových (perspektivních k daným svazkům i navzájem); střed jejich perspektivnosti S jest v průsečíku spojnic $a'' = (sa, s'a')$ a $b'' = (sb, s'b')$, jím pak prochází z P druhý

[2]) Z názoru poznáváme ovšem bezprostředně, že dva elementy nesouhlasných útvarů, následujíce po svých předcházejících v opačných smyslech (pohybujíce se opačnými smysly), musejí se dvakrát setkati (než se vrátí do svých východisek).

družném O_2, jenž ovšem může splynouti s bodem O_1.

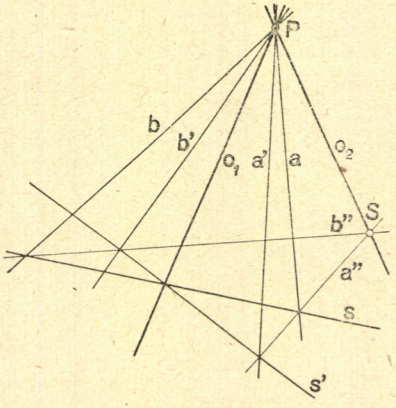
Nebo vedeme bodem O_1 přímku, kterou zvolíme za osu perspektivnosti dvou pomocných svazků paprskových, a na ní zvolíme body A'', B''; středy pomocných svazků jsou pak $S = (AA'', BB'')$ a $S' = (A'A'', B'B'')$. Spojnice SS' protíná p v druhém bodě samodružném O_2, jenž může splynouti s bodem O_1.



Obr. 36.

samodružný paprsek o_2, jenž ovšem může splynouti s paprskem o_1.

Nebo zvolíme na paprsku o_1 střed perspektivnosti dvou pomocných řad bodových a jím vedeme paprsky a'', b''; osy pomocných řad jsou pak $s = (aa'', bb'')$ a $s' = (a'a'', b'b'')$. Průsečíkem ss' prochází z P druhý paprsek samodružný o_2, jenž může splynouti s paprskem o_1.



Obr. 37.

Konstrukce obou samodružných prvků v projektivnosti útvarů soumístných, určené třemi dvojicemi sdružených prvků, není úloha tak jednoduchá (a bude řešena později).

e) Nejkratčeji rozhodneme otázku samodružných prvků v projektivních útvarech soumístných analyticky. Jestliže v obou útvarech, jejichž projektivnost je určena rovnicí (s koeficienty reálnými)

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0,$$

kde $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, byly zvoleny tytéž prvky základní (P_∞, P_0, P_1, jak vždy činíme), platí pro prvky samodružné $x' = x$. Nalezneme tedy souřadnice samodružných prvků z rovnice 2. stupně

$$\alpha x^2 + (\beta + \gamma)\, x + \delta = 0.$$

Rovnice druhého stupně (jejíž reálné koeficienty nejsou všechny nulové) má dva kořeny buď reálné různé nebo reálné splývající nebo komplexní sdružené: v prvním případě, je-li totiž $(\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta > 0$, má (neidentická) projektivnost dvou soumístných útvarů jednomocných

dva (různé) prvky samodružné, *je hyperbolická*; v případě druhém, je-li $(\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta = 0$, má projektivnost jeden prvek samodružný (dva splývající), *je parabolická*; konečně v třetím případě, je-li $(\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta < 0$, nemá projektivnost prvků samodružných, *je eliptická*.[3])[4])[5])

25. Význam prvků samodružných. *a*) Prvky samodružné spolu s jednou dvojicí prvků sobě odpovídajících určují projektivnost dvou základních jednomocných útvarů soumístných.

Jsou-li dány samodružné prvky a dva prvky sdružené, sestrojíme projektivnost takto určenou způsobem už dříve vyloženým:

U dvou soumístných řad bodových, jejichž projektivnost je dána samodružnými body O_1, O_2 a dvojicí AA', užijeme ke konstrukci dvou pomocných svazků paprskových, perspektivních k daným řadám i navzájem. Jejich středy S, S' leží na přímce, jdoucí jedním bodem samodružným O_1, osa s jejich perspektivnosti pak prochází druhým samodružným bodem O_2. Z bodů S, S' a $A'' = (SA, S'A')$ můžeme zvoliti dva (v příslušné poloze vzájemné); bod A'' určuje (spolu s O_2) osu s.

U dvou soumístných svazků paprskových, jejichž projektivnost je dána samodružnými paprsky o_1, o_2 a dvojicí aa', užijeme ke konstrukci dvou pomocných řad bodových, perspektivních k daným svazkům i navzájem. Jejich osy s, s' protínají se na jednom samodružném paprsku o_1, střed jejich perspektivnosti S leží na druhém paprsku samodružném o_2. Z přímek s, s' a $a'' = (sa, s'a')$ můžeme zvoliti dvě (v příslušné poloze vzájemné); přímka a'' určuje (spolu s o_2) střed S.

Konstrukce tato zůstává v platnosti i pro splývající prvky samodružné.

---

[3]) Prvního druhu je také případ, kdy $\alpha = 0$ (jeden kořen rovnice je ∞), rovnice projektivnosti má tvar $x' = ax + b$; k druhému patří případ, kdy $\alpha = 0$, $\beta + \gamma = 0$ (oba kořeny jsou ∞), rovnice projektivnosti je tvaru $x' = x + a$.

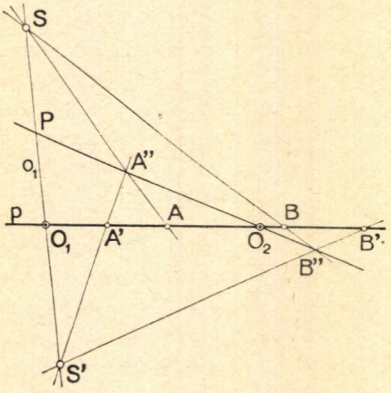
[4]) Z hořejší rovnice plyne také, že projektivnost s třemi prvky samodružnými je identická. Neboť jestliže rovnici té vyhovují tři kořeny, vyhovuje jí každá hodnota x, protože platí $\alpha = 0$, $\beta + \gamma = 0$, $\delta = 0$: projektivnost je identická, její rovnice se redukuje na $x - x' = 0$.

[5]) Metricky nalezneme samodružné prvky snadno tímto způsobem: Mějme na zřeteli, že projektivnost řad nesouhlasných má mocnost kladnou q^2, projektivnost řad souhlasných pak zápornou $-q^2$. Protože pro vzdálenosti sdružených bodů X a X' dvou soumístných řad od jejich bodů limitních J a I' platí $JX \,.\, I'X' = \pm q^2$, platí pro bod samodružný O rovněž $JO \,.\, I'O = \pm q^2$. Budiž S střed úsečky $I'J$; jest zajisté $SO = SJ + JO$ a $SO = SI' + I'O = -SJ + I'O$, odtud $\overline{SO}^2 = (JO + SJ)(I'O - SJ) = JO \,.\, I'O + SJ\,(I'O + OJ) - \overline{SJ}^2 = JO \,.\, I'O + \overline{SJ}^2 = \overline{SJ}^2 \pm q^2$. Sestrojíme tedy samodružný bod O tím, že určíme limitní body I' a J, střed jejich úsečky S, dále q jako střední geometricky úměrnou úseček JX a $I'X'$ a konečně $SO = \sqrt{\overline{SJ}^2 \pm q^2}$; platí ovšem $SO_2 = -SO_1$. Body samodružné metricky vyšetřuje obšírně na př. *Hankel*, Die Elemente der projektivischen Geometrie, p. 107 a n.

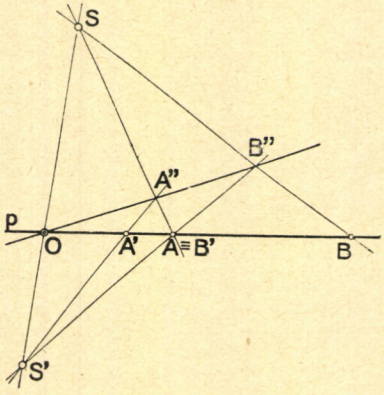
b) Význam prvků samodružných vysvitne z této jejich vlastnosti: *Všechny skupiny čtyř prvků v projektivních soumístných útvarech jednomocných, z nichž první dva jsou prvky samodružné a druhé dva různé prvky sobě odpovídající, jsou projektivní.*

K důkazu této vlastnosti samodružných prvků (třebas u projektivních řad bodových) označme je O_1, O_2; dvojice sdružených bodů buďtež AA' a BB' (obr. 38); t. j. ať platí

$$O_1O_2AB \barwedge O_1O_2A'B'.$$



Obr. 38.



Obr. 39.

Na přímce o_1, jdoucí jedním bodem samodružným O_1, zvolme body S a S'; z prvního promítněme skupinu bodů O_1O_2AB, z druhého skupinu $O_1O_2A'B'$. Obě tyto perspektivní skupiny paprsků mají osu perspektivnosti jdoucí bodem O_2, na níž leží body $A'' = (SA, S'A')$ i $B'' = (SB, S'B')$ a jež protíná o_1 v bodě P. Skupina O_1O_2AA' promítá se z bodu A'' do skupiny O_1PSS' na přímce o_1; do týchž bodů promítá se však skupina O_1O_2BB' z bodu B''. Jest tedy

$$O_1O_2AA' \barwedge O_1O_2BB'.$$

Důkaz tento zůstává v platnosti i tehdy, kdy samodružné body O_1 a O_2 splývají v bod O.

Jestliže při konstrukci parabolické projektivnosti (dané bodem dvojným O a dvojicí bodů sdružených A, A') zvolíme bod B' v A (bodu $A \equiv B'$ odpovídá pak v projektivnosti, inversní k uvažované transformaci, bod B, obr. 39), tvoří body S, S', A'', B'' čtyřroh, jehož protější strany protínají osu vyšetřovaných řad v bodech O, A a A', B tak, že odtud vyplývá: *V parabolické projektivnosti skládají prvek samodružný, libovolný prvek a dva prvky, odpovídající tomuto v transformaci dané*

i inversní, harmonickou skupinu. Jest tedy Dp $(OAA'B) = -1$, jestliže $OAB \barwedge OA'A$.[1])

c) Analyticky jest projektivnost dvou prvků samodružných $O_1(o_1)$, $O_2(o_2)$ a dvou dvojic prvků sdružených $A(a)$, $A'(a')$ i $B(b)$, $B'(b')$

$$O_1O_2AB \barwedge O_1O_2A'B'$$

vyjádřena rovností dvojpoměrů

$$\frac{o_1 - a}{o_2 - a} : \frac{o_1 - b}{o_2 - b} = \frac{o_1 - a'}{o_2 - a'} : \frac{o_1 - b'}{o_2 - b'}.$$

Zaměníme-li v úměře této členy vnitřní, obdržíme

$$\frac{o_1 - a}{o_2 - a} : \frac{o_1 - a'}{o_2 - a'} = \frac{o_1 - b}{o_2 - b} : \frac{o_1 - b'}{o_2 - b'}$$

čili

$$O_1O_2AA' \barwedge O_1O_2BB'.$$

Nalezli jsme tedy shodně s dřívějším výsledkem: *Ve dvou projektivních jednomocných útvarech soumístných jsou všechny dvojpoměry dvou prvků samodružných* (v určitém pořádku) *a kterýchkoli dvou* (různých) *prvků sdružených sobě rovny*; čili dvojpoměr dvou prvků samodružných a dvou sobě odpovídajících jest konstantní:

$$\mathrm{Dp}\,(O_1O_2X'X) = \frac{o_1 - x'}{o_2 - x'} : \frac{o_1 - x}{o_2 - x} = k.$$

Dvojpoměr k určuje spolu se samodružnými prvky, jsou-li různé, korespondenci projektivní; sluje proto *charakteristický dvojpoměr* projektivní transformace.

d) Dvojpoměr skupiny $O_1O_2X'X$ má u projektivnosti parabolické, kde $O_2 \equiv O_1$, hodnotu 1, nepřispívá tedy k stanovení projektivnosti. Můžeme však místo něho nalézti jinou konstantu podobného významu. Upravme totiž

$$\frac{o_1 - x'}{o_2 - x'} : \frac{o_1 - x}{o_2 - x} = k$$

na tvar

$$\frac{o_1 - o_2 + o_2 - x'}{o_2 - x'} : \frac{o_1 - o_2 + o_2 - x}{o_2 - x} = k$$

čili

$$\frac{o_1 - o_2}{o_2 - x'} + 1 = k\left(\frac{o_1 - o_2}{o_2 - x} + 1\right)$$

---

[1]) Větu tuto lze také obrátiti: *Projektivnost, v níž samodružný prvek a libovolný prvek jsou harmonicky odděleny dvěma prvky, které tomuto odpovídají v projektivnosti dané i inversní, jest parabolická.* Neboť je-li skupina $OAA'B$ harmonická, existuje čtyřroh $S_1S_2A''B''$, jehož dvě protější strany S_1S_2 a $A''B''$ jdou bodem O, další dvě S_1A'' a S_2B'' bodem A, pátá S_2A'' bodem A' a šestá S_1B'' bodem B; skupiny OAB a $OA'A$, promítnuty ze středu S_1 resp. S_2, objevují se projektivní s osou projektivnosti $A''B''$, takže druhý bod samodružný splyne s O.

a odtud

$$\frac{1}{o_2 - x'} - \frac{k}{o_2 - x} = \frac{k - 1}{o_1 - o_2}$$

čili

$$\frac{1}{x' - o_2} - \frac{k}{x - o_2} = \frac{1 - k}{o_1 - o_2}.$$

Blíží-li se prvek O_2 bez omezení prvku O_1, blíží se k hodnotě 1, a platí

$$\frac{1}{x' - o} - \frac{1}{x - o} = a,$$

kde o je souřadnice prvku samodružného $O \equiv O_1 \equiv O_2$ a $a = \lim \frac{1 - k}{o_1 - o_2}$. Číslo a sluje *charakteristická konstanta* parabolické projektivnosti.

K tomuto vztahu pro parabolickou projektivnost dospějeme také z její vlastnosti dříve uvedené (a z konstrukce dokázané), že totiž v parabolické projektivnosti s dvojným prvkem O, jež převádí prvek X v X' a prvek X' v X'', odděluje dvojice XX'' harmonicky dvojici OX'. Neboť tato vlastnost je vyjádřena rovnicí

$$\frac{x - o}{x - x'} = \frac{x'' - o}{x' - x''}$$

čili

$$\frac{(x - o) - (x' - o)}{x - o} = \frac{(x' - o) - (x'' - o)}{x'' - o}$$

čili

$$\frac{1}{x' - o} - \frac{1}{x - o} = \frac{1}{x'' - o} - \frac{1}{x' - o},$$

jež má týž smysl jako relace hořejší.

e) Z uvedených vět obdržíme *rovnice projektivnosti* hyperbolické a parabolické: Projektivní transformace *hyperbolická* (s dvěma různými prvky samodružnými), stanovená samodružnými prvky o souřadnicích o_1, o_2 a charakteristickým dvojpoměrem k, má rovnici

$$\frac{x' - o_1}{x' - o_2} = k \frac{x - o_1}{x - o_2}.$$

Projektivní transformace *parabolická* (s dvěma splývajícími prvky samodružnými), stanovená prvkem samodružným o souřadnici o a konstantou a má rovnici

$$\frac{1}{x' - o} = \frac{1}{x - o} + a.$$

Rovnice tyto jsou po úpravě vskutku bilineární v x, x'; pro $x' = x$ má první kořeny o_1, o_2, druhá dvojnásobný kořen o.

U projektivnosti vyjádřené homogenními rovnicemi

$$\varrho x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad \varrho x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

hledáme samodružné prvky tím, že sem dosadíme $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$ a řešíme soustavu rovnic

$$(a_{11} - \varrho)\, x_1 + a_{12} x_2 = 0,$$
$$a_{21} x_1 + (a_{22} - \varrho)\, x_2 = 0;$$

aby obě tyto homogenní rovnice pro x_1, x_2 měly řešení (jiné než 0, 0), k tomu je nutno a stačí, aby byl nule roven determinant z jejich koeficientů, t. j. aby platilo

$$A(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho \end{vmatrix} = 0;$$

po dosazení kořene této rovnice pro ϱ do jedné nebo druhé rovnice hořejší dostaneme hledané souřadnice x_1, x_2 prvku samodružného. Rovnice $A(\varrho) = 0$ sluje *charakteristickou rovnicí* projektivnosti s hořejšími rovnicemi; podle toho, má-li $A(\varrho) = 0$ dva kořeny reálné různé nebo splývající nebo imaginární, jest daná projektivnost hyperbolická resp. parabolická resp. eliptická.

V případě hyperbolické projektivnosti zvolme samodružné prvky její za základní prvky (0, 1) a (1, 0) soustavy souřadnic: musí tedy prvku (0, 1) odpovídati prvek (0, 1), t. j. musí současně platit $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$ a $x'_1 = 0$, $x'_2 \neq 0$, z čehož plyne $a_{12} = 0$; obdobně z podmínky, že prvku (1, 0) odpovídá prvek (1, 0), vyplývá $a_{21} = 0$. Zjednoduší se tedy rovnice hyperbolické projektivnosti dvou soumístných útvarů jednomocných při uvedené volbě soustavy souřadnic na tvar (t. zv. kanonický)

$$\varrho x'_1 = a_{11} x_1, \qquad \varrho x'_2 = a_{22} x_2;$$

z obou součinitelů a_{11}, a_{22} můžeme jeden vzhledem k faktoru úměrnosti ϱ voliti roven 1 (třebas $a_{22} = 1$); identickou projektivnost musíme vyloučiti podmínkou $a_{11} \neq a_{22}$ (nebo třebas volbou $a_{22} = 1$ a podmínkou $a_{11} \neq 1$). Poměr konstant a_{11}/a_{22} v rovnicích hyperbolické projektivnosti jest roven dvojpoměru obou základních prvků O_1, O_2 a dvou prvků sobě odpovídajících X', X.

Pro parabolickou projektivnost zvolíme samodružný prvek její za základní prvek (0, 1): dostaneme proto $a_{12} = 0$ a rovnice $A(\varrho) = 0$ se redukuje na $(a_{11} - \varrho)(a_{22} - \varrho) = 0$; protože pak platí $\varrho_2 = \varrho_1$, jest $a_{11} = a_{22}$. Klademe-li ještě vzhledem ke konstantě úměrnosti ϱ součinitele tyto a_{11}, a_{22} rovny 1, dostaneme zjednodušené rovnice projektivnosti parabolické ve tvaru

$$\varrho x'_1 = x_1, \qquad \varrho x'_2 = a_{21} x_1 + x_2,$$

kde $a_{21} \neq 0$.[2])

[2]) O projektivnostech metricky specialisovaných u soumístných útvarů s nosiči vlastními platí: Soumístné řady bodové v projektivní korespondenci hyperbolické, jejíž jeden samodružný bod je v nekonečnu, jsou *podobné*. Druhý samodružný bod její nalezneme z rovnice této podobnosti

$$\beta x + \gamma x' + \delta = 0;$$

má souřadnici $-\delta/(\beta + \gamma)$ a sluje (je-li v konečnu, $\beta + \gamma \neq 0$) *středem podobnosti* obou řad. Rovnice projektivní transformace, obsahující souřadnice

26. Prvky imaginární. *a*) Tím, že jsme prvkům základního útvaru jednomocného přiřadili soubor reálných čísel jako jejich projektivní souřadnice, získali jsme vhodnou a vydatnou pomůcku pro studium těchto útvarů. Výsledkům analytického vyšetřování nemůžeme však dáti stejně rozsáhlý výklad geometrický, dokud obor geometrických prvků nepřizpůsobíme oboru čísel v algebře. Jako tedy v algebře těleso čísel reálných rozšířeno bylo pomocí imaginární jednotky v těleso čísel komplexních, objevuje se při analytické metodě v geometrii projektivní potřeba soustavu reálných prvků základního útvaru jednomocného rozšířiti o prvky imaginární v soustavu prvků komplexních.

Podle úvahy, provedené (v čl. 19) na konstruktivním základě, určuje v základním útvaru jednomocném, v němž byly zvoleny tři základní prvky P_0, P_1, P_∞, kterým příslušejí (nehomogenní) souřadnice $0, 1, \infty$, každé reálné číslo x jediný prvek $P(x)$; obráceně každému prvku v útvaru přísluší jediné číslo reálné. Přijímáme nyní, že také *každé komplexní číslo x definuje* v uvažovaném útvaru *prvek komplexní* (o souřadnici x). Na nové prvky, s nimiž operujeme analyticky, rozšiřujeme podle příkladu algebry — pokud možno beze změny — pojmy definované u prvků reálných.

V řadě bodové na reálné přímce připustíme tedy mimo reálné body také body imaginární (komplexní), ve svazku paprskovém s reálným

---

obou bodů samodružných, redukuje se pro lim $o_2 = \infty$ na tvar

$$x' - o_1 = k\,(x - o_1).$$

Jestliže v další specialisaci jest u projektivnosti neidentické $k = \pm 1$ (řady *shodné*), dostáváme

$$x' = x + c \quad \text{nebo} \quad x' = -x + 2o_1,$$

kde v 1. případě jest $c = \lim (1 - k)\, o_1$ pro lim $o_1 = \infty$; t. j. shodné řady souhlasné jsou v projektivnosti parabolické s dvojnásobným bodem samodružným v nekonečnu (*přímá shodnost* řad, jedna řada přejde v druhou *pošinutím* o délku c), nesouhlasné jsou v projektivnosti hyperbolické s jedním bodem samodružným v konečnu a druhým v nekonečnu (*obrácená shodnost* řad, *souměrnost* podle středu o_1).

Soumístné svazky paprskové (rovinové) jsou v projektivní korespondenci metricky speciální *shodnými* buď téhož smyslu nebo opačných smyslů (*přímá* resp. *obrácená shodnost* svazků). Pro shodné svazky souhlasné platí

$$\operatorname{tg}(\xi' - \xi) = k,$$

pro shodné svazky nesouhlasné se samodružným paprskem (rovinou) o souřadnici tg o_1 jest

$$\operatorname{tg}(\xi' - o_1) = -\operatorname{tg}(\xi - o_1).$$

V 1. případě dostaneme úpravou $\operatorname{tg}\xi' - \operatorname{tg}\xi = k\,(1 + \operatorname{tg}\xi' \,.\, \operatorname{tg}\xi)$, takže pro samodružné prvky odtud vyplývá $\operatorname{tg}^2\xi + 1 = 0$. V 2. případě obdržíme $\operatorname{tg}(\xi' - o_1) = \operatorname{tg}(\pi - \xi + o_1)$, čili pro druhý prvek samodružný platí $\xi = o_1 + \frac{1}{2}\pi$. Shodné svazky souhlasné jsou tedy v projektivnosti eliptické (jeden prvek přejde v druhý *otočením* o úhel φ, kde $\operatorname{tg}\varphi = k$), shodné svazky nesouhlasné jsou v projektivnosti hyperbolické, jejíž samodružné prvky jsou k sobě kolmé (*souměrnost* podle prvku samodružného).

středem v reálné rovině také přímky imaginární, konečně ve svazku rovinovém s reálnou osou také imaginární roviny.

Z prvků komplexních zvláštní pozornosti zasluhují dvojice prvků, jejichž souřadnice jsou sdruženě imaginární ($x \pm iy$), jak je odůvodněno jejich původem (dále uvedeným).[1])

Vzhledem k dřívějším úvahám rázu základního jest tudíž obecně vytknouti, že korespondenci, odvozenou (v čl. 19) mezi geometrickými prvky a oborem čísel reálných, musíme (aspoň fakultativně, zde a také v dalším) doplniti postulátem *jednoznačné korespondence mezi oborem čísel komplexních a (komplexními) prvky geometrie projektivní*. Pro rozšířený obor prvků (v útvarech všech řádů) lze pak analyticky zjistiti platnost především postulátů o incidenci prvků, jakož i základní věty o projektivnosti.[2])[3])[4])

b) Nalezli jsme (v čl. 22), že dvojpoměr čtyř reálných prvků $P_k(x_k)$ jest určen výrazem

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4};$$

[1]) Vedle vytčených prvků imaginárních (bodu na reálné přímce, roviny s reálnou přímkou a přímky s reálným bodem v reálné rovině) jest připustiti ještě imaginární přímku (2. druhu) bez reálného bodu a bez reálné roviny, jež je spojnicí dvou imaginárních bodů nebo průsečnicí dvou imaginárních rovin s osami mimoběžnými.

[2]) Jak jsme dříve naznačili, jest možno analyticky zjistiti, že postuláty přijaté pro prvky geometrie projektivní (pro bod, přímku a rovinu) sobě neodporují, nahradíme-li bod skupinou čtyř čísel x_k (reálných, konečných, ne všech nulových, určitých až na libovolný faktor), přímku skupinou čtyř dvojčlenů $\lambda x_k + \mu x'_k$ (kde x_k a x'_k určují dva různé body), rovinu skupinou čtyř trojčlenů $\lambda x_k + \mu x'_k + \nu x''_k$ (kde x_k, x'_k a x''_k určují tři různé body nepatřící téže přímce). Touže cestou jest možno dokázati, že uvedené postuláty (vyjímaje postuláty o uspořádání) a tedy i jejich důsledky zůstanou v platnosti i pro prvky komplexní.

[3]) *Projektivní geometrii komplexní* (v prostoru s prvky komplexními) jest možno založiti samostatně na soustavě postulátů, obdobně jako se stalo pro geometrii prvků reálných. Viz v tom ohledu *M. Pieri*, Nuovi principii di geometria projettiva complessa, Memorie Accad. Torino (2) 55 (1905), k tomu doplněk v Atti Accad. Torino 41 (1906); *O. Veblen* a *J. W. Young*, A set of assumptions for projective geometry, Amer. Journal math. 30 (1908), a jejich Projective geometry II. (1918).

Jest však také možno imaginární prvky definovati a operace s nimi prováděti pomocí obvyklých prvků reálných, jak učinil zejména Staudt a jeho následovníci v geometrii synthetické (a jak později bude vzpomenuto).

[4]) Projektivnost mezi dvěma základními útvary jednomocnými lze, jak víme, definovati rovnicí $\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0$, o jejíchž reálných koeficientech platí $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. V této *reálné* projektivnosti odpovídají prvkům reálným reálné, prvkům imaginárním imaginární; budiž také poznamenáno, že odpovídají-li v ní sobě dva prvky imaginární ($x + iy$, $x' + iy'$), jsou zde i prvky k těmto sdružené ($x - iy$, $x' - iy'$) korespondujícími.

Někdy ovšem béřeme v úvahu i obecnější projektivnost, danou bilineární rovnicí s koeficienty komplexními (*projektivnost komplexní*).

týmž výrazem určujeme dvojpoměr čtyř prvků komplexních. Proto věty, jež byly o dvojpoměrech a jejich pomocí dříve odvozeny, zůstávají platnými i pro prvky komplexní.

Speciálně tvoří čtyři komplexní prvky harmonickou skupinu, jestliže jejich dvojpoměr má hodnotu — 1. V tom případě šest různých hodnot dvojpoměru všech možných permutací čtyř daných prvků redukuje se, jak víme, na tři hodnoty $(-1, 2, \frac{1}{2})$.[5])

Jiný případ redukce vyplývá zde však pro Dp $(ABCD) = k$ z volby $k = 1/(1-k)$ (nebo také $k = 1 - 1/k$); obdržíme totiž rovnici $k^2 - k + 1 = 0$ a odtud $k = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$. Skupina čtyř (komplexních) prvků, jejíž dvojpoměr má hodnotu $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$, sluje skupinou *ekvianharmonickou*;[6]) šest hodnot dvojpoměru daných čtyř prvků redukuje se u nich na dvě.

c) Samodružné prvky projektivnosti dvou soumístných útvarů základních určovali jsme (v čl. 24*e*) z její rovnice $\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0$ o reálných koeficientech $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (kde $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$) řešením kvadratické rovnice

$$\alpha x^2 + (\beta + \gamma)\, x + \delta = 0.$$

V třetím případě, kdy $(\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta < 0$, objevila se projektivnost eliptická bez prvků samodružných; vzhledem k předcházejícímu můžeme nyní říci, že *eliptická projektivnost má dva imaginární prvky samodružné*; jejich souřadnice jsou imaginární sdružené kořeny uvedené rovnice.[7])

Má tedy analytické vyšetření prvků samodružných ten výsledek, že (neidentická) *projektivnost dvou soumístných útvarů jednomocných má vždy dva prvky samodružné*: tyto samodružné prvky jsou u hyperbolické projektivnosti reálné různé, u parabolické reálné splývající, u projektivnosti eliptické sdruženě imaginární.

Nečiníme-li rozdílu mezi prvky reálnými a imaginárními, rozlišujeme pouze dvojí projektivnost soumístných útvarů jednorozměrných: *projektivnost s dvěma různými prvky samodružnými* (hyperbolická nebo eliptická) tvoří *první typ* projektivnosti (obecný), *projektivnost s dvěma splývajícími prvky samodružnými* (parabolická) je mezním případem typu obecného a představuje *druhý typ* projektivnosti (limitní).[8])

---

[5]) Jest záhodno si všimnouti, že ze dvou dvojic prvků, jež tvoří harmonickou skupinu, jenom jedna dvojice může býti dvojicí prvků sdruženě imaginárních (jak v krátkosti počtem zjistíme).

[6]) Pojmenování toto zvolil *L. Cremona* (1861).

[7]) Dva samodružné prvky eliptické projektivnosti mají souřadnice sdruženě imaginární; obráceně dva imaginární prvky nazýváme *sdruženě imaginární*, jsou-li jejich souřadnice $x + iy$ a $x - iy$ čili jsou-li prvky ty samodružnými prvky eliptické projektivnosti v základním útvaru jednomocném. Odtud je patrno, že přímka, určená dvěma body nebo dvěma rovinami sdruženě imaginárními, jest reálná, rovněž bod a rovina, určené dvěma přímkami sdruženě imaginárními, jsou reálné (což můžeme později zjistiti také analyticky).

[8]) Z rovnice projektivnosti $x' = (ax + b)/(cx + d)$ odvodíme, vyjdouce od transformace identické ($a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$) a dosadíce $a =$

d) Nalezli jsme syntheticky i analyticky, že v hyperbolické projektivnosti o samodružných prvcích O_1, O_2, v níž sdruženými prvky jsou A a A', B a B', platí $O_1O_2AA' \overline{\wedge} O_1O_2BB'$. Analytické odvození zůstává platným i pro imaginární prvky samodružné; proto také *v eliptické projektivnosti jest dvojpoměr dvou prvků samodružných a dvou sdružených konstantní.*

Projektivnost prvního typu (hyperbolická i eliptická) mezi soumístnými útvary základními $[X]$ a $[X']$ jest tedy stanovena dvěma (různými) prvky samodružnými $O_1(o_1)$, $O_2(o_2)$ a charakteristickým dvojpoměrem $k = \mathrm{Dp}\,(O_1O_2X'X)$, *má* pak *rovnici*

$$\frac{x' - o_1}{x' - o_2} = k\,\frac{x - o_1}{x - o_2}\,.^{9})^{10})^{11})$$

27. Involuční projektivnost. *a*) Projektivní transformace **P**, jež převádí prvky $A, B, C, \ldots$ jednoho útvaru základního v korespondující prvky $A', B', C', \ldots$ druhého útvaru soumístného, nepřevádí obecně

$= 1 + a_0\,\delta t$, $b = b_0\,\delta t$, $c = c_0\,\delta t$, $d = 1 + d_0\,\delta t$, kde δt je veličina infinitesimální, výraz pro *projektivní transformaci infinitesimální* ve tvaru $x' = x + [b_0 + (a_0 - d_0)\,x - c_0x^2]\,\delta t$ čili $x' = x + (\alpha + \beta x + \gamma x^2)\,\delta t$. Podle toho, má-li trojčlen $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ dva lineární faktory různé nebo stejné, jest projektivnost typu I. resp. II. O infinitesimálních projektivnostech a teorii na nich založené viz na př. *S. Lie-G. Scheffers*, Vorlesungen über continuierliche Gruppen, 1893.

[9]) Charakteristický dvojpoměr k jest u reálné projektivnosti hyperbolické reálný, u reálné projektivnosti eliptické jest komplexní s modulem 1.

[10]) Vezmeme-li u základního útvaru jednomocného v úvahu prvky komplexní, můžeme mimo projektivnost, určenou třebas třemi dvojicemi prvků sobě odpovídajících, v níž prvku o souřadnici $x + iy$ přísluší prvek o souřadnici $x' + iy'$, definovati ještě korespondenci, rovněž tak stanovenou, v níž však prvku $x + iy$ přiřadíme prvek $x' - iy'$ (sdruženě imaginární k onomu) a v níž tedy dvojpoměry dvou čtveřin prvků sobě odpovídajících mají hodnoty sdruženě imaginární. Tato příbuznost byla (*C. Segrem*) nazvána *antiprojektivnost*. Jejím zvláštním případem je transformace (neidentická), v níž všechny reálné prvky útvaru jsou invariantní, z imaginárních pak sobě odpovídají prvky sdruženě imaginární. Proti antiprojektivnosti jest projektivnost obapolně jednoznačnou transformací algebraickou. Viz *C. Juel*, Bidrag til den imaginaere Linies og den imaginaere Plans Geometri, Dis. Kodaň 1885; *C. Segre*, Un nuovo campo di ricerche geometriche, Atti Accad. Torino 25 a 26 (1889 a 1890), a Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici, Math. Annalen 40 (1892); *G. Sforza*, Contributo alla geometria complessa, Giornale mat. 30 (1892); *J. L. Coolidge*, The geometry of the complex domain, 1924. V souvislosti s geometrií prostoru Riemannova studuje *E. Cartan*, Leçons sur la géométrie projective complexe, 1931.

[11]) Z rovnice $ax^2 + (\beta + \gamma)\,x + \delta = 0$, jejíž kořeny udávají souřadnice samodružných bodů dvou projektivních řad soumístných, vyplývá pro tyto souřadnice $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{\beta + \gamma}{2a}$; vzhledem k tomu, že $-\beta/a$ a $-\gamma/a$ jsou souřadnice limitních bodů řad těch v dané projektivnosti, vidíme, že *střed úsečky omezené dvěma* (reálnými nebo imaginárními) *samodružnými body* dvou projektivních řad soumístných *jest spolu středem úsečky omezené jejich body limitními.*

prvku A' v prvek A, B' v B, C' v C, ... Tento druhý převod způsobuje transformace $\mathbf{P}^{-1}$, inversní k transformaci dané; obecně tedy není projektivní transformace totožná se svou transformací inversní ($\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^{-1}$). To můžeme pozorovati také takto: Každý prvek jednoho útvaru základního musíme čítati i do druhého útvaru soumístného; budiž na př. $A \equiv K'$. V transformaci projektivní $\mathbf{P}$ odpovídá prvku A prvek A', v transformaci $\mathbf{P}^{-1}$ odpovídá prvku K' prvek K; prvky A' a K jsou však obecně různé.

Neidentická projektivnost ($\mathbf{P}$) *mezi dvěma soumístnými útvary jednomocnými sluje involuční, je-li totožná se svou inversní*, t. j. je-li $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}$ (a $\mathbf{P} \neq \mathbf{1}$).

Z podmínky $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}$ vyplývá $\mathbf{P}^2 = \mathbf{1}$, a naopak; proto: Involuční projektivnost je možno definovati jako projektivní transformaci (neidentickou), jejíž čtverec je transformace identická, t. j. jež dvakrát na prvcích útvaru provedena vede k prvkům původním. (Dejme tomu, že projektivnost $\mathbf{P}$ převádí prvky $A, B, C, \ldots$ v prvky $A', B', C', \ldots$ a prvky $A', B', C', \ldots$ v prvky $A'', B'', C'', \ldots$; transformace $\mathbf{P}^2$ převádí tedy $A, B, C, \ldots$ v $A'', B'', C'', \ldots$ Je-li transformace $\mathbf{P}$ involuční, jest $A'' \equiv A$, $B'' \equiv B$, $C'' \equiv C, \ldots$)

Involuční projektivnost mezi soumístnými útvary základními 1. řádu čili *involuce* je velmi důležitá projektivnost speciální. Pravíme, že prvky, jež sobě v involuci příslušejí, *odpovídají sobě obapolně* (dvojím způsobem, dvojnásobně) čili jsou involučně sdruženy (konjugovány). Kdežto při obecné transformaci projektivní je nutno dbáti smyslu, kterým transformace postupuje, není toho třeba při transformaci involuční. Protože tedy při soumístných dvou útvarech, jež jsou v korespondenci involučně projektivní, není potřeba lišiti útvaru prvního a druhého, mluvívá se také o *dvojicích* jednoho a téhož útvaru *v involuci* sdružených.[1])[2])

b) Co je podmínkou toho, aby projektivnost byla involuční, udává věta: *Jestliže v projektivnosti dvou jednomocných útvarů soumístných existuje jedna dvojice různých prvků, jež sobě odpovídají obapolně, mají všechny dvojice korespondujících prvků tuto vlastnost, a projektivnost je involuční.*

Jestliže totiž v projektivnosti, jež prvky $[X]$ převádí v prvky $[X']$,

---

[1]) Dva jednomocné útvary soumístné, jejichž prvky si odpovídají v involuční projektivnosti, lze tedy pokládati za *jeden útvar jednomocný*, jehož elementy jsou dvojice sdružených prvků oněch obou útvarů; v témž smyslu se involuce pokládá často nikoli za transformaci (korespondenci), nýbrž za *soustavu dvojic* (involuční systém bodový, paprskový nebo rovinový). Systém involuční jest opět jednomocný útvar téhož druhu jako základní útvary dosud uvažované (při čemž jeho prvky jsou dvojice involuce). Jest pak patrno, že útvar projektivní k involuci je opět involuce.

[2]) O involuci tří dvojic bodových uvažoval už *Pappos*, šíře pak *Desargues* (1639), systém involuční studoval po prvé *Poncelet*; moderní teorii involuce jako projektivní korespondence podali *Chasles*, *Seydewitz* a *Staudt*.

koresponduje prvku A prvek A', různý od A, a současně prvku A' koresponduje prvek A, platí tu

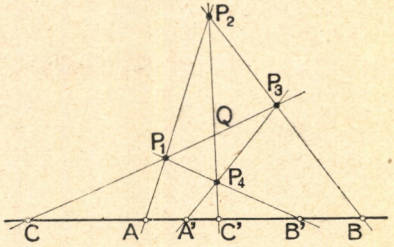
$$AA'X \wedge A'AX';$$

avšak o skupině čtyř prvků útvaru jednomocného platí

$$AA'XX' \barwedge A'AX'X;$$

projektivnost mezi těmito čtveřinami je vzhledem k předcházejícímu projektivností danou, pročež v uvažované projektivnosti odpovídají sobě prvky X a X' obapolně.[3])

Involuční projektivnost *jest* (jednoznačně) *určena dvěma dvojicemi* prvků sdružených. Neboť jsou-li dány dvojice AA' a BB', v projektivnosti sobě obapolně odpovídající, jest projektivnost určena vztahem $AA'B \barwedge A'AB'$.



Obr. 40.

c) Projektivnost involuční, stanovenou dvěma dvojicemi sdružených prvků, můžeme sestrojiti touže cestou jako obecnou projektivnost dvou útvarů jednomocných; jednodušeji však ji sestrojíme na základě (Desargovy) věty o úplném čtyřrohu rovinném (a vět duálních). V rovině totiž platí:

Tři dvojice protějších stran úplného čtyřrohu protínají libovolnou přímku (nejdoucí žádným vrcholem jeho) *ve dvojicích bodů v involuci sdružených.*

Tři dvojice protějších vrcholů úplného čtyrstranu promítají se z libovolného bodu (neležícího na žádné straně jeho) *dvojicemi paprsků v involuci sdružených.*

Za příčinou důkazu omezme se na čtyřroh $P_1P_2P_3P_4$ (obr. 40), jehož strany P_1P_2 a P_3P_4 protínají přímku p v bodech A a A', strany P_2P_3 a P_1P_4 v bodech B a B', strany P_1P_3 a P_2P_4 v bodech C a C' (z těchto dvojic aspoň jedna se skládá z bodů různých, budiž to dvojice CC'); průsečík stran P_1P_3 a P_2P_4 označme Q. Promítneme-li skupinu P_1P_3QC z bodů P_2 a P_4 na p, obdržíme

$$ABC'C \barwedge B'A'C'C;$$

avšak

$$B'A'C'C \barwedge A'B'CC'$$

(záměnou dvou dvojic ve skupině) a tedy

$$ABC'C \barwedge A'B'CC'.$$

[3]) Involuční projektivnost dvou soumístných útvarů jednomocných obdržíme na př. u řad bodových, v nichž dva projektivní nesoumístné svazky paprskové téže roviny protínají libovolnou přímku jdoucí středem projektivnosti svazků těch, a duálně u svazků paprskových, jimiž se dvě projektivní nesoumístné řady bodové téže roviny promítají z libovolného bodu ležícího na ose projektivnosti těchto řad.

Jak patrno, odpovídají sobě A a A', B a B', C a C', poslední dvojice bodů obapolně; platí tedy totéž o prvních dvou dvojicích.[4])

Majíce v involuci stanovené na p dvojicemi AA', BB' sestrojiti k bodu X sdružený bod X', vedeme bodem X přímku, na ní zvolíme dva body (P_1, P_3); jeden z těchto bodů spojíme s dvěma body různých dvojic daných a druhý s dvěma body zbývajícími. Nové průsečíky spojnic těch $(P_2$ a $P_4)$ určují přímku, jež protíná p v hledaném bodě X'. Jednoduchá tato konstrukce provádí se pouhým pravítkem.[5])

K uvedeným dvěma větám (o čtyřrohu a čtyrstranu) lze ovšem připojiti věty (v prostoru) duální; ke všem pak věty speciální pro případ, že nosič u involuce je incidentní s jedním nebo dvěma úhlopříčnými prvky útvaru daného.[6])[7])

d) Dva soumístné útvary v involuční projektivnosti mohou býti (jako v obecné projektivnosti) buď souhlasné nebo nesouhlasné.

Jestliže dvě dvojice sdružených prvků AA' a BB', involuci určující, se oddělují, odpovídá uspořádané části útvaru ABA' uspořádaná část $A'B'A$ téhož smyslu, ležící mimo ni (a doplňující ji na celek); útvary korespondující jsou tedy souhlasné. Každému dalšímu prvku X, ležícímu v jedné části, odpovídá prvek X', ležící v části druhé; nemohou tedy dva sdružené prvky splynouti, involuce nemá (reálných) prvků samodružných, je eliptická.

Můžeme také vyjíti od předpokladu, že dva útvary involučně projektivní jsou souhlasné; v tom případě odpovídají sobě části téhož smyslu, ležící mimo sebe, pročež každá dvojice této involuce odděluje každou jinou dvojici (involuce útvarů souhlasných je tedy eliptická).

Jestliže dvojice AA' a BB' dané involuce se neoddělují, odpovídá uspořádané části ABA' uspořádaná část $A'B'A$, jež je táž a opačného smyslu; útvary korespondující jsou tedy nesouhlasné. Involuce takových útvarů má však (podle věty o obecné projektivnosti útvarů nesouhlasných) dva (reálné) prvky samodružné, je hyperbolická.

---

[4]) Šest prvků tedy, jež jsou po dvou sdruženy v involuční projektivnosti (t. zv. šest prvků v involuci nebo tři dvojice prvků v involuci) tvoří čtyřrohovou skupinu prvků, dříve uvažovanou.

[5]) Tuto konstrukci bodu (C'), sdruženého k danému bodu (C) v involuci, určené danými dvojicemi AA' a BB' na p, můžeme vhodně prováděti také tímto postupem: vedeme body A, B, C po přímce (p_A, p_B, p_C), dále vedeme spojnici bodů A' a $p_B p_C$ i spojnici bodů B' a $p_A p_C$, konečně spojíme průsečík posledních dvou přímek a bod $p_A p_B$; spojnice ta protne p v C'.

[6]) Věta uvedená s počátku na straně levé bývá někdy jmenována podle *Desarga*, u něhož se už (se speciálními případy svými) vyskytuje.

[7]) Protneme-li strany čtyřrohu přímkou nevlastní a promítneme-li její průsečíky z libovolného bodu, dostaneme: Rovnoběžky vedené bodem k protějším stranám úplného rovinného čtyřrohu tvoří tři dvojice paprsků v involuci sdružených. Odtud pak plyne, že má-li úplný čtyřroh dvě dvojice protějších stran k sobě kolmých, má i třetí dvojici takovou (a že tři výšky trojúhelníku se protínají v jednom bodě).

A jestliže dva útvary, odpovídající sobě v involuční projektivnosti, jsou nesouhlasné, žádné dvě dvojice prvků sdružených se neoddělují; neboť předpoklad, že se oddělují, vedl by k útvarům souhlasným (involuce útvarů nesouhlasných je, jak uvedeno, hyperbolická).

Platí tedy úhrnem: *Involuční projektivnost dvou útvarů soumístných je eliptická, jestliže dvě dvojice sdružených prvků se oddělují* (útvary jsou souhlasné), *je hyperbolická, jestliže dvě dvojice prvků sdružených se neoddělují* (útvary jsou nesouhlasné).

Existují tudíž jenom *dva druhy involuční projektivnosti* (nezvrhlé): *hyperbolická* s dvěma prvky samodružnými a *eliptická* bez (reálných) prvků samodružných. Samodružný prvek involuce sluje (vzhledem k tomu, že představuje dvojici sdružených prvků) také prvkem *dvojným*.[8])

28. Rovnice involuční projektivnosti. *a*) Abychom obdrželi rovnici involuční projektivnosti, vložme do rovnice projektivnosti obecné

$$axx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0$$

(kde $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$) podmínku, že zde existuje jedna dvojice různých prvků X_1 a X'_1, jež sobě odpovídají obapolně, t. j. že v projektivnosti té prvku X_1 odpovídá prvek X'_1 a v téže projektivnosti prvku X'_1 odpovídá prvek X_1. Platí tedy současně

$$ax_1x'_1 + \beta x_1 + \gamma x'_1 + \delta = 0,$$
$$ax'_1x_1 + \beta x'_1 + \gamma x_1 + \delta = 0;$$

odečteme-li jednu rovnici od druhé, dostaneme

$$(\beta - \gamma)(x_1 - x'_1) = 0.$$

Protože pak jest $x_1 \neq x'_1$, vychází $\beta = \gamma$. *Rovnice involuční projektivnosti jest* tedy

$$axx' + \beta(x + x') + \delta = 0,$$

při čemž $\alpha\delta - \beta^2 \neq 0$.

Rovnice tato jest souměrná k souřadnicím obou prvků sobě odpovídajících, jak toho žádá pojem involuční korespondence. Odvození rovnice té podává spolu analytický důkaz věty (dokázané v čl. 27*b* syntheticky), že stačí jedna dvojice různých prvků involučně sdružených k tomu, aby všechny dvojice byly takové.[1])

Samodružné prvky involuce nalezneme, jako při obecné projektivnosti, z její rovnice, položíme-li do ní $x' = x$; souřadnice samodružných prvků jsou proto kořeny rovnice

$$ax^2 + 2\beta x + \delta = 0.$$

[8]) Je zajímavo poznamenati, že stejný nebo opačný smysl obou útvarů v involuční projektivnosti sobě odpovídajících stačí (na rozdíl od obecné projektivnosti) k úsudku o existenci (reálných) prvků samodružných.

[1]) Involučně projektivní vztah dvou soumístných základních útvarů jednomocných je explicite dán rovnicí

$$x' = \frac{ax + b}{cx - a} \quad \text{(s podmínkou } a^2 + bc \neq 0\text{)}.$$

Dva samodružné prvky involuce jsou tedy *reálné různé* (involuce je *hyperbolická*), je-li $\beta^2 - \alpha\delta > 0$, jsou *sdruženě imaginární* (involuce je *eliptická*), je-li $\beta^2 - \alpha\delta < 0$.[2]) V případě, kdy $\beta^2 - \alpha\delta = 0$, jest involuce (se samodružnými prvky splývajícími) projektivností zvrhlou; sluje *parabolická* (a lze ji vyloučiti).[3])

[2]) Eliptická involuce je velmi důležitá pro synthetickou definici prvků imaginárních: imaginární prvky konjugované lze totiž ryze geometricky definovati eliptickou involucí prvků reálných (jako samodružné prvky její). Učinili tak po prvé *Ch. Paulus* (Grundlinien der neueren ebenen Geometrie, 1853) a *K. G. Ch. Staudt* (Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856), jenž rozlišil oba konjugované prvky komplexní dvěma smysly uvažovaného útvaru jednomocného. Eliptická involuce taková je totiž dána dvěma dvojicemi reálných prvků AA' a BB', jež se odděluji; smyslem ABA' a obráceným $AA'B$ lze charakterisovati jeden a druhý samodružný prvek této involuce. Staudt vybudoval od základů podrobně geometrickou teorii prvků imaginárních ve shodě s projektivní geometrií prvků reálných: definuje imaginární bod, přímku a rovinu uvedeným způsobem v řadě bodové, ve svazku paprskovém a ve svazku rovinovém s reálnými nosiči; mimo to definuje imaginární přímku (druhého typu, bez reálného bodu a reálné roviny) obdobným způsobem v přímkové řadě zborcené druhého stupně (tuto involuci lze nahraditi lineární kongruencí reálných přímek s imaginárními osami); ukazuje potom, že o imaginárních elementech takto zavedených (spolu s prvky reálnými) platí základní věty geometrie projektivní (o incidenci), že lze na ně rozšířiti promítání i protínání a základní vlastnost úplného čtyřrohu, vedoucí ke skupinám harmonickým; konečně dospívá (pomocí skupin čtyř elementů) k definici reálné projektivnosti i pro prvky imaginární. Za dvojice prvků, jež eliptickou involuci určují, volil *Cl. Servais* dvě dvojice, oddělující se harmonicky. Teorii Staudtovu vykládá na př. *H. Pfaff*, Neuere Geometrie, 1867; dále *J. Lüroth*, Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen, Math. Annalen 8 (1875); *J. L. Coolidge*, The geometry of the complex domain, 1924; viz také *A. Ramorino*, Gli elementi immaginari nella geometria, Giornale mat. 36 (1898, 2. část historické monografie). Budiž zde ještě uvedeno: *Cl. Servais*, Sur les imaginaires en géométrie, Mémoires Acad. Belgique 49 (1896) a La projectivité imaginaire, tamtéž 52 (1895); *Q. Vetter*, Harmonická imaginárná čtveřina a obecná imaginárná kuželosečka, Program Lipník, 1909.

Místo eliptické involuce a smyslu (jak učinil Staudt) lze k synthetickému zavedení jednotlivých prvků imaginárních použíti mocnin eliptické projektivnosti a projektivnosti k ní inversní. V hyperbolické neinvoluční projektivnosti **P** konverguje totiž prvek A_k, probíhající řadu, jejíž každý člen následující odpovídá v projektivnosti té předcházejícímu, k jednomu z obou prvků samodružných; k druhému pak prvku samodružnému konverguje prvek A_{-k}, probíhající obdobně řadu prvků postupně sobě odpovídajících v $\mathbf{P}^{-1}$. Je-li **P** projektivnost eliptická, mohou stejně utvořené dvě řady prvků sloužiti k stanovení obou samodružných jejích prvků, tedy dvou imaginárních prvků konjugovaných; každá z obou řad určuje jeden prvek imaginární. Toto obecnější zavedení prvků imaginárních podal *H. Wiener* (Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden, 1885); viz na př. *F. Amodeo*, Lezioni di geometria proiettiva, p. 167 a násl.

[3]) Položíme-li základní prvky soustavy souřadnic P_0 a P_∞ do (různých sdružených) prvků jedné dvojice, má involuční projektivnost jednoduchou rovnici $xx' = k$; je-li reálná konstanta k kladná nebo záporná, jest involuce hyperbolická resp. eliptická. V reálné involuci hyperbolické

Z rovnice involuční projektivnosti poznáváme znova, že involuce je určena dvěma dvojicemi prvků sdružených. Jsou-li totiž tyto dvojice prvky o souřadnicích a, a' a b, b', platí

$$\alpha aa' + \beta(a + a') + \delta = 0,$$
$$abb' + \beta(b + b') + \delta = 0.$$

Ze dvou těchto rovnic můžeme vypočísti $\alpha : \beta : \delta$ a dosaditi do rovnice involuční projektivnosti, jež je tím určena.[4]) Rovnici involuce takto stanovené lze psáti ve tvaru

$$\begin{vmatrix} xx' & x + x' & 1 \\ aa' & a + a' & 1 \\ bb' & b + b' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Z dvojic involuci určujících může, jak patrno, jedna nebo mohou obě splynouti v prvky samodružné; je tedy involuce určena také jedním prvkem samodružným a jednou dvojicí prvků sdružených nebo dvěma prvky samodružnými.

b) Dva sdružené prvky oddělují harmonicky samodružné prvky involuce. Tato důležitá vlastnost involuce vyplývá při reálných prvcích samodružných (na př. u řad bodových) už z uvedené vlastnosti úplného čtyřrohu, jestliže průsečíky protějších stran jeho s přímkou u dvou dvojic splynou, t. j. prochází-li přímka jej protínající dvěma úhlopříčnými vrcholy jeho. Totéž plyne z vlastnosti involuce, vyjádřené vztahem

$$O_1O_2XX' \sim O_1O_2X'X,$$

kde O_1, O_2 jsou reálné prvky samodružné a X, X' tvoří dvojici prvků sdružených (obapolně si odpovídajících). A protože uvedená věta platí i obráceně (korespondence, v níž sobě odpovídají dva prvky, harmonicky oddělující dva pevné prvky, jest podle konstrukce projektivnost, a ovšem involuční s pevnými prvky jako samodružnými), může vlastnost ta definovati hyperbolickou involuci.

V involuci s dvěma (různými) reálnými nebo imaginárními prvky samodružnými platí o dvojpoměrech dvou prvků samodružných a dvou sdružených

$$\mathrm{Dp}(O_1O_2XX') = \mathrm{Dp}(O_1O_2X'X),$$

a tedy o charakteristickém dvojpoměru $k = \dfrac{o_1 - x'}{o_2 - x'} : \dfrac{o_1 - x}{o_2 - x}$ platí

$$k = \frac{1}{k}.$$

Odtud vychází $k^2 = 1$: protože pak $k \neq 1$, musí býti $k = -1$. Jest

odpovídají sobě vedle prvků reálných také prvky sdruženě imaginární, v reálné involuci eliptické však není takových dvojic.

[4]) Spolu vidíme (stejně jako z konstrukce), že kdežto dvě dvojice prvků patří do involuce (jimi určené), tři libovolné dvojice prvků nejsou v involuci.

proto involuce vždy projektivnost o charakteristickém dvojpoměru — 1; vlastnost nahoře uvedenou má tedy také involuce eliptická.

Rovnice involuční projektivnosti se samodružnými prvky o souřadnicích o_1, o_2 jest

$$\frac{x' - o_1}{x' - o_2} = -\frac{x - o_1}{x - o_2}.$$ [5][6][7])

---

[5]) Samodružné prvky involuce jsou prvky řešící tuto důležitou úlohu: Jest v základním útvaru jednomocném nalézti prvky, jež oddělují harmonicky dvě dané dvojice AA' a BB'. Zmíněná involuce jest určena danými dvojicemi, a hledané prvky jsou ovšem buď reálné (jestliže dané dvojice se neoddělují) nebo imaginární (oddělují-li se dané dvojice).

[6]) Ze dvou dvojic prvků sobě odpovídajících, jimiž je reálná involuce hyperbolická stanovena, může jedna nebo mohou obě dvojice býti složeny z prvků sdruženě imaginárních. Proti tomu reálná involuce eliptická nemůže obsahovati dvojici sobě odpovídajících prvků sdruženě imaginárních (jak zjistíme třebas z rovnice involuce a z podmínky pro involuci eliptickou).

[7]) Soumístné řady bodové jsou (v obecném případě) involučně projektivní, jestliže mezní body jejich jsou totožny; tento bod odpovídající obapolně bodu v nekonečnu sluje (jsa v konečnu) *střed involuce* (S). Je-li k mocnost takové projektivnosti, platí $\overline{SX} \,.\, \overline{SX'} = k$, t. j. *součin vzdáleností bodů sdružených od středu involuce jest konstantní.*

Je-li k kladné, leží sdružené body X a X' na téže straně od středu, involuce je hyperbolická; její samodružné body mají od středu vzdálenost $\pm\sqrt{k}$. Je-li k záporné, leží sdružené body X a X' na různých stranách od středu, involuce je eliptická; existují zde dva body stejně vzdálené od středu, jež sobě odpovídají.

Budiž poznamenáno, že dvě projektivní řady bodové (v libovolné poloze) lze učiniti involučně projektivními, položíme-li jednu (jako nezměněný celek) na druhou tak, aby jejich mezní body splynuly (výjimku činí ovšem podobné řady neshodné).

V hyperbolické resp. eliptické involuci protíná přímku p (na př.) svazek kružnic, jehož oba základní body leží na téže straně resp. na různých stranách od přímky p. Tyto svazky a tím involuci sestrojíme tak, že zvolíme (při daných dvou dvojicích involuce AA', BB') jeden základní bod svazku P a vedeme kružnice body $AA'P$, $BB'P$; další kružnice svazku dávají další dvojice involuce. Ty kružnice svazku, jež se přímky p dotýkají (v případě, že oba základní body svazku leží na téže straně od p), určují svými body dotyčnými samodružné body (hyperbolické) involuce na p.

Na tom lze založiti jednoduchou (metrickou) konstrukci samodružných bodů hyperbolické involuce (dané dvěma dvojicemi AA', BB') na p: sestrojíme chordálu uvedených dvou kružnic $AA'P$ a $BB'P$ i její průsečík S s přímkou p (střed involuce na p); délka tečny, vedené z bodu S ke kružnici svazku, udává vzdálenost jednoho i druhého bodu samodružného od S.

Jestliže ve dvou soumístných řadách bodových involučně projektivních je speciálně bod v nekonečnu samodružný, jest druhý bod samodružný v konečnu a odpovídají sobě (v hyperbolické involuci) body souměrně položené k tomuto bodu samodružnému (*souměrnost* řady bodové).

U soumístných svazků paprskových involučně projektivních je střed a nevlastní bod řad bodových zastoupen *pravoúhlou dvojicí* paprsků. Tuto dvojici sestrojíme tím, že paprsky svazku o středu S (involuci určující) protneme přímkou p v bodech AA', BB', vedeme kružnice SAA', SBB' a ve svazku jimi stanoveném sestrojíme kružnici se středem na p. Pravoúhlá dvojice involuce paprskové jest jako střed bodové involuce vždy

29. Involuce k projektivnosti přidružená. *a*) K dané projektivnosti dvou soumístných základních útvarů jednomocných můžeme s výhodou připojiti involuční projektivnost takto definovanou:

Každému (nesamodružnému) prvku X základního útvaru jednomocného odpovídá v dané projektivnosti **P** prvek X_1 a v projektivnosti

---

reálná; její paprsky slují *centrální paprsky* involuce. A platí $\operatorname{tg}\xi \,.\, \operatorname{tg}\xi' = k$, jsou-li ξ, ξ' úhly sdružených paprsků s paprskem centrálním.

Obdobně jako u řad lze dva projektivní svazky paprskové (v libovolné poloze) učiniti involučně projektivními, ztotožníme-li jejich pravoúhlé dvojice sobě odpovídající ($ab \barwedge a'b'$, tak ovšem, aby bylo $a' \equiv b$, $b' \equiv a$).

Jestliže ve speciálním případě $k = 1$, jest involuce (hyperbolická) tvořena dvojicemi paprsků *souměrně* položených vzhledem k paprskům samodružným, k sobě kolmým (jež půlí pravé úhly paprsků centrálních); tato involuce jest inversní shodnost ve svazku paprskovém (a každá inversní shodnost ve svazku je involucí). Jestliže pak $k = -1$, jest involuce (eliptická) tvořena dvojicemi paprsků k sobě kolmých a sluje *involucí pravoúhlou* (orthogonální); je to jediná přímá shodnost ve svazku paprskovém, která je involuční.

Pravoúhlá involuce paprsková protíná nevlastní přímku své roviny v bodové involuci eliptické, jež sluje *absolutní involucí* příslušné roviny (jest jediná); její imaginární (komplexní konjugované) body samodružné slují *kruhové* (cyklické) *body* roviny; imaginární samodružné paprsky pravoúhlé involuce, promítající kruhové body involuce absolutní, slují pak *přímky isotropní*.

Je zajímavé, že každou eliptickou involuci na vlastní přímce p (danou dvojicemi AA' a BB') lze promítnouti (ze dvou bodů roviny, přímku obsahující) pravoúhlou involucí paprsků (stačí sestrojiti dvě kružnice s průměry $\overline{AA'}$ a $\overline{BB'}$ na p, průsečíky jejich jsou středy dotčených svazků); proto *lze* také *každou eliptickou involuci* řady bodové (na přímce v konečnu) *promínouti do absolutní involuce* (na přímce v nekonečnu téže roviny).

Samodružné paprsky involuce pravoúhlé mají souřadnice, jež plynou z rovnice $\operatorname{tg}^2 \xi = -1$; jsou to $\operatorname{tg}\xi = \pm i$. Vzhledem k obecné vlastnosti involučních dvojic (že totiž harmonicky oddělují samodružné prvky involuce) *lze dvě kolmé přímky definovati jako dvojici přímek, jež harmonicky oddělují isotropní přímky, vedené jejich průsečíkem.*

Obecněji pak můžeme úhel φ dvou přímek a, b definovati projektivně pomocí dvojpoměru těchto dvou přímek a obou isotropních přímek svazku jimi určeného. Ve svazku paprskovém o středu ab mají (při volbě prve uvedené) isotropní přímky c_1, c_2 souřadnice i, $-i$, přímky a, b pak ať mají souřadnice $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$; dvojpoměr obou přímek isotropních a dvou přímek daných má hodnotu

$$\mathrm{Dp}\,(c_1c_2ab) = \frac{i - \operatorname{tg}\alpha}{-i - \operatorname{tg}\alpha} : \frac{i - \operatorname{tg}\beta}{-i - \operatorname{tg}\beta}.$$

Po úpravě čitatele i jmenovatele prvního zlomku na $\cos\alpha \pm i \sin\alpha = e^{\pm i\alpha}$ a obdobně u zlomku druhého dostáváme odtud opětovným dělením, zavedouce $\beta - \alpha = \varphi$,

$$\mathrm{Dp}\,(c_1c_2ab) = e^{-2i\varphi}, \text{ takže } \varphi = \tfrac{1}{2}i \,.\, \log \mathrm{Dp}\,(c_1c_2ab).$$

Tento důležitý vzorec, vyjadřující úhel ab jako součin z $\frac{1}{2}i$ a z přirozeného logaritmu dvojpoměru přímek a, b a isotropních přímek vedených jejich průsečíkem, odvodil po prvé *E. Laguerre* (1853).

Co bylo uvedeno o svazcích paprskových, platí obdobně u soumístných svazků rovinových.

inversní $\mathbf{P}^{-1}$ prvek X_{-1}. Sestrojíme-li k prvku X prvek X', jenž jej harmonicky odděluje od prvků X_1 a X_{-1}, *obdržíme ve dvojicích* XX' *dvojice involuce* **I**, *jež má tytéž samodružné prvky jako daná projektivnost* a sluje *involuce přidružená* (adjungovaná) *k dané projektivnosti* **P**.

Dejme tomu totiž nejprve, že projektivnost **P** má reálné různé prvky samodružné M, N; prvkům X a Y ať v ní odpovídají prvky X_1 a Y_1. Platí tu tedy

$$MNXY \barwedge MNX_1Y_1;$$

a protože jest

$$MNXY \barwedge NMY_1X_1,$$

odpovídají sobě dvojice prvků M a N, X a Y_1, Y a X_1 involučně.

Zvolíme-li $Y_1 \equiv X$, jest $Y \equiv X_{-1}$, takže poslední vztah můžeme psáti

$$MNXX_{-1} \barwedge NMXX_1,$$

t. j. MN a X_1X_{-1} tvoří dvojice involuce se samodružným prvkem X (neboť M a N odpovídají sobě obapolně); jsou tedy dvojice MN a X_1X_{-1} harmonicky sdruženy vzhledem k dvojici XX', a naopak prvky X a X' oddělují harmonicky nejen prvky X_1 a X_{-1} (podle konstrukce), nýbrž i prvky M a N. Má proto involuce s dvojicemi XX' tytéž samodružné prvky M a N jako daná projektivnost.

Totéž v případě nejen reálných, nýbrž také imaginárních prvků samodružných dokážeme analyticky. Daná projektivnost převádějící X v X_1 budiž

$$\alpha x x_1 + \beta x + \gamma x_1 + \delta = 0;$$

táž projektivnost převádí X_{-1} v X, takže platí také

$$\alpha x_{-1} x + \beta x_{-1} + \gamma x + \delta = 0.$$

Odtud určíme souřadnice x_1 a x_{-1}, totiž

$$x_1 = -\frac{\beta x + \delta}{\alpha x + \gamma}, \quad x_{-1} = -\frac{\gamma x + \delta}{\alpha x + \beta},$$

a dosadíme do rovnice

$$\frac{x' - x_1}{x' - x_{-1}} = -\frac{x - x_1}{x - x_{-1}},$$

platné pro prvky X a X', oddělující harmonicky prvky X_1 a X_{-1}. Po úpravě obdržíme rovnici

$$2\alpha x x' + (\beta + \gamma)(x + x') + 2\delta = 0,$$

jež představuje involuční projektivnost, tvořenou dvojicemi XX'. Involuce tato, adjungovaná k dané projektivnosti, má — jak vidíme — tytéž samodružné prvky jako daná projektivnost (jejich souřadnice jsou kořeny rovnice $\alpha x^2 + (\beta + \gamma)\, x + \delta = 0$).

Protože involuční projektivnost jest určena svými prvky samodružnými, můžeme involuci adjungovanou k dané projektivnosti prostě definovati jako involuci, mající tytéž prvky samodružné jako daná projektivnost.

Přidružená involuce má ovšem význam jen pro projektivnost neparabolickou neinvoluční; neboť involuce přidružená k parabolické projektivnosti je zvrhlá, k involuční projektivnosti pak je ona sama přidružena.

Involuce adjungovaná k dané projektivnosti (neinvoluční, hyperbolické nebo eliptické) jest pro ni tím právě důležitá, že má tytéž prvky samodružné jako ona, je však (jsouc involuční) jednodušší než ona; můžeme ji podle definice sestrojiti, aniž známe samodružné prvky dané projektivnosti. To má veliký význam zejména pro eliptickou projektivnost, jejíž imaginární prvky samodružné lze tedy určiti involucí přidruženou.[1])[2])

b) Involuce přidružená k dané projektivnosti byla v předešlém definována svou konstrukcí, a její hlavní vlastnost byla odvozena jednak (u projektivnosti hyperbolické) syntheticky, jednak (obecně) analyticky. Můžeme však adjungovanou involuci obecně zavésti ryze syntheticky.

Dejme tomu, že projektivnost **P** převádí prvky $[X]$ jednomocného útvaru základního v prvky $[X_1]$ soumístného útvaru jednomocného, projektivnost **T** pak že převádí útvar $[X]$ v soumístný $[X']$ a útvar $[X_1]$ v soumístný $[X'_1]$. Transformace, převádějící prvky $[X']$ v prvky $[X'_1]$, jest projektivností **P'**, jež je produktem $\mathbf{TPT}^{-1}$ a sluje, jak známo, transformovanou z projektivnosti **P** projektivností **T** (zároveň je projektivnost **P** transformovanou z projektivnosti **P'** projektivností $\mathbf{T}^{-1}$). Je-li speciálně projektivnost **P'** totožna s **P**, platí-li tedy

$$\mathbf{TPT}^{-1} = \mathbf{P}, \text{ jest } \mathbf{TP} = \mathbf{PT};$$

naopak ze vztahu $\mathbf{TP} = \mathbf{PT}$ vyplývá $\mathbf{TPT}^{-1} = \mathbf{P}$ a rovněž $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{PT} = \mathbf{P}$. Jestliže tedy ze dvou projektivností jest jedna transformována druhou v sebe samu, jsou obě záměnné; a obráceně jsou-li dvě projektivnosti záměnné, transformuje jedna z nich (rovněž projektivnost k ní inversní) druhou v ni samu.

Dvě neinvoluční záměnné projektivnosti jsou téhož druhu: obě jsou buď hyperbolické nebo parabolické nebo eliptické; a *mají* v prvních dvou případech *tytéž prvky samodružné*. Neboť je-li projektivnost **P** hyperbolická, musí projektivnost **T** každý z jejích prvků samodružných převáděti v samodružný prvek téže projektivnosti, tedy (jsouc neinvoluční) v něj sama; jest tudíž **T** rovněž hyperbolická s týmiž prvky samodružnými jako **P**. Je-li **P** parabolická, jest její samodružný prvek samo-

[1]) Pravíme proto, že imaginární (konjugované) samodružné prvky eliptické projektivnosti jsou reálně vyjádřeny adjungovanou involucí eliptickou.

[2]) Konstrukci vedoucí k involuci adjungované lze zobecniti tak, že se k prvku X sestrojí prvek X', jenž spolu s X_1 a X_{-1} (odpovídajícími onomu X v projektivnosti dané a inversní) má dvojpoměr hodnoty konstantní; projektivnost tak vznikající má tytéž prvky samodružné jako daná; viz *M. Pasch*, Beweis eines Satzes über projektive Punktreihen. Journal r. ang. Math. 91 (1881).

družným i při **T**, tato pak je rovněž parabolická, protože kdyby byla hyperbolická, byla by takovou i **P**. Konečně je-li **P** eliptická, musí býti eliptickou i **T**, protože předpoklad jiného druhu u **T** by vedl k témuž druhu pro **P**.

Hledejme nyní involuční projektivnost **I**, záměnnou s danou neinvoluční projektivností **P**. Má-li involuce **I** prvky samodružné, musí neinvoluční projektivnost **P** převáděti každý z nich v něj sama; proto prvek nesamodružný v **P** nemůže býti samodružným v **I**. Jsou-li X a Y dva různé prvky nesamodružné v **P**, jimž odpovídají v **P** prvky X_1, Y_1, v $\mathbf{P}^{-1}$ pak prvky X_{-1}, Y_{-1}, platí tu

$$XYX_{-1}Y_{-1} \asymp X_1Y_1XY.$$

Protože pak (po záměně dvou dvojic) jest

$$X_1Y_1XY \asymp XYX_1Y_1,$$

platí vzhledem k hořejšímu

$$XYX_{-1}Y_{-1} \asymp XYX_1Y_1;$$

odtud pak vyvozujeme (podle věty čl. 25*b*)

$$XYX_{-1}X_1 \asymp XYY_{-1}Y_1.$$

Za předpokladu, že prvky X a Y jsou prvky nesamodružné v **P**, lze zvoliti prvek Y (různý od X) za sdružený k X v involuci **I**; protože pak **P** a $\mathbf{P}^{-1}$ převádějí **I** v ni samu, jsou také dvojice X_1Y_1 a $X_{-1}Y_{-1}$ dvojicemi involuce **I**. Jest tedy

$$XYY_{-1}Y_1 \asymp YXX_{-1}X_1,$$

což spojeno s předcházejícím výsledkem dává

$$XYX_{-1}X_1 \asymp YXX_{-1}X_1,$$

t. j. skupina $XYX_{-1}X_1$ jest harmonická. Existuje-li tedy involuce **I**, záměnná s projektivností **P**, *jsou dvojicemi prvků v této involuci sdružených prvek X a prvek* ($Y \equiv X'$), *harmonicky sdružený s prvkem X vzhledem k prvkům X_1 a X_{-1}*; jest to involuce přidružená k projektivnosti **P**.

Involuce, k níž jsme zde dospěli (a jež dříve byla přímo uvedena), jest při dané projektivnosti **P**, jak její konstrukce svědčí, jednoznačně určena.

Jest hned patrno, že involuce **I** neexistuje, je-li projektivnost **P** parabolická; neboť je-li **P** parabolická, jest prvek $X' \equiv Y$, příslušný v **I** podle věty právě nalezené k libovolnému prvku X, totožný se samodružným prvkem této projektivnosti (vzhledem k druhé větě čl. 25*b*); **I** jest tedy projektivností zvrhlou.

Zbývá dokázati, že involuce **I** existuje, je-li projektivnost **P** neparabolická. V tom případě totiž prvek $Y \equiv X'$, harmonicky sdružený k nesamodružnému prvku X vzhledem k prvkům X_1 a X_{-1}, nemůže býti samodružný v **P** (kdyby byl, byla by **P** podle věty, obrácené k druhé větě čl. 25*b*, parabolická). Jest tedy splněn předpoklad úvahy před-

cházející (X, Y jsou prvky nesamodružné v **P**): existuje tudíž involuce s dvojicemi XY, X_1Y_1, $X_{-1}Y_{-1}$. Tato involuce transformuje vskutku hyperbolickou nebo eliptickou projektivnost **P** v ni samu; jest totiž $\mathbf{P}(XYX_{-1}Y_{-1}) = X_1Y_1XY$ a $\mathbf{IPI}(XYX_{-1}Y_{-1}) = \mathbf{IP}(YXY_{-1}X_{-1}) = \mathbf{I}(Y_1X_1YX) = X_1Y_1XY$; a jest tedy **I** záměnná s **P**.[3])[4])

c) Involuci přidruženou k dané projektivnosti můžeme (analyticky) obdržeti také z úvahy o svazku projektivností.

Jsou-li dvě projektivnosti $\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{P}_2$ mezi prvky dvou soumístných základních útvarů jednomocných vyjádřeny rovnicemi

$$\alpha_1xx' + \beta_1x + \gamma_1x' + \delta_1 = 0, \qquad \alpha_2xx' + \beta_2x + \gamma_2x' + \delta_2 = 0,$$

jejichž levé strany označíme π_1 a π_2, vyjadřuje rovnice

$$\pi_1 + \lambda\pi_2 = 0$$

pro každou hodnotu parametru λ opět projektivnost mezi týmiž útvary; soubor těchto projektivností sluje *svazek projektivností* mezi danými dvěma útvary.

V nekonečném počtu projektivností svazku jest vždy *jedna involuční*, totiž projektivnost, jejíž λ vyhovuje vztahu

$$\beta_1 + \lambda\beta_2 = \gamma_1 + \lambda\gamma_2, \text{ tedy pro } \lambda = \frac{\beta_1 - \gamma_1}{\gamma_2 - \beta_2}.$$

Je-li však $\beta_1 = \gamma_1$ a $\beta_2 = \gamma_2$, je λ neurčité: svazek určený dvěma involučními projektivnostmi obsahuje projektivnosti jen involuční.[5])

Projektivnosti svazku $\pi_1 + \lambda\pi_2 = 0$ mají různé prvky samodružné, jejichž souřadnice vyplývají řešením rovnice

$$(\alpha_1 + \lambda\alpha_2)\,x^2 + [(\beta_1 + \gamma_1) + \lambda\,(\beta_2 + \gamma_2)]\,x + (\delta_1 + \lambda\delta_2) = 0.$$

Mají-li speciálně projektivnosti $\pi_1 = 0$ a $\pi_2 = 0$ tytéž prvky samodružné, t. j. platí-li $\alpha_2 = \varrho\alpha_1$, $\beta_2 + \gamma_2 = \varrho\,(\beta_1 + \gamma_1)$, $\delta_2 = \varrho\delta_1$, mají všechny pro-

---

[3]) Jest patrno, že projektivnost **P** je určena svou involucí přidruženou **I** a jednou dvojicí prvků sobě odpovídajících A, A_1; neboť jsou-li s těmito dvěma prvky sdruženy v **I** prvky A', A'_1, a jestliže prvek A_{-1} harmonicky odděluje spolu s A_1 dvojici AA', jest **P** stanovena třemi dvojicemi AA_1, $A_{-1}A$, $A'A'_1$. Podle toho jest také možno **P** sestrojiti (z dané **I**, tedy také ze dvou samodružných prvků imaginárních, a z dvojice AA_1, pouhým pravítkem). Zároveň odtud vidíme, že k dané involuci přísluší nekonečně mnoho (neinvolučních) projektivností s ní záměnných (protože při určitém A jest možno zvoliti nekonečně mnoho prvků A_1); jsou také navzájem záměnné (takže dvě projektivnosti s touže adjungovanou involucí jsou záměnné).

[4]) Dvojici imaginárních prvků konjugovaných (bez rozlišení obou) určuje syntheticky jako samodružné prvky eliptické projektivnosti (stejně jako dvojici reálných prvků samodružných v projektivnosti hyperbolické) pomocí involuce s projektivností tou záměnné a příslušnou teorii elementárně podává *C. Segre*, Le coppie di elementi immaginari nella geometria proiettiva sintetica, Memorie Accad. Torino (2) 38 (1886).

[5]) Synthetickou teorii svazku projektivností podal *C. Segre*, Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux, Journal r. ang. Math. 100 (1886). Svazek involucí vyšetřoval však geometricky už dříve *H. Wiener*.

jektivnosti svazku tytéž samodružné prvky o souřadnicích, jež jsou kořeny rovnice

$$a_1x^2 + (\beta_1 + \gamma_1)\,x + \delta_1 = 0.$$

Vezměme v úvahu svazek projektivností, *určený projektivností danou*

$$axx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0$$

a projektivností identickou $x - x' = 0$, tedy svazek s rovnicí

$$axx' + (\beta + \lambda)\,x + (\gamma - \lambda)\,x' + \delta = 0.$$

Všechny projektivnosti tohoto svazku mají tytéž prvky samodružné jako daná projektivnost, totiž prvky, jejichž souřadnice plynou z rovnice

$$ax^2 + (\beta + \gamma)\,x + \delta = 0.$$

Mezi projektivnostmi tohoto svazku jest jediná projektivnost involuční, jejíž parametr λ vyhovuje rovnici $\beta + \lambda = \gamma - \lambda$, tedy pro $\lambda = \frac{1}{2}(\gamma - \beta)$; tato involuční projektivnost má rovnici

$$2axx' + (\beta + \gamma)\,(x + x') + 2\delta = 0,$$

má tytéž prvky samodružné jako projektivnost daná, jest to involuce přidružená k dané projektivnosti.[6])

30. Produkt dvou involucí. *a*) Produkt dvou involucí jest projektivnost; t. j. odpovídá-li útvaru $[X]$ v involuci $\mathbf{I}_1$ soumístný útvar $[X']$, tomuto pak v involuci $\mathbf{I}_2$ soumístný útvar $[X'']$, jest $[X]$ projektivní k $[X'']$ čili $[X]$ přechází v $[X'']$ projektivní transformací

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}_2\mathbf{I}_1$$

(kterážto symbolická rovnice je výsledkem těchto: $\mathbf{I}_1(X) = X'$, $\mathbf{I}_2(X') = X''$, $\mathbf{P}(X) = X''$).

Avšak také obráceně platí: *Každá projektivnost soumístných základních útvarů jednomocných jest produktem dvou involucí.* Neboť převádí-li projektivnost $\mathbf{P}$ prvek A v A' a tento A' v A'', stačí za $\mathbf{I}_1$ zvoliti involuci, jejímž samodružným prvkem je A' a dvojicí prvků sdružených AA''; platí zde

$$\mathbf{I}_1(A'A'') = A'A, \qquad \mathbf{P}(A'A) = A''A'$$

a proto

$$\mathbf{P}\mathbf{I}_1(A'A'') = A''A',$$

čili produkt $\mathbf{P}\mathbf{I}_1$, jsa projektivností, v níž A' a A'' sobě odpovídají obapolně, jest involucí (s dvojicí $A'A''$). Jest tedy

$$\mathbf{P}\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2 \quad \text{a konečně} \quad \mathbf{P} = \mathbf{I}_2\mathbf{I}_1.$$

[6]) Svazek eliptických projektivností s týmiž prvky samodružnými učinil zástupcem dvojice imaginárních prvků *F. Amodeo* (Fasci di omografie binarie e rappresentazione geometrica degli elementi immaginari, Giornale mat. 26, 1888; viz třebas jeho Lezioni di geometria proiettiva). Tato volba je pro synthetickou definici prvků imaginárních obecnější než ostatní; neboť ve svazku tom jsou obsaženy i jediná involuce, přidružená ke každé jeho projektivnosti, i mocniny libovolné projektivnosti a projektivnosti inversní o týchž prvcích samodružných.

Jedna z obou involucí ($\mathbf{I}_1$) má libovolný prvek A' za samodružný, prvky pak A'' a A, jemu v $\mathbf{P}$ a $\mathbf{P}^{-1}$ odpovídající, za prvky sdružené. Místo toho je možno takovou volbu provésti u druhé involuce $\mathbf{I}_2$; je-li totiž u $\mathbf{I}_2$ samodružným prvkem A' a tvoří-li zde dvojici prvky A a A'', jest

$$\mathbf{P}(AA') = A'A'', \qquad \mathbf{I}_2(A'A'') = A'A,$$

pročež

$$\mathbf{I}_2\mathbf{P}(AA') = A'A,$$

a tedy

$$\mathbf{I}_2\mathbf{P} = \mathbf{I}_1 \text{ čili } \mathbf{P} = \mathbf{I}_2\mathbf{I}_1.^{1})$$

Jedna i druhá involuce, jejichž produktem je $\mathbf{P}$, zaměňují samodružné prvky M, N dané projektivnosti $\mathbf{P}$; jednu z involucí, třebas první $\mathbf{I}_1$, lze tedy zvoliti nekonečně mnohými způsoby (volíme její samodružný prvek A', je určena tímto A' a dvojicí MN), druhá $\mathbf{I}_2$ je pak už určena (dvojicemi MN a $A'A''$).[2])[3])[4])

b) Projektivnost $\mathbf{P}$, jež je produktem daných dvou involucí $\mathbf{I}_1$ a $\mathbf{I}_2$, je obecně neinvoluční. *Dvě involuce, jejichž produktem jest* opět *involuce, slují harmonické.* O dvou harmonických involucích $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ platí tedy

$$\mathbf{I}_2\mathbf{I}_1 = \mathbf{I},$$

kde $\mathbf{I}$ je projektivnost involuční.[5])

Platí-li o kterýchkoli dvou involucích $\mathbf{I}_1$ a $\mathbf{I}_2$, že jejich produkt je projektivnost $\mathbf{P}$, tedy

$$\mathbf{I}_2\mathbf{I}_1 = \mathbf{P},$$

je produkt těchto involucí v obráceném pořádku vzatých projektivnost k oné inversní $\mathbf{P}^{-1}$, t. j.

$$\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2 = \mathbf{P}^{-1}.$$

A protože obecná projektivnost $\mathbf{P}$ je různá od své inversní, nelze pořádek dvou involucí v produktu zaměniti. Je to však možno učiniti, je-li produktem involucí projektivnost involuční $\mathbf{I}$, protože o této platí $\mathbf{I} = \mathbf{I}^{-1}$. Nalezli jsme tedy: *Harmonické involuce* (*a jenom tyto*) *jsou záměnné*: $\mathbf{I}_2\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_1\mathbf{I}_2$.

---

[1]) Obecněji, platí-li $\mathbf{P}(AB) = A'B'$, jest možno voliti za dvojice jedné z obou involucí AB' a $A'B$.

[2]) Tím, že jsou jednoduchými složkami projektivnosti, jsou involuce zvlášť důležité.

[3]) Protože z obou involucí, v něž lze danou projektivnost rozložiti, jest jedna volitelná, můžeme dvě dané projektivnosti $\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{P}_2$ rozložiti tak, že $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I}\mathbf{I}_1$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{I}_2\mathbf{I}$; produkt těchto projektivností jest pak $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{I}_2\mathbf{I}_1$.

[4]) Samodružné prvky projektivnosti jsou, jak patrno, společnou dvojicí obou involucí, jejichž je produktem. Na tom lze založiti sestrojení (pravítkem) involuce, určené dvěma dvojicemi, z nichž jedna nebo obě jsou tvořeny prvky sdruženě imaginárními: prvek odpovídající libovolnému prvku sestrojíme jako prvek, sdružený s ním v adjungované involuci projektivnosti, jež je produktem obou involucí se samodružnými prvky v prvcích daných.

[5]) Dvě involuce, mající produktem involuci, slují *harmonické*, protože dvojice jejich samodružných prvků (reálných nebo imaginárních) se harmonicky oddělují; ze dvou harmonických involucí je aspoň jedna hyperbolická.

Že záměnné involuce musí míti produktem involuci, vyplývá odtud, že v symbolické rovnici $\mathbf{I}_2\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_1\mathbf{I}_2$ jest $\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2$ transformací inversní k $\mathbf{I}_2\mathbf{I}_1$ (k $\mathbf{I}_2\mathbf{I}_1$ je inversní $\mathbf{I}_1^{-1}\mathbf{I}_2^{-1}$ čili $\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2$).[6])[7])

c) Produkt dvou záměnných involucí je involuce, která spolu s nimi tvoří *skupinu tří involucí* toho druhu, *že kterékoli dvě mají produktem involuci třetí*. Je-li

$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_2\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_1\mathbf{I}_2,$$

platí totiž také

$$\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_3\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1, \quad \mathbf{I}_3\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_1\mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_2.$$

Ze čtyř daných prvků v útvaru jednomocném lze utvořiti tři dvojice, jež určují takové tři involuce: stanoví-li z prvků A, B, C, D dvojice AB, CD involuci $\mathbf{I}_1$, dvojice AC, BD involuci $\mathbf{I}_2$, platí

$$\mathbf{I}_2\mathbf{I}_1(ABCD) = \mathbf{I}_2(BADC) = DCBA,$$

t. j. dvojice AD a BC určují involuci $\mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_2\mathbf{I}_1$. Z těchto tří involucí jsou vždy dvě hyperbolické a jedna eliptická.[8])

---

[6]) Kdežto při dané projektivnosti neinvoluční existuje jediná involuce s ní záměnná (totiž involuce k ní adjungovaná), existuje nekonečně mnoho involucí, záměnných s involucí danou (tvoří svazek involucí); každá z nich je určena jednou dvojicí svých prvků sdružených (neboť dva prvky, těmto v dané involuci odpovídající, jsou druhou dvojicí téže involuce a určují spolu s první dvojicí tuto involuci).

[7]) *Involuci harmonickou k dané projektivnosti* (neinvoluční) byla nazvána involuce, harmonická k její involuci adjungované; všechny involuce, harmonické k projektivnosti dané, a jen tyto transformují danou projektivnost v projektivnost inversní. *Dvě* (různé) *projektivnosti* **P**, **Q** slují *harmonické*, je-li jeden (a tedy i druhý) z produktů $\mathbf{PQ}^{-1}$, $\mathbf{QP}^{-1}$ involucí; jestliže tedy jedna převádí dva prvky A, B útvaru v prvky A', B', druhá v prvky B', A'. K dané projektivnosti existuje lineární soustava ∞^2 projektivností harmonických, ke dvěma daným ∞^1 harmonických, ke třem daným jedna harmonická. Viz *C. Stephanos*, Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace avec application à l'étude des rotations sphériques, Math. Annalen 22 (1883) (kde se projektivnosti vyšetřují pomocí svého znázornění body v prostoru, jejichž souřadnicemi jsou koeficienty v bilineární rovnici transformace projektivní); *C. Segre*, Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux, Journal r. ang. Math. 100 (1886); *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage III. O projektivnostech harmonických a jiných příbuzných pojednávají dále *C. F. Aschieri*, Delle omografie sopra una conica e dei loro sistemi lineari, Rend. Ist. Lomb. (2) 22 (1889); *Th. Reye*, Über symbolisches Rechnen mit geometrischen Verwandtschaften, Math. Annalen 43 (1893); *R. Böger*, Konjugierte Projektivitäten und adjungierte Involutionen, Mittheilungen Math. Ges. Hamburg 4 (1907); *St. Jolles*, Invarianz und Umkehrung von Projektivitäten und Kollineationen, Journal r. ang. Math. 149 (1919).

[8]) Konstrukcemi bodů, přímek a rovin, jež jsou určeny prvky imaginárními (po případě vedle reálných), zabývá se *S. Smith*, Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques, Annali mat. (2) 3 (1870); *J. Grünwald*, Lineare Lösung der Aufgaben über das Verbinden und Schneiden imaginärer Punkte, Geraden und Ebenen, Zeitschrift Math. Phys. 45 (1908), a Über das Konstruieren mit imaginären Punkten, Geraden und Ebenen, tamtéž 46 (1901); a j.

31. Periodické projektivnosti. *a*) Dejme tomu, že v projektivnosti **P** dvou soumístných základních útvarů jednomocných odpovídá prvku A_1 útvaru prvního prvek A_2 (různý od A_1) v druhém útvaru, tomuto A_2 pak jako prvku prvního útvaru prvek A_3 v útvaru druhém; tomuto A_3 opět prvek A_4 atd., konečně prvku A_{n-1} ať odpovídá prvek A_n a prvku A_n (žádnému však předcházejícímu) v prvním útvaru ať odpovídá prvek $A_{n+1} \equiv A_1$ druhého útvaru. Platí tedy

$$A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n \barwedge A_2A_3A_4 \ldots A_nA_1.$$

Vyjdeme-li od kteréhokoli jiného prvku B_1, jenž není samodružným prvkem projektivnosti **P**, obdržíme uvedeným způsobem opět skupinu prvků $B_1B_2B_3 \ldots B_{n-1}B_n$ takovou, že každému prvku skupiny odpovídá v **P** prvek následující a prvku B_n koresponduje prvek B_1. Neboť jest

$$A_1A_2A_3B_1 \barwedge A_2A_3A_4B_2 \barwedge \ldots \barwedge A_nA_1A_2B_n \barwedge A_1A_2A_3B_{n+1},$$

t. j.

$$A_1A_2A_3B_1 \barwedge A_1A_2A_3B_{n+1}$$

a proto (podle základní věty o projektivnosti) prvek B_{n+1}, odpovídající prvku B_n, jest B_1.

Prvky $A_1, B_1, C_1, \ldots$ přecházejí projektivností **P** v prvky $A_2, B_2, C_2, \ldots$, projektivností $\mathbf{P}^2$ v prvky $A_3, B_3, C_3, \ldots$, projektivností $\mathbf{P}^3$ v prvky $A_4, B_4, C_4, \ldots$ atd.; projektivnost $\mathbf{P}^{n-1}$ převádí $A_1, B_1, C_1, \ldots$ v prvky $A_n, B_n, C_n, \ldots$ a konečně projektivnost $\mathbf{P}^n$ převádí $A_1, B_1, C_1, \ldots$ v $A_1, B_1, C_1, \ldots$; jest tedy $\mathbf{P}^n$ projektivnost identická: $\mathbf{P}^n = \mathbf{1}$. Projektivnost **P** této vlastnosti sluje proto *periodická* (s periodou n nebo řádu n-tého).

Skupiny prvků $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, $B_1B_2B_3 \ldots B_n$, $C_1C_2C_3 \ldots C_n, \ldots$ slují *cykly* (s n členy); každý prvek cyklu X_k přechází projektivností **P** v prvek následující X_{k+1}, prvek poslední X_n pak přechází v prvek X_1. Projektivnost **P** sluje proto také *cyklická*.

Poznali jsme, že *projektivnost* **P** *jest periodická* (*periody* n), *jestliže existuje jediná skupina* n *prvků* $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, *jež se při ní cyklicky transformuje.*

Číslo n sluje perioda projektivnosti, jestliže n-tý prvek A_n je první v řadě $A_1A_2A_3 \ldots$, jemuž odpovídá A_1, čili je-li n nejnižší index prvku cyklus uzavírajícího.

Snadno dokážeme, že všechny prvky $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ jsou různé, potom že totéž platí o každé další skupině prvků $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$, a že tyto jsou různy od oněch: podmínky tohoto jsou, že X_1 není prvek samodružný a že je různý od všech prvků A_k skupiny první. Neboť kdyby platilo

$$A_q \equiv A_p,$$

kde $p < n$, $q < n$, $q > p$, platilo by $A_{q-p+1} \equiv A_1$, při čemž by bylo $q - p < n$ proti předpokladu, že A_n je prvek nejnižšího indexu, jemuž odpovídá $A_{n+1} \equiv A_1$. Kdyby dále platilo

$$X_k \equiv A_i,$$

kde $k \leqq n$, $i \leqq n$, následovalo by odtud, že $X_1 \equiv A_{i-k+1}$ nebo $X_1 \equiv A_{n+i-k+1}$, t. j. prvek X_1 by splýval s některým prvkem skupiny první. Konečně neplatí

$$X_q \equiv X_p,$$

kde $p < n$, $q < n$, $q > p$: neboť by platilo $X_{k+1} \equiv X_1$ pro $k = q - p < n$, což by mělo v zápětí $A_{k+1} \equiv A_1$ proti suposici.[1])

b) *Mocniny periodické projektivnosti* **P** (s periodou n) *jsou opět projektivnosti periodické, jejichž perioda je táž nebo nižší než* n. Neboť z $\mathbf{P}^n = \mathbf{1}$ plyne $\mathbf{P}^{kn} = \mathbf{1}$ pro libovolné (celé) číslo k: v-tá mocnina $\mathbf{P}^v$ dané projektivnosti **P** (kde v budiž číslo celé kladné) má periodu m, protože lze při zvoleném v vždy nalézti (nejmenší) číslo m, vyhovující vztahu $vm = kn$. Je-li číslo v nesoudělné s n, platí $m = n$; jestliže však má v s n společného (největšího) dělitele d, platí $m = n/d$.

Je-li $v > n$ a platí-li $v = hn + v'$, má $\mathbf{P}^v$ tutéž periodu jako $\mathbf{P}^{v'}$, protože $\mathbf{P}^v = \mathbf{P}^{hn} \cdot \mathbf{P}^{v'} = \mathbf{P}^{v'}$. Je-li $v < n$ a má-li $\mathbf{P}^v$ periodu m, jest cyklus prvků v projektivnosti $\mathbf{P}^v$

$$A_1 A_{1+v} A_{1+2v} A_{1+3v} \ldots A_{1+(m-1)v},$$

protože prvek A_{1+mv} splývá s A_1. Prvky tohoto cyklu patří všechny do cyklu prvků $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ projektivnosti **P**; neboť všechny indexy prvků zde uvedené $1 + kv$ lze vyjádřiti tvarem $hn + p$, kde $p < n$.

Odtud plyne zejména, že z prvků, jež tvoří n-členný cyklus projektivnosti **P** (s periodou n), lze utvořiti tolik cyklů s týmž počtem členů, příslušných k různým projektivnostem (mocninám projektivnosti **P**), kolik je čísel menších než n, s ním nesoudělných.

c) Rovnice projektivností (typu I. a II.), obsahující souřadnice samodružných prvků transformace, svědčí o tom, že periodická projektivnost může býti jenom typu I. (nemůže býti parabolická).

Je-li $n = 2$, jest periodická projektivnost **P** projektivností involuční: její samodružné prvky jsou, jak známo, reálné nebo imaginární. *Pro* $n > 2$ *jest periodická projektivnost* pouze *eliptická*, mající samodružné prvky imaginární.

Jestliže totiž samodružné prvky R, S projektivnosti **P** mají souřadnice r, s a prvky $X_j(x_j)$ tvoří cyklus o n členech ($j = 1, 2, 3, \ldots, n$), platí

$$\frac{x_2 - r}{x_2 - s} : \frac{x_1 - r}{x_1 - s} = k, \qquad \frac{x_3 - r}{x_3 - s} : \frac{x_2 - r}{x_2 - s} = k,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x_n - r}{x_n - s} : \frac{x_{n-1} - r}{x_{n-1} - s} = k, \qquad \frac{x_1 - r}{x_1 - s} : \frac{x_n - r}{x_n - s} = k;$$

[1]) Všechny cykly periodické projektivnosti **P** jsou spolu projektivní, a tyto projektivnosti mají tutéž adjungovanou involuci jako **P**. Jsou-li totiž $A_1 A_2 \ldots A_n$ a $B_1 B_2 \ldots B_n$ dva cykly projektivnosti **P**, existuje určitá projektivnost **Q**, mající tutéž adjungovanou involuci jako **P** a pře-

znásobíme-li tyto rovnice, dostaneme $1 = k^n$. Charakteristický dvojpoměr projektivnosti **P** jest tedy $k = \sqrt[n]{1}$, t. j. (nehledíme-li, jak přirozeno, k hodnotě 1), primitivní n-tý kořen z 1. Protože pak pro $n > 2$ jest k vždy komplexní, jsou při reálných prvcích X, samodružné prvky R, S imaginární.[2][3][4])

d) Mimo případ involuční projektivnosti ($n = 2$) jsou nejjednodušími periodické projektivnosti s periodou 3 a 4.

Projektivnost s periodou 3 je určena jediným svým cyklem $A_1A_2A_3$; neboť podmínka

$$A_1A_2A_3 \barwedge A_2A_3A_1$$

stanoví projektivnost.

Další cyklus $B_1B_2B_3$ této projektivnosti nalezneme v prvcích B_k, harmonicky oddělujících spolu s jedním prvkem A_k ostatní dva prvky této skupiny. Jsou-li totiž $A_1A_2A_3B_3$, $A_2A_3A_1B_1$, $A_3A_1A_2B_2$ harmonické čtveřiny, platí o nich, že jsou projektivní, t. j.

$$A_2A_3A_1B_1 \barwedge A_3A_1A_2B_2 \barwedge A_1A_2A_3B_3.$$

Dvojice A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 jsou dvojicemi involuce, adjungované k uvažované periodické projektivnosti 3. řádu; neboť prvek B_1 je harmonicky oddělující A_1 v B_1; tato **Q** je záměnná s **P**, pročež **P** převádí A_1B_1 v A_2B_2, A_2B_2 v A_3B_3, atd., **Q** pak převádí A_k v B_k.

[2]) Že periodické projektivnosti jsou při $n > 2$ eliptické, lze dokázati syntheticky takto: Tvoří-li $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ cyklus dané projektivnosti **P**, vezměme v úvahu skupiny sobě odpovídající

$$A_1A_2A_3,\ A_2A_3A_4,\ A_3A_4A_5,\ \ldots,\ A_{n-1}A_nA_1.$$

Kdyby řady prvků v **P** sobě odpovídající byly nesouhlasné, vidíme z první a druhé trojice, že prvek A_4 by ležel v té části útvaru prvky A_2 a A_3 rozděleného, která neobsahuje A_1; z druhé a třetí trojice pak vidíme, že prvek A_5 by ležel v té části A_3A_4, jež neobsahuje A_2, tedy v té části A_2A_3, jež neobsahuje A_1; tak postupujíce, dospěli bychom k výsledku, že A_1 leží v té části útvaru, jež neobsahuje A_1. Z tohoto sobě odporujícího důsledku je nutno souditi, že řady v **P** sobě odpovídající jsou souhlasné. A protože prvek X', odpovídající v **P** libovolnému prvku X, leží vždy v následující části uspořádaného útvaru (je-li X v části A_1A_2 určitého smyslu, jest X' v části A_2A_3, téhož smyslu jako A_1A_2, atd.), nemohou X a X' nikdy splynouti.

[3]) O periodických projektivnostech pojednává *Em. Weyr*, O promětnosti cyklické, Časopis math. fys. 11 (1882); syntheticky obšírně *A. Ameseder*, Theorie der cyklischen Projectivitäten, Sitzungsberichte Akad. Wien 98 (1889), a *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften I. (1908).

[4]) Pro cyklus n prvků periodické projektivnosti n-tého řádu existuje n involucí, jimiž se tato skupina reprodukuje; pro n liché má každá taková involuce jeden prvek cyklu samodružným a z ostatních vždy dva zaměňuje, pro n sudé má z involucí těch své samodružné prvky polovice ve dvou prvcích cyklu a polovice mimo cyklus, každá pak zaměňuje opět vždy dva z ostatních prvků cyklu. Odtud jsou patrny harmonické vlastnosti cyklu jako nutné podmínky toho, aby skupina n prvků v základním útvaru jednomocném tvořila cyklus projektivnosti s periodou n; tyto, jakož i dostačující podmínky vyšetřuje *B. Bydžovský*, Příspěvek k theorii cyklických projektivností, Časopis math. fys. 40 (1911).

monicky sdružen s prvkem A_1 vzhledem k dvěma prvkům A_2 a A_3, jež odpovídají prvku A_1 v projektivnosti dané a inversní, obdobně pak vznikly B_2 a B_3.[5])[6])[7])

Jestliže čtyři prvky A_1, A_2, A_3, A_4 tvoří cyklus *projektivnosti s periodou 4*, jest

$$A_1A_2A_3A_4 \barwedge A_2A_3A_4A_1,$$

a protože

$$A_2A_3A_4A_1 \barwedge A_1A_4A_3A_2,$$

platí

$$A_1A_2A_3A_4 \barwedge A_1A_4A_3A_2,$$

t. j. A_2, A_4 oddělují harmonicky prvky A_1 a A_3. To ostatně vyplývá i odtud, že projektivnost $\mathbf{P}^2$ musí býti involuční a seřaďuje tedy prvky A_k ve dvojice sdružených prvků A_1A_3 a A_2A_4. Čtyrčlenným cyklem této vlastnosti jest projektivnost s periodou 4 stanovena; aby totiž čtyři prvky tvořily cyklus projektivnosti s periodou 4, musí 1. a 3. prvek harmonicky oddělovati prvek 2. a 4. (neboť uvedené úsudky lze obrátiti).[8])[9])[10])

---

[5]) V této přidružené involuci odpovídají skupinám $A_1A_2A_3B_3$, $A_2A_3A_1B_1$, $A_3A_1A_2B_2$ pořadem skupiny $B_1B_2B_3A_3$, $B_2B_3B_1A_1$, $B_3B_1B_2A_2$; jsou tedy také tyto tři skupiny harmonické.

[6]) Cyklus prvků v periodické projektivnosti 3. řádu a samodružný prvek její tvoří skupinu ekvianharmonickou.

[7]) K synthetickému zavedení prvků imaginárních lze s výhodou místo eliptické involuce Staudtovy použíti periodické projektivnosti libovolného řádu, jak upozornil po prvé *F. Klein* (1872), rozvedl pak *J. Lüroth* (Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen, Math. Annalen 11, 1877). Nejjednodušší jest k tomu cíli projektivnost s periodou 3, jež má samodružnou dvojici imaginárních prvků konjugovaných; oba tyto prvky jest pak možno prostě rozlišiti dvěma smysly příslušného cyklu (reálných) prvků $A_1A_2A_3$ a $A_3A_2A_1$.

[8]) Budiž ještě poznamenáno, že o součinitelích v rovnici periodické projektivnosti $axx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0$ platí u stupně 3. relace $(\beta - \gamma)^2 + (\beta\gamma - a\delta) = 0$, u stupně 4. relace $(\beta - \gamma)^2 + 2(\beta\gamma - a\delta) = 0$.

[9]) Projektivnost jako bilineární korespondence dvou základních útvarů 1. řádu byla zobecněna v *korespondenci trilineární:* v této příbuznosti si navzájem odpovídají prvky tří jednomocných útvarů základních se souřadnicemi x, x' a x'', o kterých platí $axx'x'' + \beta x'x'' + \beta' xx'' + \beta'' xx' + \gamma x + \gamma' x' + \gamma'' x'' + \delta = 0$. Takto jsou sdruženy na př. řady bodové na třech přímkách v prostoru, učiníme-li korespondujícími vždy tři body, v nichž rovina jdoucí pevným bodem prostoru přímky ty protíná (spec. sdružíme-li body v trojicích, v nichž tři přímky téže roviny jsou proťaty přímkami této roviny); duálně tři svazky rovinové, jestliže učiníme korespondujícími vždy tři roviny jejich, jdoucí týmž bodem roviny pevné. Případ poslední vzal po prvé v úvahu (při vytvoření plochy 3. stupně) *F. August* (r. 1862). Trilineární korespondence mezi třemi základními útvary jednomocnými má na př. tyto vlastnosti: Obsahuje ∞^2 trojic sdružených prvků; jest určena sedmi trojicemi prvků sdružených. V každém útvaru jsou dva prvky singulární, takové totiž, že dvěma z nich, vzatým z různých útvarů, odpovídají jako třetí všechny prvky útvaru zbývajícího. Singulární prvky a dvě trojice prvků sdružených tvoří v uvažovaných útvarech tři skupiny po čtyřech prvcích, jejichž dvojpoměry mají součin rovný 1. Prvky dvou

32. Jeden a dva prvky v základním útvaru jednomocném. *a*) Každý prvek základního útvaru jednomocného, v němž byly zavedeny základní prvky P_0, P_1 a P_∞, jest stanoven (podle čl. 19) svými dvěma (projektivními) homogenními souřadnicemi ϱx_1 a ϱx_2 (kde $\varrho \neq 0$) vzhledem k těmto prvkům.

Jest často výhodné vztahovati prvek (x_1, x_2) útvaru jednomocného ke dvěma zvoleným prvkům (y_1, y_2) a (z_1, z_2) útvaru toho tím, že píšeme

$$x_1 = z_1 + \lambda y_1, \qquad x_2 = z_2 + \lambda y_2.$$

Neomezené množství hodnot parametru λ odpovídá všem jednotlivým polohám prvku (x_1, x_2); speciálně prvku (y_1, y_2) přísluší $\lambda = \infty$, prvku (z_1, z_2) pak $\lambda = 0$.

Lépe ovšem zavádíme místo parametru λ dvojici homogenních parametrů λ_1, λ_2, při čemž pro všechny prvky vyjma (y_1, y_2) platí $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$,

útvarů, jež tvoří s pevným prvkem třetího útvaru trojice prvků sdružených, odpovídají sobě v projektivnosti; podle toho lze trilineární korespondenci tří útvarů pokládati za svazek projektivností mezi prvky dvou útvarů, jehož členové projektivně odpovídají prvkům útvaru třetího. Trilineární korespondenci vyšetřovali *C. le Paige* (a *F. Folie*) v Mémoires Acad. Belgiques 42 (1879), 43 (1882), 45 (1884) (nazývá uvedenou korespondenci homografií 3. stupně 2. řádu); *H. Schubert*, Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden, Math. Annalen 17 (1880); *F. London*, Zur Theorie der trilinearen Verwandtschaft dreier einstufiger Grundgebilde, Math. Annalen 44 (1894); *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften I. (1908); o metrických vlastnostech této korespondence pojednal *G. Hauck*, Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme: IV. Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden, Journal r. ang. Math. 108 (1891). Pro trilineární korespondenci útvarů soumístných jest uvésti: *G. Castelnuovo*, Studio sulla omografia di seconda spezie, Atti Ist. Veneto (6) 5 (1887); *B. Klein*, Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde (1881), a Theorie der Elemententripel einstufiger Elementargebilde, Annali mat. (2) 18 (1890).

[10]) Jak bylo už v úvodě vytčeno, jsou dva jednomocné základní útvary v *korespondenci* (m, n)*-značné*, jestliže každému prvku prvního útvaru odpovídá n prvků útvaru druhého a každému prvku tohoto m prvků onoho; mají-li prvky uvažovaných útvarů souřadnice x resp. y, jest taková korespondence (příbuznost) vyjádřena rovnicí tvaru $\Sigma a_{hk} x^h y^k = 0$, kde součet se týká hodnot $h = 1, 2, \ldots, m$ a $k = 1, 2, \ldots, n$. Z počtu členů této rovnice vyplývá, že (m, n)*-značná korespondence jest* (jednoznačně) *určena* $mn + m + n$ *dvojicemi prvků sdružených*. Projektivní transformací přechází příbuznost (m, n)-značná opět v takovou. Jsou-li uvažované dva útvary soumístné, zajímají nás především prvky samodružné; z uvedené rovnice (vztahujeme-li ovšem prvky obou útvarů k týmž prvkům základním) poznáváme, že *v* (m, n)*-značné korespondenci existuje* $m + n$ *prvků samodružných*. Tato věta sluje *Chaslesův princip korespondenční* (z r. 1864, ač byla už dříve vyslovena *E. Jonquièrem*); jest pro svůj obecný význam velmi důležitá (platí u korespondence uvedeného druhu, i když její analytické vyjádření neznáme, lze-li jen její realisaci sledovati rovnicemi algebraickými). Pro začáteční úvahy o korespondencích (m, n)-značných viz na př. *Em. Weyr*, Beiträge zur Curvenlehre, 1880; *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften I, 1908; *E. Bertini*, Complementi di geometria proiettiva, 1928.

pro prvek (y_1, y_2) jest pak $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. Klademe tedy (vzhledem k tomu, že jde o čísla úměrná k x_1, x_2)

$$x_1 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1, \qquad x_2 = \lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2.$$

Zajímavý jest při tom geometrický význam koeficientů λ_1, λ_2: jsou to *projektivní homogenní souřadnice prvku* (x_1, x_2) *vzhledem k prvkům* (y_1, y_2), (z_1, z_2) a prvku $(y_1 + z_1, y_2 + z_2)$, jenž tedy platí jako jednotkový. Neboť, jak se výpočtem přesvědčíme, jest

$$\mathrm{Dp}\,(yzjx) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

kde $x = x_1/x_2$ a $y = y_1/y_2$, $z = z_1/z_2$, $j = (y_1 + z_1)/(y_2 + z_2)$.[1])

b) Jeden prvek základního útvaru jednomocného vyjadřuje se analyticky rovnicí (s koeficienty reálnými nebo komplexními)

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0,$$

kterou obdržíme, vyloučíme-li z rovnic pro $\varrho x_{1,2}$ konstantu ϱ. A obráceně každá taková rovnice, lineární v souřadnicích x_1, x_2, představuje prvek útvaru jednomocného o souřadnicích a_2, $-a_1$ (za suposice ovšem, že nejsou oba koeficienty rovnice té rovny nule).

Levá strana této rovnice sluje (v algebře) *binární forma lineární*, obsahujíc dvě proměnné x_1, x_2 a jsouc v nich prvního stupně; píše se symbolicky stručně a_x. Jest tedy rovnice elementu v jednomocném útvaru $a_x = 0$.

Dva prvky útvaru jednomocného buďtež vyjádřeny rovnicemi

$$a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0, \qquad b_x \equiv b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0;$$

aby tyto dva prvky se ztotožnily, k tomu je nutna a stačí rovnost jejich souřadnic $-a_2/a_1$, $-b_2/b_1$, tedy platnost relace

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

Levá strana rovnice té je determinant z koeficientů v rovnicích obou prvků uvažovaných $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.[2])

---

[1]) Dva prvky harmonicky sdružené vzhledem k prvkům (y_1, y_2) a (z_1, z_2) mají parametry λ_1/λ_2 a $-\lambda_1/\lambda_2$, tedy souřadnice $\lambda_1 y_{1,2} + \lambda_2 z_{1,2}$ a $\lambda_1 y_{1,2} - \lambda_2 z_{1,2}$ nebo jednodušeji $z_{1,2} + \lambda y_{1,2}$, $z_{1,2} - \lambda y_{1,2}$.

[2]) Jsou-li $a_x = 0$, $b_x = 0$ rovnice dvou různých prvků, vyjadřuje lineární kombinace rovnic těch $a_x + \lambda b_x = 0$ nebo ve tvaru homogenním $\lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x = 0$ vždy prvek jednomocného útvaru, určeného elementy $a_x = 0$ a $b_x = 0$; veličina λ nebo dvojice (λ_1, λ_2) je parametrem prvku toho. A obráceně libovolný prvek jednomocného útvaru základního, oněmi elementy určeného, $c_x = 0$ lze vyjádřiti uvedeným způsobem, protože lze vždy určiti λ_1 a λ_2 z rovnic $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 = c_1$, $\lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 = c_2$ (za suposice $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$). Představuje tedy rovnice $a_x + \lambda b_x = 0$ s proměnným parametrem λ *soustavu všech prvků jednomocného útvaru základního* (stanoveného dvěma různými prvky $a_x = 0$, $b_x = 0$; a jen těchto). Čtyři prvky

c) Dva prvky základního útvaru jednomocného $a_x = 0$, $b_x = 0$ lze vyjádřiti dohromady rovnicí $a_x b_x = 0$. Obráceně každá rovnice 2. stupně v proměnných x_1, x_2

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

vyjadřuje dva prvky jednomocného útvaru základního (reálné nebo komplexní).

Levá strana uvedené rovnice sluje *binární forma kvadratická* a píše se symbolicky a_x^2.

Dva prvky, vyjádřené rovnicí $a_x^2 = 0$, splynou v jeden prvek tehdy a jen tehdy, platí-li $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$; výraz tento, braný obyčejně s opačným znaménkem, tedy

$$D_a \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$

sluje *diskriminant* kvadratické formy a_x^2 (nebo rovnice $a_x^2 = 0$). Diskriminant D_a je determinantem z koeficientů prvních parciálních derivací formy a_x^2 podle obou proměnných nebo determinantem z druhých parciálních derivací formy a_x^2 podle x_1 a x_2 (u něhož vynechán součinitel 4).[3])

d) U rovnice dvou různých prvků, tedy u rovnice $a_x^2 = 0$ s diskriminantem D_a od nuly různým, vezměme v úvahu pro libovolný prvek $Y(y_1, y_2)$ jednomocného útvaru, onou dvojicí určeného, rovnici utvořenou lineárně ze souřadnic prvku toho a z prvních parciálních derivací formy $a_x^2 \equiv f(x_1, x_2)$ ve tvaru

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

čili rovnici

$$y_1 (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + y_2 (a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = 0,$$

kde vynechán faktor 2 a místo a_{12} psáno v druhé části souměrněji a_{21}. Levá strana této rovnice sluje *polární forma* prvku (y_1, y_2) vzhledem ke kvadratické formě $f(x_1, x_2)$.

Uvedená rovnice, lineární v x_1 a x_2, představuje prvek Z téhož útvaru jednomocného o souřadnicích

$$z_1 = a_{12}y_1 + a_{22}y_2, \qquad z_2 = -(a_{11}y_1 + a_{21}y_2);$$

---

téhož základního útvaru jednomocného $a_x = 0$, $b_x = 0$, $a_x + \lambda b_x = 0$, $a_x + \mu b_x = 0$ tvoří skupinu s dvojpoměrem λ/μ (spec. skupinu harmonickou pro $\mu = -\lambda$).

[3]) Zvolíme-li za prvky základní v jednomocném útvaru kterékoli dva prvky, harmonicky sdružené vzhledem k uvažované dvojici, nabude rovnice její tvaru

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

(neboť dva prvky, harmonicky sdružené vzhledem k prvkům o souřadnicích (0, 1) a (1, 0), mají nehomogenní souřadnice lišící se jen znaménkem). Další transformací souřadnic (změnou prvku jednotkového) lze tuto rovnici redukovati na tvar ještě jednodušší

$$x_1^2 + x_2^2 = 0;$$

tato transformace není však vždy reálná.

tento prvek $Z(z_1, z_2)$ sluje *polárným* k prvku $Y(y_1, y_2)$ vzhledem ke dvojici $f(x_1, x_2) = 0$. Protože souřadnice prvku Z jsou lineárně vyjádřeny souřadnicemi prvku Y (při čemž determinant transformace je různý od nuly), jest korespondence mezi proměnnými prvky Y a Z projektivnost; ježto pak bilineární rovnice, platná o y_1/y_2 a z_1/z_2, totiž $a_{11}yz + a_{12}y + a_{21}z + a_{22} = 0$, je souměrná vzhledem k těmto proměnným (neboť $a_{21} = a_{12}$), jest *projektivnost* tato *involuční*. Je tudíž i prvek Y polárným k prvku Z vzhledem k téže dvojici $f(x_1, x_2) = 0$. Z rovnice involuce té je pak zřejmo, že její samodružné prvky jsou totožny s danou dvojicí prvků $f(x_1, x_2) = 0$; dvojice prvků polárných (čili pólů), vzhledem k dané dvojici sdružených, odděluje ji tedy harmonicky.[4]) Tato korespondence mezi prvky Y a Z uvažovaného útvaru jednomocného vzhledem ke dvojici různých prvků $f(x_1, x_2) = 0$ sluje také *polárností* vzhledem k dané dvojici jeho prvků.

Budiž ještě poznamenáno, že polárná forma prvku (x_1, x_2) vzhledem k formě $f(x_1, x_2)$ jest s ní (až na faktor) totožna; neboť

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2f(x_1, x_2).$$

e) Mějme dále na zřeteli dvě dvojice prvků v témž základním útvaru jednomocném, určené dvěma rovnicemi

$$a_x^2 \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0,$$
$$b_x^2 \equiv b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 = 0.$$

Odvoďme nejprve podmínku toho, aby tyto dvě dvojice se harmonicky oddělovaly. K tomu cíli pišme obě rovnice jednodušeji ve tvaru nehomogenním

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}x + a_{22} = 0, \qquad b_{11}x^2 + 2b_{12}x + b_{22} = 0;$$

kořeny prvé rovnice buďtež $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, druhé rovnice $\varkappa_3$, $\varkappa_4$. Druhá dvojice odděluje prvou harmonicky, platí-li

$$\frac{\varkappa_3 - \varkappa_1}{\varkappa_3 - \varkappa_2} = -\frac{\varkappa_4 - \varkappa_1}{\varkappa_4 - \varkappa_2}$$

čili

$$\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_3\varkappa_4 - \tfrac{1}{2}(\varkappa_1 + \varkappa_2)(\varkappa_3 + \varkappa_4) = 0.$$

[4]) Že prvky Y a Z jsou harmonicky sdruženy vzhledem k prvkům $a_x^2 = 0$, vyplývá jednoduše i takto: Dosadíme-li souřadnice $z_1 + \lambda y_1$, $z_2 + \lambda y_2$ prvku s parametrem λ do $a_x^2 \equiv f(x_1, x_2)$ a uspořádáme-li tento výraz podle λ, obdržíme

$$f(z_1, z_2) + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial z_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} y_2\right) + \lambda^2 f(y_1, y_2);$$

odtud vidíme, že platí-li $\frac{\partial f}{\partial z_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} y_2 = 0$, mají dva prvky $a_x^2 = 0$ vůči prvkům Y a Z parametry o součtu rovném nule, t. j. že součet dvojpoměrů prvků Y, Z, prvku jednotkového J a jednoho i druhého z prvků $a_x^2 = 0$ jest roven nule. Z toho pak plyne, že dvojpoměr prvků Y, Z a prvků $a_x^2 = 0$ jest -1.

Z první rovnice hořejší vyplývá

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = -\frac{2a_{12}}{a_{11}}, \quad \varkappa_1\varkappa_2 = \frac{a_{22}}{a_{11}},$$

z druhé pak obdobně

$$\varkappa_3 + \varkappa_4 = -\frac{2b_{12}}{b_{11}}, \quad \varkappa_3\varkappa_4 = \frac{b_{22}}{b_{11}};$$

dosadíme-li tyto hodnoty do podmínky pro harmonickou polohu, nalézáme

$$a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12} = 0$$

jako *podmínku, aby dvojice* $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$ *se oddělovaly harmonicky.* Levou stranu této rovnice označme D_{ab}.

Hledejme dále výraz pro dvojpoměr čtyř prvků, daných hořejšími dvěma rovnicemi $a_x^2 = 0$ a $b_x^2 = 0$. Protože jest

$$\varkappa_{1,2} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-D_a}}{a_{11}}, \qquad \varkappa_{3,4} = \frac{-b_{12} \pm \sqrt{-D_b}}{b_{11}},$$

kde D_a, D_b jsou diskriminanty forem a_x^2, b_x^2, obdržíme

$$\varkappa_3 - \varkappa_1 = \frac{-a_{11}b_{12} + a_{12}b_{11} + a_{11}\sqrt{-D_b} - b_{11}\sqrt{-D_a}}{a_{11}b_{11}},$$

$$\varkappa_4 - \varkappa_2 = \frac{-a_{11}b_{12} + a_{12}b_{11} - a_{11}\sqrt{-D_b} + b_{11}\sqrt{-D_a}}{a_{11}b_{11}}$$

a tedy

$$(\varkappa_3 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_2) = \frac{(-a_{11}b_{12} + a_{12}b_{11})^2 - (a_{11}\sqrt{-D_b} - b_{11}\sqrt{-D_a})^2}{a_{11}^2 b_{11}^2} =$$

$$= \frac{D_{ab} + 2\sqrt{D_a D_b}}{a_{11}b_{11}},$$

kde D_{ab} jest výraz nahoře uvedený; obdobně je pak

$$(\varkappa_3 - \varkappa_2)(\varkappa_4 - \varkappa_1) = \frac{D_{ab} - 2\sqrt{D_a D_b}}{a_{11}b_{11}}.$$

Nalézáme tudíž pro $\dfrac{(\varkappa_3 - \varkappa_1)(\varkappa_4 - \varkappa_2)}{(\varkappa_3 - \varkappa_2)(\varkappa_4 - \varkappa_1)}$, t. j. pro *dvojpoměr čtyř prvků, určených rovnicemi* $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$, výraz

$$\frac{D_{ab} + 2\sqrt{D_a D_b}}{D_{ab} - 2\sqrt{D_a D_b}},$$

kde

$$D_a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \qquad D_b = b_{11}b_{22} - b_{12}^2, \qquad D_{ab} = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12}.$$

Pro dvojpoměr k čtyř prvků $a_x^2 = 0$ a $b_x^2 = 0$ platí tedy rovnice

$$(k-1)^2 D_{ab}^2 - 4(k+1)^2 D_a D_b = 0.$$

f) Jsou-li dány v základním útvaru jednomocném dvě dvojice prvků rovnicemi $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$, jest jejich lineární kombinací

$$a_x^2 + \lambda b_x^2 = 0$$

při proměnném parametru λ určen jednomocný systém dvojic prvků v útvaru tom; levá strana této rovnice (nebo v homogenním tvaru $\lambda_1 a_x^2 + \lambda_2 b_x^2$) sluje *svazek binárních forem kvadratických.*

Svazek kvadratických forem binárních, položen rovným nule, vyjadřuje *involuci dvojic prvků* v uvažovaném útvaru jednomocném. Neboť píšeme-li rovnici tu ve tvaru nehomogenním (pro souřadnici $x = x_1/x_2$ prvku)

$$(a_{11} + \lambda b_{11})\, x^2 + 2\,(a_{12} + \lambda b_{12})\, x + (a_{22} + \lambda b_{22}) = 0,$$

vidíme, že pro určité λ má dva kořeny $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, o kterých platí

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = \frac{-2\,(a_{12} + \lambda b_{12})}{a_{11} + \lambda b_{11}}, \qquad \varkappa_1 \varkappa_2 = \frac{a_{22} + \lambda b_{22}}{a_{11} + \lambda b_{11}};$$

vyloučíce z těchto dvou rovnic λ, dostaneme vztah, platný pro každou dvojici systému uvažovaného,

$$2\varkappa_1\varkappa_2\,(a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11}) + (\varkappa_1 + \varkappa_2)\,(a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}) + 2\,(a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12}) = 0.$$

Tato rovnice, jsouc bilineární a souměrná vzhledem k proměnným souřadnicím $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ dvou prvků útvaru, určených rovnicí $a_x^2 + \lambda b_x^2 = 0$, ukazuje, že vztah mezi prvky těmi jest involučně projektivní.

33. Skupiny *n* prvků. *a*) Racionální celistvá funkce n-tého stupně dvou proměnných x_1, x_2, homogenní v těchto proměnných, sluje (v algebře) *binární forma* (algebraická) *n-tého stupně*; píšeme ji obyčejně ve tvaru

$$a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \binom{n}{3} a_3 x_1^{n-3} x_2^3 + \ldots + a_n x_2^n,$$

kde a_k jsou konstantní koeficienty a $\binom{n}{k}$ čísla binomická (kladená tam pro zjednodušení při derivacích), značíme ji pak často a_x^n.

V jednomocném útvaru základním, jehož prvky mají homogenní souřadnice x_1, x_2, lze skupinu n prvků, určených rovnicemi $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$, . . ., $n_x = 0$, vyjádřiti součinem těchto n rovnic

$$a_x b_x c_x \ldots n_x = 0.$$

levá strana rovnice je tu binární formou stupně n-tého. Obráceně binární forma n-tého stupně a_x^n, položena rovnou nule, tedy rovnice

$$a_x^n = 0,$$

mající, jak se dokazuje v algebře, n kořenů $x_1 : x_2$ (béřeme-li ovšem kořeny násobné v příslušném počtu a připustíme-li kořeny imaginární),

vyjadřuje n prvků základního útvaru jednomocného (reálných nebo komplexních).[1])

b) Kdy mají dvě skupiny prvků téhož jednomocného útvaru základního prvek společný? Patrně tehdy, mají-li obě rovnice, skupiny ty vyjadřující, společný kořen.

Ze dvou rovnic stupně m-tého a n-tého $a_x^m = 0$, $b_x^n = 0$ jest možno za předpokladu, že oběma vyhovuje týž kořen $x_1 : x_2$, vyloučiti proměnné x_1 a x_2, t. j. lze odvoditi rovnici $R = 0$, obsahující koeficienty obou forem a_x^m, b_x^n a neobsahující proměnných x_1, x_2; levá strana R této rovnice sluje *resultant* forem a_x^m a b_x^n (nebo rovnic $a_x^m = 0$, $b_x^n = 0$). Rovnice $R = 0$ značí tedy, že *skupiny prvků* $a_x^m = 0$ *a* $b_x^n = 0$ *mají* (aspoň jeden) *prvek společný*.

---

[1]) Lineární kombinace dvou binárních forem n-tého stupně a_x^n a b_x^n tvoří t. zv. *svazek forem binárních* $a_x^n + \lambda b_x^n$ (s parametrem λ); rovnice $a_x^n + \lambda b_x^n = 0$ vyjadřuje pak lineární systém jednomocný čili *svazek skupin po n prvcích* čili *involuci prvků n-tého stupně*. Této t. zv. vyšší involuce prvkové speciálním případem je obyčejná involuce dvojic prvků jako involuce kvadratická. Involuce n-tého stupně jest určena libovolnými dvěma různými skupinami svými o n prvcích; každá skupina involuce jest určena hodnotou parametru λ (lépe $\lambda_1 : \lambda_2$); každý prvek základního útvaru jednomocného je obsažen (obecně) jen v jedné skupině involuce v útvaru stanovené.

Vyjdeme-li od $k + 1$ skupin po n prvcích, vyjádřených rovnicemi $f_h(x) = 0$ pro $h = 0, 1, 2, \ldots, k$ (kde $f_0(x)$ psáno místo a_x^n, $f_1(x)$ místo b_x^n, atd.), můžeme lineární kombinací forem $f_h(x)$ s k parametry $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, kterou položíme rovnu nule, tedy rovnicí

$$f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \ldots + \lambda_k f_k(x) = 0$$

definovati k-mocnou lineární soustavu skupin po n prvcích čili *involuci n-tého stupně k-té mocnosti (řádu)* prvků v útvaru jednomocném; značí se nejčastěji I_n^k (také I_k^n; místo k parametrů uvedených můžeme ovšem zavésti $k + 1$ homogenních parametrů od λ_0 do λ_k). Tak jest tedy pojem obyčejné involuce (2. stupně 1. mocnosti) rozšířen ještě druhým směrem. Z četných prací o involucích n-tého stupně k-té mocnosti budtež uvedeny: *Em. Weyr*, Über Involutionen höherer Grade, Journal r. ang. Math. 72 (1870); téhož Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen, Abhandlungen Böhm. Ges. Wiss. (6) 7 (1874); téhož Über Involutionen n-ten Grades und k-ter Stufe, Sitzungsberichte Akad. Wien 79 (1879); téhož Beiträge zur Curvenlehre, 1880; *C. le Paige*, Homographies et involutions des ordres supérieures, Jornal sc. math. astr. Coimbra 5 (1883); *F. Deruyts*, Mémoire sur la théorie de l'involution et de l'homographie unicursale, 1891. Pro nejjednodušší případy: *R. Böger*, Ebene Geometrie der Lage, 1900; *B. Klein*, Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde, 1881; *H. Bouvier*, Des involutions I_2^3 et $I^n{}_{n-1}$ données par leurs points multiples: relations et constructions, Nouv. Annales math. (4) 3 (1903); *H. Berliner*, Involutionssysteme in der Ebene des Dreiecks, 1914. Také *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften I, 1908; *J. A. Vreeswijk*, Involuties op rationale krommen, Diss. Utrecht 1905.

Resultant dvou forem a_x^m stupně m-tého a b_x^n stupně n-tého můžeme utvořiti tak, že znásobíme n forem a_x^m, do nichž jsme dosadili značky jednotlivých kořenů rovnice $b_x^n = 0$, nebo obráceně, že znásobíme m forem b_x^n s dosazenými jednotlivě kořeny rovnice $a_x^m = 0$ a že (souměrné) výrazy, složené z dosazených kořenů, nahradíme koeficienty formy druhé b_x^n resp. a_x^m. Odtud vyplývá, že resultant dvou forem stupňů m-tého a n-tého jest homogenní funkce koeficientů obou forem těch, jež je stupně n-tého v koeficientech prvé formy a stupně m-tého v koeficientech formy druhé. Jiné metody pro stanovení resultantu uvádějí se v algebře.

Na př. dvě lineární rovnice $a_x = 0$, $b_x = 0$ mají resultant $a_1b_2 - a_2b_1$; jeho nulová hodnota značí, jak jsme také dříve nalezli, že dva prvky jednomocného útvaru, rovnicemi těmi vyjádřené, jsou totožny.

U dvou rovnic kvadratických $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$ nalezneme resultant

$$R \equiv (a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})^2 + 4(a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11})(a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22});$$

$R = 0$ znamená tu, že obě dvojice prvků, danými rovnicemi určené, mají prvek společný. Uvedený resultant vypočte se buď způsobem nahoře dotčeným (pomocí kořenů a jejich souměrných funkcí); nebo na př. tím, že z 1. a 2. rovnice dané vyloučíme nejprve členy první (s x_1^2), potom členy třetí (s x_2^2) a z obou rovnic tak vzniklých vyloučíme $x_1 : x_2$; nebo také tím, že obě rovnice znásobíme jednou činitelem x_1, po druhé x_2 a eliminujeme proměnné x_1^3, $x_1^2x_2$, $x_1x_2^2$, x_2^3 (ve tvaru determinantním); a ještě jinými způsoby.

c) Pro skupinu n prvků jednomocného útvaru, vyjádřenou rovnicí $a_x^n = 0$, je významnou vlastnost, že dva z prvků těch splývají; to nastane ovšem tehdy, má-li uvedená rovnice kořen dvojnásobný. Vzhledem k tomu, že algebraická rovnice má (aspoň) dvojnásobný kořen, má-li tento kořen společný se svou první derivací, a že o homogenní funkci $a_x^n \equiv f(x_1, x_2)$ platí $\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 = nf(x_1, x_2)$, jest podmínkou toho nulová hodnota resultantu obou prvních derivací dané formy a_x^n. Resultant prvních parciálních derivací binární formy a_x^n podle obou proměnných x_1, x_2 sluje *diskriminantem* D formy a_x^n nebo rovnice $a_x^n = 0$ (při čemž lze vynechati konstantního součinitele n^2); je to homogenní funkce koeficientů dané formy stupně $2(n-1)$-ho. Je-li u formy a_x^n splněna podmínka $D = 0$, *jest mezi prvky skupiny* $a_x^n = 0$ *prvek* (aspoň) *dvojnásobný*.

Na př. u kvadratické formy a_x^2 nalezli jsme jako resultant obou parciálních derivací prvního řádu diskriminant $D_a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$; $D_a = 0$ značí, že oba prvky, dané rovnicí $a_x^2 = 0$, splývají v prvek dvojnásobný.

Kubická forma

$$a_x^3 \equiv a_0x_1^3 + 3a_1x_1^2x_2 + 3a_2x_1x_2^2 + a_3x_2^3,$$

položena rovnou nule, určuje tři prvky útvaru jednomocného; její

diskriminant nalezneme jako resultant kvadratických forem (součinitel 3 vynechán)

$$a_0x_1^2 + 2a_1x_1x_2 + a_2x_2^2, \qquad a_1x_1^2 + 2a_2x_1x_2 + a_3x_2^2$$

podle výsledku prve (v odst. *b*) uvedeného ve tvaru

$$D \equiv (a_0a_3 - a_1a_2)^2 + 4\,(a_0a_2 - a_1^2)\,(a_2^2 - a_1a_3).$$

$D = 0$ svědčí, že ze tří prvků $a_x^3 = 0$ (aspoň) dva splývají.[2])

d) Prvek jednomocného útvaru základního, jehož souřadnice vyjádříme pomocí souřadnic dvou zvolených prvků $Y(y_1, y_2)$ a $Z(z_1, z_2)$ útvaru toho tvarem $z_1 + \lambda y_1$, $z_2 + \lambda y_2$, jest prvkem skupiny $a_x^n \equiv$ $\equiv f(x_1, x_2) = 0$ tehdy a jen tehdy, jestliže jeho parametr λ vyhovuje rovnici

$$f(z_1 + \lambda y_1, z_2 + \lambda y_2) = 0.$$

Rozveďme levou stranu této rovnice podle věty Taylorovy na tvar

$$f(z_1, z_2) + \lambda \cdot \Delta_y f(z_1, z_2) + \tfrac{1}{2}\lambda^2 \cdot \Delta_y{}^2 f(z_1, z_2) + \tfrac{1}{6}\lambda^3 \cdot \Delta_y{}^3 f(z_1, z_2) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\lambda^n \cdot \Delta_y{}^n f(z_1, z_2),$$

kde operační symboly $\Delta_y{}^p$ pro funkci $f(z_1, z_2)$ značí

$$\Delta_y f(z_1, z_2) = y_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial z_2},$$

$$\Delta_y{}^2 f(z_1, z_2) = y_1{}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_1{}^2} + 2y_1y_2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} + y_2{}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_2{}^2},$$

obecně pak

$$\Delta_y{}^p f(z_1, z_2) = \left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^p f(z_1, z_2);$$

symbolický výraz poslední má ten význam, že uvedený binom jest umocniti číslem p, každou mocninu derivačního symbolu jest potom nahraditi derivací řádu, udaného stupněm mocniny, a aplikovati ji na funkci $f(z_1, z_2)$.[3])

Forma $\Delta_y{}^p f(z_1, z_2)$ sluje *p-tá polární forma* (polára) *prvku* Y (pólu) *vzhledem k dané formě* n-tého stupně $f(x_1, x_2)$; jest to forma stupně

---

[2]) Vymizení diskriminantu u svazku binárních forem $a_x{}^n + \lambda b_x{}^n$ jest podmínkou toho, aby skupina vyšší involuce $a_x{}^n + \lambda b_x{}^n = 0$ obsahovala prvek dvojnásobný; odtud plyne, že v involuci n-tého stupně existuje $2\,(n - 1)$ skupin s prvky dvojnásobnými.

[3]) Z rovnice $f(z_1 + \lambda y_1, z_2 + \lambda y_2) = 0$, jejíž levá strana byla hořejším způsobem rozvedena, lze také odvoditi podmínku pro splynutí dvou prvků skupiny $a_x{}^n = 0$. Zvolíme-li totiž za Z prvek dané skupiny, platí $f(z_1, z_2) = 0$ a rovnice ta má jeden kořen $\lambda_1 = 0$ (určující prvek právě uvedený). Aby s tímto prvkem splynul druhý prvek skupiny, musí dotčená rovnice míti ještě druhý kořen $\lambda_2 = 0$; musí tedy platiti $\Delta_y f(z_1, z_2) = 0$ identicky (pro jakékoli y_1 a y_2). Proto podmínkou dvojnásobného prvku ve skupině $f(x_1, x_2) = 0$ jest, aby obě první parciální derivace funkce $f(x_1, x_2)$ podle x_1 a x_2 byly rovny nule, tedy aby byl nule roven jejich resultant čili diskriminant formy $a_x{}^n$.

$(n - p)$-tého. Skupina prvků $\Delta_y{}^p a_z{}^n = 0$ sluje pak *p-tou polárnou skupinou* (polárou) *prvku Y vzhledem ke skupině n prvků* $a_x{}^n = 0$, obsahujíc $n - p$ prvků téhož útvaru jednomocného.[4])

Napišme levou stranu rovnice $f(x_1, x_2) = 0$ pro týž prvek jako dříve, jehož souřadnice však zvolíme ve tvaru $y_1 + \mu z_1$, $y_2 + \mu z_2$; rozvedením obdržíme

$$f(y_1, y_2) + \mu \cdot \Delta_z f(y_1, y_2) + \tfrac{1}{2}\mu^2 \cdot \Delta_z{}^2 f(y_1, y_2) + \tfrac{1}{6}\mu^3 \cdot \Delta_z{}^3 f(y_1, y_2) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\mu^n \cdot \Delta_z{}^n f(y_1, y_2).$$

Přirovnáme-li tuto formu k formě prve uvedené, poznáváme, ježto parametry λ a $1/\mu$ určují týž prvek útvaru, že platí

$$\frac{1}{p!}\Delta_y{}^p f(z_1, z_2) = \frac{1}{(n-p)!}\Delta_z{}^{n-p} f(y_1, y_2).$$

Odtud pak plyne, že rovnici p-té poláry prvku Y vzhledem ke skupině $a_x{}^n = 0$ lze psáti místo $\Delta_y{}^p a_z{}^n = 0$ ve tvaru $\Delta_z{}^{n-p} a_y{}^n = 0$.

Z polárných skupin prvků, příslušných k danému prvku Y vzhledem ke skupině n prvků $f(x_1, x_2) = 0$, jsou zejména důležité *první polárná skupina* $n - 1$ prvků s rovnicí (psanou v souřadnicích x_1, x_2)

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0,$$

potom $(n - 1)$-*ní polára*, obsahující jeden prvek (tedy *lineární*), o rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} x_2 = 0,$$

kde ovšem derivovaná funkce f má argumenty y_1, y_2, a $(n - 2)$-*há polára*, sestávající ze dvou prvků (tedy *kvadratická*), o rovnici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_1{}^2} x_1{}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} x_1 x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y_2{}^2} x_2{}^2 = 0,$$

kde je opět $f(y_1, y_2)$.[5])

Z četných vlastností polárných skupin budiž uvedena aspoň vzájemnost mezi elementy $Y(y_1, y_2)$ a $Z(z_1, z_2)$ s jejich polárami vzhledem k téže základní skupině $a_x{}^n = 0$: *Patří-li prvek Z k p-té poláře prvku Y, patří prvek Y k* $(n - p)$-*té poláře prvku Z*. To plyne z dvojího vyjádření

[4]) Vzhledem k významu parametru λ u souřadnic $z_1 + \lambda y_1$, $z_2 + \lambda y_2$ (viz čl. 32*a*) a vzhledem k souvislosti koeficientů algebraické rovnice o jedné neznámé s jejími kořeny platí o skupinách polárných: p-tá polárná skupina prvku Y vzhledem k dané skupině n prvků X_k sestává z $n - p$ prvků Z_h té vlastnosti, že součet součinů z dvojpoměrů $\mathrm{Dp}(YZ_hJX_k)$ čili $\mathrm{Dp}(Z_hYX_kJ)$, kde J je prvek jednotkový, po $n - p$ činitelích jest roven nule (při čemž v součtu zastoupeny jsou postupně všechny prvky dané skupiny).

[5]) Systém prvních polárných skupin, příslušných k proměnnému prvku (y_1, y_2) v útvaru jednorozměrném vzhledem k pevné skupině n prvků útvaru toho, tvoří involuci $(n - 1)$-ho stupně (s parametrem $y_1 : y_2$).

p-té poláry elementu Y vzhledem k $a_x^n = 0$, totiž buď $\Delta_y{}^p f(z_1, z_2) = 0$ nebo $\Delta_z{}^{n-p} f(y_1, y_2) = 0$.

e) Buďtež v základním útvaru jednomocném dány dvě skupiny prvků $a_x^m \equiv f(x_1, x_2) = 0$ a $b_x^n \equiv g(x_1, x_2) = 0$. Prvek téhož útvaru $Y(y_1, y_2)$ má vzhledem k první skupině lineární poláru

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} x_2 = 0,$$

vzhledem ke druhé pak poláru o jednom prvku

$$\frac{\partial g}{\partial y_1} x_1 + \frac{\partial g}{\partial y_2} x_2 = 0.$$

Podmínkou, aby tyto dva polárné prvky byly totožny, jest vymizení resultantu obou lineárních forem zde uvedených, tedy rovnice

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Determinant tento, složený z prvních parciálních derivací daných dvou binárních forem m-tého stupně $f(x_1, x_2)$ a n-tého stupně $g(x_1, x_2)$ podle obou jejich proměnných, sluje *determinant funkcionální* čili *Jacobiho* nebo stručně *jakobian* forem těch (nebo také rovnic $f = 0$, $g = 0$); značíme-li jej J, jest tedy (v souřadnicích x_1, x_2)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{vmatrix};$$

je to forma stupně $(m + n - 2)$-ho. Jakobian dvou binárních forem a_x^m a b_x^n, položen rovným nule, vyjadřuje podle uvedeného *ty prvky* jednomocného útvaru, *z nichž každý má za lineární poláru vzhledem k oběma skupinám prvků* $a_x^m = 0$, $b_x^n = 0$ *týž prvek*. S druhé strany poznáváme, že rovnice $J = 0$ vyjadřuje také *společné prvky prvních polárných skupin*, příslušných k témuž prvku vzhledem k daným dvěma skupinám (jejichž póly v počtu $m + n - 2$ obdržíme eliminací proměnných x_1, x_2 z rovnic $\Delta_y f(x_1, x_2) = 0$ a $\Delta_y g(x_1, x_2) = 0$).

Je-li v jednomocném útvaru dána skupina n prvků $a_x^n \equiv f(x_1, x_2) = 0$, má prvek $Y(y_1, y_2)$ vzhledem ke skupině té kvadratickou poláru

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_1{}^2} x_1{}^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} x_1 x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y_2{}^2} x_2{}^2 = 0.$$

Dva prvky této polárné skupiny, příslušné k pólu Y, splývají tehdy a jen tehdy, je-li nule roven diskriminant kvadratické formy na levé straně uvedené rovnice.

Diskriminant ten je determinantem z druhých parciálních derivací dané formy a_x^n a sluje *determinant Hessův* nebo stručně *hessian* formy té

(nebo příslušné rovnice $a_x^n = 0$); značíme jej H, takže (psáno v souřadnicích x_1, x_2)

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix};$$

jest stupně $2(n-2)$-ho. Rovnice $H = 0$ vyjadřuje tedy *ty prvky* útvaru jednomocného, *jejichž kvadratické poláry vzhledem k dané skupině prvků* $a_x^n = 0$ *jsou tvořeny dvojicemi prvků splývajících* (prvky dvojnásobnými). S druhé strany nalézáme, že rovnice $H = 0$ vyjadřuje také *dvojnásobné prvky prvních polárných skupin* vzhledem ke skupině dané (jejichž póly v počtu $2(n-2)$ jsou určeny diskriminantem první poláry, rovným nule).[6])

34. Invarianty forem binárních. *a*) Skupina n prvků základního útvaru jednomocného, stanovená rovnicí

$$a_x^n \equiv a_0 x_1^n + n a_1 x_1^{n-1} x_2 + \tfrac{1}{2} n (n-1) a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n = 0,$$

přejde projektivní (lineární homogenní) transformací

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha x'_1 + \beta x'_2, \\ x_2 &= \gamma x'_1 + \delta x'_2, \end{aligned} \qquad \text{kde} \quad \Delta \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0,$$

ve skupinu n prvků, určenou rovnicí

$$a'_{x'}{}^n \equiv a'_0 x'_1{}^n + n a'_1 x'_1{}^{n-1} x'_2 + \tfrac{1}{2} n (n-1) a'_2 x'_1{}^{n-2} x'_2{}^2 + \ldots + a'_n x'_2{}^n = 0.$$

Koeficienty a'_k formy transformované jsou ovšem funkce koeficientů a_k formy původní a koeficientů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ rovnic transformačních.

Jestliže nějaká funkce součinitelů formy transformované

$$f(a'_0, a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$$

rovná se, když sem za veličiny a'_k dosadíme výrazy jim rovné, obsahující a_k a koeficienty transformace, téže funkci koeficientů a_k formy

[6]) O ryze geometrickou teorii binárních forem pokusili se *H. Thieme*, *H. Wiener* (pomocí systémů polárných) a *E. Kötter* (pomocí vyšších involucí). Viz zejména *H. Thieme*, Die Definition der geometrischen Gebilde durch Konstruktion ihrer Polarsysteme, Zeitschrift Math. Phys. 24 (1879); *H. Wiener*, Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden, 1885; *H. Thieme*, Rein geometrische Theorie der binären Formen 2. Ordnung, Archiv Math. Phys. (3) 10 (1906); *H. Wiener*, Geometrische Invariantentheorie der binären Formen, Jahresberichte D. Math. Ver. 17 (1908); *E. Kötter*, Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Kurven höherer Ordnung, Abhandlungen Akad. Berlin, 1887. Pomocí geometrie prostoru n-rozměrného podává teorii forem binárních *A. Comessatti*, Introduzione alla geometria delle forme binarie, Math. Annalen 90 (1923). Pro základy viz také *R. de Paolis*, Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi, Memorie Soc. ital. sc. (3) 7 (1890); Sulle corrispondenze $(m_1, m_2, \ldots, m_r)$ continue che si possono stabilire tra i punti di r gruppi, Annali mat. (2) 18 (1890); Le corrispondenze proiettive nelle forme geometriche fondamentali di 1ª spezie, Memorie Accad. Torino (2) 42 (1892).

původní, násobené konstantou, závislou pouze na koeficientech transformace, sluje funkce taková *invariantem* dané formy binární a_x^n. O invariantu platí tedy

$$f(a'_0, a'_1, \ldots, a'_n) = K \cdot f(a_0, a_1, \ldots, a_n), \text{ kde } K = \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

O konstantě K jest možno dokázati, že je vždy mocninou determinantu (modulu) transformace Δ, tedy tvaru $(\alpha\delta - \beta\gamma)^r \equiv \Delta^r$.

Jestliže speciálně uvedená konstanta K se redukuje na 1 (při obecné hodnotě determinantu $\Delta \neq 1$), sluje invariant *absolutním* (v případě $K \neq 1$ tedy určitěji relativním).[1]) Invariant obsahující koeficienty dvou nebo více forem binárních nazývá se jejich invariant *simultánní*. Jestliže obecněji invariantní funkce obsahuje nejen součinitele, nýbrž i proměnné veličiny dané formy (daných forem), jmenuje se *kovariantem*.[2])

Invariant binárních forem (příslušný k transformaci projektivní) vyjadřuje, položen rovným nule, geometrickou vlastnost skupin prvků formami těmi určených, jež se nemění při projektivní transformaci, tedy jejich *vlastnost projektivní*; obdobně kovariant binárních forem, rovný nule, vyjadřuje skupinu prvků, jejíž souvislost se skupinami základními se transformací projektivní neruší. Neboť vzhledem ke skladbě původní funkce $f(a_k)$ nebo $f(a_k, x_1, x_2)$ a její souvislosti s funkcí transformovanou $f(a'_k)$, resp. $f(a'_k, x'_1, x'_2)$, platí taková rovnice pro prvky původní stejně jako pro prvky jim v projektivnosti odpovídající.[3])

b) Vyšetříme nejprve nejjednodušší invarianty forem binárních.[4])

---

[1]) Ze dvou různých relativních invariantů dané formy lze vždy utvořiti její invariant absolutní; neboť reprodukují-li se invarianty f a g téže binární formy při projektivní transformaci s konstantou Δ^r, resp. Δ^s, reprodukuje se poměr jejich mocnin $f^s : g^r$ absolutně ($K = 1$).

[2]) Pojmenování kovariant užívá se také jako obecného, takže invariant je speciálním případem kovariantu tehdy, neobsahuje-li proměnných. Zpravidla však mluví se obecně o teorii invariantů (pro jejichž druhy byla zavedena četná jména speciální). Pojem a jméno invariantu a kovariantu (vzhledem k lineární transformaci homogenní) pochází od *Sylvestra* (1851).

[3]) Algebraická teorie invariantů, založená v 50. letech století 19. *Sylvestrem* a *Cayleym* a pěstovaná potom vydatně zejména *Clebschem* a *Gordanem*, jest důležitá pro analytickou geometrii projektivní. Jest vyložena (pro formy binární) hlavně ve spisech: *G. Salmon*, Lessons introductory to the modern higher algebra, 1859 (německy od W. Fiedlera); *A. Clebsch*, Theorie der binären algebraischen Formen, 1872; *Faà di Bruno*, Théorie des formes binaires, 1876; *P. Gordan*, Vorlesungen über Invariantentheorie, 2 díly, 1885 a 1887; *E. B. Elliott*, An introduction to the algebra of quantics, 1895; *H. Andoyer*, Leçons sur la théorie des formes et la géométrie analytique supérieure, 1. díl 1900; *J. H. Grace - A. Young*, The algebra of invariants, 1902; *A. Clebsch - F. Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie, 1. sv. 2. vyd. 1906.

[4]) Z teorie invariantů budiž uvedena zvlášť důležitá obecná věta (Gordanova), že počet invariantů a kovariantů, příslušných k dané formě nebo k dané soustavě forem, jest konečný v tom smyslu, že všechny invarianty a kovarianty lze vyjádřiti jako racionální celistvé funkce konečného jejich počtu (jež tvoří t. zv. úplný systém forem).

Kvadratická forma binární

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

přechází projektivní transformací

$$x_1 = \alpha x'_1 + \beta x'_2,$$
$$x_2 = \gamma x'_1 + \delta x'_2$$

ve formu

$$a'_{11}x'^2_1 + 2a'_{12}x'_1x'_2 + a'_{22}x'^2_2,$$

kde jest

$$a'_{11} = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\gamma + a_{22}\gamma^2,$$
$$a'_{12} = a_{11}\alpha\beta + a_{12}(\alpha\delta + \beta\gamma) + a_{22}\gamma\delta,$$
$$a'_{22} = a_{11}\beta^2 + 2a_{12}\beta\delta + a_{22}\delta^2;$$

počítajíce na základě toho diskriminant transformované kvadratické formy binární $a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}$, shledáme, že platí

$$a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2).$$

Jest tedy tento diskriminant $D_a \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ *invariantem kvadratické formy* binární a_x^2 (při čemž $K = \Delta^2$). Nulová hodnota diskriminantu D_a kvadratické binární formy a_x^2 značí, že dva prvky, vyjádřené rovnicí $a_x^2 = 0$, splývají, nenulová hodnota pak značí, že prvky ty jsou různé; vzhledem k tomu praví nalezený výsledek, že splynutí nebo různost dvou prvků základního útvaru jednomocného jest projektivní vlastnost dvojice prvků: dvěma prvkům splývajícím nebo různým odpovídají v projektivnosti dva prvky splývající, resp. různé.[5])

Podobně existuje patrně (simultánní) invariant dvou forem lineárních a_x, b_x, téhož významu geometrického jako invariant hořejší. Prvky

$$a_x \equiv a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \quad \text{a} \quad b_x \equiv b_1x_1 + b_2x_2 = 0$$

splývají, jestliže platí $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$; jsou různé, platí-li $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Při uvedené transformaci projektivní jest

$$a'_1 = a_1\alpha + a_2\gamma, \qquad b'_1 = b_1\alpha + b_2\gamma,$$
$$a'_2 = a_1\beta + a_2\delta, \qquad b'_2 = b_1\beta + b_2\delta;$$

píšeme-li výraz $a_1b_2 - a_2b_1$ ve tvaru determinantním $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$, zjistíme snadno (podle pravidla o násobení determinantů), že platí

$$\begin{vmatrix} a'_1 a'_2 \\ b'_1 b'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \beta \\ \gamma \delta \end{vmatrix}.$$

---

[5]) Kvadratická, rovněž tak kubická forma, mají jen po jednom relativním invariantu (a nemají invariantu absolutního). Neboť kdyby měla jedna nebo druhá forma ta dva invarianty relativní, bylo by možno z nich sestaviti absolutní invariant její; avšak absolutní invariant tu býti nemůže z důvodu geometrického (dva nebo tři prvky lze transformovati v libovolné dva resp. tři, protože projektivnost jest určena teprve třemi dvojicemi prvků sobě odpovídajících) i analytického (lze vždy nalézti koeficienty projektivní transformace, jež by koeficienty dané formy kvadratické nebo kubické převáděla v libovolné koeficienty formy nové).

Jest tedy $a_1b_2 - a_2b_1$ *simultánní invariant dvou lineárních forem* binárních a_x, b_x (při čemž $K = \Delta$); jeho nulová nebo nenulová hodnota značí, že oba prvky danými formami vyjádřené splývají, resp. jsou různé.

c) Jako analytickou podmínku toho, aby dvě dvojice prvků v základním útvaru jednomocném $a_x^2 = 0$ a $b_x^2 = 0$ se harmonicky oddělovaly, nalezli jsme

$$D_{ab} \equiv a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12} = 0.$$

Protože tato vlastnost skupiny čtyř prvků jest — jak víme — projektivní, očekáváme, že příslušný výraz analytický D_{ab}, jehož nulová hodnota vlastnost tu vyjadřuje, jest invariantem uvažovaných dvou forem kvadratických. A vskutku, počítajíce výraz $D_{a'b'}$ (pro formy transformované), zjistíme, že je to *simultánní invariant obou kvadratických forem* binárních, při čemž $K = \Delta^2$.[6])

Pro dvojpoměr čtyř prvků, daných rovnicemi $a_x^2 = 0$ a $b_x^2 = 0$, jsme nalezli výraz

$$\frac{D_{ab} + 2\sqrt{D_aD_b}}{D_{ab} - 2\sqrt{D_aD_b}};$$

protože výrazy D_a, D_b a D_{ab} jsou invarianty, a to tak, že platí $D_{a'} = \Delta^2 \cdot D_a$, $D_{b'} = \Delta^2 \cdot D_b$, $D_{a'b'} = \Delta^2 \cdot D_{ab}$, jest dvojpoměr čtyř prvků v základním útvaru jednomocném jejich *invariantem absolutním*.

d) Aby tři dvojice prvků o (nehomogenních) souřadnicích $\varkappa_1$ a $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ a $\varkappa_4$, $\varkappa_5$ a $\varkappa_6$ tvořily dvojice sdružených elementů v korespondenci involučně projektivní, musí býti (podle čl. 28*a*) splněna podmínka

$$\begin{vmatrix} \varkappa_1\varkappa_2 & \varkappa_1 + \varkappa_2 & 1 \\ \varkappa_3\varkappa_4 & \varkappa_3 + \varkappa_4 & 1 \\ \varkappa_5\varkappa_6 & \varkappa_5 + \varkappa_6 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Jsou-li dvojice ty určeny rovnicemi $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$, $c_x^2 = 0$, takže platí

$$\varkappa_1\varkappa_2 = \frac{a_{22}}{a_{11}}, \quad \varkappa_1 + \varkappa_2 = -\frac{2a_{12}}{a_{11}}, \quad \varkappa_3\varkappa_4 = \frac{b_{22}}{b_{11}}, \quad \varkappa_3 + \varkappa_4 = -\frac{2b_{12}}{b_{11}},$$

$$\varkappa_5\varkappa_6 = \frac{c_{22}}{c_{11}}, \quad \varkappa_5 + \varkappa_6 = -\frac{2c_{12}}{c_{11}},$$

přechází podmínka ta (po jednoduché úpravě determinantu) ve tvar

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} = 0.^{7})$$

---

[6]) Že výraz D_{ab} jest invariantní (s konstantou $K = \Delta^2$), můžeme jednodušeji dokázati nepřímo: vypočteme diskriminant svazku $a_x^2 + \lambda b_x^2$, čímž obdržíme

$$D_\lambda = D_a + 2D_{ab}\lambda + D_b\lambda^2;$$

protože D_λ, D_a, D_b jsou invarianty (s konstantou Δ^2), jest také D_{ab} invariantem (s touže konstantou).

[7]) Tuto podmínku lze odvoditi také odtud, že má-li $c_x^2 = 0$ býti dvojicí involuce $a_x^2 + \lambda b_x^2 = 0$, musí býti forma c_x^2 s formou $a_x^2 + \lambda b_x^2$ pro určité λ totožna.

Protože šest prvků v involuci přechází projektivní transformací opět v šest prvků involuce, jest tento determinant zajisté *simultánním invariantem tří kvadratických forem* binárních a_x^2, b_x^2, c_x^2, určujících ony tři dvojice prvků. A vskutku platí (vzhledem k odst. *b*)

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{22} \\ b'_{11} & b'_{12} & b'_{22} \\ c'_{11} & c'_{12} & c'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha^2 & 2\alpha\gamma & \gamma^2 \\ \alpha\beta & \alpha\delta + \beta\gamma & \gamma\delta \\ \beta^2 & 2\beta\delta & \delta^2 \end{vmatrix}$$

čili

$$(a'_{11}b'_{12}c'_{22}) = (a_{11}b_{12}c_{22}) \cdot (\alpha\delta - \beta\gamma)^3 = \Delta^3 \cdot (a_{11}b_{12}c_{22}).$$

Samodružné prvky involuce, dané dvěma dvojicemi prvků $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$ (čili dva prvky harmonicky spolu sdružené vzhledem k dvěma daným dvojicím prvků $a_x^2 = 0$ a $b_x^2 = 0$), jsou určeny rovnicí

$$\begin{vmatrix} x^2 & 2x & 1 \\ \varkappa_1\varkappa_2 & \varkappa_1 + \varkappa_2 & 1 \\ \varkappa_3\varkappa_4 & \varkappa_3 + \varkappa_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{čili} \quad \begin{vmatrix} x_1^2 & -x_1x_2 & x_2^2 \\ a_{22} & a_{12} & a_{11} \\ b_{22} & b_{12} & b_{11} \end{vmatrix} = 0$$

(po úpravě souřadnic samodružných prvků na homogenní a se zřetelem na obě dané formy binární). Rovnici tuto můžeme psáti ve tvaru

$$x_1^2 (a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11}) + x_1x_2 (a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}) + x_2^2 (a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12}) = 0.^8)$$

Jestliže prvky involučně sdružené s jejich prvky samodružnými projektivně transformujeme, obdržíme opět involuci, určenou dvěma dvojicemi transformovanými, jejíž prvky samodružné vyplývají z rovnice transformované. O tom svědčí relace

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & -x_1x_2 & x_2^2 \\ a_{22} & a_{12} & a_{11} \\ b_{22} & b_{12} & b_{11} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta^2 & 2\beta\delta & \beta^2 \\ \gamma\delta & \alpha\delta + \beta\gamma & \alpha\beta \\ \gamma^2 & 2\alpha\gamma & \alpha^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta^2 x'^2_1 & -\Delta^2 x'_1x'_2 & \Delta^2 x'^2_2 \\ a'_{22} & a'_{12} & a'_{11} \\ b'_{22} & b'_{12} & b'_{11} \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta^2 \cdot \begin{vmatrix} x'^2_1 & -x'_1x'_2 & x'^2_2 \\ a'_{22} & a'_{12} & a'_{11} \\ b'_{22} & b'_{12} & b'_{11} \end{vmatrix},$$

z které plyne

$$\begin{vmatrix} x'^2_1 & -x'_1x'_2 & x'^2_2 \\ a'_{22} & a'_{12} & a'_{11} \\ b'_{22} & b'_{12} & b'_{11} \end{vmatrix} = \Delta \cdot \begin{vmatrix} x_1^2 & -x_1x_2 & x_2^2 \\ a_{22} & a_{12} & a_{11} \\ b_{22} & b_{12} & b_{11} \end{vmatrix};$$

jest totiž tento výraz (ve tvaru determinantu, jenž roven nule stanoví samodružné prvky involuce určené dvěma formami kvadratickými), jak patrno, *simultánním kovariantem dvou kvadratických forem binárních.*[9])

---

[8]) Levá strana této rovnice jest (až na faktor 4) jakobianem dvou kvadratických forem a_x^2 a b_x^2; rovnici tu nalezneme totiž jako podmínku pro prvky, jež oddělují harmonicky zároveň dvojici $a_x^2 = 0$ i dvojici $b_x^2 = 0$, eliminací souřadnic prvku ze dvou jeho polárných forem vzhledem k oběma formám daným.

[9]) Diskriminant tohoto kovariantu (kvadratického v proměnných) jest (až na číselný faktor) resultantem dvou binárních forem 2. stupně, uvedeným v čl. 33*b*; jest ovšem simultánním invariantem dvou forem kvadratických.

e) Ze složitějších buďtež uvedeny dva invarianty binární formy 4. stupně a_x^4, jež položena rovnou nule vyjadřuje čtyři prvky útvaru základního. Zavedeme-li dočasně souřadnice nehomogenní, jsou souřadnicemi těchto prvků kořeny $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$ rovnice

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0.$$

O nich platí, jak známo z algebry (nebo jak se přesvědčíme, vynásobíce kořenové faktory)

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \varkappa_4 = -\frac{4a_1}{a_0}, \quad \varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_1\varkappa_3 + \varkappa_1\varkappa_4 + \varkappa_2\varkappa_3 + \varkappa_2\varkappa_4 + \varkappa_3\varkappa_4 = \frac{6a_2}{a_0},$$

$$\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 + \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_4 + \varkappa_1\varkappa_3\varkappa_4 + \varkappa_2\varkappa_3\varkappa_4 = -\frac{4a_3}{a_0}, \quad \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\varkappa_4 = \frac{a_4}{a_0};$$

uvedené součty můžeme psáti stručně $\Sigma\varkappa_1$, $\Sigma\varkappa_1\varkappa_2$, $\Sigma\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3$ (podle prvního členu, rovněž tak v případech obdobných).

Ze čtyř daných prvků jest možno utvořiti, jak víme, šest přestav s různými dvojpoměry; nazveme-li jeden z nich k, jsou ostatní $1/k$, $1-k$, $1/(1-k)$, $(k-1)/k$, $k/(k-1)$. Pro dvě zvláštní vzájemné polohy prvků redukuje se však těchto šest dvojpoměrů, jak je známo, jen na tři nebo dva různé.

Jestliže totiž platí $k = 1/k$ [nebo $1-k$ nebo $k/(k-1)$], mají uvedené dvojpoměry pouze tři různé hodnoty -1, 2, $\frac{1}{2}$: prvky tvoří známou čtveřinu *harmonickou*. Je-li pak $k = 1/(1-k)$ [nebo $(k-1)/k$], jsou z uvedených dvojpoměrů jenom dva různé; jsou to kořeny rovnice $k^2 - k + 1 = 0$, tedy $k_1 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ a $k_2 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$: dané prvky tvoří čtveřinu *ekvianharmonickou*.

Hledejme nejprve podmínku toho, aby prvky hořejší formou binární určené tvořily čtveřinu harmonickou. Musí tu býti (viz čl. 32*e*)

$$2(\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_3\varkappa_4) - (\varkappa_1 + \varkappa_2)(\varkappa_3 + \varkappa_4) = 0$$

čili

$$3(\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_3\varkappa_4) - \Sigma\varkappa_1\varkappa_2 = 0.$$

Píšíce tuto podmínku ve tvaru

$$a_0(\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_3\varkappa_4) - 2a_2 = 0$$

a násobíce ji dvěma analogickými

$$a_0(\varkappa_1\varkappa_3 + \varkappa_2\varkappa_4) - 2a_2 = 0, \quad a_0(\varkappa_1\varkappa_4 + \varkappa_2\varkappa_3) - 2a_2 = 0,$$

obdržíme

$$a_0^3(\Sigma\varkappa_1^2\varkappa_2^2\varkappa_3^2 + \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\varkappa_4 \cdot \Sigma\varkappa_1^2) - 2a_0^2a_2(\Sigma\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 \cdot \Sigma\varkappa_1 - 4\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\varkappa_4) + 4a_0a_2^2 \cdot \Sigma\varkappa_1\varkappa_2 - 8a_2^3 = 0.$$

Upravíme-li součinitele u a_0^3 na tvar

$$(\Sigma\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3)^2 - 2\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\varkappa_4 \cdot \Sigma\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\varkappa_4 \cdot [(\Sigma\varkappa_1)^2 - 2\Sigma\varkappa_1\varkappa_2] = (\Sigma\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3)^2 + \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\varkappa_4 \cdot [(\Sigma\varkappa_1)^2 - 4\Sigma\varkappa_1\varkappa_2]$$

a dosadíme-li všude výrazy obsahující koeficienty dané formy, nalezneme

$$a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3 = 0.$$

Tento výraz $T \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$, jehož nulová hodnota je podmínkou harmonické polohy čtyř prvků, daných rovnicí $a_x{}^4 = 0$, jest invariantem bikvadratické formy $a_x{}^4$ (při čemž $K = \Delta^6$).

Obdobně nalezneme podmínku, aby čtyři elementy tvořily skupinu ekvianharmonickou. Pro dvojpoměr jejich platí v tom případě

$$\frac{\varkappa_1 - \varkappa_3}{\varkappa_2 - \varkappa_3} : \frac{\varkappa_1 - \varkappa_4}{\varkappa_2 - \varkappa_4} = \tfrac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$$

čili

$$(\varkappa_1 - \varkappa_3)(\varkappa_2 - \varkappa_4) - \tfrac{1}{2}(\varkappa_2 - \varkappa_3)(\varkappa_1 - \varkappa_4) \mp \tfrac{1}{2} i \sqrt{3}\,(\varkappa_2 - \varkappa_3)(\varkappa_1 - \varkappa_4) = 0.$$

Znásobíce tyto dvě rovnice, dostaneme

$$(\varkappa_1 - \varkappa_3)^2(\varkappa_2 - \varkappa_4)^2 + (\varkappa_2 - \varkappa_3)^2(\varkappa_1 - \varkappa_4)^2 - (\varkappa_1 - \varkappa_3)(\varkappa_1 - \varkappa_4)(\varkappa_2 - \varkappa_3)(\varkappa_2 - \varkappa_4) = 0$$

a provedouce naznačené výkony,

$$\Sigma \varkappa_1{}^2 \varkappa_2{}^2 - \Sigma \varkappa_1{}^2 \varkappa_2 \varkappa_3 + 6 \varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4 = 0.$$

Protože však jest

$$\Sigma \varkappa_1{}^2 \varkappa_2{}^2 = (\Sigma \varkappa_1 \varkappa_2)^2 - 2 \Sigma \varkappa_1{}^2 \varkappa_2 \varkappa_3 - 6 \varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4,$$
$$\Sigma \varkappa_1{}^2 \varkappa_2 \varkappa_3 = \Sigma \varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \,.\, \Sigma \varkappa_1 - 4 \varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4,$$

obdržíme odtud relaci

$$(\Sigma \varkappa_1 \varkappa_2)^2 - 3 \Sigma \varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \,.\, \Sigma \varkappa_1 + 12 \varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4 = 0;$$

dosadíme-li sem výrazy obsahující koeficienty dané formy, nalezneme konečně

$$a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2{}^2 = 0.$$

Výraz $S \equiv a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2{}^2$, jehož nulová hodnota je podmínkou ekvianharmonické polohy čtyř prvků $a_x{}^4 = 0$, je invariant této formy ($K = \Delta^4$).

Oba uvedené invarianty formy 4. stupně tvoří ve spojení $S^3 : T^2$ absolutní invariant formy té; jejich kombinace $S^3 - 27T^2$ je (až na číselný faktor) diskriminantem formy bikvadratické.[10])

f) U invariantů a kovariantů uvedených, jakož i u jiných výrazů téhož druhu, můžeme souditi na tuto jejich vlastnost, že se totiž při transformaci projektivní až na konstantní faktor (závislý pouze na koeficientech transformace) reprodukují, už z geometrického významu jejich. Protože na př. dvě skupiny prvků s prvkem společným přecházejí projektivní transformací ve dvě skupiny, jež mají opět společný prvek, musí býti resultant jejich rovnic invariantem příslušných forem; tak

[10]) Pro dvojpoměr k čtyř prvků $a_x{}^4 = 0$ lze dokázati rovnici

$$\frac{S^3}{T^2} = 108 \frac{(k^2 - k + 1)^3}{(k+1)^2 (k-2)^2 (2k-1)^2};$$

z ní plynou tři věty nahoře uvedené (význam podmínek $T = 0$, $S = 0$, $S^3 - 27T^2 = 0$) jako důsledky.

jest invariantem dvou kvadratických forem resultant jejich R, vypočtený v čl. 33*b*. Protože skupině prvků s prvkem dvojnásobným projektivně odpovídá skupina obsahující rovněž dvojnásobný prvek, musí diskriminant binární formy býti jejím invariantem. A pod.

Můžeme však invariantnost výrazů, jež jsou funkcemi koeficientů dané formy nebo daných forem binárních, po případě ještě proměnných x_1, x_2, dokázati také analyticky buď přímým dosazením transformačních rovnic nebo jinou úvahou.

Prvním způsobem bylo zjištěno několik nejjednodušších invariantů a kovariantů v předešlých odstavcích; lze tak dokázati také o důležitých formách jakobianu a hessianu, že jsou kovarianty dvou resp. jedné formy. Dosadíme-li totiž do binárních forem $f(x_1, x_2)$ a $g(x_1, x_2)$ transformační výrazy $x_1 = \alpha x'_1 + \beta x'_2$, $x_2 = \gamma x'_1 + \delta x'_2$, platí o jejich derivacích (označíme-li formy ty po substituci písmeny F a G)

$$\frac{\partial F}{\partial x'_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x'_1} = \alpha\frac{\partial f}{\partial x_1} + \gamma\frac{\partial f}{\partial x_2},\quad \frac{\partial F}{\partial x'_2} = \beta\frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta\frac{\partial f}{\partial x_2}$$

a obdobně pro formu druhou. Odtud zjistíme (třebas podle pravidla o násobení determinantů), že

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x'_1} & \frac{\partial F}{\partial x'_2} \\ \frac{\partial G}{\partial x'_1} & \frac{\partial G}{\partial x'_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix};$$

jest tedy *jakobian dvou binárních forem simultánním kovariantem jejich* s konstantou $K = \Delta$. Jakobianem jest z invariantů prve uvedených determinant dvou lineárních forem nebo levá strana rovnice, určující samodružné prvky involuce stanovené dvěma formami kvadratickými.

Podobně o druhých derivacích formy $F(x'_1, x'_2)$ platí (píšeme-li první derivace formy F podle x'_1 a x'_2 stručně F_1 a F_2)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2_1} = \alpha\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \gamma\frac{\partial F_1}{\partial x_2},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x'_1 \partial x'_2} = \beta\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \delta\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \alpha\frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \gamma\frac{\partial F_2}{\partial x_2},$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2_2} = \beta\frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \delta\frac{\partial F_2}{\partial x_2};$$

pročež

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x'_1 \partial x'_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x'_1 \partial x'_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}^2,$$

dosadíme-li tam potom derivace hořejších výrazů pro F_1 a F_2. *Jest* tedy *hessian binární formy jejím kovariantem* s konstantou $K = \Delta^2$. Hessianem jest na př. diskriminant formy kvadratické.

Druhým způsobem lze krátce dokázati na př., že *diskriminant formy binární jest jejím invariantem*: diskriminant formy $f(x_1, x_2)$, roven nule, značí, že mají společné řešení rovnice $\partial f/\partial x_1 = 0$ a $\partial f/\partial x_2 = 0$;

protože však první parciální derivace funkce $F(x'_1, x'_2)$ podle x'_1 a x'_2 jsou lineárními kombinacemi prvních parciálních derivací funkce $f(x_1, x_2)$ podle x_1 a x_2, vyplývá z nulové hodnoty těchto nulová hodnota oněch, pročež diskriminant transformované formy $F(x'_1, x'_2)$ jest roven nule; liší se tedy oba diskriminanty jen konstantním faktorem. V předešlém byly uvedeny diskriminanty formy stupně 2., 3. a 4.

Každá *polární forma formy binární jest* také *jejím kovariantem* (s dvěma dvojicemi proměnných): neboť funkce $f(z_1 + \lambda y_1, z_2 + \lambda y_2)$ i funkce $F(z'_1 + \lambda y'_1, z'_2 + \lambda y'_2)$, vznikající z oné tím, že na obě dvojice proměnných y_1, y_2 a z_1, z_2 aplikujeme tutéž projektivní transformaci, musí býti sobě rovny identicky (pro každé λ); rozvineme-li tedy obě funkce v řadu Taylorovu podle λ, vyplývá z této identické rovnosti rovnost p-tých forem polárných pro prvky sobě odpovídající

$$\left(y'_1 \frac{\partial}{\partial z'_1} + y'_2 \frac{\partial}{\partial z'_2}\right)^p F(z'_1, z'_2) = \left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^p f(z_1, z_2).$$

Speciálně jest kovariantem daná forma sama. Protože pak kovariant kovariantu daných forem je také kovariantem forem těch, vyplývá odtud opět invariantnost jakobianu a hessianu forem binárních (první jest totiž resultantem lineárních polár téhož prvku vzhledem ke dvěma binárním formám, druhý diskriminantem kvadratické poláry prvku vzhledem k formě binární).[11])[12])

35. Grupy projektivností v základním útvaru jednomocném. *a*) Budiž $\mathbf{P}_1$ určitá projektivnost dvou soumístných základních útvarů jednomocných o nosiči v_1, převádějící $[X_1]$ v $[X'_1]$, $\mathbf{T}$ pak projektivní transformace (reálná nebo imaginární), jež převádí základní útvar nosiče v_1 v základní útvar nosiče v_2 (tedy X_1 v X_2, X'_1 v X'_2); nosič v_2 může ovšem býti totožný s nosičem v_1. Protože prvky útvaru $[X_2]$ přecházejí transformací $\mathbf{T}^{-1}$ v prvky útvaru $[X_1]$, tyto pak projektivností $\mathbf{P}_1$ v prvky

[11]) U kubické formy a_x^3 jest úplný systém invariantů a kovariantů tvořen (mimo formu samu) jejím diskriminantem (jenž je jediným invariantem formy té), jejím hessianem H a jakobianem Q forem a_x^3 a H; u formy bikvadratické a_x^4 sestává úplný systém (mimo formu samu) z invariantů prve uvedených S a T, z jejího hessianu H a z jakobianu J forem a_x^4 a H. Zajímavý je geometrický význam rovnic $Q = 0$ a $J = 0$: Určíme-li ke každému prvku trojice $a_x^3 = 0$ prvek harmonicky sdružený vzhledem k ostatním dvěma, obdržíme úhrnem prvky trojice $Q = 0$, od nichž stejnou cestou dospějeme k prvkům $a_x^3 = 0$; pokládáme-li trojici $a_x^3 = 0$ za cyklus periodické projektivnosti, jest jejím cyklem také trojice $Q = 0$, při čemž hessian $H = 0$ vyjadřuje samodružné prvky této projektivnosti. Sestavíme-li čtyři prvky $a_x^4 = 0$ třemi způsoby ve dvě dvojice a určíme-li po každé dva prvky obě dvojice ty harmonicky oddělující, dostaneme šest prvků skupiny $J = 0$; ze tří dvojic ve skupině $J = 0$ obsažených odděluje každá harmonicky obě ostatní.

[12]) Pro invarianty a kovarianty binárních forem 5. a 6. stupně viz na př. *A. Clebsch - F. Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie I. (2. vyd. 2. sešit, 1910).

soumístného útvaru $[X'_1]$ a konečně tyto transformací **T** v prvky útvaru $[X'_2]$, převádí výsledná transformace $\mathbf{TP_1T^{-1}}$ útvar $[X_2]$ v soumístný útvar projektivní $[X'_2]$. Projektivnost $\mathbf{P_2} \equiv \mathbf{TP_1T^{-1}}$ dvou soumístných útvarů nosiče v_2 sluje, jak známo, projektivnost transformovaná projektivní transformací **T** z projektivnosti $\mathbf{P_1}$; obě projektivnosti $\mathbf{P_1}$ a $\mathbf{TP_1T^{-1}}$ slují také *konjugované* nebo *projektivní* (ekvivalentní).

Kdy jsou dvě projektivnosti projektivní? Poznáváme, že jen projektivnosti téhož typu mohou býti konjugovány. *Dvě parabolické projektivnosti jsou* vždy *projektivní*. Neboť je-li M_1, resp. M_2 jejich prvek samodružný, platí $\mathbf{P}_1(M_1A_1) = M_1A'_1$, $\mathbf{P}_2(M_2A_2) = M_2A'_2$, $\mathbf{T}(M_1A_1A'_1) = M_2A_2A'_2$. *Dvě neparabolické projektivnosti jsou projektivní* jen tehdy, *jsou-li jejich charakteristické dvojpoměry sobě rovny*. Nutná tato podmínka plyne odtud, že (jsou-li M_1, N_1, resp. M_2, N_2 samodružné prvky projektivností uvažovaných) musí $M_1N_1A_1A'_1$ transformací **T** přejíti v $M_2N_2A_2A'_2$; je to podmínka také dostačující, protože transformace **T**, převádějící $M_1N_1A_1$ v $M_2N_2A_2$, převádí při rovnosti dvojpoměrů též A_2 v A'_2 (potom A_3 v A'_3 atd.). Speciálně jsou všechny involuční projektivnosti projektivní.[1])

b) Grupa projektivností jest (viz úvod) soustava projektivností tak uzavřená, že obsahuje produkt kterýchkoli dvou svých členů a inversní transformaci každého svého členu. Obsahuje tedy také projektivnost identickou a produkt libovolného počtu členů svých v libovolném pořádku.

Jest jasno, že všechny projektivnosti základního útvaru jednomocného tvoří grupu: neboť převádí-li projektivní transformace základní útvar jednomocný v útvar s ním soumístný, druhá tento opět v soumístný, jsou jejich produkt a transformace inversní rovněž projektivnosti téže povahy.[2]) Víme také, že dvě projektivní transformace jednomocného útvaru nejsou obecně záměnné.

---

[1]) Jestliže na projektivní korespondenci prvků v základním útvaru jednomocném, danou rovnicemi $\varrho y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$, $\varrho y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$ čili bilineární rovnicí $a_{21}x_1y_1 - a_{11}x_1y_2 + a_{22}x_2y_1 - a_{12}x_2y_2 = 0$, aplikujeme projektivní transformaci $x_1 = \alpha x'_1 + \beta x'_2$, $x_2 = \gamma x'_1 + \delta x'_2$ (a ovšem $y_1 = \alpha y'_1 + \beta y'_2$, $y_2 = \gamma y'_1 + \delta y'_2$), obdržíme opět projektivnost mezi prvky zákl. útvaru jednomocného $a'_{21}x'_1y'_1 - a'_{11}x'_1y'_2 + a'_{22}x'_2y'_1 - a'_{12}x'_2y'_2 = 0$; při tom platí $a'_{11} = a_{11}\alpha\delta + a_{12}\gamma\delta - a_{21}\alpha\beta - a_{22}\beta\gamma$, $a'_{12} = (a_{11} - a_{22})\beta\delta + a_{12}\delta^2 - a_{21}\beta^2$, $a'_{21} = (a_{22} - a_{11})\alpha\gamma - a_{12}\gamma^2 + a_{21}\alpha^2$, $a'_{22} = -a_{11}\beta\gamma - a_{12}\gamma\delta + a_{21}\alpha\beta + a_{22}\alpha\delta$. Invarianty jsou tu výrazy: $I = a_{11} + a_{22}$ (s konstantou $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$), determinant projektivnosti $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (s konstantou Δ^2) a diskriminant kvadratické rovnice pro samodružné prvky projektivnosti $\varrho^2 + I\varrho + D = 0$, totiž $P = I^2 - 4D$ (s konstantou Δ^2). Rovnice $I = 0$ charakterisuje projektivnost involuční, $D = 0$ projektivnost degenerovanou a $P = 0$ projektivnost parabolickou. Charakteristický dvojpoměr uvažované projektivní korespondence jest uvedenými invarianty vyjádřen ve tvaru $\dfrac{I + \sqrt{P}}{I - \sqrt{P}}$, jest tedy jejím invariantem absolutním.

Dvě grupy projektivností slují *konjugované* (projektivní, ekvivalentní), existuje-li projektivní transformace **T**, jež každou projektivnost jedné grupy převádí v projektivnost grupy druhé; pravíme též, že druhá grupa je *transformovanou* (projektivností **T**) grupy prvé.

Speciálně dvě subgrupy dané grupy slují *konjugované v této širší grupě*, jestliže v ní existuje transformace, převádějící jednu v druhou. Jestliže však subgrupa dané grupy přechází každou transformací širší této grupy v sebe samu (tak totiž, že každá transformace subgrupy té přechází v jinou nebo tutéž transformaci její), sluje subgrupa taková *soběkonjugovanou* nebo *invariantní subgrupou* grupy uvažované.

c) *Konečné grupy* projektivních transformací základního útvaru jednomocného (konečné grupy binárních transformací lineárních) jsou nečetné[3]) a byly stanoveny několika způsoby;[4]) ke každé z nich příslušejí skupiny prvků, jež jsou při transformacích grupy té (jako celek) invariantní.

---

[2]) Z analytického vyjádření projektivní transformace útvaru jednomocného $x' = \frac{ax + b}{cx + d}$ vidíme také, že produkt této transformace $\mathbf{P}_1$ a druhé $\mathbf{P}_2$ o rovnici $x'' = \frac{a'x' + b'}{c'x' + d'}$ jest opět transformace projektivní $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ útvaru toho: $x'' = \frac{(a'a + b'c)\,x + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)\,x + (c'b + d'd)}$, a že také transformace k $\mathbf{P}_1$ inversní $x = \frac{-dx' + b}{cx' - a}$ je projektivní. Mimo to poznáváme z výrazu pro produkt dvou projektivností, že dvě projektivní transformace nejsou obecně záměnné. Dále že determinant produktu dvou projektivností rovná se součinu determinantů obou složek. A obecně produkt libovolného počtu projektivností jest projektivnost s determinantem, rovným součinu determinantů všech složek.

[3]) Snadno zjistíme, že konečná grupa projektivností může obsahovati jen projektivnosti typu prvního; z rovnice parabolické projektivnosti $\frac{1}{x' - o} = \frac{1}{x - o} + a$ plyne totiž, že taková transformace nemůže býti členem grupy konečné.

[4]) Všechny možné konečné grupy projektivností útvaru jednomocného lze nalézti tímto postupem: Protože každá projektivnost konečné grupy (vyjma projektivnost identickou) musí míti dva prvky samodružné, mají projektivnosti, obsažené v grupě o n členech, celkem $2\,(n - 1)$ prvků samodružných (při čemž každý čítáme tolikrát, u kolika transformací grupy mimo identickou je prvkem samodružným). Dejme tomu, že určitý prvek je samodružným pro ν_1 transformací grupy (jež tvoří subgrupu uvažované grupy); každý z prvků, v něž onen transformacemi grupy přechází, jest také společným prvkem samodružným pro ν_1 transformací (jež tvoří po každé subgrupu konjugovanou k oné). Existuje tedy celkem n/ν_1 takových prvků, z nichž každý je společným prvkem samodružným pro $\nu_1 - 1$ projektivností (nečítaje totiž identickou); to činí $n(\nu_1 - 1)/\nu_1$ prvků samodružných. Obsahuje-li grupa projektivností celkem r takových skupin prvků samodružných a přísluší-li k prvku k-té skupiny takové ν_k transformací grupy, musíme součtem čísel $n(\nu_k - 1)/\nu_k$ pro $k = 1$ až r vyčerpat

Z konečných grup projektivností binárních jsou nejjednoduššími grupy projektivností periodických; slují *cyklické*. Grupa cyklická, vytvořená cyklickou transformací $\mathbf{P}$ periody n, kde n je celé číslo kladné (> 1), obsahuje n projektivních transformací $\mathbf{P}^k$ (kde $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n$), z nichž poslední je projektivnost identická ($\mathbf{P}^n = 1$). Označme ji $\mathbf{C}_n$, je-li řádu n-tého; její členy vznikají tedy opakováním téže projektivnosti (1. typu). Jsou při ní invariantní skupiny po n prvcích, jež transformace grupy jen cyklicky zaměňují (a ovšem oba samodružné prvky projektivnosti $\mathbf{P}$).

Připojíme-li k transformacím cyklické grupy $\mathbf{C}_n$ involuce, jež zaměňují oba samodružné prvky jejích projektivností (a při nichž je jedna z dotčených skupin n prvků jako celek invariantní), vznikne grupa řádu $2n$-tého, obsahující $2n$ projektivností, z nichž aspoň n je involučních; grupa tato sluje *diedrická* a může býti označena $\mathbf{D}_{2n}$.[5]) V grupě $\mathbf{D}_{2n}$ jest grupa $\mathbf{C}_n$ obsažena jako invariantní subgrupa.

Z grup $\mathbf{D}_{2n}$ jsou zvlášť jednoduché ty, u nichž $n = 2, 3, 4$. Grupa $\mathbf{D}_4$ obsahuje vedle identity tři involuce po dvou záměnné, a jest při ní invariantní skupina čtyř prvků obecně (v útvaru jednomocném) položených (viz čl. 30*c*), tedy také nekonečně mnoho takových skupin.

Grupa $\mathbf{D}_6$ je složena z projektivností, jež všemi možnými způsoby zaměňují tři prvky obecně položené. Vedle toho existuje ještě druhá invariantní trojice prvků, z nichž každý je harmonicky sdružen s jedním prvkem první trojice vzhledem k oběma ostatním (viz čl. 31*d*).[6])

Grupa $\mathbf{D}_8$ skládá se z projektivností, při nichž je invariantní (jako celek) harmonická čtveřina prvků. Obsahuje vedle identity dvě projektivnosti periodické (s periodou 4) $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}^{-1}$ a pět involucí; jest při grupě té ještě druhá harmonická čtveřina invariantní.

---

všechny samodružné prvky projektivností v grupě obsažených, platí tedy

$$\sum \frac{n}{\nu_k}(\nu_k - 1) = 2(n-1)$$

čili

$$\sum \left(1 - \frac{1}{\nu_k}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Rozborem této rovnice vyplývá, že jest možno jenom pět různých typů konečných grup projektivností útvaru jednomocného (předně totiž poznáme, že musí býti $1 < r \leqq 3$; pro $r = 2$ plyne $\nu_1 = \nu_2 = n$; pro $r = 3$ musí aspoň jedno z čísel ν_k býti rovno 2: jsou-li dvě taková, dostáváme $\nu_1 = \nu_2 = 2$, $\nu_3 = \frac{1}{2}n$; je-li jedno takové, musí býti druhé rovno 3 a třetí < 6, takže dostáváme tři případy $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$, $\nu_3 = 3, 4, 5$). Lze pak pro každý z těchto případů sestrojiti vskutku příslušnou grupu (a to jedinou).

[5]) Grupa $\mathbf{D}_{2n}$ sluje diedrická, protože při grupě pohybů (rotací) stejného složení je invariantní pravidelný hranol (nebo dvojjehlan) n-boký.

[6]) Grupa tato je téhož složení jako šestičlenná grupa substitucí, jež převádějí dvojpoměr čtyř prvků v dvojpoměry týchž čtyř prvků při všech možných permutacích jejich.

Bylo dokázáno, že mimo uvedené konečné grupy $\mathbf{C}_n$ a $\mathbf{D}_{2n}$ existují jen tři konečné grupy projektivností o 12, 24 a 60 členech: při první z nich $\mathbf{G}_{12}$, jež sluje *tetraedrická*, jest invariantní ekvianharmonická skupina čtyř prvků [s dvěma pouze různými dvojpoměry $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$] a spolu druhá taková skupina; při druhé $\mathbf{G}_{24}$, *oktaedrické*, jest invariantní skupina tří dvojic prvků, z nichž dvě a dvě se harmonicky oddělují;[7]) při třetí konečně $\mathbf{G}_{60}$, jež byla nazvána *ikosaedrickou*,[8]) jest invariantní speciální skupina 12 prvků (z nichž nejvýš 5 je reálných).[9])

d) Ze *spojitých grup* musí býti na prvním místě uvedena známá nejširší *grupa všech projektivností* základního útvaru jednomocného (nahoře už dotčená). Tato grupa projektivností jest *tříparametrová* ($\mathbf{G}_3$, obsahuje ∞^3 projektivností); každá projektivnost v ní obsažená je totiž určena třemi prvky, jež mají odpovídati třem daným, (z prvků těch lze každý zvoliti nekonečně mnohými způsoby) nebo také dvěma prvky samodružnými (jejich souřadnice jsou dva parametry) a charakteristickým dvojpoměrem (třetí parametr).

Na základě roztřídění projektivností ve dva typy (obecný a limitní, čl. 26c) nalezneme dvě jednoparametrové grupy projektivních transformací (subgrupy uvedené grupy nejširší $\mathbf{G}_3$). Všechny projektivnosti (obecné) s týmiž dvěma prvky samodružnými tvoří *jednoparametrovou grupu* $\mathbf{G}_1$. Neboť dvě projektivní transformace s invariantními prvky O_1, O_2 mají za produkt i za inversní transformace opět projektivnosti o týchž prvcích samodružných. Jestliže první transformace je určena dvojpo-

---

[7]) Grupa tato obsahuje tři konjugované subgrupy $\mathbf{D}_8$ se společnou $\mathbf{D}_4$, jež je v ní subgrupou invariantní; při každé $\mathbf{D}_8$ je invariantní jedna z uvedených tří dvojic, při $\mathbf{D}_4$ všechny tři.

[8]) Grupy $\mathbf{G}_{12}$, $\mathbf{G}_{24}$, $\mathbf{G}_{60}$ mají uvedená jména podle svého významu v teorii rotací prostorových (protože rotačními grupami téhož složení je převáděn čtyrstěn, osmistěn a dvacetistěn pravidelný v sebe sama).

[9]) Konečné grupy projektivností základního útvaru jednorozměrného byly určeny algebraicky i geometricky: cestou ryze algebraickou byly nalezeny všechny konečné grupy lineárních transformací jedné proměnné, úvahou algebraickou nebo geometrickou byl úkol převeden na určení konečných grup rotací kolem pevného bodu (grup rotací pravidelných těles, počítaje k nim i pravidelný jehlan a dvojjehlan); a j. Po prvé řešil úkol ten *F. Klein* (1874): Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst, Math. Annalen 9 (1876), nebo Vorlesungen über das Ikosaeder, 1884. Pro algebraické řešení viz zejména *P. Gordan*, Über endliche Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen, Math. Annalen 12 (1877); *C. Jordan*, Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire, Atti Accad. Napoli, 1880; *H. Valentiner*, De endelige Transformations-Gruppers Theori, Danske videnskabernes Selskabs Skrifter (6) 5 (1889); *L. Bianchi*, Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni, 1900. Pro řešení geometrické viz (mimo práce Kleinovy) hlavně *G. Fano*, Über endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen, Monatshefte Math. Phys. 7 (1896). Dále pak *A. Clebsch-F. Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie, 2. díl (rotace neeukleidské geometrie eliptické v rovině); *H. F. Blichfeldt* v *Miller-Blichfeldt-Dickson*, Theory and applications of finite groups, 1916.

měrem k_1 (a převádí X v X'), druhá dvojpoměrem k_2 (a převádí X' v X''), jsou vyjádřeny rovnicemi

$$\frac{x' - o_1}{x' - o_2} = k_1 \frac{x - o_1}{x - o_2}, \qquad \frac{x'' - o_1}{x'' - o_2} = k_2 \frac{x' - o_1}{x' - o_2};$$

jejich produkt má pak rovnici, vyplývající znásobením obou

$$\frac{x'' - o_1}{x'' - o_2} = k_1 k_2 \frac{x - o_1}{x - o_2}.$$

Odtud vysvítá, že *charakteristický dvojpoměr produktu dvou transformací projektivních v* G_1 *rovná se součinu jejich char. dvojpoměrů* ($k = k_1 k_2$) a že *projektivnosti grupy* G_1 *jsou záměnné*. A obecně ovšem produkt libovolného počtu projektivností s týmiž dvěma prvky samodružnými (obsažených tedy v G_1) jest projektivnost, jež má tytéž dva samodružné prvky (je obsažena v G_1) a charakteristický dvojpoměr, rovný součinu char. dvojpoměrů svých složek.[10])

Obdobně tvoří všechny projektivnosti parabolické (limitní) s týmž (dvojnásobným) prvkem samodružným *jednoparametrovou grupu* G'_1. Produkt dvou projektivností takových s rovnicemi

$$\frac{1}{x' - o} = \frac{1}{x - o} + a_1, \qquad \frac{1}{x'' - o} = \frac{1}{x' - o} + a_2$$

je projektivnost parabolická s týmž prvkem samodružným o rovnici

$$\frac{1}{x'' - o} = \frac{1}{x - o} + a_1 + a_2.$$

Vidíme, že *charakteristická konstanta produktu dvou parabolických projektivností v* G'_1 *je rovna součtu konstant obou složek* ($a = a_1 + a_2$) a že *parabolické projektivnosti grupy* G'_1 *jsou záměnné*. A obecně produkt libovolného počtu projektivností s týmž prvkem samodružným (členů grupy G'_1) jest projektivnost o témž samodružném prvku (obsažená v G'_1) s char. konstantou, rovnou součtu char. konstant všech složek.[11])

---

[10]) V grupě G_1 jest obsažena vedle každé projektivnosti s char. dvojpoměrem k transformace k ní inversní s dvojpoměrem $1/k$; je tam obsažena transformace identická s dvojpoměrem 1, involuční projektivnost s dvojpoměrem -1, dvě zvrhlé projektivnosti s dvojpoměrem 0 a ∞; je tam obsaženo nekonečně mnoho transformací infinitesimálních s dvojpoměrem $1 + \varepsilon$ (kde komplexní veličina ε je nekonečně malá), a libovolná transformace grupy může býti vytvořena opakováním jedné z těchto infinitesimálních transformací. Máme-li však na zřeteli jen *reálné* projektivnosti, nelze hyperbolické transformace se zápornou hodnotou char. dvojpoměru k vytvořiti transformacemi infinitesimálními; viz na př. *H. B. Newson*, On singular transformations in real projective groups, Bulletin Amer. math. soc. (2) 6 (1900).

[11]) Grupa G'_1 obsahuje dvojice projektivností navzájem inversních s char. konstantami a, $-a$; obsahuje projektivnost identickou s konstantou 0, jednu zvrhlou projektivnost s konstantou ∞, neobsahuje však projektivnosti involuční; obsahuje nekonečně mnoho transformací infinitesimálních, jejichž opakováním lze vytvořiti všechny jednotlivé transformace grupy.

Dvě projektivní transformace s jedním společným prvkem invariantním mají produktem zajisté projektivnost s týmž jedním prvkem samodružným; tvoří tedy všechny projektivnosti, při nichž jest jeden prvek základního útvaru invariantní, *grupu dvouparametrovou* $\mathbf{G}_2$. Jednotlivé transformace grupy této určeny jsou totiž (obecně) hodnotou souřadnice, stanovící druhý prvek samodružný, a hodnotou char. dvojpoměru (v případě limitním hodnotou char. konstanty).

Abychom nalezli rovnici produktu dvou takových projektivností, dejme tomu, že projektivnosti ty mají invariantní prvky O_1, O_2, resp. O_1, O'_2 a char. dvojpoměr k_1, resp. k_2 (převádějíce prvek X v X', resp. X' v X''). Platí tedy

$$\frac{x' - o_1}{x' - o_2} = k_1 \frac{x - o_1}{x - o_2}, \qquad \frac{x'' - o_1}{x'' - o'_2} = k_2 \frac{x' - o_1}{x' - o'_2};$$

upravíme-li první rovnici (po přemístění zlomků), dostaneme

$$1 + \frac{o_1 - o_2}{x - o_1} = k_1 \left(1 + \frac{o_1 - o_2}{x' - o_1}\right)$$

a dále

$$\frac{1}{x - o_1} - k_1 \frac{1}{x' - o_1} = \frac{k_1 - 1}{o_1 - o_2},$$

obdobně z rovnice druhé

$$\frac{1}{x' - o_1} - k_2 \frac{1}{x'' - o_1} = \frac{k_2 - 1}{o_1 - o'_2}.$$

Produkt obou těchto transformací (převádějící X v X'') má invariantní prvky O_1, O a dvojpoměr k, platí o něm tedy zase obdobně

$$\frac{1}{x - o_1} - k \frac{1}{x'' - o_1} = \frac{k - 1}{o_1 - o};$$

vyloučíme-li však z obou hořejších rovnic $x' - o_1$ (odpovídající přechodnímu prvku), obdržíme

$$\frac{1}{x - o_1} - k_1 k_2 \frac{1}{x'' - o_1} = \frac{k_1 - 1}{o_1 - o_2} + k_1 \frac{k_2 - 1}{o_1 - o'_2}.$$

Protože pak tato rovnice a předcházející rovnice vyjadřují tutéž transformaci libovolného prvku X v X'', musí obě býti identické, t. j. platí

$$k = k_1 k_2, \qquad \frac{k - 1}{o_1 - o} = \frac{k_1 - 1}{o_1 - o_2} + \frac{k_1 (k_2 - 1)}{o_1 - o'_2}.$$

Jest tedy *dvojpoměr produktu dvou projektivností s jedním samodružným prvkem společným roven součinu dvojpoměrů obou složek.* Druhá rovnice pak (určující souřadnici o druhého samodružného prvku produktu) svědčí, že *transformace ty nejsou záměnné.*

Jest konečně patrno, že dvě projektivnosti typu 1. s jedním společným prvkem samodružným, jejichž charakteristické dvojpoměry jsou k a $1/k$, mají produktem projektivnost 2. typu.[12])

Kterékoliv dvě grupy každého ze tří hořejších typů (G_1, G'_1 a G_2), složené z projektivností základního útvaru jednomocného, jsou konjugovány v nejširší grupě projektivností G_3. Avšak *všechny parabolické projektivnosti grupy* G_2 *tvoří subgrupu* G'_1, *invariantní v grupě* G_2. Neboť parabolické projektivnosti tyto, majíce společný prvek samodružný, tvoří grupu G'_1; každá projektivní transformace vůbec převádí parabolickou projektivnost v parabolickou; a konečně každá transformace grupy G_2 ponechává společný samodružný prvek invariantním.[13])

Mimo uvedené grupy projektivních transformací G_1, G'_1, G_2 a G_3 neexistuje žádná spojitá grupa projektivností základního útvaru 1. řádu.[14])

---

[12]) Zvolíme-li za invariantní body projektivních transformací řady bodové, obsažených v grupě G_1, počáteční bod souřadnic a bod v nekonečnu, jsou transformace v G_1 vyjádřeny rovnicí $x' = ax$. Je-li invariantním bodem parabolických projektivností bod nevlastní, mají transformace grupy G'_1 rovnici $x' = x + a$. Transformace grupy G_2, jejíž invariantní bod je v nekonečnu, mají rovnici $x' = ax + b$.

[13]) Grupa G_2 (se samodružným prvkem O_1) obsahuje ∞^1 subgrup G_1 (se samodružným prvkem O_1 a druhým, zvoleným z prvků uvažovaného útvaru) a jednu subgrupu G'_1 (se samodružným prvkem dvojnásobným O_1). Grupa na počátku uvedená G_3 obsahuje ∞^1 subgrup G_2 (jejichž samodružnými prvky jsou jednotlivé prvky útvaru), proto obsahuje ∞^2 subgrup G_1 a ∞^1 subgrup G'_1. Spojitost grup G_1, G'_1, G_2 a G_3 vyplývá ze spojitého průběhu veličin, projektivnosti určujících, a ze spojitosti útvaru transformovaného.

[14]) Spojité grupy projektivností základního útvaru jednorozměrného určil po prvé *S. Lie* (1874) ve smyslu své analytické teorie; viz na př. jeho Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen, herausgegeben von G. Scheffers, 1893. Geometricky je odvodil *H. B. Newson*, Continuous groups of projective transformations treated synthetically, Quarterly Kansas univ. 4 (1895) nebo Transformazioni proiettive ad un parametro e loro gruppi continui, Giornale mat. 43 (1905).

IV. ÚTVARY ODVOZENÉ Z PROJEKTIVNÍCH ÚTVARŮ JEDNOMOCNÝCH.

36. Křivka druhého stupně a křivka druhé třídy. Ze základních útvarů jest možno odvoditi útvary jiné: jestliže sdružené prvky dvou projektivních útvarů základních 1. řádu určují element geometrický, vytvořuje tento element útvar odvozený. Všimněme si nejprve útvarů v rovině.

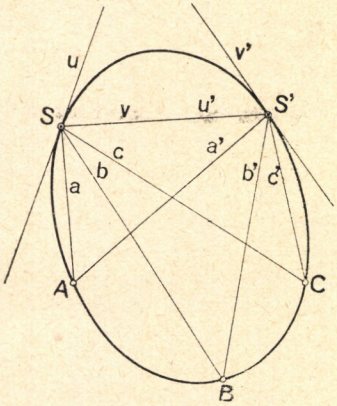
a) Korespondující paprsky *dvou projektivních nesoumístných svazků paprskových v téže rovině* určují bod, svůj průsečík; tyto průsečíky vytvořují jednomocnou spojitou soustavu bodů, řadu bodovou (v širším smyslu) čili *čáru jako geometrické místo vytvořujícího bodu* (jenž sluje bodem čáry). Omezme se (zatím) na projektivní svazky neperspektivní a na projektivnost nezvrhlou.

Libovolnou přímku l téže roviny (vyjímaje přímky jdoucí středy S a S' obou daných svazků) protínají tyto svazky paprskové v soumístných řadách bodových, jež jsou také projektivní. Samodružné body těchto projektivních řad jsou body na čáře, vytvořené paprskovými svazky S, S', a vyčerpávají je; neboť samodružný bod řad těch spojen s S a S' dává korespondující paprsky obou svazků a leží tedy na čáře, naopak bod čáry ležící na přímce l je průsečí-

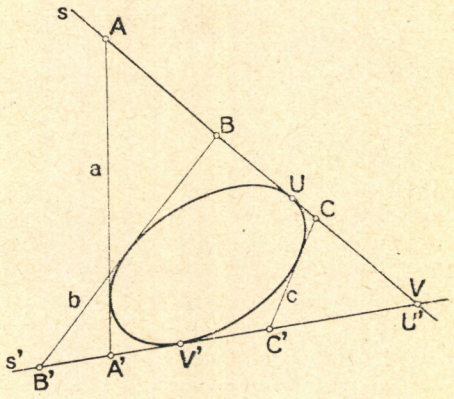
Korespondující body *dvou projektivních nesoumístných řad bodových v téže rovině* určují přímku, svou spojnici; spojnice tyto vytvořují jednomocnou spojitou soustavu přímek, svazek paprskový (v širším smyslu) čili *čáru jako obálku vytvořující přímky* (jež sluje přímkou nebo tečnou čáry). Omezme se (zatím) na projektivní řady neperspektivní a na projektivnost nezvrhlou.

Z libovolného bodu L téže roviny (vyjímaje body ležící na osách s a s' obou daných řad) promítají se tyto řady bodové soumístnými svazky paprskovými, jež jsou také projektivní. Samodružné paprsky těchto projektivních svazků, a jenom tyto, jsou tečnami čáry, vytvořené bodovými řadami s a s'; neboť samodružný paprsek svazků těch protíná s a s' v korespondujících bodech obou řad a jest tedy přímkou čáry, naopak přímka čáry jdoucí bodem L spojuje sdružené

kem sdružených paprsků obou svazků a tedy samodružným bodem obou řad. Protože pak dvě projektivní soumístné řady bodové mají dva samodružné body (reálné různé neb splývající nebo imaginární), protíná libovolná přímka (nejdoucí bodem S ani S') čáru ve dvou bodech.



Obr. 41.



Obr. 42.

Totéž platí však i o přímkách, jdoucích bodem S nebo S' (dříve vyloučených); *středy S a S' vytvořujících svazků paprskových jsou* totiž *také body této čáry*. Neboť paprsek $S'S$ ve svazku S' protíná sdružený s ním paprsek svazku S v bodě S; týž paprsek SS' čítaný do svazku S protíná odpovídající jemu paprsek svazku S' v bodě S'. Přímka jdoucí bodem S nebo S' má druhý bod s čarou společný v průsečíku svém s korespondujícím paprskem svazku S', resp. S; konečně přímka SS' má s čarou společné body S a S'.

Protože tedy *na libovolné přímce* v rovině *leží dva body čáry, vytvořené dvěma projektivními svazky* body obou řad a jest tedy samodružným paprskem obou svazků. Protože pak dva projektivní soumístné svazky paprskové mají dva samodružné paprsky (reálné různé neb splývající nebo imaginární), jdou libovolným bodem (mimo s a s') dvě tečny čáry.

Totéž platí však i o bodech, ležících na přímce s nebo s' (dříve vyloučených); *osy s a s' vytvořujících řad bodových jsou* totiž *také přímkami této čáry*. Neboť spojnice bodu $s's$ v řadě s' a sdruženého s ním bodu na s jest s; spojnice téhož bodu ss', čítaného do řady s, a odpovídajícího jemu bodu na s' jest s'. Druhá tečna z bodu na přímce s nebo s' k čáře jdoucí jest určena bodem korespondujícím jemu na přímce s', resp. s; konečně z bodu ss' jdou k čáře tečny s a s'.

Protože tedy *libovolným bodem* v rovině *procházejí dvě přímky čáry, vytvořené dvěma projektivními řada-*

paprskovými této roviny, sluje čára ta *křivkou druhého stupně*[1]) (obr. 41).

mi bodovými této roviny, sluje čára ta *křivkou druhé třídy*[1]) (obr. 42).

Křivka 2. stupně a křivka 2. třídy jsou (vznikem i vlastnostmi) útvary v rovině k sobě duální.

b) Spojnice dvou bodů PQ na křivce přejde v *tečnu* křivky v bodě P, jestliže bod Q se bez omezení po křivce blíží pevnému bodu P; sdružené paprsky q, q' svazků S a S', jež se protínají v Q, blíží se bez omezení paprskům p, p' sobě odpovídajícím, jež určují bod P. Abychom speciálně poznali *tečnu v bodě* S (resp. S'), všimněme si, že paprsek blízký paprsku $u' = SS'$, čítanému do svazku S', protíná svůj korespondující paprsek svazku S v bodě křivky, blízkém bodu S; blíží se pak bez omezení tento průsečík bodu S a jeho spojnice s bodem S se blíží tečně v bodě S, jestliže paprsek svazku S' se bez omezení blíží paprsku u'. Proto paprsek u odpovídající ve svazku S paprsku $u' = S'S$ ve svazku S' je tečnou křivky v bodě S; tato tečna křivky v bodě S jest jediná, protože projektivnost je vztah jednoznačný. Obdobně paprsek v' ve svazku S' odpovídající paprsku $v = SS'$, čítanému do svazku S, je (jedinou) tečnou křivky v bodě S'.

c) Projektivnost dvou svazků se středy S a S', jež vytvořují křivku 2. stupně, je stanovena třemi dvojicemi sdružených paprsků

$$abc \barwedge a'b'c',$$

které určují body $aa' = A$, $bb' = B$, $cc' = C$ na křivce. Chceme-li

Průsečík dvou tečen křivky pq přejde v *dotyčný bod* přímky p na křivce, jestliže přímka q se bez omezení blíží pevné přímce p; sdružené body Q, Q' řad s a s', jejichž spojnicí je q, blíží se bez omezení bodům P, P' sobě odpovídajícím, jež určují přímku p. Abychom speciálně nalezli *dotyčný bod přímky* s (resp. s'), všimněme si, že bod blízký bodu $U' = ss'$, čítanému do řady s', určuje se svým sdruženým bodem v řadě s tečnu křivky, blízkou tečně s; blíží se pak bez omezení tato přímka tečně s a její průsečík s přímkou s se blíží dotyčnému bodu tečny s na křivce, jestliže bod řady s' se bez omezení blíží bodu U'. Proto bod U odpovídající v řadě s bodu $U' = s's$ řady s' je dotyčným bodem tečny s na křivce; jest jediný na přímce s, protože projektivnost je vztah jednoznačný. Obdobně bod V' v řadě s' odpovídající bodu $V = ss'$, čítanému do řady s, je (jediným) dotyčným bodem tečny s' na křivce.

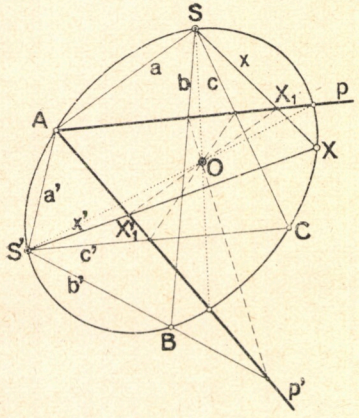
Projektivnost dvou řad na osách s a s', jež vytvořují křivku 2. třídy, je stanovena třemi dvojicemi sdružených bodů

$$ABC \barwedge A'B'C',$$

které určují tečny křivky $AA' = a$, $BB' = b$, $CC' = c$. Chceme-li *sestrojiti další přímky křivky*, musíme

[1]) Chceme-li se omeziti na prvky reálné, řekneme, že na libovolné přímce leží *nanejvýš dva body* uvažované čáry, duálně že libovolným bodem jdou *nanejvýš dvě tečny* čáry uvažované.

sestrojiti další body křivky, musíme sestrojiti další dvojice sdružených paprsků. K tomu cíli vedeme (obr. 43), jak známo, průsečíkem na př. A dvě pomocné přímky p, p'; řady bodové, v nichž protíná svazek S přímku p a svazek S' přímku p', jsou perspektivní, a spojnice

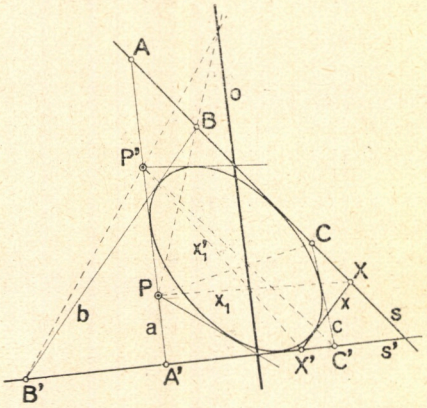


Obr. 43.

korespondujících bodů jejich procházejí středem perspektivnosti O. Každá přímka jdoucí bodem O protíná přímky p, p' ve dvojicích bodů X_1 a X'_1, jejichž spojnice x a x' se středy S a S' určují další bod X křivky.

Zejména můžeme tak sestrojiti druhé body křivky 2. stupně, jež leží na libovolném paprsku, vedeném bodem S nebo bodem S'; tečny křivky té v bodech S a S'[2]); druhé body její ležící na libovolném paprsku, vedeném bodem A nebo B nebo C (druhým bodem

sestrojiti další dvojice sdružených bodů. K tomu cíli zvolíme (obr. 44), jak známo, na spojnici na př. a dva pomocné středy P, P'; svazky paprskové, jimiž se promítá řada s z bodu P a řada s' z bodu P', jsou perspektivní, a průsečíky korespondujících paprsků jejich leží



Obr. 44.

na ose perspektivnosti o. Každý bod na této ose o spojen s body P a P' poskytuje dvě přímky x_1 a x'_1, jejichž průsečíky X a X' s osami s a s' určují další tečnu x křivky.

Zejména můžeme tak sestrojiti druhé tečny křivky 2. třídy, jdoucí libovolným bodem, zvoleným na s nebo na s': dotyčné body křivky té na přímkách s a s'[2]); druhé tečny její jdoucí libovolným bodem, zvoleným na a nebo b nebo c (druhou tečnou křivky jdoucí bo-

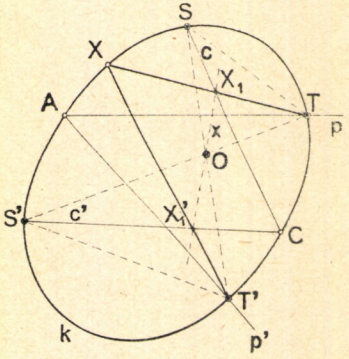
[2]) Křivka 2. stupně, vytvořená projektivními svazky o středech S a S', má tečnami v těchto bodech svých spojnice jejich se středem projektivnosti obou svazků. Duálně křivka 2. třídy, vytvořená projektivními řadami na osách s a s', má dotyčné body těchto svých přímek v průsečících jejich s osou projektivnosti obou řad.

křivky na paprsku p je průsečík tohoto paprsku s paprskem $S'O$, druhým bodem křivky na p' je průsečík (p', SO)), atd.

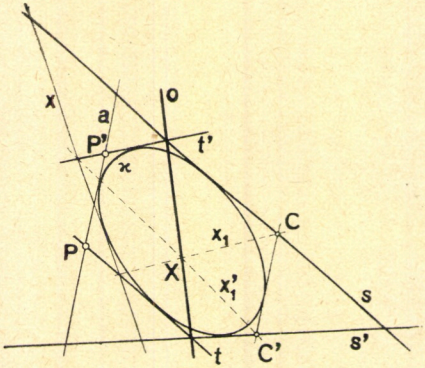
Při této konstrukci bodů křivky 2. stupně můžeme za osy p, p' pomocných perspektivních řad bodových voliti speciálně přímky AB, AC; středem perspektivnosti je tu bod $(SC, S'B)$.[3])

dem P je spojnice tohoto bodu s bodem $s'o$, druhou tečnou křivky z bodu P' je spojnice (P', so)), atd.

Při této konstrukci přímek křivky 2. třídy můžeme za středy P, P' pomocných perspektivních svazků paprskových voliti speciálně body ab, ac; osou perspektivnosti je tu přímka $(sc, s'b)$.[3])



Obr. 45.



Obr. 46.

Uvedené sestrojení křivky 2. stupně, resp. křivky 2. třídy provádí se pouhým pravítkem.

d) Dokážeme, že středy S a S' daných svazků paprskových nejsou zvláštními body na odvozené křivce k čili že kterékoli dva body křivky T a T' lze zvoliti za středy

Dokážeme, že osy s a s' daných řad bodových nejsou zvláštními přímkami odvozené křivky $\varkappa$ čili že kterékoli dvě tečny křivky t a t' lze zvoliti za osy dvou pro-

[3]) Můžeme (rozlišujíce prvky reálné od imaginárních) zjistiti, že dvě tečny křivky 2. stupně, sestrojené ve středech dvou projektivních svazků ji vytvořujících, omezují dvě části svazku paprskového (se středem ve středu projektivnosti obou svazků), z nichž jedna obsahuje přímky křivku (v bodech reálných) protínající, druhá však přímky jí neprotínající. A duálně dva dotyčné body křivky 2. třídy na osách dvou projektivních řad ji vytvořujících omezují dvě části řady bodové (s osou v ose projektivnosti obou řad těch), z nichž jedna obsahuje body vysílající ke křivce (reálné) tečny (jsou to t. zv. body vnější vůči křivce), druhá však body tečen nevysílající (t. zv. body vnitřní vůči křivce). Stačí (v případě prvém) vzíti v úvahu involuční projektivnost dvou řad, v nichž svazky S a S' protínají přímku, jdoucí jejich středem projektivnosti; tato involuce je na přímkách jedné části uvedeného svazku hyperbolická, na přímkách části druhé eliptická.

dvou projektivních svazků, jež vytvořují tutéž křivku k. Zvolme (obr. 45) za pomocné osy p a p' perspektivních řad bodových spojnice AT a AT' a ustanovme střed jejich perspektivnosti O. Tímto bodem O prochází také paprsek ST' (protože T' jako bod křivky je průsečíkem sdružených paprsků ST' a $S'T'$) a $S'T$ (protože ST a $S'T$ sobě odpovídají). Libovolný paprsek x bodem O jdoucí ať protíná paprsek svazku S, třebas c, v X_1 a korespondující paprsek c' svazku S' v X'_1. Přímky TX_1 a $T'X'_1$ proťaty jsou paprskovými svazky S a S' v perspektivních řadách bodových se středem perspektivnosti O; neboť tři paprsky jdoucí bodem O, totiž ST', $S'T$ a $X_1X'_1$, protínají přímky TX_1 a $T'X'_1$ v těchže bodech jako paprsky svazku S, resp. S'. Proto leží průsečík X přímek TX_1 a $T'X'_1$ na křivce k (protínajíť se v něm korespondující paprsky svazků S a S'). Svazek paprsků x se středem O protíná c, resp. c' v perspektivních řadách; tyto pak se promítají z T, resp. T' v projektivních svazcích, a sdružené paprsky svazků těch protínají se v bodech X křivky k. Platí tedy věta *Steiner-Chaslesova*:

Body křivky 2. stupně promítají se z kterýchkoli dvou bodů jejích projektivními svazky paprsků.[4])[5])

jektivních řad, jež vytvořují tutéž křivku $\varkappa$. Zvolme (obr. 46) za pomocné středy P a P' perspektivních svazků paprskových průsečíky at a at' a ustanovme osu jejich perspektivnosti o. Na této přímce o leží také bod st' (protože t' jako tečna křivky spojuje sdružené body st' a $s't'$) a $s't$ (protože st a $s't$ sobě odpovídají). Libovolný bod X na přímce o ležící ať se promítá z bodu řady s, třebas C, paprskem x_1 a z korespondujícího bodu C' řady s' paprskem x'_1. Z bodů tx_1 a $t'x'_1$ promítají se řady bodové s a s' perspektivními svazky paprskovými s osou perspektivnosti o; neboť tři body na o, totiž st', $s't$ a $x_1x'_1$, promítají se z bodů tx_1 a $t'x'_1$ týmiž paprsky jako body řady s, resp. s'. Proto jest spojnice x bodů tx_1 a $t'x'_1$ přímkou křivky $\varkappa$ (spojuje totiž korespondující body řad s a s'). Řada bodů X na přímce o promítá se z bodu C, resp. z bodu C' perspektivními svazky paprsků; tyto pak jsou proťaty tečnami t, resp. t' v projektivních řadách bodových, a spojnice korespondujících bodů řad těch jsou přímkami x křivky $\varkappa$. Platí tedy věta:

Tečny křivky 2. třídy protínají kterékoli dvě tečny její v projektivních řadách bodových.[6])[7])

[4]) Vytvoření křivky 2. stupně dvěma projektivními (nesoumístnými neperspektivními) svazky paprsků v rovině nalezl *J. Steiner* r. 1832 na základě projekce z rovnosti úhlů obvodových v kružnici nad týmž obloukem; už však *M. Chasles* r. 1829 dokázal, že geometrickým místem bodu, z něhož se čtyři pevné body v rovině promítají čtyřmi paprsky o konstantním dvojpoměru, jest křivka 2. stupně, jdoucí danými body. Historické údaje o projektivním vytvoření těchto křivek viz v Encyclopédie sc. math., III. 8: Géométrie projective (1913), p. 41. a n., a v uv. knize Kötterově, p. 256 a n.

[5]) Že všechny projektivnosti mezi řadami průsečíků kterýchkoli dvou vytvořujících svazků kuželosečky na zvolené přímce p její roviny mají

e) Z bodů křivky 2. stupně k lze kterékoli dva A, B zvoliti za středy svazků a jejich projektivnost stanoviti kterýmikoli třemi dalšími body C, D, E, tak totiž, že učiníme sdruženými dvojice paprsků AC a BC, AD a BD, AE a BE. Křivka projektivními svazky $A\,(CDE)$ a $B\,(CDE)$ vytvořená je totožná s křivkou k. Jest tedy křivka 2. stupně jednoznačně určena pěti svými body; dvě různé křivky 2. stupně mohou míti nanejvýš čtyři body společné.

Vycházejíce od pěti bodů libovolně v rovině daných, můžeme však ustanoviti neperspektivní projektivnost dvou svazků paprskových a vytvořiti jimi křivku 2. stupně jen tehdy, jestliže žádné tři z bodů těch neleží v jedné přímce. *Jest* tudíž *křivka 2. stupně jednoznačně určena pěti body v rovině, z nichž žádné tři neleží v téže přímce.*

Z bodů C, D, E může jeden, třebas C, splynouti se středem svazku, třebas A; ze tří dvojic sdružených paprsků, jimiž je projektivnost svazků určena, skládá

Z přímek křivky 2. třídy $\varkappa$ je možno kterékoli dvě a, b zvoliti za osy řad a projektivnost těchto stanoviti kterýmikoli třemi dalšími přímkami c, d, e, tak totiž, že učiníme sdruženými dvojice bodů ac a bc, ad a bd, ae a be. Křivka vytvořená projektivními řadami $a(cde)$ a $b(cde)$ je totožná s křivkou $\varkappa$. Jest tedy křivka 2. třídy jednoznačně určena pěti svými tečnami; dvě různé křivky 2. třídy mohou míti nanejvýš čtyři společné tečny.

Vycházejíce od pěti přímek v rovině zvolených, můžeme však ustanoviti neperspektivní projektivnost dvou řad bodových a vytvořiti jimi křivku 2. třídy jenom tehdy, jestliže žádné tři z přímek těch nejdou jedním bodem. *Jest* tedy *křivka 2. třídy jednoznačně určena pěti přímkami v rovině, z nichž žádné tři nejdou týmž bodem.*

Z přímek c, d, e může jedna, třebas c, splynouti s osou řady, třebas a; ze tří dvojic bodů sobě odpovídajících, jimiž je projektivnost řad určena, skládá se tu jedna

---

tytéž body samodružné a stanoví tedy na přímce, jež nemá s kuželosečkou průsečíků reálných, tytéž dva sdruženě imaginární průsečíky přímky takové s kuželosečkou, lze zjistiti tím, že dokážeme záměnnost projektivností mezi řadami průsečíků na p, v nichž přímku tu protínají vytvořující svazky o středech A, B a svazky o středech B, C (pomocí věty Pascalovy) a odtud záměnnost projektivností mezi řadami průsečíků u dvou dvojic vytvořujících svazků se středy vesměs různými.

[6]) Větu Steiner-Chaslesovu (a větu duální) lze kratčeji dokázati nepřímo pomocí rovnosti dvojpoměrů v projektivních útvarech základních. Kdyby totiž dvojpoměry čtyř paprsků promítajících čtyři body křivky 2. stupně nebyly při dvou středech na křivce sobě rovny, měla by křivka taková s jedním paprskem tři body společné.

[7]) Co bylo prve nalezeno pro body S a S' jako středy svazků křivku vytvořujících, platí tedy pro libovolné body křivky té (a duálně). Zejména platí: Křivka 2. stupně má v každém svém bodě jednu a jedinou tečnu; duálně křivka 2. třídy má na každé přímce své jeden a jediný bod dotyčný. Další body a tečny křivky 2. stupně, duálně další přímky a body dotyčné u křivky 2. třídy lze sestrojiti způsobem prve uvedeným.

se tu jedna dvojice, AC a BC, z tečny křivky v bodě A a ze spojnice středů BA. Totéž může nastati u druhého z bodů C, D, E při bodě B; splyne-li D s bodem B, je druhá dvojice paprsků sobě odpovídajících složena ze spojnice AB a tečny křivky v bodě B. Jest tedy křivka 2. stupně jednoznačně určena také čtyřmi body svými a tečnou v jednom z nich nebo třemi svými body a tečnami ve dvou z nich.

dvojice, ac a bc, z dotyčného bodu přímky a a z průsečíku ba. Totéž může nastati u druhé z přímek c, d, e při přímce b; splyne-li d s přímkou b, je druhá dvojice sdružených bodů složena z průsečíku ab a dotyčného bodu přímky b. Jest tedy křivka 2. třídy jednoznačně určena také čtyřmi tečnami svými a dotyčným bodem jedné z nich nebo třemi svými tečnami a dotyčnými body dvou z nich.

Obráceně musíme tu při volbě bodů a přímek v rovině (vzhledem k požadavku neperspektivní projektivnosti útvarů vytvořujících) dbáti obecné jejich polohy, aby totiž žádné tři body neležely na jedné přímce, aby žádné tři přímky neprocházely jedním bodem, konečně aby žádná přímka a bod nebyly incidentní, leda ovšem v případě, kdy mají býti tečnou a jejím bodem dotyčným. Platí tedy:

Křivka 2. stupně jest jednoznačně určena čtyřmi body, z nichž žádné tři neleží v téže přímce, a přímkou jdoucí jedním z nich, jež neprochází žádným z ostatních tří bodů, jako tečnou.

Křivka 2. stupně jest jednoznačně určena třemi body, neležícími v téže přímce, a dvěma přímkami, z nichž každá prochází jedním z nich, nikoli však některým z ostatních dvou, jako tečnami.

Křivka 2. třídy jest jednoznačně určena čtyřmi přímkami, z nichž žádné tři nejdou týmž bodem, a bodem ležícím na jedné z nich, jenž neleží na žádné z ostatních tří přímek, jako bodem dotyčným.

Křivka 2. třídy jest jednoznačně určena třemi přímkami, jež nejdou týmž bodem, a dvěma body, z nichž každý leží na jedné z nich, nikoli však na některé z ostatních dvou, jako body dotyčnými.

f) V předcházející úvaze jsme předpokládali, že projektivní svazky S a S' nejsou perspektivní. Jsou-li perspektivní, leží průsečíky korespondujících paprsků na přímce, ose jejich perspektivnosti; vedle toho společný paprsek SS' patří do obou svazků a je tedy průsečík této dvojice neurčitý. Čára 2. stupně (bodová řada 2. stupně), vytvořená dvěma perspektivními svazky, *rozpadá se ve dvě přímky*

V předcházející úvaze jsme předpokládali, že projektivní řady s a s' nejsou perspektivní. Jsou-li perspektivní, procházejí spojnice korespondujících bodů bodem, středem jejich perspektivnosti; vedle toho společný bod ss' patří oběma řadám a je tedy spojnice této dvojice neurčitá. Čára 2. třídy (paprskový svazek 2. třídy), vytvořená dvěma perspektivními řadami, *rozpadá se ve dva body* (dva

(dvě řady 1. stupně), *společný paprsek obou svazků a jejich osu perspektivnosti*. Čára 2. stupně, rozpadající se ve dvě přímky, sluje *zvrhlá* (degenerovaná); proti ní jmenujeme čáru, jež se nerozpadá, nezvrhlou čili *pravou*.[8])

Je-li projektivnost vytvořujících svazků degenerovaná, rozpadá se čára odvozená rovněž ve dvě přímky, singulární paprsky obou svazků.[9])[10])

svazky 1. třídy), *společný bod obou řad a jejich střed perspektivnosti*. Čára 2. třídy, rozpadající se ve dva body, sluje *zvrhlá* (degenerovaná); proti tomu nazýváme čáru, jež se nerozpadá, nezvrhlou nebo také *pravou*.[8])

Je-li projektivnost vytvořujících řad degenerovaná, rozpadá se čára odvozená rovněž ve dva body, singulární body obou řad.[9])[11])

37. Kužel druhého stupně a kužel druhé třídy. Jako z projektivních svazků paprskových a z projektivních řad bodových téže roviny vzniká čára 2. stupně, resp. 2. třídy, tak lze odvoditi nové útvary i ze dvou projektivních svazků rovinových a ze dvou projektivních svazků paprskových téhož trsu.

a) Sdružené roviny *dvou projektivních nesoumístných svazků rovinových téhož trsu* (jejichž osy se totiž protínají, nejsouce totožny) určují přímku-průsečnici a vytvořují těmito průsečnicemi svými jednomocnou spojitou soustavu paprsků o společném bodě, *kužel*

Sdružené paprsky *dvou projektivních svazků paprskových, jež mají společný střed a neleží v téže rovině*, určují rovinu a vytvořují těmito rovinami jednomocnou spojitou soustavu rovin o společném bodě, *kužel* (kuželovou plochu, *obálku vytvořující roviny*). Roviny,

[8]) Jsou-li dva projektivní svazky paprskové nebo dvě projektivní řady bodové, jež mají čáru 2. stupně resp. 2 třídy vytvořiti, soumístné, vzniká rovněž čára zvrhlá (složená ze dvou přímek resp. ze dvou bodů, jež jsou samodružnými prvky dané projektivnosti).

[9]) Zvrhlá čára 2. stupně nebo 2. třídy se objeví, jestliže prvky čáru určující nesplňují uvedených podmínek o vzájemné poloze. U čáry 2. stupně (2. třídy), jež se rozpadá ve dvě různé přímky (ve dva různé body) lze za tečnu (za dotyčný bod) pokládati každou přímku jdoucí jejich průsečíkem (každý bod na jejich spojnici).

V dalším budeme čarou 2. stupně nebo čarou 2. třídy rozuměti — až na případy zvlášť vytčené — čáry pravé.

[10]) Podle vztahu křivky 2. stupně k přímce nevlastní rozeznáváme tři typy (pravých) křivek 2. stupně: křivka 2. stupně, protatá nevlastní přímkou ve dvou reálných bodech, sluje *hyperbola*; křivka 2. stupně, jež má přímku v nekonečnu za tečnu (s dvěma reálnými průsečíky splývajícími), sluje *parabola*; a křivka 2. stupně, protatá přímkou nevlastní ve dvou imaginárních bodech, sluje *elipsa*. Tečny křivky 2. stupně v jejích průsečících s přímkou nevlastní slují *asymptoty* její; jsou u hyperboly reálné, u elipsy imaginární.

[11]) O křivkách 2. stupně a 2. třídy na základě jejich vytvoření projektivními svazky resp. řadami (také se stanoviska metrického) jednají ve svých učebnicích obšírně na př. *Reye, Thomae, Weyrové, Jarolímek* a j.

(kuželovou plochu, *geometrické místo vytvořující přímky*). Paprsky, v nichž se sdružené roviny obou svazků protínají, slují (povrchové) *přímky* kužele (patří k nim i osy svazků vytvořujících); jejich společný bod sluje *vrchol* kužele.

Libovolnou rovinu λ téhož trsu (neprocházející osou jednoho nebo druhého svazku) protínají tyto projektivní svazky rovin v soumístných svazcích paprsků, navzájem projektivních. Samodružné paprsky těchto projektivních svazků jsou přímkami vytvořeného kužele, a mimo ně nemá rovina s plochou nic společného. Dvě přímky, v nichž rovina λ kužel protíná, jsou ovšem buď reálné různé nebo reálné splývající nebo imaginární. Dvě přímky má s útvarem vytvořeným společné také každá rovina jednoho i druhého svazku vytvořujícího (jednou z nich je osa svazku), rovněž rovina jdoucí oběma osami svazků těch (tyto osy samy).

Protože tedy *libovolná rovina* trsu *obsahuje dvě přímky kužele*, vytvořeného projektivními svazky rovin tohoto trsu, sluje útvar ten *kuželem 2. stupně*.

obsahující sdružené paprsky obou svazků, slují (*tečné*) *roviny* vytvořeného kužele (patří k nim také roviny svazků vytvořujících); společný bod všech rovin sluje *vrchol* kužele.

Z libovolné přímky l téhož trsu (neležící v rovině jednoho nebo druhého svazku) promítají se tyto projektivní svazky paprsků soumístnými svazky rovin, navzájem projektivními. Samodružné roviny těchto projektivních svazků jsou rovinami vytvořeného kužele, a mimo ně nemá plocha rovin, přímkou l jdoucích. Dvě (tečné) roviny kužele, jež procházejí přímkou l trsu, jsou buď reálné různé nebo reálné splývající nebo imaginární. Dvě roviny útvaru vytvořeného jdou také každou přímkou jednoho i druhého svazku vytvořujícího (jednou z nich je rovina svazku), rovněž průsečnicí obou rovin svazků těch (tyto roviny samy).

Protože tedy *libovolnou přímkou* trsu *procházejí dvě* (*tečné*) *roviny kužele*, vytvořeného projektivními svazky paprsků tohoto trsu, sluje útvar ten *kuželem 2. třídy*.

Kužel 2. stupně a kužel 2. třídy zde vytvořené jsou útvary v trsu duální.

Kužel 2. stupně vzniká také, promítneme-li křivku 2. stupně z bodu ležícího mimo její rovinu, rovněž tak vzniká kužel 2. třídy z křivky 2. třídy. Naopak můžeme křivku 2. stupně, resp. křivku 2. třídy nalézti jako řez kužele 2. stupně, resp. kužele 2. třídy s rovinou, nejdoucí vrcholem plochy.[1])[2])

[1]) A proto průmětem křivky 2. stupně nebo křivky 2. třídy z bodu na rovinu jest opět křivka 2. stupně resp. křivka 2. třídy.

[2]) Proto také můžeme, hledajíce stupeň kužele, vytvořeného dvěma projektivními svazky rovin, místo roviny v trsu obecně položené všimnouti si přímky v prostoru obecně položené (neprocházející vrcholem kužele).

Kužel 2. stupně je v prostoru duální ke křivce 2. třídy, rovněž kužel 2. třídy v prostoru duální ke křivce 2. stupně.

b) Vlastnosti kuželů 2. stupně nebo 2. třídy odvodili bychom zcela obdobně jako vlastnosti křivek 2. stupně nebo 2. třídy, buď samostatně nebo duálností nebo promítáním z uvedených křivek.

Lze především dokázati, že osy obou svazků rovinových, vytvořujících kužel 2. stupně, nejsou zvláštními přímkami kužele. Odtud vyplývá, že *přímky kužele 2. stupně promítají se z kterýchkoli dvou přímek jeho projektivními svazky rovin.*

Tečná rovina kužele 2. stupně podél určité jeho přímky je mezní poloha roviny jdoucí touto přímkou a druhou přímkou plochy, blíží-li se druhá přímka po ploše bez omezení k prvé (pevné); pevná přímka je dotyčnou přímkou tečné roviny tak vznikající. Tečnou rovinou plochy v ose prvního (druhého) svazku vytvořujícího je rovina odpovídající v prvním (druhém) svazku společné rovině obou svazků, čítané do svazku druhého (prvního).

Projektivnost dvou svazků rovin, vytvořujících kužel 2. stupně, je stanovena třemi dvojicemi sdružených rovin, jež určují tři přímky plochy. Další přímky kužele sestrojíme jako průsečnice dalších dvojic korespondujících rovin v daných svazcích. Pohodlně stane se tak konstrukcí dvojic sdružených paprsků ve svazcích na rovině, dané svazky rovin protínající, je-

Lze dokázati, že roviny obou svazků paprskových, vytvořujících kužel 2. třídy, nejsou zvláštními (tečnými) rovinami kužele. Odtud plyne, že *roviny kužele 2. třídy protínají kterékoli dvě roviny jeho v projektivních svazcích paprsků.*

Dotyčná přímka kužele 2. třídy v určité rovině jeho je mezní poloha průsečnice této roviny s druhou rovinou plochy, blíží-li se druhá rovina, zůstávajíc (tečnou) rovinou plochy, bez omezení k prvé (pevné); pevná rovina je tečnou rovinou plochy podél přímky tak vznikající. Dotyčnou přímkou roviny prvního (druhého) svazku vytvořujícího je přímka, odpovídající v prvním (druhém) svazku průsečnici obou rovin, čítané do svazku druhého (prvního).

Projektivnost dvou svazků paprskových, jež kužel 2. třídy vytvořují, stanovena je třemi dvojicemi sdružených paprsků, určujících tři (tečné) roviny plochy. Další roviny kužele sestrojíme z dalších dvojic korespondujících paprsků v daných svazcích. Pohodlně učiníme to konstrukcí dvojic sdružených bodů v řadách na rovině, dané svazky paprsků pro-

Ta má (neprotíná-li osu jednoho z obou svazků) s kuželem společné dva body, samodružné prvky soumístných řad projektivních, v nichž oba dané svazky rovin zvolenou přímku protínají; protíná-li přímka ta jednu nebo obě osy daných svazků, má však také s kuželem dva body společné. Obdobně při vyšetřování třídy kužele, odvozeného ze dvou projektivních svazků paprskových, můžeme zjistiti počet rovin kužele, jdoucích bodem obecně položeným.

jich průsečíků a přímek, tyto průsečíky z vrcholu plochy promítajících.

Kužel 2. stupně je jednoznačně určen *pěti svými přímkami*, z nichž jedna nebo dvě mohou býti nahrazeny tečnými rovinami v jedné ze čtyř, resp. ve dvou ze tří zbývajících přímek.

Nesoumístné svazky rovin téhož trsu vytvořují pravý kužel 2. stupně, jsou-li v obecné korespondenci projektivní; jsou-li v perspektivní projektivnosti, rozpadá se plocha jimi vytvořená ve dvě roviny, společnou rovinu obou svazků a jejich rovinu perspektivnosti (zvrhlý kužel 2. stupně, dva paprskové svazky trsu). Zvrhlý kužel 2. stupně dostaneme také ze dvou svazků rovinových, jejichž projektivnost je degenerovaná.[3])

tínající, jejich spojnic a rovin, promítajících tyto spojnice z vrcholu plochy.

Kužel 2. třídy je jednoznačně určen *pěti svými rovinami* (*tečnými*), z nichž jedna nebo dvě mohou býti nahrazeny dotyčnými přímkami v jedné ze čtyř, resp. ve dvou ze tří zbývajících rovin.

Nesoumístné svazky paprsků téhož trsu vytvořují pravý kužel 2. třídy, jsou-li v obecné korespondenci projektivní; jsou-li perspektivně projektivní, rozpadá se plocha jimi vytvořená ve dvě přímky, společnou přímku obou svazků a jejich osu perspektivnosti (zvrhlý kužel 2. třídy, dva rovinové svazky trsu). Zvrhlý kužel 2. třídy obdržíme také ze dvou svazků paprskových v projektivnosti degenerované.

c) Vytvoření křivek a kuželů druhého stupně a druhé třídy, jak bylo uvedeno, je zcela podobné. Mohou takovým způsobem vzniknouti ještě další útvary odvozené?

Vyšetříme všechny možné dvojice projektivních útvarů základních prvního řádu. Obrátíme-li napřed pozornost ke dvojicím základních útvarů téhož druhu (ovšem nesoumístným), shledáváme: Dvě projektivní řady bodové s osami se protínajícími (obsažené v témž poli bodovém) vytvořují *křivku 2. třídy*; dvě projektivní řady bodové s osami mimoběžnými mohou vytvořiti nový útvar spojnicemi sdružených svých bodů. Dva projektivní svazky paprskové obsažené v téže rovině (v poli paprskovém) vytvořují *křivku 2. stupně*; dva projektivní svazky paprskové se společným vrcholem (v témž trsu paprskovém) vytvořují *kužel 2. třídy*; dva projektivní svazky paprskové neobsažené v základním útvaru druhého řádu (t. j. s různými středy a rovinami) nemohou vytvořiti útvaru odvozeného, protože dvě mimoběžné přímky neurčují

[3]) Protože v trsu (obsahujícím kužel 2. stupně) není prvku metricky speciálního (obdobného nevlastní přímce roviny), jest (v obyčejné geometrii) *kužel 2. stupně s vrcholem v konečnu* — na rozdíl od křivky 2. stupně — *jenom jednoho typu*; obdobné rozlišení jako u křivky 2. stupně je však možné u kužele 2. stupně s vrcholem nevlastním: tento *válec 2. stupně* jest buď hyperbolický nebo parabolický nebo eliptický podle toho, protíná-li jej nevlastní rovina ve dvou přímkách reálných různých nebo ve dvou splývajících (je-li tečnou rovinou jeho) nebo ve dvou imaginárních.

prostorového elementu. Dva projektivní svazky rovinové s osami se protínajícími (obsažené v trsu rovinovém) vytvořují *kužel 2. stupně*; dva projektivní svazky rovinové s osami mimoběžnými vytvořují svými průsečnicemi nový útvar.

Všimněme si ještě dvojic jednomocných základních útvarů druhů různých. Řada bodová a projektivní svazek rovin nemohou vytvořiti útvaru nového, protože bod a rovina neurčují elementu. Totéž platí o řadě bodové a projektivním svazku paprsků v téže rovině i o svazku rovin a projektivním svazku paprsků v témž trsu. Projektivní řada bodová a svazek paprskový v obecné poloze vzájemné (v prostoru) vytvořují (rovinou spojující bod a sdružený paprsek) týž útvar jako dva projektivní svazky paprskové v témž trsu, totiž kužel 2. třídy (v každé rovině položené osou řady, ne však středem svazku, křivku 2. třídy); projektivní svazek rovinový a svazek paprskový v obecné poloze vzájemné vytvořují konečně (průsečíkem roviny a sdruženého paprsku) týž útvar jako dva svazky paprskové v téže rovině, totiž křivku 2. stupně (v každém bodě osy, ležícím mimo rovinu svazku, kužel 2. stupně).

Zbývá tedy vyšetřiti útvar, vytvořený dvěma projektivními řadami bodů na mimoběžných osách, a útvar, vytvořený dvěma projektivními svazky rovin s osami mimoběžnými.

38. Přímková řada druhého stupně a druhé třídy.

a) Přímky, jež spojují sdružené body *dvou projektivních řad bodových* $[X]$ *a* $[X']$ *s osami mimoběžnými* p *a* p', vytvořují jednomocnou spojitou soustavu přímek, *řadu přímkovou*; kterékoli dvě přímky této řady jsou mimoběžné. Táž přímková řada může býti vytvořena průsečnicemi $\xi\xi'$ sdružených rovin dvou projektivních svazků rovinových s osami p a p'; neboť svazky rovin $\xi = pX'$ a $\xi' = p'X$ jsou projektivní (jsouce perspektivní k projektivním řadám bodů X', resp. X) a průsečnice $\xi\xi'$ i spojnice XX' jsou totožny.

Přímky, v nichž se protínají sdružené roviny *dvou projektivních svazků rovinových* $[\xi]$ *a* $[\xi']$ *s osami mimoběžnými* p *a* p', vytvořují jednomocnou spojitou soustavu přímek, *řadu přímkovou*; kterékoli dvě přímky této řady jsou mimoběžné. Táž přímková řada může býti vytvořena spojnicemi XX' sdružených bodů dvou projektivních řad bodových s osami p a p'; neboť řady bodů $X = p\xi'$ a $X' = p'\xi$ jsou projektivní (jsouce perspektivní k projektivním svazkům rovin ξ', resp. ξ) a spojnice XX' i průsečnice $\xi\xi'$ jsou totožny.

Řada přímková (čili *osnova*), vznikající uvedenými dvěma způsoby duálními, jest proto *útvarem soběduálním*.

Souhrn všech bodů na přímkách této přímkové řady tvoří plochu, kterou vzhledem k jejímu vytvoření jmenujeme *plochou přímkovou*; táž plocha je duálně tvořena souhrnem všech rovin jdoucích přímkami

uvedené řady. Taková přímková plocha sluje *zborcenou*, protože kterékoli dvě sousední (soumezné, t. j. nekonečně blízké) přímky její jsou mimoběžné.[1]) Je patrno, že každým bodem plochy té prochází a v každé rovině plochy leží jedna a jediná přímka uvažované řady.

b) Projektivní dvě řady bodové a duálně dva svazky rovinové, jež uvedenou plochu přímkovou vytvořují, jsou však vždy perspektivní (viz čl. 12*d*). Řady bodové jsou řezy téhož svazku rovin s přímkami p a p', svazky rovinové pak promítají tutéž řadu bodovou z přímek p a p'; osa perspektivnosti p'' jest v obou případech mimoběžná k přímkám p a p'. Spojnice XX' a průsečnice $\xi\xi'$ jsou tedy přímkami, jež protínají tři přímky p, p', p'', po dvou k sobě mimoběžné. Řada přímková, vznikající z projektivních dvou řad bodů nebo dvou svazků rovin s osami mimoběžnými, jest tudíž vytvořena *přímkami, jež protínají tři mimoběžky*.

Ale také obráceně každou soustavu přímek q, jež protínají tři dané přímky mimoběžné, je možno vytvořiti spojnicemi sdružených bodů dvou projektivních řad bodových nebo průsečnicemi sdružených rovin dvou projektivních svazků rovinových s osami mimoběžnými. Stačí zajisté jednu ze tří daných mimoběžek těch p'' zvoliti za osu perspektivnosti; zvolíme-li ji za osu svazku rovin, protíná rovina svazku, jdoucí přímkou q, dané přímky p a p' v bodech X a X', řady bodové $[X]$ a $[X']$ jsou projektivní a $XX' = q$; jestliže učiníme p'' osou řady bodové, promítají roviny $\xi = pq$ a $\xi' = p'q$ body této řady, svazky rovinové $[\xi]$ a $[\xi']$ jsou projektivní a $\xi\xi' = q$.

c) Skupinu tří přímek p, p' a p'' můžeme doplniti na takovou soustavu, jakou tvoří přímky q. Platí totiž: *Jestliže mimoběžné přímky* p_1, p_2, p_3 *a další* $p_4, p_5, \ldots$ *protínají tři mimoběžky* q_1, q_2, q_3 *a první tři z nich také čtvrtou mimoběžku* q_4, *protínají i přímky* $p_4, p_5, \ldots$ *tuto přímku* q_4. Neboť roviny $q_1\,(p_1p_2p_3p_4p_5\ldots)$ a $q_2\,(p_1p_2p_3p_4p_5\ldots)$ jsou projektivní (osově perspektivní podle osy q_3) a protínají přímku q_4 v projektivních řadách; projektivnost soumístných těchto řad má však tři body samodružné, totiž body p_1q_4, p_2q_4, p_3q_4; jsou proto i další dvojice body samodružnými, t. j. přímka q_4 je proťata přímkami $p_4, p_5, \ldots$ Stejně jsou přímkami $p_4, p_5, \ldots$ proťaty ostatní přímky $q_5, q_6, \ldots$ soustavy $[q]$, jsou-li jen proťaty přímkami p_1, p_2, p_3. Existuje tedy na ploše, vytvořené soustavou přímek $[q]$, protínajících tři mimoběžky p_1, p_2 a p_3, druhá soustava přímek $[p]$, jejíž přímky protínají tři mimoběžky q_1, q_2, q_3 a proto všechny přímky soustavy první $[q]$; k této soustavě patří i přímky p, p', p''.

Uvažovaná přímková plocha zborcená obsahuje tudíž *dvě řady přímek* $[p]$ *a* $[q]$; kdežto každé dvě z přímek jedné i z přímek druhé řady jsou mimoběžné, protíná každá přímka každé z obou řad všechny

[1]) Proti tomu sluje plocha přímková (vytvořená přímkami) *rozvinutelnou*, jestliže kterékoli dvě sousední přímky její se protínají (leží v rovině); plocha zborcená nazývá se pak také *nerozvinutelnou*.

přímky druhé řady. Přímky jedné soustavy $[p]$ slují *přímkami řídicími*, přímky soustavy druhé $[q]$ *přímkami vytvořujícími* (nebo obrácenè), obě soustavy slují *doplňkové* (sdružené), tvoříce tutéž plochu.

Každým bodem uvažované plochy přímkové prochází jedna přímka řady $[p]$ a jedna přímka řady $[q]$; duálně obsahuje každá rovina plochy té po jedné přímce z obou přímkových řad.

Mimo přímky vytčených řad $[p]$ a $[q]$ není na ploše té jiných přímek; neboť je-li r přímkou plochy, jež nepatří do řady $[q]$, prochází každým bodem jejím jedna přímka řady $[q]$, třemi různými body tři různé přímky této řady, pročež patří r do řady $[p]$.

d) Jak patrno, nejsou přímky p a p', od nichž jsme původně vyšli, zvláštními přímkami na vytvořené ploše, aniž se soustava $[q]$ liší od soustavy $[p]$. *Kterékoli dvě z přímek jedné soustavy proťaty jsou přímkami druhé soustavy v projektivních* (perspektivních) *řadách bodů*; *z kterýchkoli dvou přímek jedné soustavy promítají se přímky druhé soustavy projektivními* (perspektivními) *svazky rovin*. Každá z obou soustav jest vytvořena spojnicemi sdružených bodů projektivních řad na kterýchkoli dvou přímkách druhé soustavy nebo průsečnicemi sdružených rovin projektivních svazků s osami v kterýchkoli dvou přímkách soustavy druhé. Projektivní (perspektivní) jsou také řada bodová a svazek rovinový, jejichž osy jsou kterékoli dvě různé přímky téže soustavy; korespondující bod a rovina jsou totiž incidentní. Avšak i řada bodová na kterékoli přímce jedné soustavy a svazek rovinový s osou v téže přímce jsou projektivní, při čemž sobě odpovídají bod a rovina, náležící téže přímce druhé soustavy. Jde-li totiž o řadu bodovou a svazek rovinový $p\,(q_k)$, stačí k tomu poukázati, že řada bodová $p\,(q_k)$ a řada bodová $p'\,(q_k)$, kde p' není totožná s p, jsou perspektivní, rovněž řada bodová $p'\,(q_k)$ a svazek rovinový $p\,(q_k)$ jsou perspektivní.

Vyšetřovaná plocha přímková *jest jednoznačně určena třemi* svými *přímkami mimoběžnými* (téže soustavy).

e) Libovolná přímka l (neležící na ploše) protíná plochu uvažovanou ve dvou bodech. Neboť projektivní svazky rovin, plochu vytvořující, s osami p a p' v přímkách plochy (jež lze vždy zajisté voliti mimoběžné k přímce l) protínají přímku l v projektivních řadách bodových. Samodružné body těchto projektivních soumístných řad bodů na ose l a pouze tyto jsou průsečíky přímky l s plochou. Samodružný bod na l určuje totiž s osami p

Libovolnou přímkou l (neležící na ploše) procházejí dvě roviny uvažované plochy. Neboť projektivní řady bodů, plochu vytvořující, na přímkách plochy p a p' (jež lze vždy voliti mimoběžné k přímce l) promítají se z přímky l projektivními svazky rovinovými. Samodružné roviny těchto projektivních soumístných svazků rovin s osou l a pouze tyto jsou rovinami plochy, jdoucími přímkou l. Samodružná rovina svazků s osou l protíná totiž p a p' v bodech, jež

a p' dvě roviny v projektivnosti sobě odpovídající, jejichž průsečnice, l protínající, leží na ploše. Naopak průsečík přímky l s plochou leží na přímce této plochy, jež je průsečnicí sdružených rovin projektivních svazků s osami p a p', a je tedy samodružným bodem řad, v nichž svazky ty přímku l protínají. Dvě projektivní soumístné řady bodové na ose l mají pak dva samodružné body, není-li projektivnost jejich identická (což nastane, je-li l přímkou na ploše z téže soustavy jako p a p'). *Protože přímková plocha, vytvořená dvěma projektivními řadami bodů nebo svazky rovin s mimoběžnými osami, má s libovolnou přímkou, jež na ploše neleží, společné dva body* (reálné různé nebo reálné splývající nebo imaginární), sluje plocha ta *přímkovou zborcenou plochou druhého stupně.*[2])

sobě v projektivnosti odpovídají, a jejich spojnice, protínající l, leží na ploše. Naopak rovina plochy jdoucí přímkou l prochází přímkou této plochy, jež spojuje sdružené body projektivních řad na osách p a p', a je tedy samodružnou rovinou svazků, jimiž se řady ty z přímky l promítají. Dva projektivní soumístné svazky rovinové s osou l mají pak dvě samodružné roviny, není-li projektivnost jejich identická (což nastane, je-li l přímkou na ploše z téže soustavy jako p a p'). *Protože přímková plocha, vytvořená dvěma projektivními řadami bodů nebo svazky rovin s osami mimoběžnými, má dvě roviny* (reálné různé nebo reálné splývající nebo imaginární), *jdoucí libovolnou přímkou neležící na ploše*, sluje plocha ta *přímkovou zborcenou plochou druhé třídy.*[3])

Spolu je patrno, že libovolná přímka, jež nenáleží zborcené přímkové ploše 2. stupně a 2. třídy, vytvořené některým z uvedených tří způsobů, protíná dvě přímky každé z obou jejích řad.[4])

Vzhledem k tomu, že přímková zborcená řada (plocha) 2. stupně je totožná s přímkovou zborcenou řadou (plochou) 2. třídy, lze ji označovati jedním z obou jmen nebo nazývati *(přímkovou) zborcenou řadou (plochou) kvadratickou.*[5])[6])

[2]) Rozvinutelná plocha přímková 2. stupně jest plocha kuželová, dříve uvedená.

[3]) Omezujíce se na prvky reálné, pravíme, že přímka, neležící na zborcené ploše 2. stupně a 2. třídy, má s plochou tou společné *nanejvýš dva body*, duálně *nanejvýš dvě roviny*.

[4]) Pomocí toho lze řešiti otázku, kolik přímek protíná čtyři dané přímky mimoběžné. Tři z přímek těch p_1, p_2 a p_3 určují zborcenou přímkovou plochu 2. stupně a 2. třídy; z jejích přímek vytvořujících (druhé soustavy doplňkové, jež protínají p_1, p_2, p_3) protínají přímku čtvrtou p_4 buď dvě přímky nebo neomezeně mnoho přímek (toto v případě, že p_4 patří téže soustavě mimoběžek jako p_1, p_2 a p_3).

[5]) Zborcená řada (čili osnova) kvadratická jako útvar jednoduchý i důležitý (obdobně jako kuželosečka a kužel) měla by míti kratší jméno (anglicky sluje *regulus*).

[6]) Mohli bychom ještě vyšetřovati (soběduální) útvary vytvořené přímkami, jež protínají sdružené paprsky dvou (nebo většího počtu) pro-

39. Souvislost přímkové řady kvadratické s útvary předcházejícími.

a) *Každá rovina* ϱ (neprocházející přímkou plochy) *protíná přímkovou řadu kvadratickou v* (pravé) *křivce 2. stupně.* Neboť dva projektivní svazky rovin s osami mimoběžnými, jejichž průsečnice vytvořují přímkovou řadu plochy, protíná rovina ϱ, neobsahující žádnou přímku řady (tedy ani osu žádného z obou svazků těch), ve dvou nesoumístných projektivních, nikoli však perspektivních, svazcích paprskových, které vytvořují uvedenou křivku. Protože body křivky té jsou body na přímkách řady přímkové, jest průsekem (v rovině ϱ) přímkové řady kvadratické křivka 2. stupně.[1])[2])

Z každého bodu R (neležícího na přímce plochy) *promítá se přímková řada kvadratická* (pravým) *kuželem 2. třídy.* Neboť dvě projektivní řady bodů s osami mimoběžnými, jejichž spojnice vytvořují přímkovou řadu plochy, promítají se z bodu R, ležícího mimo přímky řady té (tedy i mimo osy obou bodových řad těch), dvěma nesoumístnými projektivními, avšak neperspektivními, svazky paprskovými, které vytvořují uvedený kužel. Protože roviny tohoto kužele jsou rovinami, jež jdou přímkami řady přímkové, jest průmětem (z bodu R) přímkové řady kvadratické kužel 2. třídy.

---

jektivních svazků paprskových, obecně položených v prostoru. Kdežto přímky, protínající dvě přímky mimoběžné, tvoří dvojmocnou soustavu, jež sluje přímkovou kongruencí lineární (libovolným bodem prochází a v libovolné rovině leží jedna přímka této soustavy), vytvořují přímky, protínající sdružené paprsky dvou projektivních svazků paprskových, trojmocnou soustavu čili *komplex přímek*; tento komplex je *kvadratický* (přímky jeho jdoucí libovolným bodem tvoří kužel 2. stupně, přímky ležící v libovolné rovině tvoří čáru 2. třídy). Jestliže však dané svazky mají společný paprsek a tento odpovídá v jejich projektivnosti sobě samému, rozpadá se uvedený komplex v obecný *komplex lineární* (libovolným bodem prochází a v libovolné rovině leží lineární svazek jeho přímek) a ve speciální lineární komplex (tvořený přímkami, které protínají onen společný paprsek daných svazků). Viz třebas *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften I, p. 401 a násl.

[1]) Vzhledem k tomu, že vůči křivce 2. stupně jsou přímky její roviny trojího druhu, můžeme také u zborcené plochy kvadratické zjistiti (nehledě k přímkám na ploše ležícím) přímky ji protínající (ve dvou bodech reálných různých), tečny (s dvěma body na ploše splývajícími) a přímky ji neprotínající (mající na ní dva imaginární body); duálně pak procházejí přímkou (neležící na ploše) buď dvě (reálné různé) roviny zborcené plochy kvadratické nebo jedna (dvě splývající) nebo žádná (dvě imaginární). A jest zajímavé, že přímkou v prostoru prochází tolik rovin zborcené plochy kvadratické, kolik na ní leží bodů plochy té (a obráceně čili duálně).

[2]) Rovina ϱ, jdoucí přímkou zborcené plochy kvadratické, má s plochou tou společnou tuto přímku a jednu přímku doplňkové řady přímkové, protíná tedy plochu ve zvrhlé čáře 2. stupně. Obdobně v případě duálním, je-li bod R na ploše zborcené, degeneruje promítající kužel 2. třídy ve dvojici přímek (dva rovinové svazky s osami se protínajícími).

Platí však i obráceně:

Každou křivku 2. stupně lze pokládati za řez zborcené přímkové plochy 2. stupně.

Každý kužel 2. třídy lze pokládati za průmět zborcené přímkové plochy 2. třídy.

Neboť je-li (v případě na levé straně) křivka 2. stupně vytvořena dvěma projektivními svazky paprsků o středech S a S', stačí těmito body položiti dvě mimoběžné přímky p, resp. p', z nichž žádná neleží v rovině dané křivky, a z přímek těch promítnouti paprsky svazku S, resp. S'. Dva projektivní svazky rovin tak vznikající vytvořují přímkovou řadu 2. stupně, jejímž řezem je křivka daná.[3])

Proti tomu budiž poznamenáno, že rovina zborcené plochy kvadratické (jdoucí přímkou p jedné její řady a tedy i přímkou q řady doplňkové) má s plochou společné pouze body těchto dvou přímek; duálně, že bodem pq zborcené plochy kvadratické procházejí jen ty její roviny, jež obsahují přímku p nebo q. Neboť kdyby (v případě prvém) rovina pq měla s plochou společný ještě bod B, ležící mimo p i q, protínala by každá přímka této roviny, jdoucí bodem B a nejdoucí bodem pq, přímky p a q ve dvou různých bodech; měla by proto přímka taková s plochou tři body společné, takže by musila ležeti celá na ploše, což je vyloučeno, protože nepatří ani do soustavy $[p]$, protínajíc p, ani do soustavy $[q]$ z obdobného důvodu, a protože jiných přímek mimo přímky soustav $[p]$, $[q]$ plocha neobsahuje.

b) Mějme u zborcené plochy kvadratické na zřeteli její bod pq a rovinu její pq; platí tu:

Každá křivka 2. stupně, ve které rovina ϱ jdoucí bodem pq zborcenou plochu kvadratickou protíná, *má za tečnu v bodě pq průsečnici roviny ϱ s rovinou pq.*

Každého kužele 2. třídy, jenž promítá zborcenou plochu kvadratickou z bodu R roviny pq, *dotýká se rovina pq podél přímky, spojující bod R s bodem pq.*

Dokážeme třebas první z obou vět duálních: Je-li přímková řada plochy vytvořena svazky rovin s osami p a p', jest uvedený řez roviny ϱ s plochou přímkovou vytvořen dvěma projektivními svazky paprskovými o středech $pq = S$ a $S' = p'\varrho$; paprsku $S'S$ ve svazku S', protože je řezem roviny $p'q$ s rovinou ϱ (jest totiž $p'\varrho = S'$ a $q\varrho = S$), odpovídá ve svazku S průsečnice roviny pq s rovinou ϱ, jež je tedy tečnou průsečné křivky 2. stupně v ϱ.

Sledujíce roviny, jež procházejí bodem pq uvažované plochy, vidíme, že každá z nich (pokud neprochází přímkou p nebo q) protíná

[3]) Odtud také vyplývá, že křivka 2. stupně se promítá z libovolných dvou svých bodů dvěma svazky projektivními. A dále tedy, že dva body S a S' křivky 2. stupně, uvedené při její definici jako středy projektivních svazků křivku vytvořujících, lze nahraditi kteroukoli dvojicí bodů na křivce té ležících (čl. 36*d*). Obdobně pro případy duální.

rovinu pq v tečně křivky 2. stupně, řezu plochy s rovinou tou; mají tedy přímky roviny pq, jdoucí bodem pq, s plochou společný pouze tento bod (vždy dva splývající) a slují vhodně tečnami plochy; výjimku činí ovšem přímky p, q samy, jež leží na ploše. Obdobný je výsledek úvahy duální; proti tomu každá přímka, ležící v rovině pq a nejdoucí bodem pq, protíná plochu ve dvou (různých reálných) bodech; duálně přímkou, jež prochází bodem pq a neleží v rovině pq, jdou dvě (různé reálné) roviny plochy. Jmenujeme proto rovinu pq *tečnou rovinou* zbrocené plochy kvadratické a bod pq jejím *bodem dotyčným*.

Je patrno, že zbrocená plocha kvadratická má v každém bodě svém jednu určitou rovinu tečnou, duálně že v každé rovině své má jeden určitý bod dotyčný. Svazek tečných rovin plochy, jež procházejí kteroukoli přímkou její, jest (podle čl. 38*d*) projektivní s řadou dotyčných bodů těchto rovin (na téže ose).

c) Všimněme si dále tečných rovin uvažované plochy zbrocené v bodech křivky 2. stupně, na ploše ležící, a duálně dotyčných bodů rovin kužele 2. třídy, plochu promítajícího.

Tečné roviny zbrocené plochy kvadratické v bodech křivky 2. stupně, řezu plochy té s určitou rovinou ϱ (jež není tečnou rovinou plochy), procházejí všechny jedním bodem a *obalují kužel 2. třídy* (s vrcholem mimo ϱ).

Dotyčné body rovin zbrocené plochy kvadratické, jež jsou rovinami kužele 2. třídy promítajícího plochu tu z určitého bodu R (mimo plochu položeného), leží v jedné rovině a *tvoří křivku 2. stupně* (v rovině mimo R).

Zvolme (pro důkaz věty na straně levé) na uvedené křivce 2. stupně k v rovině ϱ bod A, jímž procházejí přímky p a q plochy zbrocené. Mezi svazky rovin s osami p, q ustanovme perspektivní projektivnost, v níž sobě odpovídají dvě roviny, promítající tutéž přímku svazku o středu A v rovině ϱ. Protože pak svazek rovin zbrocené plochy s osou v přímce její je projektivní k řadě dotyčných bodů rovin těch (jako rovin tečných) na téže ose, přenáší se zvolená projektivnost v projektivnost mezi řadami dotyčných bodů tečných rovin plochy zbrocené na osách p, q; projektivnost ta je opět perspektivní, protože zde bod A odpovídá sobě samému.

V této projektivnosti bodů na přímkách p a q jsou sdruženy vždy dva body, v nichž přímky ty protíná tečná rovina plochy zbrocené s dotyčným bodem v bodě křivky k. Neboť dejme tomu, že přímka x, jdoucí v ϱ bodem A, protíná k (po druhé) v bodě X a že tečná rovina zbrocené plochy v bodě X obsahuje přímky p', q' obou řad plochy; je patrno, že roviny pq' a qp' odpovídají sobě v projektivnosti prvé a že body pq' a qp' sobě korespondují v projektivnosti druhé. A protože projektivnost mezi řadami bodovými na p a q je perspektivní, procházejí přímky spojující sdružené body na p a q všechny týmž bodem R (jenž jsa středem perspektivnosti obou řad, neleží na p nebo q, tedy ani na

ploše zborcené); tímto bodem procházejí tudíž všechny tečné roviny zborcené plochy v bodech křivky k. Bod R neleží na ploše zborcené, jak uvedeno; neleží ani na rovině ϱ, protože, kdyby tam ležel, procházely by všechny tečny křivky k, průsečnice tečných rovin zborcené plochy s rovinou ϱ, tímto bodem na ϱ, čemuž tak býti nemůže.

Druhou větu (obrácenou k prvé) dokázali bychom duálně nebo nepřímo.

d) Na základě předcházejícího můžeme dokázati, že tečny (pravé) křivky 2. stupně tvoří (pravou) křivku 2. třídy a obráceně dotyčné body přímek křivky 2. třídy tvoří křivku 2. stupně; duálně pak že dotyčné přímky rovin kužele 2. třídy tvoří kužel 2. stupně a obráceně tečné roviny kužele 2. stupně tvoří kužel 2. třídy; čili:

Křivka 2. stupně, vytvořená projektivními svazky paprsků, může býti vytvořena také projektivními řadami bodů, jest tedy křivkou 2. třídy; a obráceně.

Neboť vedeme-li středy obou projektivních svazků paprskových téže roviny ϱ, jež vytvořují danou křivku 2. stupně, dvě mimoběžné přímky (neležící v ϱ), vytvoří svazky rovinové o těchto osách, uvedené svazky promítající, průsečnicemi sdružených svých rovin zborcenou plochu kvadratickou. Tečné roviny této plochy v bodech dané křivky 2. stupně tvoří podle hořejší věty kužel 2. třídy (s vrcholem ležícím mimo ϱ); a uvedené roviny protínají rovinu ϱ v tečnách dané křivky. Kužel ten můžeme však vytvořiti dvěma projektivními svazky paprskovými, jež dvě tečny křivky dané protínají ve dvou projektivních řadách bodů. Tyto projektivní řady bodové vytvořují křivku 2. třídy, jejíž přímky jsou tečnami dané křivky 2. stupně.

Kužel 2. třídy, vytvořený projektivními svazky paprsků, může býti vytvořen také projektivními svazky rovin, jest tedy kuželem 2. stupně; a obráceně.

Neboť zvolíme-li v rovinách obou projektivních svazků paprskových téhož středu R, jež daný kužel 2. třídy vytvořují, dvě mimoběžné přímky (nejdoucí bodem R), vytvoří řady bodové na těchto osách, průseky přímek těch s uvedenými svazky, spojnicemi sdružených bodů svých zborcenou plochu kvadratickou. Dotyčné body rovin této plochy, jež jsou rovinami daného kužele 2. třídy, tvoří podle hořejšího křivku 2. stupně (v rovině nejdoucí bodem R); a spojnice těchto bodů s bodem R jsou přímkami daného kužele. Křivku tu můžeme vytvořiti dvěma projektivními svazky paprskovými, jež se ze dvou přímek daného kužele promítají projektivními svazky rovin; tyto pak vytvořují kužel 2. stupně, jehož přímky jsou dotyčnými přímkami daného kužele 2. třídy.

Věty obrácené jsou duální (v rovině resp. v trsu) k větám původním; dvojitá věta na pravé straně vyplývá také z dvojité věty na straně levé promítnutím, obráceně tato z oné řezem.

Tím je podán důkaz, že *křivka 2. stupně se svými tečnami a křivka 2. třídy s dotyčnými body svých přímek jsou útvary identické*, třebas jejich vytvoření, navzájem duální, jsou různá.[4])[5])

Obdobně jsou totožnými útvary kužel 2. třídy s dotyčnými přímkami svých rovin a kužel 2. stupně se svými rovinami tečnými.

Protože křivka 2. stupně a 2. třídy jest průsekem kužele (2. stupně a 2. třídy), sluje stručně *kuželosečka*.[6])[7])[8])

---

[4]) Totožnost ta platí ovšem jenom pro čáry pravé; zvrhlá čára 2. stupně (složená ze dvou řad bodových) není druhé třídy, duálně zvrhlá čára 2. třídy (sestávající ze dvou paprskových svazků) není druhého stupně.

[5]) Pomocí zborcené plochy kvadratické lze jednoduše dokázati rozmanité vlastnosti křivky 2. stupně a 2. třídy; viz na př. *Ch. A. Scott*, The elementary treatment of conics by means of the regulus, Bulletin Amer. math. soc. (2) 12 (1905).

[6]) Mezi četnými větami o kuželosečkách vyplývá bezprostředně z obojího vytvoření jejich na př. věta: Jsou-li dva trojúhelníky bez společných prvků opsány (pravé) kuželosečce, jsou vepsány jiné (pravé) kuželosečce; a obráceně.

Jest možno dokázati, že kuželosečka dělí rovinu ve dva obory, z nichž jeden obsahuje jen body vnitřní (t. j. body, z nichž nelze vésti žádné reálné tečny ke kuželosečce) a druhý jen body vnější (t. j. body, z nichž lze vésti po dvou reálných tečnách ke kuželosečce); přímka kuželosečku neprotínající obsahuje pouze body vnější, tečna body vnější až na bod dotyčný, přímka protínající jest kuželosečkou dělena ve dvě části, složené z bodů vnějších resp. vnitřních. Obdobnou vlastnost má kužel 2. stupně a 2. třídy pro přímky (a roviny) svého trsu. Avšak zborcená plocha kvadratická nedělí obdobným způsobem prostoru; neboť z každého bodu v prostoru (ležícího mimo plochu tu) lze vésti neomezeně mnoho tečných rovin zborcené plochy kvadratické (jež tvoří kužel 2. třídy). Viz na př. *F. Severi*, Geometria proiettiva, p. 150.

[7]) Kuželosečky jako řezy kolmých kuželů (jejichž úhel u vrcholu je ostrý, pravý, tupý) s rovinou, kolmou k přímce povrchové, uvažoval *Menaichmos* (ve 4. stol. před Kr.); *Apollonios* (v 2. stol. před Kr.) definoval po prvé kuželosečky jako řezy roviny (různě položené) s šikmým kuželem kruhovým. Pokládaje kuželosečku za průmět kružnice, odvodil *Steiner* (r. 1832) vytvoření její ze dvou projektivních svazků paprskových; *Chasles* pak (r. 1852) dokázal, že každou čáru 2. stupně takto vytvořenou lze pokládati za průmět kružnice.

Kužel 2. stupně a 2. třídy (s vrcholem v konečnu) protíná rovina, nejdoucí jeho vrcholem, buď v hyperbole nebo v parabole nebo v elipse podle toho, je-li rovina tato rovnoběžná k rovině jdoucí vrcholem plochy, jež má s plochou společné dvě povrchové přímky reálné různé nebo jednu (dvě splývající, tečná rovina plochy) nebo žádnou (dvě imaginární).

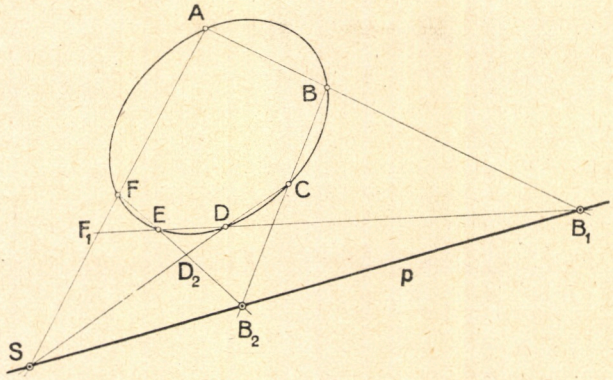
Je metricky velmi důležité, že každou kuželosečku lze obdržeti jako průmět kružnice. Dokážeme to, promítneme-li danou kuželosečku z bodu mimo její rovinu ϱ ležícího, z něhož se eliptická involuce, na přímce s v ϱ (kuželosečku neprotínající) oběma vytvořujícími svazky kuželosečky vytčená, promítá pravoúhlou involucí paprskovou, na rovinu rovnoběžnou k rovině, jdoucí bodem tím a přímkou s; tímto průmětem je kružnice.

Metrické vlastnosti kuželoseček jsou velmi četné. Na př. mějme u elipsy nebo hyperboly na zřeteli dvě rovnoběžné tečny (protínající se na přímce nevlastní) a projektivní řady bodové, v nichž je protínná tečna pohyblivá: Protože nevlastnímu bodu každé z obou těchto projektivních řad odpovídá dotyčný bod druhé tečny, jest dotyčný bod každé ze dvou

40. Věty Pascalova a Brianchonova. *a*) Kuželosečka jest stanovena pěti body svými nebo pěti tečnami; o šesti bodech kuželosečky, jež určují jednoduchý šestiroh (šestiúhelník) kuželosečce vepsaný, a duálně o šesti tečnách kuželosečky, které skládají jednoduchý šestistran (šestiúhelník) kuželosečce opsaný, platí vztah vyjádřený větou:

Průsečíky protějších stran jednoduchého šestirohu, jehož vrcholy jsou body kuželosečky, leží na téže přímce.

Spojnice protějších vrcholů jednoduchého šestistranu, jehož strany jsou tečnami kuželosečky, procházejí týmž bodem.



Obr. 47.

Abychom jednu z obou těchto vět, třebas větu o šestiúhelníku vepsaném, dokázali, označme (obr. 47) vrcholy jeho na kuželosečce ležící

rovnoběžných tečen mezním bodem projektivní řady bodové na tečně druhé; a protože součin vzdáleností sdružených bodů dvou projektivních řad od jejich bodů limitních jest konstantní, *protínají pohyblivá tečna elipsy nebo hyperboly dvě rovnoběžné tečny její v bodech, jejichž vzdálenosti od bodů dotyčných mají konstantní součin.* Z téhož důvodu *má u hyperboly trojúhelník, omezený jejími dvěma asymptotami a proměnnou tečnou, konstantní obsah.*

Protože ze dvou tečen, vedených k parabole z bodu v nekonečnu, je jedna přímkou nevlastní, *nemohou dvě tečny paraboly býti rovnoběžné.* Vzhledem k tomu, že přímka v nekonečnu je tečnou paraboly, odpovídají si v projektivních řadách, vytvořených pohyblivou tečnou paraboly na dvou tečnách jejích (v konečnu ležících), body nevlastní: proto *tečna paraboly vytvořuje na dvou tečnách jejích řady podobné.* A obráceně spojnice sdružených bodů dvou podobných řad (nesoumístných a neperspektivních) v rovině obalují parabolu.

[8]) Podle vztahu zborcené plochy kvadratické k rovině nevlastní rozlišujeme dva typy této plochy: kvadratická plocha zborcená, kterou nevlastní rovina protíná v pravé kuželosečce, sluje *hyperboloid zborcený* (jednodílný); plocha, mající s nevlastní rovinou společné dvě přímky, sluje *paraboloid zborcený* (hyperbolický). První plocha obsahuje kuželosečky všech tří typů, přímky nevlastní neobsahuje; druhá, vytvořená spojnicemi dvou podobných řad bodových na osách mimoběžných, má přímku nevlastní a obsahuje z kuželoseček jen hyperboly a paraboly.

A, B, C, D, E, F a zvolme dva z nich A a C za středy svazků paprskových, z nichž promítneme ostatní body B, D, E, F na přímky DE (z bodu A) a EF (z bodu C). Průměty bodů B a F z A na DE budtež B_1 a F_1, průměty bodů B a D z C na EF pak B_2 a D_2. Podle věty Steiner-Chaslesovy platí

$$A\,(BDEF) \barwedge C\,(BDEF)$$

a proto

$$B_1DEF_1 \barwedge B_2D_2EF;$$

protože však obě projektivní tyto čtveřiny mají společný bod E, jsou perspektivní, a spojnice B_1B_2, DD_2, F_1F procházejí tedy týmž bodem (středem perspektivnosti) S. Protější strany šestiúhelníku AB a DE protínají se v bodě B_1, strany BC a EF v bodě B_2, strany CD (DD_2) a FA (F_1F) v bodě S. Protože podle výsledku právě nalezeného spojnice B_1B_2 prochází bodem S, leží průsečíky protějších stran B_1, B_2 a S v téže přímce.[1])

Řadu úsudků zde podanou lze obrátiti: Leží-li body B_1, B_2 a S v téže přímce, jsou čtveřiny bodů B_1DEF_1 na DE a B_2D_2EF na EF perspektivní a čtveřiny paprsků $A\,(BDEF)$ a $C\,(BDEF)$ projektivní; proto průsečíky sdružených paprsků těch B, D, E a F leží na kuželosečce spolu se středy svazků A a C. Má-li kuželosečka, ke které dospíváme, býti pravá, musíme ovšem předpokládati, že ze šesti daných bodů A, B, C, D, E, F neleží žádné tři v téže přímce. A tedy:

Jestliže průsečíky protějších stran jednoduchého šestirohu, z jehož vrcholů žádné tři nejsou položeny v jedné přímce, *leží na téže přímce, jsou vrcholy jeho body kuželosečky.*

Jestliže spojnice protějších vrcholů jednoduchého šestistranu, z jehož stran žádné tři nejdou jedním bodem, *procházejí týmž bodem, jsou strany jeho tečnami kuželosečky.*

Jest tedy nutnou a dostatečnou podmínkou toho, aby šest bodů leželo na kuželosečce, incidence průsečíků protějších stran šestiúhelníku s přímkou: uvedená (dvojitá) věta sluje *Pascalova*,[2]) a přímka, obsahující

[1]) Jiný důkaz je tento: Kuželosečkou k v rovině ϱ položme zborcenou plochu kvadratickou; body A, C, E procházejí přímky p_1, p_2, p_3 jedné řady, body B, D, F přímky q_1, q_2, q_3 druhé řady přímkové na této ploše. Dvojice protějších stran AB, DE; BC, EF; CD, FA jsou průsečnice roviny ϱ s třemi dvojicemi rovin p_1q_1, q_2p_3; q_1p_2, p_3q_3; p_2q_2, q_3p_1; tyto dvojice se protínají v přímkách a, b, c, jež jsou spojnicemi bodů p_1q_2, p_3q_1, p_2q_3 po dvou. Rovina σ, určená body posledně jmenovanými, protíná rovinu ϱ v přímce, obsahující průsečíky přímek a, b, c s touto rovinou. Rovina σ je určitá, protože přímky a, b, c nemohou splynouti (všechny strany šestiúhelníku by procházely týmž bodem), je různá od roviny ϱ, nesplývá-li A s D, B s E, C s F; důkaz platí, dokud vrcholy šestiúhelníku nesplynou na méně než tři různé body (aby bylo možno zavésti přímky p_k, q_k).

[2]) Proslulou tuto větu nalezl a dokázal *B. Pascal* r. 1640 (ve věku 16 let), nejprve pro kružnici a odtud projekcí pro kuželosečku vůbec; byla uveřejněna po prvé v jeho spisku Essay pour les coniques (jako věta o „he-

tři průsečíky protějších stran šestiúhelníku, nazývá se *přímkou Pascalovou*. Duální věta (dvojitá) o šesti tečnách kuželosečky, podle níž je nutnou i dostatečnou podmínkou toho, aby šest přímek se dotýkalo kuželosečky, incidence spojnic protějších vrcholů šestiúhelníku s bodem, sluje *Brianchonova*,[3]) a bod, jímž procházejí tři spojnice protějších vrcholů šestiúhelníku, bodem *Brianchonovým*.[4])[5])

b) Z vět Pascalovy a Brianchonovy o šesti stejnojmenných prvcích kuželosečky obdržíme věty další, jestliže splynou dva sousední vrcholy šestirohu jako body kuželosečky v jeden, určujíce tečnu v bodě tom, nebo duálně splynou-li dvě sousední strany šestistranu jako tětiny

xagramma mysticum"). Je známa řada jejích důkazů; viz *E. Kötter*, Die Entwicklung der synthetischen Geometrie (1901), p. 14 a násl.; *F. Dingeldey*, Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme (Encyklopädie math. Wiss., III. C 1, 1903); *H. de Vries*, Historische studiën (Groningen, 1926). Také *W. F. Meyer*, Über einen instantanen Beweis des Pascalschen Kegelschnittsatzes und seiner Umkehrung, nebst einer Ausdehnung auf den Raum, Jahresbericht Deut. Math. Ver. 34 (1926).

[3]) Duální tuto větu nalezl teprve *Brianchon* r. 1806.

[4]) Jestliže kuželosečka degeneruje ve dvě přímky, máme speciální větu Pascalovu čili větu Pappovu, dříve (v čl. 18*d*) uvedenou. A duálně. Promítnutím z bodu obdržíme z vět Pascalovy a Brianchonovy pro kuželosečku obdobné věty pro kužel 2. stupně a 2. třídy, v trsu duální.

[5]) Z šesti bodů na kuželosečce jest možno utvořiti $6! = 720$ přestav (permutací), z nichž však vždy $2.6 = 12$ dává týž šestiroh (lze totiž začíti každým ze šesti vrcholů a postupovati dvěma smysly); proto může z šesti bodů vzniknouti 60 různých šestiúhelníků kuželosečce vepsaných. K daným šesti bodům na kuželosečce přísluší tedy 60 Pascalových přímek. Stejně v případě duálním k šesti tečnám kuželosečky lze sestrojiti 60 bodů Brianchonových. Existuje-li u daného šestiúhelníku jedna přímka Pascalova (jeden bod Brianchonův), existuje i ostatních 59; neboť vrcholy (strany) daného šestiúhelníku jsou v tom případě body (tečnami) kuželosečky.

Z velikého počtu zajímavých vlastností konfigurace, tvořené šedesáti přímkami Pascalovými, jež příslušejí k šesti bodům kuželosečky, budiž uvedeno: Pascalovy přímky všech jednoduchých šestiúhelníků s vrcholy v daných šesti bodech kuželosečky lze roztřídíti ve 20 skupin po třech tak, že tři přímky každé skupiny procházejí týmž bodem (na př. jdou jedním bodem Pascalovy přímky u šestiúhelníků 123456, 143652, 163254; dokáže se pomocí věty o homologických trojúhelnících); body tyto (20) slují *Steinerovy* (protože uv. větu nalezl J. Steiner r. 1828). Viz na př. *J. Steiner-H. Schröter*, Vorlesungen über synthetische Geometrie, II. díl. Příslušnou literaturu (Plücker, Hesse, Kirkman, Cayley, Grossmann, Staudt, Veronese, Cremona, Ladd, Graefe, Dziobek, Wedekind, Martinetti, Klug) uvádí *G. Salmon-W. Fiedler*, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, II. díl (na př. 7. vyd. 1918, p. 421), rovněž *F. Dingeldey*, Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme (Encyklopädie math. Wiss., III. C 1, 1903). Viz také *H. W. Richmond*, On the figure of six points in space of four dimensions, Quart. Journal math. 31 (1899), a The figure formed from six points in space of four dimensions, Math. Annalen 53 (1900); *A. Kylstra*, Ruimtebeschouwingen in verband met den Pascalschen Zeshoek, Disertace (Helder, 1903). *E. Bally*, Principes et premiers développements de géométrie générale synthétique moderne, 1922; *F. Levi*, Geometrische Konfigurationen, p. 179 a n.; *G. Gallucci*, Complementi di geometria proiettiva, p. 64 a n. Také *B. Bydžovský*, Příspěvek k teorii Brianchonovy konfigurace, Rozpravy Čes. akad. 36 (1927).

kuželosečky, určujíce dotyčný bod tečny její; to ovšem může nastati jednou až třikrát. Použitím takových mezních přechodů nebo přiměřenou úpravou úvahy, jež sloužila k důkazu věty při šesti prvcích různých, dostaneme:

U pětiúhelníku kuželosečce vepsaného leží na téže přímce průsečíky dvou dvojic nesousedních stran a průsečík strany zbývající s tečnou v protějším vrcholu.

U pětiúhelníku kuželosečce opsaného procházejí týmž bodem spojnice dvou dvojic nesousedních vrcholů a spojnice vrcholu zbývajícího s dotyčným bodem protější strany.

Vrchol pětiúhelníku ležící proti zbývající straně je totiž pokládati za bod, v němž splynuly dva vrcholy šestiúhelníku, a tečnu v něm za mezní polohu strany, protilehlé ke straně zbývající.

Věty tyto lze opět obrátiti, při čemž však musíme (nemá-li kuželosečka býti zvrhlá) položiti podmínku, že v prvém případě žádné tři vrcholy daného pětiúhelníku neleží v téže přímce a že daná přímka, jdoucí jedním jeho vrcholem, neprochází žádným z ostatních čtyř vrcholů; obdobně v případě duálním. Obdobných podmínek musíme dbáti při obracení i dalších vět, plynoucích uvedeným způsobem z věty Pascalovy a Brianchonovy.

Přejdou-li v tečny dvě strany šestiúhelníku nesousední, jež však nejsou protější, a v duálním případě nalezneme:

U čtyrúhelníku kuželosečce vepsaného leží na téže přímce průsečík dvou protějších stran a dva průsečíky tečen v krajních bodech jedné ze stran těch se stranami zbývajícími.

U čtyrúhelníku kuželosečce opsaného jdou týmž bodem spojnice dvou protějších vrcholů a dvě spojnice dotyčných bodů dvou stran, jedním z vrcholů těch procházejících, s vrcholy zbývajícími.

c) V čtyrúhelníku kuželosečce vepsaném můžeme však také dva protější vrcholy pokládati za body, z nichž v každém splynuly dva vrcholy šestiúhelníku, při čemž protější strany šestiúhelníku, vrcholy těmi určené, staly se tečnami čtyrúhelníku v bodech těch; stejně můžeme pohlížeti na druhé dva vrcholy čtyrúhelníku. V obou případech je táž přímka Pascalova určena průsečíky protějších stran čtyrúhelníku; a ovšem duálně. Platí tedy:

U čtyrúhelníku kuželosečce vepsaného leží dva průsečíky protějších stran a dva průsečíky tečen v protějších vrcholech jeho na téže přímce.

U čtyrúhelníku kuželosečce opsaného procházejí dvě spojnice protějších vrcholů a dvě spojnice dotyčných bodů protějších stran jeho týmž bodem.

Tyto dvě (duální) věty můžeme vysloviti také jako (velmi důležité) věty o úplném čtyřrohu a o úplném čtyrstranu:

V úplném čtyřrohu kuželosečce vepsaném leží na téže přímce dva úhlopříčné vrcholy a dva průsečíky tečen ve vrcholech, obsažených na jedné nebo druhé straně jdoucí třetím vrcholem úhlopříčným.[6])

K danému čtyřrohu patří takto tři Pascalovy přímky, strany úhlopříčného trojrohu.

V úplném čtyrstranu kuželosečce opsaném procházejí týmž bodem dvě úhlopříčky a dvě spojnice dotyčných bodů jedné nebo druhé dvojice stran protínajících se na třetí straně úhlopříčné.[6])

K danému čtyrstranu patří takto tři body Brianchonovy, vrcholy úhlopříčného trojstranu.

[6]) Vycházejíce od tohoto případu věty Pascalovy a od harmonické vlastnosti úplného čtyřrohu (čtyrstranu) můžeme zjistiti:

Ke každému bodu P, jenž leží v rovině kuželosečky k mimo ni, přísluší přímka p, obsahující *a*) dva zbývající úhlopříčné vrcholy každého úplného čtyřrohu s jedním úhlopříčným vrcholem v P, vepsaného do k; *b*) bod harmonicky sdružený k bodu P na každé přímce svazku P vzhledem k dvojici jejích průsečíků s k; *c*) průsečík dvou tečen kuželosečky k v jejích průsečících s každou přímkou svazku P.

Přímka p, jednou z těchto tří vlastností definovaná, sluje *pólárou bodu P vzhledem ke kuželosečce k.*

Ke každé přímce p, jež leží v rovině kuželosečky k, nejsouc její tečnou, přísluší bod P, obsahující *a*) dvě zbývající úhlopříčky každého úplného čtyrstranu s jednou úhlopříčkou v p, opsaného kuželosečce k; *b*) paprsek harmonicky sdružený k přímce p vzhledem k dvojici tečen vedených z každého bodu na p ke k; *c*) spojnici dvou dotyčných bodů tečen jdoucích z každého bodu na p ke kuželosečce k.

Bod P, jednou z těchto tří vlastností definovaný, sluje *pólem přímky p vzhledem ke kuželosečce k.*

Třetí z vlastností těch odůvodňuje větu obrácenou, t. j. je-li přímka p pólárou bodu P, jest bod P pólem přímky p.

Leží-li bod P na kuželosečce k nebo je-li duálně p tečnou kuželosečky k, vedou třetí uv. vlastnosti k tomu, abychom tečnu čáry k v bodě P pokládali za jeho poláru vzhledem ke k, resp. abychom dotyčný bod tečny p na k pokládali za pól její vzhledem ke k.

Obapolně jednoznačná korespondence mezi všemi body a přímkami v rovině kuželosečky k, v níž sobě odpovídají pól a polára vzhledem ke k, sluje *pólárnost*; útvary pak, jejichž všechny prvky sobě navzájem v pólárnosti odpovídají, slují *pólárné* vzhledem k základní kuželosečce. Vlastnosti pólárnosti a spolu vlastnosti kuželosečky s korespondencí tou souvisící (*pólárné vlastnosti* kuželosečky) budou odvozeny při úvaze o projektivních příbuznostech základních útvarů dvoumocných.

Budiž ještě poznamenáno, že každý bod na poláře bodu P vzhledem ke k sluje *konjugovaným* k P vzhledem ke k, duálně každá přímka jdoucí pólem přímky p vzhledem ke k sluje *konjugovanou* k p vzhledem ke k.

Na každé přímce v rovině kuželosečky k tvoří body její řady s body k nim vzhledem ke k konjugovanými dvojice involuce, jejímiž samodružnými body jsou (reálné nebo imaginární) průsečíky přímky té s kuželosečkou k; duálně v každém bodě tvoří paprsky jeho svazku a paprsky k nim vzhledem ke k konjugované dvojice involuce se samodružnými paprsky v (reálných nebo imaginárních) tečnách kuželosečky k; tyto involuce slují *involuce kuželosečkou k* (na přímce, resp. v bodě její roviny) *indukované*.

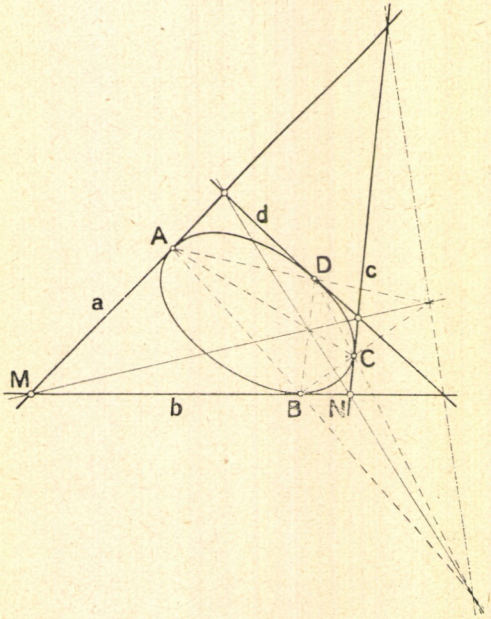
Pólárné vlastnosti kuželosečky mají jak důležité tak zajímavé důsledky v geometrii obyčejné: Protože průměrem kuželosečky jest polára nevlastního bodu její roviny vzhledem k ní (a středem kuželosečky pól

Útvar složený z úplného čtyřrohu a úplného čtyrstranu, z nichž první je kuželosečce a druhému vepsán, druhý pak téže kuželosečce a prvnímu opsán, jakož i z jejich společného trojúhelníku úhlopříčného, jehož se obě poslední duální věty týkají, jest soběduální.[7])

d) Splynou-li konečně třikrát dva sousední vrcholy šestiúhelníku kuželosečce vepsaného nebo třikrát dvě sousední strany šestiúhelníku kuželosečce opsaného, obdržíme útvar soběduální a větu o něm platnou:

---

nevlastní přímky roviny té vzhledem k ní), jsou *průměrové vlastnosti* kuželoseček jen (afinní) specialisací vlastností polárných; další (podobnostní) specialisací dospějeme k *osovým vlastnostem* kuželoseček. Bod vlastní v rovině kuželosečky, v jehož paprskovém svazku jsou každé dvě přímky, vzhledem ke kuželosečce konjugované, k sobě kolmé (tvoří involuci orthogonální), sluje ohniskem kuželosečky; *ohniskové vlastnosti* kuželoseček jsou novou skupinou vlastností, které lze metrickou specialisací odvodit z vlastností polárných.



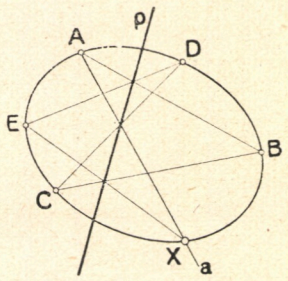
Obr. 48.

[7]) Pomocí této konfigurace můžeme pro křivku 2. stupně a křivku 2. třídy provésti důkaz identičnosti (bez útvaru prostorového). Buďtež (obr. 48) vrcholy vepsaného čtyřrohu A, B, C, D, strany opsaného čtyrstranu a, b, c, d; vyjděme od křivky 2. stupně, na níž jsou pevnými body A, B, C, pročež i tečny v nich a, b, c, kdežto bod D a tečna d jsou proměnlivé. Opisuje-li bod D danou křivku 2. stupně, kterou pokládáme za vytvořenou projektivními svazky $A\,(ABC)$ a $C\,(ABC)$, opisuje promítající paprsek BD na přímce AC řadu bodovou $[X]$; k této řadě jsou perspektivními svazky o středech $M = ba$ a $N = bc$, jež jsou tedy projektivní; svazky $M\,[X]$ a $N\,[X]$ protínají c, resp. a v projektivních řadách bodů. Spojnice sdružených bodů těchto řad na a a c je přímka d, jež tedy vytvořuje křivku 2. třídy, totožnou s křivkou 2. stupně, vytvořenou bodem D. Jako jsme zde dokázali, že tečny v bodech křivky 2. stupně tvoří křivku 2. třídy, můžeme duálně ukázati, že dotyčné body na přímkách křivky 2. třídy tvoří křivku 2. stupně.

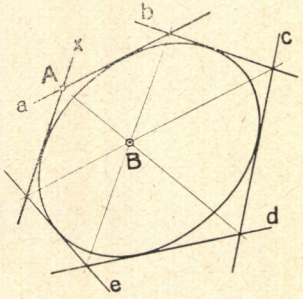
Odtud také vyplývá věta (Chaslesova): Jsou-li A pevný bod a b pevná tečna kuželosečky (v libovolném bodě jejím), X a x proměnlivý bod kuželosečky a tečna její v něm, jsou svazek paprskový AX a řada bodová bx projektivní.

Ve dvou trojúhelnících, jednom kuželosečce vepsaném a druhém téže kuželosečce opsaném, tak položených, že strany druhého jsou tečnami ve vrcholech prvního (a tedy vrcholy prvního dotyčnými body stran druhého), *leží na téže přímce průsečík každé strany prvního se stranou druhého, jdoucí protějším vrcholem jeho, a procházejí týmž bodem spojnice každého vrcholu druhého s vrcholem prvního, ležícím na protější straně jeho.* Trojúhelníky tyto jsou homologické; každá z obou částí[8]) uvedené věty jest (podle věty Desargovy) důsledkem části druhé.

e) Vět Pascalovy a Brianchonovy (obecných i speciálních) užívá se s výhodou ke konstrukci dalších bodů a tečen kuželosečky, určené pěti prvky (body a tečnami);[9]) všechny tyto konstrukce provádějí se pouhým pravítkem. Z úloh sem spadajících budtež uvedeny:[10])



Obr. 49.



Obr. 50.

α_1) *Sestrojiti šestý bod kuželosečky určené pěti body.* Šestý bod sestrojíme jako druhý průsečík kuželosečky s přímkou, jdoucí jedním z pěti daných bodů. Budtež dány (obr. 49) body A, B, C, D, E a hledejme průsečík X kuželosečky s přímkou a jdoucí bodem A (je tedy $AX = a$). Z průsečíků protějších stran šestiúhelníku $ABCDEX$ sestrojíme body (AB, DE) a (CD, a). Průsečík Pascalovy

α_2) *Sestrojiti šestou tečnu kuželosečky určené pěti tečnami.* Šestou (a další) tečnu sestrojíme jako druhou tečnu kuželosečky jdoucí k ní bodem, zvoleným na jedné z daných pěti tečen. Budtež dány (obr. 50) tečny a, b, c, d, e a hledejme tečnu x jdoucí bodem A na tečně a (je tedy $ax = A$). Ze spojnic protějších vrcholů šestiúhelníku $abcdex$ sestrojíme spojnice (ab, de), (cd, A). Spojnici bodu

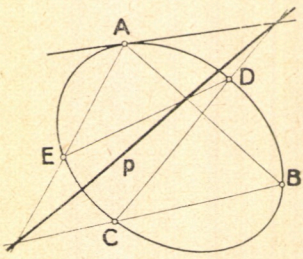
[8]) Některé věty o kuželosečce, jimž odpovídají známé věty obyčejné geometrie o kružnici u trojúhelníku, odvozuje *M. Fouché*, Quelques théorèmes de géométrie projective relatifs à des triangles et à des coniques, Nouv. Annales math. (4) 9 (1909).

[9]) Je to vlastně konstrukce projektivnosti vytvořujících útvarů základních ve vhodném uspořádání.

[10]) Z daných prvků volíme ke konstrukci s výhodou šestiúhelník, jehož strany se protínají mezi vrcholy (aby Pascalova přímka nepadla příliš daleko).

přímky, těmito dvěma body určené, a přímky BC spojíme s bodem E, čímž dostaneme přímku, jež protíná a v bodě X; neboť bod (BC, EX) leží také na přímce Pascalově. Takto lze ovšem sestrojiti libovolně mnoho bodů kuželosečky.[11])

β_1) *Sestrojiti u kuželosečky určené pěti body tečnu v jednom z nich.*



Obr. 51.

Brianchonova, těmito dvěma přímkami určeného, a bodu bc protíná přímka e v bodě, jenž spojen s bodem A dává x; neboť přímka (bc, ex) prochází také bodem Brianchonovým.

β_2) *Sestrojiti u kuželosečky určené pěti tečnami dotyčný bod jedné z nich.*

Majíce (v první z obou úloh duálních) sestrojiti tečnu kuželosečky dané body A, B, C, D, E v bodě A, můžeme postupovati podle věty o pětiúhelníku tak, že sestrojíme nejprve přímku Pascalovu jako spojnici průsečíku dvou dvojic nesousedních stran (vyjmouce stranu CD) a odtud hledanou tečnu. Nebo máme na zřeteli (obr. 51) šestiúhelník A_1A_2BCDE, v němž $A_1 = A_2$ (t. j. A). Pascalova přímka určena je body (A_2B, DE) a (BC, EA_1); průsečík její s přímkou CD spojíme s bodem A, čímž dostaneme tečnu A_1A_2.[12])

Sestrojiti γ_1) *u kuželosečky určené čtyřmi body a tečnou v jednom z nich* pátý bod nebo tečnu v jednom daném bodě; δ_1) *u kuželosečky určené třemi body a tečnami ve dvou z nich* čtvrtý bod nebo tečnu v třetím bodě.

Sestrojiti γ_2) *u kuželosečky určené čtyřmi tečnami a dotyčným bodem jedné z nich* pátou tečnu nebo dotyčný bod dané tečny; δ_2) *u kuželosečky určené třemi tečnami a dotyčnými body dvou z nich* čtvrtou tečnu nebo dotyčný bod třetí tečny.

Úlohy tyto řešíme buď podle obecné věty Pascalovy (resp. Brianchonovy), pokládajíce dotyčný bod tečny za dva sousední vrcholy šestiúhelníku a tečnu za stranu je spojující (resp. duálně), nebo podle jejich specialisací: γ_1 podle věty o pětiúhelníku, resp. o čtyrúhelníku, δ_1 podle věty o čtyrúhelníku, resp. o trojúhelníku (γ_2 a δ_2 podle vět duálních).[13])

---

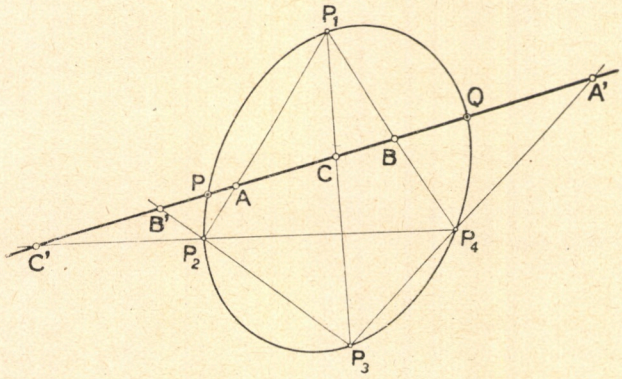
[11]) Protější strany šestiúhelníku nalezneme snadno tím, že v daném cyklickém pořadí vrcholů zvolíme dva sousední vrcholy a další jeden vynecháme; následující dva pak určují stranu protější. Na př. v šestiúhelníku $ABCDEF$ jest k AB protější stranou DE, k CD je protější FA.

[12]) Velmi snadno sestrojíme dotyčné body na pěti stranách pětiúhelníku kuželosečce opsaného takto: Úhlopříčky pětiúhelníku omezují druhý pětiúhelník, spojnice vrcholů obou pětiúhelníků určují na stranách body dotyčné.

41. Desarguesova věta o kuželosečkách. *a*) Známou velmi důležitou vlastnost úplného čtyřrohu a úplného čtyrstranu doplňuje kuželosečka pozoruhodným způsobem. Platí totiž věta *Desargova*:[1])

Křivka 2. stupně, jejíž čtyři body určují (vepsaný) *čtyřroh, protíná přímku* (nejdoucí žádným z bodů těch) *ve dvou bodech involuce, stanovené na ní jejími průsečíky s dvojicemi protějších stran tohoto čtyřrohu.*

Křivka 2. třídy, jejíž čtyři tečny určují (opsaný) *čtyrstran, vysílá do bodu* (neležícího na žádné z tečen těch) *dva paprsky involuce, stanovené v něm spojnicemi jeho s dvojicemi protějších vrcholů tohoto čtyrstranu.*



Obr. 52.

Dokážeme větu na levé straně: Čtyřroh kuželosečce vepsaný (obr. 52) ať má vrcholy P_1, P_2, P_3, P_4 a protíná přímku p v bodech A a A', B a B', C a C'', kuželosečka protíná přímku p v bodech P a Q. Promítněme ze dvou protějších vrcholů P_1 a P_3 body P, Q, P_2, P_4; protože podle věty Steiner-Chaslesovy platí

$$P_1(PQP_2P_4) \barwedge P_3(PQP_2P_4),$$

jest na p

$$PQAB \barwedge PQB'A'.$$

Odtud plyne

$$PQAB \barwedge QPA'B',$$

což značí, že v involuci určené dvojicemi PQ a AA' jsou také B a B' sdruženy; stejně ovšem nalezneme, že i C a C'' jsou v této involuci sdruženy. (Spolu je tím znova dokázána věta o involuci průsečíků úplného čtyřrohu s přímkou.)

---

[13]) Věty Pascalova a Brianchonova o šesti stejnojmenných prvcích kuželosečky jsou velmi jednoduché; složitější větu o čtyřech bodech a dvou tečnách kuželosečky (a větu duální) uvádí *J. Rosanes*, Zur Theorie der Kegelschnitte, Journal r. a. Math. 142 (1913).

[1]) Po prvé ji uvedl (ve tvaru metrickém) *Desargues* r. 1639.

Jestliže přímka ve větě uvedená je tečnou kuželosečky, resp. bod uvedený je bodem křivky, platí speciálně:

Protější strany čtyřrohu kuželosečce vepsaného protínají tečnu její v involuci bodové, v níž je dotyčný bod tečny bodem samodružným.

Protější vrcholy čtyrstranu kuželosečce opsaného promítají se z bodu jejího v involuci paprskové, v níž je tečna křivky v bodě tom paprskem samodružným.

b) Speciální (mezní) případy věty Desargovy obdržíme, jestliže ze čtyř vrcholů čtyřrohu, resp. ze čtyř stran čtyrstranu, dva nebo dva a dva prvky splynou; spojnice takových dvou splynuvších bodů čtyřrohu jest ovšem tečnou kuželosečky, duálně průsečík dvou splynuvších stran čtyrstranu jest dotyčným bodem tečny její. Máme odtud tyto věty:

Kuželosečka a trojúhelník jí vepsaný stanoví na přímce (neprocházející vrcholem jeho) *involuci, v níž jsou sdruženy dva průsečíky přímky té s kuželosečkou, průsečíky dvou stran trojúhelníku a průsečík třetí strany jeho s průsečíkem tečny kuželosečky v protějším vrcholu trojúhelníku.*

Kuželosečka a dvě její tečny protínají přímku (nejdoucí dotyčným bodem tečen těch) *ve dvou dvojicích involuce, jejímž samodružným bodem je průsečík spojnice dotyčných bodů obou daných tečen křivky s přímkou.*

Kuželosečka a trojúhelník jí opsaný stanoví v bodě (neležícím na straně jeho) *involuci, v níž jsou sdruženy dvě tečny z bodu toho ke kuželosečce jdoucí, dva paprsky promítající vrcholy trojúhelníku a paprsek promítající třetí jeho vrchol s paprskem promítajícím dotyčný bod protější strany.*

Kuželosečka a dva její body určují v bodě (neležícím na tečně křivky v bodech těch) *involuci s dvojicemi v tečnách kuželosečky jím jdoucích a ve spojnicích jeho s oněmi body, v níž je samodružným paprsek promítající průsečík obou tečen křivky v bodech daných.*

Je-li přímka ve větách uvedená tečnou kuželosečky (resp. bod tam uvedený bodem kuželosečky), jest její bod dotyčný samodružným bodem dotčené involuce (resp. tečna křivky v bodě tom samodružným paprskem dotčené involuce).

c) Věta Desargova (obecná i případy zvláštní) poskytuje výhodnou konstrukci dalších bodů kuželosečky, určené pěti body nebo čtyřmi body a tečnou v jednom z nich nebo třemi body a tečnami ve dvou z nich (duálně konstrukci dalších tečen kuželosečky duálně určené). Stačí vytknouti bodové konstrukce kuželosečky (podle první nebo druhé nebo třetí z hořejších vět).

Je-li kuželosečka dána pěti body svými, sestrojíme na přímce jdoucí jedním z nich druhý bod její tím, že přímku protneme dvojicemi protějších stran čtyřrohu, určeného ostatními čtyřmi body danými, a v involuci tak určené sestrojíme k prvému bodu bod sdružený. Je-li

kuželosečka určena čtyřmi body a tečnou v jednom z nich, sestrojíme na přímce jdoucí jedním z ostatních tří bodů bod k němu sdružený v involuci, stanovené na přímce té danou tečnou a spojnicí zbývajících dvou bodů, jakož i spojnicemi dotyčného bodu tečny té s těmito dvěma body. Je-li konečně kuželosečka stanovena třemi body a tečnami ve dvou z nich, sestrojíme na přímce jdoucí třetím bodem druhý bod kuželosečky jako bod sdružený k němu v involuci, určené na přímce té průsečíky oněch tečen jako body sdruženými a průsečíkem spojnice jejich bodů dotyčných jako bodem samodružným.[2])

42. Svazek a řada kuželoseček. *a*) Uvedeným větám Desargovým lze dáti plnější obsah ve spojení s důležitými soustavami neomezeně velikého počtu kuželoseček.

Všechny kuželosečky jdoucí čtyřmi danými body v rovině (z nichž žádné tři neleží v téže přímce) tvoří (jednomocný) *svazek kuželoseček*. Každý bod roviny (vyjma body dané) určuje jednu a jedinou kuželosečku svazku. Dvojice protějších stran úplného čtyřrohu, stanoveného body danými, jsou třemi zvrhlými kuželosečkami svazku.

Všechny kuželosečky dotýkající se čtyř daných přímek v rovině (z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem) tvoří *řadu kuželoseček*. Každá přímka roviny (vyjma přímky dané) určuje jednu a jedinou kuželosečku řady. Dvojice protějších vrcholů úplného čtyrstranu, stanoveného danými přímkami, jsou třemi zvrhlými kuželosečkami řady.

Větě Desargově můžeme nyní dáti tento tvar:[1])

Kuželosečky svazku protínají přímku své roviny (nejdoucí vrcholem základního čtyřrohu) *ve dvojicích involuce.*[2])

Tečny vedené ke kuželosečkám řady z bodu její roviny (neležícího na straně základního čtyrstranu) *tvoří dvojice involuce.*

[2]) O sestrojení kuželosečky z prvků reálných a imaginárních pojednávají zejména *F. Spath*, Lineale Construction von Kegelschnitten aus teilweise imaginären Elementen, Monatshefte Math. Phys. 1 (1890); *F. Machovec*, Zur linealen Construction von Kegelschnitten aus imaginären Elementen, Monatshefte Math. Phys. 4 (1893); *A. Pleskot*, Zur linealen Konstruktion von Kegelschnitten aus teilweise imaginären Elementen, Věstník Spol. nauk, 1906; *J. Sobotka*, Betrachtungen zur Konstruktion von Kegelschnitten aus teilweise imaginären Elementen, Věstník Spol. nauk, 1907; *R. Schüssler*, Über die Konstruktion von Kegelschnitten, welche nur durch imaginäre Bestimmungsstücke gegeben sind, Archiv Math. Phys. (3) 16 (1910). Četné konstrukce toho druhu podávají *Ed. Weyr*, Projektivná geometrie, a *V. Jarolímek*, Základové geometrie polohy (2. sešit).

[1]) Učinil tak *Ch. Sturm* v Annales de mathématiques 17 (1826). Proto sluje věta tato (na levé straně) také *Sturmovou* (nebo Desargues-Sturmovou).

[2]) Větu tuto lze takto obrátiti: Všechny kuželosečky, jdoucí třemi danými body a protínající přímku své roviny ve dvojicích téže involuce, procházejí bodem čtvrtým (a tvoří tedy svazek).

Neboť dvě kuželosečky k a k_1, jdoucí body A, B, C, ať protínají přímku p ve dvojicích X, X' a X_1, X'_1 involuce I. Obě tyto kuželosečky mají

Protože involuce, stanovená svazkem kuželoseček na libovolné přímce roviny, má dva (reálné) body samodružné nebo žádný, existují ve svazku tom dvě kuželosečky nebo žádná, jež se dané přímky dotýkají; v prvém případě jsou dotyčnými body obou kuželoseček na dané přímce samodružné body involuce, stanovené tam třemi dvojicemi protějších stran základního čtyřrohu. Jsou tedy čtyřmi body a tečnou mimo ně ležící určeny dvě (reálné) kuželosečky nebo žádná. Duálně čtyřmi tečnami a bodem mimo ně ležícím určeny jsou dvě kuželosečky (reálné) nebo žádná.

b) Uvedený svazek kuželoseček nebo řada kuželoseček, stanovené čtyřmi body resp. čtyřmi tečnami různými, sluje určitěji *svazkem* resp. *řadou typu I*. Jestliže ze čtyř bodů resp. tečen dva prvky nebo dva a dva prvky splynou, vzniká obdobně svazek resp. řada kuželoseček typu II. nebo IV. (označené tak vzhledem k dalším úvahám).

Soustava kuželoseček v rovině, jdoucích třemi danými body a dotýkajících se dané přímky v jednom z nich, tvoří *svazek* kuželoseček *typu II*.

Soustava kuželoseček v rovině, dotýkajících se tří daných přímek a jdoucích daným bodem na jedné z nich, tvoří *řadu* kuželoseček *typu II*.

Soustava kuželoseček v rovině, jdoucích dvěma danými body a dotýkajících se v nich dvou daných přímek, tvoří *svazek-řadu* kuželoseček *typu IV*; tento útvar je soběduální.[3])

Větu Desargovu můžeme zde vysloviti takto:

Svazek kuželoseček II. typu protíná přímku své roviny (nejdoucí vrcholem základního trojúhelníku) ve dvojicích involuce. Kdežto každým bodem roviny (vyjma body dané) jest určena jedna a pouze jedna kuželosečka svazku, určuje každá přímka v rovině (vyjma přímku danou) jako

Tečny vedené ke kuželosečkám řady II. typu z bodu její roviny (neležícího na straně základního trojúhelníku) tvoří dvojice involuce. Kdežto každou přímkou roviny (vyjma přímky dané) jest určena jedna a jen jedna kuželosečka řady, určuje každý bod v rovině (vyjma bod daný) jako bod

společný čtvrtý bod: AB ať protíná p v bodě L, s bodem L ať je v I na p sdružen bod L', spojnice $L'C$ ať protíná k v bodě D; kuželosečky svazku $ABCD$ protínají p v dvojicích involuce, totožné s I; kuželosečka svazku toho jdoucí bodem X_1 protíná p ještě v X'_1 a má s k_1 společných pět bodů $ABCX_1X'_1$, je proto s k_1 totožna. Pročež D, ležící na k, leží také na k_1 a jest čtvrtým společným bodem obou těchto čar. Co platí o k_1, platí o každé další kuželosečce, jdoucí body A, B, C a dvojicí involuce na p.

[3]) Přímku spojující oba základní body svazku tohoto jest pokládati jako přímku dvojnásobnou za zvrhlou čáru 2. stupně (rozpadající se ve dvě přímky splývající). Duálně průsečík obou základních přímek svazku jest jako dvojnásobný bod zvrhlou čarou 2. třídy (rozpadající se ve dva splývající body).

tečna dvě (reálné) kuželosečky svazku nebo žádnou.

křivky dvě (reálné) kuželosečky řady nebo žádnou.

Svazek (a spolu řada) kuželoseček IV. typu protíná přímku své roviny (nejdoucí společným bodem kuželoseček) ve dvojicích involuce, k nimž patří průsečíky přímky té s oběma přímkami základními; spojnice obou základních bodů svazku protíná přímku v samodružném bodě uvedené involuce. K řadě (a spolu svazku) kuželoseček IV. typu vedené tečny z bodu její roviny (neležícího na společné tečně kuželoseček) jsou dvojicemi involuce, k nimž patří spojnice bodu toho s oběma body základními; průsečík obou základních přímek řady promítá se ze zvoleného bodu samodružným paprskem uvedené involuce. Každým bodem a každou přímkou v rovině (vyjma základní prvky svazku-řady) jest určena jedna a jediná kuželosečka svazku-řady.[4])[5])

c) Jestliže ze čtyř základních bodů svazku kuželoseček splynou dva, mají — jak jsme viděli — kuželosečky svazku v takovém bodě společnou tečnu, dotýkají se tam navzájem (mají dotyk obyčejný, 1. stupně); rovněž tak v případě duálním. Jest však možno, že ze čtyř bodů, určujících svazek kuželoseček, splynou tři body: kuželosečky mají tam *dotyk trojbodový* čili dotyk 2. stupně, *oskulují se*. Totéž nastane v duálním případě, kdy splynou tři ze čtyř tečen, určujících řadu kuželoseček (kuželosečky mají dotyk trojtečnový, oskulují se).

---

[4]) Libovolný bod roviny L můžeme totiž pokládati za pátý bod kuželosečku určující (mimo čtyři body, jež splynuly ve dva základní body A, B svazku typu IV.), takže kuželosečka je tu určena třemi body A, B, L a tečnami a, b ve dvou z nich; také však za střed paprskového svazku, tvořeného tečnami kuželoseček řady: jedním samodružným paprskem involuce těchto tečen jest přímka (L, ab), druhý paprsek samodružný je tečnou kuželosečky uvažované. A duálně na libovolné přímce l určíme dotyčný bod kuželosečky svazku jako druhý samodružný bod involuce, stanovené tam kuželosečkami svazku, jejíž jeden bod samodružný je průsečík (l, AB).

[5]) V hořejších definicích svazků kuželoseček I., II. a IV. typu jsou základní body reálné; věty uvedené platí však i v případech svazků, kdy dvojice základních bodů jsou sdruženě imaginární (a stanoveny eliptickou involucí na reálné přímce; u svazku I. typu mohou dva nebo dva a dva základní body býti imaginární). Obdobně v případech duálních. Viz *D. Montesano*, Su due teoremi fondamentali di geometria proiettiva, Giornale mat. 23 (1885); *C. Segre*, Le coppie di elementi imaginari nella geometria projettiva sintetica, Memoria Accad. Torino (2) 38 (1886); *A. del Re*, Escursioni matematiche diverse, Giornale mat. 28 (1890); *J. Steiner-H. Schröter*, Vorlesungen über synthetische Geometrie II. (3. vyd. 1898); *F. Enriques*, Lezioni di geometria projettiva (4. vyd. 1920), p. 255 a násl.

Promítneme-li dva sdruženě imaginární základní body svazku do kruhových bodů roviny, přejdou uvedené čtyři druhy svazků kuželoseček (dva I. typu, po jednom II. a IV.) ve svazky kružnic (svazek kružnic s dvěma reálnými body společnými, s dvěma sdruženě imaginárními body společnými, s jedním společným bodem a společnou tečnou v něm, a svazek kružnic soustředných).

Soustava kuželoseček, jdoucích daným bodem a oskulujících se v daném bodě dané společné tečny, tvoří *svazek* kuželoseček *typu III.*

Soustava kuželoseček, dotýkajících se dané přímky a oskulujících se v daném bodě dané společné tečny, tvoří *řadu* kuželoseček *typu III.*

Jestliže splynou všechny čtyři body určující svazek nebo duálně všechny čtyři přímky určující řadu kuželoseček, mají kuželosečky *dotyk čtyrbodový* (čtyrtečnový) čili dotyk 3. stupně, *hyperoskulují se.*

Soustava kuželoseček, jež se v daném bodě dané tečny hyperoskulují (majíce tam čtyři splynuvší body společné a čtyři splynuvší tečny společné), tvoří *svazek-řadu* kuželoseček *typu V.*[6])

Také o takových svazcích resp. řadách kuželoseček platí věta Desargova.[7])[8])[9])

---

[6]) Ke kuželosečkám, jež se oskulují nebo hyperoskulují, dojdeme třebas tímto způsobem: Snadno dokážeme, že dvě kuželosečky, mající společné dva reálné body (*A* a *B*, různé nebo splývající), mají společnou ještě druhou dvojici bodů (reálných různých nebo splývajících, nebo sdruženě imaginárních). Vedeme-li totiž jedním z daných společných bodů obou kuželoseček *A* přímku, jež kuželosečky ty protíná v bodě *S* resp. *S'*, a promítneme-li z těchto bodů průsečíky příslušné kuželosečky a přímek svazku se středem v bodě *B*, dostaneme dva paprskové svazky perspektivní; osa jejich perspektivnosti obsahuje další dva společné body uvažovaných kuželoseček. Prochází-li tato osa perspektivnosti bodem $A = B$ nebo je-li totožná s tečnou obou kuželoseček v tomto bodě, mají tam kuželosečky ty dotyk trojbodový resp. čtyrbodový.

[7]) Synthetické úvahy o svazcích a řadách kuželoseček podávají ve svých knihách na př. *Bobek*, *Jarolímek*, zejména pak *J. Steiner-H.Schröter*, Vorlesungen über synthetische Geometrie (II. díl, 3. vyd. 1898). Také (a spolu o lineárních soustavách vyššího řádu) *A. Jopke*, Synthetische Untersuchungen über lineare Kegelschnittsysteme erster, zweiter und dritter Stufe, Dissertation Breslau, 1908.

[8]) Mezi svazkem kuželoseček a základním útvarem jednomocným lze ustanoviti *projektivnost* tímto způsobem: Každé kuželosečce svazku přiřadíme její tečnu v základním bodě svazku (není-li všem kuželosečkám jeho společná) nebo její (druhý) průsečík s přímkou, vedenou základním bodem svazku toho (nebo také dvojici jejích průsečíků na libovolné přímce roviny): mezi paprsky uvedeného svazku tečen nebo body uvedené řady průsečíků (nebo dvojicemi uvedené involuce) a prvky základního útvaru jednomocného zavedeme pak projektivnost způsobem obvyklým. Speciálně jest možno ustanoviti projektivnost mezi kuželosečkami svazku (jako mezi prvky dvou útvarů soumístných). Obdobně ovšem pro řadu kuželoseček.

[9]) Tři kuželosečky, jež nepatří témuž svazku, určují lineární dvojmocnou soustavu (dvojmocný svazek) čili *síť* kuželoseček, do které náležejí všechny kuželosečky každého svazku, určeného dvěma libovolnými kuželosečkami, jež se ve dvou ze tří svazků danými stanovených zvolí. Každým bodem v rovině jest určen svazek kuželoseček v síti obsažených; dvěma body prochází (obecně) jediná kuželosečka sítě. Obdobně pro dvojmocnou soustavu k síti duální. Viz na př. *J. Steiner*, Vorlesungen über synthetische Geometrie II. (vydal H. Schröter), 3. vyd. 1898, p. 471 a n.

43. Projektivní útvary kvadratické. *a*) Poznali jsme, že dvojice projektivních základních útvarů jednomocných vytvořují tyto útvary odvozené: křivku 2. stupně, křivku 2. třídy, kužel 2. stupně, kužel 2. třídy a přímkovou zborcenou řadu 2. stupně i 2. třídy.

Křivka 2. stupně (vytvořená dvěma projektivními svazky paprsků v téže rovině) sluje jako útvar bodový také (křivou) řadou bodovou druhého stupně nebo *kvadratickou řadou bodovou*, stručněji *bodovou kuželosečkou*; křivka 2. třídy (vznikající ze dvou projektivních řad bodů v téže rovině) sluje jako útvar přímkový také (křivým) svazkem paprskovým druhé třídy nebo *kvadratickým svazkem paprskovým v rovině*, stručněji *přímkovou kuželosečkou*. Kužel 2. stupně (vytvořený dvěma projektivními svazky rovin v témž trsu) lze nazvati jako útvar přímkový (křivým) svazkem paprskovým druhého stupně nebo *kvadratickým svazkem paprskovým v trsu*, stručněji *přímkovým kuželem kvadratickým*; kužel 2. třídy (vznikající ze dvou projektivních svazků paprsků v témž trsu) lze nazvati jako útvar rovinový (křivým) svazkem rovinovým druhé třídy nebo *kvadratickým svazkem rovinovým*, nebo obdobně k předchozímu *rovinovým kuželem kvadratickým*. Konečně přímkovou řadu 2. stupně i 2. třídy (vytvořenou dvěma projektivními řadami bodů s osami mimoběžnými nebo dvěma projektivními svazky rovin s takovými osami), budeme nazývati *zborcenou řadou kvadratickou*.

Pět zde uvedených útvarů odvozených tvoří skupinu (jednomocných) útvarů *kvadratických* proti třem (jednomocným) útvarům základním (řadě bodové, svazku paprskovému a svazku rovinovému), jež proto slují *lineární*; všech osm útvarů bylo nazváno také *útvary elementárními* (prvního resp. druhého stupně).[1])

b) Pro útvary kvadratické zavádíme projektivnost obdobně jako při útvarech základních a pomocí nich.[2])

Pravíme, že útvar kvadratický jest *perspektivní* k útvaru základnímu, jestliže jejich prvky sobě odpovídající jsou incidentní. Tak jest kvadratická řada bodová perspektivní ke svazku paprskovému, jenž ji z bodu jejího promítá; kvadratický svazek paprskový v rovině jest perspektivní k řadě bodové, ve které svou přímku protíná; kvadratický svazek rovinový je perspektivní k svazku paprskovému, v němž seče jednu ze svých rovin; kvadratická řada zborcená je perspektivní k řadě bodové, v níž protíná přímku řady doplňkové, a ke svazku rovinovému, jenž ji z takové přímky promítá. Ve všech těchto a jiných případech korespondují sobě ovšem incidentní elementy obou útvarů.

Projektivními slují ty dva útvary kvadratické (nebo elementární vůbec), jež jsou krajními členy (konečné) řady útvarů perspektivních.

[1]) Tak *Staudt* v Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856. Kvadratické útvary připojujeme k lineárním pro mnohé obdobné vlastnosti jejich, třebas nosiči těchto útvarů nejsou základní prvky geometrie projektivní.

[2]) Vytvoření kvadratických útvarů (jednomocných) dovoluje přenésti na ně pojem (přirozeného) uspořádání, uvedený při útvarech základních, a jeho důsledky.

Projektivní jsou dva útvary kvadratické (elementární) patrně tehdy a pouze tehdy, jsou-li projektivními perspektivní k nim útvary základní; redukuje se tedy projektivnost útvarů kvadratických (elementárních) na projektivnost útvarů lineárních.[3])

Na př. dvě bodové kuželosečky v téže rovině uvedeme v korespondenci projektivní, přemítneme-li body jedné kuželosečky z jejího bodu na přímku a body této přímky z bodu druhé kuželosečky na tuto. V projektivnosti bodových řad na obou kuželosečkách odpovídají tu sobě dva body incidentní s těmi paprsky obou svazků, jež se protínají na zvolené přímce; neboť každá z obou kvadratických řad je perspektivní k lineárnímu svazku paprskovému, a oba tyto svazky jsou také perspektivní.

Dva projektivní útvary kvadratické jsou někdy ve zvláštní poloze vzájemné, jsouce perspektivní k témuž útvaru základnímu. Na př. jsou takto projektivní dvě bodové kuželosečky téže roviny se společným prvkem, odpovídají-li sobě body, ležící na téže přímce (lineárního) svazku paprskového se středem v bodě společném (tomuto bodu A, pokládanému za bod první nebo druhé kuželosečky, odpovídá na druhé resp. první kuželosečce druhý průsečík její s tečnou oné (první resp. druhé) kuželosečky v bodě A; spec. odpovídá bod A sobě samému, mají-li tam obě kuželosečky společnou tečnu, a obráceně); nebo dvě bodové kuželosečky různých rovin, jestliže sobě odpovídají body jejich, ležící v téže rovině (lineárního) svazku rovinového s osou obě řady protínající; nebo dvě přímkové kuželosečky téže roviny (nebo také různých rovin) se společnou přímkou, jsou-li sdruženy přímky jejich protínající se v témž bodě společné přímky; nebo přímkový kužel kvadratický a bodová kuželosečka s jednou incidentní dvojicí prvků, jsou-li sdruženy prvky obou útvarů, ležící v téže rovině (lineárního) svazku rovin s osou v přímce oné dvojice; nebo zborcená řada kvadratická a bodová kuželosečka s jednou incidentní dvojicí, jestliže sobě odpovídají prvky obou útvarů, ležící v téže rovině (lineárního) svazku rovinového, jehož osa jde bodem oné dvojice a protíná všechny přímky řady.[4])

c) Kdežto v případech posledně uvedených jsou sdružené prvky dvou projektivních útvarů kvadratických incidentní s týmž prvkem jednoho útvaru základního,[5]) jest ještě speciálnější poloha těch dvou projektivních útvarů kvadratických různého druhu, jichž korespondující prvky jsou incidentní. Na př. bodová kuželosečka a ji promítající

[3]) Projektivnost kvadratických řad bodových uvažoval soustavně po prvé *Staudt* (1847).

[4]) Na všech stranách úplného rovinného pětirohu jsou skupiny pěti bodů, tvořené na každé straně dvěma jeho vrcholy a třemi průsečíky s ostatními stranami, projektivní; k nim je také projektivní skupina pěti daných bodů na kuželosečce, body těmi určené.

[5]) Dva takové útvary kvadratické mohly by proto také býti nazvány perspektivními (v širším smyslu).

přímkový kužel kvadratický nebo kvadratická řada zborcená a promítající ji rovinový kužel kvadratický, při čemž si odpovídají dva prvky incidentní.

V některých z těchto případů existuje lineární útvar k oběma kvadratickým perspektivní (v obou uv. příkladech, v prvém svazek rovin, v druhém řada bodová). Pozoruhodné jsou však dvojice projektivních útvarů kvadratických s korespondujícími prvky incidentními, u nichž není zprostředkujícího útvaru lineárního. Na př. *kvadratická řada bodová a kvadratický svazek paprskový na téže kuželosečce jsou projektivní, jestliže sdružíme jejich dva prvky incidentní*; což lze dokázati takto:

Budiž na kuželosečce proměnný bod řady X a proměnná tečna v něm, paprsek svazku, x. Dokážeme, že svazek paprskový $A(X)$, promítající z bodu A na kuželosečce její řadu, jest projektivní s řadou bodovou $b(x)$, v níž libovolná tečna b kuželosečky v bodě B protíná svazek jejích tečen. Položme danou kuželosečkou (ležící v rovině ϱ) zborcenou plochu kvadratickou a připojme ke kuželosečce kvadratický kužel s vrcholem O, vytvořený tečnými rovinami zborcené plochy té v bodech dané kuželosečky. Svazek paprskový $A(X)$ je perspektivní ke svazku rovin $q_1(p)$, jehož osou je přímka kvadratické řady q_1 jdoucí bodem A, a jehož roviny procházejí přímkami p druhé (doplňkové) řady na ploše, jdoucími body X. Svazek rovinový $q_1(p)$ je opět perspektivní k řadě bodové $q_2(p)$, v níž jeho roviny protínají přímku q_2 prvé řady, jdoucí bodem B. Řada bodová $q_2(p)$ je perspektivní ke svazku paprskovému se středem O, v němž tečné roviny $\xi = px$ plochy zborcené a spolu plochy kuželové protínají tečnou rovinu β zborcené plochy v bodě B. Konečně uvedený svazek paprskový se středem O je perspektivní k řadě bodové $b(x)$; body $O, q_2(p)$ a $b(x)$ leží vskutku na témž paprsku, v němž se protínají rovina ξ, obsahující přímky p a x, s rovinou β, obsahující přímky q_2 a b.[6])

Promítnutím plyne odtud ovšem, že kvadratický kužel přímkový a kvadratický kužel rovinový téže plochy, v nichž sobě odpovídají prvky incidentní, jsou projektivní.

Pro svou velmi speciální polohu vzájemnou jmenují se také *dva kvadratické útvary různého druhu perspektivními*, jestliže každému prvku jednoho odpovídá incidentní prvek druhého (jako je tomu při dvou lineárních útvarech různého druhu a při útvarech lineárním a kvadratickém).

---

[6]) Uvedená věta sluje *Chaslesova*. Jiný důkaz její lze vésti pomocí vepsaného čtyřrohu a opsaného čtyrstranu, jehož strany jsou tečnami kuželosečky ve vrcholech onoho (se společným trojúhelníkem úhlopříčným). Má-li daná kuželosečka body A, B, X, D a tečny v nich a, b, x, d, vidíme: k lineárnímu svazku paprskovému $A(X)$, jenž promítá bod X z bodu A, je perspektivní přímá řada bodová na BD; k této řadě je perspektivní lineární svazek paprskový se středem ad, k němu pak je perspektivní přímá řada bodová $b(x)$, ve které tečnu b protíná tečna x.

d) Protože projektivnost útvarů kvadratických (elementárních) je založena na projektivnosti útvarů základních, platí o ní jako o této zejména:

Projektivnost dvou útvarů elementárních jest (jednoznačně) určena třemi dvojicemi sdružených prvků. Dvojpoměr čtyř prvků v jednom ze dvou projektivních útvarů elementárních jest roven dvojpoměru čtyř korespondujících prvků v útvaru druhém. Harmonické čtveřině prvků elementárního útvaru odpovídá v projektivním útvaru elementárním čtveřina harmonická. Involuční projektivnost dvou soumístných útvarů elementárních jest určena dvěma dvojicemi prvků sdružených.[7])

e) Z vět, které lze odvoditi o projektivních útvarech elementárních, budiž uvedeno:

Bodová kuželosečka a projektivní k ní (lineární) *svazek paprskový jsou perspektivní, jsou-li čtyři dvojice sdružených prvků jejich incidentní.*

Přímková kuželosečka a projektivní k ní (lineární) *řada bodová jsou perspektivní, jsou-li čtyři dvojice sdružených prvků jejich incidentní.*

Neboť promítneme-li (v případě na levé straně) body dané kuželosečky k z bodu jejího S', dostaneme svazek paprskový, projektivní k řadě na k a tedy k danému svazku S; oba tyto svazky o středech S a S' (ležící zajisté v téže rovině) vytvoří kuželosečku, jež majíc s k společné čtyři body uvedené a bod S', jest s ní totožna. Leží tedy S na k, a každý paprsek svazku o středu S prochází bodem na k, jemu odpovídajícím.

Ustanovíme-li mezi dvěma bodovými kuželosečkami, jež leží v téže rovině a mají společný bod S, projektivnost tím způsobem, že učiníme sdruženými body jejich, ležící na témž paprsku (lineárního) svazku o středu S, poznáváme, že dvě kvadratické řady bodů takto projektivní, nemají-li býti totožny, mohou míti nanejvýš tři společné body sobě samým odpovídající. Platí totiž (připojíme-li i větu duální):

Dvě projektivní kuželosečky se čtyřmi společnými body sobě samým odpovídajícími jsou totožny.

Dvě projektivní kuželosečky se čtyřmi společnými tečnami sobě samým odpovídajícími jsou totožny.

Neboť (v případě na straně levé) projektivnost obou kvadratických řad bodových jest určena, jestliže třem ze společných bodů jejich při-

[7]) Projektivnost dvou útvarů elementárních (kvadratických), určenou třemi dvojicemi prvků sobě odpovídajících, sestrojíme obdobně jako při útvarech základních pomocí útvarů perspektivních. Na př. u dvou kvadratických řad bodových na různých kuželosečkách k a k' téže roviny sestrojíme v projektivnosti, dané třemi dvojicemi bodů AA', BB' a CC', k bodu X korespondující bod X' třebas tak, že spojnicí AA' protneme dané kuželosečky k a k' v bodech S a T', z bodu S promítneme B a C, z bodu T' pak B' a C' paprsky, jež určují spojnici bodů (SB, $T'B'$) a (SC, $T'C'$), osu perspektivnosti p obou svazků lineárních se středy S a T'; spojíme-li pak bod (SX, p) s bodem T', obdržíme v průsečíku této přímky s kuželosečkou k' bod X', odpovídající bodu X.

řadíme je samy. Položíme-li ze čtvrtého bodu společného jako středu svazek paprskový perspektivní k oběma řadám, vidíme, že korespondující body řad těch jsou incidentní s týmž paprskem onoho svazku; čtvrtému bodu počítanému do jedné řady odpovídá v uvedené projektivnosti průsečík tečny příslušné kuželosečky s kuželosečkou druhou. Má-li i tento čtvrtý bod odpovídati sobě samému, musí zmíněný průsečík s ním splynouti, t. j. obě kuželosečky musí míti společnou tečnu v bodě tom. Avšak dvě kuželosečky se společnými čtyřmi body a společnou tečnou v jednom z nich jsou totožny.

Obdobně platí o dvou projektivních přímkových kuželech kvadratických a o dvou projektivních rovinových kuželech kvadratických se společnými čtyřmi prvky, jež sobě samým odpovídají, že jsou totožny.

Z věty nahoře dokázané dále vyplývá: Bodová kuželosečka, projektivní ke kvadratické řadě zborcené nebo ke kvadratickému kuželi přímkovému, má-li čtyři své body incidentní s korespondujícími jim přímkami jednoho nebo druhého útvaru uvedeného, jest perspektivní k útvaru tomu; neboť je totožná s řadou, v níž rovina její útvar ten protíná, majíc s ní čtyři body sobě samým odpovídající společny. Duálně jest kvadratický kužel rovinový, projektivní s kvadratickou řadou zborcenou nebo s přímkovou kuželosečkou, má-li čtyři své roviny incidentní s korespondujícími jim přímkami takového útvaru, k němu perspektivní.

Pomocí projektivnosti útvarů kvadratických můžeme na př. dokázati větu: *Dvě kuželosečky v různých rovinách, dotýkající se ve společném bodě společné tečny* (a tedy navzájem se dotýkající), *jsou řezy téže kvadratické plochy kuželové.*

Pokládejme totiž obě kuželosečky za kvadratické svazky paprskové se společným jedním paprskem; ustanovíme-li mezi nimi projektivní korespondenci tak, že sobě odpovídají paprsky protínající se na této společné tečně, jsou oba svazky perspektivní v širším smyslu. Položme třemi dvojicemi sdružených přímek obou svazků roviny; tyto se protínají v bodě O. Promítneme-li z bodu O jednu kuželosečku do roviny kuželosečky druhé, musí průmět ten býti totožný s touto druhou kuželosečkou, protože mají společné čtyři tečny a dotyčný bod jedné z nich. Paprsky promítající tvoří kvadratickou plochu kuželovou, jejímiž řezy jsou tedy dané dvě kuželosečky.[8])

[8]) Je-li ve dvou rovinách dáno po n bodech A_k a A'_k ($k = 1, 2, \ldots, n$, kde $n = 4$ nebo 5 nebo 6 nebo 7), můžeme hledati *dvojici dvojic bodů* P a P', *z nichž se tyto dvě dané skupiny* (prvá z P, druhá z P') *promítají projektivními skupinami paprsků*. Úloha tato, kterou pro $n = 4$, 5 uvádí už *Staudt*, pro $n = 6, 7$ pak *Chasles*, jmenuje se (Chaslesovým) *problémem projektivnosti* (v rovině). Pro $n = 4$ lze k libovolnému bodu P (a ke každému bodu na kuželosečce, určené pěti body A_k a P) nalézti kuželosečku vyplněnou body P', která je určena čtyřmi body A'_k a tečnou v jednom z nich (třebas a'_1 v A'_1), tak sestrojenou, aby čtveřina paprsků A'_1 (a'_1, A'_2, A'_3, A'_4) byla projektivní ke čtveřině P (A_1, A_2, A_3, A_4); dané skupiny bodů A_k a A'_k tvoří ovšem v bodových řadách uvedených kuželoseček čtveřiny projektivní.

44. Projektivnost soumístných útvarů kvadratických. Obraťme se k soumístným útvarům kvadratickým; omezíme se zde na kvadratické řady bodové a svazky paprskové v rovině.

a) Přiřadíme-li třem bodům (třem tečnám) kuželosečky tři body (tři tečny) její, jest tím stanovena projektivnost dvou soumístných kvadratických řad bodových (svazků paprskových) této kuželosečky. A tu nalezneme:

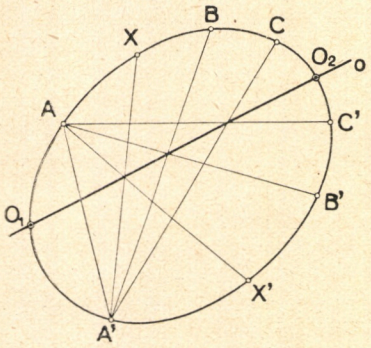
Spojnice sdružených bodů dvou projektivních soumístných řad kvadratických vytvořují kuželosečku nebo procházejí jedním bodem.

Průsečíky sdružených přímek dvou projektivních soumístných svazků kvadratických v rovině vytvořují kuželosečku nebo leží v jedné přímce.

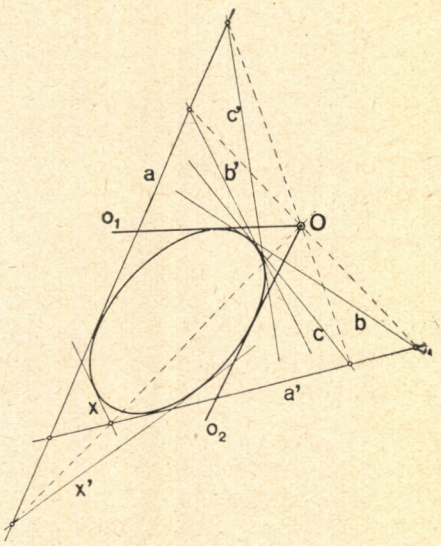
Abychom dokázali větu (třebas) na straně levé, položme danou kuželosečkou zborcenou plochu kvadratickou; vytvoříme ji průsečnicemi dvou projektivních svazků rovinových, za jejichž osy zvolíme dvě mimoběžky protínající danou kuželosečku (a ležící mimo její rovinu). Dejme tomu, že projektivnost obou daných řad bodových na kuželosečce je určena dvojicemi sdružených bodů A a A', B a B', C a C'. Tři přímky jedné řady na připojené ploše, jdoucí body A, B, C, označme pořadem a, b, c; tři přímky druhé řady na ploše, procházející body A', B', C', označme pak a', b', c'. Kvadratická řada přímková s přímkami $a, b, c, \ldots$ je perspektivní k řadě bodové s body $A, B, C, \ldots$, rovněž řada s přímkami $a', b', c', \ldots$ je perspektivní k řadě s body $A', B', C', \ldots$; protože obě řady bodové jsou projektivní, jsou projektivní také obě kvadratické řady přímkové na ploše zborcené, při čemž odpovídají přímkám $a, b, c, \ldots$ přímky $a', b', c', \ldots$ Roviny položené dvojicemi sdružených paprsků $(aa', bb', cc', \ldots)$ vytvořují kvadratický kužel. Neboť rovina, určená třemi body aa', bb' a cc' (jež

Pro $n = 5$ existuje ke zvolenému P jediný bod P', a nalezneme jej jako čtvrtý průsečík dvou kuželoseček, jež sestrojíme pro kterékoli dvě skupiny po čtyřech bodech, vybrané z pěti bodů A'_k, projektivně ke korespondujícím skupinám bodů A_k. Pro $n = 6$ nelze k libovolnému bodu P určiti sdružený P', úloze vyhovující, existují však dvě čáry 3. stupně, tvořené body P resp. P'. Pro $n = 7$ existují tři dvojice sdružených bodů P a P', jež mají žádanou vlastnost. Problém projektivnosti byl rozmanitými způsoby rozšířen (na př. ve tvaru, aby k daným dvěma skupinám po n bodech v prostoru nalezeny byly dvě přímky, z nichž se tyto skupiny bodů promítají projektivními skupinami rovin). Obšírně a opětovně se touto otázkou zabýval *R. Sturm*; tak v pojednání Das Problem der Projektivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades, Math. Annalen 1 (1869), a později; viz *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften I, p. 348 a n.; Encyklopädie math. Wiss., III. *AB* 5: Projektive Geometrie, p. 442 a n. Také *Ed. Weyr*, Projektivná geometrie, p. 97 a n., a téhož O problému homografie, Rozpravy Čes. akad. 8 (1899); *B. Bydžovský*, Řešení zvláštního problému projektivnosti a jeho užití, Časopis mat. fys. 43 (1914); *W. Olbrich*, Neue Probleme der Projektivität, Sitzungsberichte Akad. Wien 134 (1925).

nemůže býti tečnou rovinou uvedené plochy zborcené, protože by za předpokladu opačného aspoň dva z bodů těch nutně ležely na téže přímce plochy, která však nemůže náležeti k žádné z obou přímkových řad jejích), protíná zborcenou plochu v (pravé) kuželosečce. Mezi body této čáry indukují obě přímkové řady zborcené plochy, jež sobě zavedeným způsobem projektivně odpovídají, projektivnost identickou (ježto tři body aa', bb' a cc' jsou tu samodružnými); protože se tedy dvojice sdružených přímek obou řad na zborcené ploše protínají v bodech čáry 2. stupně, obalují roviny dvojic těch (podle čl. 39*c*) kužel 2. třídy. Roviny tohoto kužele protínají rovinu dané kuželosečky v přímkách, spojujících sdružené body uvažovaných řad kvadratických.



Obr. 53.



Obr. 54.

Má-li nalezený kvadratický kužel svůj vrchol mimo rovinu dané kuželosečky, protíná tuto rovinu v kuželosečce, jejíž tečny (průsečnice tečných rovin plochy kuželové s rovinou) jsou spojnice sdružených bodů obou daných projektivních řad kvadratických. Jestliže však vrchol kužele padne do roviny dané, procházejí dotčené spojnice tímto bodem.

b) Projektivnost soumístných kvadratických řad bodových (a dualně soumístných kvadratických svazků paprskových v rovině) snadno *sestrojíme*:

Budiž projektivnost dvou řad bodových na kuželosečce určena (obr. 53) třemi dvojicemi sdružených bodů $ABC \barwedge A'B'C'$ (z nichž, nemá-li projektivnost býti identická, aspoň jedna dvojice, na př.

Budiž projektivnost dvou svazků paprskových na kuželosečce určena (obr. 54) třemi dvojicemi sdružených paprsků $abc \barwedge a'b'c'$ (z nichž, aby projektivnost nebyla identická, musí aspoň jedna dvo-

AA', je složena z bodů různých). Svazek, promítající body A, B, C ze středu A', jest projektivní se svazkem, promítajícím body A', B', C' ze středu A (protože jeden i druhý svazek je perspektivní k příslušné řadě kvadratické); poněvadž pak společný paprsek obou svazků odpovídá sobě samému, jsou svazky ty navzájem perspektivní. I protínají se sdružené paprsky svazků $A'(ABC)$ a $A\ (A'B'C')$ na ose perspektivnosti svazků těch, jdoucí body $(A'B, AB')$ a $(A'C, AC')$. K libovolnému bodu X v první řadě kvadratické obdržíme pak sdružený bod X' druhé řady kvadratické tím, že bod X promítneme z bodu A' na osu právě uvedenou a tento průmět promítneme z bodu A na kuželosečku do X'.[1])

Nalezená osa, sloužící k sestrojení bodů, odpovídajících sobě v dané projektivnosti dvou soumístných řad kvadratických, je táž, ať za středy dvou perspektivních svazků zvolíme místo bodů A' a A kterékoli dva body sobě odpovídající, třebas B a B'. Neboť osa ta je Pascalovou přímkou šestiúhelníku $AB'CA'BC'$ kuželosečce vepsaného, pročež se na ní protínají také spojnice $B'C$ a BC' (takže je průsečíky $(B'A, BA')$ a $(B'C, BC')$ určena táž osa jako prve). Sluje proto přímka ta o, vytvořená průsečíky spojnic XY' a $X'Y$ bodů dvou projektivních soumístných kvadratických řad bodových $XY \ldots \overline{\wedge} X'Y' \ldots$, *osou projektivnosti* těchto řad.[2])[3])

jice, na př. aa', obsahovati přímky různé). Řada, ve které paprsky a, b, c protínají tečnu a', jest projektivní s řadou, v níž paprsky a', b', c' protínají tečnu a (neboť jedna i druhá řada je perspektivní k příslušnému svazku kvadratickému); poněvadž pak společný bod obou řad odpovídá sobě samému, jsou řady ty navzájem perspektivní. I procházejí spojnice sdružených bodů v řadách $a'(abc)$ a $a(a'b'c')$ středem perspektivnosti obou řad, jenž je průsečíkem spojnic $(a'b, ab')$ a $(a'c, ac')$. K libovolnému paprsku x prvního svazku kvadratického nalezneme sdružený paprsek x' svazku druhého tím, že průsečík $a'x$ spojíme se středem právě uvedeným a průsečíkem této spojnice s paprskem a vedeme tečnu x' kuželosečky.

Nalezený střed, jehož užíváme k sestrojení paprsků, odpovídajících sobě v dané projektivnosti dvou soumístných svazků kvadratických, je týž, ať za osy dvou perspektivních řad zvolíme místo tečen a', a kterékoli dvě tečny sobě odpovídající, třebas b, b'. Neboť střed ten je Brianchonovým bodem šestiúhelníku $ab'ca'bc'$ kuželosečce opsaného, pročež jím prochází také spojnice bodů $b'c$ a bc' (takže je spojnicemi $(b'a, ba')$ a $(b'c, bc')$ určen týž střed jako prve). Střed ten O, jímž procházejí spojnice průsečíků xy' a $x'y$ přímek dvou projektivních soumístných kvadratických svazků paprskových v rovině $xy \ldots \overline{\wedge} x'y' \ldots$, sluje *středem projektivnosti* těchto svazků.[2])

[1]) Tato konstrukce projektivnosti dvou soumístných řad bodových (a duálně dvou soumístných svazků paprskových) na kuželosečce provádí se pouhým pravítkem.

Je patrno z uvedené konstrukce, že průsečíky osy projektivnosti dvou daných soumístných řad kvadratických s jejich kuželosečkou jsou *samodružné body* obou řad.

Osa projektivnosti protíná kuželosečku, dotýká se jí nebo leží mimo ni podle toho, je-li projektivnost soumístných řad hyperbolická, parabolická nebo eliptická.[4])

Je patrno, že tečny vedené středem projektivnosti dvou daných soumístných svazků kvadratických ke kuželosečce jejich jsou *samodružné paprsky* obou svazků.

Střed projektivnosti leží vně kuželosečky, na ní nebo uvnitř ní podle toho, je-li projektivnost soumístných svazků hyperbolická, parabolická nebo eliptická.[4])

c) Jestliže sdružené prvky dvou projektivních soumístných řad kvadratických nebo dvou projektivních soumístných svazků kvadratických odpovídají sobě obapolně (t. j. každému prvku, čítanému do prvního nebo druhého útvaru, odpovídá týž prvek útvaru projektivního), jest projektivnost obou řad resp. svazků *involuční*. Involuční projektivnost kvadratických útvarů jest ovšem stanovena už dvěma dvojicemi sdružených prvků jako při útvarech lineárních, na př. dvojicemi bodů A, A' a B, B', protože platí $ABB' \barwedge A'B'B$.

Spojnice sdružených bodů dvou involučně projektivních řad na kuželosečce procházejí jedním bodem (středem involuce).

Průsečíky sdružených paprsků dvou involučně projektivních svazků na kuželosečce leží na jedné přímce (ose involuce).

Důkaz toho spočívá na harmonické vlastnosti úplného čtyřrohu (čtyrstranu). Je-li (v případě na straně levé) involuční projektivnost určena (obr. 55) dvojicemi AA' a BB', leží na ose projektivnosti řad $ABB' \barwedge A'B'B$ průsečíky $(AB', A'B)$ a $(AB, A'B')$, tedy dva úhlopříčné vrcholy čtyřrohu $AA'BB'$; třetím úhlopříčným vrcholem je průsečík O spojnic AA' a BB' bodů sdružených. Protože osa projektivnosti protíná tedy spojnici AA' v bodě harmonicky sdruženém k bodu O vzhledem k A, A' a protože pro další dvojice sdružených bodů X, X'

[2]) Osa projektivnosti určuje spolu s jednou dvojicí (různých) bodů sobě odpovídajících projektivnost dvou soumístných řad bodových na kuželosečce.

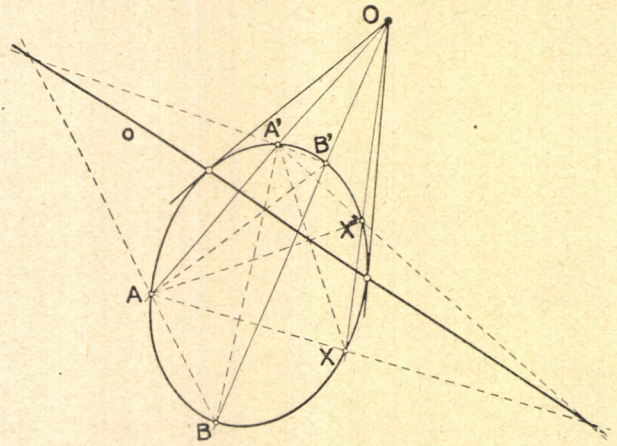
Střed projektivnosti určuje spolu s jednou dvojicí (různých) přímek sobě odpovídajících projektivnost dvou soumístných svazků paprskových na kuželosečce.

[3]) Pomocí osy projektivnosti dvou soumístných řad bodových na kuželosečce dokážeme větu (kterou lze pokládati za zobecnění věty Pascalovy): Jestliže z průsečíků dvojic protějších stran jednoduchého 2 $(2n + 1)$-úhelníku, kuželosečce vepsaného, jsou všechny až na jeden body téže přímky, leží i tento poslední na přímce té. Platí ovšem i věta duální.

[4]) Máme-li na zřeteli projektivnost dvou soumístných řad bodových na kuželosečce a zároveň projektivnost, v níž sobě odpovídají tečny této kuželosečky v bodech, sdružených v projektivnosti oné, vidíme, že osa první projektivnosti a střed projektivnosti druhé jsou pólárou a pólem vzhledem ke kuželosečce uvažované. (Neboť jedna projektivnost přejde v druhou, jestliže útvar první proměníme v polární vzhledem k dané kuželosečce.)

leží průsečíky $(AX', A'X)$ a $(AX, A'X')$ na téže ose projektivnosti, musí spojnice XX' sdružených bodů procházeti týmž bodem O.

Jak patrno, vyplývá u dvou řad a duálně u dvou svazků kvadratických, involučně projektivních, existence středu resp. osy involuce z existence osy resp. středu projektivnosti a z harmoničnosti; ovšem také obráceně. Platí proto:



Obr. 55.

Dvojice bodů, v nichž paprsky lineárního svazku v rovině kuželosečky tuto protínají, jsou dvojicemi involuce kvadratických řad na kuželosečce.

Dvojice tečen, vedených z bodů lineární řady bodové v rovině kuželosečky k této, jsou dvojicemi involuce kvadratických svazků na kuželosečce.

Je jasno, že dvě soumístné řady bodů involučně projektivní na kuželosečce mají střed involuce a osu projektivnosti, jež jsou středem projektivnosti a osou involuce dvou soumístných svazků paprskových na téže kuželosečce, perspektivních k oněm; jsou tedy střed a osa involuce dvou řad a perspektivních dvou svazků na kuželosečce (involučně projektivních) totožny se středem a osou projektivnosti těchto svazků a těchto řad.[5]) Osa involuce protíná kuželosečku v samodružných bodech involuce bodové, ze středu involuce vedené tečny jsou samodružnými paprsky involuce paprskové; ony jsou dotyčnými body těchto.[6])[7])[8])

[5]) A ovšem jsou střed a osa involuce soumístných řad a svazků dané kuželosečky pólem a polárou, vzhledem k ní sdruženými. Na tom lze založiti teorii polárných vlastností kuželosečky (tak ve svých učebnicích na př. *Ed. Weyr*, *Böger*).

[6]) Obě hořejší věty (původní i obrácená) dovolují doplniti větu odst. *a*: Spojnice korespondujících bodů dvou projektivních soumístných řad kva-

Osa involuce protíná kuželosečku nebo neprotíná a střed involuce leží vně nebo uvnitř kuželosečky podle toho, je-li involuce řad a svazků této kuželosečky hyperbolická nebo eliptická.[9][10][11])

dratických vytvořují kuželosečku, je-li jejich projektivnost neinvoluční (kdežto v případě involuční projektivnosti procházejí jedním bodem). Obdobně v případě duálním.

[7]) Jak víme, lze každou projektivnost dvou soumístných útvarů jednomocných vyjádřiti jako produkt dvou projektivností involučních. Máme-li na zřeteli projektivnost dvou soumístných řad bodových na kuželosečce, dokážeme snadno (pomocí věty Pascalovy) větu: Osa projektivnosti dvou soumístných kvadratických řad bodových jest spojnicí středů obou involučních projektivností, jež jsou složkami této projektivnosti; střed jedné involuce je na ose dané projektivnosti volitelný, jeho volbou je pak střed druhé involuce už určen.

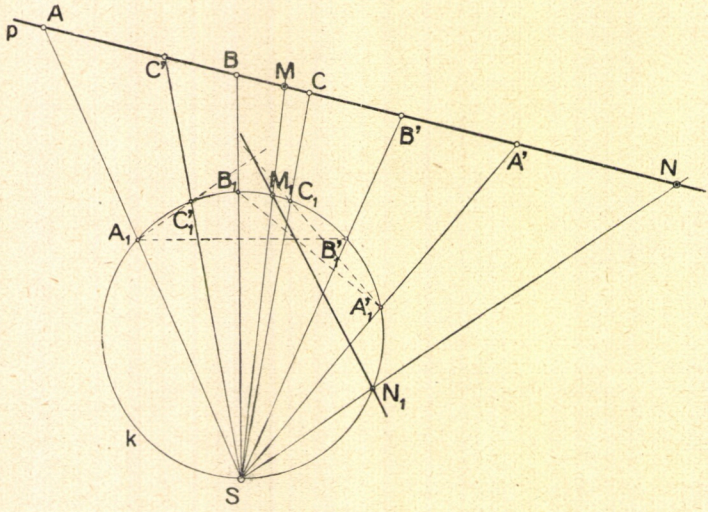
[8]) Desargovu větu o kuželosečkách svazku rozšířil *Ed. Weyr* takto: Kuželosečky svazku protínají kuželosečku, jdoucí dvěma základními body jeho, ve dvojicích involuce, jejíž střed leží na spojnici ostatních dvou bodů základních. Viz *Ed. Weyr*, Erweiterung des Satzes von Desargues nebst Anwendungen, Sitzungsberichte Akad. Wien, 1868; nebo Projektivní geometrie, p. 145.

[9]) Pomocí hořejšího lze dokázati, že *dvě kuželosečky v rovině, jež mají společný bod* (ne však dotyčný), *mají ještě aspoň druhý bod společný*, t. j. mají ještě nejméně jeden (reálný) a nejvýše tři společné body. A duálně. Dejme tomu totiž, že kuželosečky k a k' mají společný bod A (v němž nemají společnou tečnu); tečna kuželosečky k v bodě A ať protne k' v bodě B', a druhá tečna z B' ke k vedená ať se této dotýká v C a k' protíná v C'. Korespondence mezi paprsky té části svazku o středu B', jež k protínají, a body na jednom i druhém oblouku AC kuželosečky k, v níž každému paprsku přiřadíme incidentní s ním bod na uvedeném oblouku kuželosečky, jest obapolně jednoznačná a uspořádaná; totéž platí o korespondenci mezi paprsky těmi a body oblouku AC' (neobsahujícího B') na k', takže i korespondence mezi body oblouku AC' a každého z oblouků AC jest uspořádaná. Přiřadíme-li dále navzájem ty body obou kuželoseček k a k', jež leží na témž paprsku svazku o středu A, uvedeme tím v obapolně jednoznačnou uspořádanou korespondenci body obou oblouků AC na k a obou oblouků $B'D'$ na k', kde D' je průsečík přímky AC s k'. Tak dospíváme k uspořádané jednojednoznačné příbuznosti mezi body na oblouku AC' a na obloucích $B'D'$, jež jsou částmi kuželosečky k', a odtud k existenci samodružného bodu této korespondence, jenž je společným bodem uvažovaných kuželoseček. Viz *E. Maccaferri*, Su di un teorema fondamentale relativo agli elementi comuni di due coniche in un piano, Rendiconti Circolo mat. Palermo 9 (1895); *F. Enriques*, Lezioni di geometria proiettiva, p. 312.

Pomocí projektivností na kuželosečce lze výhodně studovati rozmanité projektivnosti v útvaru jednomocném a jejich soustavy; tak učinili soustavně zejména *C. Segre*, Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux, Journal r. ang. Math. 100 (1886), a *C. F. Aschieri*, Delle omografie sopra una conica e dei loro sistemi lineari, Rendiconti Ist. Lomb. (2) 22 (1889).

[10]) Jak jsme učinili v základních útvarech jednomocných, tak můžeme vzhledem k předcházejícímu také v útvarech kvadratických, spec. v řadě bodové na kuželosečce, prvkům útvaru přiřaditi čísla způsobem obapolně jednoznačným: Zvolíme na kuželosečce tři body P_0, P_1 a P_∞ jako základní; k bodům P_x a P_y definujeme součtový bod P_{x+y} jako bod sdružený k P_0 v involuci se samodružným bodem P_∞ a s dvojicí sdružených bodů P_x, P_y

45. Úlohy druhého stupně. *a*) Při konstrukci projektivnosti dvou soumístných řad bodových na kuželosečce (v čl. 44*b*) nalezli jsme v průsečících osy projektivnosti řad těch s kuželosečkou samodružné body této projektivnosti. Na tuto konstrukci jest možno převésti *sestrojení samodružných prvků projektivnosti* u kterýchkoli jiných *dvou soumístných útvarů kvadratických*: u kvadratických svazků paprskových v trsu a u kvadratických řad zborcených přejdeme k průseku s rovinou



Obr. 56.

(nejdoucí vrcholem plochy kuželové, resp. přímkou plochy zborcené), u kvadratických svazků paprskových v rovině přejdeme k perspektivním kvadratickým řadám bodovým, konečně u kvadratických svazků rovinových přejdeme k průseku s rovinou jako prve, čímž obdržíme případ předcházející.

Také *samodružné prvky projektivnosti dvou soumístných útvarů lineárních* (základních) sestrojíme pomocí samodružných bodů dvou perspektivních k nim řad bodových na kuželosečce; stačí ovšem omeziti

(je to tedy bod, v němž přímka, spojující P_0 s průsečíkem tečny v bodě P_∞ a spojnice P_xP_y, protíná po druhé kuželosečku); k bodům P_x a P_y definujeme součinový bod P_{xy} jako bod sdružený k P_1 v involuci s dvojicemi sdružených bodů P_0, P_∞ a P_x, P_y (což je bod, v němž kuželosečku po druhé protíná přímka, spojující P_1 s průsečíkem spojnic P_0P_∞ a P_xP_y). Stupnice takto na kuželosečce zavedená jest projektivní se stupnicí, stanovenou dříve v přímé řadě bodové.

[11]) Samodružné prvky eliptické projektivnosti v přímkové zborcené řadě kvadratické jsou sdruženě imaginární přímky druhého druhu (bez reálného bodu a reálné roviny), jež tedy lze také takto definovati.

se na dvě projektivní soumístné přímé řady bodové (protože lineární svazky paprskové a svazky rovinové protneme v řadách bodových).

Jsou-li dvě projektivní řady bodové na přímce p dány (obr. 56) třemi dvojicemi bodů korespondujících $ABC \barwedge A'B'C'$, promítneme tyto body na pomocnou kuželosečku k z libovolného bodu jejího S do bodů A_1, B_1, C_1, resp. A'_1, B'_1, C'_1; sestrojíme osu projektivnosti kvadratických řad $A_1B_1C_1 \barwedge A'_1B'_1C'_1$ (osu bodů $(XY', X'Y)$) a zjistíme její průsečíky M_1, N_1 s touto kuželosečkou, jež jsou samodružnými body řad právě uvedených; tyto body promítneme konečně z bodu S na přímku p do hledaných bodů M, N, samodružných v dané projektivnosti dvou soumístných přímých řad bodových. Konstrukce zůstává v platnosti i ve speciálním případě, kdy daná projektivnost bodových řad na p je involuční, určená dvěma dvojicemi AA' a BB' sdružených prvků; sestrojíme napřed na pomocné kuželosečce osu projektivnosti jejich průmětů jako spojnici průsečíků $(AB', A'B)$ a $(AB, A'B')$ i její průsečíky s kuželosečkou.

Toto řešení úlohy sestrojiti samodružné prvky dvou projektivních soumístných útvarů základních jest velmi důležité; úloha ta, které bylo vzpomenuto už v odd. III., jež však tam vyřízena býti nemohla, řeší se sice pravítkem, avšak *s pomocí narýsované kuželosečky*. Dva projektivní soumístné útvary jednomocné mají, jak víme, dva prvky samodružné (reálné různé nebo splývající nebo imaginární); jim příslušejí dva průsečíky pomocné kuželosečky s osou projektivnosti. Má tedy tato úloha *dvě řešení* (jest dvojznačná); analyticky vyjádřena jest, jak bylo uvedeno, rovnicí stupně druhého (o dvou kořenech). Konstruktivní úloha, vedoucí ke dvěma prvkům, sluje úlohou *druhého stupně* čili *kvadratickou*.

Proti tomu konstruktivní úloha, vedoucí k jednomu prvku, sluje úlohou *prvního stupně* čili *lineární*; úlohy prvního stupně jsou řešitelny *pouhým pravítkem* (bez dalších předpokladů jen tyto, jejich řešení sestává v podstatě z průmětů a řezů základních útvarů jednomocných). Analyticky jsou úlohy lineární vyjádřeny rovnicemi 1. stupně. Takovými jsou všechny konstruktivní úlohy dříve uvedené, na př. sestrojiti přímku určenou dvěma body jako průsečíky dvou daných dvojic přímek, sestrojiti projektivní řady bodové nebo svazky paprskové, sestrojiti čtvrtý prvek harmonický v řadě nebo svazku k daným třem, sestrojiti druhý samodružný bod v projektivnosti dvou soumístných útvarů jednomocných při jednom daném, sestrojiti druhý průsečík kuželosečky s přímkou jdoucí daným bodem jejím a pod.

Můžeme říci, že úlohy druhého stupně lze řešiti lineárně (t. j. pouhým pravítkem), je-li v rovině dána narýsovaná kuželosečka.[1])[2])

[1]) Při praktické konstrukci (rýsování) volíme ovšem z kuželoseček kružnici: užíváme kružítka, rýsujíce jím pomocnou kružnici ve vhodné poloze a velikosti, nebo používáme kružnice jednou narýsované. Hořejší konstrukce samodružných bodů dvou projektivních soumístných řad bo-

b) Z četných úloh kvadratických, jež se převádějí na sestrojení dvou samodružných bodů projektivních soumístných řad bodových na přímce, budiž uvedeno několik významných.

Především si všimněme úlohy *sestrojiti průsečíky přímky s kuželosečkou nenarýsovanou*, danou třebas pěti jejími body (A, B, C, D, E, z nichž žádné tři neleží v přímce).[3]) Promítneme-li (obr. 57) ze dvou bodů daných, na př. A, B, ostatní tři na danou přímku, obdržíme na ní tři dvojice bodů, průsečíků s paprsky $A\,(CDE)$ a $B\,(CDE)$; tyto dvojice stanoví na přímce té projektivnost, jejíž samodružné body jsou hledanými průsečíky (M, N) přímky s danou kuželosečkou. Duálně lze řešiti nebo na toto řešení převésti duální úlohu v rovině, sestrojiti totiž ke kuželosečce nenarýsované (dané třeba pěti tečnami) tečny, jdoucí daným bodem v její rovině. Převodem na hořejší úlohu určí se také průsečíky dané přímky s kuželovou plochou kvadratickou nebo s kvadratickou plochou zborcenou. Je-li zborcená plocha kvadratická dána třemi přímkami q_1, q_2, q_3 své řady řídicí, můžeme průsečíky dané přímky s řadou tou nalézti tím způsobem, že řadu bodovou (třebas) na přímce q_3 promítneme z přímek q_1 a q_2 na přímku danou a zjistíme samodružné body projektivnosti na této přímce.[4])

---

dových (na přímce) pochází od *Steinera*. Viz *J. Steiner*, Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, 1833.

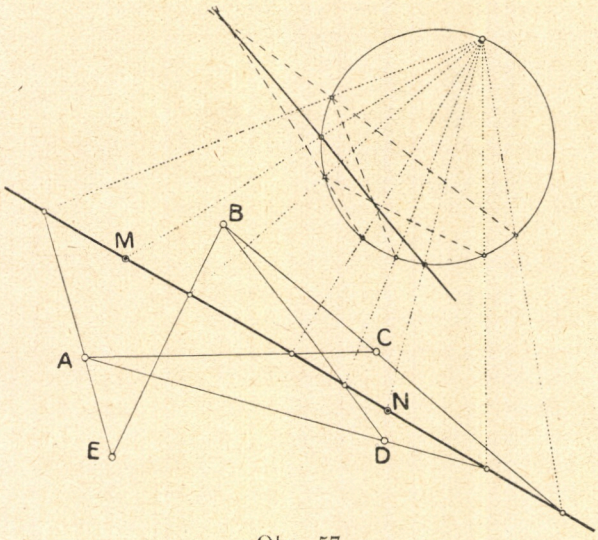
[2]) Metrické úlohy 1. stupně (úlohy s jedním řešením v afinní nebo podobnostní geometrii; na př. sestrojiti daným bodem přímku rovnoběžnou, resp. kolmou k přímce dané) jsou řešitelné pouhým pravítkem jen tehdy, je-li v rovině dána nevlastní přímka její, resp. ještě absolutní involuce na ní. Tomu je vyhověno, jsou-li tam narýsovány dvě dvojice rovnoběžek čili rovnoběžník, resp. ještě dvě dvojice přímek kolmých nebo celkem čtverec.

Obdobně metrické úlohy 2. stupně lze řešiti lineárně, je-li v rovině vedle kuželosečky, spec. kružnice, dána přímka nevlastní a její involuce absolutní; všechny tyto předpoklady jsou splněny, je-li v rovině narýsována kružnice se svým středem. (Proti tomu u projektivních úloh 2. stupně není středu kružnice potřeba, jak upozorňuje také *R. Sturm*, Über den festen Kreis bei Aufgaben zweiten Grades, Jahresbericht D. Math. Ver. 22, 1913.)

[3]) O dané přímce ovšem předpokládáme, že neprochází žádným z daných bodů (prochází-li, je úloha lineární, řešitelná podle dřívějšího několika způsoby).

[4]) Samodružných prvků (reálných nebo imaginárních) dané projektivnosti můžeme jako prvků daných užíti k dalším konstrukcím. Na př. kuželosečku, určenou třemi body (A, B, C) a dvěma samodružnými prvky dané projektivnosti řad bodových na přímce p (stanovenými touto projektivností), sestrojíme se zřetelem k hořejšímu: Jako průměty bodů kuželosečky ze dvou jejích bodů na libovolnou přímku v její rovině tvoří dvě projektivní soumístné řady bodové, jejichž samodružné body jsou společnými body přímky té a kuželosečky, tak obráceně jestliže z jednoho bodu kuželosečky promítneme dva její body na přímku její roviny a tytéž body kuželosečky spojíme s body, jež oněm dvěma odpovídají v projektivnosti právě uvedené, protínají se tyto spojnice v bodě téže kuželosečky. Protneme tedy přímku p spojnicemi AB a AC v bodech B_1 a C_1, k těmto bodům sestrojíme body v dané projektivnosti korespondující B'_1 a C'_1, načež

Stejným způsobem řeší se úloha *sestrojiti u dvou kuželoseček s dvěma* (různými reálnými) *body společnými další dva průsečíky jejich.* Z daných bodů společných promítneme body jedné kuželosečky na druhou a sestrojíme osu projektivnosti obou soumístných řad, jež takto obdržíme; její průsečíky s kuželosečkou tou jsou také průsečíky obou kuželoseček. Obě kuželosečky mohou býti dány každá pěti svými prvky.



Obr. 57.

Podobně řešíme úlohu *sestrojiti přímku protínající čtyři dané přímky mimoběžné* (a, b, c, d). Zvolíme dvě z přímek těch (třebas) a, b za osy svazků rovinových, jimiž řadu bodovou na přímce c (tři zvolené body) promítneme na přímku d; dvěma samodružnými body projektivních těchto řad na d procházejí dvě přímky úloze vyhovující.

Kvadratická úloha *sestrojiti kuželosečku, jdoucí čtyřmi danými body* $(A, B, C, D$, z nichž žádné tři neleží v přímce) *a dotýkající se dané přímky* (e, o které předpokládáme, že neprochází žádným z daných bodů) převede se pomocí Desargovy věty na konstrukci samodružných bodů involuční projektivnosti na přímce e; tato involuce je tam určena průsečíky dvojic protějších stran čtyřrohu $ABCD$ s přímkou e, a samodružný bod její je pátým bodem hledané kuželosečky.[5])

sestrojíme bod (B'_1B, C'_1C): svazek paprskový o tomto středu a svazek o středu A, jejichž projektivnost je určena projektivností řad na p, vytvořují hledanou kuželosečku.

[5]) Metricky speciálním případem této konstrukce jest úloha *sestrojiti parabolu jdoucí čtyřmi danými body v rovině.*

Zajímavá jest úloha *sestrojiti při daných dvou* (jednoduchých) *n-úhelnících n-úhelník jednomu vepsaný a druhému opsaný*. Máme-li totiž vésti n přímek tak, aby k-tá procházela daným bodem P_k a protínala přímku následující na dané přímce p_k (pro k od 1 do n, při čemž přímkou následující po přímce n-té je přímka první), vedeme bodem P_1 tři přímky, jež protnou přímku p_n v bodech A, B, C a přímku p_1 v bodech A_1, B_1, C_1; tyto body A_1, B_1, C_1 promítneme z bodu P_2 na přímku p_2, jejich průměty z P_3 na p_3, atd., konečně průměty na p_{n-1} sestrojené promítneme z bodu P_n na přímku p_n do bodů A', B', C'. Samodružné body projektivnosti $ABC \barwedge A'B'C'$ (jsou-li reálné) jsou vrcholy hledaných n-úhelníků na p_n, od nichž dospějeme ke stranám a k vrcholům na ostatních přímkách.

Podobná je úloha *sestrojiti n-úhelník dané kuželosečce vepsaný a danému n-úhelníku opsaný*. Mají-li vrcholy hledaného n-úhelníku ležeti na kuželosečce k a strany jeho procházeti pořadem body P_h, určíme na k projektivnost $ABC \barwedge A'B'C'$, promítajíce libovolné tři body A, B, C na k z bodu P_1 do bodů A_1, B_1, C_1 na kuželosečce k (jež oněm odpovídají v projektivnosti involuční o středu P_1), tyto z P_2 do A_2, B_2, C_2 na k, atd.; samodružné body uvedené projektivnosti jsou vrcholy hledaných n-úhelníků.[6])

U dvou involucí, daných na přímce p, *sestrojíme společnou dvojici* takto: Promítneme obě involuce na pomocnou kuželosečku a sestrojíme středy těchto dvou involucí kvadratických řad bodových (jimiž procházejí spojnice vždy dvou bodů sobě odpovídajících v jedné nebo druhé projektivnosti involuční); přímka spojující tyto středy protne kuželosečku v bodech, jež jsou zajisté sdruženy v obou involucích bodových řad na kuželosečce. Odtud stačí vrátiti se projekcí na přímku p.

U daných dvou involucí téhož typu na dvou různých přímkách (p, q) *určíme bod, z něhož se jedna v druhou promítá*, tím, že na přímce spojující body P a Q, jež odpovídají bodu pq na p, resp. na q, určíme k libovol-

[6]) Důležitý úkol nalézti *mnohoúhelník dané kuželosečce* k_1 *vepsaný a jiné kuželosečce dané* k_2 *opsaný* byl předmětem četných úvah (synthetických i analytických); *mnohoúhelníky*, úloze vyhovující, slují *Ponceletovy*, a jejich existence závisí na vzájemné poloze kuželoseček k_1 a k_2. Platí zde všeobecně: Jestliže všechny vrcholy mnohoúhelníku leží na k_1 a všechny strany jeho až na jednu se dotýkají k_2, obaluje zbývající strana kuželosečku, příslušnou do svazku určeného kuželosečkami k_1 a k_2; a duálně. Existuje-li při daných dvou kuželosečkách k_1 a k_2 jeden n-úhelník úloze vyhovující, existuje neomezený počet takových n-úhelníků. K informaci o této úloze viz *G. Loria*, I poligoni di Poncelet, Torino 1889, a téhož doplňující Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet, Bibliotheca mat. (2) 3 (1889); Encyklopédie sc. math., III 17: Coniques (1911), p. 104 a n.; věcně (se stránky synthetické) *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften I, p. 288 a n.; *Ph. Männchen*, Neue Schliessungsprobleme, Archiv Math. Phys. (3) 7 (1904). Zobecněním se zabývali m. j. *Em. Weyr*, Über Involutionen höherer Grade, Journal r. ang. Math. 72 (1870); *B. Gambier*, Sur une généralisation des polygones de Poncelet, Comptes r. Acad. Paris 179 (1924, 3 články).

němu bodu A bod sdružený A' jako průsečík její se spojnicí bodů A'_1 a A'_2, které v daných involucích na p a na q odpovídají průsečíkům A_1 a A_2 těchto přímek s přímkou, vedenou bodem A; stejnou cestou jako AA' sestrojené další dvojice BB', CC', . . . na PQ jsou sdruženy v projektivnosti, jejíž samodružné body jsou body hledanými. Protože však projektivnost tato je involuční (ježto si v ní odpovídají body P a Q obapolně), stačí vedle dvojice PQ jedna dvojice (AA') k jejímu stanovení.[7])

46. Útvary vytvořené projektivními útvary lineárním a kvadratickým. Prvky určené dvojicemi sdružených prvků dvou projektivních útvarů elementárních, jednoho lineárního a druhého kvadratického, vytvořují jednak opět tyto útvary, jednak útvary nové.[1])

a) Lineární svazek paprskový a projektivní k němu kvadratický svazek paprskový, ležící v téže rovině, jejichž dva společné paprsky odpovídají sobě samým, vytvořují průsečíky sdružených paprsků lineární řadu bodovou, k oběma perspektivní.

Lineární řada bodová a projektivní k ní kvadratická řada bodová, ležící v téže rovině, jejichž dva společné body odpovídají sobě samým, vytvořují spojnicemi bodů sdružených lineární svazek paprskový, k oběma perspektivní.

Abychom dokázali větu (třebas) na straně pravé, označme společné body obou řad $A = A'$, $B = B'$, bodu C řady přímé odpovídající bod kuželosečky pak C' (takže platí $ABC \barwedge A'B'C'$); spojnice CC' ať protne kuželosečku (po druhé) v bodě S. Spojnice sdružených bodů obou řad tvoří lineární svazek paprskový o středu S; neboť svazek tohoto středu je perspektivní jednak s řadou ABC na přímce, jednak s řadou $A'B'C'$

[7]) Konstruktivní úloha n-tého stupně je taková, jež vede (obecně) k n prvkům (a kterou nelze redukovati na sled úloh stupňů nižších). Úlohu 3. stupně jest vždy možno převésti na stanovení průsečíků dvou kuželoseček s jedním společným bodem, úlohu 4. stupně pak na stanovení průsečíků dvou kuželoseček bez známých bodů společných. Úlohy 3. a 4. stupně lze řešiti pravítkem a kružítkem, je-li dána narýsovaná kuželosečka (jež není kružnicí). Viz *S. Smith*, Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques (s dodatkem), Annali mat. (2) 3 (1869); *H. Kortum*, Über geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades, Bonn 1869. Řešení úloh těch pravítkem pomocí narýsované křivky 3. stupně vyšetřují *F. London*, Die geometrischen Constructionen dritten und vierten Grades, ausgeführt mittelst der geraden Linie und einer festen Curve dritter Ordnung, Zeitschrift Math. Phys. 41 (1896); *F. Ferrari*, Die geometrische Lösung der Aufgaben dritten und vierten Grades mittelst des Lineals und einer festen Kurve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt oder reellem Doppelpunkte, Dissertation Münster 1909; *T. Kubota*, Zur Theorie der geometrischen Konstruktionen, Reports Tôhoku univ. Sendai 11 (1922).

[1]) O útvarech, vznikajících ze dvou projektivních útvarů elementárních, z nichž jeden nebo oba jsou kvadratické, pojednávají na př. *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage I, p. 126 a násl.; *W. Fiedler*, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage III.

na kuželosečce, dvojicemi sdružených bodů AA', BB', CC' je pak projektivnost obou řad určena.

Dva projektivní svazky paprskové téže roviny, jeden lineární a druhý kvadratický, jejichž jeden společný paprsek odpovídá sobě samému, vytvořují (průsečíky paprsků sdružených) kvadratickou řadu bodovou, k oběma perspektivní.

Dvě projektivní řady bodové téže roviny, jedna lineární a druhá kvadratická, jejichž jeden společný bod odpovídá sobě samému, vytvořují (spojnicemi sdružených bodů) kvadratický svazek paprskový, k oběma perspektivní.

Věty tyto vyplývají snadno z jiných vět:

Dva projektivní svazky rovinové, lineární a kvadratický, jež nejsouce v témže trsu mají jednu rovinu společnou sobě samé odpovídající, vytvořují kvadratickou řadu přímkovou (k oběma perspektivní).

Dvě projektivní řady bodové, lineární a kvadratická, jež nejsouce v téže rovině mají jeden bod společný sobě samému odpovídající, vytvořují kvadratickou řadu přímkovou (k nim oběma perspektivní).

Neboť odpovídají-li (v případě na straně pravé) bodům A, B, C řady lineární body A', B', C' řady kvadratické, při čemž je $A = A'$, jest touto bodovou kuželosečkou a spojnicemi BB', CC' určena přímková řada kvadratická; vytvořena je totiž dvěma svazky rovinovými s osami BB' a CC', perspektivními k řadě na kuželosečce. Tato přímková řada je perspektivní k řadě kvadratické podle svého vzniku a také k řadě přímé, jež s ní má společné tři body A, B, C.

Protože rovina, neprochází-li vrcholem rovinového kužele kvadratického, protíná jej v přímkové kuželosečce, a neprochází-li přímkou kvadratické řady zborcené, protíná ji v bodové kuželosečce, vyplývá z uvedené věty:

Lineární svazek rovin a projektivní k němu kvadratický svazek paprskový v rovině, jehož jeden paprsek leží v korespondující rovině onoho, vytvořují (perspektivní k nim) kvadratickou řadu bodovou.

Protože z bodu, neleží-li v rovině bodové kuželosečky, promítá se tato přímkovým kuželem kvadratickým, a neleží-li na přímce kvadratické řady zborcené, promítá se tato rovinovým kuželem kvadratickým, plyne z uvedené věty:

Lineární řada bodová a projektivní k ní kvadratický svazek paprskový v trsu, jehož jeden paprsek obsahuje korespondující bod oné řady, vytvořují (perspektivní k nim) kvadratický svazek rovinový.

Od těchto vět dospějeme pak bezprostředně k větám hořejším.

b) Vezměme nyní v úvahu dva projektivní útvary, lineární a kvadratický, v obecné poloze v rovině.[2])

Dva projektivní svazky paprskové, lineární a kvadratický, v téže rovině ležící, vytvořují průsečíky svých sdružených paprsků čáru 3. stupně (*kubickou řadu bodovou v rovině*). Sluje tak proto, že libovolná přímka roviny ji protíná (nejvýše) ve třech bodech.

Dvě projektivní řady bodové, lineární a kvadratická, v téže rovině ležící, vytvořují spojnicemi svých sdružených bodů čáru 3. třídy (*kubický svazek paprskový v rovině*). Jmenuje se tak proto, že libovolným bodem roviny procházejí (nejvýše) tři její přímky.

Větu na pravé straně dokážeme takto: Lineární svazek paprskový o středu S, perspektivní k dané lineární řadě bodové r, je projektivní k dané řadě kvadratické k. Avšak lineární svazek paprskový, projektivní (ne však perspektivní) ke kvadratické řadě bodové, má nejvýše tři paprsky (nejméně jeden) jdoucí korespondujícími body řady té. Promítneme-li totiž řadu k perspektivním lineárním svazkem paprskovým o středu K (ležícím na její kuželosečce), vytvoří svazky S a K křivku 2. stupně; tato prochází ovšem body S a K, má pak s k společný každý a jenom bod, ležící na odpovídajícím jemu paprsku svazku S. Kdyby těchto bodů bylo více než tři, měly by obě kuželosečky (právě vytvořená a daná) mimo K čtyři body společné, pročež by byly identické (a svazek S byl by perspektivní k svazku k). Ovšem mají tyto kuželosečky mimo K aspoň jeden bod společný (který také může splývati s K, takže se v bodě tom obě kuželosečky dotýkají); jest proto aspoň jeden paprsek svazku S incidentní s korespondujícím bodem řady k. Ty paprsky svazku S (se středem v libovolném bodě roviny), perspektivního k řadě r, jež procházejí sdruženými body řady k, jsou přirozeně přímkami svazku vytvořeného oběma řadami r a k.[3])

Jestliže ve speciálním případě mají řady r a k jeden společný bod sobě korespondující, obsahuje každý paprsek bodem tím jdoucí dva splývající sdružené body obou řad; kubický svazek se tu rozpadá v uvedený svazek lineární a ve svazek kvadratický. Jestliže pak mají řady r a k dva společné body sobě odpovídající, rozpadá se kubický svazek ve tři svazky lineární.[4])[5])

[2]) Útvary, jejichž vytvoření projektivními útvary elementárními zde a v dalším bude uvedeno, slují *racionální* (ježto jejich prvky lze jednoznačně přiřaditi prvkům vytvořujícího útvaru jednomocného).

[3]) O uvedeném vytvoření čáry 3. třídy (jež je 4. stupně) a duální čáry 3. stupně (jež je 4. třídy) viz *H. Schröter*, Über die Erzeugnisse krummer projektivischer Gebilde, Journal r. ang. Math. 54 (1857); *Em. Weyr*, Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde, 1870, p. 127 a n.

[4]) Čára 3. stupně, vytvořená lineárním svazkem S a čarou 2. třídy k, prochází (sledujeme-li její body spojitě při vzniku) bodem S dvakrát, bod S je *dvojnásobným bodem* křivky vytvořené: leží-li S vně čáry k, má v něm křivka 3. stupně dvě reálné tečny různé (tečny kuželosečky k),

K oběma větám právě dokázaným, jež jsou v rovině navzájem duální, můžeme připojiti dvě věty o kubických kuželech, jež promítají čáry kubické a vznikají z útvarů, promítajících (z bodu) uvedené útvary vytvořující; tyto kužele jsou v trsu navzájem duální:

Dva projektivní svazky rovinové, lineární a kvadratický, s osou a vrcholem incidentními, vytvořují průsečnicemi sdružených rovin *kužel* (kuželovou plochu) *3. stupně* (kubický svazek paprskový v trsu).

Dva projektivní svazky paprskové, lineární a kvadratický, téhož trsu vytvořují rovinami svých sdružených paprsků *kužel* (kuželovou plochu) *3. třídy* (kubický svazek rovinový v trsu).

c) Obraťme se konečně ke dvěma útvarům v prostoru.

Dvě projektivní řady bodové, lineární a kvadratická, jež neleží v téže rovině (a nemají společný bod sobě samému odpovídající), *vytvořují spojnicemi svých sdružených bodů přímkovou řadu* (čili *osnovu*) *kubickou*. Tak vznikající soustava přímek sluje kubická, protože libovolná přímka protíná (nejvýše) tři její přímky.

Neboť svazek rovin s osou v libovolné přímce l, perspektivní k dané lineární řadě r, je projektivní k dané kvadratické řadě k a obsahuje proto nejvýše tři roviny jdoucí sdruženými body obou řad r a k (a aspoň jednu takovou rovinu); platí totiž o svazku paprskovém, v němž uvedený svazek rovinový rovinu řady k protíná a jenž je tedy také projektivní k řadě k, jak bylo v odst. předešlém dokázáno, že má nejvýše tři přímky (a aspoň jednu), jdoucí korespondujícími body řady k.

V rovině řady k je obsažena jedna přímka vytvořené řady přímkové. V rovině jdoucí přímkou r a protínající k jsou obsaženy dvě přímky kubické řady; z jejich průsečíku S promítají se řady r a k lineárním a kvadratickým svazkem paprskovým v trsu. Tyto dva svazky paprskové jsou ovšem projektivní (platí to o řadách r a k) a, majíce dva společné paprsky sobě samým odpovídající, vytvořují lineární svazek rovinový (jak pro obdobný případ bylo dříve dokázáno). Osa s tohoto lineárního svazku rovin, perspektivního k řadám r a k, protíná ovšem k; protíná všechny přímky řady kubické a obsahuje průsečíky všech dvojic přímek řady, jež leží s přímkou r v téže rovině. Uvažovaná kubická řada přím-

bod S sluje *uzlem* křivky 3. stupně; leží-li S na čáře k, má v něm křivka 3. stupně dvě tečny splývající, bod S sluje *hrotem* křivky té; leží-li konečně S uvnitř k, sluje *isolovaným bodem* křivky 3. stupně bez reálných tečen. Duálně pro čáru 3. třídy, duálně vytvořenou. Vlastnosti uvažované čáry 3. stupně (hlavně) z uvedeného vytvoření odvozuje *H. Drasch*, Beitrag zur synthetischen Theorie der ebenen Curven III. Ordnung mit Doppelpunkt, Sitzungsberichte Akad. Wien 85 (1882); také *D. N. Lehmer*, Constructive theory of the unicursal cubic by synthetic methods, Transactions Amer. math. soc. 3 (1902).

[5]) Na racionální křivce 3. stupně v rovině zavádí projektivnost a její vlastnosti odtud vyšetřuje *Em. Weyr*, Über Punktsysteme auf Curven 3ter Ordnung, Zeitschrift Math. Phys. 15 (1870); také Über die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte, Math. Annalen 3 (1870).

ková *jest* tedy *vytvořena* také *paprsky, jež protínají kuželosečku k a dvě mimoběžné přímky r, s, z nichž jedna s protíná čáru k.*

Tuto kubickou řadu přímkovou *vytvořují* však rovněž *svými průsečnicemi dva projektivní svazky rovinové, lineární a kvadratický* (obecně položené). Lineárním svazkem takovým je svazek osy *s* (na níž se přímky řady kubické po dvou protínají), kvadratickým svazkem pak svazek, promítající z bodu na přímce kubické řady (mimo *r* a *s*) její přímky. Neboť projektivní řady *r* a *k* promítají se z uvedeného bodu dvěma projektivními svazky paprskovými, lineárním a kvadratickým, se společným paprskem sobě odpovídajícím; jejich výtvor je tedy (obdobně jako v případech dříve uvedených) rovinový svazek kvadratický. Tento kvadratický svazek rovin je k onomu lineárnímu projektivní, protože oba jsou perspektivní k řadám *r* a *k*; průsečnice obou těchto svazků vytvořují řadu právě uvažovanou.

Toto druhé vytvoření téže přímkové řady kubické je duální k prvnímu; jest proto řada ta *soběduální*. Souhrn bodů ležících na přímkách zborcené kubické řady (a duálně souhrn rovin přímkami těmi jdoucích) tvoří *přímkovou zborcenou plochu kubickou.*

Z libovolného bodu v prostoru promítá se zborcená řada kubická kubickým svazkem rovinovým v trsu (kuželem 3. třídy); tento vzniká ze dvou projektivních svazků paprskových, lineárního a kvadratického, jež promítají řady *r* a *k*.

Libovolná rovina v prostoru protíná zborcenou řadu kubickou v kubické řadě bodové (čáře 3. stupně); tato vzniká ze dvou projektivních svazků paprskových, lineárního a kvadratického, jež jsou průseky obou rovinových svazků, nahoře uvedených.[6])[7])

47. Křivka třetího stupně v prostoru (a útvar duální). *a*) O třech lineárních svazcích rovinových nebo řadách bodových, jež jsou po dvou projektivní, platí:

Tři projektivní (lineární) svazky rovinové[1]) *vytvořují průsečíky svých*

Tři projektivní (lineární) řady bodové[1]) *vytvořují rovinami svých*

[6]) Každý řez zborcené plochy kubické na rovině obecně položené má v průseku s přímkou *s* svůj dvojnásobný bod. Kdežto tedy body přímky *s* jsou dvojnásobnými body plochy kubické, jsou roviny jdoucí přímkou *r* jejími rovinami dvojnásob tečnými.

Můžeme rozeznávati tři druhy zborcených řad (ploch) kubických podle toho, protíná-li *r* rovinu čáry *k* uvnitř nebo vně kuželosečky té nebo spec. na ni (v tomto zvláštním případě splyne přímka *s* s přímkou *r*).

[7]) Zborcenou řadu (plochu) kubickou lze také s výhodou vytvořiti spojnicemi sdružených bodů nebo rovin dvou řad bodových resp. svazků rovinových s mimoběžnými osami v korespondenci (1, 2)-značné. Viz *Em. Weyr*, Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung, 1870.

[1]) Projektivnosti uvedených tří svazků rovinových (nebo duálně řad bodových) s osami p, p', p'' jsou myšleny tak, že dvě z nich na př. projek-

sdružených rovin jednomocnou spojitou soustavu bodů, *prostorovou čáru 3. stupně*. Libovolná rovina v prostoru protíná totiž tento útvar (nejvýše) ve třech bodech.[2])

sdružených bodů jednomocnou spojitou soustavu rovin, *prostorovou čáru 3. třídy*. Libovolným bodem v prostoru procházejí totiž (nejvýše) tři roviny tohoto útvaru.

Předpokládejme zatím, že osy p, p', p'' daných projektivních svazků rovinových jsou mimoběžné a v projektivnosti obecné;[3]) že libovolná rovina v prostoru protíná vytvořenou čáru (nejvýše) ve třech bodech, dokážeme takto: Rovina, neprocházející žádnou z os p, p', p'', protíná vytvořující svazky rovinové ve třech svazcích paprskových o středech P, P', P''; svazky P a P' vytvořují čáru 2. stupně, rovněž svazky P a P''; obě tyto čáry, mající společný bod P, mají mimo něj (i když snad jsou zvrhlé) nejvýše tři další body společné (a aspoň jeden bod), jež jsou všechny a výhradně body, společnými uvažované rovině a vytvořené čáře.

Rovina jdoucí jednou z os p, p', p'', na př. osou p, má s vytvořenou čarou společný jeden bod, ležící mimo p (totiž průsečík svůj s přímkou, v níž se protínají dvě roviny svazků p' a p'', s rovinou tou v daných projektivnostech sdružené). Další dva body, společné rovině té a čáře 3. stupně, leží na p; jsou to samodružné body (neidentické) projektivnosti, indukované mezi body přímky p projektivností svazků p' a p''.

Odtud je patrno, že každá z přímek p, p', p'' obsahuje dva a jen dva body čáry 3. stupně, jež jsou ovšem (jako samodružné body dotčené projektivnosti) buď reálné různé nebo splývající nebo sdruženě imaginární. Taková *přímka, mající s prostorovou čarou 3. stupně společné dva body, sluje bisekantou* čáry té; spojuje buď dva reálné body na čáře (bisekanta skutečná) nebo dva imaginární body (bisekanta ideální) nebo je tečnou čáry, majíc s ní dva splývající body společné.[4])[5])[6])

---

tivnosti mezi svazky (řadami) p, p' a mezi svazky (řadami) p, p'' jsou zvoleny, třetí pak mezi svazky (řadami) p', p'' jest oněmi už stanovena.

[2]) Toto vytvoření čáry 3. stupně v prostoru udal po prvé *Chasles* r. 1837.

[3]) Při obecné poloze os p, p', p'' tří projektivních svazků rovinových jest vytvořená čára 3. stupně *pravá* (nezvrhlá, t. j. její části není ani kuželosečka ani přímka). Čára ta se však rozpadá v čáru 2. stupně a přímku (ji protínající), jsou-li vytvořující svazky rovin perspektivní k téže kuželosečce (tato a přímka, protínající kuželosečku tu i přímky p, p', p'', skládají zvrhlou čáru 3. stupně); rozpadá se ve tři přímky (z nichž jedna protíná ostatní dvě, navzájem mimoběžné), jsou-li vytvořující svazky rovin perspektivní k téže přímce (tato a dvě přímky, protínající přímku tu i přímky p, p', p'', tvoří dohromady zvrhlou čáru 3. stupně). Jestliže konečně v projektivnostech svazků rovinových p, p', p'' sobě odpovídají roviny, promítající tutéž přímku doplňkové řady přímkové na zborcené ploše kvadratické, vzniká ovšem jen tato zborcená řada kvadratická. V další úvaze vylučujeme tyto případy, kdy čára 3. stupně je degenerovaná.

[4]) Úhrnem můžeme bisekantu čáry 3. stupně definovati jako přímku takovou, že rovina jí procházející má s čarou mimo ni jediný bod společný.

b) Poněvadž dva projektivní svazky rovin s mimoběžnými osami vytvořují zborcenou řadu kvadratickou, můžeme hořejší vytvoření prostorové čáry 3. stupně upraviti na vytvoření lineárním svazkem rovin a projektivní k němu kvadratickou řadou přímkovou.

A protože dva a dva z uvedených svazků rovinových vytvořují přímkové řady kvadratické, dospíváme k větě: *Dvě zborcené plochy kvadratické se společnou přímkou protínají se* (mimo ni) *v prostorové čáře 3. stupně; a obráceně.*

Neboť mají-li dvě zborcené plochy kvadratické společnou přímku p, a je-li p' další přímka téže řady jako p na jedné z ploch, p'' pak další přímka téže řady jako p na druhé ploše, jsou svazky rovin s osami p a p', promítající doplňkovou řadu na prvé ploše, projektivní, rovněž tak svazky rovin s osami p a p'', promítající doplňkovou řadu přímkovou na ploše druhé. Proto body, společné oběma zborceným plochám mimo p, leží na čáře 3. stupně, vytvořené uvedenými třemi projektivními svazky s osami p, p', p''; čára ta může ovšem býti zvrhlá. Obráceně lze prostorovou čáru 3. stupně vždy obdržeti jako průsek dvou zborcených ploch kvadratických o společné přímce. Neboť je-li daná čára 3. stupně vytvořena třemi projektivními svazky rovin s osami p, p' a p'', vytvoří svazky p a p' jednu zborcenou řadu kvadratickou, svazky p a p'' druhou řadu, různou (v případě obecném) od prvé; na obou příslušných plochách zborcených leží uvažovaná čára, dalších pak společných bodů mimo čáru tu a přímku p obě uvedené plochy nemají.

Uvažovaná čára 3. stupně může býti, jak vidíme, vytvořena také rovinovým svazkem s osou p a kterýmikoli dvěma svazky rovin k němu projektivními, z nichž jeden má osu v přímkové řadě $[p']$ na jedné kvadratické ploše zborcené a promítá stejně jako p doplňkovou řadu $[q']$ této plochy, druhý pak má osu v přímkové řadě $[p'']$ na druhé ploše a promítá spolu s p doplňkovou její řadu $[q'']$. *Jsou* tedy (vzhledem k tomu, co bylo dříve uvedeno o přímkách p, p', p'') *všechny přímky řad* $[p']$ a $[p'']$ *bisekantami uvažované prostorové čáry 3. stupně.* Body této čáry promítají se z přímky p a z libovolné přímky řady $[p']$ nebo řady $[p'']$, tedy i ze dvou libovolných přímek těchto řad dvěma projektivními svazky rovin.

Proti tomu každá přímka kvadratické řady, doplňkové na jedné nebo druhé kvadratické ploše zborcené k řadě $[p']$ resp. $[p'']$, *protíná* uvažovanou čáru 3. stupně *v jediném bodě* (totiž v bodě, v němž ji protíná rovina jdoucí přímkou tou a přímkou p); taková přímka sluje

[5]) U pravé křivky 3. stupně nemůže se vyskytnouti přímka, jež by s ní měla tři body společné (protože by rovina, položená takovou přímkou a dalším bodem křivky, protínala tuto ve čtyřech bodech, což není možné).

[6]) Prostorová křivka 3. stupně promítá se z libovolného bodu prostoru do roviny v racionální čáru 3. stupně: podle toho, leží-li střed promítání mimo křivku na její skutečné bisekantě nebo na tečně nebo na bisekantě ideální, jest průmětem rovinná křivka kubická s uzlem resp. s hrotem resp. s bodem isolovaným.

proto *unisekantou prostorové čáry 3. stupně. Všechny přímky řad* $[q']$ *a* $[q'']$ *jsou unisekantami prostorové čáry 3. stupně*, jež je průsekem zborcených kvadratických ploch se společnou přímkou p.

c) Mějme na zřeteli libovolný bod prostorové čáry kubické, jež je průsekem dvou zborcených ploch kvadratických se společnou přímkou p, a dvě přímky bodem tím jdoucí, jednu z řady $[p']$ prvé plochy a druhou z řady $[p'']$ plochy druhé. Roviny promítající z těchto dvou přímek proměnlivý bod čáry kubické tvoří podle předešlého dva projektivní svazky rovin; a protože takové dva svazky vytvořují průsečnicemi sdružených rovin kužel 2. stupně, vidíme, že *prostorová čára 3. stupně se z libovolného bodu svého promítá kuželovou plochou kvadratickou.*

Vzhledem k tomu můžeme vytvoření prostorové čáry kubické ze tří projektivních svazků rovinových, nahrazené dříve vytvořením z lineárního svazku rovin a projektivní kvadratické řady zborcené, nahraditi také vytvořením z lineárního svazku rovin a projektivního kvadratického kužele přímkového.

Dva svazky rovinové, promítající ze dvou bisekant AB, AC prostorové čáry kubické proměnlivý bod její, jsou — jak bylo uvedeno — projektivní; rovněž jsou projektivní dva svazky rovin s osami v bisekantách CA, CD čáry té, promítají-li proměnlivý bod čáry: jsou tedy projektivními i svazky rovinové s osami AB a CD čili platí: *Proměnný bod prostorové čáry kubické promítá se z libovolných dvou* (skutečných) *bisekant čáry té dvěma projektivními svazky rovin.*[7])

Odtud pak vysvítá, že tři projektivní svazky rovin s osami v libovolných třech bisekantách prostorové čáry 3. stupně vytvořují tuto čáru, t. j. že tři přímky, jichž bylo při definici čáry jako os projektivních svazků rovinových použito, nemají pro čáru zvláštního významu, mohouce býti nahrazeny libovolnými třemi bisekantami; spec. nemusí býti mimoběžné.[8])

Konečně můžeme z hořejší úvahy odvoditi obdobnou větu pro kvadratické plochy kuželové, jaká byla uvedena pro zborcené plochy

---

[7]) Budiž vytčeno, že prostorovou čarou 3. stupně a dvěma jejími bisekantami prochází vždy a jediná kvadratická plocha přímková (v obecném případě zborcená); rovněž prostorovou čarou 3. stupně a jednou její unisekantou.

[8]) Zvolíme-li dva body na prostorové křivce 3. stupně a položíme-li jimi po jedné bisekantě křivky a, b, obdržíme jako útvar vytvořený dvěma projektivními svazky rovin s osami a, b zborcenou plochu kvadratickou (jsou-li a, b mimoběžné) nebo spec. kuželovou plochu kvadratickou (protínají-li se a, b v bodě křivky); obráceně každá přímková řada kvadratická nebo přímkový kužel kvadratický, jdoucí prostorovou křivkou kubickou, obsahuje po jedné přímce, procházející jedním a druhým bodem zvoleným. Odtud plyne, že prostorovou křivkou 3. stupně prochází ∞^2 přímkových ploch kvadratických, mezi nimi ∞^1 kvadratických ploch kuželových (prostorovou křivkou 3. stupně a jednou její bisekantou prochází ∞^1 přímkových ploch kvadratických).

kvadratické: *Dvě kuželové plochy kvadratické se společnou přímkou protínají se v prostorové čáře 3. stupně; a obráceně.*

Obrácená věta praví, že prostorová čára 3. stupně může býti pokládána za průsek dvou kuželových ploch 2. stupně, jež ji ze dvou bodů jejích promítají, nehledíme-li ke společné přímce ploch těch. Vskutku zvolíme-li na čáře body A, C za vrcholy kuželů a bisekanty čáry AB, AC za přímky jedné plochy, bisekanty CA, CD za přímky plochy druhé, vytvořují dva svazky rovin s onou dvojicí os, promítající proměnlivý bod čáry, jeden kužel, dva svazky rovin s touto dvojicí os, promítající týž bod čáry, druhý kužel; mimo přímku AC mají tyto plochy společné pouze body čáry kubické, od které jsme vyšli (neboť každý společný bod obou ploch, neležící na přímce AC, leží na přímce jednoho kužele i na přímce kužele druhého, pročež leží na sdružených rovinách jdoucích přímkami AB, AC, CD, je tudíž bodem čáry kubické, vytvořené třemi projektivními svazky rovin o těchto osách). Obráceně dvě dané kuželové plochy 2. stupně se společnou přímkou lze vytvořiti dvěma dvojicemi projektivních svazků rovinových, z nichž jeden (s osou ve společné přímce) je dvojicím těm společný; tyto tři projektivní svazky rovin vytvořují kubickou čáru prostorovou. Čára ta se nerozpadá, nerozpadají-li se obě plochy kuželové nebo nemají-li plochy kuželové podél společné přímky společnou rovinu tečnou.[9])

d) *Na zborcené ploše kvadratické existují dvě prostorové čáry 3. stupně, jež procházejí pěti body na ploše libovolně položenými.* Neboť spojíme-li dva z pěti bodů těch přímkou s (na ploše neležící) a přiřadíme-li svazek rovin s osou s jedné nebo druhé soustavě přímek zborcené plochy tak, že roviny promítající z přímky s tři zbývající body dané A, B, C odpovídají přímkám téže soustavy na ploše, jež jdou bodem A, resp. B, resp. C, stanou se tím svazek rovin s a jedna, potom druhá zborcená řada kvadratická projektivními, takže vytvořují tedy dvě (a pouze dvě) čáry kubické, na dané ploše ležící a danými pěti body procházející. Každá z obou přímkových řad plochy zborcené skládá se z bisekant jedné z obou čar kubických. Existují tudíž na zborcené ploše kvadratické dvě soustavy po ∞^5 kubických čar prostorových.

Leží-li dvě (různé) kubické čáry prostorové na zborcené ploše kvadratické a mají-li tutéž řadu přímek plochy té za bisekanty, mohou tedy míti nejvýše čtyři body společné.

Čtyři projektivní svazky rovin (s osami a, b, c, d) vytvořují (každá ze čtyř trojic) čtyři prostorové čáry kubické; kterékoli dvě z nich (třebas vytvořené svazky s osami a, b, c a s osami a, b, d), ležíce na zborcené ploše kvadratické, dvěma ze svazků (a, b) vytvořené a majíce společnou

[9]) Odtud plyne, že prostorová čára 3. stupně jest (jednoznačně) určena *šesti svými body*; neboť jedním z bodů těch jako vrcholem a jeho spojnicemi s ostatními pěti body určen je jeden kvadratický kužel, obdobně kužel druhý, jež se oba protínají mimo spojnici svých vrcholů v prostorové čáře kubické.

soustavu bisekant, mají nejvýš čtyři body společné. Existují tudíž při čtyřech projektivních svazcích rovin v prostoru obecně položených nanejvýš čtyři body, z nichž v každém se protínají čtyři korespondující roviny těchto svazků.

48. Projektivnost bodových řad kubických; soběduálnost prostorové křivky 3. stupně a 3. třídy. *a*) Opírajíce se o větu dříve uvedenou, můžeme zavésti *projektivnost řady bodové na prostorové čáře kubické* (v kubické řadě bodové), obdobně jako byla projektivnost rozšířena z přímé řady bodové na bodovou řadu kvadratickou (bodovou kuželosečku) a na útvary kvadratické vůbec. Svazek rovin s osou v kterékoli bisekantě čáry kubické, promítající body této čáry, nazveme perspektivním a tedy projektivním k řadě jejích bodů. Dva libovolné svazky rovin, perspektivní k dané čáře 3. stupně, vytvořují kvadratickou soustavu přímek (zborcenou nebo kuželovou); také tuto nazveme perspektivní k čáře kubické. Jsou pak ovšem všechny svazky rovinové, všechny kvadratické přímkové řady, zborcené i kuželové, jež jsou k dané prostorové čáře 3. stupně perspektivní, navzájem projektivní.

Dvě prostorové čáry kubické jsou projektivní, jsou-li projektivní dva lineární svazky rovin, jeden perspektivní k prvé, druhý perspektivní k druhé čáře. Projektivnost dvou čar kubických jest určena, přiřadíme-li třem bodům jedné tři body čáry druhé. Jsou-li totiž bodům A, B, C na čáře k přiřaděny body A', resp. B', resp. C' na čáře k', a je-li s resp. s' bisekanta čáry prvé resp. druhé, jsou svazky rovin $s\,(ABC)$ a $s'\,(A'B'C')$, perspektivní ke kubickým řadám uvažovaným, uvedeny v určitou jedinou korespondenci projektivní; korespondující sobě roviny těchto svazků protínají čáry k a k' v bodech, v dané projektivnosti sdružených.

Dvě projektivní soumístné řady bodové 3. stupně (na téže prostorové čáře kubické) mají dva body samodružné (jež ovšem mohou splynouti v jeden nebo jsou imaginární); mají-li takových bodů více, jest projektivnost jejich identická.

Protože čtyři projektivní svazky rovinové mohou (při obecné poloze) míti nejvýše čtyři společné průsečíky sdružených rovin svých, může prostorová čára kubická, projektivní (ne však perspektivní) ke svazku rovin, míti nejvýše čtyři své body na korespondujících rovinách svazku. Stačí míti na zřeteli vytvoření prostorové čáry kubické třemi projektivními svazky rovin. Jest tedy svazek rovinový, projektivní k prostorové čáře kubické, jehož pět rovin obsahuje korespondující body čáry té, perspektivní k čáře kubické (a jeho osa je bisekantou čáry). Odtud plyne:

Dvě projektivní prostorové čáry 3. stupně k a k', jež mají čtyři sdružené body společné, leží na zborcené nebo kuželové ploše kvadratické, vytvořují spojnicemi sdružených bodů svých řadu jejich přímek a mají na ploše společnou řadu bisekant.

Neboť mají-li dvě projektivní prostorové čáry kubické k a k' společné body sdružené A, B, C, D a dvojici sdružených bodů E, E', zvolme dvě bisekanty p, q čáry k, jež protínají spojnici EE', ale nejdou bodem E ani E', za osy dvou rovinových svazků, perspektivních k čáře k; tyto svazky, jdouce pěti body A, B, C, D a E', jsou podle uvedeného perspektivní také k čáře k' a vytvořují přímkovou řadu k oběma čarám perspektivní: řada ta náleží kvadratické ploše, na níž leží obě dané čáry kubické, jež mají p, q za společné bisekanty.

b) U prostorové čáry kubické k byla uvedena jako *tečna* její bisekanta, mající s čarou dva splývající body společné. Promítneme-li čáru k ze dvou bodů jejích A, B kuželovými plochami kvadratickými, jež obsahují přímky AP resp. BP, promítající bod P na k, protínají se tečné roviny ploch těch podél přímek AP a BP v přímce t, jež má s plochami a tedy i s čarou k společný pouze bod P. Přímka t jest tečnou prostorové čáry kubické k: neboť každá rovina ϱ, jdoucí přímkou t, protíná čáru k pouze v jednom bodě (mimo P). Rovina ϱ protíná totiž obě uvedené plochy kuželové ve dvou kuželosečkách, jež mají společnou tečnu t v bodě P, protínají se dále v průsečíku své roviny s přímkou AB a mohou se mimo to protínati jen ještě v jednom bodě; tento bod leží na k. Je patrno, že přímka t je jedinou tečnou čáry k v P; je mezní polohou bisekanty prostorové čáry kubické, jdoucí bodem P a druhým bodem jejím, blíží-li se tento druhý bod po křivce bez omezení bodu P.[1])

Kuželová plocha, jež promítá prostorovou čáru kubickou z bodu jejího P, obsahuje tečnu t čáry v bodě tom jako jednu ze svých přímek; tečná rovina této kuželové plochy podél t nemá s čarou dalších bodů společných a sluje *oskulační rovinou* prostorové čáry 3. stupně. Prostorová čára 3. stupně má v každém bodě svém P jedinou rovinu oskulační, jež je mezní polohou roviny jdoucí její tečnou v bodě tom a dalším bodem čáry, blíží-li se tento bod po čáře bez omezení bodu P.

c) Jest záhodno zjistiti, kolik oskulačních rovin prostorové čáry 3. stupně prochází libovolným bodem v prostoru. K tomu cíli vezměme u kubické čáry prostorové k v úvahu tři body její A, B, C a tečny i oskulační roviny čáry v nich, totiž a, α v bodě A, dále b, β v bodě B a c, γ v bodě C. Kvadratický kužel s vrcholem A, danou čáru promítající, má přímky AB, AC, a a tečné roviny podél nich Ab, Ac, α; protože ony přímky a tyto roviny tvoří trojhran kvadratickému kuželi vepsaný resp. (středový) trojstěn kuželi tomu opsaný, protínají se stěny onoho s protějšími stěnami tohoto ve třech přímkách jedné roviny ϱ_1; obdobně

[1]) Tečnu kubické čáry prostorové v bodě A (nebo B) obdržíme jako průsečnici uvedeného kužele s vrcholem A (B) čáru promítajícího a tečné roviny druhého kužele takového s vrcholem B (A) podél přímky AB. Tečnu čáry té v libovolném bodě jejím P můžeme pak nalézti pomocí kvadratických kuželů s vrcholem P a s vrcholem A, čáru promítajících (tečná rovina kužele s vrcholem A podél AP protíná kužel s vrcholem P mimo AP v hledané tečně).

u kvadratického kužele s vrcholem B protínají se stěny trojhranu o hranách BC, BA, b a stěny trojstěnu o stěnách Bc, Ba, β v přímkách jedné roviny ϱ_2, konečně u kužele s vrcholem C stěny trojhranu o hranách CA, CB, c a trojstěnu o stěnách Ca, Cb, γ v přímkách jedné roviny ϱ_3. Roviny $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ procházejí touže přímkou (protože společný bod rovin Ab, Bc, Ca, rovněž průsečík rovin Ac, Ba, Cb leží ve všech rovinách uvedených) a protínají rovinu ABC v témž bodě O. Dospěli jsme tedy k zajímavé vlastnosti oskulačních rovin čáry k: *Tři oskulační roviny prostorové čáry kubické protínají se v bodě, ležícím v rovině dotyčných bodů rovin těch.*[2])

Odtud pak seznáváme, že *libovolným bodem v prostoru procházejí (nejvýše) tři oskulační roviny prostorové čáry 3. stupně.* Neboť tři oskulační roviny čáry k mají ovšem společný bod; tímto bodem O nemůže však procházeti čtvrtá oskulační rovina čáry k, protože by rovina, jdoucí bodem O a dvěma z dotyčných bodů rovin těch, obsahující tedy podle předcházející věty i dotyčný bod třetí roviny, musila z téhož důvodu obsahovati rovněž dotyčný bod roviny čtvrté, takže by čáru k protínala ve čtyřech bodech, což není možno.[3])

Můžeme nyní dokázati, že oskulační roviny prostorové čáry kubické k tvoří soustavu rovin, spojujících trojice sdružených bodů v projektivních řadách tří přímek. Oskulační rovina ξ uvažované čáry v proměnném bodě jejím X protíná totiž podle hořejší věty přímku $\alpha\beta$ v témž bodě jako rovina ABX; jest tedy řada průsečíků oskulačních rovin ξ čáry k na $\alpha\beta$ projektivní (perspektivní) se svazkem rovin ABX osy AB, rovněž tak řady průsečíků rovin oskulačních na $\beta\gamma$ a na $\gamma\alpha$ jsou projektivní (perspektivní) se svazky rovin s osou BC resp. CA. Avšak svazky rovin s osami AB, BC, CA, promítajících týž bod X čáry k jsou (podle výtvarného zákona prostorové čáry 3. stupně) navzájem projektivní; totéž platí proto o řadách průsečíků na přímkách $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$, takže oskulační roviny čáry k protínají přímky tyto ve třech projektivních řadách bodových. Rovinami této vlastnosti jest však vytvořen útvar k prostorové čáře 3. stupně duální, t. j. prostorová čára 3. třídy. Duálně pak můžeme od čáry 3. třídy dospěti k čáře 3. stupně; budiž při tom vytčeno, že roviny čáry 3. třídy protínají každou rovinu její v přímkové kuželosečce (roviny spojující dvojice tečen takových dvou kuželoseček, jež leží v různých rovinách a mají společnou tečnu v jejich průsečnici, vytvořují tuto čáru) a že průsečnice každé její roviny s nekonečně blízkou rovinou je tečnou čáry, průsečík pak této tečny s třetí rovinou nekonečně blízkou (oskulačním) bodem čáry 3. třídy.

---

[2]) Tvoří tedy čtyři body prostorové čáry 3. stupně a oskulační roviny její v bodech těch dva čtyrstěny, z nichž jeden je druhému opsán a zároveň vepsán (t. zv. *čtyrstěny Möbiovy*, viz pozn. [7]) v čl. 13).

[3]) Z tečen prostorové čáry 3. stupně protínají přímku v prostoru obecně položenou (nejvýše) čtyři. Viz na př. *H. Schröter*, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung, p. 264 a n.

Nalezli jsme tedy:

Prostorová čára 3. stupně (pravá) se svými rovinami oskulačními jest útvar soběduální, jsouc totožna s prostorovou čarou 3. třídy (soustavou jejích rovin a bodů oskulačních).[4])

49. Útvary vytvořené dvěma projektivními útvary kvadratickými. Obraťme se konečně k dvojicím projektivních útvarů kvadratických.

a) Při speciálních polohách vytvořují dva kvadratické útvary, mezi jejichž prvky byla zavedena korespondence projektivní, opět útvar elementární. Tak jsme nalezli, že dvě kvadratické řady bodové nebo dva kvadratické svazky paprskové v rovině, ležící na téže kuželosečce, vytvořují spojnicemi sdružených bodů svých resp. průsečnicemi svých paprsků sdružených kvadratický, spec. lineární svazek paprskový v rovině, resp. kvadratickou, spec. lineární řadu bodovou (k oběma perspektivní). Nebo dvě kvadratické řady přímkové, z nichž jedna je řídicí soustavou druhé (ležíce na téže zborcené ploše kvadratické) vytvořují průsečíky sdružených paprsků kvadratickou řadu bodovou a rovinami, jež spojují sdružené paprsky jejich, kvadratický kužel rovinový. Dále je zajímavý tento jednoduchý případ:

Dvě projektivní kvadratické řady bodové, jež leží v různých rovinách, ale jejichž dva společné body odpovídají sobě samým, vytvořují spojnicemi sdružených bodů svých (perspektivní k nim) kvadratickou řadu zborcenou nebo kvadratický kužel přímkový.

Dva projektivní kvadratické svazky rovinové, jež neleží v témž trsu, ale jejichž dvě společné roviny odpovídají sobě samým, vytvořují průsečnicemi sdružených svých rovin (perspektivní k nim) kvadratickou řadu zborcenou nebo přímkovou kuželosečku.

Neboť spojíme-li dvě dvojice různých bodů, jež sobě v daných řadách odpovídají, dvěma přímkami, jsou tyto buď mimoběžné nebo se protínají: v prvním případě obdržíme v přímkách, které jdou jedním nebo druhým společným bodem daných řad a protínají přímky právě sestrojené, řídicí přímky vytvořené řady zborcené, v případě druhém jsou sestrojené přímky osami svazků rovinových, vytvořujících kuželovou plochu kvadratickou. Kvadratické přímkové řady nebo kužele, sestrojené takto na základě jedné nebo druhé z daných řad bodových, jsou (podle odst. 43*e*) totožny (a perspektivní k těmto řadám), protože jsouce projektivní obsahují čtyři společné prvky sobě samým odpovídající, totiž dva paprsky jdoucí společnými body daných řad a dvě

[4]) O prostorové křivce třetího stupně se stanoviska zde uvedeného pojednávají podrobněji *H. Schröter*, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde, 1880, p. 227 a násl.; *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften I, 1908, p. 304 a n. Všeobecně (pro přehled výsledků úvah synthetických do r. 1890) viz *Th. Reye*, Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnis der kubischen Raumkurven, übersichtlich dargestellt, Mitteilungen Math. Ges. Hamburg 2 (1890).

spojnice na počátku uvedené (a tyto čtyři paprsky jsou incidentní s korespondujícími prvky daných řad).

b) Při obecné poloze dvou kvadratických útvarů, projektivně sdružených, platí:

Dva projektivní kvadratické svazky paprskové ležící v téže rovině vytvořují průsečíky svých sdružených paprsků čáru 4. stupně (bikvadratickou řadu bodovou v rovině). Libovolná přímka roviny protíná totiž tento výtvor (nejvýše) ve čtyřech bodech.

Dva projektivní kvadratické kužele rovinové téhož vrcholu vytvořují průsečnicemi sdružených rovin *kužel 4. stupně* (bikvadratický svazek paprskový v trsu). Libovolná rovina (nejdoucí vrcholem kužele) protíná jej v čáře 4. stupně.

Dvě projektivní kvadratické řady bodové v obecné poloze (v prostoru) vytvořují spojnicemi sdružených bodů *přímkovou zborcenou řadu* čili *osnovu* (plochu) *bikvadratickou*.[2])

Dvě projektivní kvadratické řady bodové ležící v téže rovině vytvořují spojnicemi svých sdružených bodů čáru 4. třídy (bikvadratický svazek paprskový v rovině). Libovolným bodem v rovině procházejí totiž (nejvýše) čtyři paprsky tohoto výtvoru.[1])

Dva projektivní kvadratické kužele přímkové téhož vrcholu vytvořují rovinami sdružených přímek *kužel 4. třídy* (bikvadratický svazek rovinový v trsu). Libovolná rovina (nejdoucí vrcholem kužele) protíná jej v čáře 4. třídy.

Dva projektivní kvadratické svazky rovinové v obecné poloze vytvořují průsečnicemi svých sdružených rovin *přímkovou zborcenou řadu* čili *osnovu* (plochu) *bikvadratickou*.

Libovolná přímka protíná totiž nejvýše čtyři přímky této řady.

K důkazu těchto vět stačí, dokážeme-li jednu z obou posledních; neboť věty třetí skupiny jsou navzájem (v prostoru) duální, věta na levé straně v první skupině vyplývá (řezem) z věty na pravé straně v třetí skupině, věty první skupiny jsou navzájem (v rovině) duální, věty pak skupiny druhé týkají se útvarů promítajících útvary skupiny prvé.

Abychom dokázali správnost věty (třebas) na levé straně v poslední skupině, promítněme ze dvou bodů A, A' libovolné přímky l dané projektivní kvadratické řady bodové. Obdržíme dva projektivní přímkové kužely kvadratické, o kterých platí, že nejvýše čtyři dvojice korespondujících přímek jejich se protínají; roviny takovými dvojicemi

[1]) Tato křivka 4. třídy jest 6. stupně (má tři dvojnásobné tečny); duální křivka 4. stupně je 6. třídy (má tři dvojnásobné body). O jejím uvedeném vytvoření viz *H. Schröter*, Über die Erzeugnisse krummer projektivischer Gebilde, Journal r. ang. Math. 54 (1857).

[2]) O zborcených řadách (plochách) bikvadratických, k nimž uvedená patří, pojednává (syntheticky) na př. *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie I (1892), p. 52 a n.

určené (a pouze ony) jsou rovinami, v nichž leží sdružené body daných řad a tedy spojnice jejich (přímky vytvořené plochy), přímku l protínající. Předpokládajíce, že aspoň jedna dvojice sdružených přímek obou kvadratických kuželů přímkových s vrcholy A a A' se protíná (ležíc v rovině α), promítněme z jedné přímky takové přímky jednoho (příslušného) kužele, z druhé pak přímky druhého kužele. Promítající lineární svazky rovinové jsou ovšem projektivní, také však perspektivní, protože mají společnou jednu rovinu sobě odpovídající (α); vytvořují proto lineární svazek paprskový S. Rovina tohoto svazku S protíná kužele o vrcholech A a A' ve dvou (ke svazku S perspektivních) kvadratických řadách bodových, jež mohou míti, jak víme, nejvýše tři společné body sobě odpovídající (nebo všechny); pouze v těchto bodech protínají se dvojice korespondujících přímek obou projektivních kuželů A, A' mimo rovinu α; celkem se tedy protínají nejvýše ve čtyřech bodech.[3])[4])

[3]) Schröterovo vytvoření racionálních rovinných čar 3. a 4. třídy resp. stupně zobecňuje na vytvoření vyšších čar racionálních v rovině (pomocí lineárního svazku paprskového a projektivního svazku tečen čáry n-tého stupně s bodem $(n-1)$-násobným nebo dvou projektivních řad bodových na čarách n_k-tého stupně s bodem (n_k-1)-násobným $(k=1, 2)$ nebo dvou soumístných projektivních řad bodových na takové čáře) *B. Kalicun*, Über die Erzeugnisse krummer projectiver Gebilde, deren Träger unikursale Plankurven sind, Sitzungsberichte Akad. Wien 122 (1913) a 123 (1914). Viz také *H. Milinowski*, Erzeugnisse krumm-projectivischer Gebilde, Zeitschrift Math. Phys. 18 (1873) (kde uvažuje čáry, vytvořené projektivními řadami a involucemi bodů na téže kuželosečce nebo na přímce a kuželosečce), a téhož Zwei Erzeugnisse krumm-projectivischer Gebilde, Journal r. ang. Math. 78 (1874); *A. Ameseder*, Über Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten, a Über rationale Curven dritter und vierter Ordnung (i další dvě práce téhož), Sitzungsberichte Akad. Wien 79 (1879).

[4]) Čáry stupně 3. a 4. i vyšších stupňů v rovině lze výhodně vytvořovati průsečíky sdružených členů *dvou projektivních svazků čar stupňů nižších*. Tak ze svazku přímek a z projektivního k němu svazku kuželoseček vzniká čára 3. stupně (vytvoření *Chaslesovo*); ze dvou projektivních svazků kuželoseček nebo ze svazku přímek a projektivního svazku čar kubických vzniká čára 4. stupně; podle vzájemné polohy uvedených svazků dostaneme rozmanité typy těchto čar; atd. Dva projektivní svazky čar stupně m-tého resp. n-tého vytvořují čáru stupně $(m+n)$-tého; touto otázkou se zabývali zejména Grassmann, Chasles, de Jonquières, Küpper, Kötter. Viz pro čáry stupně 3. na př. *K. Bobek*, Einleitung in die projectivische Geometrie der Ebene, 1889; *H. Schröter*, Die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung, 1888; také *E. Kötter*, Einige Hauptsätze aus der Lehre von den Curven dritter Ordnung, Math. Annalen 38 (1891); *K. Rohn*, Beiträge zur Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung, Sitzungsberichte Akad. Leipzig 58 (1906); pro případ obecný *L. Cremona*, Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane, Memorie Accad. Bologna 12 (1861), a rozšířený překlad *Em. Weyrův*, Úvod do geometrické teorie křivek rovinných, 1873; *R. Schumacher*, Die Punktsysteme auf der Geraden und ihre Anwendung zur Erzeugung der algebraischen ebenen Curven, Journal r. ang. Math. 110 (1892) a 111 (1893); *C. Küpper*, Projective Erzeugung der Curven m-ter Ordnung C^m, Věstník Spol. nauk 1896, a doplněk tamtéž 1897, nebo Math. Annalen 48 (1896); *E. Kötter*, Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Kurven, Abhandlungen Akad. Berlin

c) *Kvadratická řada zborcená a projektivní k ní kvadratický kužel rovinový vytvořují průsečíky svých sdružených prvků* útvar bodový, *prostorovou čáru 4. stupně*. Tuto protíná libovolná rovina (nejvýše) ve čtyřech bodech.[5])

Kvadratická řada zborcená a projektivní k ní kvadratická řada bodová vytvořují rovinami svých sdružených prvků útvar rovinový, *prostorovou čáru 4. třídy*. Libovolným bodem procházejí (nejvýše) čtyři roviny této soustavy.

Neboť (v případě na levé straně) libovolná rovina ϱ protíná danou kvadratickou řadu zborcenou v perspektivní kvadratické řadě bodové k; z rovin daného projektivního kvadratického svazku rovinového procházejí nejvýše čtyři sdruženými body této řady (leda by byly oba útvary perspektivní a měly všechny sdružené prvky incidentní). Rovina ϱ (jako rovina obecně položená) ať neprochází totiž vrcholem S daného kužele; prochází-li jedna rovina α z rovin kužele S korespondujícím bodem A uvedené řady k, položme druhým společným bodem této řady a roviny α přímku p v α (různou od spojnice obou bodů řady). Lineární svazek rovinový s osou p, promítající kvadratickou řadu k, je perspektivní k této řadě. Připusťme, že pět bodů (A, B, C, D, E) řady k leží v korespondujících rovinách $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ svazku S; projektivní rovinové svazky p a S, majíce jednu sobě odpovídající rovinu α společnou, vytvořovaly by kvadratickou plochu zborcenou, k oběma perspektivní, jež by byla také perspektivní k řadě k, protože čtyři paprsky

1887, a doplněk Math. Annalen 34 (1888); Encyklopädie math. Wiss. III. C 4 (*L. Berzolari*), p. 353 a n.

Jiný způsob vytvořování vyšších čar rovinných poskytují (m, n)-*značné korespondence svazků paprskových*. Tak průsečíky dvou paprskových svazků v korespondenci (1, 2)-značné tvoří racionální čáru 3. stupně (vytvoření *Weyrovo*), průsečíky dvou svazků v korespondenci (2, 2)-značné pak čáru 4. stupně s dvěma dvojnými body; dva paprskové svazky v příbuznosti (2, 2)-značné, jejichž společný paprsek odpovídá jednou sobě samému (dvě „projektivní involuce v poloze poloperspektivní") vytvořují obecnou čáru 3. stupně (vytvoření *Schröterovo*); atd. Obecně dva svazky paprskové v příbuznosti (m, n)-značné vytvořují čáru $(m + n)$-tého stupně s body m-násobným a n-násobným. Podobně (pro útvary rovinné a prostorové) u řad bodových a svazků rovinových. Viz pro čáry 3. stupně *Em. Weyr*, Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse, 1869; *H. Schröter*, Über eine besondere Curve 3-ter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curve 3-ter Ordnung, Math. Annalen 5 (1872), a téhož souborný spis nahoře uvedený; pro případ obecný *Em. Weyr*, Die Erzeugung algebraischer Curven durch mehrdeutige Elementargebilde, Abhandlungen Böhm. Ges. Wiss. 1870, a Erzeugnisse mehrdeutige Elementargebilde im Raume, tamtéž 1871; také *Em. Weyr*, Beiträge zur Curvenlehre, 1880; *G. Loria*, Sugli enti geometrici generati da forme fondamentali in corrispondenza algebrica, Giornale mat. 34 (1896).

[5]) Jest to prostorová křivka 4. stupně druhého druhu, různá od bikvadratické křivky 4. stupně prvního druhu, která je průsečnou čarou dvou ploch stupně druhého. Viz *St. Jolles*, Die Raumkurve vierter Ordnung zweiter Species synthetisch behandelt, 1883.

její procházely by korespondujícími body (B, C, D, E) řady té. Byl by tedy svazek S, zborcenou plochu spoluvytvořující, perspektivní k řadě k, což by mělo uvedený důsledek, obecně neplatný.

Protože kvadratická řada zborcená vzniká ze dvou projektivních svazků rovinových, lze bikvadratickou čáru prostorovou také vytvořiti třemi projektivními svazky rovin, dvěma lineárními a jedním kvadratickým.

V. PROJEKTIVNOST MEZI ZÁKLADNÍMI ÚTVARY DRUHÉHO ŘÁDU.

50. Definice projektivnosti, její určení a konstrukce. *a*) Dva základní útvary druhého řádu (pole a pole, trs a trs, pole a trs, s prvky reálnými) jsou *projektivní*, jestliže každému prvku každého z obou útvarů odpovídá jediný prvek útvaru druhého a jestliže vždy dvěma prvkům incidentním odpovídají prvky incidentní. Máme-li na mysli pole a trsy vyplněné elementy jen jednoho druhu, body nebo přímkami, resp. přímkami nebo rovinami, nastoupí místo elementů druhého druhu základní útvary jednomocné, řady bodové nebo svazky paprskové v rovině, resp. svazky paprskové nebo svazky rovinové v trsu; pravíme pak, že dva útvary dvojmocné jsou projektivní, jestliže v nich sobě odpovídají obapolně jednoznačně elementy a elementům základního útvaru jednomocného odpovídají elementy opět základního útvaru jednomocného.

Projektivnost útvarů 2. řádu jest dvojí. Dvě pole slují *kolineární*, jestliže každému bodu jednoho odpovídá jediný bod druhého a bodům vytvořujícím přímou řadu odpovídají body vytvořující opět řadu přímou; nebo duálně jestliže sobě odpovídají přímky a lineární svazky paprskové. Tato korespondence dvou rovin sluje *kolineace* (homografie).[1]) Obdobně jsou podmínkami kolineace dvou trsů obapolně jednoznačná korespondence jejich přímek nebo rovin a (lineárních) paprskových nebo rovinových svazků jednomocných. Konečně pole je kolineární s trsem, jestliže bodům (přímkám) v poli odpovídají jednoznačně přímky (roviny) trsu i naopak a bodům (přímkám) vytvořujícím řadu bodovou (jednomocný svazek paprskový) odpovídají přímky (roviny) vytvořující jednomocný svazek paprskový (rovinový).[2])

[1]) Pojem a jméno kolineace zavedl *Möbius* v Barycentrischer Calcul, 1827; jméno to značí, že bodům v přímce odpovídají body ležící v přímce („collineantur"). *Chasles* nazval tuto příbuznost *homografií* (stejně jako projektivnost základních útvarů jednomocných); tak se také často jmenuje (hl. v literatuře francouzské a italské).

[2]) Jestliže sobě odpovídají obapolně jednoznačně body dvou rovin (nebo obdobně prvky jiných útvarů dvojmocných), mohou bodům v přímce ležícím odpovídati body tvořící čáru jakoukoliv; v tom, že přímce koresponduje opět přímka, je charakteristická vlastnost kolineace jako transformace *lineární*.

Dvě pole nazývají se *korelativní*, jestliže každému bodu jednoho z nich odpovídá jediná přímka druhého a bodům tvořícím přímou řadu odpovídají přímky tvořící lineární svazek paprskový. Tato druhá projektivní korespondence dvou rovin sluje *korelace* (reciprocita).[3]) Obdobně mezi dvěma trsy existuje korelace, jestliže přímkám jednoho odpovídají roviny druhého a jednomocným (lineárním) svazkům paprskovým jednomocné (lineární) svazky rovinové. Konečně pole sluje korelativní k trsu, korespondují-li bodům (přímkám) onoho útvaru roviny (přímky) tohoto a bodům (přímkám) vytvořujícím řadu bodovou (paprskový svazek jednomocný) roviny (přímky) vytvořující rovinový (paprskový) svazek jednomocný.[4])

Jsou-li kolineární nebo korelativní dva trsy, platí to také o polích v rovinách je protínajících (perspektivních); jsou-li v kolineaci nebo v korelaci pole a trs, platí totéž o daném poli a o poli v rovině trs protínající. Stačí tedy, pokud běží jen o korespondenci, bráti v úvahu kolineaci a korelaci dvou rovinných polí.[5])

b) Z jednoznačné korespondence a ze zachování incidence prvků ve dvou projektivních (kolineárních nebo korelativních) útvarech dvojmocných vyplývá bezprostředně, že *odpovídající sobě* jejich základní *útvary jednomocné jsou projektivní.*

Projektivnost jednomocných útvarů, na př. řad bodových ve dvou kolineárních polích, můžeme dokázati třebas tím, že zjistíme, jak harmonické skupině prvků odpovídá skupina harmonická. Jestliže bodům A, B, C, D harmonické skupiny na přímce p první roviny odpovídají body A', B', C', D' na korespondující přímce p' roviny druhé a je-li vytvořujícím útvarem oné skupiny harmonické čtyřroh $P_1P_2P_3P_4$ tak, že bod A je průsečíkem dvou stran tohoto čtyřrohu, bod B průsečíkem také dvou stran, bod C leží na páté a bod D na šesté straně jeho, pak bodem A' procházejí dvě přímky a rovněž bodem B', bodem C' prochází jedna přímka a jedna bodem D' tak, že těchto šest přímek tvoří strany čtyřrohu $P_1'P'_2P'_3P'_4$, jehož vrcholy odpovídají vrcholům čtyřrohu $P_1P_2P_3P_4$ a jenž vede ke skupině $A'B'C'D'$, tedy harmonické.

Jako jsou projektivní ve dvou kolineárních polích řady bodové na korespondujících přímkách a svazky paprskové s korespondujícími středy, tak jest ve dvou korelativních polích projektivní řada bodová a korespondující svazek paprskový; a obdobně v kolineárních a korelativních dvojmocných útvarech jiných. Pravíme také, že projektivnost útvarů

[3]) Jméno korelace zvolil pro uvedenou příbuznost *Möbius*; dost často se útvary korelativní podle *Ponceleta* (a Staudta) nazývají reciprokými.

[4]) Duální ke kolineaci dvou útvarů dvojmocných je opět kolineace, ke korelaci korelace.

[5]) Možnost kolineace a korelace, kterou zde předpokládáme, vyplývá z další úvahy (u kolineace také ze speciálního případu, kdy oba korespondující útvary dvojmocné jsou perspektivní; u korelace pak z případu, plynoucího odtud převedením jednoho z útvarů v útvar duální).

jednomocných jest vytvořena (indukována) projektivností je obsahujících útvarů dvojmocných.[6])

c) *Kolineace mezi dvěma poli v rovinách* α, α' *jest určena, jsou-li v nich dány dvě dvojice projektivních svazků paprskových* A, A' *a* B, B' *tak zvolených, že společnému paprsku* AB *obou svazků jednoho pole odpovídá společný paprsek* $A'B'$ *korespondujících svazků v poli druhém.*

Kolineace takto stanovená je možna: Neboť libovolnému bodu P, ležícímu v α mimo AB, odpovídá v α' bod P', průsečík dvou paprsků, jež ve svazcích A' a B' odpovídají paprskům AP a BP. Libovolné přímce p, ležící v α (a nejdoucí bodem A ani B), odpovídá v α' přímka p', vytvořená svazky A' a B'; svazky paprsků o středech A a B, jež promítají body přímky p, jsou tím totiž uvedeny v projektivnost perspektivní: jim projektivně (v kolineaci) korespondující svazky středů A' a B' jsou tedy navzájem projektivní a, mající společný paprsek $A'B'$ samodružný, také perspektivní: pročež vytvořují svazky A' a B' přímku p'.[7]) Konečně bodu P ležícímu na AB (mimo A a B) odpovídá bod P', určený na $A'B'$ přímkou p' odpovídající některé přímce p bodem P vedené (různé od AB); poloha bodu P' nezávisí vskutku na volbě přímky p, protože každé dvojici přímek v α', protínajících se mimo $A'B'$, odpovídá dvojice přímek v α, protínajících se mimo AB, a tedy kterýmkoli dvěma přímkám v α protínajícím se na AB korespondují dvě přímky v α' protínající se na $A'B'$. Uvedeným způsobem lze tedy mezi rovinami α a α' vždy uskutečniti kolineaci jako příbuznost obapolně jednoznačnou, v níž incidentním bodům a přímkám odpovídají body a přímky incidentní. Kolineace tato je také jediná, jak z předcházejícího rozboru vysvítá.[8])

Duálně může kolineace mezi dvěma poli v rovinách α, α' býti určena tím, že *zvolíme ke dvěma řadám bodovým* a, b *v* α *dvě projektivní řady bodové* a', b' *v* α' *s podmínkou, aby průsečíku* ab *odpovídal průsečík* $a'b'$. Obdobně lze stanoviti kolineaci mezi dvěma trsy i kolineaci mezi polem a trsem. Také ovšem korelace na př. mezi dvěma poli jest určena danými projektivnostmi dvou řad bodových jednoho pole s dvěma svazky paprskovými pole druhého, při čemž společnému bodu

[6]) Projektivnost základních útvarů jednomocných na nosičích, jež sobě odpovídají v kolineaci nebo v korelaci dvou útvarů dvojmocných, jest důsledkem hořejší definice projektivnosti mezi útvary dvojmocnými jen tehdy, jsou-li prvky jejich reálné; předpokládáme-li však u dvou útvarů dvojmocných prvky komplexní, je nutno požadavek projektivnosti obsažených tam útvarů jednomocných vložiti do definice uvažované projektivnosti (kdyby se tak nestalo, objevila by se také t. zv. *antiprojektivnost* útvarů dvojmocných).

[7]) Kdyby podmínka, aby společné paprsky svazků AB a $A'B'$ sobě odpovídaly, nebyla splněna, nebyla by jednoznačná příbuznost lineární. Neboť přímce v α odpovídal by útvar vytvořený svazky A' a B', sice spolu projektivními, ne však perspektivními, tudíž kuželosečka.

[8]) Uvedené stanovení kolineace podal *F. Seydewitz* (r. 1846, ač je vlastně obsaženo už v úvaze Möbiově).

obou řad odpovídá společný paprsek obou svazků. A obecně platí: *Projektivnost dvou útvarů dvojmocných jest určena, jsou-li v nich dány dvě dvojice projektivních útvarů jednomocných tak, že sobě odpovídají společné prvky obou dvojic.*

d) Projektivní korespondence dvou útvarů dvojmocných může však býti určena ještě důležitým způsobem jiným. Budiž na př. kolineace dvou polí v rovinách α a α' stanovena tím, že jsou dány projektivnosti dvou dvojic řad bodových, p_1 a p'_1, p_2 a p'_2. Protože průsečíku O přímek p_1 a p_2 musí odpovídati průsečík O' přímek sdružených p'_1 a p'_2, jest projektivnost jedné dvojice řad dána tím, že bodům A, B, O na p_1 přiřadíme body A', B', O' na p'_1, projektivnost druhé dvojice pak sdružením bodů C, D, O na p_2 s body C', D', O' na p'_2. Jestliže obráceně čtyřem bodům A, B, C, D v α přiřadíme čtyři body A', B', C', D' v α', jest projektivnostmi $ABO \barwedge A'B'O'$ a $CDO \barwedge C'D'O'$, kde O, O' jsou (korespondující) průsečíky přímek AB a CD, resp. $A'B'$ a $C'D'$, určena podle předešlého projektivnost polí v rovinách α a α'. Průsečíky O a O' musí ovšem býti různé od uvedených čtveřin bodů; ze zvolených čtyř bodů A, B, C, D nesmějí tedy žádné tři ležeti v přímce, rovněž tak u bodů A', B', C', D'. Rozšíříme-li tento výsledek úvahy na případ duální, na ostatní možné dvojice kolineárních útvarů dvojmocných a na korelaci, dostáváme obecnou větu: *Projektivnost dvou základních útvarů dvojmocných jest určena, jestliže čtyřem prvkům (téhož druhu) v jednom útvaru, z nichž žádné tři nejsou v témž základním útvaru jednomocném, přiřadíme čtyři prvky téže vlastnosti v útvaru druhém.*[9])

Že způsobem uvedeným jest kolineace i korelace dvou útvarů dvojmocných jednoznačně a vždy stanovena, nalezneme také přímo: Mějme na zřeteli třebas korelaci dvou polí; v rovině α zvolíme čtyři body A, B, C, D v obecné poloze a těmto přiřadíme čtyři přímky a', b', c', d', zvolené v rovině α' rovněž v poloze obecné (t. j. jako nesmějí žádné tři body z oněch ležeti v přímce, nesmějí žádné tři přímky z těchto procházeti týmž bodem). Je jasné, že spojnicím oněch bodů AB, AC, ... odpovídají průsečíky těchto přímek $a'b'$, $a'c'$, ... Abychom nalezli přímku p', odpovídající v α' libovolnému bodu P v α (ležícímu mimo ony spojnice), užijme třebas bodů A a B za středy svazků a korespondujících přímek a', b' za osy řad; v projektivních útvarech $A(BCD) \barwedge a'(b'c'd')$ odpovídá paprsku AP určitý bod na a', v projektivních útvarech $B(ACD) \barwedge b'(a'c'd')$ koresponduje paprsku BP určitý bod na b': spojnice obou těchto bodů je přímka p', sdružená s bodem P. Leží-li bod P na některé ze spojnic dvou bodů daných, vezmeme za středy uvažovaných svazků dva body ostatní. Přímce jdoucí v α některým z bodů daných, třebas bodem A, odpovídá v α' bod ležící na dané přímce korespondující a' podle projektivnosti $A(BCD) \barwedge a'(b'c'd')$.

[9]) Protože každému z určitých čtyř prvků jednoho útvaru lze přiřaditi kterýkoli z ∞^2 prvků druhého útvaru dvojmocného, existuje ∞^8 kolineací a ∞^8 korelací dvou základních útvarů druhého řádu.

Abychom nalezli bod P' odpovídající v a' libovolné přímce p v a (nejdoucí žádným bodem daným), všimněme si, že paprskové svazky středů (třebas) A a B, promítajíce body přímky p, jsou tím perspektivní; k nim projektivní řady bodové na osách a' a b' jsou navzájem projektivní a, mající společný bod $a'b'$ samodružný (odpovídá paprsku AB), také perspektivní; jejich střed perspektivnosti je bodem P', korespondujícím přímce p.[10])

O dvou soumístných útvarech dvojmocných vyplývá z uvedené věty:

Dvě soumístná kolineární pole mají všechny své prvky samodružné (jsou totožna), mají-li samodružné čtyři body nebo čtyři přímky obecně položené.

Dva soumístné kolineární trsy mají všechny své prvky samodružné (jsou totožny), mají-li samodružné čtyři roviny nebo čtyři přímky v obecné poloze.

Ve volbě čtyř dvojic prvků (obecně položených) ke stanovení projektivnosti dvou polí (nebo dvou trsů nebo pole a trsu) můžeme provésti malou změnu: stačí, aby tři prvky jednoho útvaru byly téhož druhu, čtvrtý může býti druhu jiného. Na př. kolineace dvou polí jest určena, zvolíme-li ke třem bodům A, B, C a jedné přímce d v prvním poli korespondující tři body A', B', C' a přímku d' v poli druhém. Neboť přímky AB, AC, BC, d odpovídají tu přímkám $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$, d', čímž je kolineace obou polí stanovena, pokud ovšem zvolené prvky v jednom i druhém poli mají polohu obecnou. Duálně je kolineace dvou polí dána sdružením tří přímek a jednoho bodu (v obecné poloze) jednoho pole s třemi přímkami a jedním bodem pole druhého, protože se tato volba hned převádí na čtyři dvojice korespondujících bodů.[11])

e) Projektivnost dvou základních útvarů dvojmocných, určenou jedním z uvedených způsobů, *sestrojíme* podle hořejší úvahy. Protože ke stanovení projektivnosti jsou nutny a stačí buď dvě dvojice projektivních (základních) útvarů jednomocných nebo čtyři dvojice prvků,

[10]) O *pěti dvojicích bodů*, sdružených ve dvou rovinách kolineárních, platí: Ve dvou kolineárních polích jsou projektivními pětibodové skupiny na všech stranách dvou úplných rovinných pětirohů, jež sobě v kolineaci té odpovídají, jakož i vrcholy korespondujících pětirohů těch na sdružených kuželosečkách jimi určených; obráceně existence těchto projektivností jest podmínkou toho, aby dvě skupiny po pěti bodech sobě v kolineaci odpovídaly. Viz *G. Kohn*, Über die Erweiterung eines Grundbegriffs der Geometrie der Lage, Math. Annalen 46 (1895).

[11]) Proti tomu není kolineace dvou polí stanovena, přiřadíme-li dvěma bodům A, B a dvěma přímkám c, d jednoho pole dva body A', B' a dvě přímky c', d' pole druhého. Neboť aby kolineace byla možna, musily by sobě odpovídati také body (AB, c) a $(A'B', c')$, jakož i body (AB, d) a $(A'B', d')$, takže by čtyři body na AB (dva dané a dva uv. průsečíky) byly projektivní se čtyřmi body na $A'B'$, vlastně libovolně danými — což není obecně možno. A všeobecně není projektivnost dvou útvarů dvojmocných určena čtyřmi dvojicemi prvků korespondujících, z nichž dvě dvojice jsou jednoho druhu a dvě druhu jiného.

z kterýchž možností se jedna snadno převádí na druhou, omezíme se na jeden případ a sice druhý. S druhé strany spokojíme se s úvahou o kolineaci a korelaci dvou polí, protože zcela obdobná konstrukce platí pro dva trsy i pro pole a trs.

Abychom sestrojili *kolineaci* dvou polí v rovinách α a α', danou čtyřmi dvojicemi sdružených prvků, tak totiž, že

vrcholům čtyřrohu $ABCD$ v α přiřaděny jsou vrcholy čtyřrohu $A'B'C'D'$ v α', sestrojíme projektivnost mezi řadami bodovými na přímkách AB a $A'B'$, v níž bodům A, B, (AB, CD) odpovídají body A', B', $(A'B', C'D')$, obdobně mezi řadami bodovými na přímkách CD a $C'D'$; dále projektivnost mezi svazky o středech A a A', v níž paprskům $A(BCD)$ odpovídají paprsky $A'(B'C'D')$, obdobně mezi svazky o středech B a B'.

K libovolnému bodu P v α sestrojíme pak korespondující bod P' v α' tím, že vedeme promítající paprsky AP a BP, k nim pak sdružené paprsky ve svazcích A' a B'; průsečík těchto paprsků je bod P'.

K libovolné přímce p v α sestrojíme odpovídající přímku p' v α' tím, že zjistíme průsečíky přímky p s přímkami AB a CD, k nim pak sdružené body v řadách na $A'B'$ a $C'D'$; spojnice těchto bodů je přímka p'.

stranám čtyrstranu $abcd$ v α přiřaděny jsou strany čtyrstranu $a'b'c'd'$ v α', sestrojíme projektivnost mezi svazky paprskovými o středech ab a $a'b'$, v níž paprskům a, b, (ab, cd) odpovídají paprsky a', b', $(a'b', c'd')$, obdobně mezi svazky paprskovými o středech cd a $c'd'$; dále projektivnost mezi řadami na přímkách a a a', v níž bodům $a(bcd)$ odpovídají body $a'(b'c'd')$, obdobně mezi řadami na přímkách b a b'.

K libovolné přímce p v α sestrojíme odpovídající přímku p' v α' tím, že zjistíme průsečíky ap a bp, k nim pak sdružené body na a' a b'; spojnice těchto bodů je přímka p'.

K libovolnému bodu P v α sestrojíme odpovídající bod P' v α' tím, že jej promítneme z bodů ab a cd, k paprskům těm pak vedeme sdružené paprsky ve svazcích o středech $a'b'$ a $c'd'$; průsečík těchto paprsků je bod P'.

Abychom sestrojili *korelaci* dvou polí v rovinách α a α', v níž vrcholům čtyřrohu $ABCD$ v α mají odpovídati strany čtyrstranu $a'b'c'd'$ v α', sestrojíme obvyklým způsobem (aspoň z části) projektivnost mezi paprskovými svazky o středech A, B, C, D a bodovými řadami na osách a', b', c', d', rovněž mezi bodovými řadami na stranách daného čtyřrohu v α a paprskovými svazky ve vrcholech daného čtyrstranu v α'. K libovolnému bodu P roviny α sestrojíme odpovídající přímku p' roviny α' tím, že promítneme P ze dvou daných vrcholů (A, B) a zjistíme body, těmto promítkám na korespondujících přímkách (a', b') odpovídající; jejich spojnice je p'. K libovolné přímce p roviny α sestrojíme odpovídající bod P' roviny α' tím, že protneme p dvěma stranami daného čtyřrohu (třebas AB, CD) a zjistíme přímky, těmto průsečíkům ve svazcích

o korespondujících vrcholech $(a'b',\ c'd')$ odpovídající; jejich průsečík je P'.[12])

f) Není-li u projektivnosti mezi dvěma základními útvary dvojmocnými, stanovené čtyřmi dvojicemi prvků sdružených, splněna podmínka, že z určujících prvků jednoho i druhého útvaru uvažovaného žádné tři nepatří témuž útvaru jednomocnému, vzniknou *projektivnosti zvrhlé*.

Dejme tomu nejprve, že korelace dvou polí v rovinách α a α' je stanovena sdružením čtyř bodů $A,\ B,\ C,\ D$ v α se čtyřmi přímkami $a',\ b';\ c',\ d'$ v α'; tyto přímky mějte polohu obecnou, kdežto z oněch bodů ať leží $B,\ C,\ D$ v jedné přímce a. Ze dvou projektivností $A(BCD) \barwedge a'(b'c'd')$, $B(ACD) \barwedge b'(a'c'd')$, jež slouží ke konstrukci této korelace, jest první pravá, druhá však zvrhlá se singulárními prvky a resp. $b'a'$ (v této odpovídá všem přímkám svazku B bod $b'a'$, přímce a pak všechny body na b'). Odtud zjistíme, že libovolnému bodu X v rovině α mimo a ležícímu odpovídá přímka a', kdežto bodu X na a odpovídají všechny přímky svazku se středem na a' v bodě, sdruženém v oné první projektivnosti ke spojnici AX; dále že libovolné přímce x v α odpovídá bod na a', sdružený v první projektivnosti k průsečíku ax, jdežto přímce a

[12]) V kolineaci dvou rovinných polí $\alpha,\ \alpha'$ sluje přímka jednoho pole α, jež odpovídá nevlastní přímce pole druhého α', *přímka mezní* (limitní, úběžnice) pole α.

Jestliže kolineace dvou rovin je metricky tak speciální, že nevlastní přímce jedné roviny odpovídá nevlastní přímka roviny druhé (t. j. je-li mezní přímka jedné roviny v nekonečnu, rovněž tedy mezní přímka druhé roviny), sluje kolineace ta *afinita*; útvary sobě v afinitě odpovídající slují *afinní*. Afinní v perspektivní poloze jsou dvě rovinné soustavy, z nichž jedna vznikla z druhé rovnoběžným promítnutím. U dvou rovin v afinitě sobě odpovídajících korespondují rovnoběžným přímkám přímky rovnoběžné (rovnoběžníku rovnoběžník), řadám bodovým bodové řady podobné. Afinita dvou rovin je určena třemi dvojicemi sdružených (vlastních) bodů nebo přímek (z nichž body téže roviny neleží v jedné přímce, resp. přímky téže roviny neprocházejí jedním bodem). Obsahy dvou rovnoběžníků (uzavřených ploch vůbec), v afinitě si odpovídajících, mají konstantní poměr; speciální afinita, v níž poměr ten jest roven 1 (obsahy ploch sobě odpovídajících jsou si rovny), sluje *ekvivalentní afinita*.

Jestliže kolineace dvou rovin jest ještě metricky speciálnější, převádějíc nevlastní přímku jedné roviny v nevlastní přímku roviny druhé a absolutní involuci oné v absolutní involuci této, sluje *podobnost*. Je to afinita, v níž dvojicím kolmých přímek odpovídají opět dvojice přímek kolmých; svazkům paprskovým korespondují shodné svazky paprskové; protože dva korespondující úhly jsou si rovny, jsou korespondující trojúhelníky (a útvary vůbec) podobny. Délky dvou úseček v této příbuznosti korespondujících mají konstantní poměr (poměr podobnosti); speciální podobnost, v níž poměr ten jest 1 (délky sdružených úseček jsou si rovny), sluje *shodnost*.

O metrických vlastnostech kolineace i korelace dvou útvarů dvojmocných a o afinitě i podobnosti viz na př. *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage II, nebo *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften II.

odpovídají všechny body roviny α'. Existují tedy v této *zvrhlé korelaci singulární přímka* a v α a *singulární přímka* a' v α', jež odpovídají všem bodům roviny α' resp. α; každé přímce pak v α a v α' odpovídá bod na a' resp. a, sdružený v určité projektivnosti k průsečíku přímky té na a resp. a'.

Duálně přijdeme ke *zvrhlé korelaci* se *singulárními body* A v α a A' v α': v této odpovídá každé přímce každé z obou rovin singulární bod roviny druhé, každému bodu X a X' přímka, sdružená ve svazku se středem v bodě A' resp. A určitou projektivností ke spojnici AX resp. $A'X'$.

Zvolíme-li v jedné rovině α čtyři body v obecné poloze, v druhé α' však jim odpovídající čtyři body tak, že tři z nich leží v jedné přímce, vznikne *zvrhlá kolineace*, při níž existuje v α *singulární bod* a v α' *singulární přímka*, mezi svazkem onoho a řadou této pak určitá projektivnost. V kolineaci této odpovídá singulární prvek každé z obou rovin libovolnému (stejnojmennému) prvku roviny druhé, prvek pak incidentní se singulárním prvkem libovolnému prvku incidentnímu s prvkem, jenž onomu v uvedené projektivnosti koresponduje.

Zvrhlé projektivnosti, zde uvažované, určeny jsou svými singulárními prvky a projektivností mezi jednomocnými útvary s nosiči v těchto prvcích.

K dalším projektivnostem zvrhlým dospějeme, vyjdeme-li od sdružených dvou skupin po čtyřech prvcích, z nichž tři prvky jedné roviny a tři prvky druhé roviny (s oněmi nesdružené) leží v jedné přímce nebo jdou jedním bodem; nebo stane-li se v hořejších zvrhlých korelacích a ve zvrhlé kolineaci projektivnost jednomocných útvarů tam uvedená zvrhlou. Obdržíme tak jednu korelaci a jednu kolineaci *dvojnásob* (v 2. stupni) *zvrhlé*; vzhledem k nim slují pak hořejší tři projektivnosti jednoduše (v 1. stupni) zvrhlé.

Korelace dvojnásob zvrhlá obsahuje v každé z obou rovin *singulární bod* a *singulární přímku incidentní* (jimiž je určena); v ní odpovídá libovolnému bodu každé roviny singulární přímka roviny druhé a libovolné přímce singulární bod, libovolnému bodu pak na singulární přímce libovolná přímka singulárním bodem.

Kolineace dvojnásob zvrhlá obsahuje v obou sdružených rovinách po *singulárním bodě* a *singulární přímce incidentních* (jimiž je určena); odpovídají tu sobě libovolný bod každé roviny a singulární bod roviny druhé, libovolná přímka a singulární přímka, libovolný bod ležící na singulární přímce v každé rovině a všechny body singulární přímky v rovině druhé, libovolná přímka jdoucí singulárním bodem a všechny přímky bodem singulárním.

Obě kolineace (jednoduše a dvojnásob) zvrhlé můžeme obdržeti pomocí perspektivnosti: v takové korespondenci jsou totiž dvě různé roviny proťaty trsem, jehož střed leží na jedné z nich resp. na obou

(na jejich průsečnici), přiřadíme-li navzájem body incidentní s týmž paprskem a přímky incidentní s touže rovinou trsu.[13])

51. Útvary odpovídající sobě v kolineaci nebo v korelaci. *a) Ve dvou kolineárních polích rovinných odpovídá* bodu bod, přímce přímka, dále pak také *kuželosečce kuželosečka.* Neboť dvěma projektivním paprskovým svazkům S_1 a S_2, jež vytvořují čáru 2. stupně v jedné rovině, odpovídají v druhé rovině dva svazky paprskové S'_1 a S'_2, o nichž platí $S'_1 \frown S_1$, $S'_2 \frown S_2$; protože pak jest $S_1 \frown S_2$, jest také $S'_1 \frown S'_2$, takže svazky tyto vytvořují tedy čáru 2. stupně; a duálně. Nebo můžeme říci: Každá přímka prvé roviny, protínající kuželosečku její ve dvou bodech, přechází kolineací v přímku, jež čáru druhé roviny kuželosečce korespondující protíná rovněž ve dvou bodech (oněm odpovídajících); a každý bod prvé roviny, vysílající dvě tečny k její kuželosečce, přechází kolineací v bod, z něhož lze ke korespondující čáře druhé roviny vésti rovněž dvě tečny (oněm odpovídající) — jest tedy čára druhé roviny kuželosečkou.[1])

Obecně jmenujeme

jednorozměrnou (spojitou) soustavu bodů v rovinném poli, jež má s libovolnou lineární bodovou řadou své roviny nejvýše n společných bodů (reálných) čili kterou libovolná přímka její roviny protíná nanejvýš v n bodech, (*rovinnou*) *řadou bodovou* čili (rovinnou) *čarou n-tého stupně.*[2])

jednorozměrnou (spojitou) soustavu přímek v rovinném poli, jež má s libovolným lineárním paprskovým svazkem své roviny nejvýše ν společných přímek (reálných) čili ke které lze z libovolného bodu její roviny vésti nanejvýš ν tečen, (*rovinným*) *svazkem paprskovým* čili (rovinnou) *čarou ν-té třídy.*[2])

Duálně nazýváme v trsu

(*středovým*) *svazkem paprskovým* čili *kuželem n-tého stupně* (s vrcholem ve středu trsu) takovou jednorozměrnou (spojitou) soustavu přímek (se společným bodem), jež má s libovolným lineárním paprskovým svazkem trsu společných nej-

(*středovým*) *svazkem rovinovým* čili *kuželem ν-té třídy* (s vrcholem ve středu trsu) takovou jednorozměrnou (spojitou) soustavu rovin (se společným bodem), jež má s libovolným lineárním rovinovým svazkem trsu společných nejvýše

[13]) Existují ještě projektivnosti zvrhlé (2. druhu), v nichž se vyskytují jednomocné útvary, složené z prvků singulárních. Zvrhlé projektivnosti dvou rovin vyšetřoval po prvé *T. A. Hirst*, On the correlation of two planes, Annali mat. (2) 6 (1875) (otisk z Proceedings Math. soc. London 5). Viz *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften II, p. 219 a n.; *G. del Prete*, Le corrispondenze projettive degeneri, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 30 (1897).

[1]) Zvrhlou kolineací (nebo korelací) 1. a 2. stupně transformuje se pravá kuželosečka bodová a přímková v rozmanité typy čar zvrhlých.

[2]) Řádná definice čar n-tého stupně a ν-té třídy je možna teprve na základě analytickém, jak bude uvedeno později.

výše n přímek (jest libovolnou rovinou trsu proťat nanejvýš v n přímkách); tento útvar jest průmětem (z bodu) čáry n-tého stupně.

ν rovin (lze k němu libovolnou přímkou trsu vésti nanejvýš ν tečných rovin); tento útvar jest průmětem (z bodu) čáry ν-té třídy.

Jako u kuželoseček poznáváme obecně, že *při kolineaci* dvou polí rovinných *čáře n-tého stupně a ν-té třídy* v první rovině *odpovídá čára n-tého stupně a ν-té třídy* v rovině druhé.

Neboť každému bodu a jenom bodu, v němž určitá přímka jedné roviny protíná čáru tam ležící, odpovídá v druhé rovině průsečík korespondující přímky s korespondující čarou této roviny; duálně všem tečnám a výhradně tečnám čáry v první rovině, vedeným k ní z určitého bodu roviny té, odpovídají tečny jdoucí korespondujícím bodem ke korespondující čáře roviny druhé.

Obdobně ve dvou kolineárních trsech odpovídají sobě kužele téhož stupně a téže třídy (jeden i druhý má totiž s libovolnou rovinou prvního, resp. druhého trsu týž počet společných přímek, k jednomu i druhému lze vésti libovolným paprskem prvního, resp. druhého trsu týž počet tečných rovin); spec. kuželi stupně druhého a třídy druhé odpovídá kužel druhého stupně a druhé třídy. A v kolineaci mezi polem a trsem odpovídá čáře kužel shodující se s čarou ve stupni a ve třídě.

Ve dvou korelativních polích rovinných odpovídá bodu přímka, přímce bod, kuželosečce bodové kuželosečka přímková a obráceně. A obecně *čáře n-tého stupně a ν-té třídy* v první rovině *odpovídá v korelaci čára n-té třídy a ν-tého stupně* v rovině druhé. Neboť přímka mající s čarou prvé roviny společných n bodů a bod vysílající k čáře té ν tečen přecházejí korelací v bod, z něhož jde ke korespondující čáře druhé roviny n tečen, a v přímku, jež čáru tu protíná v ν bodech. Obdobně u odpovídajících sobě kuželů dvou korelativních trsů shoduje se stupeň každého s třídou druhého. Konečně korelací mezi polem a trsem přechází čára n-tého stupně a ν-té třídy v kužel ν-tého stupně a n-té třídy.

Všeobecně v kolineaci mezi dvěma základními útvary dvojmocnými zachovává se stupeň a třída korespondujících čar a kuželů, kdežto v korelaci stupeň a třída jednoho útvaru shoduje se s třídou resp. stupněm druhého.

b) V jednom ze dvou polí v rovinách α, α' budiž dána kuželosečka k, v druhém kuželosečka k'; jest možno mezi poli těmi ustanoviti takovou kolineaci nebo korelaci, aby v ní jedné kuželosečce odpovídala druhá?

Zvolme na k tři (různé) body A, B, C, rovněž na k' tři (různé) body A', B', C'; přiřadíme-li oněm bodům tyto, není tím ovšem kolineace rovin α a α' ještě stanovena. Dejme tomu, že tečny kuželosečky k ve dvou zvolených bodech, třebas v A a B, protínají se v bodě T, obdobně tečny kuželosečky k' v bodech A' a B' protínají se v T'. Hledaná *kolineace rovin α a α', v níž sobě odpovídají jejich kuželosečky k a k', jest určena, přiřadíme-li bodům A, B, C, T* (pořadem) *body A', B', C', T'*. Neboť

čtyřmi těmito dvojicemi bodů je zajisté kolineace rovin α, α' stanovena. Kuželosečce k pak, jdoucí body A, B, C a mající v A a v B tečnu AT resp. BT, odpovídá v této kolineaci kuželosečka, jež obsahuje body A', B', C' a má v A' tečnu $A'T'$, v B' tečnu $B'T'$; kuželosečka takto (pěti prvky svými) určená je ovšem totožna s k'.

Korelace mezi α a α', v níž by dané kuželosečce k odpovídala daná kuželosečka k', jest určena, jestliže třem bodům a průsečíku dvou tečen v těchto bodech u kuželosečky prvé k přiřadíme tři tečny a spojnici dvou dotyčných bodů jejich u druhé kuželosečky k'.[3])

c) Všimněme si ještě souvislosti mezi kolineací dvou rovin a projektivností sdružených kuželoseček jejich. *Kolineací dvou rovin vznikají na dvou odpovídajících sobě kuželosečkách jejich projektivní řady*; neboť svazky paprskové, promítající tyto řady z korespondujících bodů kuželoseček těch, jsou (jako svazky odpovídající sobě v kolineaci) projektivní.

Jestliže naopak ve dvou rovinách α, α' je dáno po kuželosečce k, k', je ovšem projektivnost bodových řad na nich určena, jestliže třem bodům A, B, C na k přiřadíme tři body A', B', C' na k'; roviny α, α' uvedeme potom ve vztah kolineární takový, v němž by k a k' sobě odpovídaly, tím, že čtvrtému bodu D na k přiřadíme čtvrtý bod D' na k' s podmínkou $ABCD \barwedge A'B'C'D'$. Neboť sdružením čtyřrohů $ABCD$ a $A'B'C'D'$ je kolineace rovin α a α' určena; dejme tomu pak, že bodu X na kuželosečce k odpovídá v této kolineaci bod X' na rovině α', takže (vzhledem ke kolineaci) platí $X(ABCD) \barwedge X'(A'B'C'D')$. Je-li Y' libovolný bod na k' ,platí vzhledem k projektivnosti řad na k a k' vztah $X(ABCD) \barwedge Y'(A'B'C'D')$; důsledkem obou těchto projektivností jest pak $X'(A'B'C'D') \barwedge Y'(A'B'C'D')$, z něhož vyplývá, že bod X' je na kuželosečce k'.

Jsou-li tedy *na dvou kuželosečkách k a k' dány projektivní řady bodové, existuje kolineace rovin je obsahujících, v níž sobě tyto projektivní řady* (a tedy kuželosečky) *odpovídají*; tato kolineace jest projektivností daných kuželoseček, jak uvedeno, stanovena.[4])

Obdobné úvahy a výsledky platí ovšem také v případě duálním (pro kolineaci u dvou čar 2. třídy), dále pro korelaci dvou rovin (při projektivní korespondenci mezi kvadratickou řadou bodovou a kvadratickým svazkem paprskovým v rovině) a pro kolineaci i korelaci jakýchkoli útvarů dvojmocných.

---

[3]) Kuželoseček lze použíti k definici projektivních transformací roviny v rovinu: kolineace a korelace jest jednojednoznačná spojitá korespondence bodová resp. dotyková, jež kuželosečky jedné roviny převádí v kuželosečky roviny druhé; viz *A. Kawaguchi*, On collineation and correlation, Japanese Journal math. 3 (1926).

[4]) Protože při určitých bodech A, B, C na k jest možno každý z bodů A', B', C' na k' zvoliti ∞^1 způsoby, existuje ∞^3 kolineací dvou polí rovinných, při nichž sobě dvě dané kuželosečky jejich odpovídají.

52. Útvary perspektivní. *a*) Přiřadíme-li každému bodu a každé přímce roviny, jež protíná svazek druhého řádu, přímku a rovinu tohoto trsu je promítající, vzniká mezi polem a trsem kolineace; protože pole a trs jsou zde perspektivní, sluje tento vztah obou útvarů *perspektivní kolineace*, jež je tedy kolineací při zvlášť jednoduché vzájemné poloze útvarů dvojmocných. V perspektivní kolineaci jsou také dvě pole v (různých) rovinách, protínajících týž svazek dvojmocný, při čemž sobě odpovídají dva body ležící na témž paprsku svazku; a dva trsy (s různými středy), promítající totéž pole rovinné, v nichž sobě odpovídají dva paprsky promítající týž bod roviny.

Protože kolineace dvou soumístných útvarů dvojmocných jest identická, mají-li útvary ty samodružnými čtyři prvky téhož druhu (obecně položené), jest kolineace dvou nesoumístných útvarů dvojmocných perspektivní v těchto případech:

Dvě kolineární pole (v různých rovinách) *jsou perspektivní, procházejí-li spojnice čtyř dvojic korespondujících bodů jejich*, z nichž žádné tři téhož pole neleží v jedné přímce, *týmž bodem.*

Dva kolineární trsy (s různými středy) *jsou perspektivní, leží-li průsečnice čtyř dvojic korespondujících rovin jejich*, z nichž žádné tři téhož trsu neprocházejí jednou přímkou, *v téže rovině.*

Kolineární pole a trs jsou perspektivní, jestliže čtyři body onoho, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce, *leží na korespondujících přímkách tohoto.*

Je jasno, že u dvou rovin perspektivně kolineárních odpovídá každý bod jejich průsečnice sobě samému; rovněž u dvou trsů v perspektivní kolineaci korespondují všechny roviny jdoucí spojnicí jejich středů sobě samým. Platí však také obráceně:

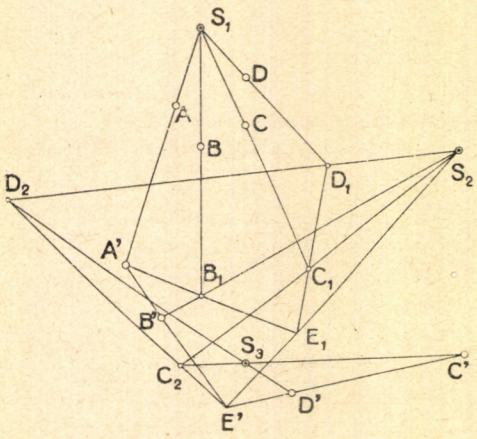
Dvě kolineární pole, jejichž společná přímka má všechny body samodružné, jsou perspektivní.

Dva kolineární trsy, jejichž společná přímka má všechny roviny samodružné, jsou perspektivní.

Neboť v případě dvou kolineárních polí v rovinách α a α' s uvedenou vlastností protínají se dvě korespondující přímky jejich vždy na průsečnici rovin těch $p = p'$. Jestliže tedy bodům A a B v α (mimo p) odpovídají body A' a B' v α' (mimo p'), protínají se přímky AB a $A'B'$ v bodě průsečnice $p = p'$; proto spojnice AA', BB', ležíce v téže rovině, protínají se v bodě S. Totéž platí o každé dvojici spojnic XX' a YY' korespondujících bodů daných rovin α a α'; všechny spojnice ty (nemohouce ležeti v jedné rovině) jdou tedy jediným bodem S, středem perspektivnosti obou rovin.[1])

[1]) Protože korespondující přímky dvou kolineárních polí jsou projektivní a protože dvě projektivní soumístné řady bodové s třemi samodružnými prvky mají všechny body samodružné, jsou dvě kolineární (nesoumístná) pole perspektivní, jestliže mají tři samodružné body (na své společné přímce). A duálně.

b) Dva perspektivní útvary dvojmocné jsou v korespondenci kolineární; obráceně však dva kolineární útvary nejsou — až na zvláštní případy — v poloze perspektivní. Ale lze dokázati důležitou větu, že *ze dvou kolineárních útvarů dvojmocných jeden lze v druhý převésti konečným počtem projekcí a řezů*, a určitěji u dvou nesoumístných útvarů téhož druhu (nejvýše) *třemi projekcemi a třemi řezy*.



Obr. 58.

Budiž totiž kolineace dvou polí v různých rovinách ϱ a ϱ' dána čtyřmi dvojicemi sdružených bodů A, B, C, D a A', B', C', D' (v obecné poloze, obr. 58).[2]) Bodem A' položme první pomocnou rovinu ϱ_1 a z bodu S_1, zvoleného na spojnici $A'A$, promítněme čtyřroh $ABCD$ do čtyřrohu $A'B_1C_1D_1$ roviny ϱ_1. Spojnice $B'B_1$ a spojnice bodů $E' = (A'B', C'D')$ a $E_1 = (A'B_1, C_1D_1)$, ležíce v rovině přímek $A'B'$ a $A'B_1$, protínají se v bodě S_2; z tohoto bodu promítněme čtyřroh $A'B_1C_1D_1$ roviny ϱ_1 na rovinu ϱ_2, jdoucí přímkou $A'B'$, do čtyřrohu $A'B'C_2D_2$. Přímky $C'D'$ a C_2D_2 protínají se v bodě E', v jejich rovině ležící spojnice $C'C_2$ a $D'D_2$ mají tudíž společný bod S_3; z bodu S_3 promítá se čtyřroh $A'B'C_2D_2$ do čtyřrohu $A'B'C'D'$ roviny ϱ'.

Jak patrno, jest rovina ϱ perspektivně kolineární s rovinou ϱ_1 (podle středu S_1), rovina ϱ_1 perspektivně kolineární s rovinou ϱ_2 (podle S_2), rovina ϱ_2 konečně perspektivně kolineární s rovinou ϱ' (podle S_3): rovina ϱ jest proto kolineární s rovinou ϱ', a sice tak, že čtyřrohu $ABCD$ v ϱ koresponduje čtyřroh $A'B'C'D'$ v ϱ'. Daná kolineace rovin ϱ a ϱ' je tedy vytvořena třemi transformacemi roviny v rovinu perspektivní.[3])

Protože od daného útvaru dvojmocného opětovným jeho promítáním a protínáním dospějeme k dvojmocnému útvaru, jenž je kolineární k danému, a protože podle věty právě dokázané také obráceně dva dvojmocné útvary kolineární lze projekcemi a řezy vždy ztotožniti, *můžeme dva kolineární útvary dvojmocné definovati jako útvary, z nichž*

[2]) Jsou-li daná kolineární pole soumístná, stačí (k převedení na případ hořejší) jedno z nich promítnouti na rovinu, různou od společné roviny polí daných.

[3]) Viz k tomu *J. Vojtěch*, O vytvoření kolineace projekcemi nebo homologiemi, Časopis mat. fys. 42 (1913).

jeden v druhý přechází konečným počtem transformací perspektivních (promítání a řezů).[4])[5])[6])

c) V předešlé úvaze užili jsme jednoduché věty, že dva útvary perspektivně kolineární k třetímu jsou spolu kolineární (obecně ovšem nikoli perspektivně). Platí všeobecně, že dva útvary kolineární k témuž třetímu jsou navzájem kolineární; dva útvary korelativní k třetímu jsou navzájem také kolineární.

Jinak pravíme, že *produkt dvou kolineací* nebo *produkt dvou korelací* útvarů dvojmocných *jest kolineace*; *produktem kolineace a korelace* útvarů dvojmocných *jest* pak *korelace*.

A obecně produktem libovolného počtu projektivností (kolineací a korelací) útvarů dvojmocných jest projektivnost, kolineace nebo korelace podle toho, je-li zde sudý resp. lichý počet korelací.

53. Souřadnice bodu a souřadnice přímky v rovině.

a) Abychom mohli polohu bodu v rovině stanoviti analyticky, zvolme dvě základní přímky x, y za *osy souřadnic* (obr. 59); na každé z nich zvolme tři body základní (jako P_0, P_1, P_∞), na ose x body

Abychom mohli polohu přímky v rovině určiti analyticky, zvolme dva základní body U, V za *středy souřadnic* (obr. 60); ve svazku středu U i ve svazku středu V zvolme po třech základních pa-

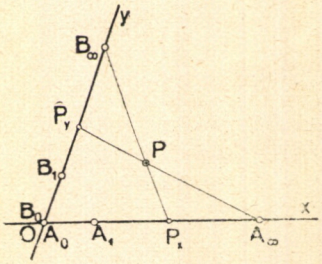
[4]) Zcela tak jako byly definovány dva projektivní útvary jednomocné.

[5]) Uvedeme-li jeden ze dvou perspektivních útvarů přemístěním v jinou polohu, přestanou ovšem útvary ty býti perspektivně kolineárními a stanou se pouze kolineární. Obráceně *lze dvě* (vlastní) *roviny kolineární*, jež nejsou afinní, *pohybem vždy uvésti v polohu perspektivní*. K tomu totiž je nutno a stačí, aby bylo možno nalézti v daných dvou rovinách a, a' po přímce, na nichž v dané kolineaci existují dvě řady shodné; nalezneme-li takovou dvojici, přemístíme roviny a, a' tak, aby tyto přímky splynuly. Dvě korespondující přímky se shodnými řadami lze však v rovinách kolineárních (neafinních) vždy určiti takto: Dejme tomu, že limitní přímky rovin a, a' jsou j, i' (v konečnu); bodu ji_∞ odpovídá bod $j'_\infty i'$, svazku rovnoběžných přímek se středem ji_∞ v a odpovídá svazek rovnoběžných přímek se středem $j'_\infty i'$ v a'; na přímkách těchto dvou svazků s podobnými řadami jest hledati řady shodné. Protneme-li první svazek dvěma rovnoběžkami a, b, jež na přímkách svazku toho vymezují rovné úsečky o délce d, lze dvěma způsoby nalézti paprsek druhého svazku onoho, na němž korespondující přímky a', b', jež se protínají v konečnu, vymezují úsečku téže délky d. Paprsek prvního svazku, jenž odpovídá jednomu nebo druhému paprsku v druhém svazku tak nalezenému, zbývá s tímto ztotožniti, aby dané roviny se staly perspektivními. Viz na př. *F. Severi*, Complementi di geometria proiettiva, p. 159. Také *W. C. Graustein*, A geometrical problem in which order of choice is important, Amer. math. Monthly 35 (1928).

Spec. jest možno dvě kuželosečky, na nichž bylo zvoleno po třech bodech A, B, C, resp. A', B', C', uvésti (s jejich rovinami) v takovou polohu, aby ležely spolu s třemi spojnicemi AA', BB', CC' na téže ploše kuželové druhého stupně.

[6]) Aplikace kolineací v deskriptivní geometrii viz ve spisech o této nauce (na př. v úvodu vytčených); také v *K. Doehlemann*, Geometrische Transformationen I.

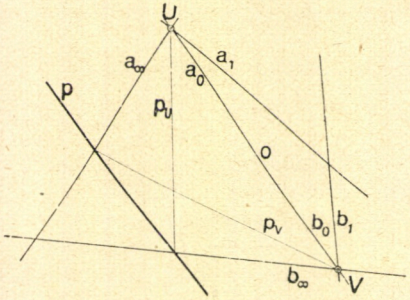
$A_0 = O$ (průsečík xy), A_1 a A_∞, na ose y body $B_0 = O$, B_1 a B_∞. Daný libovolný bod roviny P promítněme z bodu B_∞ na osu x do bodu P_x, z bodu A_∞ na osu y do bodu P_y; souřadnice a bodu P_x na ose x (ve stupnici určené body A_0, A_1, A_∞) sluje úsečkou nebo *souřadnicí* x bodu P, souřadnice b bodu P_y na



Obr. 59.

ose y (ve stupnici určené body B_0, B_1, B_∞) sluje pořadnicí nebo *souřadnicí* y bodu P. Každému bodu P v rovině, vyjma body na přímce $A_\infty B_\infty$, přísluší takto — při zvolených osách a jejich bodech základních — jediná dvojice čísel a, b, a píšeme $P\ (a, b)$; spec. body na ose x mají $y = 0$, body na ose y mají $x = 0$. Obráceně každé dvojici čísel (z nichž jedno vztahujeme na osu x, druhé na osu y) přísluší jediný bod roviny.

prscích, ve svazku prvém přímky $a_0 = o$ (spojnice UV), a_1, a_∞, v druhém přímky $b_0 = o$, b_1, b_∞. Je-li dána libovolná přímka roviny p, zjistíme souřadnici m přímky p_U svazku U, jež prochází průsečíkem pb_∞ (sluje *souřadnicí* u přímky dané), a souřadnici n přímky p_V svazku V, jdoucí průsečíkem pa_∞



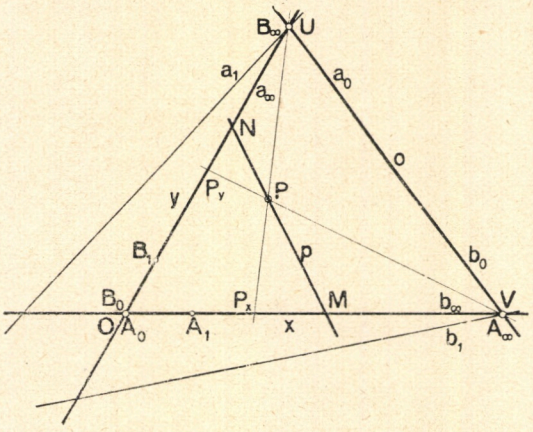
Obr. 60.

(*souřadnice* v přímky p). Každé přímce p v rovině, vyjma přímky jdoucí bodem $a_\infty b_\infty$, přísluší takto — při zvolených středech a základních přímkách jejich svazků — jediná dvojice čísel m, n, a píšeme $p\ (m, n)$; spec. přímky ve svazku U mají $v = 0$, přímky ve svazku V mají $u = 0$. Obráceně každé dvojici čísel (z nichž jedno vztahujeme na střed U, druhé na střed V) přísluší jediná přímka roviny.

b) Základní prvky obou soustav, *souřadnic bodových* x, y a *souřadnic přímkových* u, v uvedeme v úzkou a jednoduchou souvislost tím, že středy U, V položíme do bodu B_∞, resp. A_∞ (čímž $a_0 = b_0$ se ztotožní se spojnicí $A_\infty B_\infty$) a paprsky a_∞, b_∞ položíme do přímky y, resp. x.

Zvolíme tedy v rovině trojúhelník OUV (obr. 61), jeho vrchol O za body $A_0 = B_0$, vrcholy $U = B_\infty$ a $V = A_\infty$ za středy souřadnic přímkových, jeho stranu $UV = o$ za přímky $a_0 = b_0$, strany $OU = y = a_\infty$ a $OV = x = b_\infty$ za osy souřadnic bodových; zbývá zvoliti vztah mezi jednotkovými elementy A_1, B_1 a a_1, b_1 obou soustav.

Body na osách x, y o souřadnicích 0 a ∞ promítají se ze středů U, V paprsky o souřadnicích ∞ resp. 0; za paprsek v U a V o souřadnici 1 (paprsek a_1 resp. b_1) zvolme pak ten, který promítá bod na x resp. y o souřadnici -1 (harmonicky sdružený k bodu A_1 resp. B_1 vzhledem k bodům A_0, A_∞, resp. B_0, B_∞). Projektivnost perspektivních řad a svazků na ose x a ve středu U, na ose y a ve středu V jest podle tří zvolených podmínek vyjádřena v prvním případě rovnicí $xu + 1 = 0$,



Obr. 61.

v druhém případě rovnicí $yv + 1 = 0$. Proto je takto stanovená soustava souřadnic v paprskových svazcích o středech U, V k soustavě souřadnic v řadách bodových na osách x, y v tom vztahu, že přímka středem U o souřadnici u protíná osu x v bodě o souřadnici $x = -\frac{1}{u}$, a obráceně bod osy x o souřadnici x leží na přímce středem U o souřadnici $u = -\frac{1}{x}$, dále že přímka svazku V o souřadnici v je incidentní s bodem řady y o souřadnici $y = -\frac{1}{v}$, a obráceně bod řady y o souřadnici y je incidentní s přímkou svazku V o souřadnici $v = -\frac{1}{y}$.[1])

c) Jaká jest podmínka toho, aby v zavedené takto spojené soustavě souřadnic bodových a souřadnic přímkových ležel bod $P(a, b)$ na přímce $p(m, n)$?

Předpokládejme zatím, že čísla a, b, m, n jsou různá od nuly. Promítneme-li (obr. 61) bod P ze středů U, V na osy x, y, dostaneme tam

[1]) Zvolíme-li za přímku $A_\infty B_\infty$ nevlastní přímku roviny, přejdou zde uvedené projektivní souřadnice bodové v obyčejné souřadnice rovnoběžkové (Descartovy), souřadnice přímkové pak v souřadnice Plückerovy.

body P_x, P_y o souřadnicích a, resp. b. Přímka p, jdoucí bodem P, protíná osy x, y v bodech M, N: bod M, protože jím jde přímka svazku U o souřadnici m, má podle hořejšího souřadnici $-\frac{1}{m}$, bod N pak, protože je incidentní s přímkou svazku V o souřadnici n, má souřadnici $-\frac{1}{n}$. Při středu perspektivnosti P platí o bodech na ose x a na ose y

$$OVP_xM \barwedge OP_yUN;$$

o bodových souřadnicích jejich $0, \infty, a, -\frac{1}{m}$ a $0, b, \infty, -\frac{1}{n}$ platí tedy (z rovnosti dvojpoměrů)

$$a : -\frac{1}{m} = \left(-\frac{1}{n} - b\right) : -\frac{1}{n}$$

čili

$$ma + nb + 1 = 0.$$

K témuž výsledku můžeme dospěti také úvahou duální (o paprscích ve svazku U a ve svazku V). Je-li (v případech prve vyloučených) buď $a = 0$ $(b \neq 0)$ nebo $b = 0$ $(a \neq 0)$, vychází z nalezené relace $b = -\frac{1}{n}$, resp. $a = -\frac{1}{m}$, což vskutku platí, leží-li bod P na přímce p v těchto dvou případech; obdobně v případech $m = 0$ $(n \neq 0)$ a $n = 0$ $(m \neq 0)$. Přímky jdoucí bodem O a body ležící na přímce o (protože zůstaly vyloučeny při zavádění souřadnic) nebéřeme zatím v úvahu.

Nalezená nutná podmínka pro incidenci bodu P a přímky p jest také podmínkou dostačující; neboť z výsledné rovnice plyne hořejší rovnost dvojpoměrů a odtud projektivnost čtveřin bodových, z ní pak při samodružném bodě O perspektivnost těchto čtveřin, pročež přímka $p = MN$ prochází průsečíkem P přímek UP_x a VP_y. Tedy:

Nutnou a dostatečnou podmínkou toho, aby bod $P(a, b)$ byl incidentní s přímkou $p(m, n)$ jest platnost rovnice

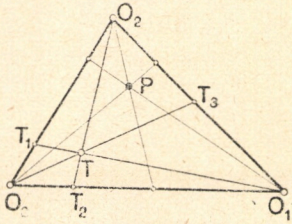
$$ma + nb + 1 = 0.^2)$$

d) Uvedené souřadnice bodové a přímkové mají tu vadu, že se jimi nevyjadřují body ležící na přímce $A_\infty B_\infty = o$, resp. přímky jdoucí bodem $a_\infty b_\infty = O$. Abychom i tyto prvky mohli vzíti v početní úvahy, zavedeme — obdobně jako při souřadnicích v řadě bodové — místo hořejších souřadnic nehomogenních *souřadnice homogenní*. Zařídíme věc tak, aby bod o nehomogenních souřadnicích x, y měl tři souřadnice x_1, x_2, x_3, o kterých při $x \neq \infty$, $y \neq \infty$ platí $x_1/x_3 = x$, $x_2/x_3 = y$, při $x = \infty$ nebo $y = \infty$ pak $x_3 = 0$; a přímka o nehomogenních souřadnicích u, v aby měla tři souřadnice u_1, u_2, u_3 s obdobným vztahem k u a v.

---

[2]) Elementárně (a pro rovinu samostatně) sestrojuje projektivní soustavu souřadnic bodových s lineární rovnicí pro přímku *Ch. H. Müntz*, Z geometryi rzutowej analitycznej (také něm.), Prace mat.-fiz. 28 (1917).

Zvolíme v rovině (obr. 62) *základní trojúhelník* s vrcholy O_1, O_2, O_3 a (mimo jeho strany ležící) *bod jednotkový* T; spojnice O_kT ať protínají protější strany trojúhelníku v bodech T_k ($k = 1, 2, 3$). Přímka O_3O_1 (dříve $OA_\infty = x$) obsahuje

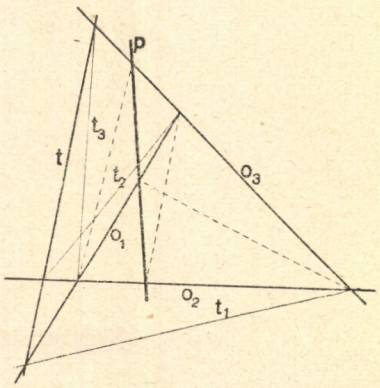


Obr. 62.

body, jejichž druhá souřadnice $x_2 = 0$; přímka O_3O_2 (dříve $OB_\infty = y$) obsahuje body, jejichž první souřadnice $x_1 = 0$; konečně o bodech přímky O_1O_2 (dříve $A_\infty B_\infty$) ať platí $x_3 = 0$. Vrcholům základního čtyřrohu $O_1O_2O_3T$ přisoudíme tedy podle uvedeného bodové souřadnice $O_1(1, 0, 0)$, $O_2(0, 1, 0)$, $O_3(0, 0, 1)$, $T(1, 1, 1)$; body T_k mají pak souřadnice $T_1(0, 1, 1)$, $T_2(1, 0, 1)$, $T_3(1, 1, 0)$. Na každé ze stran trojúhelníku $O_1O_2O_3$ máme tak tři základní body; vzhledem k nim má každý bod na přímce O_2O_3 souřadnice $(0, x_2, x_3)$, na přímce O_1O_3 souřadnice $(x_1, 0, x_3)$, na přímce O_1O_2 souřadnice $(x_1, x_2, 0)$.

Je-li P libovolný bod roviny (ležící mimo strany základního trojúhelníku), *existují tři čísla* x_1,

Zvolíme v rovině (obr. 63) *základní trojúhelník* o stranách o_1, o_2, o_3 a (jeho vrcholy neprocházející) *přímku jednotkovou* t; paprsky promítající její průsečíky o_kt na stranách trojúhelníku z protějších vrcholů označme t_k ($k = 1, 2, 3$).



Obr. 63.

Svazek paprskový o středu o_3o_1 (dříve U) obsahuje přímky o souřadnici $u_2 = 0$, svazek o středu o_3o_2 (dříve V) přímky o souřadnici $u_1 = 0$, konečně ve svazku o středu o_1o_2 (dříve $a_\infty b_\infty$) ať platí $u_3 = 0$. Strany základního čtyrstranu $o_1o_2o_3t$ budou tedy podle uvedeného míti přímkové souřadnice $o_1(1, 0, 0)$, $o_2(0, 1, 0)$, $o_3(0, 0, 1)$, $t(1, 1, 1)$; přímky t_k mají pak souřadnice $t_1(0, 1, 1)$, $t_2(1, 0, 1)$, $t_3(1, 1, 0)$. V každém z vrcholů trojúhelníku $o_1o_2o_3$ máme tak tři základní přímky; vzhledem k nim má každá přímka svazku o_2o_3 souřadnice $(0, u_2, u_3)$, ve svazku o_1o_3 souřadnice $(u_1, 0, u_3)$, ve svazku o_1o_2 souřadnice $(u_1, u_2, 0)$.

Je-li p libovolná přímka roviny (nejdoucí vrcholem základního trojúhelníku), *existují tři čísla* u_1, u_2, u_3

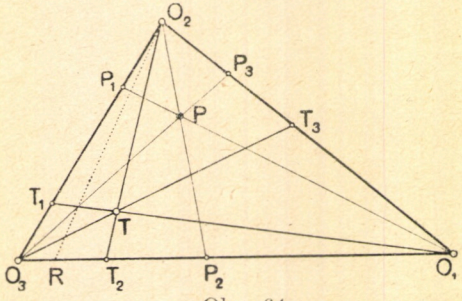
x_2, x_3 (všechna různá od 0) *tak, že průměty bodu P z vrcholů O_1, O_2, O_3 základního trojúhelníku na protější strany mají souřadnice* (0, x_2, x_3), (x_1, 0, x_3), (x_1, x_2, 0); *tato tři čísla slují homogenní souřadnice bodu P*, jejž tedy označujeme P (x_1, x_2, x_3), stručně $P(x_k)$.

Obráceně *každá trojice čísel* (vyjma 0, 0, 0), pojímaná jako homogenní souřadnice bodové, *určuje jediný bod roviny.*

(všechna různá od 0) *tak, že spojnice průsečíků přímky p na stranách o_1, o_2, o_3 základního trojúhelníku s protějšími vrcholy jeho mají souřadnice* (0, u_2, u_3), (u_1, 0, u_3), (u_1, u_2, 0); *tato tři čísla slují homogenní souřadnice přímky p*, kterou tedy značíme p (u_1, u_2, u_3), stručně $p(u_k)$.

Obráceně *každá trojice čísel* (vyjma 0, 0, 0), pojímaná jako homogenní souřadnice přímkové, *určuje jedinou přímku roviny.*

Dokážeme větu o souřadnicích bodových; duální úvaha platí pro souřadnice přímkové. Průměty libovolného bodu P v rovině z vrcholů základního trojúhelníku na protější strany jeho (obr. 64) buďtež P_1, P_2, P_3. Souřadnicemi dvou z těchto tří průmětů jsou určeny souřadnice bodu P; musíme dokázati, že dostaneme pro bod P tytéž souřadnice, ať vyjdeme od kterékoli z dvojic průsečíků P_k.



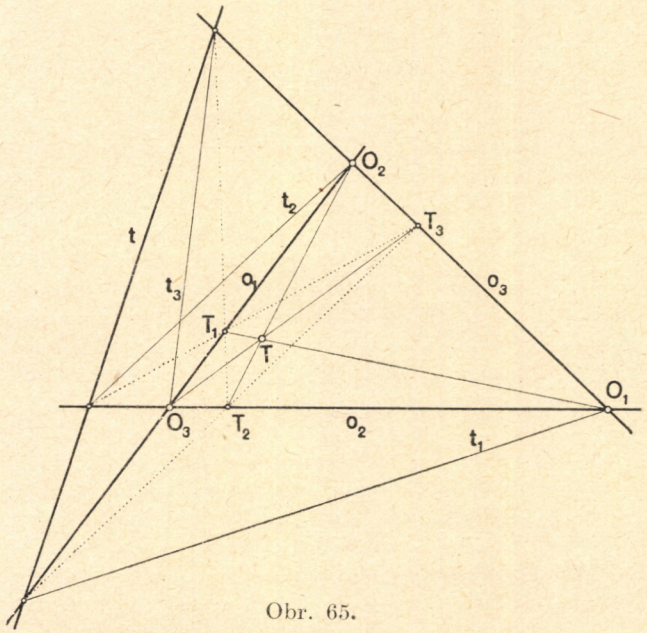
Obr. 64.

Jestliže průměty P_1 a P_2 mají souřadnice (0, a_2, a_3), resp. (a'_1, 0, a'_3), zvolíme $x_2 : x_3 = a_2 : a_3$, $x_1 : x_3 = a'_1 : a'_3$, a nalezneme tak souřadnice (x_1, x_2, x_3) bodu P. Jest ukázati, že průmět P_3 má souřadnice (x_1, x_2, 0). Za tím účelem promítněme skupinu bodů $O_1O_2T_3P_3$ strany O_1O_2 z vrcholu O_3 na spojnici O_1T, tento její průmět z vrcholu O_2 na stranu O_1O_3 do skupiny $O_1O_3T_2R$. Protože uvedené čtyři body na straně se souřadnicí $x_3 = 0$, z nichž první tři mají souřadnice (1, 0), (0, 1), (1, 1) a čtvrtý P_3 má neznámé souřadnice (y, z), jsou projektivní s body na straně, kde $x_2 = 0$, o souřadnicích (1, 0), (0, 1), (1, 1) a s bodem R, jsou souřadnice bodu R, odpovídajícího bodu P_3, také (y, z). Avšak skupina $O_1O_3RP_2$ na straně O_1O_3 je projektivní se skupinou $O_2O_3T_1P_1$, protože obě jsou perspektivní ke skupině na spojnici O_3P (podle středů O_2 a O_1). Ony body mají na straně, kde $x_2 = 0$, souřadnice (1, 0), (0, 1), (y, z), (x_1, x_3), tyto na straně se souřadnicí $x_1 = 0$ souřadnice (1, 0), (0, 1), (1, 1), (x_2, x_3): z rovnosti dvojpoměrů vychází tedy $y : z = x_1 : x_2$, takže souřadnice bodu P_3 jsou vskutku (x_1, x_2, 0).

Že obráceně trojice čísel x_1, x_2, x_3 určuje jediný bod roviny, je jasné: je-li z čísel těch (aspoň) jedno rovno nule (ne však všechna), jest to

jediný bod na straně základního trojúhelníku; není-li žádné nulou, protínají se (třebas) spojnice vrcholu O_1 s bodem $(0, x_2, x_3)$ a vrcholu O_2 s bodem $(x_1, 0, x_3)$ v bodě, jenž podle předešlého má souřadnice x_1, x_2, x_3.

Z volby souřadnic homogenních, bodových i přímkových, vysvítá, že bod nebo přímka jsou určeny poměrem tří souřadnic $x_1 : x_2 : x_3$, resp. $u_1 : u_2 : u_3$, a že tedy týž bod nebo touž přímku určují souřadnice (kx_1, kx_2, kx_3), resp. (ku_1, ku_2, ku_3), kde $k \neq 0$.[3])



Obr. 65.

c) Základní prvky obou soustav nehomogenních souřadnic bodových a přímkových zvolili jsme (v odst. *b*) v takové poloze vzájemné, že podmínka toho, aby bod $P\,(x, y)$ byl incidentní s přímkou $p\,(u, v)$, objevila se (v odst. *c*) ve tvaru $ux + vy + 1 = 0$. Při tom jsme však vyloučili body ležící na přímce $o = UV$ a přímky jdoucí bodem $O = xy$.

Dotčené spojení obou duálních soustav souřadnic nehomogenních doplníme nyní podle voleb předcházejících v základní útvar soustavy homogenních souřadnic bodových i přímkových. Základním trojúhelníkem budiž (obr. 65) trojúhelník o vrcholech O_1, O_2, O_3 (dříve V, U, O) a protějších stranách o_1, o_2, o_3 (dříve y, x, o). Jednotkovým bodem sou-

[3]) V metrické geometrii analytické volí se $x = x_1/x_3$, $y = x_2/x_3$ a obdobně $u = u_1/u_3$, $v = u_2/u_3$, jak je přirozené, pokud přímka $x_3 = 0$ má jako přímka nevlastní vůči přímkám $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ postavení zvláštní (netvoříc s nimi trojúhelníku jako u souřadnic projektivních).

stavy bodové budiž bod T, ležící mimo strany základního trojúhelníku; jeho průměty T_k z vrcholů O_k na protější strany o_k ať jsou jednotkovými body na těchto stranách. Za jednotkovou přímku t soustavy přímkové zvolme konečně přímku, na níž se protínají dvojice protějších stran homologických trojúhelníků $O_1O_2O_3$ a $T_1T_2T_3$; z harmonických vlastností čtyřrohu $O_1O_2O_3T$ plyne, že přímka t protíná strany o_k základního trojúhelníku v bodech, harmonicky sdružených k bodům T_k vzhledem k vrcholům trojúhelníku; paprsky, promítající průsečíky ty z vrcholů O_k, ať jsou jednotkovými paprsky v těchto vrcholech.[4])

Podmínka $ux + vy + 1 = 0$ přechází zavedením souřadnic homogenních v podmínku $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, platnou pro incidenci bodu $P\,(x_1, x_2, x_3)$ a přímky $p\,(u_1, u_2, u_3)$; zatím v případech, kdy ze všech souřadnic bodu i přímky není žádná nulová.

Vidíme však, že přímka $t\,(1, 1, 1)$, o jejíchž bodech platí $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, obsahuje také body $(0, -1, 1)$, $(-1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$ z bodových řad na stranách základního trojúhelníku; a duálně bod $T\,(1, 1, 1)$ o rovnici $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ jest obsažen také na paprscích $(0, -1, 1)$, $(-1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$ svazků ve vrcholech trojúhelníku základního. Abychom ukázali obecně, že uvedená relace platí i pro body a přímky, jejichž jedna souřadnice je nulová, všimněme si (třebas) přímky $(u_1, u_2, 0)$. Protože přímka $o_1\,(1, 0, 0)$ prochází bodem $O_2\,(0, 1, 0)$, přímka $o_2\,(0, 1, 0)$ bodem $O_1\,(1, 0, 0)$ a přímka $(1, 1, 0)$ bodem $(-1, 1, 0)$, jež všechny leží na straně o_3, protíná přímka $(u_1, u_2, 0)$ stranu o_3 v bodě $(-u_2, u_1, 0)$; neboť mezi body $(x_1, x_2, 0)$ na přímce o_3 a mezi průsečíky $(x'_1, x'_2, 0)$ paprsků, jež ve svazku O_3 mají tytéž souřadnice $u_1 = x_1$, $u_2 = x_2$, $u_3 = 0$, s touto přímkou existuje, jak patrno, involuce $x'_1 = -x_2$, $x'_2 = x_1$. Protože pak všechny body paprsku, promítajícího daný bod na straně základního trojúhelníku z protějšího vrcholu, mají tytéž dvě souřadnice jako on, má každý bod přímky $(u_1, u_2, 0)$ souřadnice $(-u_2, u_1, x_3)$. Vyhovují tedy všechny body (x_1, x_2, x_3) přímky $(u_1, u_2, 0)$ rovnici $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. Táž relace platí pro incidenci bodu a přímky s dvěma souřadnicemi nulovými. Máme tedy výsledek:

V soustavě homogenních souřadnic bodových a přímkových v rovině jest podmínkou incidence bodu (x_1, x_2, x_3) *a přímky* (u_1, u_2, u_3) *platnost vztahu*

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0.$$[5])[6])[7])

[4]) Jednotkový bod T a jednotková přímka t slují také harmonicky sdruženými vzhledem k trojúhelníku $O_1O_2O_3$ nebo *pólem* a *polárou*, sdruženými vzhledem k trojúhelníku základnímu.

[5]) Vyjdeme-li od dvou různých přímek v rovině, z nichž na každé jest racionální soustava bodů (a jejichž průsečík je bodem těchto soustav) (viz čl. 16), dospějeme tím, že všemi možnými způsoby sestrojujeme spojnice těchto bodů a průsečíky spojnic těch, *k racionální soustavě bodů a přímek v rovině*; na každé přímce této soustavy rovinné existuje racionální soustava bodů, takže lze k uvažované soustavě dospěti od kterýchkoli dvou přímek v ní obsažených (a ovšem duálně). K takové soustavě prvků v rovině dojdeme také od zvolených čtyř bodů (nebo přímek), v rovině

54. Rovnice přímky a bodu v rovině; kuželosečka. *a*) V soustavě souřadnic (nehomogenních nebo homogenních) pro body v rovině můžeme analyticky vyjádřiti (lineární) řadu bodovou v ní ležící, duálně pomocí souřadnic pro přímky v rovině lze vyjádřiti (lineární) svazek paprskový.

Rovnice, které vyhovují souřadnice x a y všech a jenom bodů ležících na určité přímce, sluje *rovnicí přímky* té.

Rovnice, které vyhovují souřadnice u a v všech a pouze přímek jdoucích určitým bodem, sluje *rovnicí bodu* toho.

Z vět o incidenci bodu a přímky, nahoře uvedených, plyne bezprostředně:

Rovnice

$$mx + ny + 1 = 0$$

jest rovnicí přímky o souřadnicích (m, n).

Rovnice

$$au + bv + 1 = 0$$

jest rovnicí bodu o souřadnicích (a, b).

Při souřadnicích homogenních pak platí:

Rovnice přímky o souřadnicích (m_1, m_2, m_3) *v homogenní soustavě bodové jest*

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = 0.$$

Levou stranu této rovnice značíme stručně $\mathfrak{m}$.

Rovnice bodu o souřadnicích (a_1, a_2, a_3) *v homogenní soustavě přímkové jest*

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0.$$

Levou stranu této rovnice značíme stručně $\mathfrak{A}$.

---

obecně položených, tvoříce všechny možné spojnice bodů i průsečíky přímek původních a postupně vznikajících (*rovinná síť Möbiova*). Učiníme-li čtyři body, od nichž při konstrukci sítě vycházíme, základními body soustavy homogenních souřadnic, mají všechny body i všechny přímky této sítě souřadnicemi čísla racionální celá, obráceně všechny body a přímky se souřadnicemi racionálními celými jsou v soustavě té obsaženy. Uvedeným způsobem lze dospěti ke každému bodu (a ke každé přímce) v rovině nebo se k němu (k ní) libovolně přiblížiti. Viz *O. Veblen-J. W. Young*, Projective geometry I, p. 86 a n.; *K. Doehlemann*, Geometrische Transformationen I, p. 127 a n.; *K. Zindler*, Zur Theorie der Netze und Configurationen, Sitzungsberichte Akad. Wien 98 (1889).

[6]) Podmínka incidence bodu (x_k) a přímky (u_k) jest méně jednoduchá při obecné vzájemné poloze prvků jednotkových T a t; jsou-li totiž průměty jednotkového bodu T z vrcholů O_k základního trojúhelníku na protější strany jeho označeny T_k a průsečíky jednotkové přímky t se stranami těmi označeny T'_k, označíme-li pak dvojpoměry čtveřin $O_2O_3T_1T'_1$, $O_3O_1T_2T'_2$, $O_1O_2T_3T'_3$ pořadem $-a_2/a_3$, $-a_3/a_1$, $-a_1/a_2$, má podmínka incidence bodu (x_k) a přímky (u_k) tvar obecnější $\frac{u_1x_1}{a_1} + \frac{u_2x_2}{a_2} + \frac{u_3x_3}{a_3} = 0$.

[7]) Obdobně jako pro body a přímky v rovině jest možno zavésti souřadnice také pro přímky a roviny v trsu.

Speciálně přímka, jež je stranou o_h základního trojúhelníku soustavy souřadnic ($h = 1, 2, 3$), má rovnici $x_h = 0$; přímka, jdoucí vrcholem $o_i o_j = O_k$ základního trojúhelníku ($i, j = 1, 2, 3$, $k \neq i, j$), má rovnici $m_i x_i + m_j x_j = 0$.

Rovnici přímky určené dvěma různými body $A\,(a_1, a_2, a_3)$, $B\,(b_1, b_2, b_3)$ nalezneme, eliminujíce koeficienty m_k z rovnic

$$\Sigma m_k x_k = 0, \quad \Sigma m_k a_k = 0, \quad \Sigma m_k b_k = 0,$$

kde součty jsou ovšem míněny pro $k = 1, 2, 3$. Proto přímka AB, určená body $A(a_k)$ a $B(b_k)$, má rovnici

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Speciálně bod, jenž je vrcholem O_h základního trojúhelníku soustavy souřadnic ($h = 1, 2, 3$), má rovnici $u_h = 0$; bod, ležící na straně $O_i O_j = o_k$ základního trojúhelníku ($i, j = 1, 2, 3$, $k \neq i, j$), má rovnici $a_i u_i + a_j u_j = 0$.

Rovnici bodu určeného dvěma různými přímkami $m\,(m_1, m_2, m_3)$, $n\,(n_1, n_2, n_3)$ nalezneme eliminací součinitelů a_k z rovnic

$$\Sigma a_k u_k = 0, \quad \Sigma a_k m_k = 0, \quad \Sigma a_k n_k = 0,$$

kde součty platí pro $k = 1, 2, 3$. Proto bod ab, určený přímkami $m(m_k)$ a $n(n_k)$, má rovnici

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Odtud pak plyne (rozvineme-li determinanty podle členů prvního řádku):

Spojnice bodů (a_k) a (b_k) má souřadnice

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

b) Podmínkou toho, aby tři body (a_k), (b_k), (c_k) ležely v přímce, jest podle předchozího platnost rovnice

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Průsečík přímek (m_k) a (n_k) má souřadnice

$$\begin{vmatrix} m_2 & m_3 \\ n_2 & n_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} m_3 & m_1 \\ n_3 & n_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix}.$$ [1])

Podmínkou toho, aby tři přímky (m_k), (n_k), (p_k) procházely bodem, jest podle předchozího platnost rovnice

$$\begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

[1]) Bod nebo přímka v rovině jest *imaginární*, jestliže aspoň jedna ze souřadnic prvku toho nebo jeden ze součinitelů v rovnici útvaru toho (po event. zkrácení) je imaginární; dva body nebo dvě přímky v rovině jsou *sdruženě imaginární*, mají-li své souřadnice nebo součinitele ve svých rovnicích (na místech stejně položených) imaginární konjugované. Zjistíme pak analyticky bezprostředně: Přímka, jež spojuje dva body sdruženě imaginární v rovině, jest reálná. Bod, v němž se protínají dvě přímky sdruženě imaginární v rovině, jest reálný. A odtud: Každým imaginárním bodem v rovině prochází jedna a jediná přímka reálná, jeho spojnice s bodem sdruženě imaginárním; duálně na každé imaginární přímce v rovině leží jeden a jediný bod reálný, její průsečík s přímkou sdruženě imaginární.

Zvolíme-li první dva body (a_k), (b_k) za základní na přímce (jimi určené), *lze souřadnice každého bodu přímky* (a jen těchto bodů) *vyjádřiti tvarem*

$$a_1 + \lambda b_1,\ a_2 + \lambda b_2,\ a_3 + \lambda b_3,$$

kde λ je proměnlivý *parametr bodu na přímce*. Neboť hodnoty $c_k = a_k + \lambda b_k$, vloženy do hořejšího determinantu, činí jej rovným nule; body o těchto souřadnicích jest pak přímka vyčerpána (pro $\lambda = 0$ máme bod (a_k), pro $\lambda = \infty$ bod (b_k)).[2])

Místo λ zavádíme také dva homogenní parametry λ_1, λ_2, takže bod X přímky, spojující body (a_k), (b_k), má souřadnice $\lambda_1 a_k + \lambda_2 b_k$; bodu (a_k) přísluší $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 0$, bodu (b_k) pak $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 1$. Poměr λ_1/λ_2 jest souřadnice bodu X vzhledem k bodům $A\,(a_k)$, $B\,(b_k)$ jako základním a bodu $J\,(a_k + b_k)$ jako jednotkovému, udávaje dvojpoměr čtveřiny bodů $ABJX$. Poznáváme to na průmětech těchto bodů z vrcholů základního trojúhelníku na protější strany jeho, majíce zřetel k témuž vztahu u bodů na přímce.

Pravíme, že rovnicemi $x_k = a_k + \lambda b_k$ nebo $x_k = \lambda_1 a_k + \lambda_2 b_k$ jest přímka, určená body (a_k), (b_k), vyjádřena *parametricky*.[3])

Zvolíme-li první dva paprsky (m_k), (n_k) za základní ve svazku (jimi určeném), *jest možno souřadnice každé přímky svazku* (a jen těchto přímek) *vyjádřiti tvarem*

$$m_1 + \mu n_1,\ m_2 + \mu n_2,\ m_3 + \mu n_3,$$

kde μ je proměnný *parametr přímky ve svazku*. Neboť hodnoty $p_k = m_k + \mu n_k$, vloženy do hořejšího determinantu, činí jej rovným nule; paprsky o těchto souřadnicích jest pak svazek vyčerpán (pro $\mu = 0$ máme přímku (m_k), pro $\mu = \infty$ přímku (n_k)).[2])

Místo μ zavádíme také dva parametry homogenní μ_1, μ_2, takže přímka x svazku se středem v průsečíku přímek (m_k), (n_k) má souřadnice $\mu_1 m_k + \mu_2 n_k$; přímce (m_k) přísluší zde $\mu_1 = 1$ a $\mu_2 = 0$, přímce (n_k) pak $\mu_1 = 0$ a $\mu_2 = 1$. Poměr μ_1/μ_2 jest souřadnice přímky x vzhledem k přímkám $m(m_k)$, $n(n_k)$ jako základním a přímce $j\,(m_k + n_k)$ jako jednotkové, udávaje dvojpoměr čtveřiny paprsků $mnjx$. Vidíme to na spojnicích průsečíků těchto paprsků na stranách základního trojúhelníku s protějšími vrcholy jeho se zřetelem k témuž vztahu u paprsků svazku.

Pravíme, že rovnicemi $u_k = m_k + \mu n_k$ nebo $u_k = \mu_1 m_k + \mu_2 n_k$ jest bod, určený přímkami (m_k), (n_k), vyjádřen *parametricky*.

[2]) Parametr λ bodu $x_k = a_k + \lambda b_k$ na uvažované přímce jest roven dvojpoměru bodu toho vzhledem k bodům (b_k), (a_k) a $(a_k + b_k)$. Duálně parametr μ přímky $u_k = m_k + \mu n_k$ v uvažovaném svazku rovná se dvojpoměru přímky té vzhledem k přímkám (n_k), (m_k) a $(m_k + n_k)$.

[3]) Z hořejšího (dvojím použitím) vyplývá, že zvolíme-li v rovině tři různé body (neležící v téže přímce) (a_k), (b_k), (c_k) jako základní, lze souřadnice všech bodů roviny vyjádřiti ve tvaru

$$\lambda_1 a_k + \lambda_2 b_k + \lambda_3 c_k,$$

kde λ_1, λ_2, λ_3 jsou tři (homogenní) parametry. A duálně.

Vyjádříme-li prvky řady bodové a duálně prvky svazku paprskového rovnicemi, platí podle předcházejícího:

Obecný bod řady, v níž jeden bod má rovnici $\mathbf{A} = 0$, druhý rovnici $\mathbf{B} = 0$, jest vyjádřen rovnicí

$$\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} = 0.$$

Obecný paprsek svazku, vněmž jeden paprsek má rovnici $\mathbf{m} = 0$, druhý $\mathbf{n} = 0$, jest vyjádřen rovnicí

$$\mathbf{m} + \mu\mathbf{n} = 0.$$

c) Hledejme relaci mezi parametry dvou projektivních útvarů jednomocných v rovině. Řada bodová, jejíž prvky mají souřadnice $a_k + \lambda b_k$, jest *perspektivní* se svazkem paprskovým, jehož elementy mají souřadnice $m_k + \mu n_k$, t. j. sdružené prvky obou útvarů jsou incidentní, platí-li

$$(m_1 + \mu n_1)(a_1 + \lambda b_1) + (m_2 + \mu n_2)(a_2 + \lambda b_2) + (m_3 + \mu n_3)(a_3 + \lambda b_3) = 0.$$

Úpravou této rovnice dostaneme

$$\alpha\lambda\mu + \beta\lambda + \gamma\mu + \delta = 0,$$

kde $\alpha = \Sigma n_k b_k$, $\beta = \Sigma m_k b_k$, $\gamma = \Sigma n_k a_k$, $\delta = \Sigma m_k a_k$. Tato rovnice jest bilineární pro oba parametry a může býti ovšem uvedena na tvar $\mu = \dfrac{-\beta\lambda - \delta}{\alpha\lambda + \gamma}$. Jest tedy *perspektivní korespondence dvou základních útvarů jednomocných různého druhu vyjádřena lineárním vztahem mezi jejich parametry.*

Protože pak každá projektivnost dvou základních útvarů jednomocných jest produktem transformací perspektivních a protože produkt lineárních transformací parametrů jest opět transformace lineární, jest *projektivní korespondence dvou* libovolných *základních útvarů jednomocných o parametrech λ a μ vyjádřena lineární relací*

$$\mu = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}.$$

Tuto relaci můžeme zjednodušiti volbou základních prvků v druhém útvaru podle prvého. Odpovídají-li dva základní prvky útvaru $[\mu]$ základním prvkům útvaru $[\lambda]$, platí pro $\lambda = 0$ také $\mu = 0$, pro $\lambda = \infty$ také $\mu = \infty$; odtud plyne $b = 0$, $c = 0$, a hořejší vztah se redukuje na tvar

$$\mu = k\lambda.^{4})$$

d) Víme, že v rovině dva projektivní svazky paprskové a duálně dvě projektivní řady bodové vytvořují kuželosečku. Na základě předešlého odvodíme *rovnici kuželosečky*, t. j. rovnici, které vyhovují souřadnice všech bodů nebo duálně souřadnice všech přímek (tečen) kuželosečky a jenom souřadnice těchto prvků.

---

[4]) Rovnici tuto můžeme psáti ještě jednodušeji $\mu = \lambda$ (zvolíme-li za jednotkový prvek v druhém útvaru ten, který odpovídá jednotkovému prvku útvaru prvého).

Budiž (v případě prvém) kuželosečka vytvořena projektivními svazky o středech A a B, z jejichž paprsků odpovídá spojnice $AB = p$ jako paprsek v A tečně kuželosečky n v B a jako paprsek svazku B tečně kuželosečky m v A. Rovnice těchto tří paprsků ať jsou

$$\mathbf{m} \equiv m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = 0,$$
$$\mathbf{n} \equiv n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = 0,$$
$$\mathbf{p} \equiv p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0;$$

obecný paprsek svazku o středu A má rovnici $\mathbf{m} + \lambda\mathbf{p} = 0$, obecný paprsek svazku B pak rovnici $\mathbf{p} + \mu\mathbf{n} = 0$. Projektivní vztah obou svazků jest stanoven relací mezi jejich parametry $\mu = k\lambda$. Abychom obdrželi rovnici, platnou pro průsečíky všech dvojic paprsků, sdružených v daných svazcích projektivních, vylučme parametry μ a λ z posledních tří rovnic: tím dostaneme rovnici

$$\mathbf{p}^2 - k\mathbf{mn} = 0,$$

jež je tedy rovnicí kuželosečky.

Jsou-li dány uvedené tři přímky $\mathbf{m} = 0$, $\mathbf{n} = 0$, $\mathbf{p} = 0$, z nichž dvě jsou tečny s danými body dotyčnými, jest ovšem kuželosečka (jednoznačně) určena jedním bodem dalším; dosadíme-li totiž jeho souřadnice do nalezené rovnice, obdržíme jedinou hodnotu pro k (určující projektivní korespondenci mezi paprskovými svazky, jimiž je kuželosečka vytvořena).

Obráceně jest útvar, určený rovnicí $\mathbf{p}^2 - k\mathbf{mn} = 0$, kuželosečkou; neboť od této rovnice lze dospěti k hořejším rovnicím projektivních svazků.

Tyto a duální výsledky jsou shrnuty ve větách:

Jsou-li $\mathbf{m} = 0$, $\mathbf{n} = 0$ *rovnice dvou* (různých) *tečen kuželosečky a* $\mathbf{p} = 0$ *rovnice přímky spojující jejich body dotyčné, jest rovnice kuželosečky v bodových souřadnicích tvaru*

$$\mathbf{p}^2 - k\mathbf{mn} = 0;$$

konstanta k *je určena souřadnicemi třetího bodu kuželosečky. Obráceně značí uvedená rovnice kuželosečku s tečnami* $\mathbf{m} = 0$, $\mathbf{n} = 0$ *v průsečících jejich s přímkou* $\mathbf{p} = 0$.

Rovnice $\mathbf{p}^2 - k\mathbf{mn} = 0$, kde $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ a $\mathbf{p}$ jsou lineární (homogenní) funkce bodových souřadnic x_1, x_2, x_3, jest stupně druhého v těchto souřadnicích; má tedy každá kuželosečka jako útvar bodový (čára

Jsou-li $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{B} = 0$ *rovnice dvou* (různých) *bodů kuželosečky a* $\mathbf{C} = 0$ *rovnice průsečíku tečen křivky v bodech těch, jest rovnice kuželosečky v přímkových souřadnicích tvaru*

$$\mathbf{C}^2 - k\mathbf{AB} = 0;$$

konstanta k *je určena souřadnicemi třetí tečny kuželosečky. Obráceně značí uvedená rovnice kuželosečku jdoucí body* $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, *jejíž tečny v bodech těch jdou bodem* $\mathbf{C} = 0$.

Rovnice $\mathbf{C}^2 - k\mathbf{AB} = 0$, kde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$ jsou lineární (homogenní) funkce přímkových souřadnic u_1, u_2, u_3, jest stupně druhého v těchto souřadnicích; má tedy každá kuželosečka jako útvar přímkový

druhého stupně) rovnici tvaru

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

(čára druhé třídy) rovnici tvaru

$$a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2 + 2a_{12}u_1u_2 + 2a_{13}u_1u_3 + 2a_{23}u_2u_3 = 0.$$

e) Nalezené rovnice křivky druhého stupně a křivky druhé třídy můžeme zjednodušiti vhodnou volbou soustavy souřadnic:

Položíme-li základní trojúhelník soustavy bodových souřadnic tak, že tečnami kuželosečky jsou dvě jeho strany $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ a spojnicí jejich bodů dotyčných třetí strana $x_2 = 0$, má kuželosečka rovnici

$$x_2^2 - kx_1x_3 = 0.$$

Položíme-li základní trojúhelník soustavy přímkových souřadnic tak, že body kuželosečky jsou dva jeho vrcholy $u_1 = 0$, $u_3 = 0$ a průsečíkem tečen kuželosečky v bodech těch třetí vrchol $u_2 = 0$, má kuželosečka rovnici

$$u_2^2 - ku_1u_3 = 0.$$

Zvolíme-li ještě jednotkový bod soustavy souřadnic (bodových) na kuželosečce, redukuje se její uvedená rovnice na tvar

$$x_2^2 - x_1x_3 = 0.$$

Přímka

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

jest tečnou této kuželosečky, má-li s ní dva splývající body společné; hledejme analytickou podmínku toho. Vyloučíme-li z obou rovnic x_3, dostaneme

$$u_1x_1^2 + u_2x_1x_2 + u_3x_2^2 = 0;$$

rovnice tato má dva splývající kořeny pro $x_1 : x_2$, platí-li

$$u_2^2 - 4u_1u_3 = 0.$$

To jest rovnice platná o všech tečnách dané kuželosečky jako útvaru bodového. Protože tato rovnice je tvaru, nalezeného prve pro kuželosečku jako útvar přímkový, přišli jsme znova k výsledku, že tečny křivky 2. stupně tvoří křivku 2. třídy.

55. Analytické vyjádření kolineace. *a*) Shledali jsme, že projektivní korespondence dvou (přímých) řad bodových (a základních útvarů jednomocných vůbec) jest vyjádřena lineárními rovnicemi mezi souřadnicemi jejich prvků; je tedy přirozeno, že i projektivnost dvou základních útvarů dvojmocných má obdobný výraz. Obraťme se nejprve ke kolineaci mezi dvěma rovinami; tu platí:

Kolineace dvou rovin α a α', jejichž body při zvolených základních prvcích homogenních soustav souřadnic mají souřadnice (x_1, x_2, x_3) *a* (x'_1, x'_2, x'_3), *jest vyjádřena rovnicemi*

$$\varrho x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$\varrho x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$\varrho x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,$$

za předpokladu, že determinant z koeficientů a_{hk} těchto rovnic (t. zv. *modul* transformace) jest od nuly různý; *a obráceně taková lineární transformace roviny α v rovinu α' značí vždy kolineaci.*

Abychom dokázali nejprve druhou část této věty, všimněme si předně, že uvedenou transformací převádí se každý bod $P\,(x_1, x_2, x_3)$ roviny α v jediný bod $P'\,(x'_1, x'_2, x'_3)$ roviny α'. Aby také naopak každému bodu P' v α' odpovídal jediný bod P v α, musí býti možno rovnice ty řešiti podle x_k. A vskutku, je-li determinant z koeficientů a_{hk} hořejších rovnic

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

různý od nuly, obdržíme řešením jich rovnice jednoznačné transformace inversní

$$\begin{aligned} \sigma x_1 &= A_{11}x'_1 + A_{21}x'_2 + A_{31}x'_3, \\ \sigma x_2 &= A_{12}x'_1 + A_{22}x'_2 + A_{32}x'_3, \\ \sigma x_3 &= A_{13}x'_1 + A_{23}x'_2 + A_{33}x'_3, \end{aligned}$$

kde A_{hk} je subdeterminant determinantu A, příslušný k prvku a_{hk} (a $\sigma = A/\varrho$).[1])

Všimněme si dále, že přímka roviny α o rovnici

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

přechází lineární transformací danou v útvar o rovnici

$$\begin{aligned} (A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3)\,x'_1 + (A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3)\,x'_2 + \\ + (A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3)\,x'_3 = 0 \end{aligned}$$

čili

$$u'_1x'_1 + u'_2x'_2 + u'_3x'_3 = 0,$$

což je opět přímka (roviny α'). Protože přímka o souřadnicích (u_1, u_2, u_3) přešla v přímku o souřadnicích (u'_1, u'_2, u'_3), můžeme kolineaci, vyjádřenou nahoře lineární transformací v souřadnicích bodových, vyjádřiti lineární transformací v souřadnicích přímkových

$$\begin{aligned} \mu u'_1 &= A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3, \\ \mu u'_2 &= A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3, \\ \mu u'_3 &= A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3. \end{aligned}$$

Konečně pro přechod od roviny α' k rovině α platí transformační rovnice souřadnic přímkových

$$\begin{aligned} \nu u_1 &= a_{11}u'_1 + a_{21}u'_2 + a_{31}u'_3, \\ \nu u_2 &= a_{12}u'_1 + a_{22}u'_2 + a_{32}u'_3, \\ \nu u_3 &= a_{13}u'_1 + a_{23}u'_2 + a_{33}u'_3, \end{aligned}$$

[1]) Je-li determinant $A \equiv |a_{hk}|$ uvažované transformace různý od nuly, jest ovšem od nuly různý také determinant A_{hk} transformace inversní (t. zv. adjungovaný k onomu), protože $|A_{hk}| = A^2$.

jak seznáme řešením rovnic předcházejících nebo transformací rovnice $u'_1x'_1 + u'_2x'_2 + u'_3x'_3 = 0$ pomocí rovnic první skupiny.[2])

Lineární transformací uvažovanou přechází základní útvar jednomocný v projektivní útvar jednomocný; neboť na př. přecházejí-li přímky $\mathfrak{m} = 0$, $\mathfrak{n} = 0$ v přímky $\mathfrak{m}' = 0$, $\mathfrak{n}' = 0$, odpovídají přímkám svazku $\mathfrak{m} + \lambda\mathfrak{n} = 0$ přímky svazku $\mathfrak{m}' + \lambda\mathfrak{n}' = 0$.

Že pak každá kolineace má rovnice uvedeného tvaru, vyplývá odtud, že jest možno kolineaci, stanovenou korespondencí dvou čtyřrohů, vždy analyticky vyjádřiti (jedinou) skupinou takových rovnic.

Dejme tomu totiž, že bodům (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1) v α mají odpovídati v α' body (a'_1, a'_2, a'_3), (b'_1, b'_2, b'_3), (c'_1, c'_2, c'_3), (d'_1, d'_2, d'_3), z nichž ovšem žádné tři neleží v přímce. Dosadíme-li souřadnice první dvojice sdružených bodů do obecných rovnic uvedených, obdržíme

$$\varrho_1 a'_1 = a_{11}, \quad \varrho_1 a'_2 = a_{21}, \quad \varrho_1 a'_3 = a_{31};$$

z dalších dvou dvojic plyne

$$\varrho_2 b'_1 = a_{12}, \quad \varrho_2 b'_2 = a_{22}, \quad \varrho_2 b'_3 = a_{32};$$
$$\varrho_3 c'_1 = a_{13}, \quad \varrho_3 c'_2 = a_{23}, \quad \varrho_3 c'_3 = a_{33}.$$

Vložíme-li konečně do rovnic těch souřadnice čtvrté dvojice sdružených bodů (1, 1, 1) a (d'_1, d'_2, d'_3), jakož i výrazy pro koeficienty a_{hk} už nalezené, dostaneme soustavu rovnic

$$\varrho d'_1 = \varrho_1 a'_1 + \varrho_2 b'_1 + \varrho_3 c'_1,$$
$$\varrho d'_2 = \varrho_1 a'_2 + \varrho_2 b'_2 + \varrho_3 c'_2,$$
$$\varrho d'_3 = \varrho_1 a'_3 + \varrho_2 b'_3 + \varrho_3 c'_3.$$

Z tohoto systému lineárních rovnic (volíce třebas $\varrho = 1$) nalezneme trojici hodnot pro ϱ_1, ϱ_2 a ϱ_3, vždy a jedinou, protože determinant ze součinitelů a'_k, b'_k, c'_k (souřadnic bodů neležících v přímce) je různý od nuly: z hodnot těch žádná není nulová, poněvadž by při nulové hodnotě na př. pro ϱ_3 byl nule roven determinant ze součinitelů d'_k, a'_k, b'_k (proti suposici, že příslušné body neleží v přímce).

Vzhledem k hořejším výrazům pro a_{hk} dostaneme tak tedy určité hodnoty pro tyto koeficienty lineární transformace, jež vyjadřují danou kolineaci; při tom jest determinant z koeficientů těch pro obecnou polohu daných bodů od nuly různý. A protože čtyřmi dvojicemi sdružených bodů (z nichž čtyři body první roviny lze zvoliti za vrcholy základního čtyřrohu soustavy souřadnic) jest definována každá kolineace mezi dvěma rovinami, jest každou kolineaci dvou rovin možno vyjádřiti lineární transformací na počátku uvedenou pro souřadnice bodové nebo

[2]) Transformace s koeficienty a_{kh}, převádějící u'_k v u_k, sluje (v algebře) vůči transformaci s koeficienty a_{hk}, jež převádí x_k v x'_k, *transponovaná* (rovněž tak transformace s koeficienty A_{kh} vůči transformaci s koeficienty A_{hk}).

Dvě skupiny proměnných x_k a u_k, jež se lineárně transformují způsobem hořejším, slují (navzájem) *kontragredientní*; skupiny proměnných pak, jež se transformují lineární transformací s týmiž koeficienty, slují *kogredientní*.

duálně lineární transformací souřadnic přímkových s podmínkou, že determinant z 9 koeficientů transformace jest od nuly různý.[3])[4])[5])

b) Jestliže základní prvky soustav souřadnic v rovinách a a a' zvolíme tak, že sobě v kolineaci odpovídají vrcholy základních čtyřrohů stejně označené (vrcholy základních trojúhelníků a body jednotkové), jest tato kolineace vyjádřena rovnicemi

$$\varrho x'_1 = x_1, \qquad \varrho x'_2 = x_2, \qquad \varrho x'_3 = x_3,$$

jež slují *kanonickými* rovnicemi kolineace; nebo ovšem stejně jednoduchými rovnicemi pro souřadnice přímkové.[6])[7])

---

[3]) Protože kolineace jest vždy vyjádřena lineární transformací a obráceně každá lineární transformace vyjadřuje kolineaci, můžeme uvedený systém tří rovnic pro souřadnice bodové nebo systém tří rovnic pro souřadnice přímkové pokládati za *definici kolineace*.

[4]) Vyjdouce od rovnice pro incidenci bodu a přímky v rovině a', totiž od rovnice $u'_1x'_1 + u'_2x'_2 + u'_3x'_3 = 0$, nalezneme, dosadíme-li sem za x'_k hořejší lineární funkce souřadnic x_k, *rovnici bilineární*

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\,u'_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\,u'_3 + \\ + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\,u'_3 = 0,$$

která je tedy také (za suposice $A \neq 0$) analytickou definicí kolineace dvou rovin (a a a'). Stejně ovšem bilineární rovnice

$$u_1\,(A_{11}x'_1 + A_{21}x'_2 + A_{31}x'_3) + u_2\,(A_{12}x'_1 + A_{22}x'_2 + A_{32}x'_2) + \\ + u_3\,(A_{13}x'_1 + A_{23}x'_2 + A_{33}x'_3) = 0,$$

obdobně odvozená.

[5]) Kolineace, uvedenými rovnicemi analyticky definovaná, jest *reálná*, jsou-li koeficienty jejích rovnic reálné; taková kolineace převádí ovšem reálné prvky v reálné, imaginární v imaginární (sdruženě komplexní ve sdruženě komplexní). Kolineace, jejíž rovnice mají součinitele komplexní, sluje *komplexní*. Rovněž tak v dalším u korelace.

[6]) Přejdeme-li od souřadnic homogenních k nehomogenním, obdržíme rovnice kolineární transformace, převádějící (rovinné) pole bodů (x, y) v pole bodů (x', y'), ve tvaru

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \qquad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}},$$

kde $A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$

V souřadnicích přímkových je táž transformace roviny a v rovinu a' vyjádřena rovnicemi

$$u' = \frac{A_{11}u + A_{12}v + A_{13}}{A_{31}u + A_{32}v + A_{33}}, \qquad v' = \frac{A_{21}u + A_{22}v + A_{23}}{A_{31}u + A_{32}v + A_{33}},$$

kde A_{hk} je subdeterminant determinantu A, příslušný k prvku jeho a_{hk}.

Je pozoruhodno (a homogenními rovnicemi odůvodněno), že lineární lomené funkce v těchto rovnicích kolineace mají (a musí míti) stejné jmenovatele.

[7]) Kolineaci dvou rovin lze charakterisovati jako bodovou transformaci, při které soustava všech přímek jedné roviny přechází opět v takovou

c) Pro analytické vyjadřování a zkoumání útvarů rovinných jest důležito poznamenati, že (obdobně jako v útvaru jednomocném) rovnice pro kolineaci dvou rovinných polí soumístných vyjadřují také *transformaci souřadnic* pevného bodu a pevné přímky z jedné soustavy do druhé.

Dejme tomu totiž, že v rovině byly zvoleny dva základní útvary souřadnic (trojúhelníky s prvky jednotkovými), jeden pro jedno, druhý pro druhé ze soumístných polí této roviny (α resp. α'). Kolineární transformace, jež převádí prvky prvního pole, body o souřadnicích x_k a přímky se souřadnicemi u_k v jeho soustavě, v prvky pole druhého, body (x'_k) a přímky (u'_k) vztahované k základnímu útvaru tohoto, má rovnice

$$\varrho x'_h = \Sigma a_{hk} x_k, \quad \text{resp.} \quad \mu u'_h = \Sigma A_{hk} u_k.$$

Jestliže však každý bod (x'_h) je totožný s bodem (x_h) a každá přímka (u'_h) s přímkou (u_h), jest tato kolineace identickou transformací roviny α v rovinu α'; uvedené rovnice vyjadřují zde vztahy mezi souřadnicemi každého prvku v jedné a v druhé soustavě souřadnic.[8]) Platí tedy: *Vztahujeme-li prvky roviny k základním útvarům dvou různých soustav souřadnic homogenních, jsou souřadnice každého bodu a každé přímky v jedné soustavě lineární homogenní funkce* (s konstantními koeficienty determinantu nenulového) *souřadnic téhož prvku v soustavě druhé*; obráceně *lineární homogenní transformace* (s uvedenými součiniteli) *souřadnic* x_k *v* x'_k *a souřadnic* u_k *v* u'_k *může býti vždy pokládána za transformaci souřadnic bodů resp. přímek v rovině.*

56. Analytické vyjádření korelace. *a*) Podobnými úvahami jako při kolineaci lze vyšetřiti analytické vyjádření korelace.

Korelace převádějící body (x_1, x_2, x_3) *a přímky* (u_1, u_2, u_3) *roviny* α *v přímky* (u'_1, u'_2, u'_3) *a body* (x'_1, x'_2, x'_3) *roviny* α' *jest vyjádřena lineární transformací*

$$\begin{aligned} \varrho u'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \varrho u'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \varrho u'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned}$$

za suposice, že determinant z koeficientů těchto rovnic jest různý od nuly; *obráceně tato lineární transformace vyjadřuje vždy korelaci.*

Neboť je-li korelace určena korespondencí čtyřrohu a čtyrstranu, můžeme — obdobně jak se stalo v čl. předcházejícím — nalézti vždy

---

soustavu roviny druhé (d^2y/dx^2 v d^2y'/dx'^2), a odtud odvoditi její rovnice; viz *S. Lie-G. Scheffers*, Vorlesungen über continuierliche Gruppen, p. 33. Stačí však žádati u transformace bodové, aby čtyři lineární svazky přímek přecházely v takové svazky, jak ukázal *E. Kasner*, The characterization of collineations, Bulletin Amer. math. soc. 9 (1903). Pro jednoduchý důkaz, že každá jednojednoznačná spojitá transformace bodová dvou rovin, jež přímky převádí v přímky, jest vyjádřena rovnicemi lineárními, viz *L. Bieberbach*, Projektive Geometrie (1931), p. 52.

[8]) Základní trojúhelník nové soustavy má v původní soustavě souřadnic vrcholy (A_{1k}), (A_{2k}), (A_{3k}) a strany (a_{1k}), (a_{2k}), (a_{3k}), jednotkový bod jest $(A_{1k} + A_{2k} + A_{3k})$ a jednotková přímka $(a_{1k} + a_{2k} + a_{3k})$.

a jediný systém koeficientů a_{hk} a tedy určitou lineární transformaci, jež tuto korelaci vyjadřuje.

Uvedené tři rovnice lineární transformace převádějí libovolný bod (x_1, x_2, x_3) roviny α v přímku (u'_1, u'_2, u'_3) roviny α'. Rovnice, které odtud vyplývají řešením podle x_1, x_2, x_3, totiž

$$\begin{aligned}\sigma x_1 &= A_{11}u'_1 + A_{21}u'_2 + A_{31}u'_3,\\ \sigma x_2 &= A_{12}u'_1 + A_{22}u'_2 + A_{32}u'_3,\\ \sigma x_3 &= A_{13}u'_1 + A_{23}u'_2 + A_{33}u'_3,\end{aligned}$$

převádějí (inversní transformací) libovolnou přímku roviny α' v bod roviny α; aby tento bod byl určitý, musí ono řešení býti možno, t. j. musí platit o koeficientech daného systému rovnic

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \neq 0.$$

Daná transformace převádí také body na přímce (u_1, u_2, u_3) roviny α v přímky svazku o středu (x'_1, x'_2, x'_3) na rovině α'; neboť přímka

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0,$$

dosadíme-li do její rovnice hořejší výrazy za x_k, přechází v bod

$$\begin{aligned}(A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3)u'_1 + (A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3)u'_2 +\\ + (A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3)u'_3 = 0,\end{aligned}$$

jehož souřadnice jsou

$$\begin{aligned}\mu x'_1 &= A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3,\\ \mu x'_2 &= A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3,\\ \mu x'_3 &= A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3.\end{aligned}$$

Konečně řešením této třetí soustavy lineárních rovnic podle u_k nebo dosazením první soustavy do rovnice bodu $u'_1x'_1 + u'_2x'_2 + u'_3x'_3 = 0$ nalézáme, že bodu (x'_1, x'_2, x'_3) v α' odpovídá (v inversní transformaci) přímka v α o souřadnicích

$$\begin{aligned}\nu u_1 &= a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + a_{31}x'_3,\\ \nu u_2 &= a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{32}x'_3,\\ \nu u_3 &= a_{13}x'_1 + a_{23}x'_2 + a_{33}x'_3.\end{aligned}$$ [1])[2])

[1]) Pro korelaci, transformující rovinu α v rovinu α', obdržíme z hořejších rovnic rovnice v souřadnicích nehomogenních

$$u' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}},$$

$$v' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}},$$

kde determinant A jest různý od nuly, nebo rovnice

$$x' = \frac{A_{11}u + A_{12}v + A_{13}}{A_{31}u + A_{32}v + A_{33}},$$

$$y' = \frac{A_{21}u + A_{22}v + A_{23}}{A_{31}u + A_{32}v + A_{33}}.$$

b) Korelaci, vyjádřenou hořejším (třebas prvním) systémem lineárních rovnic, můžeme definovati analyticky ještě jinak. Protože bod (x_1, x_2, x_3) v rovině α přechází v přímku (u'_1, u'_2, u'_3) na rovině α', jejíž rovnice v bodových souřadnicích roviny α' jest

$$u'_1x'_1 + u'_2x'_2 + u'_3x'_3 = 0,$$

platí mezi (bodovými) souřadnicemi obou rovin relace, vycházející z této rovnice dosazením zmíněných výrazů za u'_k, totiž relace

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\,x'_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\,x'_2 + \\ + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\,x'_3 = 0.$$

Tato obecná *bilineární forma ternární*, položená rovnou nule, vyjadřuje korelaci, s podmínkou ovšem, že determinant z koeficientů a_{hk} jest různý od nuly.[3])[4])[5])

[2]) Kolineace nebo korelace, jejíž determinant je roven nule, jest zvrhlá; odtud lze analyticky vyšetřovati možné případy takových projektivností.

[3]) O základech analytické geometrie projektivní v rovině (souřadnice, body a přímky, kolineace a korelace; také geometrie afinní a ekviformní) viz na př. *L. Heffter-C. Koehler*, Lehrbuch der analytischen Geometrie I. O projektivních souřadnicích a transformacích viz také *G. Scorza*, Elementi di geometria analitica; *H. Beck*, Koordinatengeometrie I, 1919. O metricky speciálních případech kolineace (analyticky) viz na př. *K. Doehlemann*, Geometrische Transformation I; také *J. Vojtěch*, Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických I (4. vyd. 1928), p. 70 a n. O aplikaci v mechanice na př. *P. Appell*, De l'homographie en mécanique, Amer. Journal math. 12 (1890).

[4]) V projektivní geometrii roviny s prvky komplexními jest možno vedle korespondencí projektivních, kolineace a korelace, vyšetřovati antiprojektivnosti, *antikolineace* a *antikorelace* (v jejichž rovnicích jsou souřadnice prvků jedné roviny konjugovány k souřadnicím prvků v rovnicích oněch). Viz zejména *C. Segre*, Un nuovo campo di ricerche geometriche, Atti Accad. Torino 25 a 26 (1889 a 1890); *J. W. Young*, Two-dimensional chains and the associated collineations in a complex plane, Transactions Amer. math. soc. 11 (1910); *J. L. Coolidge*, The geometry of the complex domain, 1924.

[5]) Jednojednoznačné transformace roviny v rovinu, jež přímky každé z nich převádějí v čáry n-tého stupně roviny druhé, slují *biracionální* čili *Cremonovy transformace* n-tého stupně; mezi nimi ovšem po lineárních (projektivních) nejdůležitější jsou transformace kvadratické ($n = 2$). Počal je soustavně vyšetřovati *L. Cremona*, Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane, Memorie Accad. Bologna (2) 2 a 5 (1863, 1865); přel. *Em. Weyr*, Cremonovy geometrické transformace útvarů rovinných, 1872. K informaci viz na př. *K. Doehlemann*, Geometrische Transformationen II, 1908; *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften IV, 1909; *H. P. Hudson*, Cremona transformations in plane and space, 1927; také Pascal's Repertorium höh. Math. II. 1 (1910), 16. kap. (*L. Berzolari*, Algebraische Korrespondenzen zwischen zwei Ebenen).

VI. KOLINEACE A KORELACE SOUMÍSTNÝCH ÚTVARŮ DVOJMOCNÝCH.

57. Typy kolineací v rovině. Při kolineaci dvou soumístných základních útvarů dvojmocných vyšetřujeme především prvky samodružné. Stačí omeziti se v těchto úvahách na dvě kolineární pole soumístná; jejich kolineace sluje stručně *rovinná*.

a) Protože kolineace je určena čtyřmi dvojicemi prvků obecně položených, je jasno, že kolineace dvou soumístných rovin se čtyřmi body samodružnými, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce, je kolineací identickou. Duálně je identickou také rovinná kolineace se čtyřmi přímkami samodružnými, z nichž žádné tři nejdou jedním bodem.

Kolineace neidentická může tedy míti při obecné poloze samodružných prvků nejvýše tři body samodružné nebo tři samodružné přímky. Má-li však neidentická kolineace čtyři body samodružné, musí tři z nich ležeti v téže přímce. Přímka spojující dva samodružné body dvou soumístných rovin kolineárních je samodružnou přímkou jejich kolineace, obsahujíc dvě projektivní soumístné řady bodové; je-li na takové přímce ještě třetí bod samodružný, jest její projektivnost identická, přímka je složena celá z bodů samodružných. Majíce zřetel také k případu duálnímu, vidíme tedy, že *v neidentické kolineaci se čtyřmi samodružnými elementy téhož jména* (body nebo přímkami) *existuje útvar jednomocný, složený zcela z prvků samodružných* (toho druhu).

Vyskytuje-li se v kolineaci rovinné přímka o složená z bodů samodružných, protíná se každá dvojice přímek kolineací sdružených v bodě této přímky; neboť průsečík libovolné přímky s přímkou o je bod samodružný, jím tedy musí procházeti přímka s onou sdružená. Duálně obsahují-li dvě kolineární roviny soumístné svazek O samodružných přímek, leží každá dvojice bodů sdružených na paprsku tohoto svazku. Obě věty lze také obrátiti.

Existence celé řady samodružných bodů a celého svazku samodružných přímek jsou však spolu spiaty podle duálních vět:

Dvě kolineární pole soumístná, obsahující přímku složenou z bodů samodružných, mají také svazek samodružných přímek.

Dvě kolineární pole soumístná, mající svazek složený z přímek samodružných, obsahují také přímku samodružných bodů.

Abychom dokázali větu na levé straně, položme přímkou samodružných bodů obou soumístných rovin α a α', v nichž sobě odpovídají body X a X', pomocnou rovinu β (různou od $\alpha \equiv \alpha'$); na tuto promítněme z bodu B mimo obě roviny ležícího rovinu α', při čemž bod X' se promítá do Y. Protože rovina α jest kolineární s α' a tato s β, jsou roviny α a β kolineární; majíce pak průsečnici složenu z bodů samodružných, jsou perspektivní. Proto procházejí spojnice všech dvojic bodů v α a β sdružených XY jedním bodem P; průmět tohoto bodu P z bodu B na rovinu $\alpha' \equiv \alpha$ jest středem svazku samodružných paprsků v kolineaci rovin daných. Neboť jím procházejí spojnice XX', jsouce průměty spojnic XY.

Kolineace dvou soumístných rovin, obsahující přímku o, složenou z bodů samodružných, a tedy také svazek O, složený ze samodružných přímek, sluje *homologie* (nebo homologická kolineace, též centrální nebo perspektivní kolineace); přímka o sluje *osou* homologie, bod O *středem* homologie.

Řada samodružných bodů a svazek samodružných přímek tvoří dohromady *soběduální samodružný útvar kolineace homologické.*

b) Obraťme se k rovinné kolineaci, jež není homologií.

Bod O, který je samodružný v nehomologické kolineaci, jest středem dvou projektivních soumístných svazků paprskových; každé dva sdružené paprsky těchto svazků jsou osami projektivních řad bodových, jež mající samodružný bod O společný, jsou perspektivní.

Přímka o, která je samodružná v kolineaci nehomologické, jest osou dvou projektivních soumístných řad bodových; každá dvojice sdružených bodů těchto řad tvoří středy projektivních svazků paprskových, jež mající samodružný paprsek o společný, jsou perspektivní.

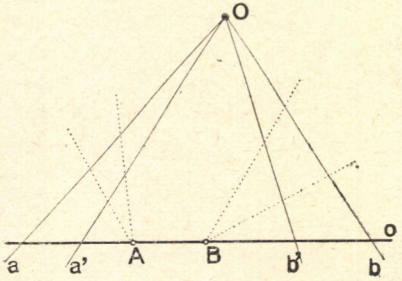
Samodružné body a přímky nehomologické kolineace rovinné jsou v tomto vzájemném vztahu:

Ke každému samodružnému bodu O jest přidružena samodružná přímka o, obsahující středy perspektivnosti všech dvojic projektivních řad na sdružených přímkách soumístných svazků se středem O.

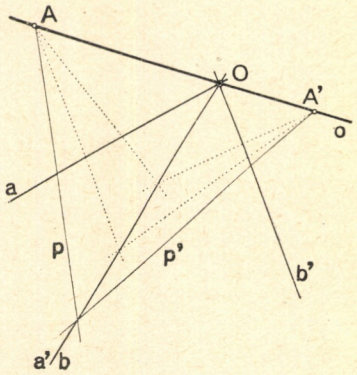
Ke každé samodružné přímce o jest přidružen samodružný bod O, jímž procházejí osy perspektivnosti všech dvojic projektivních svazků se středy ve sdružených bodech soumístných řad na přímce o.

Neboť dejme tomu, že kolineace nehomologická má samodružný bod O (obr. 66). Dvojice sdružených přímek aa' dvou soumístných svazků se středem O ať má střed perspektivnosti A, jiná dvojice bb' ať má střed B; bod B je nutně různý od bodu A, protože by jinak všechny přímky svazku A byly samodružné (průsečíkům takové přímky s a, b odpovídaly by totiž průsečíky téže přímky s a', b') a kolineace by byla

proto homologií (se středem homologie A) proti předpokladu. Vezměme v úvahu nejprve případ, že přímka AB neprochází bodem O; tato přímka je samodružnou přímkou kolineace, protože jejím průsečíkům s a, b odpovídají její průsečíky s a', b'. Jsouc samodružnou v kolineaci, přímka AB protíná každou další dvojici sdružených přímek c, c', jdoucích bodem O, v bodech sdružených; pročež obsahuje také střed perspektivnosti bodových řad na c, c'.



Obr. 66.



Obr. 67.

Z existence samodružného bodu O kolineace nehomologické vyplývá tedy existence samodružné přímky o, k němu přidružené (zatím v případě, že o nejde bodem O); rovněž duálně. Avšak duální souvislost samodružných prvků je, jak patrno, zároveň obrácená, t. j. je-li k samodružnému bodu O přidružena samodružná přímka o, jest obráceně k samodružné přímce o přidružen samodružný bod O. Samodružný bod O a samodružná přímka o, přidružené k sobě navzájem, tvoří *soběduální samodružný útvar kolineace nehomologické.*

Věc zůstává v platnosti i v případě, že přímka, spojující středy perspektivnosti dvou dvojic sdružených přímek, jdoucích bodem O, prochází tímto bodem; každému bodu A této přímky o, který je středem perspektivnosti dvou řad na sdružených přímkách a, a', jdoucích bodem O, odpovídá v kolineaci střed perspektivnosti A' dvojice $b \equiv a', b'$ (obr. 67). Že obráceně k samodružné přímce o, jdoucí bodem O, jest přidružen samodružný bod O, že jím totiž procházejí osy perspektivnosti všech dvojic sdružených svazků se středy na o, dokážeme takto: Jestliže v projektivnosti soumístných svazků se středem O odpovídá paprsku a paprsek a', tomuto a' ($\equiv b$) pak b', jsou jejich středy perspektivnosti A a A' sdruženy na o, jak uvedeno. Avšak každé přímce p svazku A odpovídá přímka p' svazku A', jdoucí bodem korespondujícím bodu pa, tedy bodem pa'; protínají se tedy sdružené přímky p a p' v bodech přímky a', jež je proto osou perspektivnosti svazků A, A'. Totéž platí o ose perspektivnosti každé jiné dvojice sdružených svazků, k níž dospějeme vycházejíce (místo od paprsku a) od jiného paprsku svazku O.

Ze souvislosti mezi dvěma samodružnými prvky nehomologické kolineace, bodem a přímkou, k sobě navzájem přidruženými, vyplývá dále: Má-li nehomologická kolineace dva samodružné body O_1 a O_2, má i dvě samodružné přímky o_1 a o_2, z nichž každá je k jednomu bodu samodružnému přidružena; přímka o_1 pak prochází bodem O_2 a ovšem přímka o_2 bodem O_1. Neboť kdyby o_1 neprocházela bodem O_2, byla by k němu přidružena, což není možno, protože je přidružena k bodu O_1.

Odtud je patrno, že *celý samodružný útvar kolineace nehomologické je soběduální.*[1])[2])

c) Podle toho, jaký útvar skládají samodružné body a přímky v kolineaci dvou soumístných polí, rozlišujeme rozmanité *typy* této *kolineace.*

Jsou-li v rovinné kolineaci samodružné (aspoň) čtyři body, z nichž žádné tři neleží v téže přímce, (nebo duálně čtyři přímky, z nichž žádné tři nejdou týmž bodem) jsou, jak víme, samodružnými všechny prvky soumístných rovin a kolineace je *identická.* Aby tedy kolineace nebyla identickou, mohou býti samodružnými buď pouze tři body neležící v téže přímce (tři přímky nejdoucí týmž bodem) nebo ze čtyř bodů samodružných musí tři ležeti v téže přímce (ze čtyř samodružných přímek musí tři procházeti týmž bodem). Vedle toho mějme na paměti, že útvar složený ze samodružných prvků kolineace musí býti, jak jsme poznali, soběduální. Jsou tedy patrně možny tyto případy:

Kolineace dvou soumístných rovin *má samodružné tři různé body a tři různé přímky,* z nichž každá jde dvěma samodružnými body (vyjímaje přidružený); tvoří tedy samodružné prvky kolineace trojúhelník. Tento nejobecnější typus kolineace rovinné s invariantním trojúhelníkem označujeme jako I., podle invariantních bodů pak (rozměru 0) symbolem [000].

Splynou-li dva samodružné body a dvě samodružné přímky kolineace, objeví se typ nový: kolineace typu II. má *dva samodružné body a dvě samodružné přímky,* z nichž jedna prochází oběma invariantními body a druhá pouze jedním z nich; vyznačujíce splynutí invariantních bodů (oblými) závorkami, píšeme tento typus symbolicky [(00)0].

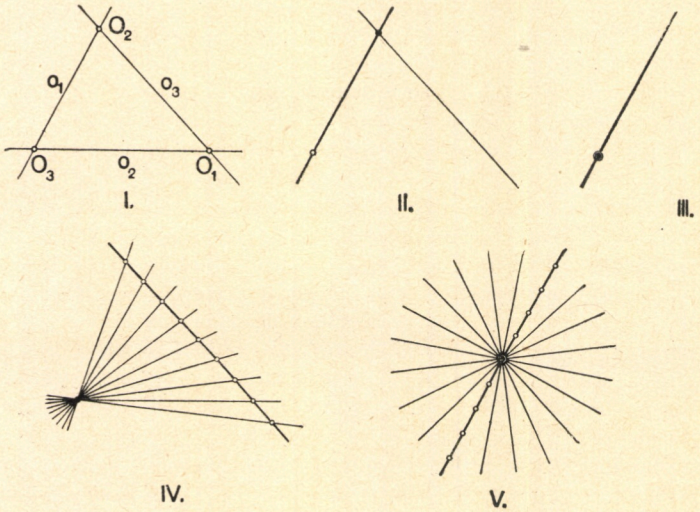
Splynou-li všechny tři samodružné body a duálně tři samodružné přímky kolineace, vznikne typ třetí: kolineace III. typu má *jeden bod*

[1]) Kolineaci rovinnou (spec. homologii) lze mechanicky uskutečniti přístrojem dosti složitým, jejž navrhl *G. Koenigs,* Compas homographique, réalisant par articulations l'homographie plane générale, Comptes r. Acad. Paris 131 (1900). Pro spec. případy viz na př. *K. Doehlemann,* Geometrische Transformationen I.

[2]) Metricky speciální kolineace dvou soumístných polí jsou korespondence, uvedené už při kolineaci mezi dvěma poli libovolně položenými: afinita, podobnost a shodnost. *Podobnost* a *shodnost* jsou zde buď *přímé* nebo *obrácené* (inversní) podle toho, jsou-li odpovídající sobě svazky paprskové přímo nebo obráceně shodné (je-li projektivnost, na nevlastní přímce roviny indukovaná, shodností přímou nebo inversní).

samodružný a jedsa unmodružnou přímku jím procházející; její symbol jest [(000)].

Kolineace s více než třemi samodružnými body (přímkami) má, jak jsme nalezli, celou (přímou) *řadu samodružných bodů a* celý (lineární) *svazek samodružných přímek*; je to *homologie*. Homologickou kolineaci, jejíž střed leží mimo osu, označujeme jako kolineaci typu IV., podle



Obr. 68.

invariantního útvaru (řady bodové s nosičem rozměru 1 a bodu rozměru 0) symbolicky [10].

Stane-li se střed svazku invariantních přímek incidentním s osou řady invariantních bodů, objeví se druhý typ homologické kolineace, V. typus kolineace vůbec, totiž kolineace s *přímkou samodružných bodů, z nichž jeden je středem svazku samodružných přímek*; tato kolineace, zvaná někdy *elací*, má symbol [(10)].[3])

Pět uvedených typů neidentické kolineace rovinné je (schematicky) znázorněno na obr. 68.

---

[3]) Lze i jinak nalézti, že jest možno jenom uvedených pět invariantních útvarů a tedy jenom uvedených pět typů kolineací v rovině. Vyjdeme od vět, že čtyři invariantní body tvořící čtyřroh vedou k identické kolineaci roviny a že tři invariantní body v přímce vedou k identické projektivnosti přímky i od vět duálních; sestavíme pět možných invariantních útvarů bodových i pět (duálních) invariantních útvarů přímkových a hledáme jejich možné kombinace (bez věty, že invariantní útvar kolineace musí býti soběduální). Vedle případů zřejmých je nutno dokázati, že není možna kombinace dvou samodružných bodů s jednou samodružnou přímkou. Viz úvahu *G. Schefferse* v *S. Lieových* Vorlesungen über continuierliche Gruppen, p. 65.

d) Invariantní útvar dvou soumístných polí kolineárních můžeme syntheticky vyšetřiti pomocí dvou sdružených kuželoseček.

Předpokládejme, že kolineace rovinná je nehomologická. Bodu S, jenž není samodružný a neleží na přímce samodružné, ať v dané kolineaci odpovídá bod S', tomuto pak bod S''; tyto tři body jsou vzhledem k předpokladu různé a neleží v jedné přímce. Daná kolineace indukuje v paprskových svazcích o středech S a S' projektivnost, jejíž sdružené přímky vytvořují pravou kuželosečku k, jdoucí body S i S' a dotýkající se v bodě S' přímky $S'S''$. Obdobně paprskové svazky o středech S' a S'', projektivní v dané kolineaci, vytvořují pravou kuželosečku k', procházející body S' i S'', jež se v bodě S' dotýká přímky $S'S$.

Všechny společné body dvou sdružených kuželoseček k a k' mimo bod S' a jenom tyto body jsou samodružnými body uvažované kolineace nehomologické.

Neboť každý průsečík obou kuželoseček k, k' mimo bod S', spojen s body S, S', S'', dává tři paprsky, z nichž prvnímu odpovídá v dané kolineaci druhý, druhému pak třetí; bodu takovému jako průsečíku prvního paprsku s druhým odpovídá tedy průsečík druhého paprsku s třetím, což je týž bod, který je proto samodružným bodem kolineace uvažované. Obráceně samodružný bod O dané kolineace leží mimo přímky SS', $S'S''$ (protože nejsou samodružné); a protože přímce SO odpovídá přímka $S'O$, této pak přímka $S''O$, musí bod O býti společným bodem kuželoseček k, k' mimo S'.

Kuželosečky k a k' protínají se mimo bod S' obecně ve třech bodech (reálných) nebo v jednom bodě (reálném): I. typus kolineace má tři samodružné body (reálné, a tři samodružné přímky, jejich spojnice) nebo jeden samodružný bod (reálný, a samodružnou přímku přidruženou, jím neprocházející); kolineace I. typu je podle toho 1. nebo 2. druhu.

Ze tří společných bodů kuželoseček k a k' (mimo průsečík S') mohou splynouti dva nebo všechny tři. V prvním případě se kuželosečky v jednom bodě dotýkají (dotykem dvojbodovým) a v druhém protínají: příslušná kolineace je typu II. V případě druhém mají obě kuželosečky v jediném bodě společném (mimo S') dotyk trojbodový: kolineace je typu III.[4])[5])

K těmto třem typům kolineace nehomologické přistupují homologie a elace jako typ IV. a V.[6])

[4]) Konstrukce samodružných bodů nehomologické kolineace v rovině (určené čtyřmi dvojicemi bodů sdružených) jest typickou úlohou 3. stupně (a převádí se, jak patrno, na sestrojení ostatních průsečíků dvou kuželoseček se společným bodem).

[5]) Vztah soustavy bodů nebo přímek, vznikající opakováním dané kolineární transformace ze zvoleného bodu resp. přímky v rovině, k samodružným prvkům kolineace té vyšetřoval *F. Amodeo*, Sugli elementi uniti reali delle omografie ternarie, Giornale mat. 27 (1889); viz také *M. Genty*, Sur les systèmes collinéaires, Bulletin Soc. math. France 21 (1893).

[6]) Viz též *H. B. Newson*, On the construction of collineations, Quarterly Kansas univ. 9 (1900). Typy kolineací rovinných lze syntheticky na-

e) Nejlépe provedeme klasifikaci kolineací rovinných cestou analytickou. Kolineace dvou rovin jako polí bodových s body (x_1, x_2, x_3) a (x'_1, x'_2, x'_3) je dána rovnicemi (s koeficienty reálnými)

$$\begin{aligned} \varrho x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \varrho x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \varrho x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}$$

Jsou-li obě bodová pole soumístná a souřadnice v obou rovinách vztahovány k témuž základu soustavy, platí pro samodružné body úměrnost souřadnic nebo (protože konstanta úměrnosti v rovnicích už je) rovnost souřadnic $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$, $x'_3 = x_3$. Nalezneme tedy souřadnice bodů v rovinné kolineaci samodružných z rovnic

$$\begin{aligned} (a_{11} - \varrho)\, x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \varrho)\, x_2 + a_{23}x_3 &= 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \varrho)\, x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Aby rovnice tyto měly řešení $x_1 : x_2 : x_3$ podávající bod roviny (vylučujeme tedy řešení $0 : 0 : 0$), musí býti nule roven determinant

$$A(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho \end{vmatrix};$$

dostáváme tím po úpravě rovnici

$$\varrho^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\, \varrho^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})\, \varrho - A = 0,$$

kde $A \equiv (a_{11}a_{22}a_{33})$ je determinant 3. stupně z devíti koeficientů kolineace, A_{kk} jeho subdeterminanty 2. stupně příslušné k prvkům a_{kk}.

K téže rovnici třetího stupně (pro ν) dojdeme, hledajíce samodružné přímky téže kolineace dvou soumístných rovin jako polí paprskových s přímkami (u_1, u_2, u_3) a (u'_1, u'_2, u'_3); neboť kolineace ta je vyjádřena rovnicemi

$$\nu u_1 = \Sigma a_{k1}u'_k, \quad \nu u_2 = \Sigma a_{k2}u'_k, \quad \nu u_3 = \Sigma a_{k3}u'_k.$$

Každému kořenu rovnice 3. stupně pro ϱ nebo ν přísluší jedna trojice rovnic určujících samodružný prvek (bod resp. přímku) kolineace, jehož souřadnice vypočteme, dosadíce tam nalezenou hodnotu ϱ resp. ν. Dvěma různým kořenům ϱ_1 a ϱ_2 příslušejí dva různé body samodružné; neboť kdyby k takovým kořenům patřil bod o těchže souřadnicích $x_1 : x_2 : x_3$, obdrželi bychom odečtením obou prvních rovnic nebo obou druhých nebo obou třetích $(\varrho_1 - \varrho_2)\, x_k = 0$, což by při $\varrho_2 \neq \varrho_1$ vedlo jen k důsledku $x_k = 0$. Dvěma různým kořenům ϱ_1 a $\varrho_2\, (= \nu_2)$ přísluší samodružný bod a samodružná přímka incidentní; násobíce totiž k-tou rovnici pro souřadnice bodu (s ϱ_1) faktorem u_k a k-tou rovnici

---

lézti s výhodou také pomocí prostorové čáry kubické, vytvořené dvěma kolineárními trsy nesoumístnými; tak na př. *G. Loria*, Sulle corrispondenze proiettive fra due piani e fra due spazii, Giornale mat. 22 (1884).

pro souřadnice přímky (s ϱ_2) faktorem x_k (pro $k = 1, 2, 3$) a odečtouce součet těchto od součtu oněch, obdržíme $(\varrho_1 - \varrho_2)(x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3) = 0$, což při $\varrho_1 \neq \varrho_2$ vede k důsledku $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$, t. j. k incidenci bodu a přímky, příslušných k oněm kořenům.

Podle povahy kořenů ϱ (a ν) jsou pak možny tyto případy kolineace dvou soumístných rovin:

Jsou-li kořeny ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 různé, existuje invariantní trojúhelník, kolineace je typu I.; dva z kořenů mohou býti imaginární konjugované, totéž platí tedy o příslušných bodech a přidružených přímkách samodružných.

Jsou-li z kořenů ϱ_k dva sobě rovny, třetí různý, a nevymizejí-li pro dvojnásobný kořen všechny subdeterminanty 2. stupně v $A(\varrho)$, existují dva různé invariantní body a dvě různé invariantní přímky, kolineace je typu II.

Je-li z kořenů ϱ_k jeden dvojnásobný $\varrho_1 = \varrho_2$, jeden jednoduchý ϱ_3, a vymizejí-li všechny subdeterminanty 2. stupně v $A(\varrho_1)$, má kolineace jednu dvojici (přidružených) invariantních prvků neincidentních (příslušných k ϱ_3), samodružný tento bod obsahuje pak svazek invariantních přímek a samodružná přímka řadu invariantních bodů, příslušných k $\varrho_1 = \varrho_2$ (neboť vzhledem k uvedené vlastnosti subdeterminantů neurčují původní rovnice bodu resp. přímky); kolineace je typu IV.

Jsou-li kořeny ϱ_k všechny tři sobě rovny a nevymizejí-li pro trojnásobný kořen tento všechny subdeterminanty 2. stupně v $A(\varrho)$, existuje jeden invariantní bod a jedna přímka invariantní, kolineace je typu III.

Jestliže kořen rovnice 3. stupně pro ϱ je trojnásobný ($\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$) a jestliže vymizejí všechny subdeterminanty 2. stupně determinantu $A(\varrho_1)$, nikoli však všechny prvky jeho, jest kolineace typu V.

Jestliže konečně platí $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$ a pro tento kořen vymizejí všechny prvky determinantu $A(\varrho)$, jest kolineace identická.[7])

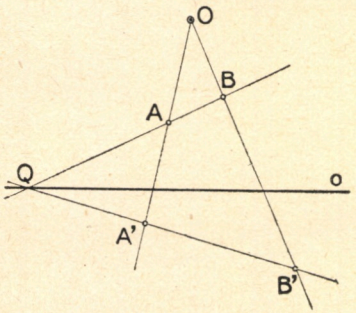
58. Homologie (a elace). *a*) Homologická kolineace dvou soumístných rovin jest, jak jsme poznali, transformace velmi jednoduchá: dva homologické body leží vždy na paprsku, jenž prochází středem homologie, dvě homologické přímky protínají se vždy v bodě, ležícím na ose homologie.

Homologie v rovině *jest určena, jestliže mimo střed a osu její je dána jedna dvojice bodů sobě odpovídajících* (ležících ovšem na paprsku, který

[7]) Obdobně jako v útvaru jednomocném můžeme i v rovině, vycházejíce od kolineace identické, nalézti rovnice pro kolineární *transformaci infinitesimální* v souřadnicích nehomogenních: $x' = x + (a_1 + a_3x + a_5y + a_7x^2 + a_8xy)\,\delta t$, $y' = y + (a_2 + a_4x + a_6y + a_7xy + a_8y^2)\,\delta t$. Obsáhlou a podrobnou teorii kolineací rovinných podal na tomto základě *S. Lie*; viz obšírný výklad v knize *S. Lie-G. Scheffers*, Vorlesungen über continuierliche Gruppen, 1893. O transformacích (singulárních), jichž nelze vytvořiti transformací infinitesimální, jedná zejména *H. B. Newson*, On singular transformations in real projective groups, Bulletin Amer. math. soc. (2) 6 (1900).

jde středem homologie) *nebo duálně jedna dvojice přímek sobě odpovídajících* (jež se ovšem protínají na ose homologie).

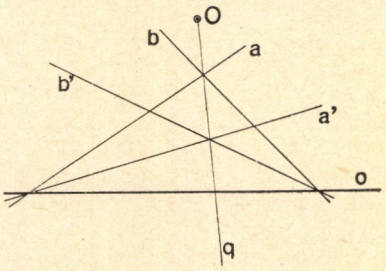
Neboť tím jsou v kolineaci stanoveny projektivnosti dvou dvojic soumístných řad bodových: jedna dvojice řad na ose homologie s projektivností identickou, druhá na přímce obsahující dané dva body, jejíž projektivnost má jeden samodružný bod ve středu homologie, druhý v průsečíku přímky s osou homologie (který může splývati s prvým) a je mimo to určena danou dvojicí sdružených bodů.



Obr. 69.

Je-li homologie dána svým středem O, svou osou o a dvojicí sdružených bodů A, A', *sestrojíme* k dalšímu bodu B (jenž leží mimo AA') korespondující bod B' (obr. 69), majíce na zřeteli, že jednak bod B' musí ležeti se zvoleným bodem B na paprsku svazku O, jednak přímky $A'B'$ a AB se musí protínati na ose o. Sestrojíme tedy přímku OB, spojnici AB, průsečík $(AB, o) = Q$, přímku QA'; průsečík přímek OB a QA' je hledaný bod B'. Leží-li bod B na AA', sestrojíme jemu odpovídající bod B' tak, že k této konstrukci použijeme dvojice CC', z níž bod C zvolíme spec. případě s prvým) ve spojnici onoho průsečíku se středem homologie a je určena mimo to danou dvojicí přímek sdružených.

Neboť tím jsou v kolineaci stanoveny dvě dvojice projektivních soumístných svazků paprskových: jedna identicky projektivní se středem ve středu homologie, druhá se středem v průsečíku daných přímek, jejíž projektivnost má jeden paprsek samodružný v ose homologie, druhý (splývající

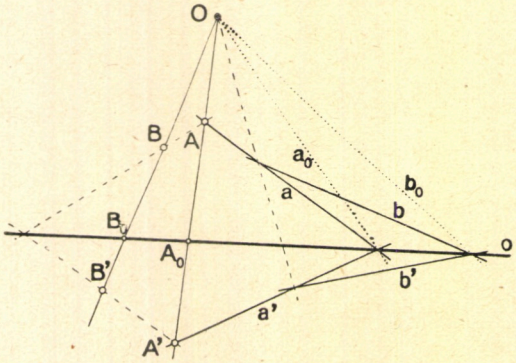


Obr. 70.

Je-li homologie dána svou osou o, svým středem O a dvojicí sdružených přímek a, a', *sestrojíme* k další přímce b (jež neprochází bodem aa') korespondující přímku b' (obr. 70), majíce na zřeteli, že jednak b' musí se protínati se zvolenou přímkou b na ose o, jednak průsečíky $a'b'$ a ab musí ležeti na paprsku svazku O. Sestrojíme tedy bod ob, průsečík ab, spojnici $(ab, O) = q$, bod qa'; spojnice bodů ob a qa' je hledaná přímka b'. Patří-li přímka b do svazku aa', sestrojíme přímku b' touto konstrukcí pomocí dvojice cc', z níž přímku c zvolíme mimo aa' a korespondující přím-

me mimo AA' a korespondující bod C' sestrojíme uvedeným způsobem. Ke zvolené přímce b sestrojíme korespondující přímku b' jako spojnici průsečíku bo s bodem, sdruženým k průsečíku přímky b a libovolného paprsku svazku O. ku c' sestrojíme uvedeným způsobem. K zvolenému bodu B sestrojíme korespondující bod B' jako průsečík spojnice OB s přímkou, sdruženou k spojnici bodu B a libovolného bodu řady na o.

Úvahy tyto platí, ať střed homologie O leží mimo osu její o (*homologie obecná* čili homologie v užším smyslu), ať leží O na o (homologie speciální čili *elace*).[1])



Obr. 71.

b) Každý paprsek p jdoucí středem homologie obecné obsahuje projektivnost dvou soumístných řad s dvěma body samodružnými, středem homologie O a průsečíkem paprsku p s osou homologie o; každý bod P ležící na ose homologie je středem dvou soumístných svazků projektivních s dvěma paprsky samodružnými, osou homologie o a spojnicí bodu P se středem homologie O.

---

[1]) Homologie je nejjednodušší kolineace (neidentická); *každou kolineaci lze rozložiti (nejvýše) ve tři homologie*. Abychom ukázali, že kolineaci soumístných polí ϱ, ϱ' je možno vyjádřiti produktem homologií, zvolme střed první homologie na spojnici dvou korespondujících bodů (různých) A, A' a osu její libovolně (mimo A i A'); homologií touto převeďme pole ϱ v soumístné pole ϱ_1 tak, aby bod A přešel v bod A'. Kolineace mezi ϱ_1 a ϱ' (se samodružným bodem A') převádí přímku a_1, jdoucí bodem A', v přímku a' a řadu bodovou na a_1 v perspektivní řadu bodovou na a'; druhou homologii zvolíme tak, aby střed její byl ve středu uvedené právě perspektivnosti řad a_1, a', aby její osa procházela bodem A' a aby v ní některý bod na a_1 (mimo A') odpovídal perspektivnímu bodu na a'; tato homologie ať převádí pole ϱ_1 v soumístné pole ϱ_2. Kolineace soumístných polí ϱ_2, ϱ' jest (třetí) homologií, protože při ní přímka a' obsahuje řadu bodů samodružných. Viz také *J. Vojtěch*, O vytvoření kolineace projekcemi nebo homologiemi, Časopis math. a fys. 42 (1913).

Charakteristické dvojpoměry těchto projektivností na všech paprscích svazku o středu O a ve všech svazcích se středy na ose o jsou si rovny; platí totiž, jestliže prvkům A, B, a, b odpovídají po řadě prvky A', B', a', b' (a označíme-li průsečík paprsku OA s osou homologie A_0, spojnici bodu oa se středem homologie a_0, atd., obr. 71),

$$OA_0AA' \barwedge OB_0BB', \quad oa_0aa' \barwedge ob_0bb', \quad OA_0AA' \barwedge a_0oaa'.$$

První relace je správná, protože sdružené paprsky AB, $A'B'$ se protínají na ose o; jsou tedy uvedené čtveřiny perspektivní vyjma případ, že body A, A', B, B' leží na témž paprsku, kdy však relace ta vyjadřuje projektivnost soumístných řad na této přímce. Druhá relace platí z důvodu duálního: protože totiž sdružené body ab, $a'b'$ leží na paprsku obsahujícím střed O, jsou uvedené čtveřiny perspektivní, leda by paprsky a, a', b, b' patřily témuž svazku, kdy však relace platí rovněž. Třetí vztah platí bezprostředně o dvou bodech sdružených A, A', jež leží na sdružených přímkách a, a'; ve spojení s předcházející relací (první nebo druhou) platí tedy obecně.

Konstantní dvojpoměr k všech indukovaných projektivností soumístných řad na paprscích jdoucích středem homologie O a všech indukovaných projektivností soumístných svazků se středy na ose homologie o sluje (charakteristickým) *dvojpoměrem homologie* nebo (absolutním) *invariantem* homologie. Dvojpoměr k určuje spolu se středem a osou obecnou homologii.

Jestliže homologie přejde v elaci tím, že střed O se stane incidentním s osou o, stanou se projektivnosti dvojic soumístných řad na všech paprscích jdoucích středem O limitními (majíce dva splývající body samodružné), rovněž tak projektivnosti dvojic soumístných svazků se středy ve všech bodech osy o (majíce dva splývající paprsky samodružné). Absolutní invariant elace jest roven 1 a přestává přispívati k určení homologie. Místo něho nastupuje konstanta uvedená u limitní projektivnosti útvarů jednomocných, jež však pro každou dvojici soumístných řad bodových na ose jdoucí středem O a pro každou dvojici soumístných svazků se středem na ose o má jinou hodnotu.[2])[3])[4])

---

[2]) Homologie (v rovině) vyšetřoval soustavně po prvé *J. V. Poncelet* (1822), od něhož také pocházejí příslušná pojmenování.

Elementární odvození vět o homologii podává na př. *C. v. Aller*, Over centraal-collineaire figuren, Chr. Huygens 5 (1927).

[3]) Z metrických úloh o homologii jest zajímavé stanovení homologie, jež daný čtyrúhelník $ABCD$ převádí v rovnoběžník nebo obdélník nebo čtverec. Aby homologie transformovala daný čtyrúhelník $ABCD$ v rovnoběžník, musíme za přímku, jež homologií přechází v přímku nevlastní, zvoliti spojnici bodů $E = (AB, CD)$ a $F = (AD, BC)$; aby daný čtyrúhelník přešel v obdélník, jest mimo to nutno střed homologie zvoliti na kružnici s průměrem EF; aby homologie převedla daný čtyrúhelník ve čtverec, zvolíme za přímku, jíž odpovídá přímka nevlastní, spojnici EF, za střed homologie pak průsečík kružnic s průměry EF a GH, kde $G = (AC, EF)$, $H = (BD, EF)$.

c) Jako v každé kolineaci dvou soumístných polí kuželosečce odpovídá kuželosečka (a bodové řadě na oné projektivní řada bodová na této), tak jest tomu ovšem i v homologii; všimněme si dvou kuželoseček, jež sobě v homologii odpovídají, čili *kuželoseček homologických*.

Leží-li střed homologie na dané kuželosečce, musí korespondující kuželosečka procházeti týmž bodem a míti tam s danou kuželosečkou společnou tečnu, čili obě homologické kuželosečky musí se ve středu homologie sebe dotýkati; neboť bod ten je samodružný a tečna kuželosečky v něm je také samodružná. Obráceně *dvě kuželosečky, jež se sebe dotýkají* (majíce společný bod a v něm společnou tečnu), *lze učiniti homologickými dvěma* (duálními) *způsoby tak, aby společný bod jejich byl středem homologie nebo aby společná tečna jejich byla osou homologie.* Neboť učiníme-li bodové řady obou kuželoseček projektivními pomocí perspektivního k nim svazku paprskového se středem ve společném bodě jejich S, je tato projektivnost obsažena v kolineaci se samodružným bodem S a se samodružnými paprsky jím jdoucími, tedy v homologii o středu S (protínají-li tři paprsky svazku S jednu kuželosečku v A, B, C, druhou v A', B', C', stanovíme kolineaci korespondencí čtveřin $SABC$ a $SA'B'C'$; v této homologii odpovídá první kuželosečce, jdoucí body S, A, B, C a dotýkající se v S přímky t, kuželosečka jdoucí body S, A', B', C' a dotýkající se v S přímky t, tedy druhá kuželosečka daná). Duálně můžeme společnou tečnu t obou kuželoseček jako přímku, na níž se protínají korespondující tečny jejich, zvoliti za osu homologie.[5])

Mějme na zřeteli první z uvedených dvou homologií, v nichž dané dvě kuželosečky k a k' se společným bodem S a společnou tečnou t sobě odpovídají, totiž homologii středu S; osa této homologie budiž s. Jsou možny tyto případy: osa s buď neprochází bodem S nebo jím prochází (kolineace je obecná homologie nebo elace). V prvním případě

[4]) Jednoduché a důležité jsou homologie metricky speciální: 1. *homologie afinní* (čili homologická afinita) jest homologie, jejímž středem je bod nevlastní a osou přímka v konečnu; dvojice bodů sobě odpovídajících leží na přímkách rovnoběžných (neleží-li na téže přímce), bodové řady na sdružených přímkách jsou podobné, vzdálenosti dvou sdružených bodů od průsečíku jejich spojnice s osou mají konstantní poměr nebo jsou speciálně spojnice bodů sobě odpovídajících rovnoběžné k ose homologie afinní; 2. *homothetie* (homologie podobnostní čili homologická podobnost) jest obecná homologie, jejíž osou je přímka nevlastní a středem bod v konečnu; přímky sobě odpovídající jsou rovnoběžné (nebo splývají) a obsahují bodové řady podobné, vzdálenosti dvou sdružených bodů od středu homologie mají konstantní poměr, korespondující útvary slují také podobné a podobně položené nebo stejnolehlé; 3. *translace* (pošinutí) jest elace s osou a incidentním středem v nekonečnu.

[5]) Touže cestou nalezneme: Dvě kuželosečky různých rovin, mající společný bod a v něm společnou tečnu, jsou řezy téže kuželové plochy kvadratické. A duálně: Dvě kvadratické plochy kuželové s různými vrcholy, mající společnou přímku a podél ní společnou rovinu tečnou, protínají se v kuželosečce.

protíná osa s kuželosečku k ve dvou bodech reálných různých nebo splývajících nebo imaginárních; reálné body společné, odpovídající v projektivnosti mezi k a k' sobě samým, musí ležeti také na k'; imaginární body společné pak jsou samodružnými body eliptické involuce na s, indukované tam kuželosečkou k, a přecházejí opět v takové body vzhledem ke k'. Jest tedy osa s obecné homologie se středem S buď společnou sečnou obou kuželoseček homologických nebo společnou tečnou nebo prochází jejich dvěma průsečíky imaginárními; dané kuželosečky mají v bodě S dotyk jednoduchý (dvojbodový). V druhém případě, kdy osa s prochází bodem S, může býti buď různá od tečny t nebo s ní splývati. Jestliže osa s nesplývá s tečnou t, protíná kuželosečky v jediném společném bodě jejich mimo S: tento případ lze pokládati za mezní toho případu, kdy s protínala homologické kuželosečky ve dvou bodech reálných (mimo S), z nichž jeden splynul s bodem S; dané kuželosečky mají v S dotyk trojbodový. Jestliže konečně s splývá s t, mají obě kuželosečky v bodě S dotyk čtyrbodový (a jiných společných bodů ovšem nemají). Ve všech případech zde vytčených existuje druhá homologie duálně stanovená, jenom případ poslední je soběduální.

Leží-li střed homologie mimo jednu ze dvou daných kuželoseček homologických, leží také mimo druhou (vzhledem k oběma vně nebo uvnitř); obě kuželosečky mají dvě společné tečny (reálné nebo imaginární), jdoucí středem homologie, a každý paprsek procházející tímto středem protíná dané kuželosečky, obě v bodech reálných nebo obě v bodech imaginárních. A duálně. Obráceně

dvě kuželosečky v rovině s dvěma (různými) *společnými tečnami tak položené, že každý paprsek svazku, k němuž tečny ty patří, obě buď* (v reálných bodech) *protíná nebo neprotíná, lze učiniti homologickými dvěma způsoby tak, aby průsečík uv. tečen jejich byl středem homologie.*

dvě kuželosečky v rovině s dvěma (různými) *společnými body tak položené, že z každého bodu řady, k níž body ty patří, jdou nebo nejdou k oběma* (reálné) *tečny, lze učiniti homologickými dvěma způsoby tak, aby spojnice uv. průsečíků jejich byla osou homologie.*

V případě uvedeném na straně levé dejme tomu totiž, že kuželosečky k a k' mají společné tečny a, b s dotyčnými body A a A', B a B' a s průsečíkem $ab = S$. Libovolný paprsek c ať protíná k a k' v bodech C_1, C_2 a C'_1, C'_2. Projektivnost bodových řad na k a k' lze stanoviti dvojicemi AA', BB', $C_1C'_1$ nebo dvojicemi AA', BB', $C_1C'_2$. Jedna i druhá kolineace, jež tuto projektivnost mezi k a k' indukují, má samodružnými tři přímky a, b, c, jdoucí bodem S; jsou to tedy dvě (různé) homologie se středem S. Osa každé z těchto homologií protíná obě homologické kuželosečky v jejich společných bodech (reálných nebo imaginárních).[6])[7])[8])

[6]) Viz také *M. Pasch*, Über zentrische Kollineation, Math. Annalen 90 (1923; k tomu připojuje pozn. *G. Heussel* tamtéž 92, 1924); opravu podává

d) Abychom každý typus kolineace vyjádřili analyticky co možná jednoduše, zvolíme základní prvky soustavy souřadnic ve zvláštní poloze vůči invariantnímu útvaru kolineace. Položíme-li při I. (nejobecnějším) typu kolineace se samodružným trojúhelníkem reálným základní trojúhelník soustavy do invariantního trojúhelníku kolineace, obdržíme tento typ vyjádřen rovnicemi

$$\varrho x'_1 = a_{11}x_1, \quad \varrho x'_2 = a_{22}x_2, \quad \varrho x'_3 = a_{33}x_3;$$

neboť suponujíce, že je invariantním bod (0, 0, 1), dostáváme z obecných rovnic kolineace $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$; ze suposice, že je invariantním bod (0, 1, 0), vyplývá $a_{12} = 0$, $a_{32} = 0$; konečně z toho, že je invariantním bod (1, 0, 0), plyne $a_{21} = 0$, $a_{31} = 0$.

Pro homologii (obecnou) obdržíme nejjednodušší vyjádření analytické, položíme-li základní trojúhelník dvěma vrcholy (třebas) O_1 (1, 0, 0) a O_2 (0, 1, 0) do osy homologie a třetím vrcholem O_3 (0, 0, 1) do středu homologie. Rovnice této kolineace se tím redukují na hořejší tvar, nalezený pro typ I. Avšak o kořenech rovnice 3. stupně pro ϱ platí zde $\varrho_1 = \varrho_2 \neq \varrho_3$; rovnice tato tvaru $(a_{11} - \varrho)(a_{22} - \varrho)(a_{33} - \varrho) = 0$ podává tedy $a_{11} = a_{22}$ (vzhledem ke konstantě úměrnosti lze pak tyto hodnoty voliti rovny 1). Jest tudíž (obecná) homologie (kolineace typu IV.), jejíž střed a osa jsou v bodě (0, 0, 1) a v přímce $x_3 = 0$, vyjádřena rovnicemi

$$\varrho x'_1 = x_1, \quad \varrho x'_2 = x_2, \quad \varrho x'_3 = a_{33}x_3.$$

Sledujíce hodnotu dvojpoměru homologie $k = \mathrm{Dp}\,(OA_0AA')$ třebas na straně trojúhelníku souřadnic, kde vezmeme do počtu body O (0, 1), A_0 (1, 0), A (x_1, x_3), A' $(x_1, a_{33}x_3)$, nalezneme, že jest $k = a_{33}$.

Abychom nalezli analytický výraz pro elaci, specifikujme obecný systém tří rovnic kolineace nejprve volbou vrcholu O_3 (0, 0, 1) za invariantní střed homologie a tedy volbou stran $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ za in-

---

M. Frank, Über zentrische Kollineation von Kegelschnitten, Math. Annalen 92 (1924; a pozn. *H. Mohrmann* tamtéž 93, 1925).

[7]) Pomocí této věty (nebo věty duální) lze řešiti úlohu: sestrojiti kuželosečku dotýkající se dvou daných přímek a jdoucí třemi danými body, jež neleží na daných přímkách ani v jedné přímce a leží v témž ze dvou úhlů, tvořených přímkami danými (sestrojiti kuželosečku jdoucí dvěma danými body a dotýkající se tří daných přímek, jež nejdou danými body ani jedním bodem a protínají spojnici daných bodů v jedné z obou částí jimi oddělených). Buďtež dané přímky a, b, dané body C, D, E; bodem C veďme libovolnou kuželosečku k', dotýkající se přímek a, b, a sestrojme k ní kuželosečku homologickou, dotýkající se přímek a, b a jdoucí body C, D, E. Střed homologie je tu $ab = S$, osa homologie jde bodem C; v homologii takové odpovídá bodu D jeden z obou průsečíků spojnice SD s kuželosečkou k', bodu E pak jeden z obou průsečíků spojnice SE s k'. Jsou tedy možny čtyři homologie, převádějící k' v kuželosečku žádaných vlastností, tudíž čtyři kuželosečky úloze vyhovující. (Rovněž tak v případě duálním.)

[8]) Homologii s imaginárním středem nebo osou nebo dvojpoměrem uvádí *Ch. Beyel*, Zur Geometrie des Imaginären, Vierteljahrschrift Naturf. Ges. Zürich 31 (1886).

variantní paprsky; odtud plyne $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$; zvolíce ještě stranu O_3O_2 ($x_1 = 0$) za osu invariantních bodů, dostaneme $a_{32} = 0$. A protože rovnice pro ϱ má v tomto případě kořen trojnásobný, plyne z ní $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ (= 1). Jest tudíž elace (kolineace typu V.), jejíž střed a osa jsou v bodě (0, 0, 1) a v přímce $x_1 = 0$, vyjádřena rovnicemi

$$\varrho x'_1 = x_1, \quad \varrho x'_2 = x_2, \quad \varrho x'_3 = a_{31}x_1 + x_3.$$

59. Kolineace nehomologické. *a*) Kolineace I. typu, jejíž invariantní trojúhelník (reálný) je zároveň základním trojúhelníkem soustavy souřadnic, jest vyjádřena — jak jsme nalezli — rovnicemi

$$\varrho x'_1 = a_{11}x_1, \quad \varrho x'_2 = a_{22}x_2, \quad \varrho x'_3 = a_{33}x_3;$$

ze tří konstant a_{kk} jsou (vzhledem k tomu, že jde o veličiny úměrné) pouze dvě podstatné, třetí lze zvoliti rovnu 1.[1])[2])

V bodových řadách na třech stranách invariantního trojúhelníku $O_1O_2O_3$ indukuje tato kolineace projektivnosti s dvěma samodružnými body, jejichž charakteristické dvojpoměry jsou na O_1O_2 dvojpoměr a_{11}/a_{22}, na O_2O_3 dvojpoměr a_{22}/a_{33}, na O_3O_1 dvojpoměr a_{33}/a_{11}; duálně ve svazcích paprskových se středy ve třech vrcholech tohoto trojúhelníku existují projektivnosti s dvěma samodružnými paprsky dvojpoměru téhož jako na protější straně. Je patrno, že součin dvojpoměrů indukovaných projektivností na stranách invariantního trojúhelníku (a ve vrcholech jeho), jsou-li invariantní elementy brány v určitém smyslu, jest roven 1.

V kolineaci typu I. ať odpovídá bodu (obecně položenému) A bod A', spojnice jejich AA' ať protíná strany invariantního trojúhelníku $O_1O_2O_3$ v bodech Q_1 (na O_2O_3), Q_2 a Q_3; promítneme-li čtveřiny bodů na spojnici AA', složené ze dvou bodů Q_k a z bodů v kolineaci sdružených A, A', z vrcholů trojúhelníku na protější strany jeho, seznáváme, že platí

$$\mathrm{Dp}\,(Q_1Q_2AA') = \frac{a_{22}}{a_{11}}, \quad \mathrm{Dp}\,(Q_2Q_3AA') = \frac{a_{33}}{a_{22}}, \quad \mathrm{Dp}\,(Q_3Q_1AA') = \frac{a_{11}}{a_{33}}.$$

Body Q_k promítají se totiž do vrcholů na protější straně a body A, A'

[1]) Z projektivnosti jednomocných útvarů v rovinné kolineaci sdružených plyne přímo: Paprsky promítající z libovolného bodu roviny vrcholy invariantního trojúhelníku kolineace a bod k němu sdružený tvoří čtveřinu konstantního dvojpoměru; duálně body, v nichž je libovolná přímka protata stranami invariantního trojúhelníku kolineace a přímkou k ní sdruženou, tvoří čtveřinu konstantního dvojpoměru; a oba tyto dvojpoměry jsou si rovny. Má totiž dvojpoměr čtveřiny X ($O_1O_2O_3X'$) hodnotu $\frac{a_{11} - a_{33}}{a_{22} - a_{33}}$.

[2]) Kolineace I. typu 2. druhu (s jedním reálným a dvěma sdruženě imaginárními prvky samodružnými) vyjádří se analyticky (při reálném základním trojúhelníku soustavy s vrcholem O_3 v reálném bodě a s vrcholy O_1, O_2 na reálné přímce samodružných) ve tvaru

$$\varrho x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad \varrho x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \quad \varrho x'_3 = a_{33}x_3$$

(první dvě rovnice lze zjednodušiti na $\varrho x'_1 = x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha$, $\varrho x'_2 = -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha$).

do bodů sdružených na straně této. Duálně dvě přímky a, a', odpovídající sobě v kolineaci typu I., tvoří vždy s dvěma paprsky, promítajícími z jejich průsečíku vrcholy invariantního trojúhelníku, čtveřiny uvedených dvojpoměrů.[3][4])

Přirovnáme-li vlastnosti kolineace typu I. k vlastnostem homologie, nalézáme: *Každou kolineaci typu I.* (s reálným trojúhelníkem invariantním) *lze pokládati za produkt dvou homologických kolineací* (kolineací typu IV.), jejichž středy a osy homologie leží ve vrcholech a protějších stranách invariantního trojúhelníku.

Neboť homologie (obecná) středu O_1, osy o_1, dvojpoměru k_1 a druhá homologie (obecná) středu O_2, osy o_2, dvojpoměru k_2 tak zvolené, že O_2 leží na přímce o_1, o_2 prochází bodem O_1, vytvořují, po sobě na rovinu aplikovány, kolineaci s invariantními body O_1, O_2 a $O_3 = o_1 o_2$ i s invariantními přímkami o_1, o_2 a $o_3 = O_1 O_2$; dvojpoměry projektivností na stranách (a v protějších vrcholech) invariantního trojúhelníku mají na $O_1 O_2$ hodnotu k_1/k_2 (protože projektivnost tato je produktem dvou projektivností s týmiž body samodružnými v různém pořádku o dvojpoměrech k_1 a k_2), na $O_2 O_3$ hodnotu k_2, na $O_3 O_1$ hodnotu $1/k_1$.

Analyticky jsou první a druhá homologie vyjádřeny rovnicemi

$$\varrho x'_1 = k_1 x_1, \quad \varrho x'_2 = x_2, \quad \varrho x'_3 = x_3; \qquad \varrho x'_1 = x_1, \quad \varrho x'_2 = k_2 x_2, \quad \varrho x'_3 = x_3;$$

jejich produktem jest kolineace s rovnicemi

$$\varrho x'_1 = k_1 x_1, \quad \varrho x'_2 = k_2 x_2, \quad \varrho x'_3 = x_3,$$

jež jest ovšem typu I.

b) Kolineace typu II. má dva samodružné body O_2 a O_3 a dvě samodružné přímky, jednu o_1 spojující body O_2 a O_3, druhou o_3 jdoucí

[3]) Tuto charakteristickou vlastnost uvažované kolineace lze vyjádřiti větou: Na všech spojnicích dvou bodů, sdružených v rovinné kolineaci s invariantním trojúhelníkem, tvoří průsečíky se stranami trojúhelníku toho a ony body projektivní skupiny (pěti) bodů; duálně ve všech průsečících dvou sdružených přímek tvoří přímky promítající vrcholy invariantního trojúhelníku a ony přímky projektivní skupiny (pěti) paprsků. A tyto skupiny jsou projektivní s oněmi. Mimo to platí: Dva body, sdružené v rovinné kolineaci s invariantním trojúhelníkem, promítají se z vrcholů jeho dvojicemi paprsků, tvořících spolu se stranami jeho v těchto vrcholech čtveřiny, jejichž tři dvojpoměry mají součin 1; duálně dvě sdružené přímky protínají strany invariantního trojúhelníku ve dvojicích bodů, tvořících spolu s vrcholy jeho na těchto stranách čtveřiny, jejichž tři dvojpoměry mají součin 1.

[4]) Jest patrno, že poměr tří konstant, uvedených v rovnicích obecné kolineace rovinné, lze pokládati za (dva nezávislé) *invarianty* této kolineace. Místo toho lze za charakteristický útvar kolineace v rovině zvoliti skupinu tří bodů samodružných a dvou bodů sdružených, jak učinil *G. Kohn*, Über die Erweiterung eines Grundbegriffs der Geometrie der Lage, Math. Annalen 46 (1895). Výhodnější však jest k tomu účelu skupina pěti bodů, složená z bodu obecně položeného P_0 a z bodů P_1, P_2, P_3, P_4, v něž P_0 přechází danou kolineací $\mathbf{K}$ a jejími mocninami $\mathbf{K}^2$, $\mathbf{K}^3$, $\mathbf{K}^4$; tento invariant kolineace zvolil a vyšetřil, také pro speciální případy, *F. London*, Der Iterationswurf einer ebenen Kollineation, Archiv Math. Phys. (3) 7 (1904).

bodem O_2. V řadě bodové na přímce $o_1 = O_2O_3$ a ve svazku paprskovém středu $O_2 = o_1o_3$ existují projektivnosti s dvěma elementy samodružnými, v řadě bodové na o_3 a ve svazku paprskovém středu O_3 jsou projektivnosti limitní (typu II.) s jedním prvkem samodružným.

Rovnice této kolineace obdržíme z obecných rovnic $\varrho x'_1 = \Sigma a_{1k}x_k$, $\varrho x'_2 = \Sigma a_{2k}x_k$, $\varrho x'_3 = \Sigma a_{3k}x_k$, vložíme-li tam podmínky, že body $O_3\,(0, 0, 1)$, $O_2\,(0, 1, 0)$ a přímka $O_2O_1\,(x_3 = 0)$ jsou invariantní; odtud plyne $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{32} = 0$, $a_{31} = 0$. V rovnicích takto zjednodušených

$$\varrho x'_1 = a_{11}x_1, \quad \varrho x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \quad \varrho x'_3 = a_{33}x_3$$

je nutno ještě uplatniti podmínku, že samodružný bod O_2 vznikl splynutím dvou bodů (O_2 a O_1), že tedy odpovídá dvojnásobnému kořenu rovnice pro ϱ; protože tedy z kořenů rovnice $(a_{11} - \varrho)\,(a_{22} - \varrho)\,(a_{33} - \varrho) = 0$ je $a_{22} = a_{11}$ ($\varrho_2 = \varrho_1$), má konečně kolineace typu II. rovnice

$$\varrho x'_1 = a_{11}x_1, \quad \varrho x'_2 = a_{21}x_1 + a_{11}x_2, \quad \varrho x'_3 = a_{33}x_3.$$

Ze tří konstant zde obsažených jest možno ovšem jednu odstraniti (třebas a_{11}), takže zbudou jenom dvě.

Kolineaci typu II. (s uvedenými prvky samodružnými) *lze vytvořiti jako produkt homologie* (středu O_3, osy o_3, dvojpoměru k) *a elace* (středu O_2, osy o_1); při výsledné kolineaci jsou zajisté invariantní body O_3 a O_2, přímky o_1 a o_3, na O_3O_2 jest pak projektivnost dvojpoměru k. Rovnice homologie a elace uvedených jsou

$$\varrho x'_1 = x_1, \quad \varrho x'_2 = x_2, \quad \varrho x'_3 = kx_3; \quad \varrho x'_1 = x_1, \quad \varrho x'_2 = a_{21}x_1 + x_2, \quad \varrho x'_3 = x_3$$

a jejich produkt má tedy rovnice

$$\varrho x'_1 = x_1, \quad \varrho x'_2 = a_{21}x_1 + x_2, \quad \varrho x'_3 = kx_3,$$

jež se shodují s hořejšími pro kolineaci typu II.

c) Kolineace typu III. má jeden bod samodružný $O_3\,(0, 0, 1)$ a jednu samodružnou přímku, jím procházející, $O_3O_2 = o_1$. V řadě bodové na o_1 a ve svazku paprskovém středu O_3 existují projektivnosti limitní.

Abychom nalezli rovnice této kolineace, zaveďme do obecných rovnic pro kolineaci podmínky, že bod $O_3\,(0, 0, 1)$ a přímka $O_3O_2\,(x_1 = 0)$ jsou invariantní, dále že kořeny rovnice pro ϱ jsou všechny sobě rovny. Z prvých dvou podmínek plyne $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{12} = 0$, z druhé podmínky pak $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ (jež volíme $= 1$). Jsou tedy rovnice kolineace III. typu

$$\varrho x'_1 = x_1, \quad \varrho x'_2 = a_{21}x_1 + x_2, \quad \varrho x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + x_3;$$

konstanty a_{21} a a_{32} musí býti různé od nuly (položíme-li vrchol O_2 do průsečíku přímky o_1 se spojnicí bodu O_1 a bodu v kolineaci jemu odpovídajícího, jest ještě $a_{31} = 0$).

Kolineaci III. typu (se samodružnými prvky O_3 a o_1) *vytvořují dvě elace*, jedna středu $O_2\,(0, 1, 0)$, osy o_1 a druhá středu $O_3\,(0, 0, 1)$, osy o_2;

neboť produkt těchto elací je kolineace s vlastnostmi charakteristickými pro typ III. Rovnice prvé resp. druhé elace jsou

$$\varrho x'_1 = x_1, \quad \varrho x'_2 = a_{21}x_1 + x_2, \quad \varrho x'_3 = x_3;$$
$$\varrho x'_1 = x_1, \quad \varrho x'_2 = x_2, \quad \varrho x'_3 = a_{32}x_2 + x_3,$$

rovnice produktu jejich jsou pak

$$\varrho x'_1 = x_1, \quad \varrho x'_2 = a_{21}x_1 + x_2, \quad \varrho x'_3 = a_{32}a_{21}x_1 + a_{32}x_2 + x_3.$$[5][6])

60. Involuční kolineace; kolineace periodické. *a*) Seznali jsme, že z projektivností dvou soumístných útvarů jednomocných jest nejdůležitější projektivnost involuční. Obdobně mezi kolineacemi zaslouží zvláštní pozornosti involuční kolineace dvou soumístných polí (základních útvarů dvojmocných); je to neidentická kolineace, totožná se svou inversní (o které tedy platí $\mathbf{K} = \mathbf{K}^{-1}$, ale $\mathbf{K} \neq 1$), nebo také neidentická kolineace, jež dvakrát na útvar základní aplikována vede k transformaci identické (o níž tedy platí $\mathbf{K}^2 = 1$, ale $\mathbf{K} \neq 1$). V involuční kolineaci odpovídají sobě vždy dva sdružené prvky obapolně, t. j. odpovídá-li v kolineaci prvku X prvek X', odpovídá v téže kolineaci prvku X' (čítanému do prvního útvaru) prvek X (čítaný do útvaru druhého).[1])

Je patrno, že homologie rovinná (se středem O a osou o mimo sebe ležícími), jejíž indukované projektivnosti na samodružných paprscích svazku O a v samodružných bodech osy o jsou involuční, jest involuční kolineací; sluje také *homologií harmonickou*. Snadno dokážeme, že *harmonická homologie jest jedinou kolineací involuční*. Neboť odpovídá-li v kolineaci involuční (dvou soumístných polí) bodu X bod X' (různý od X) obapolně, odpovídá spojnici XX' spojnice $X'X$; jest tedy každá spojnice dvou bodů v involuční kolineaci sdružených invariantní přímkou kolineace. Duálně jest každý průsečík dvou přímek v involuční kolineaci sobě odpovídajících invariantním bodem kolineace. Obsahuje tedy involuční kolineace neomezené množství invariantních přímek

---

[5]) Rovnice kolineací typů limitních lze zjednodušiti na přehlednější (kanonický) tvar

pro typ II.: $x'_1 : x'_2 : x'_3 = a_1x_1 : a_2x_2 : (x_2 + a_2x_3)$;
pro typ III.: $x'_2 : x'_2 : x'_3 = a_1x_1 : (x_1 + a_1x_2) : (x_2 + a_1x_3)$;
pro typ V.: $x'_1 : x'_2 : x'_3 = a_1x_1 : a_1x_2 : (x_2 + a_1x_3)$.

[6]) Analytickou klasifikaci kolineací rovinných a rovnice (i vlastnosti) jednotlivých typů jejich podávají na př. *L. Heffter-C. Koehler*, Lehrbuch der analytischen Geometrie I, p. 182 a n.; *O. Veblen-J. W. Young*, Projective geometry I, p. 271 a n.; *A. Comessatti*, Lezioni di geometria analitica e proiettiva II, p. 191 a n.; viz také *H. Beck*, Koordinatengeometrie I, p. 173 a n.; *H. Grassmann*, Projektive Geometrie der Ebene II_1, 1913; dále *R. Baldus*, Zur Klassifikation der ebenen und räumlichen Kollineationen, Sitzungsberichte Akad. München 1928.

[1]) Proto se involuční kolineace dvou soumístných polí (základních útvarů dvojmocných) někdy pojímá jako sdružení prvků po dvou v jedné rovině (v jednom základním útvaru dvojmocném).

a bodů, pročež (není-li identická) jest homologií; a majíc na invariantních přímkách i v invariantních bodech projektivnost involuční, jest homologií harmonickou.[2])[3])

Analyticky jest harmonická homologie, jejíž střed jest v bodě O_3 a osa v přímce O_1O_2, vyjádřena rovnicemi, jež plynou specialisací rovnic obecné homologie pro dvojpoměr $k = -1$, tedy rovnicemi

$$\varrho x'_1 = x_1, \quad \varrho x'_2 = x_2, \quad \varrho x'_3 = -x_3.[4])$$

b) Involuční homologie *jest určena svým středem a svou osou.* Ke zvolenému bodu sestrojíme bod sdružený, spojíme-li jej se středem homologie a ustanovíme-li na této spojnici čtvrtý bod harmonický ke středu, k průsečíku spojnice s osou a k bodu danému; duálně sestrojíme ke zvolené přímce přímku sdruženou, vedouce jejím průsečíkem s osou čtvrtý paprsek harmonický k ose, ke spojnici průsečíku se středem a k přímce dané.

Lze však involuční homologii určiti také *dvěma dvojicemi sdružených bodů*, tvořících čtyřroh, nebo *dvěma dvojicemi sdružených přímek*, tvořících čtyrstran.

Neboť jsou-li dány dvojice sdružených bodů A a A', B a B' (v uvedené poloze obecné), jest středem homologie průsečík (AA', BB'), osa homologie pak prochází body $(AB, A'B')$ a $(AB', A'B)$. Dvěma přímkám, jež určují každý z obou těchto průsečíků, odpovídají totiž tytéž dvě přímky (v obráceném pořadí); onen bod pak (na prvním místě uvedený) je středem homologie průsečík (aa', bb'), osa homologie pak je v průsečíku spojnic $(ab, a'b')$ a $(ab', a'b)$. Dvěma bodům, jež určují každou z obou těchto spojnic, odpovídají totiž tytéž dva body (v obráceném pořadí); spojnice na prvém místě uvedená jest pak osou samodruž-

[2]) Kdežto pouze harmonická homologie jest kolineací involuční (všechny dvojice sdružených bodů a dvojice sdružených přímek si odpovídají obapolně), může se u kolineace nehomologické vyskytnouti na samodružné přímce a v samodružném bodě involuční projektivnost bodových řad resp. paprskových svazků (aniž by kolineace byla involuční). Lze zjistiti že v nehomologické kolineaci existuje dvojice bodů a dvojice přímek obapolně si odpovídajících, tedy involuční projektivnost na přímce a v bodě tehdy a jen tehdy, je-li čtverec této kolineace homologií.

[3]) Metricky speciálními případy harmonické homologie jsou *souměrnost osová* (šikmá nebo kolmá, afinní homologie s konstantním poměrem -1) a *souměrnost středová* (homothetie s konstantním poměrem -1).

[4]) Analytický důkaz toho, že jediná (neidentická) kolineace involuční jest harmonická homologie, viz na př. v knize *L. Heffter-C. Koehler*, Lehrbuch der analytischen Geometrie I, p. 186. Dokáže se nejprve, že lze po involuční kolineaci (při úpravě koeficientů v jejích rovnicích, vedoucí k determinantu $A = 1$) žádati, aby o součinitelích jejích rovnic platilo $a_{hk} = A_{hk}$. Rovnice $\varrho^3 - s\varrho^2 + s\varrho - 1 = 0$, kde $s = \Sigma a_{kk}$, má pak (nehledě ke kořenu trojnásobnému $= +1$ pro $s = 3$, jenž vede ke kolineaci identické) kořen dvojnásobný $= -1$ a jednoduchý $= +1$ (pro $s = -1$).

dem svazku přímek samodružných, protože obsahuje samodružné přímky AA', BB' a spojnice s posledními dvěma body. Jsou tedy střed a osa homologie involuční určeny úhlopříčnými vrcholy čtyřrohu $AA'BB'$.

ných prvků, protože obsahuje samodružné body aa', bb' a průsečíky své se spojnicemi právě dotčenými. Jsou tedy osa a střed involuční homologie stanoveny úhlopříčkami čtyrstranu $aa'bb'$.

Odtud také vysvítá, že *kolineace, v níž sobě obapolně odpovídají dvě dvojice bodů nebo* (duálně) *dvě dvojice přímek, nenáležející témuž základnímu útvaru jednomocnému, jest involuční homologií.* U homologie k tomu ovšem stačí jedna dvojice.[5])[6])[7])

[5]) Involuční homologie jest kolineace svou jednoduchostí velmi důležitá. Každou kolineaci (typu I.) dvou soumístných rovin jest možno vytvořiti jako produkt (obecně) tří involučních homologií, jak dokázal analyticky *M. W. Haskell*, The resolution of any collineation into perspective reflections, Transactions Amer. math. soc. 7 (1906).

O křivkách při této transformaci invariantních uvažuje na př. *A. Strnad*, O křivkách involučně homologických, Časopis mat. fys. 14 (1885).

[6]) K větě o involuci, přidružené k dané projektivnosti dvou soumístných útvarů jednomocných (čl. 29), nalézá analogii pro rovinnou kolineaci a příslušnou konstrukci podává *F. London*, Über einen Satz aus der Theorie der ebenen Kollineationen, Math. Annalen 57 (1903).

[7]) *Podobnost* dvou soumístných polí jest kolineace jejich, při které je invariantní nevlastní přímka jejich roviny, jakož i absolutní involuce na této přímce (dvojice involuce té transformují se v její dvojice); podle toho, přechází-li každý z obou smyslů přímky nevlastní v sebe sama nebo jeden smysl v druhý, dlužno jest rozeznávati podobnost přímou a obrácenou. Jsou-li v rovině dány dvě dvojice sdružených bodů v konečnu A, A' a B, B', existují podobnost přímá i podobnost obrácená, jimi určené; neboť protínají-li přímky AB a $A'B'$ přímku nevlastní v bodech C a C', jest kolineace určena projektivností $ABC \barwedge A'B'C'$ a přímou nebo obrácenou shodností bodových řad na přímce nevlastní, při níž bodu C odpovídá bod C'. Homologická podobnost dvou soumístných polí jest buď homothetie (spec. translace), je-li přímá (přímá shodnost, indukovaná na přímce nevlastní, musí totiž býti projektivností identickou, protože by jinak musila býti eliptickou, což však není možno, ježto přímka nevlastní jen v celku invariantní musila by procházeti středem homologie a obsahovati tedy projektivnost hyperbolickou nebo parabolickou), nebo osová souměrnost kolmá, je-li obrácená (osa homologie jde jedním samodružným bodem obrácené shodnosti na přímce nevlastní, druhý, sdružený v absolutní involuci s prvým, je středem homologie). Všechny podobnosti tvoří grupu.

Shodnost dvou soumístných polí jest jako speciální podobnost (s poměrem úseček sobě odpovídajících rovným 1) také přímá nebo obrácená. Homologická shodnost jest podle uvedeného buď translace nebo středová souměrnost (homothetie s poměrem $+1$ nebo -1), je-li přímá, nebo osová souměrnost kolmá, je-li obrácená. Nehomologickou shodnost přímou lze uskutečniti rotací kolem pevného bodu (na samodružné přímce nevlastní, na níž je indukována přímá shodnost neidentická, není reálných bodů samodružných, pročež přidružený k ní bod samodružný je v konečnu; soumístné svazky se středem v tomto bodě jsou přímo shodné), shodnost obrácenou pak translací podél přímky a překlopením kolem ní (jeden z obou samodružných bodů obrácené shodnosti na nevlastní přímce, jež jsou sdruženy v absolutní involuci její, je přidružen k této přímce, k druhému je přidružena

c) Kolineace je *periodická s periodou n* čili řádu n-tého, jestliže n-krát aplikována na rovinu (základní útvar dvojmocný) vede ke kolineaci identické (při čemž n je nejnižší číslo tohoto významu); o periodické kolineaci $\mathbf{K}$ n-tého řádu platí tedy $\mathbf{K}^n = 1$. Jestliže periodická kolineace řádu n-tého převádí bod A_1 v bod A_2, tento A_2 v A_3, A_3 v A_4, . . ., A_{n-1} v A_n, přechází kolineací tou A_n opět v A_1; skupiny bodů $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ takové vlastnosti, o nichž tedy platí

$$X_1X_2X_3 \ldots X_{n-1}X_n \barwedge X_2X_3X_4 \ldots X_nX_1,$$

tvoří n-členné cykly periodické kolineace. Spolu ovšem skládají při této kolineaci přímky $X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4, \ldots, X_nX_1$ cykly o n členech.[8])

Z rovnic jednotlivých typů kolineace rovinné vysvítá, že mohou býti periodickými pouze kolineace typu I. (s invariantním trojúhelníkem) a typu IV. (obecná homologie).

Homologie (s rovnicemi $\varrho x'_1 = x_1$, $\varrho x'_2 = x_2$, $\varrho x'_3 = kx_3$) je periodickou kolineací řádu n-tého, jestliže její dvojpoměr je primitivním n-tým kořenem z 1; má-li tedy periodická kolineace býti reálnou neidentickou homologií s reálným středem a reálnou osou, může býti pouze $k = -1$, $n = 2$, t. j. involuční homologie je jediná (reálná) periodická kolineace typu IV.

---

přímka jdoucí bodem prvním, na níž je indukována shodnost přímá). Všechny shodnosti v rovině tvoří grupu.

Pomocí předcházejícího lze dokázati, že *geometrii obyčejnou* (*Eukleidovu*) *v rovině jest možno zařaditi do projektivní geometrie jako soubor těch pojmů a vět jejích, při nichž jest invariantní přímka v nekonečnu a její absolutní involuce* (jež dohromady tvoří t. zv. *absolutní útvar roviny*). Tři skupiny postulátů projektivní geometrie upravíme výhradně pro prvky vlastní a pro pojem přímky jako otevřené soustavy bodů; k tomu přistupují pojmy rovnoběžnosti (s příslušným postulátem), kolmosti a shodnosti. Dvě rovnoběžné přímky definují se jako přímky se společným bodem na přímce nevlastní, dvě kolmé přímky jako přímky, jejichž průsečíky s nevlastní přímkou jsou body sdružené v absolutní involuci její. Při shodnosti v rovině jde o rovnost dvou úhlů a rovnost dvou úseček. Rovnost dvou úhlů v rovině definuje se jako kolineace, jež na nevlastní přímce indukuje projektivnost s invariantní involucí absolutní (je to přímá nebo obrácená shodnost této přímky, jež převádí dvojici průsečíků ramen jednoho úhlu s přímkou nevlastní v dvojici průsečíků ramen úhlu druhého). Rovnost dvou úseček je obsažena v obecném pojmu shodnosti dvou soumístných polí; tato shodnost je buď přímá nebo obrácená. Přímou shodnost lze pokládati za produkt dvou obrácených; obrácená shodnost je produkt translace a osové souměrnosti kolmé; translace jest speciální homologická kolineace s osou v přímce nevlastní a s incidentním středem; osová kolmá souměrnost jest involuční homologická kolineace s osou vlastní a se středem v nevlastním bodě, sdruženém v absolutní involuci s průsečíkem osy té a přímky nevlastní. Původcem této myšlenky jest *A. Cayley* (1859) a *F. Klein* (1871); viz na př. *F. Enriques*, Lezioni di geometria proiettiva, p. 195 a n., nebo *F. Severi*, Geometria proiettiva, p. 255 a n., nebo *A. Comessatti*, Lezioni di geometria analitica e proiettiva II, p. 209 a n.

[8]) Kolineace periodická čili cyklická s periodou 2, 3, 4, . . . sluje někdy také binárně, ternárně, kvaternárně, . . . cyklická.

Kolineace typu I. (s rovnicemi $\varrho x'_1 = k_1 x_1$, $\varrho x'_2 = k_2 x_2$, $\varrho x'_3 = x_3$) je periodická řádu n-tého, platí-li o jejích dvojpoměrech $k_1^n = 1$, $k_2^n = 1$. Odtud vidíme, že při reálné kolineaci periodické jsou ze tří invariantních bodů (a tří invariantních přímek) kolineace této reálnými pouze jeden bod a k němu přidružená přímka, kdežto ostatní dva body (a dvě přímky) jsou konjugovaně imaginární. Ve svazku paprsků se středem v reálném bodě samodružném a v řadě bodové s osou v reálné přímce samodružné existuje periodická projektivnost; při n lichém tvoří spojnice bodů cyklu s invariantním bodem kolineace a duálně průsečíky přímek cyklu s invariantní přímkou kolineace skupiny o n prvcích, při n sudém však skupiny o $\frac{1}{2}n$ elementech, protože v tomto druhém případě jest kolineace $\mathbf{K}^{\frac{1}{2}n}$ involuční a tedy homologií s invariantním svazkem paprsků a invariantní řadou bodů.[9])

d) Harmonická (involuční) homologie jest jedinou kolineací periodickou řádu 2. V kolineaci *periody 3* odpovídá bodu X_1 bod X_2, tomuto X_2 bod X_3 a bodu X_3 opět bod X_1; body roviny jsou takto sdruženy v cykly trojic $X_1X_2X_3$, tvořící trojrohy. Spojíme-li vrcholy trojúhelníku $A_1A_2A_3$ s invariantním bodem O této kolineace, obdržíme v průsečících spojnic těch s protějšími stranami trojúhelníku B_1, B_2, B_3 opět cyklus kolineace; neboť přímkám OA_1, A_2A_3 odpovídají přímky OA_2, A_3A_1, tedy průsečíku oněch B_1 průsečík těchto B_2, atd. Jest tedy trojúhelník $B_1B_2B_3$ perspektivní s trojúhelníkem $A_1A_2A_3$; jejich osa perspektivnosti je samodružnou přímkou kolineace (neboť na ní tvoří průsečíky protějších stran obou trojúhelníků $A_1A_2A_3$ a $B_1B_2B_3$ trojici bodů cyklicky sobě odpovídajících).

Vyjdeme-li od dvou trojrohů obecně položených $A_1A_2A_3$ a $B_1B_2B_3$, jejichž vrcholy tvoří cykly kolineace s periodou 3, shledáme, že jsou vždy perspektivní a to třemi způsoby, se středy perspektivnosti v bodech C_1, C_2, C_3, jež opět skládají cyklus kolineace; ze tří uvedených trojrohů jsou kterékoli dva třikrát perspektivní se středy perspektivnosti ve vrcholech třetího. Neboť z projektivností $A_1(A_2A_3B_1B_2) \barwedge A_2(A_3A_1B_2B_3)$ a $A_2(A_3A_1B_2B_3) \barwedge A_2(A_1A_3B_3B_2)$ vyplývá, že první a poslední uvedená čtveřina paprsků jsou perspektivní, že tedy body A_3, B_2 a (A_1B_1, A_2B_3) leží v přímce a proto přímky A_1B_1, A_2B_3 a A_3B_2 procházejí týmž bodem C_1.

[9]) Jestliže eliptickou involuci se samodružnými prvky ve dvou imaginárních bodech samodružných na reálné invariantní přímce periodické kolineace v rovině α promítneme pravoúhlou involucí v rovině ϱ (jdoucí onou přímkou) a ze středu jejího danou kolineaci promítneme na rovinu $\beta \parallel \varrho$, obdržíme na β rotaci se středem v průmětu reálného invariantního bodu dané kolineace; n-členné bodové cykly kolineace dané promítají se do skupin na soustředných kružnicích, jež tvoří pravidelné n-úhelníky nebo $\frac{1}{2}n$-úhelníky (obyčejné nebo hvězdovité), obdobně duální cykly paprskové. Tyto soustředné kružnice svědčí, že bodové cykly dané kolineace periodické při $n > 2$ leží na kuželosečkách svazku-řady, jež se v imaginárních bodech samodružných dotýkají samodružných přímek imaginárních (tvoříce tu skupiny periodické projektivnosti); duálně paprskové cykly kolineace takové jsou skupinami tečen těchto kuželoseček (v periodické projektivnosti jejich).

Jedním bodem C_2 jdou také přímky, v kolineaci oněm odpovídající, A_2B_2, A_3B_1 a A_1B_3, a konečně bodem C_3 jdou přímky A_3B_3, A_1B_2 a A_2B_1. Body C_1, C_2, C_3 tvoří ovšem také cyklus uvažované kolineace. Že pak každý ze tří trojrohů těch má pro zbývající dva stejný význam jako $C_1C_2C_3$ pro $A_1A_2A_3$ a $B_1B_2B_3$, vyčteme bezprostředně (neboť na př. spojnice B_1C_1, B_2C_3 a B_3C_2 jdou bodem A_1, atd.).

Kolineace *s periodou 4* je stanovena korespondencí $A_1A_2A_3A_4 \barwedge A_2A_3A_4A_1$. V této kolineaci **K** odpovídají sobě spojnice A_1A_3 a A_2A_4 obapolně; průsečík (A_1A_3, A_2A_4) je proto samodružným bodem kolineace. Obapolně odpovídají sobě také průsečíky protějších stran čtyrúhelníku (A_1A_2, A_3A_4) a (A_1A_4, A_2A_3); je tedy jejich spojnice samodružnou přímkou kolineace **K**. Čtverec této kolineace $\mathbf{K}^2$ je involuční homologie se středem a osou v uvedených invariantních prvcích kolineace **K**.[10])[11])[12])

61. Kolineace s invariantní kuželosečkou. *a*) Podle obecné úvahy o kolineaci dvou polí (v rovinách různých nebo soumístných), jež danou kuželosečku jednoho pole převádí v danou kuželosečku pole druhého, jest možno ve dvou soumístných polích ke zvolené kuželosečce jejich ustanoviti takovou kolineaci, při které tato kuželosečka jest invariantní. Kolineace té vlastnosti jest zajisté určena, jestliže třem bodům dané kuželosečky A, B, C přiřadíme tři její body A', B', C' a jako čtvrtou dvojici korespondujících bodů zvolíme průsečíky tečen kuželosečky ve dvou z oněch bodů a ve dvou bodech jim odpovídajících; nebo můžeme za čtvrtou dvojici zvoliti další dva body dané kuželosečky, odpovídající sobě v projektivnosti soumístných kvadratických řad, jež na kuželosečce uvažované jest stanovena třemi dvojicemi prve uvedenými AA', BB' a CC'. A ovšem také duálně.

Jak patrno, přicházíme takto od projektivnosti dvou soumístných řad bodových na zvolené kuželosečce ke kolineaci dvou soumístných polí, v níž ona projektivnost na invariantní kuželosečce jest obsažena.

---

[10]) Periodická kolineace 4. řádu vznikne také jako čtverec korelace tím určené, že vrcholům A_k jednoduchého čtyrúhelníku v rovině přiřadíme strany jeho A_kA_{k+1} (kde $A_5 \equiv A_1$).

[11]) O periodických kolineacích v rovině pojednávají *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage III, p. 182 a n.; *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandschaften II, p. 160 a n.; také *R. Krause*, Über cyklische Collineationen, Progr. Stadtgymn. Stettin 1897; *B. Bydžovský*, Podrobnosti k theorii ternárně cyklické kolineace, Progr. reálky Kladno 1907; *G. Siegmund*, Zyklische Kollineationen, Progr. I. Staatsrealsch. Wien 1913.

[12]) Z kolineací o speciálních vlastnostech byla vyšetřována také kolineace, v níž třem bodům A, B, C odpovídají pořadem body A', B', C' tak, že A' leží na BC, B' na CA a C' na AB; trojúhelníku odpovídá zde trojúhelník jemu vepsaný, inversní kolineace převádí tedy trojúhelník v trojúhelník jemu opsaný. Periodická kolineace 3. řádu patří k druhu jednomu i druhému. Viz *M. Pasch*, Zur Theorie der Collineation und der Reciprocität, Math. Annalen 23 (1884); *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften II, p. 168 a n.

b) Abychom kolineaci s invariantní kuželosečkou mohli vyšetřovati pomocí projektivnosti, kterou ona kolineace na kuželosečce té indukuje, všimněme si vztahu mezi samodružnými prvky jejich. A předpokládejme nejprve, že kolineace dvou soumístných polí **K**, při níž na invariantní kuželosečce k existuje indukovaná projektivnost soumístných řad (a svazků) **P**, jest nehomologická.

Kolineace **K** převádí dvojici XX' bodů kuželosečky, odpovídajících sobě v **P**, opět ve dvojici bodů kuželosečky v **P** sdružených, převádí proto spojnice XY' a $X'Y$ bodů na kuželosečce opět ve spojnice tohoto druhu a jejich průsečíky rovněž v takové průsečíky; a protože tyto průsečíky $(XY', X'Y)$ vytvořují osu projektivnosti **P**, jest při kolineaci **K** invariantní osa o projektivnosti **P**. Duálně plyne, že jest invariantní také střed O projektivnosti **P** kvadratických svazků soumístných uvažované kuželosečky. Střed O a osa o projektivnosti **P** tvoří ovšem dvojici přidružených prvků samodružných v kolineaci **K**.

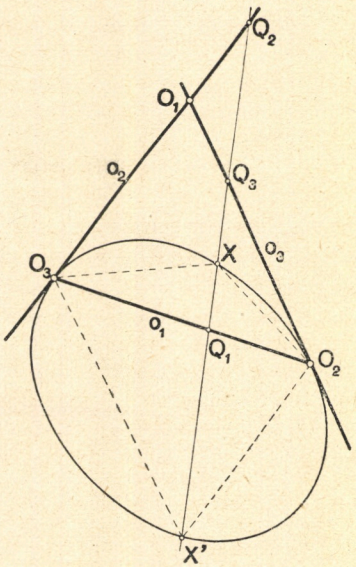
Jsou možny tyto případy: osa o projektivnosti **P** na invariantní kuželosečce k protíná kuželosečku (ve dvou reálných bodech) nebo jí neprotíná nebo se jí dotýká.

V prvním případě jsou společné body osy o a kuželosečky k samodružnými body nejen projektivnosti **P**, nýbrž i kolineace **K**; tečny kuželosečky v těchto bodech jsou samodružnými přímkami projektivnosti **P** kvadratických svazků paprskových i kolineace **K**, jejich průsečík jest středem projektivnosti **P** a třetím samodružným bodem O kolineace **K**, přidruženým k o. Kolineace **K** má tři samodružné body a tři samodružné přímky (spojnice oněch), jest typu I. (prvního druhu).

V druhém případě má kolineace **K** jediný (reálný) bod samodružný ve středu O projektivnosti **P** a jedinou (reálnou) přímku samodružnou v ose o této projektivnosti, kteréžto prvky jsou k sobě v **K** přidruženy. Kdyby totiž kolineace **K** měla mimo O další bod samodružný S, ležel by tento bod na přímce o (nejsa k ní přidružen), na přímce té ležel by pak ještě další bod samodružný R (průsečík spojnice dotyčných bodů tečen jdoucích z S ke k), takže bodem O procházely by samodružné přímky OS, OR, a jejich průsečíky s k odpovídaly by sobě obapolně (nemohouce býti jednotlivě samodružnými) — byla by tudíž **K** homologií proti předpokladu. Duálně zamítneme možnost další samodružné přímky mimo o. Kolineace **K** jest opět typu I. (druhého druhu).

V případě třetím jsou osa o a střed O projektivnosti **P** tečnou a dotyčným bodem kuželosečky k a jedinými samodružnými prvky kolineace **K**. Kdyby totiž **K** měla další samodružnou přímku jdoucí bodem O, protínala by tato kuželosečku k v samodružném bodě (vedle O), jenž by musil býti přidružen k o, což však není možno; duálně nemůže míti **K** další samodružný bod na o. Kdyby **K** měla další samodružnou přímku ležící mimo O, protínala by tato přímku o v samodružném bodě proti důsledku právě uvedenému; duálně nemůže **K** míti další samodružný bod mimo o. Kolineace **K** je typu III.

Jestliže projektivnost **P** soumístných řad na invariantní kuželosečce k je involucí, jest kolineace **K** homologií harmonickou. Neboť při involuční projektivnosti na k procházejí spojnice sdružených bodů všechny týmž bodem (středem involuce), duálně leží průsečíky sdružených přímek na téže přímce (ose involuce). Střed a osa involuce **P** jsou tedy středem a osou homologie **K**; a protože dva korespondující body kuželosečky k odpovídají sobě obapolně, jest homologie tato harmonická. Obráceně homologie s invariantní kuželosečkou indukuje na této involuční projektivnost a jest sama involuční. Neboť korespondující body invariantní kuželosečky leží na paprscích, jež procházejí středem homologie, duálně korespondující přímky této kuželosečky protínají se na ose homologie; jest tedy na k projektivnost involuční, a homologie jest (podle předcházejícího) také involuční.



Obr. 72.

c) Zabývali jsme se kolineací dvou soumístných polí za předpokladu, že při ní existuje invariantní kuželosečka; co je podmínkou toho, aby kolineace měla samodružnou kuželosečku?

Kuželosečka při kolineaci samodružná prochází (vzhledem k indukované projektivnosti své) samodružnými body (reálnými nebo imaginárními) této kolineace a dotýká se v nich samodružných přímek jejích. Dejme tomu, že invariantní kuželosečka obsahuje samodružné body O_2, O_3 a má v nich samodružné tečny o_3, o_2 uvažované kolineace. Promítneme-li body O_2, O_3 a kterékoli dva body kuželosečky X, X', jež sobě odpovídají v projektivnosti kolineací tam indukované, z bodů O_2 a O_3, jsou tyto dvě čtveřiny paprsků projektivní (protože promítají čtyři body kuželosečky z bodů jejích); označíme-li průsečíky spojnice XX' se stranami invariantního trojúhelníku kolineace $O_1O_2O_3$ písmeny Q_k (obr. 72), vyplývá odtud

$$\mathrm{Dp}\,(Q_1Q_2XX') = \mathrm{Dp}\,(Q_3Q_1XX').$$

A dále vychází, protože $Q_3Q_1XX' \overline{\wedge} Q_1Q_3X'X$ a tedy $Q_1Q_2XX' \overline{\wedge} Q_1Q_3X'X$, že na spojnici dvou bodů invariantní kuželosečky tvoří tyto dvojici involuce, v níž je samodružným průsečík spojnice té se spojnicí samodružných bodů kuželosečky a sdruženy jsou průsečíky její se samodružnými tečnami kuželosečky.

Obráceně jestliže v kolineaci se samodružným trojúhelníkem $O_1O_2O_3$ o dvou bodech roviny X a X' sobě odpovídajících platí Dp $(Q_1Q_2XX') =$ $=$ Dp (Q_3Q_1XX'), jest v kolineaci té samodružnou kuželosečka, dotýkající se v bodech O_2, O_3 stran o_3, o_2 invariantního trojúhelníku. Neboť je-li podmínka ta splněna, platí $Q_1Q_2XX' \barwedge Q_1Q_3X'X$, t. j. XX' jest dvojicí involuce, určené samodružným bodem Q_1 a dvojicí Q_2Q_3; byl-li však bod X zvolen na kuželosečce uvedeným způsobem položené a protíná-li spojnice XX' tuto kuželosečku po druhé v bodě X'_1, vychází z předcházející úvahy (přímé) $Q_1Q_2XX'_1 \barwedge Q_1Q_3X'_1X$, čili XX'_1 jest dvojicí involuce dotčené — pročež $X'_1 \equiv X'$, a každému bodu kuželosečky uvedené odpovídá bod její, kuželosečka ta je při kolineaci samodružnou. Totéž platí o každé kuželosečce svazku-řady se základními body dvojnásobnými O_2, O_3 a základními přímkami dvojnásobnými o_3, o_2.[1])

Nalezli jsme tedy, že *nutnou a dostačující podmínkou toho, aby kolineace s invariantním trojúhelníkem měla samodružnou kuželosečku, jest rovnost dvou ze tří dvojpoměrů čtveřin, tvořených dvěma body v kolineaci sdruženými a dvěma průsečíky jejich spojnice se stranami invariantního trojúhelníku.*[2]) V kolineaci takové jest invariantní celý svazek a spolu řada kuželoseček, jež se ve dvou vrcholech invariantního trojúhelníku kolineace dotýkají dvou stran jeho.[3])[4])[5])

Použijeme-li tohoto výsledku na homologii, berouce za strany in-

[1]) Máme-li na zřeteli tento svazek a spolu řadu kuželoseček u kolineace obecné, vidíme, že kolineace taková převádí jednu kuželosečku svazku-řady v druhou; při tom jsou vždy invariantní dvě zvrhlé kuželosečky svazku-řady (totiž kuželosečky svazku, sestávající z přímek o_2, o_3 a z dvojnásobné přímky o_1, duálně kuželosečky řady, sestávající z dvojnásobného bodu O_1 a z bodů O_2, O_3). Obecná kolineace indukuje tedy v uvažované soustavě kuželoseček projektivnost s uvedenými dvěma prvky samodružnými; je-li u kolineace speciálně (při splněné podmínce hořejší) jedna pravá kuželosečka svazku-řady samodružnou, jsou v projektivnosti té samodružnými tři prvky této soustavy, pročež všechny kuželosečky její.

[2]) Kolineace s invariantní kuželosečkou byla nazvána *kolineací Hermiteovou*, protože *Ch. Hermite* v algebraických pojednáních Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies a Sur la théorie des formes quadratiques, Journal r. a. Math. 47 (1854) zabýval se lineárními transformacemi, při nichž se kvadratická forma nemění. Kuželosečka, jež sobě samé při kolineaci soumístných polí své roviny odpovídá, může slouti *autokolineární*.

[3]) Jsou-li sobě rovny dvakrát dva ze tří dvojpoměrů dotčených, jsou si ovšem rovny všechny: speciální kolineace, u které existují dva svazky-řady invariantních kuželoseček, má ještě třetí svazek-řadu kuželoseček invariantních.

[4]) Důležitá metricky speciální kolineace Hermiteova jest rotace; invariantní trojúhelník má reálný vrchol ve středu otočení a dva imaginární vrcholy v kruhových bodech roviny, invariantní kuželosečky jsou soustředné kružnice.

[5]) Protože periodická kolineace svými dvojpoměry vyhovuje uvedené podmínce, jest to kolineace Hermiteova (jak už dříve bylo cestou metrickou naznačeno); každý cyklus bodů kolineace periodické leží na invariantní kuželosečce, každý cyklus přímek tvoří skupinu tečen takové kuželosečky

variantního trojúhelníku osu homologie a dvě přímky jdoucí středem homologie, nalezneme, že *z homologií má invariantní kuželosečku vždy a pouze homologie harmonická.*[6]) Protože invariantní trojúhelník je zde možno zvoliti ∞^2 způsoby, vyskytuje se u harmonické homologie ∞^3 invariantních kuželoseček (z nichž každá se ve dvou bodech na ose homologie dotýká spojnic těchto bodů se středem homologie).

62. Konečné grupy kolineací v rovině. Grupy kolineací v rovině rozeznáváme konečné nebo spojité (nebo smíšené); jejich členy jsou kolineace reálné nebo imaginární.

Z konečných grup kolineací rovinných jsou nejjednodušší grupy kolineací periodických; taková *cyklická grupa* kolineací obsahuje všechny mocniny určité periodické kolineace a jest ovšem téhož řádu jako ona. Protože periodická kolineace může býti typu buď IV. nebo I., rozlišujeme cyklické grupy periodických homologií a cyklické grupy kolineací nehomologických (typu I.). Při reálných prvcích samodružných obsahuje cyklická grupa homologií mocniny homologie $x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : x_2 : \alpha x_3$, jejíž střed je v bodě (0, 0, 1) a osa v přímce $x_3 = 0$, s periodou r, kde tedy $\alpha^r = 1$; cyklická grupa kolineací nehomologických pak mocniny kolineace $x'_1 : x'_2 : x'_3 = \alpha x_1 : \alpha^k x_2 : x_3$, jejíž invariantní body jsou ve vrcholech trojúhelníku souřadnic, s periodou r, kde $\alpha^r = 1$, $k \neq 0, 1$; obě mají po r členech.

Konečné (necyklické) grupy kolineací v rovině mají jako reálný útvar invariantní buď trojúhelník nebo bod a přímku jím neprocházející nebo konečně nemají tak jednoduchého útvaru invariantního.

Kolineační grupy první skupiny (s invariantním trojúhelníkem) mohou míti *invariantní každý vrchol* (a každou stranu) *trojúhelníku.* Protože kolineaci s třemi invariantními body lze vytvořiti jako produkt dvou homologií, jejichž středy leží ve dvou vrcholech tohoto trojúhelníku a osy v protějších stranách jeho, obdržíme uvedené grupy, zvolíme-li za dotčené složky kolineací dvě homologie s periodami r a s.

Dvě periodické homologie s touže periodou r ($s = r$) dávají při uvedené poloze vzájemné kolineační grupu obsahující r^2 členů. Z nich je nejprostší grupa $\mathbf{G}_4$, složená z kolineace identické a z tří involučních homologií, jejichž středy a osy jsou ve vrcholech a protějších stranách trojúhelníku; rovnice těchto tří homologií jsou (krátce psáno)

[6]) Pomocí této vlastnosti involuční homologie lze (podle Ponceleta) rozhodnouti o daném oblouku kuželosečky, zdali patří elipse nebo hyperbole nebo parabole: protože involuční homologie převádí nevlastní přímku v přímku rovnoběžnou k ose homologie a půlící její vzdálenost od středu homologie, a protože bodu ležícímu na kuželosečce nebo mimo ni musí odpovídati bod téže vlastnosti, stačí v krajních bodech daného oblouku sestrojiti tečny a vésti ke spojnici bodů těch rovnoběžku, půlící vzdálenost průsečíku oněch tečen od této spojnice; podle toho, jestliže tato přímka daný oblouk neprotíná, dotýká se ho nebo jej protíná, jest to oblouk elipsy resp. paraboly resp. hyperboly.

$x'_1 : x'_2 : x'_3 = -x_1 : x_2 : x_3$, $= x_1 : -x_2 : x_3$, $= x_1 : x_2 : -x_3$. Dvě homologie s periodou 3 dávají obdobně grupu $\mathbf{G}_9$; tato obsahuje mimo identickou kolineaci 6 homologií s periodou 3 a 2 kolineace nehomologické téže periody. Je snadné vyšetřiti další grupy tohoto druhu.

Dvě periodické homologie, jejichž periody r a s jsou čísla nesoudělná, vytvořují, jestliže střed každé z obou leží na ose druhé, kolineační grupu o rs členech, jež je však cyklická. Proti tomu dvě homologie s periodami soudělnými dávají grupy necyklické. Tak involuční homologie a homologie s periodou 4 vytvořují grupu $\mathbf{G}_8$, která obsahuje uvedenou $\mathbf{G}_4$ jako (invariantní) subgrupu a mimo její členy ještě 2 homologie periody 4 a 2 kolineace typu I. o periodě 4. Involuční homologie a homologie periody 6 vytvořují grupu $\mathbf{G}_{12}$, obsahující rovněž $\mathbf{G}_4$ a dále po 2 homologiích periody 3 a 6, jakož i 4 kolineace nehomologické s periodou 6. Dvě homologie periody 3 a 6 vytvořují grupu $\mathbf{G}_{18}$, obsahující (invariantní) subgrupu $\mathbf{G}_9$, prve uvedenou, mimo to 1 homologii involuční, 2 homologie periody 6 a 6 kolineací I. typu o periodě 6. Zajímavá je grupa $\mathbf{G}_{24}$, vytvořená dvěma homologiemi s periodou 4 resp. 6 při stále suponované poloze vzájemné; vrcholy invariantního trojúhelníku jsou středy tří homologií s periodami 2, 4 a 6; grupa tato obsahuje uvedené grupy $\mathbf{G}_4$, $\mathbf{G}_8$ a $\mathbf{G}_{12}$ jako (invariantní) subgrupy, mimo jejich členy ještě 8 nehomologických kolineací periody 12.

U kolineačních grup s invariantním trojúhelníkem může dále býti *neproměnný* pouze *jeden vrchol jeho, ostatní dva* však *se zaměňují*. Tyto grupy nalezneme tím, že ke grupám s třemi body jednotlivě invariantními připojíme involuční homologii, v níž onen vrchol trojúhelníku je samodružný a tyto dva sdružené; homologie ta má střed na spojnici vrcholů sdružených a osu jdoucí vrcholem samodružným. Jestliže má zůstati bod (0, 0, 1) invariantní, body (1, 0, 0) a (0, 1, 0) pak se mají zaměňovati, můžeme zvoliti za střed přistupující homologie bod (1, −1, 0) a za osu přímku $x_1 - x_2 = 0$, jež protíná $x_3 = 0$ v bodě (1, 1, 0) (nebo obráceně).

Připojíme-li uvedenou homologii involuční k cyklickým grupám kolineací prve uvedeným, vznikne řada necyklických grup kolineačních s vytčeným útvarem invariantním. Z nich je nejjednodušší grupa $\mathbf{G}_6$, vznikající tak z cyklické grupy kolineací periody 3; tato obsahuje mimo identickou kolineaci 3 involuční homologie a 2 kolineace I. typu s periodou 3; její kolineace mají totiž rovnice $x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : x_2 : x_3$, $= \alpha x_1 : \alpha^2 x_2 : x_3$, $= \alpha^2 x_1 : \alpha x_2 : x_3$, $= x_2 : x_1 : x_3$, $= \alpha x_2 : \alpha^2 x_1 : x_3$, $= \alpha^2 x_2 : \alpha x_1 : x_3$ (kde $\alpha^3 = 1$).[1]) Připojíce hořejší homologii involuční k necyklickým grupám kolineací o invariantním trojúhelníku, prve vytčeným, obdržíme opět grupy s jedním invariantním vrcholem a dvěma se zaměňujícími vrcholy trojúhelníku. Z grupy $\mathbf{G}_4$ dostaneme tak grupu $\mathbf{G}'_8$ (různou od grupy téhož řádu $\mathbf{G}_8$, dříve uvedené), jejíž kolineace jsou (mimo identitu) $x'_1 : x'_2 : x'_3 = -x_1 : x_2 : x_3$, $= x_1 : -x_2 : x_3$, $= x_1 : x_2 : -x_3$, $= x_2 : x_1 : x_3$, $= x_2 : x_1 : -x_3$, $= x_2 : -x_1 : x_3$, $= -x_2 : x_1 :$

$: x_3$; prvních 5 jsou involuční homologie, poslední 2 jsou kolineace typu I. s periodou 4.

Kolineační grupy s invariantním trojúhelníkem mohou konečně míti tento trojúhelník invariantní jen jako celek, jeho *tři vrcholy se* však *zaměňují*. Příslušné grupy kolineací nalezneme z grup s třemi body jednotlivě invariantními, připojíme-li k nim kolineace, jejichž analytickým výrazem jsou cyklické permutace souřadnic (tyto tvoří cyklickou grupu řádu 3.), nebo kolineace vyjádřené analyticky všemi permutacemi tří souřadnic (tvoří grupu řádu 6.); invariantní trojúhelník obou těchto připojovaných grup má vrcholy (1, 1, 1), $(\alpha, \alpha^2, 1)$, $(\alpha^2, \alpha, 1)$, kde $\alpha^3 = 1$. Tak obdržíme z cyklické grupy řádu 3. (vznikající z kolineace $x'_1 : x'_2 : x'_3 = \alpha x_1 : \alpha^2 x_2 : x_3$) grupu G'_9 (různou od dřívější G_9), obsahující mimo identitu 8 kolineací typu I. s periodou 3, jež se řadí ve čtyři cyklické subgrupy řádu 3.; a grupu G'_{18}, obsahující mimo kolineace grupy G'_9 9 involučních homologií.[2]) Z necyklických grup, jež mají jednotlivě invariantní tři vrcholy trojúhelníku, lze odvoditi širší grupy způsobem zde uvedeným pouze tehdy, jsou-li vrcholy invariantního trojúhelníku středy homologií téže periody; tak z grupy G_4 vznikají G'_{12} a G'_{24}, z grupy G_9 pak G_{27} a G_{54}, atd.

Grupa G'_{12} obsahuje kolineace grupy G_4 (identitu a 3 involuční homologie) a jejich produkty s kolineací $x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_2 : x_3 : x_1$ i její druhou mocninou, tedy mimo členy grupy G_4 8 kolineací I. typu s periodou 3; má jedinou necyklickou (invariantní) subgrupu G_4 a čtyři cyklické subgrupy řádu 3., z nichž jedna má invariantní body (1, 1, 1), $(\alpha, \alpha^2, 1)$, $(\alpha^2, \alpha, 1)$, ostatní pak ty body, ve které se tyto převádějí transformacemi subgrupy G_4. Invariantní trojúhelník subgrupy G_4 (trojúhelník souřadnic) je úhlopříčným trojúhelníkem čtyrstranu, jehož strany spojují vždy poslední dva z dotčených invariantních bodů subgrup 3. řádu. G'_{12} sluje *tetraedrickou* grupou kolineací v rovině (je holoedricky isomorfní s grupou sudých permutací čtyř prvků).

Kolineace grupy G'_{24} lze všechny vyjádřiti relací $x'_1 : x'_2 : x'_3 = \pm x_i : \pm x_j : x_k$, kde indexy i, j, k tvoří libovolnou permutaci čísel 1, 2, 3 a znaménka $\pm$ lze libovolně kombinovati. Tato grupa obsahuje mimo identitu 9 involučních homologií, z kolineací typu I. 8 s periodou 3 a 6 s periodou 4. Jest při ní invariantní čtyrstran se stranami $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ a trojúhelník tvořený jeho úhlopříčkami $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Mimo cyklické subgrupy má 4 subgrupy typu G_4, 4 typu G_6, 3 typu G'_8 a (invariantní) subgrupu G'_{12}. Ze subgrup typu G_4 má jedna invariantní body (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), ostatní pak body (1, 0, 0),

[1]) O této jedná *B. Bydžovský*, Grupa šesti kollineací rovinných nebo prostorových, Progr. reálky Karlín 1908.

[2]) Při grupě G'_{18} jest invariantní obecná křivka 3. stupně v rovině; v tomto směru o ní pojednává *B. Bydžovský*, O jisté grupě rovinných kollineací, Časopis math. fys. 38 (1909).

$(0, 1, \pm 1)$, resp. $(0, 1, 0)$, $(1, 0, \pm 1)$, resp. $(0, 0, 1)$, $(1, \pm 1, 0)$. Ke každé subgrupě G_6 přísluší bod, jímž procházejí osy tří involučních homologií grupy té, a přímka, na níž leží středy homologií těch; tyto body a přímky jsou $(1, 1, 1)$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, resp. $(-1, 1, 1)$, $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$, resp. $(1, -1, 1)$, $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, resp. $(1, 1, -1)$, $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. První z uvedených čtyř subgrup typu G_4 a každá ze tří ostatních skládají subgrupy G'_8; ke každé této G'_8 patří jeden vrchol a protější strana trojúhelníku souřadnic jako invariantní prvky jedné homologie a spolu prvky incidentní s osami a středy čtyř ostatních homologií v subgrupě obsažených. Grupa G'_{24} sluje *oktaedrickou* grupou kolineací v rovině (je holoedricky isomorfní s grupou všech permutací čtyř prvků).[3][4])

Konečné grupy kolineací v rovině mohou dále, jak bylo uvedeno, míti invariantní přímku a bod mimo ni položený; na invariantní přímce (a v invariantním bodě) existuje při tom grupa projektivností, jež může býti buď cyklická nebo diedrická nebo některá z grup pravidelných těles (tetraedrická nebo oktaedrická nebo ikosaedrická grupa projektivností v útvaru jednomocném). Grupy tyto jsou buď holoedricky isomorfní s grupami binárních projektivností na invariantní přímce (a v invariantním bodě) nebo se připojením homologie s osou a středem v uvedených prvcích invariantních rozšiřují v grupy s více členy (meriedricky isomorfní s oněmi); jako nejjednodušší patří sem (nehledě k identické projektivnosti v uvažovaných prvcích jako invariantních nosičích) cyklické grupy kolineací nehomologických.

Vyšetřováním algebraickým bylo nalezeno,[5]) že mimo uvedené skupiny konečných grup existují v rovině ještě tři pozoruhodné grupy kolineací (s třemi dalšími subgrupami). Jest to grupa *Kleinova*,[6]) obsahující 168 kolineací, kterou lze vytvořiti třemi periodickými kolineacemi řádu 2., 3. a 7. (obsahuje 21 involučních homologií); jako nejširší subgrupy má 14 subgrup oktaedrických (typu G'_{24}). Jest to dále grupa

[3]) Viz o ní *L. Renner*, Über eine Gruppe der 24 Collineationen, durch welche ein ebenes Viereck oder ein Vierkant in sich selbst übergeht, Dissertation Strassburg 1896.

[4]) Obecně ze dvou homologií téže periody r v takové poloze zvolených, že střed každé z obou leží na ose druhé, vzniká grupa kolineací řádu r^2; připojením kolineací grupy 6. řádu, vyjádřených permutacemi tří souřadnic, rozšíří se tato grupa na grupu řádu $6r^2$. Grupa ta má při r lichém $3r$, při r sudém $3r + 3$ involučních homologií.

[5]) Viz na př. *H. F. Blichfeldt*, The finite discontinuous primitive groups of collineations in three variables, Math. Annalen 63 (1907) p. 552—572, nebo *G. A. Miller-H. F. Blichfeldt-L. E. Dickson*, Theory and applications of finite groups, 1916, p. 235—254.

[6]) Grupu tuto objevil *F. Klein*, Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen, Math. Annalen 14 (1878). Viz *E. Ciani*, Contributo alla teoria del gruppo di 168 collineazioni piane, Annali mat. (3) 5 (1901). Také *W. Burnside*, On a configuration of 21 points and 21 lines, which arises from the complet quadrilateral and determines the group of 168 plane collineations, Proceedings Math. soc. London (2) 14 (1915).

Hesseova,[7]) obsahující 216 kolineací, s třemi subgrupami G_{36} a s invariantní subgrupou G_{72}; vzniká z grupy prve uvedené G_{54} (tato z G_9 připojením kolineací, vyjádřených permutacemi tří souřadnic) připojením periodické kolineace řádu 4. Jest to konečně grupa *Valentinerova*,[8]) obsahující 360 kolineací (holoedricky isomorfní s grupou sudých permutací šesti prvků), jež má 45 involučních homologií, s ikosaedrickou subgrupou G_{60}, jichž obsahuje 12 (jako nejširších subgrup); tato *ikosaedrická* grupa řádu 60. (holoedricky isomorfní s grupou sudých permutací pěti prvků) má 5 subgrup tetraedrických (typu G'_{12}).[9])

63. Spojité grupy kolineací v rovině. *a*) Spojité (kontinuitní) grupy kolineací rovinných můžeme prostým způsobem hledati podle typů kolineací. Kolineace každého z pěti známých typů tvoří, mají-li společný invariantní útvar typu toho, základní grupu s tolika parametry, kolik má kolineace ve svých rovnicích nezávislých konstant (grupa s k parametry obsahuje ∞^k členů). Odtud dospějeme k širším, obsáhlejším grupám, při nichž je invariantní jen část původního útvaru; naopak ke grupám užším přijdeme volbou závislosti mezi konstantami grupy základní, z těchto užších grup lze pak opět sestrojiti grupy širší.

Všechny kolineace v rovině tvoří spojitou osmiparametrovou grupu $\mathfrak{g}_8$; všech kolineací v rovině jest totiž ∞^8, protože rovnice obecné kolineace obsahují osm nezávislých konstant, z nichž každá může nabýti neomezeně velikého počtu hodnot, nebo protože každý ze čtyř bodů, jež je nutno a stačí přiřaditi čtyřem daným bodům roviny, aby kolineace byla stanovena, může býti zvolen z počtu ∞^2 bodů v rovině.

Homologie [10], t. j. kolineace typu IV., tvoří při společném středu a společné ose spojitou grupu jednoparametrovou $^4\mathfrak{g}_1$. Neboť dvě homologie téhož středu a téže osy s dvojpoměry k_1 a k_2 mají za produkt homologii s týmž útvarem invariantním a dvojpoměrem $k = k_1 . k_2$; v bodo-

[7]) Nalezl ji a tak pojmenoval *C. Jordan* r. 1878. O této grupě pojednává *H. B. Newson*, On the group of 216 collineations in the plane, Quarterly Kansas univ. 10 (1901).

[8]) Grupu tuto nalezl *H. Valentiner*, De endelige Transformations-Gruppers Theori, Danske videnskabernes selskabs Skrifter (6) 5 (1889). Prozkoumali ji hlavně *A. Wiman*, Über eine einfache Gruppe von 360 Collineationen, Math. Annalen 47 (1895), a *F. Gerbaldi*, Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane, Rendiconti Circolo mat. Palermo 12, 13, 14 a 16 (1898—1902); viz také *K. Rychlík*, O grupě řádu 360., Časopis mat. fys. 37 (1908); *J. M. Horák*, O grupě ikosaedrické, Spisy přír. fak. univ. Praha 3 (1923).

[9]) O některých z uvedených grup jednají při zjišťování rovinných křivek 4. nebo 6. stupně, jež jsou při kolineacích jejich invariantní, *E. Ciani*, Le quartiche piane proiettive a sè stesse, Rendiconti Circolo mat. Palermo 28 (1909); *J. Vojtěch*, Konečné grupy kollineací a rovinné sextiky k sobě příslušné, Rozpravy Čes. akad. 22 (1913). Viz také *G. Bagnera*, I gruppi finiti di trasformazioni lineari dello spazio che contengono omologie, Rendiconti Circolo mat. Palermo 19 (1905); *H. Kull*, Über Systeme solcher Kegelschnitte, die mittelst linearer Transformation involutorisch permutiert werden können, Diss. Lund 1903.

vých řadách na přímkách jdoucích středem homologií a ve svazcích paprskových se středy na ose homologií jsou zde jednoparametrové grupy projektivností [00].

Elace [(10)], t. j. kolineace typu V., se společnou osou a se společným středem na ní ležícím tvoří také jednoparametrovou grupu ${}^5\mathfrak{g}_1$ z obdobného důvodu; v invariantních útvarech jednomocných této grupy existují jednoparametrové grupy limitních projektivností [(00)].

Kolineace typu I., symbolu [000], se společným trojúhelníkem samodružných bodů a přímek tvoří grupu dvouparametrovou ${}^1\mathfrak{g}_2$. Neboť dvě kolineace typu I. s týmiž třemi body samodružnými, postupně provedeny, dávají kolineaci téhož typu s týmž invariantním trojúhelníkem; protože kolineace taková je určena dvěma konstantami, obsahuje příslušná grupa ∞^2 kolineací. Dotčený produkt nalezneme buď pomocí rovnic kolineace typu I. nebo z jejího vytvoření dvěma homologiemi; je patrno, že každá z obou konstant kolineace výsledné je součinem jedněch nebo druhých konstant obou složek.

Kolineace typu II., symbolu [(00)0], se společným útvarem invariantním (dvěma body, jejich spojnicí a přímkou jdoucí jedním z nich) skládají rovněž dvouparametrovou grupu ${}^2\mathfrak{g}_2$ z obdobných důvodů.

Konečně kolineace typu III., symbolu [(000)], se společnou přímkou invariantní a společným bodem invariantním na ní ležícím tvoří tříparametrovou grupu ${}^3\mathfrak{g}_3$; neboť dvě takové kolineace mají produktem kolineaci s týmž útvarem samodružným, počet kolineací v grupě jest pak určen počtem konstant v rovnicích kolineace tohoto typu.

Uvedených pět grup kolineací lze nazvati *základními grupami* příslušných typů; jsou soběduální.

b) Ze základních grup kolineací v rovině dostaneme širší grupy tehdy, jestliže při kombinaci dvou kolineací téhož typu, jež mají jen část svých invariantních útvarů společnou, je produktem kolineace téhož druhu.

Dvě homologie (kolineace typu IV.) s touže osou, ale s různými středy mají produktem homologii (kolineaci typu IV.) téže osy, jejíž střed leží na spojnici středů obou složek a jejíž dvojpoměr je součinem dvojpoměrů daných složek. Neboť výsledná kolineace je přirozeně homologie s touže osou samodružných bodů, na spojnici pak středů obou složek jsou dvě projektivnosti typu [00] s jedním samodružným bodem společným (na ose); jejich produkt má tedy týž jeden bod samodružný a druhý na uvažované spojnici, jenž je středem výsledné homologie. Její dvojpoměr je součinem dvojpoměrů obou složek na spojnici středů složek těch a tedy obecně. Tvoří tudíž homologie [10] s touže osou, jejichž středy leží na přímce (invariantní), grupu ${}^4\mathfrak{g}_2$. Obdobně nalezneme, že všechny homologie s touže osou tvoří grupu ${}^4\mathfrak{g}_3$ (střed může nabýti ∞^2 poloh, dvojpoměr ∞^1 hodnot). K oběma nalezeným grupám širším ${}^4\mathfrak{g}_2$ a ${}^4\mathfrak{g}_3$ jest připojiti duální grupy ${}^4\gamma_2$ a ${}^4\gamma_3$, složené z homologií téhož středu, jejichž osy tvoří svazek paprskový, resp. ze všech homologií téhož středu.

Dvě elace s touže osou, ale s různými středy na ní ležícími dávají zase elaci téže osy se středem na ní ležícím; tvoří tudíž elace téže osy, jejichž středy tvoří řadu bodů na ní ležících, grupu ${}^5\mathfrak{g}_2$. Duální grupa ${}^5\gamma_2$ je složena z elací téhož středu, jejichž osy tvoří svazek paprsků jdoucích tímto bodem.[1])

Tímto způsobem nalezneme řadu grup širších u typu I. a II. Vycházejíce od grupy ${}^1\mathfrak{g}_2$ s invariantními třemi body můžeme vyšetřovati, zdali vzniknou spojité grupy kolineací, předpokládáme-li na jedné straně invariantního trojúhelníku grupu projektivností s jedním nebo dvěma nebo třemi parametry a připustíme-li pro protější vrchol trojúhelníku jednu polohu nebo ∞^1 poloh na přímce nebo ∞^2 poloh v rovině; rovněž duálně. Tak zjistíme, že existují (mimo základní ${}^1\mathfrak{g}_2$) grupy: ${}^1\mathfrak{g}_3$ s invariantními dvěma body a přímkou jdoucí jedním z nich, ${}^1\mathfrak{g}_4$ s invariantními dvěma body, ${}^1\mathfrak{g}'_4$ s invariantní přímkou a bodem mimo ni ležícím (na invariantní přímce je tříparametrová grupa projektivností, duálně v invariantním bodě), ${}^1\mathfrak{g}_5$ s invariantní přímkou a bodem na ní ležícím a ${}^1\mathfrak{g}_6$ s invariantní přímkou; grupy ${}^1\mathfrak{g}_3$, ${}^1\mathfrak{g}'_4$ a ${}^1\mathfrak{g}_5$ jsou soběduální, k ostatním lze připojiti grupy duální ${}^1\gamma_4$ kolineací se společnými dvěma přímkami invariantními a ${}^1\gamma_6$ s bodem invariantním. Obdobně lze z kolineací typu II. sestrojiti širší grupy.

c) Užší grupy kolineací existují u typů I., II. a III. Kolineace [000] je charakterisována mimo svůj invariantní trojúhelník dvěma dvojpoměry k_1 a k_2; při proměnných k_1 a k_2 vytvořují kolineace s týmž invariantním trojúhelníkem grupu ${}^1\mathfrak{g}_2$. Jestliže však mezi těmito dvojpoměry zavedeme vztah $k_2 = k_1{}^r$ (kde r je konstantní), vytvořují kolineace o témž invariantním trojúhelníku při proměnném k_1 (a tedy k_2) pouze soustavu ∞^1 kolineací. Kolineace této soustavy tvoří grupu ${}^1\mathfrak{g}_{1(2)}$ s invariantním trojúhelníkem a konstantou r; neboť produktem dvou takových kolineací je opět kolineace toho druhu (jsou-li totiž dvojpoměry prvé kolineace k, k^r, druhé kolineace k', k'^r, jsou dvojpoměry jejich produktu kk', $k^r k'^r = (kk')^r$, existuje zde tedy táž relace jako u složek).

Při kolineacích spojité grupy ${}^1\mathfrak{g}_{1(2)}$ transformuje se každý bod roviny v ∞^1 bodů, jež vytvořují čáru; čar těch, příslušných ke grupě uvažované, je v rovině ∞^1. Jsou-li rovnice kolineace v uvedené grupě $x'_1 : x'_2 : x'_3 = kx_1 : k^r x_2 : x_3$, má soustava čar, invariantních při kolineacích grupy ${}^1\mathfrak{g}_{1(2)}$, rovnici $x_1{}^{-r} x_2 = c x_3{}^{1-r}$. Důležitý je při tom geometrický význam konstanty r. *Tečna* každé *invariantní křivky tvoří* totiž *spolu s třemi spojnicemi dotyčného bodu svého a vrcholů invariantního trojúhelníku čtveřinu dvojpoměru* r; duálně dotyčný bod tečny tvoří s jejími průsečíky na stranách invariantního trojúhelníku čtveřinu dvoj-

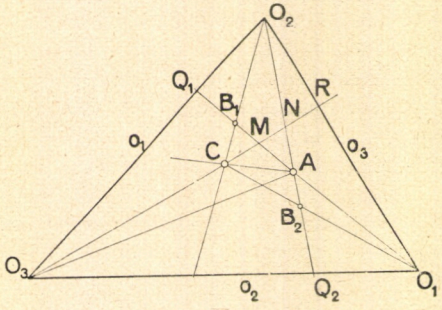
[1]) Spojité grupy homologických kolineací vyšetřoval syntheticky spec. *A. Emch*, Projective groups of perspective collineations in the plane, treated synthetically, Quarterly Kansas univ. 5 (1896); spolu s grupami jiných typů také *H. B. Newson*.

poměru r. Abychom to dokázali, sledujme kolineaci $\mathbf{K}$ s invariantním trojúhelníkem $O_1O_2O_3$ a s dvojpoměry k, k^r jako produkt homologie $\mathbf{H}_1$ $(O_1, o_1 = O_2O_3, k)$ a homologie $\mathbf{H}_2$ $(O_2, o_2 = O_1O_3, k^r)$; obecně položený bod roviny označme A (obr. 73), jemu v $\mathbf{H}_1$ odpovídající označme B_1, v $\mathbf{H}_2$ korespondující B_2, bod pak bodu A v $\mathbf{K}$ přiřaděný označme C. Platí (označíme-li průsečíky spojnic O_1A a O_2A s protějšími stranami Q_1 a Q_2): $\mathrm{Dp}\,(O_1Q_1AB_1) = k$, $\mathrm{Dp}\,(O_2Q_2AB_2) = k^r$. Pojmenujme ještě průsečíky spojnic O_1A a O_2A s přímkou O_3C písmeny M resp. N; konečně budiž $(O_1O_2, O_3C) = R$. Pro dvojpoměr čtveřiny paprsků $A\,(CO_3O_1O_2)$, rovný dvojpoměru čtveřiny bodů CO_3MN, nalezneme

$$\mathrm{Dp}\,(CO_3MN) = \frac{\mathrm{Dp}\,(CO_3MR)}{\mathrm{Dp}\,(CO_3NR)} = \frac{1-k^r}{1-k};$$

neboť jest $O_1Q_1AB_1 \barwedge RO_3NC$ a $O_2Q_2AB_2 \barwedge RO_3MC$. Pro $\lim k = 1$ blíží se C bez omezení bodu A, spojnice AC blíží se tečně křivky v uvažovaném bodě A, a jest zde

$$\lim \frac{1-k^r}{1-k} = r,$$



Obr. 73.

takže, jak bylo tvrzeno, jest dvojpoměr čtyř paprsků $A(AO_3O_1O_2) = r$. V případě duálním jest pak, nazveme-li průsečíky tečny na stranách invariantního trojúhelníku O'_k, $A(AO_3O_1O_2) \barwedge O'_1O_3Q_1O_2 \barwedge O'_1O'_2AO'_3 \barwedge \barwedge AO'_3O'_1O'_2$, platí tudíž také $\mathrm{Dp}\,(AO'_3O'_1O'_2) = r$.

Také základní grupa ${}^2\mathfrak{g}_2$ kolineací typu II. obsahuje ∞^1 subgrup ${}^2\mathfrak{g}_{1(2)}$; každá z nich je charakterisována konstantou r, suponujeme-li mezi dvojpoměrem k homologie a konstantou a elace, jež spolu vytvořují kolineaci [(00)0], vztah $k = r^a$. Neboť kolineace s konstantou a a dvojpoměrem $k = r^a$ a kolineace $(a', k' = r^{a'})$ mají při témž invariantním útvaru za produkt kolineaci téhož invariantního útvaru s konstantou $a + a'$ a dvojpoměrem $k \,.\, k' = r^{a+a'}$; jest pak veličina a jediným parametrem grupy ${}^2\mathfrak{g}_{1(2)}$. Také při této grupě existuje soustava ∞^1 invariantních čar.

Užší grupy nalezneme dále při některých širších grupách kolineací typu I. a II., dříve uvedených, opět zavedením relace mezi parametry jejich. Také při základní grupě ${}^3\mathfrak{g}_3$ kolineací typu III. existují dvě grupy užší (s jedním a dvěma parametry).

d) Ze soustav křivek, invariantních při kolineacích grupy ${}^1\mathfrak{g}_{1(2)}$, jsou pozoruhodné zejména kuželosečky; vyskytují se u grup tohoto druhu ve třech případech, pro $r = -1, \frac{1}{2}, 2$. V prvním případě ($r = -1$) jsou dvojpoměry projektivností na O_1O_3 a O_2O_3 sobě rovny (na O_1O_3

byl dvojpoměr k, na O_2O_3 pak k^r, tedy k^{-1}, na O_3O_2 konečně k); přiřadíme-li bodům O_1, O_3 na straně O_1O_3 body O_3, O_2 na straně O_2O_3 a bodu L na O_1O_3 libovolný bod L' na O_2O_3, jsou tím řady bodové na uvedených stranách trojúhelníku invariantního uvedeny v korespondenci projektivní, a spojnice sdružených bodů vytvořují kuželosečku. Tyto kuželosečky (bod L' lze zvoliti na ∞^1 způsobů) tvoří řadu křivek s dvěma dvojnásobnými body základními O_1 a O_2, se společnými tečnami O_1O_3 a O_2O_3, jež je spolu svazkem kuželoseček, vytvořených duálně svazky paprskovými se středy O_1 a O_2. Pro $r = \frac{1}{2}$, resp. $r = 2$ obdržíme svazek-řadu kuželoseček se základními body O_1 a O_3, resp. O_2 a O_3.

Z rovinných čar jest přímka invariantní při ∞^6 kolineacích spojité grupy ${}^1\mathfrak{g}_6$, prve nalezené. Shledali jsme dále, že při ∞^1 kolineacích grupy ${}^1\mathfrak{g}_{1(2)}$ nebo grupy ${}^2\mathfrak{g}_{1(2)}$ (při konstantním r, vížícím dva parametry grupy základní) jest invariantní každá čára v určité soustavě ∞^1 čar rovinných; tyto invariantní čáry tvoří soustavu kuželoseček při třech uvedených hodnotách konstanty r u grupy ${}^1\mathfrak{g}_{1(2)}$. Kuželosečka jest však invariantní celkem při ∞^3 kolineacích, jež tvoří zvláštní spojitou grupu, příslušnou ke kuželosečce $({}^1\mathfrak{g}_3^k)$; tato je složena z kolineací ∞^2 grup typu ${}^1\mathfrak{g}_{1(2)}$ (pro $r = -1, \frac{1}{2}, 2$). Neboť dvě kolineace typu I., při nichž je daná kuželosečka invariantní, dávají produkt téže vlastnosti, invariantní trojúhelník s dvěma vrcholy na dané kuželosečce lze pak voliti na ∞^2 způsobů a ke každému přísluší jedna ${}^1\mathfrak{g}_{1(2)}$. Vytčená ${}^1\mathfrak{g}_3^k$ má subgrupu ${}^1\mathfrak{g}_2^k$ s invariantní kuželosečkou a invariantním bodem na ní (i tečnou v něm) a ovšem subgrupou ${}^1\mathfrak{g}_{1(2)}$, od které jsme vyšli, s invariantní kuželosečkou a dvěma body jejími. Mimo to existují grupy kolineací, při nichž nejsou sice invariantní jednotlivé kuželosečky, ale jejich systémy (jako celek); jsou složeny buď z kolineací typu I. nebo z kolineací typu III. (tyto byly už vytčeny, totiž ${}^3\mathfrak{g}_3$ a její subgrupy).[2])

64. Vlastnosti korelace rovinné. *a*) Při dvou korelativních polích soumístných (při korelaci *rovinné*) tážeme se především po prvcích, jež sobě odpovídajíce jsou incidentní. Od nich dospějeme k prvkům, které si v korelaci odpovídají obapolně.

[2]) Spojité grupy kolineací rovinných určil pomocí transformací infinitesimálních po prvé a opětovně *S. Lie*; viz zejména *S. Lie-F. Engel*, Theorie der Transformationsgruppen III, 1893, a *S. Lie-G. Scheffers*, Vorlesungen über continuierliche Gruppen, 1893; také *G. Kowalewski*, Einführung in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen, 1931. Vzorce v konečném tvaru pro jednotlivé typy grup těch odvodil a geometricky je charakterisoval *F. Meyer*, Tabellen von endlichen continuierlichen Transformationsgruppen, Math. Papers Congress Chicago 1893. Geometrickou teorii těchto grup podle typů kolineací podrobně podal *H. B. Newson*, A new theory of collineations and their Lie groups, Amer. Journal math. 24 (1902), dále Theory of collineations, Bulletin Kansas univ. 6 (1911). Viz také *J. Vojtěch*, Typy a kontinuitní grupy kolineací v S_3, Časopis math. fys. 38 (1909). Zcela elementárně odvozuje rozmanité grupy rovinných kolineací metricky speciálních a pomocí homologie dospívá ke grupě $\mathfrak{g}_8$ všech kolineací *J. Vojtěch*, Geometrické transformace prvního stupně v rovině a jich grupy, Časopis mat. fys. 35 (1906).

Mějme na zřeteli korelaci dvou soumístných polí α a α' i jejich korelaci inversní. Jestliže bod A leží na korespondující přímce a', leží jako bod roviny druhé B' ($\equiv A$) také na korespondující přímce b roviny prvé; neboť incidentním prvkům a' a B' druhé roviny musí odpovídati prvky rovněž incidentní A a b v rovině první. Leží tedy bod roviny na obou přímkách, které mu ve dvou navzájem inversních korelacích odpovídají (jsa jejich průsečíkem), leží-li na jedné z nich; duálně prochází-li přímka bodem jí v korelaci odpovídajícím, prochází oběma body, jež jí v této a inversní korelaci odpovídají (jsouc jejich spojnicí).

Abychom poznali, jakou čáru vytvořují body takové, incidentní totiž s oběma přímkami k nim sdruženými, a duálně přímky toho druhu, incidentní totiž s oběma sdruženými k nim body, sledujme libovolný bod X roviny α, vyplňující přímku libovolnou p. Přímka x' jemu v korelaci odpovídající vyplní svazek o středu P' (kde P' koresponduje přímce p), projektivní s řadou bodů X na p; tento svazek přímek x' protíná přímku p v řadě $[px']$, projektivní se soumístnou řadou $[X]$. Projektivní soumístné řady $[X]$ a $[px']$ mají dva prvky samodružné; to jsou body incidentní se svými sdruženými přímkami. Protože na každé přímce roviny leží dva body uvažované vlastnosti, *vytvořují body incidentní s přímkami v korelaci k nim sdruženými* (a tedy incidentní s dvojicemi přímek, sdružených k nim v obou navzájem inversních korelacích) *čáru 2. stupně k*. Duálně nalezneme, že *přímky incidentní s body v korelaci k nim sdruženými* (a tedy incidentní s dvojicemi bodů, sdružených k nim v obou korelacích navzájem inversních) *vytvořují čáru 2. třídy k'*. Dvě kuželosečky k a k', ke kterým jsme dospěli, slují *základní* nebo *incidenční kuželosečky* korelace v rovině. Z každého bodu kuželosečky k vycházející dvě tečny ke kuželosečce k' jsou přímky s bodem tím sdružené, každá tečna čáry k' protíná čáru k v bodech, sdružených k ní v obou navzájem inversních korelacích.[1])[2])

Incidenční kuželosečky k a k' dotýkají se navzájem ve dvou svých bodech (čímž jejich čtyři společné body jsou vyčerpány). Neboť mají-li k a k' společný bod U, jest tečna u čáry k', v něm sestrojená, jedinou

---

[1]) Na každé přímce p existuje, jak bylo uvedeno, projektivnost bodů X s průsečíky přímky x', odpovídající bodu X v dané korelaci; tato projektivnost soumístných řad na přímkách roviny degeneruje na tečnách křivky k', při čemž singulárními body zvrhlé projektivnosti jsou oba průsečíky tečny s křivkou k. Duálně v každém bodě roviny existuje projektivnost paprsků jím jdoucích a spojnic jeho s body, jež v korelaci paprskům těm odpovídají; tato projektivnost soumístných svazků je v bodech křivky k degenerovaná se singulárními paprsky v obou tečnách, jdoucích z takového bodu ke křivce k'.

[2]) Incidenční kuželosečky k a k' rovinné korelace, vyjádřené rovnicemi $\varrho u'_k = \Sigma a_{kh} x_h$, mají rovnice

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + (a_{12} + a_{21})\,x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})\,x_1x_3 + \\ + (a_{23} + a_{32})\,x_2x_3 = 0,$$

$$A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + (A_{12} + A_{21})\,u_1u_2 + (A_{13} + A_{31})\,u_1u_3 + \\ + (A_{23} + A_{32})\,u_2u_3 = 0,$$

tečnou vedenou z U jako bodu na k k čáře k', t. j. obě přímky k bodu U sdružené splývají v jedinou přímku u; duálně musí oba body sdružené k přímce u splývati v jeden bod U, t. j. přímka u je tečnou také čáry k; obě čáry se tam tedy sebe dotýkají (mají společný bod U a společnou tečnu v něm u). Totéž platí o dalším společném bodě kuželoseček k a k'. Kuželosečky incidenční mají tedy společný bod U a tečnu v něm u, rovněž bod V a tečnu v něm v; U a u odpovídají sobě v korelaci obapolně (totiž v korelaci dané i inversní), rovněž V a v; proto sobě odpovídají také průsečík uv a spojnice UV v korelaci obapolně.

Dospěli jsme tudíž k výsledku: *V korelaci dvou soumístných polí existují tři dvojice prvků, jež sobě odpovídají obapolně*; jsou to oba dotyčné body U, V dvou incidenčních kuželoseček korelace a jejich tečny u, v v bodech těch, jež jsou nadto incidentní (U a u, V a v), mimo ně pak spojnice UV a průsečík uv, jež nejsou incidentní.[3])

b) Nazývejme při korelaci dvou polí každý bod na přímce jednoho z nich, jež odpovídá bodu druhého pole, *konjugovaným* (sdruženým) k bodu tomu a duálně všechny přímky jednoho pole jdoucí bodem, který koresponduje přímce druhého, konjugovanými k přímce této.

Jestliže v dané korelaci dvou soumístných polí α a α' odpovídá bodu X, čítanému do α, přímka x' v α' a v korelaci inversní témuž bodu, čítanému do α' a označenému tedy Y', přímka y v α, jest bodu X konjugován každý bod přímky x', bodu Y' každý bod přímky y; *jest* tedy *bodu* $X \equiv Y'$ *konjugován průsečík* $x'y$ *obapolně* (dvojnásob, body ty jsou sdruženy, ať každý z obou klademe do kterékoli z obou rovin). Korespondence mezi body $X \equiv Y'$ a $x'y$ jest jednoznačná a involuční; výjimku (z jednoznačnosti) tvoří pouze body U, V a $W = uv$, prve uvedené. Každému z nich jest totiž obapolně konjugováno ∞^1 bodů, ležících na přímce u, resp. v, resp. $w = UV$ (neboť bodu U odpovídá v korelaci dané i v korelaci inversní přímka u, jest tedy k bodu U obapolně konjugován každý bod přímky u; rovněž tak u ostatních dvou dvojic prvků).

Bodům X na libovolné přímce p odpovídají v dané korelaci přímky x' tvořící svazek se středem P' (jenž v téže korelaci odpovídá přímce p), a řada bodů X na p je projektivní se svazkem přímek x' v P', tudíž s řadou průsečíků $x'p$ na p. Jestliže pak na přímce p objeví se jedna dvojice bodů obapolně konjugovaných, jak nahoře vytčeny, jest tato projektivnost řady $[X]$ a řady $[x'p]$ involuční; *každá spojnice dvou bodů v korelaci obapolně konjugovaných jest* tedy *osou dvou soumístných řad takových bodů, tvořících involuci.*

Všechny osy bodů obapolně konjugovaných tvoří svazek středu W, vždy reálného; neboť na každém paprsku, jenž prochází bodem W,

[3]) Obě incidenční kuželosečky k a k' jsou (zároveň) buď reálné nebo imaginární, rovněž dotyk reálných kuželoseček může býti imaginární: z prvků sobě v korelaci obapolně odpovídajících mohou U a u, V a v býti imaginární, kdežto $W = uv$ a $w = UV$ jsou vždy reálné.

existuje jedna dvojice takových bodů, totiž bod W a průsečík paprsku s přímkou w (a dvojice bodů uv. vlastnosti jsou tím vyčerpány). Protože každý bod incidenční křivky k leží na obou přímkách jemu (v korelaci dané i inversní) odpovídajících, jsou body kuželosečky k sobě samým obapolně konjugovány. *Jsou* tudíž *na každé přímce svazku W*, ose dvojic bodů obapolně konjugovaných, *její průsečíky s kuželosečkou k samodružnými body involuce takových dvojic*; *body obapolně konjugované jsou spolu harmonicky sdruženy vzhledem k průsečíkům své spojnice s kuželosečkou k.*

Podle předcházející úvahy lze provésti úvahu duální o přímkách obapolně konjugovaných. Každý průsečík dvou přímek obapolně konjugovaných jest středem dvou soumístných svazků přímek této vlastnosti, tvořících involuci. Středy involučních svazků přímek obapolně konjugovaných leží všechny na (reálné) přímce w. Samodružnými paprsky v involučních projektivnostech každého z těchto svazků jsou tečny ze středu svazku vedené k incidenční kuželosečce k'; každá tečna křivky k' jest totiž k sobě samé obapolně konjugována. Přímky obapolně konjugované jsou harmonicky sdruženy vzhledem k tečnám, vedeným z jejich průsečíku ke kuželosečce k'.

Jestliže jeden ze dvou bodů obapolně konjugovaných vytvořuje přímku $p \equiv q'$, vyplňují přímky jemu v dané korelaci odpovídající svazek středu P', přímky pak odpovídající jemu v korelaci inversní svazek středu Q; oba svazky P' a Q jsou projektivní k řadě na $p \equiv q'$ a tedy spolu projektivní, nemajíce paprsku sobě samému odpovídajícího (nejde-li $p \equiv q'$ žádným z bodů U, V, W). I vytvořuje druhý z bodů obapolně konjugovaných jako průsečík paprsků, korespondujících sobě v projektivnosti svazků P' a Q, pravou kuželosečku. Tato kuželosečka prochází body U, V a W, protože přímka $p \equiv q'$ protíná přímky u, v a w (v bodech, k nimž obapolně konjugovanými jsou U, V a W). *Není* tedy *korespondence mezi body obapolně* (ve dvou korelacích navzájem inversních) *konjugovanými kolineace*, *nýbrž* — protože v ní přímce odpovídá čára 2. stupně — *korespondence kvadratická.*

Kuželosečky, odpovídající v uvedené korespondenci přímkám (řadám bodovým) v rovině, procházejí všechny třemi body U, V a W. Duálně jest také korespondence mezi přímkami obapolně konjugovanými jednoznačná kvadratická korespondence involuční; čáry 2. třídy, odpovídající svazkům paprskovým v rovině, dotýkají se všechny tří přímek u, v a w.

c) Všimněme si blíže svazku a spolu řady kuželoseček, určené oběma incidenčními čarami korelace k a k'. Každá křivka 2. stupně (2. třídy) přechází korelací v křivku 2. třídy (2. stupně); kuželosečka dotčeného svazku-řady, procházejíc body U, V a dotýkajíc se v nich přímek u, v, přechází korelací v kuželosečku, jež se musí dotýkati přímek u, v (protože odpovídají bodům U, V) v bodech U, V (korespondujících přímkám u, v). Odpovídá tedy kuželosečce uvažovaného svazku-

řady opět kuželosečka této soustavy; mezi kuželosečkami svazku-řady vzniká tím projektivnost čar sobě odpovídajících. V této projektivnosti odpovídají sobě také obě kuželosečky incidenční k a k', a sice obapolně; neboť k' je vytvořena oběma přímkami, jež bodu čáry k odpovídají ve dvou korelacích k sobě inversních, duálně k je vytvořena oběma body, jež odpovídají tečně čáry k' v korelacích těch. Protože v projektivnosti sdružených kuželoseček svazku-řady existuje jedna involuční dvojice čar (totiž kuželosečky k a k'), jest projektivnost ta involuční. *Každá kuželosečka uvažovaného svazku-řady přechází korelací v tutéž druhou kuželosečku této soustavy*, ať ji čítáme do roviny α nebo do α'; kuželosečky incidenční k a k' tvoří také takovou dvojici. Samodružnými prvky této involuční projektivnosti jsou dvě kuželosečky, z nichž každá odpovídá v korelaci sobě samé. *Existují* tedy *v rovinné korelaci dvě kuželosečky samodružné*, jež patří do svazku-řady, určené dvěma incidenčními čarami korelace.[4])

Mimo vytčené dvě kuželosečky uvažovaného svazku-řady neexistují další kuželosečky, samodružné v dané korelaci. Neboť jestliže kuželosečka odpovídá v korelaci sobě samé, přechází každý bod X této kuželosečky a tečna v něm x korelací v tečnu x' a její dotyčný bod X' na téže kuželosečce; (kvadratická) řada bodů X na kuželosečce je projektivní ke (kvadratickému) svazku tečen x', tudíž k řadě dotyčných bodů těchto tečen X'. Avšak dvě projektivní řady bodů $[X]$ a $[X']$ na kuželosečce mají dva body samodružné; jednomu z nich, bodu A, odpovídá v korelaci tečna a', této (v projektivnosti mezi body a tečnami kuželosečky) její bod dotyčný A', protože však jest $A' \equiv A$ (je totiž samodružný), jest a' tečna kuželosečky v bodě A; rovněž duálně. Odpovídají tedy sobě bod kuželosečky samodružné a tečna křivky v něm obapolně, stejně druhý bod a tečna jeho. Musí proto kuželosečka v korelaci samodružná (majíc dva body téže povahy jako U a V s tečnami u, v, obapolně sdruženými s U, resp. V) patřiti do svazku-řady prve vyšetřované.[5])[6])

---

[4]) Protože k dvojicím kuželoseček uvedené soustavy, odpovídajících sobě v korelaci obapolně, patří také dvě zvrhlé kuželosečky, tvořené řadami u, v (a dvojnásobným svazkem W) a svazky U, V (a dvojnásobnou řadou w), jež sobě samým neodpovídají, jsou samodružné kuželosečky korelace křivkami pravými.

[5]) Synthetickou teorii korelace soumístných polí podali *F. Seydewitz*, Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittels projectivischer Gebilde, Archiv Math. Phys. 8 (1846), a *H. Schröter*, Untersuchung zusammenfallender reciproker Gebilde in der Ebene und im Raume, Journal r. a. Math. 77 (1874). Viz také *R. Sturm*, Über die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften, Math. Annalen 19 (1882); *St. Jolles*, Partiell inverse und partiell involutorische Kollineationen und die Inzidenzen in zwei kollokalen korrelativen Feldern, Math. Zeitschrift 11 (1921).

[6]) Korelace v rovině nebo v trsu může sloužiti k důkazu, že v projektivní geometrii roviny resp. trsu platí zákon duálnosti, po případě k faktickému převádění útvarů, vět a konstrukcí v duální; proto také byly útvary duální někdy nazývány korelativní (reciproké). Zmíněný důkaz má proti důkazu

65. Typy korelací v rovině. *a*) V korelaci dvou soumístných polí α a α' odpovídá každému bodu X v α přímka x' v α'; vytvořuje-li X přímou řadu s osou p, vyplňuje x' svazek se středem P', při čemž přímce p koresponduje v korelaci bod P'. Počítáme-li bod P' do roviny α jako Q, rovněž přímku x' jako y, odpovídá přímce y v téže korelaci bod Y', bodu Q pak přímka q'; svazku o středu Q, vytvořenému přímkou y, odpovídá řada na q', vytvořená bodem Y'.

Odtud je patrno, že *ke každé korelaci lze přidružiti kolineaci*, v níž bodům X odpovídají body Y', řadě $[X]$ čili přímce p projektivní řada $[Y']$ čili přímka q'. Označíme-li danou korelaci symbolem $\mathbf{K}$, jest přidružená k ní kolineace, jak z hořejšího postupu vysvítá, $\mathbf{K}^2$ (vznikne jednoduchým opakováním dané korelace).

Každý ze dvou prvků, jež sobě v dané korelaci odpovídají obapolně (v korelaci $\mathbf{K}$ i v inversní korelaci $\mathbf{K}^{-1}$), jest v kolineaci $\mathbf{K}^2$ prvkem samodružným; neboť jestliže korelace $\mathbf{K}$ převádí bod P v přímku p a přímku p v bod P, převádí kolineace $\mathbf{K}^2$ bod P v P a přímku p v p.

V úvaze o prvcích, jež jsou incidentní s prvky jim v korelaci odpovídajícími, poznali jsme, že existují v korelaci (obecné) tři dvojice prvků sobě obapolně korespondujících (U a u, V a v, W a w). Má tedy při obecné korelaci $\mathbf{K}$ přidružená kolineace $\mathbf{K}^2$ invariantní útvar v trojúhelníku UVW (s reálnými nebo sdruženě imaginárními vrcholy U, V a reálným W), při čemž sice samodružnému bodu W je přidružena samodružná přímka w, invariantnímu bodu U však invariantní přímka v a bodu V přímka u.

b) Obecný výsledek, nalezený pro obecnou korelaci $\mathbf{K}$ o existenci tří dvojic prvků sobě obapolně odpovídajících, prozkoumáme podrobněji analyticky, majíce vzhledem k přidružené kolineaci $\mathbf{K}^2$ na zřeteli roztřídění kolineací v několik typů.

Korelace $\mathbf{K}$ převádí bod (x_1, x_2, x_3) v přímku (u'_1, u'_2, u'_3), o jejíchž souřadnicích platí

$$\begin{aligned} \varrho u'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \varrho u'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \varrho u'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned}$$

při čemž předpokládáme, že determinant z koeficientů a_{hk} jest různý od nuly. Korelace $\mathbf{K}^{-1}$ převádí bod (x_1, x_2, x_3) v přímku (u'_1, u'_2, u'_3), kde platí (je-li rovina α a α' označena nyní α', resp. α)

$$\begin{aligned} v u'_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3, \\ v u'_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3, \\ v u'_3 &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}$$

Jestliže sobě bod (x_1, x_2, x_3) a přímka (u'_1, u'_2, u'_3) odpovídají obapolně, musí přímka

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)$$

apriornímu (ze systému postulátů, na nichž geometrie projektivní spočívá) tu výhodu, že nevylučuje při odvozování projektivních vět pomůcek neprojektivních.

býti totožna s přímkou

$$(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3,\quad a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3,\quad a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3).$$

Platí tedy pro souřadnice x_1, x_2, x_3 bodu každé involuční dvojice v korelaci rovnice

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= \varrho\,(a_{11}x_1 + a_{21}x_1 + a_{31}x_3),\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= \varrho\,(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_2),\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= \varrho\,(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3) \end{aligned}$$

čili rovnice

$$\begin{aligned} (a_{11} - \varrho a_{11})\,x_1 + (a_{12} - \varrho a_{21})\,x_2 + (a_{13} - \varrho a_{31})\,x_3 &= 0,\\ (a_{21} - \varrho a_{12})\,x_1 + (a_{22} - \varrho a_{22})\,x_2 + (a_{23} - \varrho a_{32})\,x_3 &= 0,\\ (a_{31} - \varrho a_{13})\,x_1 + (a_{32} - \varrho a_{23})\,x_2 + (a_{33} - \varrho a_{33})\,x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Aby tyto tři rovnice měly řešení (nenulové), jest nutno a stačí, by byl roven nule determinant 3. stupně z jejich koeficientů, t. j. musí býti

$$R \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho a_{11}, & a_{12} - \varrho a_{21}, & a_{13} - \varrho a_{31}\\ a_{21} - \varrho a_{12}, & a_{22} - \varrho a_{22}, & a_{23} - \varrho a_{32}\\ a_{31} - \varrho a_{13}, & a_{32} - \varrho a_{23}, & a_{33} - \varrho a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Rozbor této rovnice 3. stupně pro ϱ je obdobný rozboru rovnice 3. stupně při otázce samodružných prvků v kolineaci. Každý kořen této rovnice, dosazen za ϱ do hořejších tří rovnic pro x_1, x_2, x_3, dává trojici rovnic, z níž dvě určují hledaný bod involuční dvojice.

Nechávajíce zatím stranou případ, kdy všechny členy uvedeného determinantu jsou jednotlivě rovny nule, shledáváme, že jeden kořen rovnice $R = 0$ jest 1 (což plyne z hodnot prvků v determinantu). Budiž soustava souřadnic tak položena, že kořenu $\varrho = 1$ přísluší bod (0, 0, 1); z hořejších rovnic pro x_1, x_2, x_3 vychází při této volbě $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$.

Jestliže přímka, odpovídající involučně bodu (0, 0, 1), jím neprochází, zvolme ji za přímku (0, 0, 1); souřadnice bodu a přímky této dvojice, vloženy do rovnic korelace, redukují je vzhledem k hořejším dvěma relacím mezi koeficienty na tvar

$$\varrho u'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \qquad \varrho u'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \qquad \varrho u'_3 = a_{33}x_3.$$

Rovnice pro ϱ redukuje se pak po vyloučení kořene $\varrho = 1$ na rovnici 2. stupně

$$a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho a_{11}, & a_{12} - \varrho a_{21}\\ a_{21} - \varrho a_{12}, & a_{22} - \varrho a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Jednomu kořenu této rovnice (různému ovšem od 1) ať odpovídá bod (1, 0, 0); rovnice pro x_1, x_2, x_3 ukazují potom, že jsou dvě možnosti, buď $a_{11} = 0$ nebo $a_{21} = a_{12}$. Pro $a_{21} = a_{12}$ (ve spojení s dřívějšími relacemi $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$) jsou všechny členy determinantu R rovny nule, případ zatím vyloučený; pro $a_{11} = 0$ redukuje se uvedená rovnice kvadratická na $(a_{12} - \varrho a_{21})(a_{21} - \varrho a_{12}) = 0$. Má kořeny buď různé (pro $a_{12} \neq \pm a_{21}$) nebo splývající (pro $a_{21} = -a_{12}$); v tomto druhém

případě buď nejsou všechny subdeterminanty 2. stupně v R rovny nule ($a_{22} \neq 0$, $a_{33} \neq 0$) nebo jsou rovny nule (jest $a_{22} = 0$).

Máme odtud tedy tři typy korelace v rovině (s reálným trojúhelníkem prvků obapolně sdružených): typus I., vyjádřený rovnicemi (položíme-li ještě $a_{12} = 1$)

$$\varrho u'_1 = x_2, \qquad \varrho u'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \qquad \varrho u'_3 = a_{33}x_3,$$

kde $a_{21} \neq \pm 1$, $a_{33} \neq 0$; typ II. s rovnicemi

$$\varrho u'_1 = x_2, \qquad \varrho u'_2 = -x_1 + a_{22}x_2, \qquad \varrho u'_3 = a_{33}x_3,$$

kde $a_{33} \neq 0$; typ IV., daný rovnicemi

$$\varrho u'_1 = x_2, \qquad \varrho u'_2 = -x_1, \qquad \varrho u'_3 = a_{33}x_3,$$

kde $a_{33} \neq 0$. Druhé mocniny korelací typu I., II. a IV. jsou kolineace typu I. resp. II. resp. IV.

Prochází-li přímka odpovídající obapolně bodu (0, 0, 1) tímto bodem, položme do ní třebas přímku (1, 0, 0); rovnice korelace redukují se vzhledem k tomu na tvar

$$\varrho u'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3, \qquad \varrho u'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \qquad \varrho u'_3 = x_1,$$

kde $a_{21} \neq a_{12}$, $a_{11} \neq 0$. Tato korelace typu III. má přidruženou kolineaci typu III.[1])

c) Případ prve odložený, kdy všechny členy determinantu R vymizí, t. j. kdy platí

$$a_{pq} - \varrho a_{qp} = 0 \qquad (p, q = 1, 2, 3)$$

jest velmi důležitý. Tehdy rovnice pro souřadnice x_1, x_2, x_3 bodu involuční dvojice jsou splněny identicky: všechny body roviny odpovídají přímkám v korelaci korespondujícím obapolně, *korelace je involuční*, její přidružená kolineace K^2 je kolineace identická.

Z uvedených rovnic vyplývá $\varrho = 1$ a tedy

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{31} = a_{13}, \quad a_{32} = a_{23}.$$

Neboť je-li některý z koeficientů a_{pp} různý od nuly, třebas $a_{11} \neq 0$, plyne z rovnice $a_{11}(1 - \varrho) = 0$ přímo $\varrho = 1$. Jestliže však platí $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$, $a_{33} = 0$ a třebas $a_{12} \neq 0$ (protože některý prvek v determinantu korelace musí býti nenulový), obdržíme z $a_{12} = \varrho a_{21}$, $a_{21} = \varrho a_{12}$ důsledek $\varrho^2 = 1$ a tedy vedle případu uvedeného $\varrho = 1$ ještě $\varrho = -1$, což však vede k nulové hodnotě determinantu transformace korelativní (proti předpokladu).[2])[3])[4])

---

[1]) Ze speciálních korelací typu I. budiž uvedena jednoduchá transformace, jež vrcholy čtyrúhelníku v rovině A, B, C, D převádí v jeho strany resp. AB, BC, CD, DA; její čtverec je periodická kolineace 4. řádu.

[2]) O klasifikaci rovinných korelací viz na př. *O. Veblen-J. W. Young*, Projective geometry I, p. 278 a n.; *A. Comessatti*, Lezioni di geometria analitica e proiettiva II, p. 252 a n.; také *P. Lévy*, Sur les transformations corrélatives, Bulletin Soc. math. France 57 (1929).

[3]) Korelace mohou spolu s kolineacemi tvořiti grupy. Konečné grupy kolinea.cí (podle výsledků Jordanových a Kleinova) rozšiřuje korelacemi

66. Involuční korelace čili polárnost. *a*) Obecná korelace má, jak jsme poznali, tři dvojice, složené z bodu a korespondující přímky, jež sobě odpovídají obapolně; dvě dvojice obsahují prvky incidentní, třetí pak elementy neincidentní. Velmi snadno zjistíme, že si v obecné korelaci neodpovídají obapolně kterékoli dva prvky, t. j. že odpovídá-li bodu X přímka x', neodpovídá bodu $A' \equiv X$ přímka $a \equiv x'$; stačí ustanoviti, aby vedle dvojice korespondujících prvků X a x' odpovídaly bodům Y a Z, zvoleným na x', přímky y' resp. z', protínající se v jiném bodě než X; zvolenými takto třemi dvojicemi prvků není korelace dosud ani určena (a jest možno voliti libovolně ještě čtvrtý bod a jemu odpovídající přímku).

Korelace dvou soumístných polí, v níž si kterékoli dva sdružené prvky odpovídají obapolně čili *involučně* (t. j. v korelaci dané i v inversní), *sluje rovinná polárnost*; při tom leckdy obě soumístná pole pokládáme za jeden celek.[1]) Polárnost je korelativní transformace $\mathbf{K}$, o které platí $\mathbf{K} = \mathbf{K}^{-1}$ čili $\mathbf{K}^2 = 1$. Bod a přímka, které sobě v polárnosti (obapolně) odpovídají, slují *pól* a *polára* (přímky, resp. bodu).[2])

Duálně definuje se *polárnost dvou soumístných trsů* (polárnost v prostorovém svazku): je to korelace, v níž si dva sdružené prvky, přímka a rovina, odpovídají vždy involučně; přímka taková sluje *polárou* roviny korespondující, tato *polárnou rovinou* korespondující přímky.

b) Korelace jest korelací involuční čili polárností, jakmile obsahuje *tři dvojice bodů obapolně konjugovaných, jež leží na různých přímkách neprocházejících jedním bodem.* Že v tom případě každému bodu v rovině odpovídá přímka obapolně, dokážeme takto: Na každé z uvedených tří přímek existuje projektivnost bodů v korelaci konjugovaných, jež je involuční, obsahujíc podle předpokladu jednu involuční dvojici bodů. Dejme tomu, že přímky ty se protínají v bodech A, B, C; každý z těchto průsečíků má na jedné i na druhé z daných přímek jím procházejících bod jemu obapolně konjugovaný, jejichž spojnice mu tedy v korelaci odpovídá obapolně; odpovídají tudíž involučně bodům A, B, C přímky tak zjištěné a', b', c'. Na každé přímce svazku se středem A existuje involuční projektivnost bodů v korelaci konjugovaných, protože se tam vyskytuje jedna taková dvojice (bod A a průsečík uvažované

S. Kantor, Über die endlichen Gruppen von Correlationen, Journal r. a. Math. 116 (1896).

[4]) Všechny kolineace a všechny korelace v rovině tvoří dohromady grupu, *obecnou projektivní grupu roviny* (korelace samy však netvoří grupy). Projektivními jsou všechny ty vlastnosti rovinných útvarů, jež jsou invariantní při této grupě; protože grupa ta obsahuje korelace, platí v projektivní geometrii roviny zákon duálnosti.

[1]) Místo názvu (rovinné) polárnosti užívá se také přirozeného, ale delšího jména polárná korelace rovinná nebo polárná soustava rovinná, stručně polárné pole.

[2]) Názvy pól a polára zavedli *Servois* (1810) a *Gergonne* (1812).

přímky s přímkou a'); rovněž tak na přímkách svazků B a C, duálně pak ve svazcích paprskových se středem na a', b', c'. Jest nyní patrno, že libovolnému bodu v rovině X odpovídá involučně přímka x', protože na jeho spojnicích se dvěma z bodů A, B, C existují involuční projektivnosti bodů konjugovaných, a body, konjugované v nich bodu X, určují přímku x'.

Místo uvedených podmínek toho, aby korelace byla polárností, lze ovšem uvésti podmínky duální: stačí, existují-li v korelaci tři dvojice přímek obapolně konjugovaných tak, že tři průsečíky vždy dvou konjugovaných přímek jsou různé a neleží na jedné přímce. Dvě z přímek v hořejší podmínce uvedených, jež obsahují po dvou bodech obapolně konjugovaných, lze nahraditi bodem P a přímkou p' obapolně sdruženými, které však nesmějí býti incidentní; dále ovšem přímka obsahující třetí dvojici bodů konjugovaných nesmí procházeti bodem P. Rovněž v případě duálním lze dvě dvojice přímek obapolně konjugovaných nahraditi dvojicí p a P' prvků obapolně sdružených za obdobných výhrad.

Jednoduchým a důležitým způsobem lze polárnost mezi korelacemi charakterisovati větou: *Korelace v rovině je polárností, existuje-li trojúhelník, jehož každému vrcholu odpovídá strana protější.* Jestliže totiž vrcholům trojúhelníku, čítaným do roviny α, odpovídají v korelaci protější strany, čítané do roviny α', pak těmže vrcholům jako průsečíkům stran v α' odpovídají protější strany jako spojnice protějších vrcholů v α; odpovídají tedy sobě vrcholy a protější strany trojúhelníku toho obapolně. Bodům na každé ze stran uvedeného trojúhelníku odpovídají paprsky jdoucí protějším vrcholem obapolně, protože se na takové straně objevuje projektivnost konjugovaných bodů s jednou involuční dvojicí (ve vrcholech), tudíž projektivnost involuční. Konečně libovolnému bodu v rovině odpovídá sdružená přímka obapolně; neboť jeho spojnicím s dvěma vrcholy trojúhelníku odpovídají obapolně body na protějších stranách trojúhelníku, jejich spojnice koresponduje tedy zvolenému bodu obapolně. Po zjištění, že z předpokládané jednoduché korespondence mezi vrcholy a protějšími stranami trojúhelníku vyplývá pro ně korespondence involuční, mohli jsme ostatně podle předcházející věty souditi bezprostředně na involuční korelaci celé roviny; tři dvojice vrcholů takového trojúhelníku jsou totiž třemi dvojicemi bodů obapolně konjugovaných, jejichž spojnice jsou různé a nejdou jedním bodem.[3])

Uvedený trojúhelník, který je charakteristickou známkou involuční korelace, sluje *trojúhelník autopolární* (soběpolární, nebo prostě polární); jeho strany jsou totiž polárami protějších vrcholů, svých pólů.

[3]) Na tuto větu se převádí kriterium polárnosti (udané *Seydewitzem*): Korelace v rovině je polárností, jestliže dvěma bodům obapolně odpovídají dvě přímky, z nichž aspoň jedna neprochází bodem korespondujícím a jejichž průsečík neleží na spojnici korespondujících bodů. Viz také *St. Jolles*, Einfache Kennzeichen polarer Korrelationen, Math. Zeitschrift 8 (1920).

Místo trojúhelníku, jehož vrcholům odpovídají protější strany jeho (prostě a tudíž obapolně), můžeme po korelaci žádati, aby v ní jednomu bodu odpovídala obapolně přímka jím neprocházející, na níž jest jedna (a tudíž všechny) dvojice bodů obapolně konjugovaných. Neboť tento případ se převádí na hořejší a charakterisuje tedy také polárnost.[4])

c) Analytické vyjádření polárnosti vyplývá specialisací z rovnic pro korelaci vůbec. Při úvaze o typech korelace vyšli jsme od rovnic pro souřadnice x_1, x_2, x_3 bodu, jenž přímce v korelaci s ním sdružené odpovídá obapolně, totiž od rovnic

$$\begin{aligned}(a_{11} - \varrho a_{11})\, x_1 + (a_{12} - \varrho a_{21})\, x_2 + (a_{13} - \varrho a_{31})\, x_3 &= 0,\\ (a_{21} - \varrho a_{12})\, x_1 + (a_{22} - \varrho a_{22})\, x_2 + (a_{23} - \varrho a_{32})\, x_3 &= 0,\\ (a_{31} - \varrho a_{13})\, x_1 + (a_{32} - \varrho a_{23})\, x_2 + (a_{33} - \varrho a_{33})\, x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Je-li daná korelace polárností, odpovídá každému bodu sdružená přímka obapolně, uvedeným rovnicím vyhovuje každá trojice souřadnic x_k, platí tedy rovnice ty identicky; jestliže obráceně rovnice tyto jsou splněny identicky (pro každou trojici souřadnic x_k), jest korelace korespondencí involuční. K tomu tedy, aby korelace byla polárností, je nutno a stačí, aby byly nule rovny všechny koeficienty uvedených tří rovnic, t. j. aby platilo

$$a_{hk} - \varrho a_{kh} = 0 \qquad \text{pro } h, k = 1, 2, 3.$$

Odtud dospějeme, jak jsme už poznali, k jediné možnému důsledku

$$a_{hk} = a_{kh}.$$

Je-li totiž aspoň jeden z koeficientů a_{11}, a_{22}, a_{33} různý od nuly, vychází $\varrho = 1$ a tedy uvedený důsledek; je-li $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ a je-li z ostatních koeficientů třebas $a_{12} \neq 0$, nalézáme $\varrho^2 = 1$ čili $\varrho = \pm 1$, z těchto dvou možností jest však $\varrho = -1$ zavrhnouti, protože determinant transformace (složený z koeficientů $0, a_{12}, a_{13}; -a_{12}, 0, a_{23}; -a_{13}, -a_{23}, 0$) byl by roven nule.

Jest tudíž polárnost vyjádřena rovnicemi

$$\begin{aligned}\varrho u'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\\ \varrho u'_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\\ \varrho u'_3 &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3\end{aligned}$$

[4]) Roviny a, a' dvou korelativních polí (jakkoli položené), v nichž nevlastní přímce každého z obou p_∞ a p'_∞ odpovídá vlastní bod druhého P' resp. P, lze tak ztotožniti, aby vznikla polárnost. Přiřadíme-li totiž přímce svazku P přímku svazku P', jež promítá bod na p'_∞, korespondující oné v dané korelaci (a obráceně tedy přímce v P' přímku v P, jdoucí bodem na p_∞, sdruženým v korelaci s onou), vznikne mezi svazky P a P' projektivnost; stačí potom z rovin a, a' tak jednu na druhou položiti, aby se obráceně pokryly pravé úhly, odpovídající sobě v uvedené projektivnosti (což je obecně možno čtyřmi způsoby). Neboť tím vznikne v soumístných polích trojúhelník autopolárný (se stranami v ramenech pravého úhlu a v přímce nevlastní). Viz také *A. Sucharda*, O některých základních úlohách nové geometrie, Časopis mat. fys. 29 (1900).

(za suposice, že determinant z koeficientů a_{hk} je různý od nuly); píšeme je však často tak jako u korelace obecné, připojujíce podmínku $a_{hk} = a_{kh}$. Příslušný *determinant* je t. zv. *souměrný* (prvky jeho souměrně položené vzhledem k úhlopříčce z prvků a_{11}, a_{22}, a_{33} jsou si rovny).[5])[6])

67. Vlastnosti korelace polárné. *a*) O polárnosti v rovině[1]) platí především základní vlastnost korelace: V rovinné polárnosti procházejí poláry, příslušné k bodům ležícím na přímce, jejím pólem, duálně póly, příslušné k přímkám jdoucím bodem, leží na jeho poláře; řada pólů ležících na přímce (poláře) a svazek jejich polár jdoucích bodem (pólem oné přímky) jsou projektivní.

Jako v korelaci vůbec jmenujeme i v polárnosti každý *bod* přímky *konjugovaným* (sdruženým) k jejímu pólu, každý *paprsek* bodu *konjugovaným* (sdruženým) k jeho poláře; jsou-li speciálně pól a polára incidentní, jest každý z obou těchto prvků konjugován sobě samému, je *autokonjugovaný* (soběsdružený). Konjugovanost bodů i přímek jest v polárnosti obapolná (involuční), protože to platí o korespondenci mezi body (póly) a přímkami (polárami).

Povaha polárnosti jako korelace involuční jeví se v této vlastnosti:

V rovinné polárnosti tvoří na přímce, jež neobsahuje svého pólu, dvojice konjugovaných bodů involuční projektivnost.

V rovinné polárnosti tvoří dvojice konjugovaných paprsků ve svazku, jehož střed neleží na své poláře, involuční projektivnost.

Neboť řada bodů X na přímce p (neincidentní s pólem P) je projektivní se svazkem jejich polár o středu P, tedy projektivní s řadou průsečíků těchto polár na p (bodů konjugovaných k bodům X); protože pak je korespondence mezi konjugovanými body obapolná, je to projektivnost involuční. A duálně. O uvedených involučních projektivnostech na přímkách a v bodech roviny pravíme, že jsou její polárností indukovány (polárnosti podřaděny).

Existují tedy *na přímce, jež neobsahuje svého pólu, buď dva body sobě samým konjugované* (samodružné body uvedené involuce) *nebo žádný bod* (*dva imaginární*). Body konjugované jsou harmonicky spolu sdruženy vzhledem k těmto autokonjugovaným.

Existují tedy *ve svazku, jehož střed neleží na své poláře, bud dvě přímky autokonjugované* (samodružné v uvedené involuci) *nebo žádná* (*dvě imaginární*). Přímky konjugované jsou spolu harmonicky sdruženy vzhledem k těmto autokonjugovaným.

---

[5]) Můžeme říci, že nutnou a dostačující podmínkou involuční korelace čili polárnosti v rovině jest, aby determinant korelace byl souměrný.

[6]) Speciálně transformace $\varrho u'_1 = x_1$, $\varrho u'_2 = x_2$, $\varrho u'_3 = x_3$ je polárnost s autopolárným trojúhelníkem v základním trojúhelníku soustavy souřadnic, v níž bodu jednotkovému odpovídá jednotková přímka.

[1]) Vlastnosti rovinné polárnosti lze jednoduše (promítnutím) přenésti na svazek prostorový.

Jsou-li přímka a bod polárou a pólem, k sobě příslušnými, jsou involuční projektivnosti řady bodové na přímce té a svazku paprskového v bodě tom téhož druhu (tvoříce dvě perspektivní involuce).

Na přímce však, *jež obsahuje svůj pól, jest jenom tento bodem autokonjugovaným.*

Ve svazku však, *jehož střed leží na své poláře, jest jenom tato přímkou autokonjugovanou.*

Neboť v projektivnosti mezi řadou na takové přímce p a svazkem o středu v takovém bodě P (kterou polárnost mezi nimi stanoví) odpovídají bodům přímky p různým od P paprsky svazku P různé od p; a duálně.[2])

Involuční projektivnost konjugovaných prvků na přímkách roviny, neobsahujících příslušného pólu, a v bodech roviny, neležících na příslušné poláře, vyvozena byla z projektivnosti mezi řadou bodů na p a řadou průsečíků jejich polár na p; zbývá vyvrátiti námitku, že snad tato projektivnost je identická. Lze dokázati totiž, že v polárnosti roviny *neexistuje přímka sestávající z bodů soběsdružených* (a duálně neexistuje svazek složený z přímek soběsdružených). Neboť dejme tomu, že na přímce p jsou dva body autokonjugované A a B s polárami a resp. b, jež se protínají v bodě P, pólu přímky p, ležícím tedy mimo p. Polára e bodu E, ležícího na a mimo A a P, prochází bodem A a protíná b v bodě F, mimo B a P; polára f bodu F jako průsečíku polár bodů B a E jde body těmito a protíná e v bodě Q. Protože bodem Q procházejí poláry bodů E a F, jest jeho polárou přímka EF; průsečík této přímky EF s přímkou p je pak pólem spojnice PQ. Body $C = (p, PQ)$ a $D = (p, EF)$ jsou tudíž body konjugované, jsouce však zároveň body harmonicky sdruženými na p vzhledem k A a B (při čtyřrohu $PQEF$) jsou jistě různé. Existuje tudíž na přímce p dvojice různých bodů sdružených, nikoli tedy soběsdružených.[3])

Budiž ještě upozorněno, že *v dané polárnosti existuje* ∞^3 *autopolárných trojúhelníků*. Neboť jeden vrchol A takového trojúhelníku lze zvoliti kdekoli na rovině v bodě, jímž neprochází jeho polára (tedy ∞^2 způsoby), za druhý vrchol B jest možno zvoliti kterýkoli bod na poláře a bodu prvního (∞^1 způsoby), třetí vrchol C jest pak ovšem již určen jako průsečík ab polár obou bodů předcházejících; nebo duálně.[4])

---

[2]) Involuční projektivnost konjugovaných bodů na přímce, jež obsahuje svůj pól, jakož i projektivnost involuční konjugovaných přímek v bodě, jímž prochází jeho polára, jest tedy zvrhlá se samodružným (singulárním) bodem v pólu jejím, resp. se samodružným (singulárním) paprskem v jeho poláře.

[3]) Z věty zde dokázané vyplývá, že v rovině (na rozdíl od prostoru) neexistuje nezvrhlá korelace t. zv. *nulová* (což plyne analyticky odtud, že v příslušné úvaze o korelacích involučních hodnota $\varrho = -1$ vede ke korelaci zvrhlé).

[4]) Autopolárné trojúhelníky dané polárnosti rovinné zobrazuje body v prostoru na př. *G. Schaake*, Afbeelding von de pooldriehoeken van een

b) Protože korelace roviny jest určena čtyřmi dvojicemi sdružených prvků v obecné poloze a involuční charakter její je zajištěn existencí trojúhelníku autopolárného, *jest polárnost určena*, zvolíme-li v rovině *trojúhelník autopolárný*, mimo to *přímku nejdoucí jeho vrcholem jako poláru i bod neležící na straně trojúhelníku jako její pól*. Vskutku jsou tím na každé straně a v každém vrcholu autopolárného trojúhelníku určeny involuce konjugovaných bodů resp. přímek (na př. na straně $a = BC$ autopolárného trojúhelníku ABC určuje průsečík čtvrté poláry a konjugovaný s ním průsečík spojnice čtvrtého pólu s vrcholem A spolu s dvojicí BC involuci bodů v polárnosti konjugovaných). K libovolnému bodu sestrojíme pak korespondující poláru tím, že jej spojíme s dvěma vrcholy autopolárného trojúhelníku a určíme póly těchto spojnic na protějších stranách trojúhelníku (body konjugované k průsečíkům spojnic těch s protějšími stranami čili průsečíky přímek konjugovaných ke spojnicím těm v jednom i druhém vrcholu trojúhelníku); jejich spojnice je hledaná polára bodu daného. Duálně sestrojíme k libovolné přímce sdružený pól tím, že nalezneme poláry průsečíků jejích se dvěma stranami autopolárného trojúhelníku, jdoucí ovšem protějšími vrcholy; jejich průsečík je hledaný pól dané přímky.[5])

Polárnost je také určena, jsou-li dány *dvě involuce konjugovaných prvků* (bodů nebo přímek) *na konjugovaných nosičích* (na dvou přímkách resp. ve dvou bodech). Neboť dejme tomu třebas, že jsou dány involuce konjugovaných bodů na dvou přímkách konjugovaných; jejich průsečíku odpovídá pak jako polára spojnice bodů k němu na jedné i druhé přímce sdružených. Dvě dané přímky a nalezená polára tvoří trojúhelník autopolárný; mající vedle tohoto trojúhelníku dány involuce konjugovaných bodů na dvou stranách jeho, můžeme k libovolnému bodu sestrojiti poláru tím, že jej spojíme se dvěma vrcholy trojúhelníku na různých přímkách daných a určíme póly těchto spojnic na protějších stranách; přímka body ty spojující je hledaná polára. Pouze pro body na třetí (nalezené) straně autopolárného trojúhelníku se tento postup nehodí; protože však polára bodu tam ležícího prochází průsečíkem přímek daných, stačí pro ni určiti pouze jeden bod, pól libovolné přímky bodem tím jdoucí, čehož docílíme konstrukcí duální k uvedené. Duální konstrukce pólu k libovolné přímce roviny (právě vzpomenutá) je ovšem stejně potřebná jako konstrukce hořejší; v případě přímky jdoucí průsečíkem daných dvou přímek se zase doplňuje konstrukcí poláry k bodu na takové přímce.

---

kegelsnede op de punten van de ruimte, Verslagen Akad. Amsterdam 33 nebo Proceedings 27 (1924); také dvojice bodů v polárnosti konjugovaných, tamtéž 34 resp. 28 (1925).

[5]) Na tento případ se snadno převede jiný: Polárnost v rovině jest určena jednoduchým pětiúhelníkem, jehož vrcholům odpovídají protější strany jako poláry. Viz také *H. Beck*, Fünfecke und Polarsysteme, Sitzungsberichte Akad. Wien 126 (1917).

Jest možno určiti polárnost ještě rozmanitými způsoby jinými, na př. *autopolárným trojúhelníkem a involucí konjugovaných prvků* s nosičem mimo něj položeným (involucí bodů na přímce nejdoucí vrcholem jeho nebo involucí přímek v bodě neležícím na straně trojúhelníku toho). Neboť touto involucí jsou určeny involuce konjugovaných bodů na dvou stranách autopolárného trojúhelníku, jakož i involuce konjugovaných přímek ve dvou vrcholech tohoto trojúhelníku. Stačí na př. k průsečíkům osy konjugovaných bodů se dvěma stranami trojúhelníku určiti konjugované body na této ose a spojiti každý s protějším vrcholem trojúhelníku; každá z obou spojnic protne protější stranu v bodě konjugovaném k onomu průsečíku, takže na dvou stranách máme už involuce konjugovaných bodů, určené vždy dvěma dvojicemi bodů sdružených (totiž dvěma vrcholy autopolárného trojúhelníku a dvojicí právě nalezenou). Tím se převádí tento případ na předešlý.[6])

c) Jsou-li v polárnosti konjugovány dvakrát dva protější vrcholy úplného čtyrstranu, jsou v ní konjugovány i zbývající dva vrcholy.

Jsou-li v polárnosti konjugovány dvakrát dvě protější strany úplného čtyřrohu, jsou v ní konjugovány i zbývající dvě strany.[7])

Chtějíce dokázati větu na straně levé, předpokládejme, že ve čtyrstranu jsou konjugovány protější vrcholy A a A', B a B'; jest totéž prokázati u zbývajících vrcholů $C = (AB', A'B)$ a $C' = (AB, A'B')$. Musíme zjistiti, že bod C' leží na poláře bodu C nebo že bod C leží na poláře bodu C'. K řadě bodů na AB je projektivní svazek jejich polár a tedy také perspektivní k němu řada bodová na $A'B'$, obráceně k řadě bodů na $A'B'$ je prostřednictvím svazku jejich polár projektivní řada bodová na AB; v této projektivnosti bodových řad (konjugovaných bodů) na obou přímkách odpovídají sobě body A a A' i body B a B'. Bodu C', počítanému do řady na AB nebo do řady na $A'B'$, odpovídá bod na $A'B'$, resp. bod na AB, oba k němu v dané polárnosti konjugované; jejich spojnice, polára bodu C', jsouc osou projektivnosti řad bodových na AB a na $A'B'$, prochází bodem $(AB', A'B) = C$.[8])

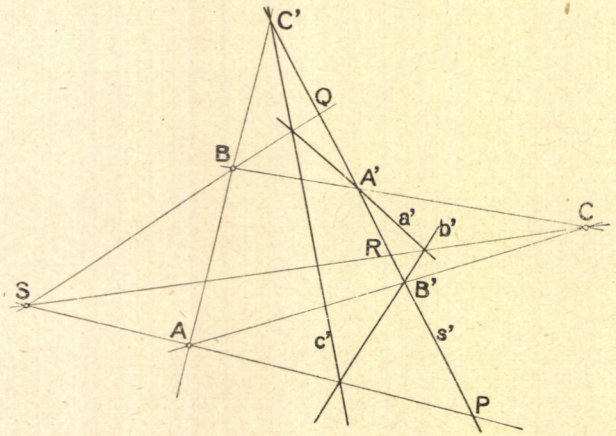
Pokládejme nyní tři strany čtyrstranu za strany trojúhelníku ABC, čtvrtou stranu pak, obsahující protější vrcholy čtyrstranu A', B', C',

[6]) Obecněji je polárnost určena trojúhelníkem autopolárným a dvěma dvojicemi konjugovaných bodů (obecně položených).

[7]) Věty tyto bývají nazývány *Hesseovy*, ač je před ním uvádí *Staudt* (r. 1831).

[8]) Jiný důkaz: Jestliže polára a' bodu A jdoucí bodem A' a polára b' bodu B jdoucí bodem B' se protínají v bodě D', jest D' pólem přímky AB a proto konjugován k bodu C'. Čtyřroh $A'B'CD'$ vysílá dvě protější strany $B'C$, $A'D'$ sdruženými body A, (AB, a') involuce na AB, druhé dvě strany $A'C$, $B'D'$ sdruženými body B, (AB, b'); proto také třetí dvojice stran jeho $A'B'$, CD' prochází sdruženými body involuce na AB, takže body C' a $E = (AB, CD')$ jsou v involuci té sdruženy. Protože přímka CD' jde dvěma body, konjugovanými v polárnosti s bodem C' (totiž bodem D' a bodem E), jest jeho polárou a její bod C bodem konjugovaným k C'.

za jeho příčku (obr. 74). Jsou-li vrcholy A a A', B a B' konjugovány v polárnosti, jsou v ní konjugovány i vrcholy C a C'; vedeme-li tedy body A', B' poláry a', b' bodů A a B, jde polára c' bodu C bodem C'. Jako strany trojúhelníku $a'b'c'$ jsou polárami vrcholů trojúhelníku ABC, tak strany trojúhelníku ABC jsou polárami vrcholů trojúhelníku $a'b'c'$; takové dva trojúhelníky slují *polárné*. Vidíme, že *dva polárné trojúhelníky ABC, $a'b'c'$ jsou homologické*; neboť korespondující strany jejich pro-



Obr. 74.

tínají se v bodech jedné přímky. Také osa homologie obou trojúhelníků jest patrně polárou jejich středu homologie (rovněž tři průsečíky korespondujících stran obou trojúhelníků na ose jsou póly spojnic korespondujících vrcholů ve středu homologie). Polárný vztah mezi dvěma trojúhelníky můžeme také takto vysloviti: Body konjugované v polárnosti k vrcholům trojúhelníku na protějších stranách jeho leží na jedné přímce; přímky konjugované ke stranám trojúhelníku v protějších vrcholech jeho procházejí jedním bodem.[9])

Obráceně lze dokázati, že *korelace, v níž sobě odpovídají vrcholy*

[9]) Obdobně jako projektivnost v základním útvaru jednomocném je produktem dvou involucí, tak platí: *Každou kolineaci v základním útvaru dvojmocném lze vyjádřiti jako produkt dvou polárností.* Neboť převádí-li daná kolineace rovinná $\mathbf{K}$ bod X a incidentní přímku x v bod X' a přímku x', tyto dva prvky pak ve dva incidentní prvky X'' a x'', takže $\mathbf{K}(XxX'x') = X'x'X''x''$, stačí zvoliti za polárnost $\mathbf{P}_1$ transformaci $\mathbf{P}_1(XX'X'') = x''x'x$, jež je určena autopolárným trojúhelníkem s vrcholy X, X'', xx'' a dvojici pólu s polárou X', x' (jež ovšem nejsou incidentní se stranami resp. s vrcholy trojúhelníku toho). Protože platí $\mathbf{P}_1\mathbf{K}(XxX'x') = x'X'xX$, jest trojúhelník s vrcholy X, X', xx' autopolárným, takže transformace $\mathbf{P}_1\mathbf{K}$ jest polárnost $\mathbf{P}_2$. A protože $\mathbf{P}_1\mathbf{K} = \mathbf{P}_2$, platí $\mathbf{K} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$.

trojrohu ABC a strany homologického trojstranu a'b'c' (bez společných prvků), *jakož i střed S a osa s' jejich homologie, jest polárností.* Neboť paprskům $S(A, B, C)$ v poli α odpovídají body s' (a', b', c') v poli α', průsečíkům P, Q, R oněch paprsků s osou s' (je-li $(SA, s') = P$ atd.) jsou tedy v korelaci konjugovány tyto body A', B', C' (je-li $s'a' = A'$ atd.); avšak vzhledem k čtyřrohu $SABC$ jsou dvojice bodů P a A', Q a B', R a C' involučně sdruženy, pročež jsou body ty a všechny dvojice bodů v korelaci na s' konjugovaných konjugovány obapolně. Bodu A', ležícímu na BC a počítanému do α, odpovídá v α' přímka jdoucí bodem $b'c'$, jež však podle předcházejícího musí jíti také bodem P, tedy SA; rovněž bodům B' a C' a tedy přímce s' v α odpovídají přímky SB, resp. SC, resp. bod S v α'. Tvoří tudíž bod S a dva sdružené body involuce na s' autopolárný trojúhelník a korelace je polárností.[10])

Útvar složený z trojúhelníků ABC, $a'b'c'$ a středu S i osy s' jejich homologie můžeme pokládati za čtyřroh $(ABCS)$ a vepsaný jemu čtyrstran $(a'b'c's')$; při tom na stranách AB, AC, BC, AS, BS, CS leží vrcholy $c's'$, $b's'$, $a's'$, $b'c'$, $a'c'$, $a'b'$. Při existenci takového útvaru, v němž vrcholům čtyřrohu odpovídají strany čtyrstranu, jest tedy korelace polárností.[11])

Uvažovaná konfigurace, obsahující 10 bodů a 10 přímek, je průsekem úplného pětiúhelníku v prostoru s rovinou; *vytvořuje* tedy *úplný prostorový pětiúhelník v každé rovině polárnost*, při čemž sobě odpovídají body a přímky, v nichž přímky a protější roviny pětiúhelníku protínají rovinu zvolenou.[12])[13])

68. Kuželosečka jako incidenční čára polárnosti rovinné. *a*) Mějme na zřeteli, že polárnost v rovině jest určena autopolárným trojúhelníkem a dvojicí pólu i poláry (jenž leží mimo strany onoho trojúhelníku, resp. jež neprochází vrcholem jeho). Vyšetřme, zdali existují v dané polárnosti prvky autokonjugované, t. j. póly a příslušné poláry incidentní.

Trojúhelník ABC dělí svými stranami a, b, c (jež pokládáme ovšem za přímky neomezené) rovinu ve čtyři obory. Dva body v rovině, ležící mimo strany trojúhelníku, patří témuž oboru roviny, jestliže jejich spojnice s vrcholy trojúhelníku v žádném vrcholu strany jeho neod-

[10]) Dva homologické trojúhelníky (jejichž sdružené prvky nesplývají) určují tedy polárnost, v níž jsou trojúhelníky polárnými.

[11]) O uvedené konfiguraci jedná *A. Brill*, Über das Polvierseit, Math. Annalen 20 (1883).

[12]) Viz *C. Koehler*, Über das Raumfünfeck und über die projektive Einteilung der durch ein Raumfünfeck bestimmten Polarfelder, Sitzungsberichte Akad. Heidelberg 1913.

[13]) Vyšetřováním kolineací a korelací záměnných i těch, jež danou projektivnost převádějí v inversní nebo jsou danou projektivností v inversní převáděny, zabýval se zejména *Th. Reye*, Über symbolisches Rechnen mit geometrischen Verwandtschaften, Math. Annalen 43 (1893); také *St. Jolles*, Invarianz und Umkehrung von Projektivitäten und Kollineationen, Journal r. a. Math. 149 (1919), a Allgemeine Kollineationen und ihre Umkehrungen, Math. Zeitschrift 9 (1921).

dělují (nebo jestliže jejich průměty z vrcholů trojúhelníku na protějších stranách jeho na žádné straně vrcholy neoddělují); dva body příslušejí různým oborům roviny, jestliže spojnice jejich s dvěma vrcholy trojúhelníku strany jeho oddělují, kdežto spojnice s vrcholem třetím strany jím jdoucí neoddělují (nebo jestliže průměty jejich na dvou stranách trojúhelníku vrcholy jeho oddělují, průměty však na straně třetí vrcholy tam ležící neoddělují). Každá přímka roviny nejdoucí žádným vrcholem trojúhelníku ABC protíná tři z uvedených oborů, ale neobsahuje ani jednoho bodu z oboru čtvrtého.[1])

Zvolíme-li v rovině, abychom tam stanovili určitou polárnost, trojúhelník ABC za autopolárný a mimo něj bod P v některém ze čtyř oborů vytčených, můžeme přímku p jako poláru bodu P voliti dvěma způsoby: buď 1. tak, že protíná obor roviny, v němž leží bod P, nebo 2. tak, že neprotíná oboru, jenž obsahuje bod P.

Označme průměty bodu P z vrcholů trojúhelníku ABC na protějších stranách P_a, P_b a P_c, průsečíky poláry p s těmito stranami A' (na BC), B' (na CA) a C' (na AB). Na každé straně a, b, c trojúhelníku ABC existuje involuční projektivnost bodů konjugovaných, určená na straně a dvojicemi BC a P_aA', obdobně pak na ostatních dvou stranách.

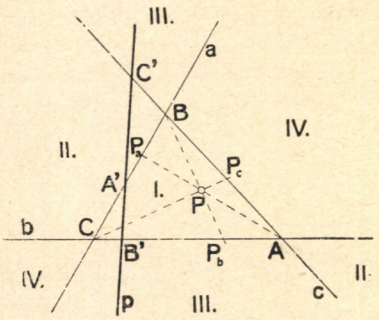
V prvním z uvedených dvou možných případů (obr. 75) protíná přímka p dvě strany trojúhelníku autopolárného (třebas a, b) na těchže částech jejich, na kterých leží průměty bodu P, nikoli však stranu třetí (c); jest tudíž involuce stanovená dvojicemi BC a P_aA' na a, jakož i involuce určená dvojicemi CA a P_bB' na b hyperbolická, kdežto involuce na c, daná dvojicemi AB a P_cC', je eliptická. Na dvou stranách autopolárného trojúhelníku existuje tedy po dvou (reálných) bodech autokonjugovaných, na třetí straně není takových bodů (jsou dva imaginární body autokonjugované, samodružné body příslušné involuce eliptické).

V druhém případě uvedeném (obr. 76) protíná přímka p všechny tři strany trojúhelníku autopolárného tak, že dvojice BC a P_aA', dále CA a P_bB', konečně AB a P_cC' se oddělují; involuce konjugovaných

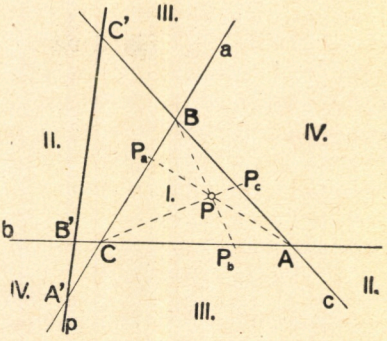
[1]) Jedna dvojice stran trojúhelníku dělí totiž rovinu ve dvě části, druhá dvojice rovněž ve dvě části, kombinací jich dostaneme čtyři části roviny; tytéž čtyři části vyplynou, užijeme-li jiných dvou dvojic stran trojúhelníku. Dva body téhož z uvedených oborů lze spojiti (konečným nebo nekonečným) úsekem přímky, jenž neprotíná stran trojúhelníku ABC, kdežto dva body oborů různých nikoli. Obdobně určuje trojúhelník ABC v poli paprskovém čtyři obory: dvě přímky nejdoucí vrcholy trojúhelníku patří témuž oboru, jestliže průsečíky jejich na stranách trojúhelníku na žádné straně vrcholy jeho neoddělují; dvě přímky příslušejí různým oborům, jestliže jejich průsečíky na dvou stranách trojúhelníku vrcholy jeho oddělují, na třetí straně však vrcholy tam ležící neoddělují. Ke každému oboru bodovému jest přidružen obor paprskový tak, že žádným bodem prvého neprochází přímka druhého. Prochází-li přímka oborem, jemuž patří zvolený bod, protíná dva z úseků (na různých stranách trojúhelníku ABC) jeho obor omezujících, neprotíná však třetího úseku (na straně třetí).

bodů na třech stranách trojúhelníku takto stanovené jsou všechny eliptické a na stranách autopolárného trojúhelníku není (reálných) bodů autokonjugovaných (jest po dvou imaginárních bodech autokonjugovaných).

Co platí o vzájemné poloze bodu P a jeho poláry p vzhledem k trojúhelníku ABC, platí o vzájemné poloze každého bodu roviny a jeho poláry (vzhledem k trojúhelníku ABC). Totéž platí o pólu a poláře vzhledem ke každému trojúhelníku autopolárnému v téže polárnosti.[2])



Obr. 75.



Obr. 76.

Jsou tedy (pokud jde o reálnost bodů a přímek autokonjugovaných) *dva druhy polárnosti v rovině*: *polárnost s* (*reálnými*) *prvky autokonjugovanými a polárnost bez* (*reálných*) *prvků autokonjugovaných*; první resp. druhá je charakterisována tím, že *pólára každého bodu roviny, obsaženého v jednom z oborů autopolárným trojúhelníkem vymezených, tento obor protíná* resp. *leží mimo tento obor*.[3])

b) Rovina polárnosti s (reálnými) prvky autokonjugovanými obsahuje trojí druh přímek: přímky incidentní se svým pólem (na nichž je tento jediný bod autokonjugovaný), přímky s hyperbolickou involucí bodů konjugovaných (na nichž jsou dva body autokonjugované) a přímky s eliptickou involucí bodů konjugovaných (na nichž není reálných bodů autokonjugovaných); duálně obsahuje taková rovina trojí druh bodů: body incidentní se svou polárou (jimiž prochází tato jediná přímka autokonjugovaná), body s hyperbolickou involucí přímek konjugovaných (jimiž jdou dvě přímky autokonjugované) a body s eliptickou involucí přímek konjugovaných (jimiž neprocházejí reálné přímky autokonjugované).

---

[2]) Viz *R. Sturm*, Über die Gleichartigkeit der Polardreiecke und der Polartetraeder, Archiv Math. Phys. (3) 23 (1915).

[3]) Polárnost bez autokonjugovaných prvků byla nazvána *stejnorodá*, polárnost s prvky autokonjugovanými *nestejnorodá*.

Existuje-li v rovinné polárnosti jediná dvojice bodu a přímky k sobě příslušných (pólu a poláry), *jež jsou incidentní*, tedy jeden bod autokonjugovaný a jedna přímka autokonjugovaná,

existuje v ní neomezené množství bodů soběsdružených, jež vytvořují křivku 2. stupně.

Neboť tvoří-li bod A a přímka a předpokládanou dvojici, obsahuje každá přímka x (různá od a), jdoucí bodem A a mající tedy svůj pól na přímce a (a nikoli na x), druhý bod autokonjugovaný X, protože involuce konjugovaných bodů, danou polárností na ní indukovaná, musí býti hyperbolická s jedním bodem samodružným v A a s druhým v X; body X ležící na všech přímkách svazku A vytvořují křivku 2. stupně.[4])

existuje v ní neomezené množství přímek soběsdružených, jež vytvořují křivku 2. třídy.

Tvoří-li totiž přímka a a bod A suponovanou dvojici, prochází každým bodem X ležícím na přímce a (mimo A), jehož polára tedy jde bodem A (a nikoli bodem X), druhá přímka autokonjugovaná x, ježto involuce konjugovaných přímek, danou polárností ve svazku X indukovaná, je hyperbolická se samodružnými paprsky a, x; přímky x procházející všemi body řady a vytvořují křivku 2. třídy.

Takto určená křivka 2. stupně a spolu křivka 2. třídy sluje *základní kuželosečka* (také *base* nebo direkční útvar) dané *polárnosti*. S touto kuželosečkou má přímka roviny buď po jednom nebo po dvou bodech společných nebo nemá žádného bodu společného (má po dvou imaginárních bodech společných) podle toho, patří-li do první nebo druhé nebo třetí skupiny přímek prve uvedených; sluje její tečnou resp. sečnou resp. přímkou mimoběžnou. Duálně jde k této kuželosečce z bodu roviny buď po jedné nebo po dvou přímkách vytvořujících nebo nejde žádná přímka (jde po dvou imaginárních přímkách) podle toho, náleží-li bod ten do první nebo do druhé nebo do třetí skupiny bodů prve vytčených; sluje bodem dotyčným oné přímky resp. bodem vnějším resp. vnitřním bodem kuželosečky.

Kuželosečka jako základní čára polárnosti jest vytvořena soběsdruženými body a spolu soběsdruženými přímkami dané polárnosti; tyto jsou tečnami kuželosečky v příslušných pólech, ony jsou dotyčnými body příslušných polár.

Rovinná polárnost druhého druhu, bez reálných prvků autokonjugovaných, ale s imaginárními prvky autokonjugovanými, definuje také kuželosečku jako soubor elementů autokonjugovaných, ovšem *kuželosečku imaginární*. Na každé přímce roviny existují dva body této kuželosečky, samodružné body eliptické involuce konjugovaných

[4]) Tato křivka 2. stupně je pravá, protože tři z bodů autokonjugovaných neleží nikdy v přímce (každá přímka roviny obsahuje nanejvýš dva body autokonjugované, samodružné body involuce, polárností na ní indukované). A duálně.

bodů na přímce té, každým bodem roviny jdou dvě přímky (tečny) této kuželosečky, samodružné přímky eliptické involuce konjugovaných přímek bodem tím procházejících.[5])[6])[7])

Duálně určuje polárnost v trsu *reálný nebo imaginární kužel 2. stupně a 2. třídy*, soubor přímek a rovin, jež jsouce sdruženy jsou incidentní.[8])[9])[10])

---

[5]) Kuželosečku jako základní čáru polárnosti v rovině definoval po prvé *Staudt* (1847); je to definice teoreticky velmi cenná, podávajíc kuželosečku jednak zároveň jako útvar bodový i přímkový, jednak reálnou i imaginární.

Odtud lze studovat projektivnost kvadratických řad bodových a svazků paprskových v rovině jako korespondenci, podřaděnou dané kolineaci nebo korelaci.

Polárnost druhého druhu může sloužiti za reálné vyjádření imaginární kuželosečky, své base.

[6]) Sestrojiti kuželosečku jako základní čáru dané polárnosti (stejnorodé) jest úkol 2. stupně (není-li dán žádný bod kuželosečky té); je-li dán (aspoň) jeden bod kuželosečky, je to úkol 1. stupně.

[7]) Metrickou specialisací uvedeného dostaneme vlastnosti, týkající se *průměrů* a *ohnisek* polárnosti v rovině (nebo základní kuželosečky její): průměry polárnosti (kuželosečky) slují poláry bodů nevlastních, středem střed jejich svazku (je-li v konečnu), osou průměr kolmý ke sdruženému směru; ohniskem střed orthogonální involuce sdružených přímek, řídicí přímkou polára ohniska.

[8]) O uvedené imaginární kuželosečce (jež nemá žádného bodu reálného a jest každou přímkou své roviny proťata ve dvojici bodů sdruženě imaginárních, taktéž duálně), jakož i o imaginárním kuželi kvadratickém, definovaném obdobně polárností v trsu, jedná na př. *V. Jarolímek*, Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru III, p. 54 a n.; také *V. Jarolímek*, K theorii imaginárních direkčních útvarů v soustavách polárných, Rozpravy Čes. akad. 11 (1902).

Jinou imaginární kuželosečku (se čtyřmi reálnými nebo po dvou sdruženě imaginárními body a duálně) lze definovati pomocí dvou projektivních svazků paprskových (s imaginárními středy a prvky) nebo jako samodružnou v (eliptické) projektivnosti svazku kuželoseček nebo jako čáru, kterou reálná přímka její roviny protíná ve dvou bodech imaginárních nesdružených, (rovněž duálně); viz *V. Jarolímek*, Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru III.; *J. L. S. Hatton*, The theory of the imaginary in geometry, 1920; *Q. Vetter*, Le coniche e le quadriche imaginarie generali, Giornale mat. 61 (1923), a Sur la conique imaginaire générale dans le plan (théorie et construction), Spisy přír. fak. univ. Praha 32 (1925).

[9]) Korelace v trsu, při níž každé přímce odpovídá rovina k ní kolmá, jest polárností bez (reálných) prvků autokonjugovaných a sluje *polárnost orthogonální*. Je důležitá pro zařadění obyčejné geometrie prostorového svazku do geometrie projektivní: každá metrická vlastnost útvaru v trsu jest projektivní vlastnost jeho ve spojení s invariantní polárností orthogonální (jež proto sluje také útvarem absolutním). Neboť rovnost úhlů ab, $a'b'$ nebo úhlů $a\beta$, $a'\beta'$ v trsu (a tedy shodnost v něm) lze definovati jako korespondenci jejich v kolineaci trsu, při níž se orthogonální polárnost nemění; v prvním případě přechází totiž kruhová involuce v paprskovém svazku o středu ab v kruhovou involuci svazku $a'b'$, v druhém platí totéž o svazcích rovinových s osami $a\beta$ a $a'\beta'$. Místo absolutní polárnosti v trsu lze mluviti o absolutní polárnosti v rovině nevlastní (jež je řezem oné, a o její základní kuželosečce, imaginární kružnici).

c) Že útvar definovaný jako base nestejnorodé polárnosti v rovině jest totožný s čarou, vytvořenou dvěma projektivními (nesoumístnými neperspektivními) svazky paprskovými a duálně dvěma projektivními řadami bodovými v rovině, zjistíme pomocí duálních vět:

Má-li trojroh tři své vrcholy v soběsdružených bodech polárnosti, jest každá přímka, konjugovaná k jedné straně jeho, proťata ostatními dvěma stranami v bodech konjugovaných; a obráceně každá přímka protínající dvě strany takového trojrohu v bodech konjugovaných, je konjugována ke straně třetí.[11]) Má-li trojroh dva své vrcholy v soběsdružených bodech polárnosti a protíná-li přímka, konjugovaná k jejich spojnici, ostatní dvě strany jeho v bodech konjugovaných, má trojroh i třetí vrchol v bodě soběsdruženém.

Má-li trojstran tři své strany v soběsdružených přímkách polárnosti, promítají se z každého bodu, konjugovaného k jednomu vrcholu jeho, ostatní dva vrcholy přímkami konjugovanými; a obráceně každý bod, z něhož se dva vrcholy takového trojstranu promítají konjugovanými přímkami, je konjugován k vrcholu třetímu. Má-li trojstran dvě své strany v soběsdružených přímkách polárnosti a promítají-li se z bodu, konjugovaného k jejich průsečíku, ostatní dva vrcholy jeho přímkami konjugovanými, má trojstran i třetí stranu v přímce soběsdružené.

Budiž dán (pro větu na levé straně) trojúhelník ABC, jehož vrcholy leží na svých polárách (obr. 77). Řady bodů na dvou stranách jeho AB a AC, v nichž sobě odpovídají body konjugované (body každé z obou řad leží v průsečících osy jejich s polárami bodů řady druhé), jsou pro-

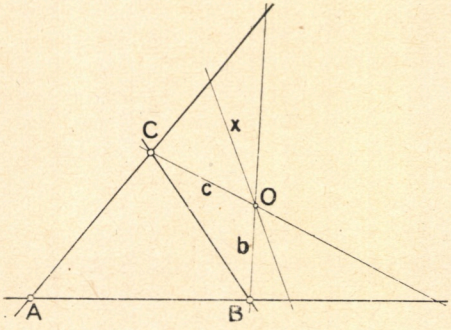
---

Pomocí této transformace je možno dokázati, že zákon duálnosti platí i pro metrické vlastnosti útvarů v trsu; neboť orthogonální polárnost je korelací, při níž absolutní útvar trsu přechází opět v tento útvar. (Proti tomu neplatí zákon duálnosti pro metrickou geometrii rovinnou, protože korelativní útvar absolutního útvaru v rovině, eliptická involuce ve svazku paprskovém, nemá obdobného významu jako onen.)

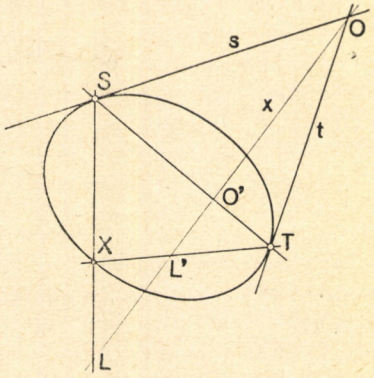
[10]) Z metrických vlastností polárnosti v trsu je zajímavá zejména věta: *V každé neorthogonální polárnosti v trsu* se středem v konečnu *existuje buď jeden autopolárný trojhran s třemi pravými úhly nebo nekonečně mnoho takových trojhranů se společnou hranou.* Neboť máme-li v trsu na zřeteli vedle dané polárnosti polárnost orthogonální (jejíž všechny autopolárné trojhrany mají po třech pravých úhlech), vidíme, že přímky korespondující rovinám trsu v obou polárnostech tvoří dva soumístné kolineární trsy a mají tedy aspoň jeden reálný paprsek samodružný a; v rovině k tomuto paprsku kolmé, polárné k němu v obou polárnostech, existují dvě involuce přímek, v polárnosti jedné nebo druhé konjugovaných. Nesplývají-li tyto involuce, z nichž jedna je orthogonální, mají společnou jen jednu dvojici reálných paprsků sdružených b, c: trojhran abc je jediný trojhran uvedený. Splývají-li obě dotčené involuce, jest v rovině té neomezeně mnoho dvojic sdružených přímek k sobě kolmých, jež spolu s a tvoří nekonečně mnoho trojhranů uvedené vlastnosti (polárnost jest rotací kolem osy a).

[11]) Věta tato, pocházející od *Seydewitze*, bývá nazývána *Staudtovou*.

jektivní; jsou nad to perspektivní, majíce společným autokonjugovaný bod A. Střed této perspektivnosti O leží v průsečíku spojnic bodů konjugovaných, tedy v průsečíku polár b a c, incidentních s bodem B resp. C, který jest ovšem pólem přímky BC. Každá přímka, konjugovaná ke straně BC, prochází jejím pólem O a protíná strany AB, AC, protože bod onen je středem perspektivnosti řad jejich, v bodech konjugovaných; obráceně spojnice dvou konjugovaných bodů na stranách AB, AC jde středem perspektivnosti O a je, protože bod ten je pólem strany BC,



Obr. 77.



Obr. 78.

k této konjugována. Druhá věta uvedená je obrácenou k (původní) větě první a plyne z ní bezprostředně (vzhledem k involuci na příčce).

Můžeme nyní dokázati:

Autokonjugované body polárnosti v rovině promítají se ze dvou bodů takových projektivními svazky paprsků.

Autokonjugované přímky polárnosti v rovině protínají dvě přímky takové v projektivních řadách bodů.

Neboť učiníme-li ve dvou svazcích paprskových se středy S, T v autokonjugovaných bodech dané polárnosti korespondujícími dva paprsky, jež promítají týž autokonjugovaný bod této polárnosti (obr. 78), protínají podle prvé věty na počátku uvedené tyto dva svazky přímku, konjugovanou k přímce ST (jdoucí jejím pólem O a nejdoucí bodem S ani T), ve dvojicích bodů v polárnosti konjugovaných; protože tyto dvojice jsou dvojicemi bodů odpovídajících sobě v (involuční) projektivnosti, jsou ony dva svazky také projektivní. Společnému paprsku ST svazků těch, čítanému do jednoho nebo druhého, odpovídá paprsek TO resp. SO (tečny v bodech T a S základní čáry polárnosti).

A obráceně platí:

Průsečíky korespondujících paprsků dvou projektivních (nesou-

Spojnice korespondujících bodů dvou projektivních (nesoumístných

místných neperspektivních) svazků v rovině jsou autokonjugovanými body určité polárnosti.

neperspektivních) řad v rovině jsou autokonjugovanými přímkami určité polárnosti.

Neboť máme-li na zřeteli dva projektivní svazky paprskové se středy S a T, v nichž paprsku ST, čítanému do prvního nebo do druhého svazku, odpovídá v druhém paprsek t, resp. v prvém paprsek s (oba různé od ST), všimněme si libovolné přímky x, jdoucí bodem $O = st$ (různé od s i t), jež protíná ST v bodě O' (obr. 78). Paprsky svazků S a T protínají přímku x ve dvou soumístných projektivních řadách bodových; protože si zde O a O' odpovídají obapolně, jest tato projektivnost na x involuční. Lze nyní v rovině stanoviti polárnost tak, že bodům O, S, T přiřadíme jako poláry přímky ST resp. s resp. t a že zvolíme za konjugované dva body L, L', sdružené v uvedené involuci na x. V této polárnosti existuje základní čára, jdoucí body S i T a mající tam za tečny přímku s resp. t; kterékoli dva sdružené paprsky svazků S a T protínají přímku x v bodech, jež jsou sdruženy v involuci, určené dvojicemi OO' a LL', tedy ve dvou bodech konjugovaných vzhledem k čáře základní; pročež podle druhé věty, na počátku odstavce uvedené, paprsky ty se protínají v autokonjugovaném bodě této polárnosti.

d) Základní čára dané polárnosti jest kuželosečka, *ve kterou splývají obě incidenční kuželosečky k a k' obecné korelace*, dříve uvažované. Je-li totiž korelace involuční, splývají obě přímky, konjugované (v korelaci dané a v inversní) k bodu X incidenční kuželosečky k, jež jsou tečnami kuželosečky k', v přímku jedinou, v poláru jeho x; proto je bod X dotyčným bodem přímky x na kuželosečce k'. Duálně splývají oba průsečíky, v nichž tečna x kuželosečky k' protíná kuželosečku k a jež jsou k ní v obou navzájem inversních korelacích konjugovány, v jediný bod X, pól přímky x; proto se dotýká x také kuželosečky k v bodě X. Tvoří tudíž obě incidenční kuželosečky korelace k a k' v polárnosti tutéž kuželosečku jako soustavu bodů i soustavu přímek, základní čáru polárnosti. Základní čára polárnosti, jsouc vytvořena body a přímkami, jež jako příslušné k sobě póly a poláry jsou incidentní, sluje také *incidenční čarou* dané *polárnosti*.

Obráceně splynou-li obě incidenční kuželosečky dané korelace, jest tato korelace polárností.

Věty o určenosti polárné korelace vedou k větám o kuželosečce jako čáře základní; na př. z věty, že polárnost je určena autopolárným trojúhelníkem a involucí bodů na přímce konjugovaných, vyplývá, že kuželosečka jest určena trojúhelníkem autopolárným a dvěma svými body.[12])[13])

[12]) Teorii kuželosečky, definované jako base rovinné polárnosti, podává na př. *F. Enriques*, Lezioni di geometria proiettiva. Rozmanité způsoby synthetického vyšetřování kuželoseček posuzuje *E. B. Wilson*, The synthetic treatment of conics at the present time, Bulletin Amer. math. soc. (2) 9 (1903).

69. Rovinná polárnost určená kuželosečkou; vztahy analytické. *a*) Danou polárností rovinnou jest, jak jsme viděli, definována (reálná nebo imaginární) kuželosečka; naopak *jest danou kuželosečkou určena* (a velmi výhodně) *polárnost v rovině.*

Zvolíme-li totiž na dané (reálné) kuželosečce čtyři body a přiřadíme-li každému z těchto bodů tečnu kuželosečky jím jdoucí, jest tím stanovena korelace, totožná ovšem s polárností (prvního druhu), určující kuželosečku danou. Vztahy, uváděné dosud u polárnosti jako involuční korelace, můžeme tedy spojovat s kuželosečkou, jež polárnost definuje: mluvíme o pólu a poláře, příslušných k sobě vzhledem ke kuželosečce, o prvcích konjugovaných vzhledem ke kuželosečce, o involuci konjugovaných bodů nebo přímek, kterou kuželosečka určuje, a pod.

Polára daného bodu resp. pól dané přímky má vzhledem ke kuželosečce zejména tyto důležité vlastnosti:

V rovině dané (reálné) kuželosečky obsahuje polára každého bodu P, jenž neleží na kuželosečce (obr. 79),

a) všechny body harmonicky sdružené k bodu P na každé sečně bodem tím jdoucí vzhledem k průsečíkům sečny té s danou kuželosečkou;

V rovině dané (reálné) kuželosečky procházejí pólem každé přímky p, jež není tečnou kuželosečky (obr. 80),

a) všechny přímky harmonicky sdružené k přímce p v každém bodě na p ležícím vzhledem k tečnám z bodu toho ke kuželosečce vedeným;

---

[13]) Jako obyčejná geometrie (Eukleidova) v rovině jest souborem vztahů mezi geometrickými útvary rovinnými, jež zůstávají zachovány při projektivních transformacích roviny, při nichž se nemění přímka nevlastní a involuce řady jejích bodů se samodružnými prvky v t. zv. kruhových bodech roviny, tak lze do projektivní geometrie zařaditi také *geometrie neeuklidské:* vlastnosti útvarů rovinných, jež jsou invariantní při kolineacích, neměnících pravou kuželosečku, která jsouc složena z bodů nevlastních omezuje obor bodů vlastních (t. zv. *absolutní útvar roviny*), tvoří geometrii *Lobačevského-Bolyaiovu* (hyperbolickou), je-li uvedená kuželosečka reálná, geometrii *Riemannovu* (eliptickou), je-li kuželosečka ta imaginární. Je-li invariantní útvar nevlastní v rovině bodová nebo přímková kuželosečka zvrhlá (ve dvě různé reálné nebo sdruženě imaginární nebo splývající přímky resp. body), obdrží se geometrie parabolické (k nimž patří geometrie Eukleidova). Z obsáhlé literatury o geometriích neeukleidských budiž (k informaci) uvedeno: *R. Bonola*, La geometria non-euclidea: esposizione storico-critica del suo sviluppo, 1906 (rozšíř. vyd. čl. ve sborníku Questioni riguardanti la geometria elementare I. 2, 2. vyd. 1925; přel. do něm., rušt. a angl.); *F. Klein*, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, 3. vyd. nově zprac. 1928; *J. L. Coolidge*, The elements of non-Euclidean geometry, 1909; *O. Veblen-J. W. Young*, Projective geometry II, p. 350 a n.; *V. Hlavatý*, Úvod do neeuklidovské geometrie, 1926; *F. Schilling*, Projektive und nichteuklidische Geometrie, 2 sv. 1931; *D. M. Y. Sommerville*, Bibliography of non-euclidean geometry, 1911.

β) oba dotyčné body tečen z bodu P ke kuželosečce vedených (jsou-li reálné i jsou-li imaginární);

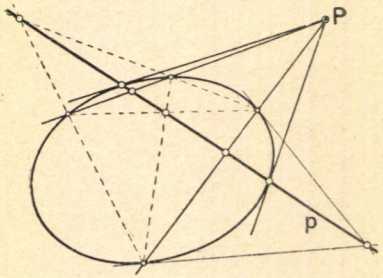
γ) všechny dvojice ostatních úhlopříčných vrcholů těch úplných čtyřrohů kuželosečce vepsaných, jež mají jeden úhlopříčný vrchol v bodě P;

δ) průsečíky všech dvojic tečen kuželosečky v průsečících jejích s každou sečnou bodem P vedenou.

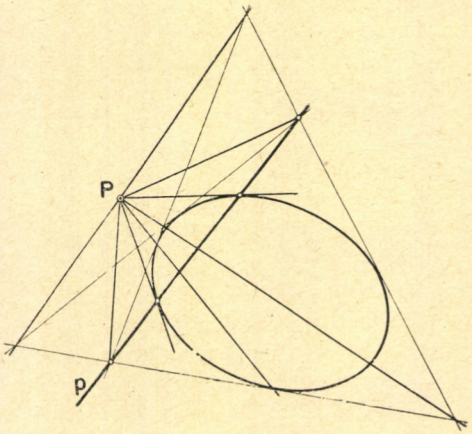
β) obě tečny kuželosečky v průsečících (reálných i imaginárních) přímky p s kuželosečkou;

γ) všechny dvojice ostatních úhlopříčných stran těch úplných čtyrstranů kuželosečce opsaných, jež mají jednu stranu úhlopříčnou v p;

δ) spojnice všech dvojic dotyčných bodů tečen kuželosečky, vedených k ní z každého bodu na p.



Obr. 79.



Obr. 80.

Tyto vlastnosti poláry a pólu vyplývají bezprostředně z vlastností dříve uvedených. Z první vlastnosti poláry plyne dále: *Polára každého bodu P v rovině kuželosečky jest osou involuční homologie se středem v bodě P, jež převádí kuželosečku danou v ni samu*; a duálně.[1]) Z druhé vlastnosti poláry plyne, že polára bodu ležícího vně resp. uvnitř kuželosečky jest sečna této kuželosečky resp. přímka mimoběžná. Odtud a z třetí vlastnosti poláry plyne, že *úhlopříčný trojúhelník čtyřrohu kuželosečce vepsaného*, duálně *úhlopříčný trojúhelník čtyrstranu kuželosečce opsaného jest autopolárným trojúhelníkem vzhledem k ní*,[2]) a že

[1]) Toho můžeme s výhodou užíti při konstrukci kuželosečky, je-li k jejímu stanovení dána dvojice pólu s polárou; zvolíme totiž tuto dvojici za střed a osu involuční homologie s invariantní kuželosečkou hledanou. Na př. u kuželosečky, určené třemi body (třemi tečnami) a pólem i polárou, sestrojíme další tři body (tři tečny) jako korespondující k daným v uv. homologii harmonické.

[2]) Speciálně čtyřroh kuželosečce vepsaný a čtyrstran jí opsaný tak,

autopolárný trojúhelník vzhledem ke kuželosečce má dvěma stranami sečny a třetí stranou přímku mimoběžnou, dva vrcholy vně a jeden uvnitř kuželosečky. Na jedné straně jeho je totiž involuce konjugovaných bodů eliptická, na dvou hyperbolická.[3])

Uvedené vlastnosti pólů a polár vzhledem k dané kuželosečce (zvláště vlastnost třetí) vedou k jednoduchým konstrukcím polárnosti kuželosečkou určené.[4])[5])[6])

b) Analyticky jest možno u dané polárnosti nalézti základní kuželosečku velmi jednoduše. V polárnosti vyjádřené rovnicemi

$$\varrho u'_1 = \sum_1^3 a_{1k}x_k, \quad \varrho u'_2 = \sum_1^3 a_{2k}x_k, \quad \varrho u'_3 = \sum_1^3 a_{3k}x_k,$$

kde determinant $A \equiv (a_{11}a_{22}a_{33}) \neq 0$ a platí $a_{hk} = a_{kh}$, odpovídá bodu (x_1, x_2, x_3) přímka $u'_1x'_1 + u'_2x'_2 + u'_3x'_3 = 0$ jako polára; tato polára

že strany tohoto jsou tečnami v bodech onoho, mají společný trojúhelník úhlopříčný, jenž je autopolárným trojúhelníkem kuželosečky.

[3]) Polárnost byla původně vyšetřována jako příbuznost, definovaná na základě kuželosečky (a dosud se tak často děje); první příslušné věty o kuželosečce odvodil (projekcí z vět o kružnici, známých už v řecké geometrii) *Ph. de la Hire*, Sectiones conicae, 1685. Jako transformaci uvažoval polárnost po prvé *Poncelet*, Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques, Journal r. a. Math. 4 (1824); přechod od daného útvaru roviny k útvaru polárnému a jeho užití k odvození geometrických vět byly často nazývány *metodou reciprokých polár*. Teorii polárnosti jako involuční korelace a rozlišení dvou jejích druhů podal po prvé *Staudt*, Geometrie der Lage (1847). O polárnosti obšírněji pojednávají na př. *J. Steiner-H. Schröter*, Vorlesungen über synthetische Geometrie II. (Die Theorie der Kegelschnitte, 3. vyd. 1898); *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften II. (také o metrických vlastnostech polárnosti v rovině a v trsu).

[4]) Na př. také v případě, že kuželosečka je dána pěti svými body, sestrojíme k libovolnému bodu P jeho polára p, spojíme-li P s dvěma danými body kuželosečky A a B, na obou těchto přímkách určíme druhé jejich průsečíky s kuželosečkou A' a B', načež spojnice bodů $(AB, A'B')$ a $(AB', A'B)$ je polára p.

[5]) Z útvarů, jež v rovinné polárnosti sobě samým odpovídají (jsou autopolárné), je zajímavý případ *polygonů Ponceletových*: Ponceletův n-úhelník jest pro liché n autopolárný vzhledem k určité kuželosečce k (tak, že každá jeho strana je polárou protějšího vrcholu); tato k je táž pro všechny n-rohy s touže opsanou a touže vepsanou kuželosečkou a má s oběma společný trojúhelník autopolárný. Proti tomu Ponceletův n-úhelník pro n sudé je invariantní při harmonické homologii (tak, že sobě odpovídají protější vrcholy a protější strany jeho), v níž jsou invariantní všechny n-rohy s pevnými kuželosečkami opsanou a vepsanou; střed a osa této homologie jsou pólem a polárou vzhledem k oběma kuželosečkám těm. Viz *G. Kohn*, Über einige projective Eigenschaften der Poncelet'schen Polygone, Sitzungsberichte Akad. Wien 100 (1891).

[6]) Polárnost, jež na nevlastní přímce roviny indukuje absolutní involuci, jest buď taková, že incidenční čarou její je kružnice (a je touto kružnicí určena) nebo jest produktem prvé polárnosti a souměrnosti podle středu její kružnice základní. Viz *F. Severi*, Complementi di geometria proiettiva, p. 203 a n.

má, dosadíme-li sem hořejší výrazy za u'_k, rovnici

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\,x'_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\,x'_2 + (a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3)\,x'_3 = 0$$

čili rovnici

$$a_{11}x_1x'_1 + a_{22}x_2x'_2 + a_{33}x_3x'_3 + a_{12}(x_1x'_2 + x_2x'_1) + a_{13}(x_1x'_3 + x_3x'_1) + a_{23}(x_2x'_3 + x_3x'_2) = 0,$$

při čemž jsou x'_1, x'_2, x'_3 souřadnice proměnného bodu na poláře.

Uvedená rovnice vyjadřuje také vztah mezi souřadnicemi dvou bodů v polárnosti konjugovaných, bodu (x_k) a bodu (x'_k); jest bilineární, což vyjadřuje, že body, konjugované k bodu danému, leží na přímce (jeho poláře); jest souměrná vzhledem k x_k a x'_k, což značí, že leží-li bod (x'_k) na poláře bodu (x_k), leží bod (x_k) na poláře bodu (x'_k).[7])

Že bod (x_k) je sobě samému konjugovaný, vyjádříme tím, že položíme $x'_k = x_k$ (t. j. bod (x_k) leží na své poláře); v tom případě obdržíme jako *geometrické místo bodů autokonjugovaných* čáru o rovnici

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0,$$

základní kuželosečku polárnosti. Tato kuželosečka jest ovšem reálná nebo imaginární, nemůže se však rozpadnouti (protože předpokládáme, že determinant z koeficientů a_{hk} jest různý od nuly).

Duálně nalezneme vztah mezi souřadnicemi dvou přímek (u_k) a (u'_k) v polárnosti dané konjugovaných

$$A_{11}u_1u'_1 + A_{22}u_2u'_2 + A_{33}u_3u'_3 + A_{12}(u_1u'_2 + u_2u'_1) + A_{13}(u_1u'_3 + u_3u'_1) + A_{23}(u_2u'_3 + u_3u'_2) = 0,$$

kde A_{hk} je subdeterminant determinantu z koeficientů a_{hk}, příslušný k a_{hk}; pokládáme-li zde u_k za souřadnice přímky dané a u'_k za souřadnice proměnné, jest to rovnice pólu přímky (u_k), obráceně při konstantních u'_k a proměnných u_k jest to rovnice pólu přímky (u'_k). *Přímky autokonjugované vytvořují základní kuželosečku polárnosti* o rovnici

$$A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + 2A_{12}u_1u_2 + 2A_{13}u_1u_3 + 2A_{23}u_2u_3 = 0;$$

tato kuželosečka (křivka 2. třídy) jest ovšem podle známých vlastností polárnosti totožna s kuželosečkou hořejší (křivkou 2. stupně).

Základní čára polárnosti, vyjádřená právě dvěma duálními způsoby, definuje polárnost; z rovnice této čáry můžeme ke každému bodu roviny určiti poláru a ke každé přímce roviny pól.

Z rovnic téže kuželosečky $\Sigma a_{hk}x_hx_k = 0$, $\Sigma A_{hk}u_hu_k = 0$ pro $h, k = 1, 2, 3$ a $a_{hk} = a_{kh}$, při čemž A_{hk} je subdeterminant 2. stupně, příslušný v determinantu A k prvku a_{hk}, jest možno pokládati druhou za

[7]) Z rovnice té lze odvoditi všechny vlastnosti rovinné polárnosti. Na př. pět nezávislých koeficientů jejích svědčí, že polárnost (a tedy kuželosečka jako její čára incidenční) jest určena pěti nezávislými dvojicemi bodů konjugovaných. Konstrukcí kuželosečky takto stanovené zabývá se *J. Kloboučeк*, O kuželosečce dané pěti páry konjugovaných bodů, Rozpravy Čes. akad. 17 (1908).

podmínku toho, aby přímka (u_k) o rovnici $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ byla tečnou kuželosečky vyjádřené první rovnicí, nebo duálně první za podmínku toho, aby bod (x_k) o rovnici $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ byl bodem kuželosečky vyjádřené rovnicí druhou.

Všimneme-li si rovnice pro poláru v předcházejícím odstavci uvedené, totiž rovnice

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\,x'_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\,x'_2 + (a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3)\,x'_3 = 0,$$

poznáváme, že souřadnice poláry bodu (x_k) ve tvaru

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3$$

jsou poloviční parciální derivace levé strany rovnice základní kuželosečky v souřadnicích bodových podle x_1, resp. x_2, resp. x_3; je-li speciálně bod (x_k) bodem dané kuželosečky, jest vytčenými souřadnicemi určena tečna kuželosečky v bodě tom.

Duálně z uvedené prve rovnice pólu

$$(A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3)\,u'_1 + (A_{12}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3)\,u'_2 + (A_{13}u_1 + A_{23}u_2 + A_{33}u_3)\,u'_3 = 0$$

vidíme, že souřadnice pólu přímky (u_k), totiž

$$A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3,\quad A_{12}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3,\quad A_{13}u_1 + A_{23}u_2 + A_{33}u_3,$$

jsou polovice parciálních derivací levé strany rovnice základní kuželosečky v souřadnicích přímkových podle u_1, resp. u_2, resp. u_3; je-li spec. přímka (u_k) tečnou kuželosečky dané, udávají souřadnice ty dotyčný bod této přímky na kuželosečce.[8])[9])[10])

---

[8]) Daná *kuželosečka* jest *autopolární* v dvojmocné soustavě transformací polárných, z nichž každá je produktem polárnosti, danou kuželosečkou určené, a harmonické homologie převádějící kuželosečku tu v ni samu, a má základní kuželosečku dané kuželosečky dvojnásob se dotýkající. O polárnostech, jež danou kuželosečku (bodovou nebo přímkovou) převádějí v kuželosečku danou (přímkovou resp. bodovou), a o polárnostech, při nichž daná kuželosečka odpovídá sobě samé, pojednává *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften II, p. 111 a n.; také na př. *G. Tarry*, Démonstration d'un théorème de géométrie, Nouv. Annales math. (3) 3 (1884).

[9]) O trojici kuželoseček, z nichž každé dvě jsou polárné vzhledem k třetí, pojednává *L. Klug*, Über konjugierte Kegelschnitt-tripel, Acta univ. Szeged 2 (1925); také *J. Lemaire*, Système harmonique de trois coniques, Nouv. Annales math. (5) 1 (1923).

[10]) Dvojici polárností téže roviny vyšetřuje na př. *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften II, p. 104 a n. Teorii *svazku polárností* podávají syntheticky *St. Jolles*, Eine einfache synthetische Ableitung der Grundeigenschaften eines Büschels polarer Felder, Archiv Math. Phys. (3) 11 (1906); *M. Zacharias*, Über die allgemeinen Eigenschaften eines Büschels polarer Felder, a Über die verschiedenen Arten der Büschel polarer Felder, Sitzungsberichte Math. Ges. Berlin 8 (1909).

VII. ČÁRY ROVINNÉ.

70. Čáry druhého stupně a druhé třídy. Obraťme se soustavně k analytickému vyšetřování čar v rovině.

a) Analyticky *definujeme*

čáru 2. stupně jako soubor reálných nebo imaginárních bodů, jejichž homogenní souřadnice x_1, x_2, x_3 *vyhovují rovnici kvadratické*

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

čáru 2. třídy jako soubor reálných nebo imaginárních přímek, jejichž homogenní souřadnice u_1, u_2, u_3 *vyhovují rovnici kvadratické*

$$a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2 + \\ + 2a_{12}u_1u_2 + 2a_{13}u_1u_3 + 2a_{23}u_2u_3 = 0.$$

Funkce proměnných x_1, x_2, x_3, resp. u_1, u_2, u_3 zde uvedená jest *ternární forma kvadratická*, kterou stručně píšeme

$$f(x_1, x_2, x_3) \text{ nebo } f(x, x), \text{ resp. } \varphi(u_1, u_2, u_3) \text{ nebo } \varphi(u, u);$$

klademe-li $a_{hk} = a_{kh}$, resp. $\alpha_{hk} = \alpha_{kh}$, může výraz na straně levé vzniknouti jako součet

$$\sum_h \sum_k a_{hk}x_hx_k, \text{ kratčeji } \sum_{h,k} a_{hk}x_hx_k,$$

kde indexy h, k nabývají hodnot 1, 2, 3, a obdobně v případě duálním. Koeficienty a_{hk} jakož i α_{hk} předpokládáme reálné.

Kvadratickou formu $f(x, x)$ lze složiti ze tří forem lineárních

$$f_1(x_k) \equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \equiv a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3,$$
$$f_2(x_k) \equiv a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \equiv a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3,$$
$$f_3(x_k) \equiv a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \equiv a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3$$

ve tvaru

$$f(x, x) \equiv x_1f_1(x_k) + x_2f_2(x_k) + x_3f_3(x_k);$$

tyto lineární funkce $f_1(x_k)$, $f_2(x_k)$ a $f_3(x_k)$, kde pro zjednodušení vynecháme index k (zastupující ovšem 1, 2, 3) nebo i argument x, jsou polovice parciálních derivací dané funkce kvadratické podle x_1, resp. x_2, resp. x_3.

Analogicky je složena bilineární forma proměnných x_1, x_2, x_3 a x'_1, x'_2, x'_3

$$x_1f_1(x') + x_2f_2(x') + x_3f_3(x') \equiv x'_1f_1(x) + x'_2f_2(x) + x'_3f_3(x),$$

jež je souměrná vzhledem k oběma trojicím proměnných; píše se stručně $f(x, x')$ a sluje *polární forma* dané formy kvadratické. Pro $x'_k \equiv x_k$ přechází tato bilineární souměrná forma v původní formu kvadratickou.

Determinant 3. stupně, složený z koeficientů a_{hk} dané formy kvadratické, sluje determinantem nebo diskriminantem formy této a příslušné čáry 2. stupně; označíme jej písmenem A, takže tedy

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Determinant A je souměrný, protože platí $a_{hk} = a_{kh}$.

Lineární transformace

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x'_1 + \beta_1 x'_2 + \gamma_1 x'_3, \\ x_2 &= \alpha_2 x'_1 + \beta_2 x'_2 + \gamma_2 x'_3, \\ x_3 &= \alpha_3 x'_1 + \beta_3 x'_2 + \gamma_3 x'_3, \end{aligned}$$

jejíž determinant $(\alpha_1\beta_2\gamma_3) \neq 0$, převádí danou formu kvadratickou $f(x, x)$ ve formu

$$f(\alpha, \alpha)\, x'^2_1 + f(\beta, \beta)\, x'^2_2 + f(\gamma, \gamma)\, x'^2_3 + 2f(\alpha, \beta)\, x'_1 x'_2 + 2f(\alpha, \gamma)\, x'_1 x'_3 + \\ + 2f(\beta, \gamma)\, x'_2 x'_3;$$

o determinantu A' této formy transformované platí pak

$$A' = (\alpha_1\beta_2\gamma_3)^2 \cdot A,$$

takže je invariantem formy kvadratické.

Obdobné vztahy platí pro duální formu $\varphi(u, u)$ a její diskriminant $\mathcal{A} \equiv (\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33})$.[1])

b) Hledejme společné prvky, jež má čára 2. stupně společné s libovolnou přímkou své roviny a duálně čára 2. třídy s libovolným bodem své roviny.

V prvním případě vezměme vedle čáry kvadratické $f(x, x)$ v úvahu přímku, určenou dvěma (reálnými) body $X(x_k)$ a $X'(x'_k)$; bod této přímky o souřadnicích $x_k + \lambda x'_k$, určený na ní hodnotou konstanty λ,[2]) leží na dané čáře 2. stupně, jestliže jeho souřadnice vyhovují rovnici této čáry, t. j. platí-li

$$f(x_1 + \lambda x'_1,\ x_2 + \lambda x'_2,\ x_3 + \lambda x'_3) = 0$$

čili

$$\lambda^2 f(x', x') + 2\lambda f(x, x') + f(x, x) = 0.$$

---

[1]) Pro analytickou theorii čar kvadratických viz mimo *F. Dingeldeyův* přehled v Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften III. 2 (C1: Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme, 1903) nebo ve francouzské Encyclopédie III. 3 (17: Coniques) a v Pascalově Repertorium der höheren Mathematik, 2. vyd. II. 1 (kap. 11 a 12, 1910) spisy: *G. Salmon*, A treatise on conic sections (1848, 6. vyd. 1879; něm. zpracování ve 2 sv. 9. vyd. 1922, franc. překladu 2. vyd. 1924, ital. 4. vyd. 1885); *A. Clebsch-F. Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie I. (1876); *S. Gundelfinger*, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte (1895); *L. Heffter* a *C. Koehler*, Lehrbuch der analytischen Geometrie I. (1905).

[2]) Na přímce spojující body $P(x_k)$ a $P'(x'_k)$ má každý bod Q souřadnice $x_k + \lambda x'_k$, při čemž λ je souřadnice bodu Q v soustavě jednorozměrné, jejíž základními body jsou $P(\lambda = 0)$ a $P'(\lambda = \infty)$, jednotkovým bodem pak bod $J(x_k + x'_k)$.

Této rovnici vyhovuje při daných (x_k) a (x'_k) dvojí λ; výjimkou každé λ, jsou-li totiž všechny její koeficienty rovny nule.[3]) Odtud a obdobně pro případ duální vyplývá:

Libovolná (lineární) *řada bodová má s čarou 2. stupně společné dva body reálné různé nebo splývající nebo imaginární sdružené, netvoří-li snad součást této čáry.*

Libovolný (lineární) *svazek paprskový má s čarou 2. třídy společné dvě přímky reálné různé nebo splývající nebo imaginární sdružené, netvoří-li snad součást této čáry.*

Obraťme se k případu, že daná čára má s řadou bodovou resp. se svazkem paprskovým společné dva prvky splývající; přímka taková sluje *tečnou křivky 2. stupně*, duálně bod takový sluje *dotyčným bodem křivky 2. třídy*. Přímka XX' jest tedy tečnou křivky 2. stupně, má-li hořejší rovnice pro λ dva kořeny splývající, t. j. platí-li

$$f^2(x, x') - f(x, x) \,.\, f(x', x') = 0.$$

Pokládáme-li zde souřadnice x'_k za konstantní, x_k za proměnné, vyjadřuje rovnice tato, jsouc kvadratická, čáru druhého stupně; protože však x_k jsou souřadnice bodů na těch přímkách procházejících pevným bodem X', jež jsou tečnami čáry dané, jest čára s uvedenou rovnicí tvořena dvojicí tečných přímek, jdoucích bodem X' k čáře $f(x, x) = 0$.

Leží-li speciálně bod X' na dané čáře, takže $f(x', x') = 0$, specialisuje se dvojice uvedených přímek v přímku dvojnásobnou, jež je tečnou čáry dané v bodě X'; její rovnice jest

$$f(x, x') \equiv x_1 f_1(x') + x_2 f_2(x') + x_3 f_3(x') = 0.$$

Jestliže však souřadnice bodu X' vyhovují třem rovnicím

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad f_3(x) = 0,$$

jest tečna v bodě tom neurčitou; takový bod dané čáry 2. stupně $f(x, x) = 0$, existuje-li, sluje jejím *bodem singulárním*.[4]) Duálně přímka, jejíž souřadnice vyhovují rovnicím

$$\varphi_1(u) = 0, \quad \varphi_2(u) = 0, \quad \varphi_3(u) = 0,$$

sluje *singulární přímkou* čáry 2. třídy $\varphi(u, u) = 0$. Shrnujeme (doplňujíce pro případ duální):

Každým bodem (x'_k) *v rovině dané čáry 2. stupně* $f(x, x) = 0$ *jdou dvě tečné přímky její o souborné rovnici*

$$f^2(x, x') - f(x, x) \,.\, f(x', x') = 0.$$

Na každé přímce (u'_k) *v rovině dané čáry 2. třídy* $\varphi(u, u) = 0$ *leží dva dotyčné body její o souborné rovnici*

$$\varphi^2(u, u') - \varphi(u, u) \,.\, \varphi(u', u') = 0.$$

[3]) Tento způsob vyšetřování bodů společných dané čáře a přímce zvolil *F. Joachimsthal* (1846).

[4]) Souřadnice singulárního bodu kuželosečky, je-li určitý, obdrží se řešením uvedených tří rovnic ve tvaru $x_1 : x_2 : x_3 = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3}$.

V každém nesingulárním bodě (x'_k) *čáry té existuje jediná tečna její o rovnici*

$$x_1 f_1(x') + x_2 f_2(x') + x_3 f_3(x') = 0$$

čili o souřadnicích $f_1(x')$, $f_2(x')$, $f_3(x')$. *V singulárním bodě čáry, t. j. v bodě, jehož souřadnice vyhovují rovnicím*

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad f_3(x) = 0,$$

jest tečna čáry neurčitá.

Na každé nesingulární přímce (u'_k) *čáry té existuje jediný dotyčný bod čáry o rovnici*

$$u_1 \varphi_1(u') + u_2 \varphi_2(u') + u_3 \varphi_3(u') = 0$$

čili o souřadnicích $\varphi_1(u')$, $\varphi_2(u')$, $\varphi_3(u')$. *Na singulární přímce čáry, t. j. na přímce, jejíž souřadnice vyhovují rovnicím*

$$\varphi_1(u) = 0, \quad \varphi_2(u) = 0, \quad \varphi_3(u) = 0,$$

jest dotyčný bod čáry neurčitý.

c) Jak se v algebře dokazuje, přechází daná kvadratická forma s reálnými koeficienty (a s libovolným počtem proměnných), ať ji jakoukoliv reálnou lineární transformací s nenulovým determinantem převádíme v algebraický součet čtverců lineárních nezávislých forem s reálnými koeficienty, vždy v týž počet čtverců, z nichž počet kladných a počet záporných je neproměnný.[5])

Majíce tuto stálost počtu čtverců i jejich znamének na zřeteli při reálné lineární transformaci ternární formy kvadratické, shledáváme, že lze rovnici čáry 2. stupně $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ (jejíž koeficienty nejsou všechny rovny nule) převésti jen na několik tvarů; jsou-li ξ_k lineární nezávislé homogenní funkce proměnných souřadnic x_1, x_2, x_3 s reálnými koeficienty, můžeme obdržeti transformované rovnice pouze tvaru

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0 \quad \text{nebo} \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 = 0,$$

dále

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0 \text{ nebo } \xi_1^2 - \xi_2^2 = 0 \text{ nebo konečně } \xi_1^2 = 0.$$

[5]) Věta *Sylvestrova* (1852); lze ji takto dokázati: Buďtež u kvadratické formy (s reálnými koeficienty) o n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dva různé rozklady její v algebraický součet čtverců

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_\mu^2 - \xi'^2_1 - \xi'^2_2 - \ldots - \xi'^2_{\mu'},$$
$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_\nu^2 - \eta'^2_1 - \eta'^2_2 - \ldots - \eta'^2_{\nu'},$$

kde ξ_k a ξ'_k, rovněž η_k a η'_k jsou lineární nezávislé formy těchže proměnných (s reálnými koeficienty); jest ovšem $\mu + \mu' \leqq n$, $\nu + \nu' \leqq n$ (protože jinak by formy ξ_k a ξ'_k resp. η_k a η'_k nebyly nezávislé). Suponujme, že jest $\mu < \nu$: V tom případě nemohou formy $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu$ záviseti na formách $\xi_1, \ldots, \xi_\mu$ a $\eta'_1, \ldots, \eta'_{\nu'}$, protože by z ν rovnic závislost tu vyjadřujících bylo možno μ veličin ξ_k vyloučiti a obdržeti tak relaci mezi η_k a η'_k, čemuž tak není. Můžeme tedy hodnoty proměnných x_k tak zvoliti, aby hodnoty všech $\mu + \nu' < n$ funkcí $\xi_1, \ldots, \xi_\mu$ a $\eta'_1, \ldots, \eta'_{\nu'}$ byly rovny nule a aby hodnota určité funkce η_k byla nenulová; tu bychom však při prvním vyjádření dané funkce kvadratické pomocí ξ_k a ξ'_k obdrželi číslo $\leqq 0$, při druhém pomocí η_k a η'_k číslo > 0. Protože si tento výsledek odporuje, je suposice $\mu < \nu$ nesprávná; rovněž tak suposice $\nu < \mu$. Nezbývá tedy nic jiného než $\mu = \nu$ a obdobně $\mu' = \nu'$. Viz na př. *H. Weber*, Lehrbuch der Algebra I.

Protože jde o lineární transformace dané rovnice čáry 2. stupně a duálně dané rovnice čáry 2. třídy, dostáváme tak všechny možné typy čar těchto, projektivně různé. V prvních dvou případech je čára kvadratická pravá (nezvrhlá), v dalších třech zvrhlá. V případě prvním a třetím neobsahuje kuželosečka žádného bodu reálného, jest imaginární; v případech ostatních jest reálná. Jeví se pak *projektivní roztřídění čar kvadratických* podrobně takové:

Čára 2. stupně může býti pravá imaginární nebo pravá reálná; nebo se může rozpadati ve dvě různé přímky (řady bodů) *imaginární sdružené nebo reálné; nebo se konečně může rozpadati v přímku* (řadu bodů) *dvojnásobnou* (reálnou).

Čára 2. třídy může býti pravá imaginární nebo pravá reálná; nebo se může rozpadati ve dva různé body (svazky přímek) *imaginární sdružené nebo reálné; nebo se může rozpadati v bod* (svazek přímek) *dvojnásobný* (reálný).

d) Naskytuje se otázka, jak lze poznati, kterého z uvedených možných typů jest určitá čára kvadratická, daná rovnicí

$$f(x, x) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

Abychom nalezli příslušná kriteria, týkající se koeficientů dané rovnice, vezměme v úvahu lineární reálnou transformaci souřadnic

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1\xi_1 + \beta_1\xi_2 + \gamma_1\xi_3, \\ x_2 &= \alpha_2\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \gamma_2\xi_3, \\ x_3 &= \alpha_3\xi_1 + \beta_3\xi_2 + \gamma_3\xi_3 \end{aligned}$$

s determinantem $(\alpha_1\beta_2\gamma_3) \neq 0$; touto transformací ať se rovnice dané čáry 2. stupně převádí na tvar

$$\lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \lambda_3\xi_3^2 = 0.$$

Protože uvedená transformace mění danou rovnici na rovnici

$$f(\alpha, \alpha)\,\xi_1^2 + f(\beta, \beta)\,\xi_2^2 + f(\gamma, \gamma)\,\xi_3^2 + 2f(\alpha, \beta)\,\xi_1\xi_2 + 2f(\alpha, \gamma)\,\xi_1\xi_3 + 2f(\beta, \gamma)\xi_2\xi_3 = 0,$$

musí platit

$$\begin{aligned} f(\alpha, \alpha) &= \lambda_1, \quad f(\beta, \beta) = \lambda_2, \quad f(\gamma, \gamma) = \lambda_3, \\ f(\alpha, \beta) &= 0, \quad f(\alpha, \gamma) = 0, \quad f(\beta, \gamma) = 0. \end{aligned}$$

Těmito rovnicemi není ovšem uvažovaná transformace souřadnic daleko určena; s výhodou zvolíme substituci, jež součet $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ převádí v součet $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ (substituce orthogonální), takže musí dále platit

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1, & \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 &= 0, \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1, & \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 &= 0, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1, & \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= 0. \end{aligned}$$

Z těchto šesti rovnic pak plynou další dvě obdobné skupiny po třech relacích

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1, & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1, & \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 &= 0, \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1, & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 &= 0.^{6}) \end{aligned}$$

Devět koeficientů $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ a tři konstanty λ_k lze vskutku tak zvoliti, aby splňovaly dvanáct uvedených podmínek, aby tedy transformace souřadnic byla orthogonální a aby vedla k rovnici $\lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \lambda_3\xi_3^2 = 0$. Jestliže totiž znásobíme každou ze tří rovnic (ty z hořejších šesti, jež obsahují α_k)

$$\Sigma a_k f_k(a) = \lambda_1, \quad \Sigma\beta_k f_k(a) = 0, \quad \Sigma\gamma_k f_k(a) = 0$$

faktorem α_1, resp. β_1 a γ_1, potom faktory α_2, β_2, γ_2, konečně faktory α_3, β_3, γ_3 a pokaždé je sečteme, obdržíme se zřetelem k relacím orthogonální substituce

$$f_1(a) = \lambda_1\alpha_1, \quad f_2(a) = \lambda_1\alpha_2, \quad f_3(a) = \lambda_1\alpha_3;$$

obdobně obdržíme další dvě trojice rovnic

$$\begin{aligned} f_1(\beta) &= \lambda_2\beta_1, & f_2(\beta) &= \lambda_2\beta_2, & f_3(\beta) &= \lambda_2\beta_3, \\ f_1(\gamma) &= \lambda_3\gamma_1, & f_2(\gamma) &= \lambda_3\gamma_2, & f_3(\gamma) &= \lambda_3\gamma_3. \end{aligned}$$

Těmto devíti rovnicím musí tedy koeficienty $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ a konstanty λ_k vyhověti; obráceně vyhovují-li veličiny ty těmto devíti rovnicím a je-li transformace souřadnic substitucí orthogonální, je splněno také šest rovnic vyjadřujících, že transformace souřadnic vede k hořejšímu jednoduchému tvaru rovnice pro čáru kvadratickou.

Poměr koeficientů α_k jest určiti z prvních tří homogenních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 &= \lambda_1\alpha_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 &= \lambda_1\alpha_2, \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 &= \lambda_1\alpha_3; \end{aligned}$$

aby tyto rovnice poskytovaly řešení $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$, jehož členy nejsou všechny rovny nule, musí býti nule roven determinant, jehož první řádek je $a_{11} - \lambda_1, a_{12}, a_{13}$ a jehož další řádky jsou obdobné. Týž determinant plyne z druhé a třetí trojice rovnic pro β_k resp. γ_k, při čemž místo λ_1 nastoupí λ_2 resp. λ_3. Musí tudíž konstanty λ_k vyhověti rovnici

$$A(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

čili rovnici kubické

$$\lambda^3 - \lambda^2\Sigma a_{hh} + \lambda\Sigma A_{hh} - A = 0.$$

Lze ukázati, že kořeny λ_1, λ_2, λ_3 této rovnice (t. zv. charakteristické

---

[6]) Znásobíme-li totiž determinant $(\alpha_1\beta_2\gamma_3)$ jím samým (kombinujíce sloupce se sloupci), nalezneme vzhledem k hořejším šesti rovnicím $(\alpha_1\beta_2\gamma_3) = \pm 1$. Řešíce pak rovnice $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$, $\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 = 0$ jako soustavu lineárních rovnic pro $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, obdržíme $\alpha_1 = \pm(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)$, $\alpha_2 = \pm(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3)$, $\alpha_3 = \pm(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)$; obdobně plynou analogické relace pro β_k a γ_k. Spojením těchto vztahů s hořejšími rovnicemi dostaneme rovnice dolejší.

rovnice formy kvadratické $f(x, x)$) jsou vždy reálné a že dosazeny do hořejších rovnic pro α_k resp. β_k a γ_k dovolují vždy určiti koeficienty ty tak, aby substituce jimi stanovená byla orthogonální.[7])

[7]) Kořeny rovnice charakteristické jsou všechny reálné. Neboť kdyby bylo $\lambda_1 = p + qi$, bylo by (třebas) $\lambda_2 = p - qi$, a hodnoty součinitelů α_k byly by imaginární sdružené k hodnotám β_k, tedy $\alpha_k = \delta_k + \varepsilon_k i$, $\beta_k = \delta_k - \varepsilon_k i$. Protože pak dosazením jednak relací $f_k(\alpha) = \lambda_1 \alpha_k$, jednak relací $f_k(\beta) = \lambda_2 \beta_k$ do trojčlenného výrazu pro $f(\alpha, \beta)$ plyne $\lambda_1 (a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3) = \lambda_2 (a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3)$ čili $(\lambda_1 - \lambda_2) \Sigma (\delta_k^2 + \varepsilon_k^2) = 0$, bylo by při imaginárním λ_1 čili při $q \neq 0$, tedy při $\lambda_1 - \lambda_2 = 2qi \neq 0$ nutně $\delta_k = 0$, $\varepsilon_k = 0$, což vede k nesprávnému důsledku $\alpha_k = 0$, $\beta_k = 0$ (pro $k = 1, 2, 3$).

Má-li rovnice $\lambda^3 - \lambda^2 \Sigma a_{hh} + \lambda \Sigma A_{hh} - A = 0$ kořen λ_1 jednoduchý nebo dvojnásobný nebo trojnásobný, redukují se rovnice

$$(a_{11} - \lambda_1)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 = 0,$$
$$a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda_1)\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 = 0,$$
$$a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + (a_{33} - \lambda_1)\alpha_3 = 0$$

na dvě, resp. na jednu, resp. mají všechny koeficienty nulové. Jestliže totiž do determinantu $A(\lambda)$ dosadíme $\lambda = \lambda_k + \mu$, obdržíme místo rovnice charakteristické rovnici pro μ

$$\mu^3 - \mu^2 \Sigma (a_{hh} - \lambda_k) + \mu \Sigma A_{hh}(\lambda_k) - A(\lambda_k) = 0;$$

počet nulových kořenů μ této rovnice shoduje se se stupněm násobnosti kořene λ_k rovnice $A(\lambda) = 0$. Všimněme si dále, že z relací platných pro souměrný determinant 3. stupně $A \equiv (a_{11}a_{22}a_{33})$, totiž z relací $A_{hh} = a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2$, $Aa_{hh} = A_{ii}A_{jj} - A_{ij}^2$, vyplývá: je-li $A = 0$ a $\Sigma A_{hh} = 0$, jsou předně všechny $A_{hh} = 0$, protože mají stejné znaménko, dále i všechny $A_{ij} = 0$; je-li $A = 0$, $\Sigma A_{hh} = 0$ a $\Sigma a_{hh} = 0$, jsou podle předešlého všechny $A_{hh} = 0$, dále pak všechny $a_{hh} = 0$, majíce stejné znaménko, konečně všechny $a_{ij} = 0$. Na základě obého můžeme tedy souditi: je-li λ_k jednoduchým kořenem rovnice charakteristické, jest $\mu = 0$ jednoduchým kořenem příslušné rovnice pro μ, proto pak je $A(\lambda_k) = 0$ (ale $\Sigma A_{hh}(\lambda_k) \neq 0$), determinant $A(\lambda_k)$ je roven nule, aniž by všechny jeho minory 2. stupně byly nule rovny, hořejší tři rovnice redukují se pouze na dvě; je-li λ_k dvojnásobným kořenem, je $\mu = 0$ rovněž dvojnásobným kořenem, pročež $A(\lambda_k) = 0$, $\Sigma A_{hh}(\lambda_k) = 0$ (ale $\Sigma(a_{hh} - \lambda_k) \neq 0$), determinant $A(\lambda_k)$ je roven nule se všemi svými minory, aniž by všechny jeho prvky byly nule rovny, hořejší tři rovnice redukují se na jedinou; konečně při trojnásobném kořenu λ_k mají uvažované tři rovnice všechny součinitele rovny nule.

Odtud poznáváme, že lze vždy určiti koeficienty orthogonální substituce, převádějící danou formu kvadratickou na $\Sigma \lambda_k \xi_k^2$. Neboť jsou-li tři kořeny λ_k různé, nalezneme různé poměry $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$, $\beta_1 : \beta_2 : \beta_3$, $\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3$ a koeficienty samy zvolíme ve shodě s první trojicí relací platných o orthogonální substituci; jsou pak splněny i ostatní tři relace orthogonální substituce, protože dosadíce $f_k(\alpha) = \lambda_1 \alpha_k$ a $f_k(\beta) = \lambda_2 \beta_k$ do výrazu $f(\alpha, \beta)$, obdržíme $(\lambda_2 - \lambda_1)(a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3) = 0$, tedy $a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 = 0$, a obdobně další dvě relace. Jsou-li dva z kořenů λ_k sobě rovny ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$), obdržíme pro α_k a β_k tutéž jedinou soustavu rovnic; se zřetelem k relacím

Z charakteristické rovnice poznáváme: je-li $A \neq 0$, jsou všechny kořeny λ_k nenulové; je-li $A = 0$, ale $\Sigma A_{hh} \neq 0$, jest jeden kořen roven nule, dva nenulové; je-li $A = 0$ a $\Sigma A_{hh} = 0$, ale $\Sigma a_{hh} \neq 0$, jsou dva kořeny rovny nule, jeden nenulový. Podle algebraické věty pak, že rovnice s kořeny pouze reálnými

$$\lambda^3 - \lambda^2 \Sigma a_{hh} + \lambda \Sigma A_{hh} - A = 0$$

má tolik kořenů kladných nebo záporných, kolik shod resp. změn se vyskytuje ve znaménících (vždy dvou sousedních členů) u řady

$$A,\ \Sigma A_{hh},\ \Sigma a_{hh},\ 1,$$

určíme, při jakých znaménících výrazů A, ΣA_{hh} a Σa_{hh} mají kořeny λ_k znaménka stejná nebo různá.

Uvažovaná transformace soustavy souřadnic převádí rovnici $f(x, x) = 0$ na rovnici $\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2 = 0$; vhodnou volbou jednotkového bodu lze nadto docíliti, že kladný nebo záporný člen redukované rovnice $\lambda_k \xi_k^2$ přejde v $+ \xi_k^2$ resp. v $- \xi_k^2$.

Výsledky celé úvahy můžeme se zřetelem k odstavci předcházejícímu (také pro případ duální) takto shrnouti:

Čára 2. stupně, daná rovnicí $f(x, x) = 0$, *jest pravá, je-li determinant* $A \neq 0$, *a to imaginární, mají-li členové řady* A, ΣA_{hh}, Σa_{hh} *znaménka* $+++$ *nebo* $-+-$, *reálná v ostatních případech znamének v uvedené řadě; jest zvrhlá ve dvě různé přímky, je-li* $A = 0$, *ale* $\Sigma A_{hh} \neq 0$,[8]) *a to ve dvě přímky sdruženě imaginární, je-li* ΣA_{hh} *kladný, ve dvě přímky reálné, je-li* ΣA_{hh} *záporný; jest konečně zvrhlá v přímku dvojnásobnou, platí-li* $A = 0$, $\Sigma A_{hh} = 0$, *ale* $\Sigma a_{hh} \neq 0$.[9])

Čára 2. třídy, daná rovnicí $\varphi(u, u) = 0$, *jest pravá, je-li determinant z koeficientů její rovnice* $A \neq 0$, *a to imaginární, jsou-li členové řady* A, ΣA_{hh}, Σa_{hh} *znamének* $+++$ *nebo* $-+-$, *reálná v případech ostatních; jest zvrhlá ve dva body různé, je-li* $A = 0$, $\Sigma A_{hh} \neq 0$, *a to ve dva body sdruženě imaginární, je-li* ΣA_{hh} *kladný, ve dva body reálné, je-li* ΣA_{hh} *záporný; jest konečně zvrhlá v dvojnásobný bod, platí-li* $A = 0$, $\Sigma A_{hh} = 0$, *ale* $\Sigma a_{hh} \neq 0$.[10])

---

platným o substituci orthogonální máme tedy pro a_k dvě rovnice, pro β_k pak tři rovnice (z nich tam i zde po jedné obsahující a_{hk}); o součinitelích γ_k a jejich vztahu k a_k i β_k platí totéž co prve. Konečně je-li $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, neplatí pro a_k, β_k, γ_k žádná rovnice obsahující a_{hk}, a jest voliti toliko podle relací, jimž musí vyhovovati substituce orthogonální.

[8]) Ze vztahů $A a_{hh} = A_{ii} A_{jj} - A_{ij}^2$ (kde $h, i, j = 1, 2, 3$) plyne při $A = 0$, že všechny nenulové A_{hh} mají stejné znaménko; lze tedy místo $\Sigma A_{hh} \neq 0$ předpokládati, že nejsou nule rovny všechny minory A_{hh}.

[9]) Obdobně jako v případě předcházejícím lze místo $\Sigma A_{hh} = 0$ a $\Sigma a_{hh} \neq 0$ předpokládati, že všechny minory A_{hh} jsou rovny nule a všechny koeficienty a_{hh} nejsou rovny nule.

e) Pravá čára 2. stupně tvoří svými tečnami pravou čáru 2. třídy, a její body jsou dotyčnými body přímek této čáry; duálně (a obráceně) *tvoří pravá čára 2. třídy dotyčnými body svých přímek pravou čáru 2. stupně, a její přímky jsou tečnami této čáry.*

Vyjděme od křivky, dané rovnicí kvadratickou

$$f(x, x) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

čili rovnicí

$$x_1f_1(x) + x_2f_2(x) + x_3f_3(x) = 0,$$

o jejíž koeficientech platí $A \equiv (a_{11}a_{22}a_{33}) \neq 0$; víme, že má v bodě svém (x_1, x_2, x_3) tečnu o souřadnicích $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$. Označíme-li tyto souřadnice tečny u_1, u_2, u_3, kladouce $f_k(x) \equiv u_k$, t. j.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= u_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= u_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= u_3, \end{aligned}$$

můžeme odtud (protože jsme předpokládali $A \neq 0$) vypočísti souřadnice dotyčného bodu jejího

$$\begin{aligned} Ax_1 &= A_{11}u_1 + A_{21}u_2 + A_{31}u_3, \\ Ax_2 &= A_{12}u_1 + A_{22}u_2 + A_{32}u_3, \\ Ax_3 &= A_{13}u_1 + A_{23}u_2 + A_{33}u_3, \end{aligned}$$

kde každý koeficient A_{hk} jest minor determinantu A, příslušný k prvku jeho a_{hk}. Trojčlenné výrazy zde se vyskytující lze pokládati za polovice parciálních derivací kvadratické formy

$$F(u, u) \equiv A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + 2A_{12}u_1u_2 + 2A_{13}u_1u_3 + 2A_{23}u_2u_3,$$

jež tedy [obdobně jako u formy $f(x, x)$] píšeme $F_k(u)$, takže $Ax_k = F_k(u)$.

Rovnici dané křivky 2. stupně

$$f(x, x) \equiv \Sigma x_k f_k(x) = 0$$

lze podle toho psáti

$$\sum \frac{1}{A} F_k(u) \,.\, u_k \equiv \frac{1}{A} F(u, u) = 0;$$

jsou tudíž tečny křivky $f(x, x) = 0$ přímkami křivky $F(u, u) = 0$.

Dotyčný bod přímky (u_1, u_2, u_3) jako prvku čáry $F(u, u) = 0$ má však souřadnice $F_1(u)$, $F_2(u)$, $F_3(u)$; jest proto podle druhé trojice rovnic hořejších, inversních k rovnicím prve zavedeným, totožný s bodem (x_1, x_2, x_3): tečna v bodě (x_k) křivky $f(x, x) = 0$ jest totožna právě s tou přímkou křivky $F(u, u) = 0$, jejímž dotyčným bodem je bod (x_k).

Duálně dospějeme od rovnice křivky 2. třídy

$$\varphi(u, u) \equiv a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2 + 2a_{12}u_1u_2 + 2a_{13}u_1u_3 + 2a_{23}u_2u_3 = 0$$

---

[10]) Mimo uvedené knihy viz *C. Koehler*, Über die Klassifikation der Kurven und Flächen zweiten Grades, Archiv Math. Phys. (3) 3 (1902); *L. Heffter*, Zur Klassification der quadratischen Formen, der Kurven und Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse, Journal r. a. Math. 126 (1903).

k rovnici totožné křivky 2. stupně

$$\Phi(x, x) \equiv A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + A_{33}x_3^2 + 2A_{12}x_1x_2 + 2A_{13}x_1x_3 + 2A_{23}x_2x_3 = 0,$$

jejíž koeficienty jsou minory, příslušné k prvkům a_{hk} v determinantu $A \equiv (a_{11}a_{22}a_{33})$.

Vyjadřují tudíž rovnice

$$f(x, x) = 0 \text{ a } F(u, u) = 0 \text{ při } A \neq 0,$$

duálně rovnice

$$\varphi(u, u) = 0 \text{ a } \Phi(x, x) = 0 \text{ při } A \neq 0$$

tutéž křivku 2. stupně a 2. třídy čili pravou čáru kvadratickou (pravou kuželosečku) jako útvar bodový nebo přímkový resp. obráceně.[11])[12])[13])

---

[11]) Od rovnice křivky 2. stupně

$$f(x, x) = 0$$

můžeme početně přejíti ke křivce tvořené jejími tečnami, majíce na zřeteli, že tečny jdoucí bodem (x'_k) k čáře s uvedenou rovnicí mají soubornou rovnici

$$f(x, x) \,.\, f(x', x') - f^2(x, x') = 0.$$

Znásobíme-li trojčleny, jimž funkce zde se vyskytující jsou rovny, totiž $\Sigma x_k f_k(x)$, $\Sigma x'_k f_k(x')$, $\Sigma x_k f_k(x')$ a $\Sigma x'_k f_k(x)$, třebas podle multiplikačního pravidla determinantního (u determinantu 2. stupně, jímž lze levou stranu rovnice psáti), a klademe-li $x_2x'_3 - x_3x'_2 = u_1$, $x_3x'_1 - x_1x'_3 = u_2$, $x_1x'_2 - x_2x'_1 = u_3$ [jako souřadnice přímky spojující body (x_k) a (x'_k)], obdržíme pro uvedenou soustavu tečen rovnici

$$\Sigma A_{hk}u_hu_k \equiv F(u, u) = 0.$$

Přepočítáme-li obdobně soubornou rovnici pro dotyčné body přímek u čáry 2. třídy $F(u, u) = 0$, ležící na přímce (u'_k), totiž

$$F(u, u) \,.\, F(u', u') - F^2(u, u') = 0,$$

zavedením souřadnic $x_1 = u_2u'_3 - u_3u'_2$, $x_2 = u_3u'_1 - u_1u'_3$, $x_3 = u_1u'_2 - u_2u'_1$, obdržíme, protože minor příslušný k prvku A_{hk} v determinantu $(A_{11}A_{22}A_{33})$ jest roven Aa_{hk}, rovnici

$$A\Sigma a_{hk}x_hx_k \equiv Af(x, x) = 0.$$

Tato jest po zkrácení faktorem A, jenž je různý od nuly, totožna s rovnicí původní. Obdobná je úvaha a její výsledek v případě duálním.

[12]) Forma $F(u, u)$ bývá nazývána *adjungovanou* k formě $f(x, x)$; obdobně v případě duálním.

Forma $F(u, u)$ se formálně obdrží z determinantu formy $f(x, x)$ připojením řádku a sloupce prvků $u_1, u_2, u_3, 0$ ve tvaru

$$F(u, u) \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \end{vmatrix}.$$

Rovnice $F(u, u) = 0$ sluje často *přímkovou* nebo tečnovou rovnicí kuželosečky $f(x, x) = 0$ (jest rovnicí kuželosečky přímkové, kdežto $f(x, x) = 0$ jest rovnicí kuželosečky bodové).

f) Pro tečny vedené z bodu $X'(x'_k)$ k čáře 2. stupně $f(x, x) = 0$ nalezli jsme rovnici

$$f(x', x') \,.\, f(x, x) - f^2(x', x) = 0;$$

je to opět čára 2. stupně, rozpadající se však podle geometrického významu svého ve dvojici přímek; vyšetřme (podle hořejšího kriteria) analyticky jakost této čáry kvadratické.

Uvedenou formu kvadratickou uspořádejme podle proměnných x_1, x_2, x_3; obdržíme tu

$$\Sigma[a_{hk} f(x', x') - f_h(x') \,.\, f_k(x')]\, x_h x_k.$$

Determinant Δ této formy s prvky binomickými lze rozložiti v součet osmi determinantů s prvky jednočlennými: jeden obsahuje první členy uvedených binomů a má hodnotu $Af^3(x', x')$; tři obsahují vždy první členy jednoho sloupce a druhé členy ostatních dvou sloupců a mají hodnotu 0; tři obsahují vždy první členy dvou sloupců a druhé členy sloupce třetího a mají hodnotu $-f_k(x')\, f^2(x', x')\, Ax'_k$; konečně osmý obsahuje druhé členy všech tří sloupců a má hodnotu 0. Jest tedy determinant uvažované rovnice kvadratické

$$\Delta \equiv Af^3(x', x') - Af^2(x', x')\,[x'_1 f_1(x') + x'_2 f_2(x') + x'_3 f_3(x')].$$

Protože je vždy (identicky) roven nule, rozpadá se čára ta vždy ve dvě přímky.

Určeme nyní minory uvažovaného determinantu, příslušné k prvkům jeho úhlopříčky; minor Δ_{11} jest

$$\begin{vmatrix} a_{22}f - f_2^2 & a_{23}f - f_2 f_3 \\ a_{32}f - f_3 f_2 & a_{33}f - f_3^2 \end{vmatrix},$$

kde u funkcí tam se vyskytujících vynechány argumenty x'_k. Lze jej rozložiti ve čtyři determinanty, z nichž první má hodnotu $A_{11}f^2$, poslední 0, střední dva $-ff_3(a_{22}f_3 - a_{32}f_2) - ff_2(a_{33}f_2 - a_{23}f_3)$; připojíme-li k těmto dvěma člen na prvním místě uvedený $A_{11}f^2 = A_{11}f\,(x'_1 f_1 + x'_2 f_2 + x'_3 f_3)$, dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= f[f_1 A_{11} x'_1 + f_2 (A_{11} x'_2 - a_{33} f_2 + a_{23} f_3) + f_3 (A_{11} x'_3 + a_{32} f_2 - a_{22} f_3)] \\ &= f[f_1 A_{11} x'_1 + f_2 A_{12} x'_1 + f_3 A_{13} x'_1] = f x'_1 (A_{11} f_1 + A_{12} f_2 + A_{13} f_3) = \\ &= Af(x', x') \,.\, x'^2_1. \end{aligned}$$

Obecně pak jest

$$\Delta_{hh} = Af(x', x') \,.\, x'^2_h.$$

Odtud poznáváme: Protože souřadnice bodu X' nejsou všechny rovny nule, jest při $A \neq 0$ a pro $f(x', x') \neq 0$ aspoň některý z minorů Δ_{hh} různý od nuly; platí: *Dvě tečny vedené k pravé čáře 2. stupně* $f(x, x) = 0$ *z bodu* X', *ležícího mimo ni, jsou různé, a to reálné, je-li* $Af(x', x') < 0$,

[13]) Jest geometricky evidentní, že čára 2. stupně, zvrhlá ve dvě různé přímky, je jako útvar přímkový totožna s čarou 2. třídy, zvrhlou v bod dvojnásobný (průsečík oněch dvou přímek); duálně čára 2. třídy, rozpadající se ve dva různé body, jest jako útvar bodový totožna s čarou 2. stupně, rozpadající se v přímku dvojnásobnou (spojnici oněch dvou bodů).

imaginární pro $Af(x', x') > 0$; pouze pro bod X' ležící na čáře samé tvoří přímku dvojnásobnou.

Nahradíme-li funkci $f(x, x)$ podle odstavce předcházejícího funkcí $\frac{1}{A} F(u, u)$, dostaneme větu: *Dva body, v nichž pravou čáru 2. stupně* $f(x, x) = 0$ *protíná přímka* (u'), *jí se nedotýkající, jsou reálné nebo imaginární podle toho, je-li* $F(u', u') < 0$ *resp.* > 0.

Obdobné dvě věty platí pro pravou čáru 2. třídy $\varphi(u, u) = 0$.

Bod (reálný), z něhož lze k dané čáře 2. stupně vésti dvě různé tečny reálné nebo imaginární, sluje *vnějším* resp. *vnitřním bodem* roviny vzhledem k čáře té.

Přímka (reálná), která má s danou čarou 2. třídy dva společné body různé reálné nebo imaginární, sluje *sečnou* resp. *mimoběžnou* vzhledem k ní.

Podle hořejšího tedy platí:

Bod (x') *jest vnitřním nebo vnějším bodem rovinného pole vzhledem k pravé čáře* $f(x, x) = 0$ *podle toho, je-li* $Af(x', x') > 0$ *resp.* < 0.

Přímka (u') *jest mimoběžnou nebo sečnou přímkou rovinného pole vzhledem k pravé čáře* $\varphi(u, u) = 0$ *podle toho, je-li* $A\varphi(u', u') > 0$ *resp.* < 0.[14])

[14]) Bod vnitřní a vnější vzhledem k čáře 2. stupně nazývá se také *eliptickým* resp. *hyperbolickým*; obdobně přímka mimoběžná a sečná vzhledem k čáře 2. třídy jmenuje se též *eliptickou* resp. *hyperbolickou* (obé z důvodu dále uvedeného).

Že *v rovině reálné pravé čáry kvadratické jest obor bodů eliptických od oboru bodů hyperbolických oddělen čarou danou*, vidíme z rovnice, jež určuje průsečíky spojnice dvou bodů s čarou 2. stupně, totiž z rovnice $\lambda^2 f(x', x') + 2\lambda f(x', x) + f(x, x) = 0$; je-li z bodů (x_k) a (x'_k) jeden eliptický a druhý hyperbolický, mají podle hořejšího kriteria $f(x, x)$ a $f(x', x')$ různá znaménka, uvedená rovnice má součin kořenů $\lambda_1 . \lambda_2$ záporný, tedy kořeny různých znamének, příslušné body a body (x_k), (x'_k) se tedy oddělují.

V rovině reálné čáry 2. stupně procházejí eliptickým bodem X' jenom přímky, jež čáru protínají v reálných bodech; hyperbolickým bodem X' jdou však jednak přímky protínající čáru v bodech reálných, jednak přímky mající s ní společné body imaginární. Neboť každá reálná přímka protíná reálné tečny reálné čáry 2. stupně a musí proto obsahovati (také) body hyperbolické. Spojnice hyperbolického bodu X' s bodem eliptickým X protíná čáru v bodech reálných; spojnice hyperbolického bodu X' s hyperbolickým bodem X přímky $f(x', x) = 0$ protíná však čáru imaginárně, protože z rovnice prve odvozené $f(x', x') f(x, x) - f^2(x', x) = F(u, u)$, kde (u_k) je spojnice $X'X$, vyplývá $A^2 F(u, u) = Af(x', x') . Af(x, x)$ a tedy $F(u, u) > 0$. Může tedy reálná přímka v rovině reálné pravé čáry kvadratické obsahovati výhradně body vnější, nikoli však jenom vnitřní body vzhledem k čáře té.

U imaginární čáry 2. stupně (2. třídy) existují jen eliptické body (přímky) její roviny, jak poznáváme z uvedeného kriteria na základě redukované rovnice takové čáry.

g) Obecná rovnice čáry kvadratické obsahuje šest členů a tedy šest koeficientů a_{hk} resp. α_{hk}; dělíme-li ji však jedním ze součinitelů těch (jenž není roven nule), vidíme, že soustava všech těchto čar v rovině závisí na pěti parametrech (a to tak, že různým skupinám hodnot uvedených pěti parametrů příslušejí různé čáry kvadratické). Tvoří tedy všechny kvadratické čáry v rovině (v počtu ∞^5) *systém pětimocný*. Každá geometrická podmínka, kterou má kvadratická čára splniti, převádí se algebraicky v rovnici, jíž jest uvedených pět parametrů vázáno; z pěti podmínek vychází tedy pět rovnic pro tyto parametry, takže obecně existuje jedna nebo několik čar kvadratických, jež splňují daných pět podmínek.

Jestliže je zejména dáno pět bodů (nebo duálně pět přímek) v rovině, kterými má čára kvadratická procházeti (resp. jichž se má dotýkati), vložíme jejich souřadnice do obecné rovnice čáry 2. stupně (resp. 2. třídy) a dostáváme tak pět lineárních homogenních rovnic pro koeficienty a_{hk} (resp. α_{hk}). Lineární tento systém pěti rovnic poskytuje (jsou-li rovnice ty nezávislé) vždy a jenom jednu soustavu pěti poměrů neznámých šesti koeficientů. *Pěti body v rovině danými prochází tedy obecně jedna a jediná čára 2. stupně; duálně pěti přímek v rovině daných dotýká se obecně jedna a jediná čára 2. třídy.*[15])

Rovnice čáry 2. stupně, určené pěti body $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3), \ldots,$ $E(e_1, e_2, e_3)$, jest pak ve tvaru determinantním (po eliminaci součinitelů a_{hk})

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & a_2a_3 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_1b_2 & b_1b_3 & b_2b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 & e_1e_2 & e_1e_3 & e_2e_3 \end{vmatrix} = 0;$$

jest vskutku 2. stupně v souřadnicích x_k a souřadnice daných pěti bodů jí vyhovují.

[15]) Pět uvedených rovnic poskytuje více než jedno (a tedy nekonečně mnoho) řešení, je-li jedna z nich důsledkem ostatních čtyř, t. j. jestliže všechny kuželosečky, jdoucí čtyřmi body, procházejí také bodem pátým. Aby to bylo možno, musí především aspoň tři z daných čtyř bodů A, B, C, D ležeti v přímce; neboť není-li tomu tak, protínají se dvě zvrhlé kuželosečky body ty obsahující, na př. kuželosečky tvořené dvojicemi přímek AB a CD a přímek AC a BD, v uvedených čtyřech bodech, nejdou však bodem pátým E. Předpokládejme tedy, že na př. body A, B, C leží v přímce a bod D mimo ni; v tom případě přímka AB (jdoucí také bodem C) a druhá přímka, jdoucí bodem D, nikoli však bodem E, tvoří dohromady kuželosečku, jež jde sice body A, B, C, D, ne však bodem E — leda by bod E ležel na přímce AB. Musí tedy čtyři dané body ležeti na téže přímce; v tom případě vskutku přímka obsahující čtyři dané body a každá přímka jdoucí pátým bodem daným tvoří (zvrhlou) kuželosečku, jdoucí pěti danými body. *Pěti danými body není* tudíž *určena jediná kuželosečka, jestliže aspoň čtyři z nich leží v přímce.* A sice leží-li jenom čtyři body z daných pěti v přímce, jest čar kvadratických jimi procházejících ∞^1 (přímka čtyřmi body a každá přímka bodem pátým); leží-li všech pět bodů v přímce, jest čar těch ∞^2 (přímka pěti body a každá přímka v rovině).

Šest bodů v rovině zvolených neleží obecně na čáře 2. stupně, t. j. čára kvadratická, určená pěti z těchto bodů, neprochází bodem šestým. Aby šest daných bodů $A(a_k), \ldots, F(f_k)$ leželo na čáře 2. stupně, musí současně platit šest rovnic $a_{11}x_1^2 + \ldots = 0$, kamž za x_1, x_2, x_3 dosazeny byly souřadnice jednotlivých bodů daných; musí tedy býti nule roven determinant šestého stupně, jehož první řádek jest $a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3$ a poslední $f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_1f_2, f_1f_3, f_2f_3$, tedy determinant $(a_1^2, b_2^2, c_3^2, d_1d_2, e_1e_3, f_2f_3) = 0$. Analytická podmínka tato jest ovšem nutná i dostačující.[16]) Podmínku toho, aby všech šest bodů daných leželo na čáře 2. stupně, vyslovuje geometricky *věta Pascalova*: Šest bodů leží na kuželosečce tehdy a pouze tehdy, jestliže průsečíky tří dvojic protějších stran jednoduchého šestiúhelníku, jehož vrcholy jsou v bodech těch, leží na přímce.

Abychom tuto velmi důležitou větu dokázali analyticky, položme tři vrcholy základního trojúhelníku soustavy souřadnic $O_1(1, 0, 0)$, $O_2(0, 1, 0)$, $O_3(0, 0, 1)$ a bod jednotkový $T(1, 1, 1)$ do čtyř z bodů daných, pátý a šestý bod pak označme $A(a_1, a_2, a_3)$ a $B(b_1, b_2, b_3)$. Podmínka, aby šest bodů s danými souřadnicemi leželo na čáře 2. stupně, jest zde vyjádřena nulovou hodnotou determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & a_2a_3 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_1b_2 & b_1b_3 & b_2b_3 \end{vmatrix};$$

tento determinant se redukuje na determinant stupně 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1a_2 & a_1a_3 & a_2a_3 \\ b_1b_2 & b_1b_3 & b_2b_3 \end{vmatrix}.$$

Vypočtěme dále souřadnice jednotlivých stran šestiúhelníku $O_1O_2O_3TAB$; obdržíme $O_1O_2(0, 0, 1)$, $O_2O_3(1, 0, 0)$, $O_3T(-1, 1, 0)$, TA $(a_3 - a_2, a_1 - a_3, a_2 - a_1)$, $AB(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$,

[16]) Poměrně jednoduchý jest jiný tvar této podmínky

$$(a_1b_2e_3)(c_1d_2e_3)(a_1c_2f_3)(b_1d_2f_3) - (a_1b_2f_3)(c_1d_2f_3)(a_1c_2e_3)(b_1d_2e_3) = 0;$$

dostaneme jej eliminací parametru ze dvou rovnic vyjadřujících, že kuželosečka svazku, určeného body A, B, C, D (kuželosečkami, jež sestávají z přímek AB a CD, resp. AC a BD), prochází bodem E i bodem F. Tato rovnice jest ovšem také rovnicí kuželosečky, určené pěti body A, B, C, D, E, nahradíme-li v ní souřadnice bodu $F(f_k)$ souřadnicemi x_k bodu proměnného lze ji psáti na 15 způsobů. Viz také *F. Caspary*, Über die Umformung gewisser Determinanten, welche in der Lehre von den Kegelschnitten vorkommen, Journal r. a. Math. 92 (1882), kde vzpomenuto některých prací starších; *P. Gordan*, Der Pascal'sche Satz, Jahresbericht Deut. Math. Ver. 4 (1897).

$BO_1(0, b_3, -b_2)$. Odtud určeme souřadnice průsečíků vždy dvou protějších stran, totiž bodů (O_1O_2, TA), (O_2O_3, AB), (O_3T, BO_1), a utvořme ze souřadnic těch determinant 3. stupně

$$\begin{vmatrix} a_3 - a_1 & a_3 - a_2 & 0 \\ 0 & a_2b_1 - a_1b_2 & a_3b_1 - a_1b_3 \\ b_2 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Mají-li uvedené tři průsečíky ležeti v přímce, musí tento determinant býti roven nule.

Vskutku pak nalezneme (třebas přímým vyčíslením), že tento determinant jest (až na znaménko) totožný s hořejším. Je-li hořejší determinant roven nule, platí totéž o tomto a obráceně. Leží-li tedy šest daných bodů na kuželosečce, leží průsečíky tří dvojic protějších stran jejich šestiúhelníku v přímce; obráceně protínají-li se dvojice protějších stran šestiúhelníku na téže přímce, jsou vrcholy jeho na kuželosečce.

Tento důkaz věty Pascalovy[17]) platí i pro čáru 2. stupně, zvrhlou ve dvě různé přímky (neboť i v tom případě lze mezi šesti danými body zvoliti vrcholy základního čtyrúhelníku); neplatí ovšem tehdy, leží-li pět z daných bodů v téže přímce, tu však věta nemá smyslu.

Duálním postupem početním odvodí se duální věta *Brianchonova*.

71. Polárné vlastnosti kuželoseček. *a*) Zvolíme-li v rovině pravé (reálné nebo imaginární) kuželosečky $f(x, x) = 0$ dva body $X(x_k)$ a $X'(x'_k)$, mají průsečíky přímky jimi procházející s kuželosečkou souřadnice $x_k + \lambda_{1,2}x'_k$, kde $\lambda_{1,2}$ jsou kořeny rovnice

$$\lambda^2 f(x', x') + 2\lambda f(x', x) + f(x, x) = 0.$$

Na každé přímce v rovině dané kuželosečky jest stanovena involuce její řady bodové průsečíky jejími s kuželosečkou jako body samodružnými; tato involuce jest hyperbolická nebo eliptická, jestliže přímka protíná kuželosečku v různých bodech reálných resp. imaginárních (parabolická pak, je-li přímka tečnou kuželosečky). Rovnice involuce té jest

$$\lambda\mu f(x', x') + (\lambda + \mu) f(x', x) + f(x, x) = 0$$

nebo ve tvaru homogenním

$$\lambda_1\mu_1 f(x', x') + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) f(x', x) + \lambda_2\mu_2 f(x, x) = 0;$$

mají-li pak body X a X' samy tvořiti dvojici této involuce, musí rovnici její vyhovovati souřadnice bodů těch $\lambda = 0$ a $\mu = \infty$, resp. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ a $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$, takže rovnice involuce se redukuje na tvar

$$f(x, x') = 0.$$

Dva body involuce tak stanovené a vyjádřené slují *body sdruženými* čili *konjugovanými* vzhledem k dané kuželosečce.

---

[17]) Viz také na př. *L. Heffter* a *C. Koehler*, Lehrbuch der analytischen Geometrie I; *L. Berzolari*, Geometria analitica II.

Duálně lze pak definovati a analyticky určiti dvojice *přímek sdružených* čili *konjugovaných* vzhledem k dané kuželosečce. Máme tedy:

Dva body (x_k) *a* (x'_k) *jsou sdruženy vzhledem k nezvrhlé kuželosečce* $f(x, x) = 0$ *tehdy a jen tehdy, platí-li o jejich souřadnicích rovnice*

$$f(x, x') = 0.$$

Na každé reálné přímce existuje involuce bodů sdružených vzhledem k dané kuželosečce, jejímiž body samodružnými jsou průsečíky přímky s kuželosečkou.

Dvě přímky (u_k) *a* (u'_k) *jsou sdruženy vzhledem k nezvrhlé kuželosečce* $\varphi(u, u) = 0$ *tehdy a jen tehdy, platí-li o jejich souřadnicích rovnice*

$$\varphi(u, u') = 0.$$

V každém bodě existuje involuce přímek sdružených vzhledem k dané kuželosečce, jejímiž samodružnými paprsky jsou přímky kuželosečky, bodem tím procházející.

Protože uvedená involuce ve svazku paprskovém jest eliptická nebo hyperbolická podle toho, lze-li z jeho středu vésti imaginární resp. reálné tečny ke kuželosečce, slují body vnitřní nebo vnější vzhledem ke kuželosečce také eliptickými resp. hyperbolickými; duálně slují přímky ke kuželosečce mimoběžné nebo ji sekoucí eliptickými resp. hyperbolickými, protože v řadě bodové na nich existuje eliptická resp. hyperbolická involuce bodů sdružených.

b) Ke každému bodu (x'_k) v rovině přísluší na každé přímce jím procházející určitý bod, sdružený k němu vzhledem k dané pravé kuželosečce, vyjímaje případ, kdy bod (x'_k) leží na kuželosečce a přímka ona je tečnou kuželosečky. Protože souřadnice bodu, sdruženého k bodu (x'_k) vzhledem ke kuželosečce $f(x, x) = 0$, jsou vázány rovnicí

$$f(x, x') \equiv x_1 f_1(x') + x_2 f_2(x') + x_3 f_3(x') = 0,$$

jest geometrickým místem bodů, k pevnému bodu (x'_k) *vzhledem k dané kuželosečce sdružených, určitá přímka s uvedenou rovnicí*; tato přímka vždy určitá (protože koeficienty $f_k(x')$ nejsou všechny rovny nule), mající souřadnice $f_1(x')$, $f_2(x')$, $f_3(x')$, sluje *pólárou daného bodu* (x'_k) *vzhledem ke kuželosečce* $f(x, x) = 0$. Leží-li spec. bod (x'_k) na křivce, jest podle známé rovnice tečny polára jeho tečnou křivky v bodě tom.

Duálně nalezneme, že vzhledem k pravé kuželosečce $F(u, u) = 0$ má každá přímka (u'_k) roviny v každém bodě svém určitou přímku sdruženou, vyjímaje opět případ, kdy přímka a bod jsou pro kuželosečku tečnou a jejím bodem dotyčným; a že všechny přímky k bodům pevné přímky sdružené tvoří určitý svazek paprskový se středem

$$F(u, u') \equiv u_1 F_1(u') + u_2 F_2(u') + u_3 F_3(u') = 0$$

čili o souřadnicích $F_1(u')$, $F_2(u')$, $F_3(u')$; bod ten sluje *pólem dané přímky* (u'_k) *vzhledem ke kuželosečce* $F(u, u) = 0$. Spec. k tečně kuželosečky přísluší jako pól její bod dotyčný.

Označíme-li souřadnice poláry, příslušné při dané kuželosečce $f(x, x) = 0$ ke zvolenému bodu (x'_k), jako u'_k, kladouce tedy $f_k(x') = u'_k$,

a hledáme-li podle duální úvahy hořejší k přímce (u'_k) pól vzhledem k téže kuželosečce, duálně pojímané, $F(u, u) = 0$, nalezneme jej v bodě o souřadnicích $F_k(u') = Ax'_k$, tedy v bodě, od něhož jsme vyšli. *Jest* tedy *pólem poláry libovolného bodu* (x'_k) *vzhledem k téže kuželosečce bod* (x'_k) *sám*; duálně *pólarou pólu libovolné přímky* (u'_k) *jest přímka ta* (u'_k) *sama.*

Odtud tedy poznáváme, že daná nezvrhlá kuželosečka dovoluje všechny body a přímky své roviny tak po dvou sdružiti, že každému bodu a každé přímce přísluší jediná určitá přímka jako polára resp. jediný určitý bod jako pól, při čemž obráceně pólem poláry té jest bod původní resp. pólarou pólu toho jest přímka původní. Tato korespondence mezi elementy rovinného pole jest *polárnost*, definovaná dříve jako speciální korelace; zbývá za tím účelem jen dokázati, že dvěma incidentním prvkům roviny přísluší sdružené prvky opět incidentní. Vskutku přísluší-li bodu (x_k) jako polára přímka o souřadnicích $f_k(x)$ a přímce (u_k) jako pól bod o souřadnicích $F_k(u)$, a jsou-li bod (x_k) s přímkou (u_k) incidentní, takže jest $\Sigma x_k u_k = 0$, platí také $\Sigma f_k(x) \,.\, F_k(u) = 0$, t. j. prvky sdružené jsou incidentní, protože

$$\Sigma f_k(x) \,.\, F_k(u) = A \Sigma u_k x_k.$$

Kdežto jsme prve od dané polárnosti, definované jako involuční korelace, dospěli ke kuželosečce jako základní křivce její, přicházíme zde obráceně od dané pravé kuželosečky k polárnosti jako korespondenci mezi body a přímkami roviny, vzhledem ke kuželosečce sdruženými.

Je patrno, že kuželosečce samé, jež je základní křivkou polárnosti, jako útvaru bodovému přísluší v polárnosti její táž kuželosečka jako útvar přímkový, a obráceně.[1])

c) Kuželosečka, daná rovnicí s reálnými koeficienty, jest buď reálná nebo imaginární. Z analytického vyjádření vidíme, že pól a polára, sdružené k sobě vzhledem k dané kuželosečce, jsou současně reálné nebo současně imaginární, ať je kuželosečka jakákoliv.

Z předešlého vyplývají přímo známé vlastnosti pólu a poláry u kuželosečky. Tak na př. věta: Leží-li bod B na poláře a bodu A, prochází jeho polára b bodem A. Zejména pak plyne z toho, že všechny body poláry a jenom tyto body tvoří na přímkách, jdoucích pólem, s tímto bodem dvojice involuce, jejíž samodružné body jsou průsečíky přímek těch s kuželosečkou, a z duálního důvodu:

---

[1]) Polárnost kuželosečkou definovaná sluje někdy *hyperbolickou* nebo *eliptickou* podle toho, je-li její základní pravá kuželosečka reálná resp. imaginární.

Polárnost vzhledem ke kuželosečce, (jednoduše) zvrhlé ve dvojici různých přímek nebo duálně bodů, reálných nebo imaginárních, jest (nehledě ke společnému prvku obou přímek resp. bodů, sdruženému se všemi přímkami resp. body roviny) *involucí přímek* resp. *bodů* ve svazku paprskovém resp. řadě bodové, jež jsou danou kuželosečkou určeny. Tato polárnost sluje někdy *parabolickou.*

Polára bodu v rovině vzhledem ke kuželosečce její jest geom. místem bodů harmonicky sdružených s bodem tímto (na přímkách jím procházejících) vzhledem k bodům kuželosečky.

Pól přímky v rovině vzhledem ke kuželosečce jest středem svazku paprsků, jež jsou harmonicky sdruženy k přímce té (ve svazcích se středy na ní ležícími) vzhledem k přímkám kuželosečky.

A dále:

Polára bodu vzhledem ke kuželosečce obsahuje dotyčné body dvou tečen bodem tím ke kuželosečce jdoucích.

Pól přímky vzhledem ke kuželosečce jest průsečíkem dvou tečen, jež mají na přímce té své dotyčné body s kuželosečkou.

Neboť tečny kuželosečky, jdoucí bodem (x'_k) mají rovnici $f(x', x') . f(x, x) - f^2(x', x) = 0$; protože jejich dotyčné body na kuželosečce vyhovují rovnici $f(x, x) = 0$, platí o souřadnicích bodů těch $f(x', x) = 0$, t. j. body ty leží na poláře bodu (x'_k).

Z uvedené věty plyne, že *polára bodu vnějšího nebo vnitřního vzhledem ke kuželosečce jest její přímkou sečnou resp. mimoběžnou, a obráceně.*

Poláry vrcholů základního trojúhelníku soustavy souřadnic mají jednoduché rovnice; přísluší totiž k vrcholu $O_1(1, 0, 0)$ vzhledem ke kuželosečce $f(x, x) = 0$ polára o rovnici

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,$$

tedy o souřadnicích a_{1k}, obdobně pak k ostatním dvěma vrcholům. Duálně pól příslušný ke straně $o_1(1, 0, 0)$ základního trojúhelníku vzhledem ke kuželosečce $F(u, u) = 0$ má rovnici

$$A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 = 0,$$

tedy souřadnice A_{1k}, analogicky pak póly ostatních dvou stran.

Odtud poznáváme geometrický význam koeficientů v rovnici dané kuželosečky $f(x, x) = 0$ a téže kuželosečky ve vyjádření duálním $F(u, u) = 0$: *Koeficienty* a_{h1}, a_{h2}, a_{h3} *v rovnici kuželosečky* $f(x, x) = 0$ *jsou souřadnice polár, příslušných k vrcholům základního trojúhelníku vzhledem k této kuželosečce; koeficienty* A_{h1}, A_{2h}, A_{h3} *v rovnici téže kuželosečky* $F(u, u) = 0$ (minory determinantu A, příslušné k prvkům jeho a_{h1}, a_{h2}, a_{h3}) *jsou souřadnice pólů, příslušných ke stranám základního trojúhelníku vzhledem k této kuželosečce.*

d) Z útvarů v dané polárnosti sdružených jsou nejjednodušší dva polárné trojúhelníky. Zvolíme-li v rovině kuželosečky trojúhelník $A_1A_2A_3$, tvoří poláry vrcholů jeho vzhledem k dané kuželosečce druhý trojúhelník $B_1B_2B_3$, jehož vrcholy mají opět ve stranách trojúhelníku $A_1A_2A_3$ své poláry; takové dva *trojúhelníky* slují *polárné* vzhledem k uvažované kuželosečce.

Dva trojúhelníky, (navzájem) *polárné vzhledem k dané kuželosečce, jsou homologické, při čemž střed a osa této homologie jsou pólem a polárou vzhledem k téže kuželosečce.*

Abychom to o dvou polárných trojúhelnících $A_1A_2A_3$ a $B_1B_2B_3$, vzhledem ke kuželosečce $f(x, x) = 0$ sdružených, dokázali, zvolme za trojúhelník $A_1A_2A_3$ základní trojúhelník soustavy souřadnic; protože poláry vrcholů $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0)$, $A_3(0, 0, 1)$ mají rovnice

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0, \end{aligned}$$

nalezneme pro vrcholy B_k trojúhelníku $B_1B_2B_3$ souřadnice A_{k1}, A_{k2}, A_{k3}. Odpovídající sobě strany obou trojúhelníků protínají se v bodech $(0, a_{13}, -a_{12})$, $(a_{23}, 0, -a_{12})$, $(a_{23}, -a_{13}, 0)$, jež leží v přímce

$$\frac{x_1}{a_{23}} + \frac{x_2}{a_{13}} + \frac{x_3}{a_{12}} = 0;$$

spojnice odpovídajících sobě vrcholů jejich protínají se v bodě o souřadnicích $\frac{1}{A_{23}}, \frac{1}{A_{13}}, \frac{1}{A_{12}}$. A vskutku zjistíme, že polárou tohoto bodu vzhledem k dané kuželosečce jest ona přímka.

Platí však i obráceně: *Jsou-li dva trojúhelníky homologické, existuje kuželosečka, vzhledem k níž jsou polárnými.*

Zvolíme-li totiž opět jeden z trojúhelníků $A_1A_2A_3$ v základním trojúhelníku soustavy a druhý $B_1B_2B_3$ s vrcholy o souřadnicích b_{k1}, b_{k2}, b_{k3}, můžeme předpokládati, že platí

$$b_{21} = b_{12}, \qquad b_{31} = b_{13},$$

protože souřadnice druhého a třetího vrcholu lze nahraditi veličinami úměrnými s těmito vlastnostmi. Protože spojnice vrcholů A_1B_1, A_2B_2 a A_3B_3 se protínají v témž bodě, musí platiti

$$\begin{vmatrix} 0 & b_{13} & -b_{12} \\ b_{23} & 0 & -b_{12} \\ b_{32} & -b_{13} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

z čehož plyne

$$b_{32} = b_{23}.$$

Jest tedy determinant ze souřadnic b_{hk} vrcholů trojúhelníku $B_1B_2B_3$ souměrný.

A kuželosečka, vzhledem k níž jest trojúhelník $B_1B_2B_3$ polárným k trojúhelníku $A_1A_2A_3$, má rovnici

$$B_{11}x_1^2 + B_{22}x_2^2 + B_{33}x_3^2 + 2B_{12}x_1x_2 + 2B_{13}x_1x_3 + 2B_{23}x_2x_3 = 0,$$

kde B_{hk} jsou minory determinantu $B \equiv (b_{11}b_{22}b_{33})$, příslušné k prvkům b_{hk}. Neboť polárou vrcholu A_k vzhledem k této kuželosečce jest přímka $B_{k1}x_1 + B_{k2}x_2 + B_{k3}x_3 = 0$, jež obsahuje dva vrcholy trojúhelníku $B_1B_2B_3$ s indexem různým od k.[2])

[2]) Jest záhodno vytknouti, že k tomu, aby trojúhelník byl homologický k základnímu trojúhelníku soustavy souřadnic, jest nutno a stačí, aby souřadnice jeho vrcholů tvořily determinant souměrný.

Speciálně pak platí (protože polárou bodu na kuželosečce vzhledem k ní jest tečna její v bodě tom): Trojúhelník kuželosečce vepsaný a trojúhelník jí opsaný, jehož stranami jsou tečny kuželosečky v bodech prvého, jsou homologické, při čemž střed a osa homologie jejich jsou pólem a polárou vzhledem k uvažované kuželosečce.

e) Majíce na zřeteli, že ze dvou bodů (dvou přímek) vzhledem ke kuželosečce sdružených každý leží na poláře druhého (každá obsahuje pól druhého) a obráceně, že bod ležící na poláře druhého bodu jest s ním sdružen (přímka jdoucí pólem druhé přímky jest s ní sdružena), můžeme nalézti trojúhelníky, jejichž vrcholy tvoří s protějšími stranami dvojice pólů a polár. Trojúhelník, jehož každý vrchol jest pólem protější strany vzhledem k dané kuželosečce (a tedy každá strana polárou protějšího vrcholu), sluje *autopolárným trojúhelníkem* vzhledem ke kuželosečce.

Protože kterékoli dva vrcholy (ovšem i strany) autopolárného trojúhelníku jsou prvky u dané kuželosečky sdruženými, musí souřadnice vrcholů (x_k), (x'_k) a (x''_k) trojúhelníku autopolárného vzhledem ke kuželosečce $f(x, x) = 0$ splňovati tři rovnice

$$f(x, x') = 0, \quad f(x, x'') = 0, \quad f(x', x'') = 0.$$

Je-li dána kuželosečka, existuje — jak víme — ∞^3 trojúhelníků vzhledem k ní autopolárných. Obráceně je-li dán reálný trojúhelník v rovině, musí koeficienty v rovnici kuželosečky, k níž má býti trojúhelník ten autopolárným, vyhověti třem hořejším rovnicím; existuje tedy ∞^2 kuželoseček, vzhledem k nimž je daný trojúhelník autopolárným.[3])

Zajímavá jest věta: *Jestliže dva trojúhelníky mají jednu ze tří vlastností: býti vepsanými téže kuželosečce, býti opsanými druhé kuželosečce a býti autopolárnými k třetí kuželosečce, mají také zbývající dvě vlastnosti.*

Neboť vezmeme-li v úvahu základní trojúhelník soustavy souřadnic $O_1O_2O_3$ a trojúhelník s vrcholy $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$, jest podmínka toho, aby byly oba trojúhelníky vepsány určité kuželosečce, vyjádřena analyticky rovnicí

$$\begin{vmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 & a_2a_3 \\ b_1b_2 & b_1b_3 & b_2b_3 \\ c_1c_2 & c_1c_3 & c_2c_3 \end{vmatrix} = 0;$$

[3]) *Každý trojúhelník* (s reálnými vrcholy), *autopolárný vzhledem k reálné kuželosečce, má jeden vrchol vnitřní a dva vnější, jednu stranu mimoběžnou a dvě křivku protínající* (mimoběžnou je strana ležící proti vrcholu vnitřnímu). Neboť zvolíme-li základní trojúhelník soustavy souřadnic v autopolárném trojúhelníku kuželosečky, můžeme rovnici reálné kuželosečky uvésti na jednoduchý tvar $f(x, x) \equiv x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$; jest zde $A = -1$ a rovnice kuželosečky v souřadnicích přímkových $F(u, u) \equiv -u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 = 0$. Ze znamének výrazů $Af(x, x)$ a $F(u, u)$ pro vrcholy resp. strany základního trojúhelníku $O_1O_2O_3$ plyne, že vrcholy O_1 a O_2 jsou body vnějšími, kdežto O_3 bodem vnitřním, strany o_1 a o_2 jsou sečnami, kdežto strana o_3 jest mimoběžnou vzhledem k uvažované kuželosečce.

druhá vlastnost jest duální k prvé; podmínka pak toho, aby byly oba trojúhelníky autopolárnými k určité kuželosečce, jest vyjádřena rovnicí

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_2b_2 & a_3b_3 \\ a_1c_1 & a_2c_2 & a_3c_3 \\ b_1c_1 & b_2c_2 & b_3c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

První i druhou rovnici lze však upraviti (dělíme-li první řádek součinem $a_1a_2a_3$ a obdobně další, resp. dělíme-li první sloupec součinem $a_1b_1c_1$ a obdobně další) na rovnici

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

takže je-li splněna jedna podmínka, jest vyhověno i podmínce druhé.[4])

f) Rovnice dané kuželosečky se valně zjednoduší, zvolíme-li základní trojúhelník soustavy souřadnic *v trojúhelníku autopolárném*. Neboť v tom případě jest k bodu $O_1(1, 0, 0)$ sdružená pólára o rovnici

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$

totožna se stranou $o_1(1, 0, 0)$, takže platí

$$a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0;$$

obdobně k vrcholům O_2 a O_3 příslušné póláry

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \quad \text{a} \quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

jsou stranami $x_2 = 0$ resp. $x_3 = 0$, takže jest

$$a_{21} = 0, \; a_{23} = 0 \quad \text{a} \quad a_{31} = 0, \; a_{32} = 0$$

(jen jedna podmínka nová přistupuje k dvěma prve uvedeným).

---

[4]) Avšak: Jsou-li dány dvě kuželosečky, neexistuje (obecně) žádný trojúhelník, který by byl současně jedné z nich vepsán a druhé opsán (nebo jedné vepsán a k druhé autopolárný, nebo jedné opsán a k druhé autopolárný); jestliže však dané kuželosečky mají takovou polohu vzájemnou, že existuje trojúhelník uvedené vlastnosti, existuje těchto trojúhelníků počet neomezený.

Otázka dvou kuželoseček, jež připouštějí n-úhelníky jedné z nich vepsané a druhé opsané (t. zv. *polygony Ponceletovy*), byla často vyšetřována; vedle metod synthetických (viz pozn. [6]) u čl. 45) bylo zde použito funkcí eliptických (A. Cayley, J. Rosanes a M. Pasch, M. Simon, S. Gundelfinger a j.) a cesty algebraické. Viz v onom směru *G. H. Halphen*, Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications II. (1888), p. 367 a n.; *M. Lelieuvre*, Sur les polygones de Poncelet, L'enseignement math. 2 (1900); v tomto *K. Petr*, O mnohoúhelnících Ponceletových, Rozpravy Čes. akad. 9 (1900), a Über die Ponceletschen Polygone, Monatshefte Math. Phys. 18 (1907); *K. Rohn*, Das Schliessungsproblem von Poncelet und einige Erweiterungen, Jahresbericht D. Math. Ver. 22 (1913); *A. A. Bennett*, An algebraic treatment of the theorem of closure, Annals math. (2) 16 (1915); *W. Burnside*, On the polygons inscribed in one conic and circumscribed to another, Proceedings Phil soc. Cambridge 22 (1924); *B. Gambier*, Problème de Poncelet et problème analogue, Nouv. Annales math. (5) 3 (1925).

Má tedy kuželosečka v soustavě souřadnic, jejímž základním trojúhelníkem jest trojúhelník vzhledem ke kuželosečce té autopolárný, rovnici

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0;$$

tato rovnice kuželosečky sluje *normální* (kanonická).[5])[6])

Obráceně obsahuje-li rovnice kuželosečky pouze čtverce souřadnic, jest základní trojúhelník soustavy trojúhelníkem vzhledem k ní autopolárným.

Nejjednoduššího tvaru nabude rovnice kuželosečky, zvolíme-li dva vrcholy základního trojúhelníku na kuželosečce a třetí vrchol v pólu jejich spojnice.

Položíme-li tedy vrcholy $O_1(1, 0, 0)$ a $O_3(0, 0, 1)$ na kuželosečku, musí o koeficientech její rovnice platiti

$$a_{11} = 0, \quad a_{33} = 0.$$

Polára vrcholu (0, 1, 0) má rovnici $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$; aby tato přímka byla stranou základního trojúhelníku s rovnicí $x_2 = 0$, musí býti

$$a_{21} = 0, \quad a_{23} = 0.$$

Oběma volbami nabude rovnice kuželosečky tvaru

$$a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 = 0$$

čili tvaru

$$x_2^2 + kx_1x_3 = 0.$$

Zvolíme-li ještě jednotkový bod soustavy souřadnic na kuželosečce, dostaneme $k = -1$ a rovnici

$$x_2^2 - x_1x_3 = 0.$$

Kuželosečka v soustavě souřadnic, jejíž dva základní vrcholy O_1, O_3 leží na kuželosečce a třetí O_2 v pólu spojnice oněch dvou, obsahující jednotkový bod soustavy, má rovnici

$$x_2^2 = x_1x_3.$$[7])

---

[5]) Protože v rovině kuželosečky existuje ∞^3 trojúhelníků autopolárných a protože rovnici čáry lze lineární transformací převésti do nové soustavy souřadnic, jest patrno, že rovnici kuželosečky (ternární formu kvadratickou) lze ∞^3 způsoby převésti na rovnici $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$ (na formu složenou ze tří čtverců). Transformací (reálnou) $x'_k = \sqrt{|a_{kk}|} \cdot x_k$ (pro $k = 1, 2, 3$), při které se mění jen jednotkový bod soustavy souřadnic, můžeme rovnici kuželosečky převésti na jeden z tvarů (kde čárky u souřadnic vynechány) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Lze tedy rovnici každé pravé kuželosečky reálné nebo imaginární volbou základního trojúhelníku v autopolárném trojúhelníku jejím a volbou bodu jednotkového uvésti na druhý resp. první tvar zde vytčený.

[6]) Rovnice kuželosečky v souřadnicích přímkových při témž trojúhelníku základním jest $u_1^2/a_{11} + u_2^2/a_{22} + u_3^2/a_{33} = 0$.

[7]) Jednoduchou jest také rovnice kuželosečky v soustavě, jejíž základní trojúhelník má své tři vrcholy na kuželosečce (jest kuželosečce vepsán); neboť leží-li vrchol O_h na kuželosečce, platí $a_{hh} = 0$. Má tedy kuželosečka

72. Kuželosečka jako křivka racionální; příslušné projektivnosti. *a) Každou čáru 2. stupně lze pokládati za geometrické místo průsečíků sdružených paprsků dvou projektivních svazků se středy v libovolných dvou bodech kuželosečky*; obráceně *sdružené paprsky dvou projektivních svazků nesoumístných v rovině vytvořují svými průsečíky čáru 2. stupně, jdoucí středy svazků těch.*

Abychom první větu dokázali analyticky, položme do dvou různých bodů dané kuželosečky vrcholy $O_1(1, 0, 0)$ a $O_2(0, 1, 0)$ základního trojúhelníku; její rovnice $f(x, x) = 0$ se tím zjednoduší (protože musí býti $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$) na tvar

$$2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Dělíme-li zde veličinou x_3, obdržíme rovnici

$$2a_{12}\frac{x_1}{x_3}\frac{x_2}{x_3} + 2a_{13}\frac{x_1}{x_3} + 2a_{23}\frac{x_2}{x_3} + a_{33} = 0;$$

protože poměry x_1/x_3 a x_2/x_3 lze pokládati za (nehomogenní) souřadnice paprsků O_2P a O_1P, spojujících středy O_1 a O_2 s proměnným bodem P (x_1, x_2, x_3), vyjadřuje rovnice tato projektivnost svazků, jejichž sdružené paprsky se protínají v bodech P dané kuželosečky.

Aby projektivnost ta nebyla zvrhlá, musí býti

$$-2a_{23} \cdot 2a_{13} + a_{33} \cdot 2a_{12} = 2(a_{12}a_{33} - 2a_{13}a_{23}) \neq 0.$$

Protože determinant dané kuželosečky (v upraveném tvaru) jest

$$a_{12}(2a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}),$$

vidíme, že v případě pravé kuželosečky jest projektivnost ona nezvrhlá; ba ani u kuželosečky rozpadající se ve dvě různé přímky není projektivnost ta zvrhlá, jestliže body O_1 a O_2 byly zvoleny na téže přímce čáry kvadratické, protože v tom případě jest $a_{12} = 0$ (neboť $x_3 = 0$ je součást čáry 2. stupně; svazky jsou tu perspektivní).

Celou úvahu lze obrátiti: Dva svazky paprskové se středy ve vrcholech $O_1(1, 0, 0)$ a $O_2(0, 1, 0)$ základního trojúhelníku souřadnic, jejichž paprsky O_1P a O_2P mají souřadnice $\frac{x_2}{x_3}$ resp. $\frac{x_1}{x_3}$, jsou projektivní, platí-li

$$\alpha\frac{x_2}{x_3}\frac{x_1}{x_3} + \beta\frac{x_2}{x_3} + \gamma\frac{x_1}{x_3} + \delta = 0,$$

při čemž musí býti $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Průsečíky paprsků v této projektivnosti sdružených jsou body $P(x_1, x_2, x_3)$, vyplňující čáru

$$\alpha x_1x_2 + \beta x_2x_3 + \gamma x_1x_3 + \delta x_3^2 = 0,$$

obsahující vrcholy základního trojúhelníku soustavy souřadnic (základnímu trojúhelníku opsaná) rovnici

$$a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 = 0,$$

kde každý z koeficientů (u kuželosečky pravé) jest různý od nuly. A obráceně uvedená rovnice vyjadřuje vždy kuželosečku, opsanou trojúhelníku základnímu.

což je čára 2. stupně jdoucí body O_1 a O_2; protože její determinant má hodnotu $\frac{1}{4}\alpha(\beta\gamma - \alpha\delta)$ a platí $\beta\gamma - \alpha\delta \neq 0$, jest čára pravou kuželo-, sečkou, pokud $\alpha \neq 0$, zvrhlou pak v přímku $x_3 = 0$ a druhou přímk u je-li $\alpha = 0$ (svazky jsou perspektivní).

Duálně lze dokázati: Každou čáru 2. třídy jest možno pokládati za vytvořenou spojnicemi sdružených bodů dvou projektivních řad bodových s osami ve dvou libovolných přímkách čáry; obráceně sdružené body dvou projektivních řad nesoumístných v rovině vytvořují spojnicemi svými čáru 2. třídy, obsahující také osy těchto řad.

b) Z vytvoření kuželosečky dvěma projektivními svazky paprskovými vysvítá, že ke každému paprsku ve svazku se středem na kuželosečce přísluší jediný bod křivky, druhý průsečík paprsku toho s křivkou; obráceně každému bodu kuželosečky přísluší jediný paprsek svazku, při čemž není vyňat ani střed svazku, kterému totiž přísluší tečna křivky v něm. A protože lze ustanoviti obapolně jednoznačnou korespondenci mezi elementy svazku paprskového a hodnotami proměnného parametru, lze také souřadnice bodu na kuželosečce vyjádřiti jako racionální funkce parametru (t). Proto sluje kuželosečka *křivkou racionální*.

Abychom nalezli co možná jednoduše racionální vyjádření parametrické pro kuželosečku, zvolme střed svazku ve vrcholu $O_1(1, 0, 0)$ základního trojúhelníku a rovnici paprsku bodem O_1 vedeného pišme

$$x_3 = tx_2;$$

vložíme-li tuto relaci do rovnice kuželosečky (v níž vzhledem k tomu, že čára obsahuje bod O_1, jest $a_{11} = 0$), obdržíme po zkrácení faktorem x_2

$$2\,(a_{12} + a_{13}t)\,x_1 + (a_{22} + 2a_{23}t + a_{33}t^2)\,x_2 = 0,$$

při čemž tedy zatím předpokládáme, že $x_2 \neq 0$. Odtud a z rovnice $x_3 = tx_2$ vyplývají pro homogenní souřadnice bodu na kuželosečce výrazy kvadratické

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= -(a_{33}t^2 + 2a_{23}t + a_{22}), \\ \varrho x_2 &= 2\,(a_{13}t + a_{12}), \\ \varrho x_3 &= 2t\,(a_{13}t + a_{12}). \end{aligned}$$

Tak jsou však vyjádřeny také souřadnice těch bodů kuželosečky, pro které jest $x_2 = 0$, t. j. v případě prve vyloučeném; z rovnice $x_3(2a_{13}x_1 + a_{33}x_3) = 0$ vyplývá tu buď $x_3 = 0$ nebo $x_1 : x_3 = -a_{33} : 2a_{13}$ a příslušnou hodnotou parametru je tu jednak $t = -a_{12}/a_{13}$, jednak $t = \infty$.[1])

[1]) Nalezli jsme pro danou kuželosečku vyjádření parametrické v tom tvaru, že homogenní souřadnice jejích bodů jsou celistvé kvadratické funkce proměnného parametru. Obráceně *položíme-li homogenní souřadnice bodu v rovině úměrny třem celistvým funkcím druhého stupně parametru t*, tedy

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= c_{11}t^2 + c_{12}t + c_{13}, \\ \varrho x_2 &= c_{21}t^2 + c_{22}t + c_{23}, \\ \varrho x_3 &= c_{31}t^2 + c_{32}t + c_{33}, \end{aligned}$$

Parametrické rovnice pro kuželosečku nabudou ovšem v případech, kdy rovnice dané kuželosečky má tvar jednodušší, také tvaru kratšího; nejkratší jsou pro kuželosečku s rovnicí tvaru $x_2^2 - x_1 x_3 = 0$, totiž

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : t : t^2$$

(nebo $t^2 : t : 1$).

c) Kolineace, jež převádí rovinu π v rovinu π', transformuje kuželosečku k roviny π v kuželosečku k' roviny π'; při tom přecházejí všechny projektivní vlastnosti kuželosečky k na kuželosečku k'.

Máme-li obráceně v rovinách π a π' kuželosečku k resp. k', jež jsou téhož typu, existuje vždy kolineace mezi rovinami π a π', jež k převádí v k'.

Buďtež zejména kuželosečky k a k' pravé reálné; zvolíme-li na k tři libovolné body různé, rovněž tak na k', a přiřadíme-li oněm třem bodům tyto tři, jest tím určena vždy a jediná kolineace převádějící rovinu π v rovinu π' tak, že kuželosečka k přechází v kuželosečku k'.

Aby důkaz toho byl analyticky co možná jednoduchý, předpokládejme kuželosečku k dánu v rovině π rovnicí $x_2^2 - x_1 x_3 = 0$; kuželosečka ta obsahuje vrcholy základního trojúhelníku O_1 a O_3 i bod jednotkový T, a vrchol O_2 je pólem přímky $O_1 O_3$. Rovněž tak v rovině π budiž zvolena kuželosečka s rovnicí $x'^2_2 - x'_1 x'_3 = 0$. Přiřadíme-li třem bodům O_1, O_3 a T na k tři body O'_1, O'_3 a T' na k', odpovídá také vrcholu O_2 základního trojúhelníku v π jako pólu přímky $O_1 O_3$ vrchol O'_2 základního trojúhelníku v π'; protože pak sobě odpovídají v rovinách π a π' pořadem vrcholy základních trojúhelníků a body jednotkové, má kolineace rovin těch, takto čtyřmi dvojicemi sdružených bodů jednoznačně stanovená, rovnice

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3$$

a transformuje tedy kuželosečku $x_2^2 - x_1 x_3 = 0$ v kuželosečku $x'^2_2 - x'_1 x'_3 = 0$.

Jak patrno, existuje ∞^3 kolineací mezi rovinami π a π', které danou (pravou reálnou) kuželosečku k transformují v danou kuželosečku téhož typu k'.

d) Kolineace rovinné (dvou rovin soumístných), při nichž daná (nezvrhlá) kuželosečka roviny přechází v sebe samu, tvoří (podle předešlého a protože dvě kolineace roviny, při nichž je daná kuželosečka jako celek invariantní, mají produktem opět kolineaci takovou) kontinuitní grupu tříparametrovou.

---

kde determinant $(c_{11}c_{22}c_{33}) \neq 0$, *vyplňuje takový bod při proměnném t pravou kuželosečku* (jejíž body odpovídají obapolně jednoznačně hodnotám parametru t). Neboť použijeme-li pro souřadnice bodu x_1, x_2, x_3 transformace $\mu x_h = c_{h1}x'_1 + c_{h2}x'_2 + c_{h3}x'_3$ v souřadnice x'_1, x'_2, x'_3, dostáváme z rovnic transformace inversní $\nu x'_k = (C_{1k}x_1 + C_{2k}x_2 + C_{3k}x_3)$, kde $\nu = \mu/C$ a C_{hk} est minor determinantu C, příslušný k prvku jeho c_{hk}, dosadíme-li tam za x_1, x_2, x_3 hořejší kvadratické funkce parametru t, relace

$$\varkappa x'_1 = t^2, \qquad \varkappa x'_2 = t, \qquad \varkappa x'_3 = 1$$

a po vyloučení parametru t rovnici pravé kuželosečky $x'^2_2 - x'_1 x'_3 = 0$.

Kolineace roviny, jež danou kuželosečku převádí v ni samu, indukuje v její řadě bodové transformaci projektivní. Mějme na zřeteli parametrické vyjádření kuželosečky $x_2^2 - x_1 x_3 = 0$; protože kolineací v rovině přechází svazek paprskový se středem v bodě (t) na kuželosečce v projektivní svazek se středem v bodě (t') kuželosečky, jest projektivnost řady bodové na kuželosečce vyjádřena lineární rovnicí mezi parametry

$$t' = \frac{at + b}{ct + d},$$

při čemž platí $ad - bc \neq 0$.

Samodružné body projektivní transformace kvadratické řady bodové vyplývají z uvedené rovnice projektivnosti, položíme-li tam $t' = t$, totiž z rovnice

$$ct^2 + (d - a)\,t - b = 0.$$

Spojnice obou samodružných bodů v projektivnosti řady bodové na kuželosečce sluje *osou* této *projektivnosti. Jestliže v projektivnosti kvadratické řady bodové bodům jejím* $P_1(t_1)$ *a* $P_2(t_2)$ *odpovídají body* $P'_1(t'_1)$ *a* $P'_2(t'_2)$, *protínají se spojnice* $P_1P'_2$ *a* P'_1P_2 *na ose projektivnosti.*

K důkazu toho vyjděme od rovnice přímky, spojující na kuželosečce $x_2^2 - x_1 x_3 = 0$ dva různé body s parametry t_1 a t_2, o jejichž souřadnicích tedy platí $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : t_k : t_k^2$ (pro $k = 1, 2$); protože koeficienty v rovnici přímky $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ musí vyhovět rovnicím $A + Bt_k + Ct_k^2 = 0$, má spojnice bodů (t_1) a (t_2) rovnici

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

čili po odečtení třetího řádku od druhého a po zkrácení nenulovým faktorem $t_1 - t_2$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & t_1 + t_2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

a konečně po vyčíslení

$$t_1 t_2 x_1 - (t_1 + t_2)\,x_2 + x_3 = 0.$$

Tato rovnice pro spojnici dvou různých bodů (t_1) a (t_2) přechází speciálně pro $\lim t_2 = t_1$ v rovnici tečny v bodě (t_1), totiž v rovnici

$$t_1^2 x_1 - 2t_1 x_2 + x_3 = 0.$$

Osa projektivnosti kvadratické řady bodové na kuželosečce $x_2^2 - x_1 x_3 = 0$, spojující samodružné body této řady, jejichž parametry jsou tedy kořeny rovnice

$$ct^2 + (d - a)\,t - b = 0,$$

takže o nich platí $t_1 + t_2 = \frac{a - d}{c}$, $t_1 t_2 = -\frac{b}{c}$, má rovnici

$$-bx_1 + (d - a)\,x_2 + cx_3 = 0;$$

jest vždy reálná.

Spojnice bodů (t_1) a (t'_2) na uvažované kuželosečce má rovnici

$$t_1 t'_2 x_1 - (t_1 + t'_2)\, x_2 + x_3 = 0,$$

spojnice bodů (t_2) a (t'_1) pak rovnici

$$t_2 t'_1 x_1 - (t_2 + t'_1)\, x_2 + x_3 = 0.$$

Aby tyto dvě přímky se protínaly na ose projektivnosti s rovnicí prve uvedenou, je nutno a stačí, by platilo

$$\begin{vmatrix} -b & d-a & c \\ t_1 t'_2 & -(t_1 + t'_2) & 1 \\ t_2 t'_1 & -(t_2 + t'_1) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dosadíme-li sem z rovnice projektivnosti

$$t'_{1,2} = \frac{a t_{1,2} + b}{c t_{1,2} + d},$$

zjistíme vskutku správnost této relace (odečteme-li totiž po odstranění zlomků třetí řádek od druhého a vytkneme-li pak z něho společný faktor $t_2 - t_1$, stane se totožným s řádkem prvním).

Duální vlastnost přísluší bodu, jenž je průsečíkem tečen v samodružných bodech kuželosečky a sluje *středem* její *projektivnosti*: *Přímky spojující průsečíky tečen kuželosečky s dotyčnými body* P_1 *a* P'_2, P'_1 *a* P_2 *procházejí středem projektivnosti.* Tento bod jest pólem osy projektivnosti vzhledem k uvažované kuželosečce a vždy reálný; jeho souřadnice jsou

$$x_1 : x_2 : x_3 = 2c : (a - d) : -2b.$$

Střed projektivnosti jest třetím samodružným bodem kolineace rovinné, jež uvažovanou projektivnost na kuželosečce indukuje.[2])

e) Kolineace roviny s invariantní kuželosečkou

$$x_2^2 - x_1 x_3 = 0,$$

na které existuje projektivnost vyjádřená rovnicí

$$t' = \frac{at + b}{ct + d},$$

[2]) Pro *involuční projektivnost* kvadratické řady bodové a kvadratického svazku paprskového na dané kuželosečce $x_2^2 - x_1 x_3 = 0$, vyjádřenou rovnicí $ctt' - a(t + t') - b = 0$ při $a^2 + bc \neq 0$, existuje osa involuce s rovnicí $bx_1 + 2ax_2 - cx_3 = 0$ a střed involuce o souřadnicích $c : a : -b$; střed a osa téže involuce tvoří dvojici pólu a poláry vzhledem k uvažované kuželosečce. A platí, jak je známo a lze analyticky potvrditi:

Přímky spojující dvojice bodů, na dané kuželosečce involučně sdružených, procházejí pevným bodem, středem involuce té; obráceně přímky vedené libovolným bodem, zvoleným v rovině kuželosečky mimo ni, protínají kuželosečku v bodech involučně sdružených.

Dvojice tečen dané kuželosečky involučně sdružených protínají se na pevné přímce, ose involuce té; obráceně tečny kuželosečky vedené z bodů libovolné přímky, jež leží v rovině kuželosečky nejsouc její tečnou, tvoří dvojice přímek involučně sdružených.

jest analyticky určena rovnicemi, jež obdržíme z těchto obou. Protože o souřadnicích bodu (t) invariantní kuželosečky platí

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : t : t^2,$$

o souřadnicích bodu (t'), k němu projektivně sdruženého, pak platí

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = 1 : t' : t'^2$$

čili

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = (ct + d)^2 : (at + b)(ct + d) : (at + b)^2,$$

jest ona kolineace vyjádřena rovnicemi

$$\begin{aligned} \varrho x'_1 &= d^2 x_1 + 2cd x_2 + c^2 x_3, \\ \varrho x'_2 &= bd x_1 + (ad + bc) x_2 + ac x_3, \\ \varrho x'_3 &= b^2 x_1 + 2ab x_2 + a^2 x_3. \end{aligned}$$

Protože zde běží jen o poměry konstant a, b, c, d, lze je tak zvoliti, aby platilo $ad - bc = \pm 1$.

73. Svazek a řada kuželoseček. *a*) Jsou-li dány v rovině dvě různé kuželosečky o rovnicích $f(x, x) = 0$ a $g(x, x) = 0$ (jejichž koeficienty a_{hk} resp. b_{hk} předpokládáme reálné), jest rovnicí

$$f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0,$$

kde λ je parametr, vyjádřena soustava kuželoseček, jež sluje *svazek kuželoseček*; čáry $f(x, x) = 0$ a $g(x, x) = 0$ slují základními kuželosečkami svazku.

Duálně vyjadřuje rovnice

$$\varphi(u, u) - \lambda \psi(u, u) = 0$$

řadu kuželoseček se základními kuželosečkami $\varphi(u, u) = 0$, $\psi(u, u) = 0$ a parametrem λ. Můžeme se ve svých úvahách omeziti na svazek kuželoseček a jejich výsledky převésti obvyklým způsobem v duální věty o řadě kuželoseček.

Každá hodnota parametru λ určuje jedinou kuželosečku svazku. Ke dvěma různým hodnotám parametru λ_1 a λ_2 příslušejí různé kuželosečky; neboť kdyby tyto dvě kuželosečky byly totožny, platilo by

$$f - \lambda_1 g \equiv c\,(f - \lambda_2 g)$$

čili

$$(1 - c) f - (\lambda_1 - c\lambda_2) g \equiv 0$$

a proto (při různých kuželosečkách základních) $1 - c = 0$, $\lambda_1 - c\lambda_2 = 0$ čili $\lambda_1 = \lambda_2$ proti suposici. *Jest* tedy *korespondence mezi hodnotami parametru λ a kuželosečkami svazku obapolně jednoznačná.*[1])

[1]) Parametr λ lze pokládati za souřadnici kuželosečky ve svazku (řadě) kuželoseček, při čemž základním kuželosečkám příslušejí hodnoty jeho 0 a ∞. Je-li parametr λ reálný, tvoří svazek (řada) kuželoseček soustavu jednomocnou. Připustíme-li (podle potřeby) pro λ také hodnoty imaginární, mají příslušné kuželosečky svazku (řady) ve svých rovnicích koeficienty imaginární.

Základní kuželosečky svazku $f(x, x) = 0$ a $g(x, x) = 0$ lze nahraditi kterýmikoli dvěma různými kuželosečkami svazku. Neboť zvolíme-li dvě kuželosečky, příslušné k parametrům λ_1 a λ_2, takže tedy $F(x, x) \equiv f - \lambda_1 g$ a $G(x, x) \equiv f - \lambda_2 g$, jest každá kuželosečka svazku $F - \mu G = 0$ kuželosečkou svazku $f - \lambda g = 0$, kde $\lambda = \frac{\lambda_1 - \mu\lambda_2}{1 - \mu}$, obráceně pak každá kuželosečka svazku $f - \lambda g = 0$ patří do svazku $F - \mu G = 0$, kde $\mu = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2}$; proto jsou oba svazky totožny. *Jest* tedy *svazek kuželoseček libovolnými dvěma* (různými) *kuželosečkami svými jednoznačně určen.*

Protože souřadnice bodu, vyhovující rovnicím $f(x, x) = 0$ a $g(x, x) = 0$, vyhovují také rovnici $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$ při jakékoli hodnotě parametru λ, platí: *Každý bod roviny, společný dvěma kuželosečkám svazku, jest společný všem jeho kuželosečkám*; body takové slují *základní body* (*base*) svazku kuželoseček.[2])

Dosadíme-li však do $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$ za x_k hodnoty, pro které není současně $f(x, x) = 0$ a $g(x, x) = 0$, lze z rovnice tak vznikající určiti vždy a jediné λ; proto platí: *Každým bodem roviny, jenž není společný* (dvěma základním a tedy) *všem kuželosečkám svazku, prochází jedna a jediná kuželosečka svazku toho.*

Duálně řada kuželoseček $\varphi - \lambda\psi = 0$, jejíž kuželosečky příslušejí jednoznačně hodnotám parametru λ, jest určena libovolnými dvěma svými kuželosečkami; každá přímka roviny, společná dvěma členům řady, jest společná všem členům jejím a sluje proto základní přímkou řady kuželoseček; každé přímky v rovině, jež není společná kuželosečkám řady, dotýká se jedna a jediná kuželosečka řady té.

b) Pro klasifikaci svazků kuželoseček jest rozhodující rovnice, kterou obdržíme, položíme-li nule roven determinant z koeficientů obecné kuželosečky svazku, totiž determinant z prvků $a_{hk} - \lambda b_{hk} \equiv c_{hk}(\lambda)$. Tato t. zv. *charakteristická rovnice svazku kuželoseček* jest

$$C(\lambda) \equiv \lambda^3 B - \lambda^2 \Sigma a_{hk} B_{hk} + \lambda \Sigma b_{hk} A_{hk} - A = 0,$$

kde ovšem A a B jsou determinanty kuželoseček základních a součty se týkají indexů h, k s hodnotami 1, 2, 3. Kořeny této rovnice jsou parametry zvrhlých kuželoseček svazku.

---

[2]) Protože dvě kuželosečky v rovině se protínají obecně ve čtyřech bodech, *má svazek kuželoseček basi složenou ze čtyř bodů*. Vylučujeme ovšem případ, kdy obě kuželosečky zcela nebo částečně (jednou přímkou, jsouce zvrhlé) splývají. Body ty mohou býti různé nebo splývající, reálné nebo imaginární. Vyplývá to z algebraické věty, že dvě nehomogenní rovnice 2. stupně o dvou neznámých mají čtyři dvojice kořenů, nebo z věty, že rovnice 4. stupně o jedné neznámé má čtyři kořeny (rovnici takovou totiž obdržíme, dosadíme-li do rovnice jedné kuželosečky za x_k kvadratické funkce, jimiž je parametricky vyjádřena kuželosečka druhá). Jiné a podrobné vyšetření viz dále.

Jestliže rovnici $C(\lambda) = 0$ vyhovuje každá hodnota λ, obsahuje svazek jenom zvrhlé kuželosečky a sluje *zvrhlým*; tomu tak jest, platí-li $A = 0$, $B = 0$, $\Sigma a_{hk}B_{hk} = 0$, $\Sigma b_{hk}A_{hk} = 0$. Předpokládejme zatím, že rovnice $C(\lambda) = 0$ není splněna identicky.[3])

Vedle rovnice $C(\lambda) = 0$ s kořeny λ_i vezměme v úvahu rovnici $C(\lambda_i + \mu) = 0$ čili rovnici, jejíž levá strana je determinant 3. stupně z prvků $a_{hk} - (\lambda_i + \mu)b_{hk} = (a_{hk} - \lambda_i b_{hk}) - \mu b_{hk} = c_{hk}(\lambda_i) - \mu b_{hk}$. Tato rovnice tvaru

$$\mu^3 B - \mu^2 \Sigma c_{hk}(\lambda_i) B_{hk} + \mu \Sigma b_{hk} C_{hk}(\lambda_i) - C(\lambda_i) = 0$$

souvisí s rovnicí hořejší tím způsobem, že kořenu $\mu = 0$ odpovídá kořen $\lambda = \lambda_i$; rovnice $C(\lambda) = 0$ má tedy kořen λ_i jednoduchý nebo dvojnásobný nebo trojnásobný podle toho, je-li $\mu = 0$ jednoduchým resp. dvojnásobným resp. trojnásobným kořenem rovnice této, t. j. je-li z koeficientů této rovnice $C(\lambda_i)$, $\Sigma b_{hk}C_{hk}(\lambda_i)$ a $\Sigma c_{hk}(\lambda_i)B_{hk}$ rovným nule první a nikoli druhý, resp. jenom první dva, resp. všechny tři.

Má-li rovnice $C(\lambda) = 0$ tři různé kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, sluje svazek kuželoseček *obecný*. Ke každému kořenu $\lambda = \lambda_i$ přísluší tu zvrhlá kuželosečka svazku, složená ze dvou různých přímek; neboť kdyby kuželosečka (λ_i) se rozpadala v přímku dvojnásobnou, byly by všechny minory $C_{hk}(\lambda_i)$ rovny nule, rovnice pro μ měla by (aspoň) dvojnásobný kořen nulový a rovnice pro λ kořen dvojnásobný proti předpokladu.

Obecný svazek (*řada*) *kuželoseček obsahuje tři* (a jenom tři) *různé kuželosečky, zvrhlé ve dvojice přímek* (*bodů*) *různých.*

Dvě z těchto tří dvojic přímkových protínají se ve čtyřech různých bodech A, B, C, D; kdyby totiž průsečík jedné dvojice ležel na druhé kuželosečce zvrhlé, degeneroval by celý svazek kuželoseček, jak poznáme později. Tyto čtyři body jsou základními body svazku, ležíce na dvou jeho kuželosečkách, a vyčerpávají je; jimi musí tedy procházeti také třetí zvrhlá kuželosečka svazku, takže tři dvojice přímek, tvořící zvrhlé kuželosečky svazku, jsou protějšími stranami úplného čtyřrohu. Každá kuželosečka, jdoucí čtyřmi body A, B, C, D, patří do svazku $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$; neboť jsouc určena svým pátým bodem (x'_k), má parametr $\lambda = \dfrac{f(x', x')}{g(x', x')}$.

Výsledkem této úvahy, také pro případ duální, jest:

Obecný svazek kuželoseček (svazek typu I.) *jest tvořen všemi kuželosečkami, jež procházejí čtyřmi vrcholy úplného čtyřrohu; tři dvojice protějších stran tohoto čtyřrohu jsou třemi zvrhlými kuželosečkami svazku.*

Obecná řada kuželoseček (řada typu I.) *jest tvořena všemi kuželosečkami, jež se dotýkají čtyř přímek úplného čtyrstranu; tři dvojice protějších vrcholů tohoto čtyrstranu jsou třemi zvrhlými kuželosečkami řady.*

[3]) Je-li snad $B = 0$, t. j. základní kuželosečka $g(x, x) = 0$ zvrhlou, můžeme tuto čáru nahraditi jinou kuželosečkou svazku, jež není zvrhlá, aby totiž charakteristická rovnice svazku byla vskutku 3. stupně.

Čtyři základní body svazku kuželoseček jsou průsečíky kuželoseček základních $f(x, x) = 0$, $g(x, x) = 0$. Podle svých souřadnic jsou tyto body buď všechny reálné nebo všechny imaginární, po dvou sdružené, nebo dva reálné a dva sdruženě imaginární. Jest tudíž možno rozeznávati tři druhy obecného svazku kuželoseček:

Obecný svazek kuželoseček prvního druhu má čtyři základní body reálné (tři reálné dvojice přímek); svazek druhého druhu má dvě dvojice základních bodů sdruženě imaginárních (jednu reálnou dvojici přímek, dvě dvojice přímek sdruženě imaginárních); svazek třetího druhu má základní body dva reálné a dva sdruženě imaginární (jednu reálnou dvojici přímek a dvě dvojice sdruženě imaginární).

Se zřetelem ke kriteriu pro povahu kuželosečky, rozpadající se ve dvě různé přímky, nalezneme, že obecný svazek kuželoseček je druhu prvního nebo druhého, má-li rovnice $C(\lambda) = 0$ všechny tři kořeny λ_i reálné a je-li $\Sigma C_{hh}(\lambda_i) < 0$ pro každý kořen ten resp. jen pro jeden kořen; jest pak druhu třetího, je-li ze tří kořenů λ_i pouze jeden reálný.[4])

c) Jestliže charakteristická rovnice svazku $C(\lambda) = 0$ nemá všechny kořeny různé, sluje příslušný svazek kuželoseček *speciálním*. Speciální svazek kuželoseček má méně než tři kuželosečky zvrhlé, vedle dvojice

[4]) Pokládajíce dvojice protějších vrcholů úplného čtyrstranu za zvrhlé kuželosečky řady, určené stranami čtyrstranu, dokážeme jednoduše větu (*Hesseovu*): *Jsou-li dvě dvojice protějších vrcholů úplného čtyrstranu dvojicemi bodů vzhledem ke kuželosečce sdružených, tvoří také třetí dvojice vrcholů jeho body vzhledem k téže kuželosečce sdružené.*

Aby totiž dva body o rovnicích $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0$, $b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 = 0$ byly sdruženy vzhledem ke kuželosečce

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0,$$

musí platiti

$$a_{11}a_1b_1 + a_{22}a_2b_2 + a_{33}a_3b_3 + a_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + a_{13}(a_1b_3 + a_3b_1) + a_{23}(a_2b_3 + a_3b_2) = 0.$$

Pojímáme-li však dvojici daných bodů jako čáru 2. třídy s rovnicí

$$a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2 + 2a_{12}u_1u_2 + 2a_{13}u_1u_3 + 2a_{23}u_2u_3 = 0,$$

vidíme, že koeficienty a_{hk} jsou rovny činitelům při a_{hk} v hořejší podmínkové rovnici; jest tedy podmínkou toho, aby dvojice bodů s rovnicí

$$a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2 + 2a_{12}u_1u_2 + 2a_{13}u_1u_3 + 2a_{23}u_2u_3 = 0$$

tvořila dva body navzájem vzhledem ke kuželosečce

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

sdružené, platnost rovnice

$$a_{11}a_{11} + a_{22}a_{22} + a_{33}a_{33} + 2a_{12}a_{12} + 2a_{13}a_{13} + 2a_{23}a_{23} = 0.$$

Platí-li taková rovnice pro dvě dvojice bodů, vyjádřené rovnicemi o koeficientech a_{hk} a β_{hk}, platí zajisté také pro třetí dvojici bodů, obsaženou v řadě oněmi určené, jež totiž je vyjádřena rovnicí s koeficienty $a_{hk} + \lambda\beta_{hk}$ pro určité λ.

přímek může se vyskytnouti i přímka dvojnásobná; také počet základních bodů různých jest menší.

Jest tu možno rozlišiti především dva případy: rovnice $C(\lambda) = 0$ má buď jeden kořen dvojnásobný a jeden jednoduchý nebo má jeden kořen trojnásobný:

α) V prvním případě, kdy $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, odpovídá kořenu dvojnásobnému λ_1 buď dvojice přímek různých nebo přímka dvojnásobná.

α_1) Ke kořenu λ_1 příslušejí dvě různé přímky (reálné nebo sdruženě imaginární), je-li $\Sigma C_{hk}(\lambda_1) \neq 0$. Společný (reálný) bod těchto dvou přímek jest základním bodem svazku a sice dvojnásobným. Neboť pro λ_1 jako dvojnásobný kořen rovnice charakteristické jest (v rovnici pro μ) $\Sigma b_{hk} C_{hk}(\lambda_1) = 0$; a protože platí $C_{hk} C_{ii} = C_{hi} C_{ki}$ (pro $C = 0$), dostaneme, je-li na př. $C_{33} \neq 0$, relaci $\Sigma b_{hk} C_{h3}(\lambda_1) C_{k3}(\lambda_1) = 0$; leží tedy singulární bod této kuželosečky zvrhlé [o souřadnicích $C_{h3}(\lambda_1)$] na kuželosečce $g(x, x) = 0$; jest tudíž tento bod, jsa společným bodem dvou kuželoseček svazku, základním bodem jeho a jako dvojnásobný bod kuželosečky (λ_1) dvojnásobným bodem základním. Jím jako bodem základním prochází také zvrhlá kuželosečka (λ_3), pouze však jedna její přímka (neboť kdyby v uvažovaném bodě ležel společný bod obou přímek kuželosečky (λ_3), bylo by $\Sigma b_{hk} C_{hk}(\lambda_3) = 0$, t. j. λ_3 byl by kořenem dvojnásobným). Jest tedy kuželosečka (λ_3) složena ze dvou přímek, a to reálných, ježto jedna její přímka spojuje, jak uvedeno, reálné singulární body zvrhlých kuželoseček (λ_1) a (λ_3). Průsečíky dvojice přímek (λ_1) s druhou přímkou kuželosečky (λ_3) jsou další dva základní body svazku; jsou buď reálné nebo sdruženě imaginární podle toho, jsou-li reálné resp. sdruženě imaginární obě přímky kuželosečky (λ_1), t. j. je-li $\Sigma C_{hh}(\lambda_1) < 0$ resp. > 0.

Speciální svazek kuželoseček zde vyšetřovaný (svazek typu II.) *má* tedy *jeden dvojnásobný* (reálný) *a dva jednoduché* (reálné nebo sdruženě imaginární) *body základní*; *obsahuje dvě dvojice přímek* (z nichž jedna jest dvojicí přímek reálných, druhá dvojice s průsečíkem v dvojnásobném bodě základním jest složena z přímek reálných nebo sdruženě imaginárních).

α_2) Ke kořenu λ_1 přísluší přímka dvojnásobná, je-li $\Sigma C_{hh}(\lambda_1) = 0$. Protože dvojnásobný bod zvrhlé kuželosečky (λ_3) nemůže z téhož důvodu jako prve ležeti na kuželosečce (λ_1), jsou pouze dva průsečíky přímek (λ_3) s přímkou (λ_1) základními body svazku a sice dvojnásobnými (protože jsou to body na přímce dvojnásobné); jsou reálné nebo sdruženě imaginární podle toho, je-li takovou dvojice přímek (λ_3), t. j. je-li $\Sigma C_{hh}(\lambda_3) < 0$ resp. > 0.

Speciální svazek kuželoseček (typu IV.) *má* tu tedy *dva dvojnásobné body základní* (reálné nebo sdruženě imaginární); *obsahuje jednu přímku dvojnásobnou a jednu dvojici přímek* (reálných nebo sdruženě imaginárních).

β) V případě druhém, kdy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, má svazek kuželoseček pouze jednu kuželosečku zvrhlou, jež jest buď dvojicí přímek různých nebo přímkou dvojnásobnou:

β_1) Kuželosečka příslušná ke kořenu λ_1 jest složena ze dvou různých přímek, je-li $\Sigma C_{hh}(\lambda_1) \neq 0$. Protože jest $\Sigma b_{hk} C_{hk}(\lambda_1) = 0$, leží singulární bod této kuželosečky z téhož důvodu jako prve na $g(x, x) = 0$ a jest základním bodem svazku, aspoň dvojnásobným. Nadto však je tu $\Sigma B_{hk} c_{hk}(\lambda_1) = 0$; položíme-li sem, protože kuželosečka (λ_1) sestává ze dvou přímek o souřadnicích u_k a u'_k, $c_{hk}(\lambda_1) = u_h u'_k$, obdržíme $\Sigma B_{hk} u_h u'_k \equiv$ $\equiv G(u, u') = 0$. Jsou tedy obě přímky kuželosečky (λ_1) sdruženy spolu vzhledem ke kuželosečce $g(x, x) = 0$; a protože jejich průsečík leží na této kuželosečce, jest jedna z přímek tečnou kuželosečky té. Proto jest uvažovaný bod základní pokládati za trojnásobný. Mimo něj existuje ještě jeden jednoduchý bod základní, průsečík druhé přímky kuželosečky (λ_1), která není tečnou u $g(x, x) = 0$, s touto kuželosečkou. Z reálnosti trojnásobného bodu základního plyne reálnost zvrhlé kuželosečky i druhého bodu základního.

Speciální tento svazek kuželoseček (svazek typu III.) *má* tedy *jeden trojnásobný a jeden jednoduchý* (reálný) *bod základní*; *obsahuje jedinou* (reálnou) *dvojici přímek.*

β_2) Je-li konečně zvrhlá kuželosečka (λ_1) přímkou dvojnásobnou, t. j. je-li $\Sigma C_{hh}(\lambda_1) = 0$, jest tato přímka tečnou kuželosečky $g(x, x) = 0$. Neboť platí zde $\Sigma B_{hk} c_{hk}(\lambda_1) = 0$; a položíme-li sem, protože kuželosečka (λ_1) jest zvrhlá v přímku dvojnásobnou o souřadnicích u_k, $c_{hk}(\lambda_1) = u_h u_k$, dostaneme $\Sigma B_{hk} u_h u_k \equiv G(u, u) = 0$. Dotyčný bod této přímky je pak ovšem čtyrnásobným bodem základním pro svazek.

Speciální svazek kuželoseček (typu V.) *má tu* tedy *čtyrnásobný* (reálný) *bod základní*; *jeho jediná kuželosečka zvrhlá je přímka dvojnásobná.*[5])

---

[5]) Do rovnice svazku kuželoseček můžeme (často s výhodou) voliti speciální, zejména zvrhlé kuželosečky jeho: Na př. obecný svazek se základními body A, B, C, D, jehož dvě zvrhlé kuželosečky jsou složeny z dvojice přímek AB, CD o rovnicích $p_1 = 0$, $q_1 = 0$ a z dvojice přímek AC, BD o rovnicích $p_2 = 0$, $q_2 = 0$, má rovnici $p_1 q_1 + \lambda p_2 q_2 = 0$. Svazek, jehož základními body jsou průsečíky (pravé) kuželosečky $f = 0$ a dvou přímek $p = 0$, $q = 0$, má rovnici $f + \lambda pq = 0$: jsou-li p, q různé přímky, jež se neprotínají na kuželosečce $f = 0$ a z nichž žádná není tečnou této kuželosečky, jest svazek ten obecný; jest speciální s jedním dvojnásobným bodem základním a dvěma jednoduchými, jestliže se různé přímky p, q, z nichž žádná není tečnou dané kuželosečky, protínají v bodě kuželosečky, nebo je-li jen jedna tečnou kuželosečky a druhá nejde dotyčným bodem jejím; jest speciální s dvěma základními body dvojnásobnými, jsou-li p, q různé tečny dané kuželosečky, nebo splývají-li v přímku kuželosečky se nedotýkající; jest speciální s jedním základním bodem trojnásobným a jedním jednoduchým, je-li jedna z různých přímek p, q tečnou a druhá ji protíná v bodě dotyčném; jest konečně speciální se základním bodem čtyrnásobným, jsou-li p, q dvě přímky splývající v tečnu kuželosečky dané.

d) Jak už bylo uvedeno, obsahuje svazek kuželoseček pouze zvrhlé kuželosečky a sluje *zvrhlý*, jsou-li všechny koeficienty charakteristické rovnice jeho rovny nule, t. j. platí-li

$$A = 0,\ B = 0,\ \Sigma b_{hk}A_{hk} = 0,\ \Sigma a_{hk}B_{hk} = 0.$$

Jsou zde patrně možny tři případy: zvrhlé kuželosečky základní $f(x, x) \equiv \Sigma a_{hk}x_hx_k = 0$ a $g(x, x) \equiv \Sigma b_{hk}x_hx_k = 0$ jsou buď obě dvojicemi různých přímek, nebo jest jedna takovou dvojicí a jedna přímkou dvojnásobnou, nebo jsou obě dvojnásobnými přímkami.

Jsou-li základní kuželosečky svazku $f(x, x) = 0$ a $g(x, x) = 0$ složeny každá ze dvou různých přímek, leží singulární bod jedné kuželosečky na druhé kuželosečce. Neboť z podmínky

$$\Sigma b_{hk}A_{hk} = 0$$

vyplývá, násobíme-li ji nenulovým faktorem A_{ii} (jeden z minorů A_{ii} musí býti nenulový, protože $f = 0$ není přímkou dvojnásobnou) a použijeme-li relace $A_{hk}A_{ii} = A_{hi}A_{ki}$,

$$\Sigma b_{hk}A_{hi}A_{ki} = 0;$$

Pomocí svazku kuželoseček tak vyjádřeného lze na př. dokázati větu: *Mají-li tři kuželosečky dva společné body, protínají se tři spojnice zbývajících dvojic průsečíků jejich v jednom bodě.* Neboť je-li jedna z daných kuželoseček $f = 0$, přímka spojující dva společné body všech tří $s = 0$ a spojnice obou průsečíků druhé s prvou a třetí s prvou $p_1 = 0$ resp. $p_2 = 0$, jest možno druhou a třetí kuželosečku vyjádřiti rovnicí

$$f + \lambda sp_1 = 0 \quad \text{resp.} \quad f + \mu sp_2 = 0,$$

kde λ a μ mají určité hodnoty. Pro průsečíky těchto dvou kuželoseček pak platí

$$s(\lambda p_1 - \mu p_2) = 0;$$

a protože dva z průsečíků těch leží na $s = 0$, leží další dva na přímce $\lambda p_1 - \mu p_2 = 0$, která prochází průsečíkem přímek $p_1 = 0$ a $p_2 = 0$. Co platí o dvou kuželosečkách zde uvažovaných, platí o svazku jimi určeném: Kuželosečky svazku protínají pevnou kuželosečku, jdoucí dvěma jeho základními body, ve dvojicích bodů, jejichž spojnice tvoří svazek přímek, obsahující také spojnici dvou zbývajících základních bodů svazku.

Nebo *větu Pascalovu* dokážeme takto: Strany šestiúhelníku $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ kuželosečce vepsaného ať mají rovnice $p_{12} = 0,\ p_{23} = 0, \ldots, p_{61} = 0$, přímka P_1P_4 pak rovnici $s = 0$. Protože daná kuželosečka je opsána čtyrúhelníkům $P_1P_2P_3P_4$ a $P_4P_5P_6P_1$, jest kuželosečkou svazků

$$p_{12}p_{34} + \lambda p_{23}s = 0 \quad \text{a} \quad p_{45}p_{61} + \mu p_{56}s = 0$$

pro určité λ a μ. Z identické rovnice, získané odečtením obou těchto rovnic,

$$p_{12}p_{34} - p_{45}p_{61} = s(\lambda p_{23} - \mu p_{56})$$

vyplývá, že čáry druhého stupně

$$p_{12}p_{34} - p_{45}p_{61} = 0 \quad \text{a} \quad s(\lambda p_{23} - \mu p_{56}) = 0$$

jsou totožny; první však obsahuje body P_1, P_4 a průsečíky protějších stran šestiúhelníku $Q = (P_1P_2, P_4P_5)$, $R = (P_3P_4, P_6P_1)$, druhá se rozpadá v přímku P_1P_4 a v přímku jdoucí průsečíkem stran šestiúhelníku $S = (P_2P_3, P_5P_6)$; protože přímka P_1P_4 obsahuje z oněch čtyř bodů P_1 a P_4, obsahuje přímka jdoucí bodem S body Q a R.

protože však A_{1i}, A_{2i}, A_{3i} jsou souřadnice dvojnásobného bodu kuželosečky $f = 0$, praví tato rovnice, že bod ten leží na kuželosečce $g = 0$. Stejně plyne z podmínky $\Sigma a_{hk} B_{hk} = 0$, že dvojnásobný bod kuželosečky $g = 0$ leží na $f = 0$.

Vzájemná poloha dvojic přímkových $f = 0$ a $g = 0$ může býti takovou, že splývají jejich body singulární nebo že singulární bod každé z obou dvojic leží na přímce druhé dvojice mimo její bod singulární. V prvém případě degeneruje zvrhlý svazek kuželoseček v *involuční svazek přímek*. V případě druhém mají obě zvrhlé kuželosečky základní společnou jednu přímku a společný bod mimo ni ležící; *zvrhlý svazek kuželoseček má tu základními body všechny body přímky* uvedené *a jeden bod mimo ni položený; obsahuje jenom dvojice různých přímek, z nichž jedna je totožna s onou přímkou základní a druhá prochází oním základním bodem.*

Je-li základní kuželosečka $f = 0$ dvojicí různých přímek a $g = 0$ přímkou dvojnásobnou, nalezneme z rovnice $\Sigma b_{hk} A_{hk} = 0$ jako nahoře, že singulární bod prvé kuželosečky $f = 0$ leží na dvojnásobné přímce $g = 0$; svazek kuželoseček zvrhá se tu v *involuční svazek paprskový*. Jsou-li konečně obě základní kuželosečky přímkami dvojnásobnými, degeneruje opět svazek kuželoseček v *involuční svazek přímek*.

Celkem existuje tedy jen jeden (uvedený) typ zvrhlého svazku kuželoseček, jenž není svazkem paprskovým. Ve všech případech, kdy singulární bod jedné kuželosečky splývá se singulárním bodem kuželosečky druhé, degeneruje svazek kuželoseček v involuční svazek přímek.

e) K bodu (x'_k) přísluší vzhledem ke kuželosečce (λ) svazku $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$ polára

$$f(x, x') - \lambda g(x, x') = 0;$$

tvoří tedy poláry, příslušné k bodu (x'_k) vzhledem ke všem kuželosečkám svazku, svazek paprskový. Střed tohoto svazku polár je bodem, sdruženým k bodu (x'_k) vzhledem ke každé kuželosečce svazku; dva takové body, navzájem vzhledem ke všem kuželosečkám svazku sdružené, slují prostě *body sdruženými vzhledem ke svazku.*

Bod sdružený k bodu (x'_k) vzhledem ke svazku kuželoseček $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$ má jako průsečík polár $f(x, x') = 0$ a $g(x, x') = 0$ souřadnice

$$f_2(x')\, g_3(x') - f_3(x')\, g_2(x'), \quad f_3(x')\, g_1(x') - f_1(x')\, g_3(x'), \quad f_1(x')\, g_2(x') - f_2(x')\, g_1(x').$$

Bod tento je neurčitý, platí-li

$$f(x, x') \equiv \varkappa g(x, x');$$

bod (x'_k) má v tom případě vzhledem ke všem kuželosečkám svazku, jejichž $\lambda \neq \varkappa$, tutéž polára $f(x, x') \equiv \varkappa g(x, x') = 0$ (kdežto vzhledem ke kuželosečce $(\varkappa)$ má polára neurčitou). To nastane tehdy a jen tehdy, jestliže souřadnice x'_k vyhovují rovnicím

$$f_h(x') - \varkappa g_h(x') \equiv (a_{h1} - \varkappa b_{h1})\, x'_1 + (a_{h2} - \varkappa b_{h2})\, x'_2 + (a_{h3} - \varkappa b_{h3})\, x'_3 = 0$$

pro $h = 1, 2, 3$; musí tedy býti $\varkappa$ kořenem rovnice (pro determinant ze součinitelů rovnic uvedených)

$$(a_{11} - \varkappa b_{11},\ a_{22} - \varkappa b_{22},\ a_{33} - \varkappa b_{33}) = 0.$$

Odtud je patrno, že kuželosečka $(\varkappa)$ je zvrhlou a bod (x'_k) je singulárním bodem jejím. Takový bod, jenž má vzhledem ke všem kuželosečkám svazku tutéž poláru, sluje *singulárním bodem svazku kuželoseček.*

Úhrnem tedy a obdobně pro duální řadu kuželoseček platí:

Ke každému bodu v rovině svazku kuželoseček přísluší svazek polár a jeho střed jako jediný bod k bodu tomu vzhledem ke svazku kuželoseček sdružený; pouze k singulárním bodům zvrhlých kuželoseček svazku přísluší vzhledem ke každé kuželosečce svazku tytéž poláry (tedy všechny jejich body jako sdružené vzhledem ke svazku kuželoseček).

Ke každé přímce v rovině řady kuželoseček přísluší řada pólů a její osa jako jediná přímka k přímce té vzhledem k řadě kuželoseček sdružená; pouze k singulárním přímkám zvrhlých kuželoseček řady přísluší vzhledem ke každé kuželosečce řady tytéž póly (tedy všechny jejich paprsky jako sdružené vzhledem k řadě kuželoseček).

Všimněme si v tom ohledu speciálně základních bodů svazku kuželoseček. *Každý bod základní a jenom takový bod jest sdružen k sobě samému vzhledem ke svazku*; neboť jeho poláry vzhledem ke všem kuželosečkám svazku jsou s ním incidentní, a obráceně.

Každý násobný bod základní jest podle předcházejících úvah singulárním bodem svazku; polára k němu vzhledem ke všem kuželosečkám svazku příslušná jest společnou tečnou těchto kuželoseček. *Mají* tedy *všechny kuželosečky svazku s násobným bodem základním v tomto bodě společný dotyk*; duálně *všechny kuželosečky řady s násobnou přímkou základní mají na této přímce společný dotyk.* Tento dotyk je jednoduchý (dvojbodový), dvojnásobný (trojbodový) nebo trojnásobný (čtyrbodový) podle toho, splývají-li při něm dva resp. tři resp. čtyři body nebo přímky každé kuželosečky svazku nebo řady s tolikéž prvky každé jiné kuželosečky svazku nebo řady.[6])

f) Ve svazku kuželoseček obsahuje polára singulárního bodu, příslušného k určitému kořenu charakteristické rovnice, všechny singulární body, jež k tomuto kořenu nepřísluší; a duálně v řadě kuželoseček pólem singulární přímky procházejí ostatní přímky singulární.

Neboť dejme tomu, že ke kořenům λ_1 a λ_2 charakteristické rovnice přísluší body singulární (x'_k) a (x''_k); platí tedy

$$f(x, x') \equiv \lambda_1 g(x, x'), \quad f(x, x'') \equiv \lambda_2 g(x, x'').$$

[6]) Snadno zjistíme, že speciální svazek kuželoseček s dvěma jednoduchými dotyky je spolu řadou kuželoseček s dvěma jednoduchými dotyky a že speciální svazek s dotykem trojnásobným je spolu řadou s dotykem trojnásobným.

Dosadíme-li sem $x = x''$ resp. $x = x'$ a srovnáme-li tyto identity, obdržíme

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, g(x', x'') \equiv 0$$

tedy pro $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$g(x', x'') \equiv 0,$$

t. j. polára bodu (x'_k) obsahuje bod (x''_k) a každý jiný bod singulární, nepříslušný k λ_1.

Vyšetříme-li na základě této věty všechny možné typy nezvrhlých svazků (řad) kuželoseček, shledáváme:

Svazek (*řada*) *kuželoseček obecného typu* se čtyřmi základními body (přímkami) různými *má* tři singulární body (přímky), jež tvoří *trojúhelník vzhledem ke všem kuželosečkám svazku* (*řady*) *autopolárný*: je to *úhlopříčný trojroh* (*trojstran*) *úplného čtyřrohu* (*čtyrstranu*), *tvořeného čtyřmi základními body* (*přímkami*). Tento autopolárný trojúhelník, společný všem kuželosečkám svazku (řady) jest reálný u svazků (řad) druhu prvního a druhého, kdežto u svazku (řady) třetího druhu má pouze jeden vrchol a protější stranu reálné.

Svazek (*řada*) *kuželoseček s dvěma dvojnásobnými body základními má nekonečně mnoho společných trojúhelníků autopolárných*, jež mají jednu stranu a protější vrchol společné. Tyto trojúhelníky jsou všechny reálné (při imaginárních i při reálných základních bodech uvedených, při těchto mohou však míti také dvojice sdruženě imaginárních vrcholů a stran).

Ostatní speciální typy svazků (řad) kuželosečkových nemají společných trojúhelníků autopolárných.

Zvolíme-li u svazku kuželoseček $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$, u kterého společný trojúhelník autopolárný existuje, tento za nový trojúhelník soustavy souřadnic, transformují se rovnice obou kuželoseček $f(x, x) = 0$ a $g(x, x) = 0$ současně v rovnice obsahující pouze čtverce proměnných, takže rovnice svazku nabude jednoduchého tvaru

$$\Sigma\,(a_{hh} - \lambda b_{hh})\, x_h^2 = 0,$$

kde nové koeficienty a_{hh}, b_{hh} jsou také reálné.

g) Protněme svazek kuželoseček libovolnou (reálnou) přímkou; za takovou lze u svazku obecně položeného $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$ zvoliti stranu základního trojúhelníku soustavy souřadnic, třebas $x_3 = 0$. Kuželosečky uvedeného svazku protínají tuto přímku ve dvojicích bodů o souřadnicích x_1, x_2, o kterých platí

$$(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) - \lambda\,(b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2) = 0$$

čili

$$(a_{11} - \lambda b_{11})\, x_1^2 + 2\,(a_{12} - \lambda b_{12})\, x_1x_2 + (a_{22} - \lambda b_{22})\, x_2^2 = 0.$$

Tyto dvojice bodové tvoří tedy *dvě řady involučně projektivní*.

Vyloučeny jsou patrně případy, kdy přímka $x_3 = 0$ jest částí zvrhlé kuželosečky svazku; také případy, kdy $x_3 = 0$ prochází základním bodem svazku (involuce parabolická). Involuční projektivnost obou řad

bodových, v nichž kuželosečky svazku přímku $x_3 = 0$ protínají, jest tedy *eliptická* nebo *hyperbolická*, není-li přímka ta incidentní s žádným základním bodem svazku; její samodružné body jsou určeny kořeny rovnice

$$(a_{11} - \lambda b_{11})(a_{22} - \lambda b_{22}) - (a_{12} - \lambda b_{12})^2 = 0.$$

Dvě kuželosečky svazku s parametry λ_1, λ_2, jež této rovnici vyhovují, *dotýkají se přímky* $x_3 = 0$.

Platí tedy pro svazek a pro řadu kuželoseček:

Svazek kuželoseček protíná každou (reálnou) přímku své roviny, jež neprochází žádným základním bodem jeho, ve dvou řadách bodových, involučně projektivních; každá přímka taková je tečnou dvou reálných nebo sdruženě imaginárních kuželoseček svazku.[7])[8])

Řada kuželoseček vytvořuje přímkami svých čar v každém (reálném) bodě, jenž neleží na žádné základní přímce její, dva svazky paprskové, involučně projektivní; každý bod takový je (dotyčným) *bodem dvou reálných nebo sdruženě imaginárních kuželoseček řady.*[9])[10])

[7]) Jestliže v rovnici bodu, sdruženého k danému bodu vzhledem ke svazku kuželoseček $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$ (jak byl definován v odst. *e*), totiž v rovnici

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \end{vmatrix} = 0$$

pokládáme souřadnice přímkové u_k za konstantní a souřadnice bodové x_k za proměnné, vyjadřuje rovnice tato *geometrické místo bodů, jež jsou póly dané přímky* (u_k) *vzhledem ke všem jednotlivým kuželosečkám svazku*; tímto geometrickým místem jest, jak patrno, kuželosečka, nazvaná *pólovou kuželosečkou* přímky vzhledem ke svazku. Obdobně jest určena v duálním případě kuželosečka, vytvořená polárami bodu vzhledem k řadě kuželoseček.

Z definice a z rovnice pólové kuželosečky poznáváme zejména: Pólová kuželosečka libovolné přímky vzhledem k obecnému svazku kuželoseček obsahuje tři singulární body svazku, šest bodů harmonických k jednotlivým průsečíkům dané přímky se spojnicemi základních čtyř bodů svazku vzhledem k dvojicím těchto bodů a dva samodružné body involuce na dané přímce svazkem vytaté. Involuce, ve které svazek kuželoseček libovolnou přímku, nejdoucí dvěma základními body jeho, protíná, jest totožna s involucí této přímky vzhledem k pólové kuželosečce její.

A dále zjistíme: Pólová kuželosečka dané přímky vzhledem ke svazku kuželoseček jest zvrhlá tehdy a jen tehdy, prochází-li přímka singulárním bodem svazku (u speciálních svazků s dvěma body dvojnásobnými nebo s jedním čtyrnásobným bodem základním tedy vždy).

Dotyčné body tečen, vedených z pevného bodu ke kuželosečkám svazku nebo řady, a tečny kuželoseček těchto soustav v průsečících jejich s pevnou přímkou vytvořují čáru 3. stupně resp. 3. třídy. Viz *M. Greiner*, Über den Ort der Berührungspunkte der Tangenten von einem Punkte an die Kegelschnitte einer Schaar oder eines Büschels, Archiv Math. Phys. 69 (1883); *B. Sporer*, Über eine besondere, mit dem Kegelschnittbüschel in Verbindung stehende Curve, Zeitschrift Math. Phys. 38 (1893).

[8]) *O invariantech dvou* nebo *tří kuželoseček* pojednávají na př. *A. Clebsch-F. Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie I, p. 288 a n.; *G. Salmon-*

74. Algebraické čáry *n*-tého stupně (a čáry *v*-té třídy). *a) Algebraickou (rovinnou) čarou*

n-tého stupně sluje jednomocná soustava bodů (reálných nebo imaginárních), *jejichž homogenní souřadnice* x_1, x_2, x_3 *vyhovují algebraické rovnici n-tého stupně*

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

v-té třídy sluje jednomocná soustava přímek (reálných nebo imaginárních), *jejichž homogenní souřadnice* u_1, u_2, u_3 *vyhovují algebraické rovnici v-tého stupně*

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0.$$

W. Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte II (7. vyd. 1918), p. 202 a n.; *C. Ciamberlini*, Sul sistema di tre forme ternarie quadratiche, Giornale mat. 24 (1886). Spec. patří ke dvěma kuželosečkám (jako simultánní kontravariant resp. kovariant jejich) kuželosečka přímková nebo bodová, uvedená v (duálních) větách: Přímky protínající dvě pevné kuželosečky ve čtveřině bodů harmonicky sdružených vytvořují kuželosečku, jež sluje *harmonickou* nebo *Staudtovou* kuželosečkou jejich; tato kuželosečka (které se dotýká také osm tečen kuželoseček daných v jejich průsečících) má při daných kuželosečkách $\Sigma a_{hk}x_hx_k = 0$ a $\Sigma b_{hk}x_hx_k = 0$ rovnici

$$(a_{22}b_{33}+a_{33}b_{22} - 2a_{23}b_{23})\,u_1^2+2\,(a_{31}b_{32}+a_{32}b_{31} - a_{12}b_{33} - a_{33}b_{12})\,u_1u_2+\ldots=0.$$

Body vysílající ke dvěma pevným kuželosečkám čtveřinu tečen harmonicky sdružených vytvořují kuželosečku (téhož jména). V případě čtveřin s konstantním dvojpoměrem obecné hodnoty vytvořují uvedené přímky nebo body čáru 4. třídy resp. 4. stupně.

[9]) O kuželosečkách a jejich svazcích i řadách nejen ze stanoviska projektivního, nýbrž postupně i o vlastnostech jejich v geometrii afinní a podobnostní obšírně pojednávají *Hefjter* a *Koehler*, Lehrbuch der analytischen Geometrie I. Typy svazků (a řad) kuželoseček (jež byly v úvaze synthetické a se zřetelem k Desarguesově větě o kuželosečkách, také nahoře odvozené, uvedeny už v čl. 42) lze nalézti též pomocí typů kolineace, produktu dvou polárností vzhledem k základním kuželosečkám svazku (řady); invariantní útvar dotčené kolineace je totiž útvarem autopolárným vzhledem k oběma kuželosečkám základním (podle toho byly jednotlivé typy svazků a řad očíslovány); viz na př. *O. Veblen-J. W. Young*, Projective geometry I, p. 287.

[10]) Vedle uvedených svazků a řad byly vyšetřovány jednomocné (t. zv. smíšené) soustavy kuželoseček, jež procházejí třemi pevnými body a dotýkají se pevné přímky, nebo duálně dotýkají se tří daných přímek a procházejí daným bodem, nebo mají společné dva body a dvě tečny. Viz zejména: *J. Steiner-H. Schröter*, Vorlesungen über synthetische Geometrie II (3. vyd. 1898), p. 341 a n.; *J. Tesař*, Synthetische Untersuchung der gemischten Kegelschnittschaar S ($3l$, $1p$) mit einem imaginären Tangentenpaar, Sitzungsberichte Akad. Wien 84 (1881); *H. O. Zimmermann*, Über gemischte Kegelschnittbüschel, Zeitschrift Math. Phys. 29 (1884); *W. Grüninger*, Das System der Kegelschnitte mit drei festen Punkten und einer festen Tangente, Diss. Giessen 1903; *E. Heinemann*, Die gemischte Kegelschnittschar (Das Kegelschnittsystem S ($1p$, $3l$)), Diss. Giessen 1907; *J. Klíma*, Polárné vlastnosti soustavy kuželoseček, určených dvěma body a dvěma tečnami, Rozpravy Čes. akad. 28 (1919); *G. Loria*, Osservazioni relative alla rappresentazione analitica dei sistemi elementari di coniche o quadriche, Scripta univ. Jerusalem 1923; *M. Mikan*, Polární vlastnosti systému kuželoseček určeného třemi body a tečnou, Časopis mat. fys. 55 (1926). O jiných jednomocných soustavách kuželoseček jednají na př.: *F. Amodeo*, Sulle coniche bitangenti a due coniche, Giornale mat. 24 (1886); *J. Klíma*,

Funkce $f(x_1, x_2, x_3)$ a $\varphi(u_1, u_2, u_3)$ jsou racionální celistvé funkce homogenní o třech proměnných čili ternární formy s koeficienty reálnými. Čáru n-tého stupně značíme někdy c_n, čáru ν-té třídy γ_ν. V úvahách a větách omezíme se na čáry n-tého stupně, pokud věty duální budou odtud plynouti bezprostředně a pokud hledisko duální nebude nutné k doplnění těchto.

Uspořádáme-li funkci $f(x_1, x_2, x_3)$ podle mocnin jedné z proměnných, třebas x_3, a označíme-li $u_k(x_1, x_2)$ binární formu k-tého stupně dvou ostatních proměnných x_1 a x_2, můžeme rovnici čáry n-tého stupně psáti ve tvaru

$$u_n + u_{n-1} \cdot x_3 + u_{n-2} \cdot x_3^2 + \ldots + u_1 \cdot x_3^{n-1} + u_0 \cdot x_3^n = 0.$$

Speciálně čára n-tého stupně jdoucí vrcholem $(0, 0, 1)$ základního trojúhelníku souřadnic musí míti $u_0 = 0$, takže její rovnice nemá členu $u_0 \cdot x_3^n$; čára procházející třemi vrcholy základního trojúhelníku neobsahuje n-tých mocnin žádné ze tří proměnných souřadnic.

Polárné vlastnosti soustavy kuželoseček dotýkajících se dvojnásob dvou kuželoseček . . ., Časopis mat. fys. 56 (1927); *C. Fabry*, Étude géométrique d'une famille de coniques, Nouv. Annales math. (3) 8 (1889) (o průmětech prostorové křivky 3. stupně ze všech bodů jejích na pevnou rovinu).

Jsou-li dány tři kuželosečky $f(x, x) = 0$, $g(x, x) = 0$ a $h(x, x)$ lineárně nezávislé (t. j. mezi jejichž rovnicemi neplatí identický vztah lineární, čili jež nepatří do téhož svazku jednomocného), definuje rovnice

$$\lambda_1 f(x, x) + \lambda_2 g(x, x) + \lambda_3 h(x, x) = 0$$

dvojmocný (lineární) *svazek* čili *síť kuželoseček* (s dvěma nezávislými parametry); a duálně. Obecně pak vyjadřuje při daných $k + 1$ kuželosečkách $f_h(x, x) = 0$ rovnice $\Sigma \lambda_h f_h(x, x) = 0$, kde součet jde od $h = 1$ do $k + 1$, (lineární) *k-mocný svazek kuželoseček* bodových (duálně přímkových, nelze-li ovšem počet parametrů redukovati na menší); vedle případů uvedených ještě $k = 3, 4$ (pro $k = 5$ dostáváme soustavu všech kuželoseček v rovině). Spec. (pro $k = 2, 3, 4$) mohou kuželosečky svazku procházeti třemi společnými body, resp. dvěma, resp. jedním v rovině. O těchto vyšších soustavách lineárních pojednávají zejména *H. Piquet*, Étude géométrique des systèmes ponctuels et tangentiels de sections coniques (Paris 1872); *J. K. Meister*, Über die Systeme, welche durch Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Polardreieck . . . gebildet werden, Zeitschrift Math. Phys. 31 (1886); *A. D. Campbell*, Nets of conics in the real domain, Amer. Journal math. 50 (1928); také *S. Gundelfinger*, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte (1895), p. 218 a n.; *G. Salmon-W. Fiedler*, Analytische Geometrie der Kegelschnitte II. (7. vyd. 1918), p. 34 a n.

Kuželosečky autopolárné vzhledem k pevné kuželosečce tvoří dvojmocnou soustavu kuželoseček, jež se dané kuželosečky dvojnásob dotýkají; pro základní kuželosečku o rovnici $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ mají kuželosečky vzhledem k ní autopolárné rovnici

$$2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0.$$

Viz na př. *P. Appell*, Courbes autopolaires, Nouv. Annales math. (3) 13 (1894); také *V. Retali*, Sopra una serie particolare di coniche d'indice due, Memorie Accad. Bologna (4) 5 (1885); *L. Bérard*, Sur les courbes autopolaires, Nouv. Annales math. (4) 14 (1914).

V souřadnicích nehomogenních $x_1/x_3 = x$, $x_2/x_3 = y$ má pak rovnice algebraické čáry n-tého stupně tvar

$$u_n(x, y) + u_{n-1}(x, y) + u_{n-2}(x, y) + \ldots + u_1(x, y) + u_0(x, y) = 0,$$

kde $u_k(x, y)$ je homogenní funkce stupně k-tého proměnných souřadnic x, y.

Protože binární forma k-tého stupně má $k + 1$ členů, poznáváme odtud, že rovnice čáry n-tého stupně obsahuje $1 + 2 + 3 + \ldots + (n + 1) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$ koeficientů.

Rovnice čáry n-tého stupně jest homogenní v těchto svých součinitelích; a protože dvě rovnice s koeficienty úměrnými vyjadřují tutéž čáru, jsou potřebny ke stanovení čáry n-tého stupně nezávislé poměry uvedeného počtu konstant, tedy $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - 1 = \frac{1}{2}n(n + 3)$ veličin. Tyto veličiny mohou býti určeny ze stejného počtu sobě neodporujících a nezávislých rovnic; zejména z $\frac{1}{2}n(n + 3)$ rovnic vyjadřujících, že čára prochází tolika právě body v obecné poloze. A protože rovnice odtud plynoucí jsou lineární, jest *čára n-tého stupně jednoznačně určena $\frac{1}{2}n(n + 3)$ svými body obecně položenými*.[1])

Algebraická čára n-tého stupně jest buď *pravá* (vlastní, jednoduchá) nebo *se rozpadá* v čáry stupňů nižších, tak ovšem, že součet čísel udávajících stupně těchto částí čáry uvažované činí n; lze-li totiž funkci $f(x_1, x_2, x_3)$ rozložiti ve dva nebo více racionálních celistvých faktorů, sestává čára $f = 0$ ze souboru dvou nebo více čar stupňů nižších (daná čára nebo její součástka může býti také násobná, jestliže totiž funkce f nebo její faktor je mocninou funkce stupně nižšího).[2])[3])[4])

[1]) Je totiž možno, že uvedený počet daných bodů neposkytuje stejného počtu nezávislých rovnic, takže čar body těmi jdoucích je neomezené množství (na př. jestliže z 5 bodů pro čáru 2. stupně leží aspoň čtyři na přímce nebo jestliže 9 bodů pro čáru 3. stupně leží v průsečících dvou čar takových). Že a jak lze nalézti body v počtu nahoře uvedeném, aby jimi procházela jediná křivka n-tého stupně, ukazuje *L. Berzolari*, Sulla determinazione di una curva o di una superficie algebrica e su alcune questioni di postulazione, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 47 (1914) (stačí vésti n přímek, z nichž každá protíná danou křivku n-tého stupně bez násobných částí v n různých bodech a žádné dvě se neprotínají na křivce ani na další přímce, a zvoliti z bodů křivky jeden mimo tyto přímky, dva na prvé přímce, tři na druhé, . . ., až n na předposlední i na poslední).

[2]) Případ násobných součástek u dané čáry nebo násobné čáry vůbec zpravidla však v dalších úvahách vylučujeme.

[3]) Podmínky pro rozpad algebraické čáry rovinné (spec. čáry 3. a 4. stupně) vyšetřují zejména *P. Gordan*, Das Zerfallen der Curven in gerade Linien, Math. Ann. 45 (1894); *A. Brill*, Über die Zerfällung einer Ternärform in Linearfactoren, Math. Ann. 50 (1898); *E. Pascal*, Contributo alla teoria della forma ternaria biquadratica e delle sue varie decomposizioni in fattori, Atti Accad. Napoli (2) 12 (1905); *O. E. Glenn*, The theory of degenerate algebraical curves and surfaces, Amer. Journal math. 32 (1910).

[4]) Přehled látky a literární zprávy podává *L. Berzolari* v Encyklopädie der math. Wiss. III. 2_1 (*C* 4: Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven, 1906) a v Pascalově Repertorium der höh. Math., 2. vyd.

b) Dvě čáry stupně m-tého a stupně n-tého mají obecně mn bodů společných. Neboť rovnice čar těch $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ a $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ lze psáti ve tvaru

$$u_0 x_3^m + u_1 x_3^{m-1} + u_2 x_3^{m-2} + \ldots + u_{m-1} x_3 + u_m = 0,$$
$$v_0 x_3^n + v_1 x_3^{n-1} + v_2 x_3^{n-2} + \ldots + v_{n-1} x_3 + v_n = 0,$$

kde u_k a v_k jsou binární formy stupně k-tého proměnných x_1, x_2; znásobíme-li první rovnici faktory $x_3, x_3^2, \ldots, x_3^{n-1}$, druhou faktory $x_3, x_3^2, \ldots, x_3^{m-1}$, obdržíme spolu s danými $m + n$ rovnic, lineárních v $x_3, x_3^2, \ldots, x_3^{m+n-1}$. Vyloučíme-li z těchto rovnic uvedených právě $m + n - 1$ mocnin x_3^k, dostaneme (ve tvaru determinantním) rovnici, jež je homogenní v proměnných x_1, x_2 a stupně mn-tého; ta má mn kořenů $x_1 : x_2$, příslušných společným bodům obou čar (určujících spojnice bodu $(0, 0, 1)$ s těmito body).[5])

Rovnice, ke které jsme dospěli, může míti kořeny násobné; příslušné k nim průsečíky musíme ovšem čítati v témž počtu. Dejme tomu zejména, že v rovnicích daných čar scházejí členy se součiniteli u_0, $u_1, \ldots, u_{i-1}$, dále $v_0, v_1, \ldots, v_{j-1}$; z eliminačního determinantu poznáme, že výsledná rovnice pro $x_1 : x_2$ je stupně $(mn - ij)$-tého; v tom případě pokládáme bod $(0, 0, 1)$ za průsečík ij-násobný. Mají-li mimo to součinitelé u_i a v_j nejvyšších mocnin x_3^{m-i} resp. x_3^{n-j} v daných rovnicích společný faktor h-tého stupně, přijdeme k výsledku, že obě čáry ty mají $mn - ij - h$ společných bodů mimo $(0, 0, 1)$, tedy $ij + h$ v bodě tom.

Rovnice, získaná eliminací souřadnice x_3, může míti kořeny imaginární (po dvou sdružené); příslušné k nim body musíme ovšem čítati jako průsečíky imaginární. Reálných průsečíků dvou čar stupňů m-tého a n-tého jest $mn - 2p$, kde p je nula nebo celé číslo kladné.

Rovnice uvažovaná může konečně býti splněna identicky: dané dvě čáry mají nekonečně mnoho společných bodů, mají společnou část nebo je dokonce jedna součástkou druhé.[6])

II. 1. (kap. 13. a další, 1910). Souborně pak o těchto čarách jednají: *J. Plücker*, Theorie der algebraischen Curven (1839); *G. Salmon*, A treatise on the higher plane curves (1852, 3. vyd. 1879; něm. zpracování W. Fiedlerova 2. vyd. 1882, franc. O. Cheminova 2. vyd. 1903); *L. Cremona*, Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane (1861, Opere I.; česky s doplňky *Em. Weyr* 1873); *A. Clebsch-F. Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie I. (1876, franc. A. Benoist 1879); *H. Wieleitner*, Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung (1905); *F. Enriques*, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, 3 sv. (1915—24); *S. Ganguli*, Lectures on the theory of plane curves, 2 sv. (1919, 2. vyd. 1925); *H. Hilton*, Plane algebraic curves (1920); *A. Brill*, Vorlesungen über ebene algebraische Kurven und algebraische Funktionen (1925); *J. L. Coolidge*, A treatise on algebraic plane curves (1931).

[5]) Předpokládáme ovšem, že bod $(0, 0, 1)$ leží mimo společné body daných čar a mimo jejich spojnice.

[6]) Věta o počtu mn průsečíků dvou algebraických čar stupňů m-tého a n-tého bez společných částí sluje obyčejně *větou Bézoutovou*; o ní podrobněji *F. Enriques*, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche I, p. 224 a n.; II, p. 77 a n.

Z uvedeného vyplývá spec. pro přímku: *Přímka má s čarou n-tého stupně n společných bodů*, z nichž po případě některé splývají nebo jsou imaginární, po dvou sdružené; má-li s čarou více než n bodů společných, má s ní společných bodů nekonečně mnoho, jest její součástkou.

A obecně čára m-tého stupně, jež má s čarou stupně n-tého více než mn společných bodů, má s ní společnou svou část nebo, je-li pravá, jest nutně celá její částí.[7])

c) Jsou-li $f(x_k) = 0$ a $g(x_k) = 0$ rovnice dvou čar, obou stupně n-tého, sluje soustava čar daná rovnicí

$$f + \lambda g = 0$$

svazkem čar n-tého stupně s parametrem λ.[8])

Jsou-li $\varphi(u_k) = 0$ a $\psi(u_k) = 0$ rovnice dvou čar, obou třídy ν-té, sluje soustava čar daná rovnicí

$$\varphi + \lambda\psi = 0$$

řadou čar ν-té třídy s parametrem λ.

Dvě čáry n-tého stupně, svazek určující, protínají se v n^2 bodech, jež slují *základní body* (*base*) svazku. Každá hodnota parametru λ dává čáru stupně n-tého, jdoucí těmito průsečíky; každým bodem roviny, mimo průsečíky ty zvoleným, prochází jedna čára svazku (jejíž λ určíme z rovnice $f + \lambda g = 0$ po dosazení souřadnic bodu toho).

Obráceně k uvedenému, že každá čára svazku prochází n^2 průsečíky dvou čar základních $f = 0$ a $g = 0$, platí: *Každá čára n-tého stupně, jdoucí společnými n^2 body dvou čar téhož stupně $f = 0$ a $g = 0$, patří do svazku jimi určeného*, takže má rovnici tvaru $f + \lambda g = 0$. Neboť je-li uvažovaná čára, jdoucí n^2 základními body svazku, $h = 0$, a položíme-li bodem na ní zvoleným i n^2 body základními (pravou) čáru svazku, je tato totožna s čarou $h = 0$, protože s ní má $n^2 + 1$ společných bodů.[9])

Odtud plyne charakteristická vlastnost svazku čar n-tého stupně jako jednomocné *soustavy lineární*: Jestliže algebraický jednomocný systém čar (n-tého stupně) je takový, že obecným bodem roviny prochází jediná čára jeho, je tento systémem lineárním (a tedy svazkem). Určuje-li totiž zvolený bod, obecně položený, jednu čáru soustavy, je rovnice této soustavy prvního stupně v parametru; bod společný dvěma čarám soustavy $f = 0$, $g = 0$ poskytuje však dvě a tedy neomezeně mnoho hodnot parametru, takže takový bod je společný všem čarám

---

[7]) Viz dále *M. Noether*, Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen, Math. Annalen 23 (1884); *C. Segre*, Le moltiplicità nelle intersezioni delle curve piane algebriche, Giornale mat. 36 (1898). Také *A. Brill*, Vorlesungen über ebene algebraische Kurven und algebraische Funktionen, p. 130 a n.

[8]) Místo parametru λ zavádíme souměrněji dva homogenní parametry λ_1 a λ_2 (kladouce $\lambda = \lambda_2/\lambda_1$), takže svazek čar píšeme ve tvaru $\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0$.

[9]) Hořejší věta sluje *principem Laméovým* (jako samozřejmou ji uvedl *G. Lamé* r. 1818); platí také o čarách zvrhlých (bez proměnných částí násobných). Viz *F. Enriques*, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche I, p. 230 a n.

soustavy. Má tedy čára systému, určená obecným bodem roviny, rovnici tvaru $f + \lambda g = 0$.

d) Bylo uvedeno, že čára n-tého stupně je určena svými $\frac{1}{2}n(n+3)$ body; všimněme si důležité výjimky. Je pozoruhodné, že pro $n \geqq 3$ je počet bodů, stanovících čáru n-tého stupně, roven nebo menší než počet bodů, tvořících basi svazku čar toho stupně; tyto body nebo jejich část neurčují zajisté čáru stupně n-tého. Zvolme v rovině pro čáru n-tého stupně počet bodů o jeden menší, tedy $\frac{1}{2}n(n+3) - 1$ bodů; z rovnic odtud plynoucích lze určiti součinitele v rovnici čáry n-tého stupně jen jako lineární funkce neznámé konstanty k, takže body těmi je stanoven svazek čar stupně n-tého $f + kg = 0$. Všechny čáry tohoto svazku mají n^2 společných bodů, mezi nimiž je $\frac{1}{2}n(n+3) - 1$ bodů předem zvolených; mají tedy čáry svazku mimo ony dané body ještě $n^2 - [\frac{1}{2}n(n+3) - 1] = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ společných bodů. Vidíme odtud, že *všechny čáry n-tého stupně, jdoucí* $\frac{1}{2}n(n+3) - 1$ *pevnými body, mají* (obecně) *ještě* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *pevných bodů společných*. Vidíme však také, že kdybychom zbývající bod, jehož je vedle prve zvolených $\frac{1}{2}n(n+3) - 1$ bodů potřeba ke stanovení čáry n-tého stupně, zvolili mezi ostatními $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ společnými body svazku, nepřispěl by k určení čáry (rovnice $f + kg = 0$ byla by pro souřadnice takového bodu splněna identicky, takže by z ní nebylo možno vypočísti k). Obecně tedy lze říci, že z bodů, jež mají určiti čáru n-tého stupně, musí jeden (každý) ležeti mimo basi svazku čar, ostatními stanoveného.[10])

Z uvedené věty vyplývá: *Jestliže z* n^2 *průsečíků dvou čar n-tého stupně leží na čáře p-tého stupně* $(p < n)$ np *bodů, leží ostatních* $n(n-p)$ *bodů* (obecně) *na čáře stupně* $(n-p)$*-tého*. Neboť dejme tomu, že z uvažovaných průsečíků leží np na čáře p-tého stupně c_p; z ostatních průsečíků je body v počtu $\frac{1}{2}(n-p)(n-p+3)$ určena čára $(n-p)$-tého stupně c_{n-p}, jež spolu s čarou c_p dává (zvrhlou) čáru stupně n-tého. Tato čára (složená z čar c_p a c_{n-p}) prochází tedy $np + \frac{1}{2}(n-p)(n-p+3) = \frac{1}{2}n(n+3) - 1 + \frac{1}{2}(p-1)(p-2) \geqq \frac{1}{2}n(n+3) - 1$ body; proto prochází podle hořejší věty i ostatními všemi z n^2 bodů uvažovaných (jichž je $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$). Protože však více než np dotčených bodů nemůže ležeti na c_p, leží všechny tyto body spolu s prve uvedenými $\frac{1}{2}(n-p)(n-p+3)$, tedy dohromady $n(n-p)$ bodů na c_{n-p}.[11])

e) Větu o závislosti průsečíků dvou čar téhož stupně lze rozšířiti

[10]) Uvedená zde věta (že totiž čára n-tého stupně není vždy určena svými $\frac{1}{2}n(n+3)$ body) bývá nazývána *paradoxem Cramerovým* (pojmenoval ji tak *G. Cramer* r. 1750); upozornil na ně *C. Mac Laurin* (1720), vyložili je částečně (po stránce algebraické) *L. Euler* a *G. Crameř*, v geometrickém významu však (pomocí pojmu svazku čar) teprve *G. Lamé* (1818).

[11]) Větu tuto uvádí po prvé *J. D. Gergonne* (1827). Odtud plyne *zobecněná věta Pascalova*: V jednoduchém $2n$-úhelníku, kuželosečce vepsaném, leží $n(n-2)$ průsečíků každé strany o lichém čísle pořadovém s nesousedními stranami o čísle sudém na čáře $(n-2)$-ho stupně.

na průsečíky dvou čar stupňů různých: *Všechny čáry n-tého stupně, jdoucí* $nm - \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ *pevnými body čáry stupně m-tého, kde* $m < n$, *mají s touto* (obecně) *ještě* $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ *pevných bodů společných.*[12]) Neboť pokládáme-li danou čáru m-tého stupně c_m za součástku čáry stupně n-tého, je druhou její součástí čára $(n-m)$-tého stupně c_{n-m}; tato je určena $\frac{1}{2}(n-m)(n-m+3)$ body ležícími mimo c_m. Čára n-tého stupně, složená z čar c_m a c_{n-m}, prochází $nm - \frac{1}{2}(m-1) \cdot (m-2) + \frac{1}{2}(n-m)(n-m+3) = \frac{1}{2}n(n-3) - 1$ body; všechny čáry n-tého stupně těmito body jdoucí tvoří svazek a jdou podle hořejší věty ještě $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ pevnými body. Z těchto bodů leží na c_{n-m} dalších $n(n-m) - \frac{1}{2}(n-m)(n-m+3)$ bodů, na c_m dalších $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ bodů.

Majíce na zřeteli všechny průsečíky dvou čar stupňů n-tého a m-tého, jmenujeme skupinu p těchto průsečíků, která se s částečnou skupinou jich q doplňuje na počet úplný, *zbytkem* (residuem) skupiny té ($p + q = mn$). Podle toho můžeme říci, že obecně skupinou $mn - p$ bodů čáry m-tého stupně (kde $m < n$) jest určen její zbytek $p = \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$. Je pozoruhodné, že tento zbytek nezávisí na n.

V případě $m = n$ přechází věta uvedená ve větu odst. *c.*[13]) Pro $m > n$ je počtem $\frac{1}{2}n(n+3)$ bodů na čáře m-tého stupně zvolených čára n-tého stupně stanovena a dalších $nm - \frac{1}{2}n(n+3)$ průsečíků je tím samozřejmě už určeno. Pro $m = n+1$ a $n+2$ je ostatně zbytek zde udaný roven zbytku prve nalezenému.

Budiž ještě vytčeno, že uvedené množství $nm - \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ bodů je největší počet bodů, jež může z $\frac{1}{2}n(n+3)$ bodů, čáru n-tého stupně určujících, býti zvoleno na dané čáře nižšího stupně m-tého, nemá-li se čára ta rozpadnouti.[14])[15])

75. Singulární body a přímky. *a*) V rovině čáry n-tého stupně $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ buďtež dva body $P(x_k)$ a $Q(x_k)$; libovolný bod na přímce body těmi procházející má souřadnice $x_k + \lambda y_k$ $(k = 1, 2, 3)$, jsa tam

---

[12]) Uvedl *C. G. J. Jacobi* (1836).

[13]) Kdežto však pro $m = n$ tvoří čáry n-tého stupně, jdoucí pevnými $\frac{1}{2}n(n+3) - 1$ body, soustavu jednomocnou, jest pro $m < n$ soustava čar těch, jdoucích zvolenými $nm - \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ body, vícemocná.

[14]) Viz dále *H. G. Zeuthen*, Sur la détermination d'une courbe algébrique par des points données, Math. Annalen 31 (1888).

[15]) Větu zde uvedenou lze ještě zobecniti: Čára r-tého stupně, jdoucí $mn - \frac{1}{2}(m+n-r-1)(m+n-r-2)$ průsečíky dvou čar stupňů m-tého a n-tého (kde $r \geqq m$, $r \geqq n$, $r \leqq m+n-3$), prochází i zbývajícími průsečíky (neleží-li tyto na čáře stupně $(m+n-r-3)$-ho). Viz *A. Cayley*, On the intersection of curves, Cambridge math. Journal 3 (1843, Collected papers 1.), a *J. Bacharach*, Über den Cayley'schen Schnittpunktsatz, Math. Annalen 26 (1885); dále *E. Study*, Über Schnittpunktfiguren ebener algebraischer Curven, Math. Annalen 36 (1890); *O. M. Thalberg*, On the intersections of plane algebraic curves, Messenger math. 57 (1927). Pro věty o zbytku vůbec na př. *J. L. Coolidge*, A treatise on algebraic plane curves, p. 29 a n.

určen hodnotou konstanty λ. Aby bod $(x_k + \lambda y_k)$ přímky PQ ležel na čáře $f(x_k) = 0$, musí býti splněna rovnice

$$f(x_1 + \lambda y_1,\ x_2 + \lambda y_2,\ x_3 + \lambda y_3) = 0;$$

tuto rovnici můžeme podle věty Taylorovy psáti ve tvaru

$$f(x_k) + \lambda \Delta_y f(x_k) + \tfrac{1}{2}\lambda^2 \Delta_y{}^2 f(x_k) + \tfrac{1}{6}\lambda^3 \Delta_y{}^3 f(x_k) + \ldots + \frac{1}{n!}\lambda^n \Delta_y{}^n f(x_k) = 0,$$

kde operační symboly $\Delta_y{}^p$, aplikované na funkci $f(x_k)$, značí

$$\Delta_y f(x_k) = y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

$$\Delta_y{}^2 f(x_k) = y_1{}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2} + y_2{}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2} + y_3{}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3{}^2} + 2y_1 y_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + 2y_1 y_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} + 2y_2 y_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3},$$

atd., symbolicky pak obecně

$$\Delta_y{}^p f(x_k) = \left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^p f(x_k),$$

kdež po umocnění exponentem p jest každou mocninu derivačního symbolu nahraditi derivací řádu udaného stupněm mocniny, aplikovanou na funkci $f(x_k)$; speciálně jest $\frac{1}{n!}\Delta_y{}^n f(x_k) \equiv f(y_k)$.[1])

Uvedená rovnice, jsouc n-tého stupně pro λ, poskytuje n hodnot této veličiny, jimiž je stanoveno n průsečíků přímky PQ s danou čarou. Leží-li speciálně bod $P(x_k)$ na čáře dané, platí pro něj $f(x_k) = 0$, a rovnice pro λ má jeden kořen $\lambda_1 = .0$. Aby při tom ještě druhý průsečík přímky PQ s danou čarou padl do bodu P, musí býti také $\lambda_2 = 0$, což vyžaduje, by platilo

$$\Delta_y f(x_k) = 0.$$

Pro všechny body $Q(y_k)$, jejichž souřadnice vyhovují rovnici

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

má přímka PQ s danou čarou $f(x_k) = 0$ dva splývající body společné, jest tečnou čáry dané; *tečna čáry* $f(x_k) = 0$ v bodě jejím (x_k) má tedy rovnici

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

[1]) Chceme-li se vyvarovati případu $\lambda = \infty$ (pro bod Q), píšeme (souměrněji, ale složitěji) souřadnice bodu na přímce PQ ve tvaru $\mu x_k + \lambda y_k$, takže bodu P přísluší $\lambda = 0$, $\mu = 1$, bodu Q přísluší $\lambda = 1$, $\mu = 0$ a obecnému bodu dvojice parametrů (λ, μ). Rovnice pro parametry průsečíků přímky PQ s danou čarou nabude ovšem tvaru

$$\mu^n f(x_k) + \mu^{n-1}\lambda \Delta_y f(x_k) + \ldots + \lambda^n f(y_k) = 0.$$

Speciálně čára $f(x_k) = 0$ jdoucí vrcholem (0, 0, 1) základního trojúhelníku, jejíž rovnice je tedy tvaru $u_n + u_{n-1}x_3 + \ldots + (ax_1 + bx_2) \cdot x_3^{n-1} = 0$, má v něm tečnu o rovnici $ay_1 + by_2 = 0$; t. j. rovnici tečny u čáry procházející vrcholem základního trojúhelníku soustavy souřadnic (na čáře ležícím) obdržíme, položíme-li nule rovným koeficient u $(n-1)$-ní mocniny (tedy nejvyšší mocniny) příslušné souřadnice.

Duálně čára ν-té třídy $\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$ má se svazkem paprskovým, určeným dvěma přímkami (u_k) a (v_k), společných ν přímek o souřadnicích $u_k + \lambda v_k$, jejichž konstanty λ jsou kořeny rovnice ν-tého stupně

$$\varphi(u_1 + \lambda v_1,\ u_2 + \lambda v_2,\ u_3 + \lambda v_3) = 0.$$

Je-li přímka (u_k) tečnou čáry dané, vyplňují přímky (v_k), o kterých platí

$$v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + v_3 \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} = 0$$

svazek paprskový, který má s danou čarou dvě splývající přímky společné; jeho střed s uvedenou rovnicí jest *dotyčným bodem* oné tečny (u_k) na čáře $\varphi(u_k) = 0$.[2])[3])

b) Jestliže rovnice, ke které jsme dospěli,

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

platí identicky, t. j. pro každý bod (y_k) roviny, protíná každá přímka, jdoucí bodem $P(x_k)$ na dané čáře, čáru tu ve dvou bodech splývajících; neboť v rovnici pro λ, prve uvedené, odpadá vedle členu prostého $f(x_k)$ také člen lineární $\lambda \Delta_y f(x_k)$, takže pro každou přímku PQ jsou dva kořeny rovnice té λ_1 a λ_2 rovny nule. To nastane tehdy a jen tehdy, je-li současně

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0;$$

čára uvažovaná jde sama dvakrát bodem $P(x_k)$, tento sluje *dvojnásobným* (dvojným) *bodem čáry*.

Proti tomu každý bod $P(x_k)$, pro jehož souřadnice jest $f(x_k) = 0$,

---

[2]) Chceme-li čáru, danou jako bodový útvar rovnicí $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, pokládati duálně za *útvar přímkový* (obálku jejích tečen) a nalézti v tomto smyslu její duální *rovnici v souřadnicích přímkových* $F(u_1, u_2, u_3) = 0$, vyloučíme z rovnic $\partial f/\partial x_1 : u_1 = \partial f/\partial x_2 : u_2 = \partial f/\partial x_3 : u_3$ a $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ (nebo $f(x_1, x_2, x_3) = 0$) souřadnice x_k. Jiný způsob je tento: Abychom vyjádřili, že přímka $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ je tečnou čáry $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, t. j. má s ní společné dva body splývající, eliminujeme z rovnice, vzniklé vyloučením jedné souřadnice, třebas x_3, z obou uvedených rovnic, tedy z rovnice $f(x_1, x_2, -(u_1x_1 + u_2x_2)/u_3) = 0$ a její derivace podle x_1/x_2 tento poměr souřadnic zbývajících. Duálně lze z rovnice čáry v přímkových souřadnicích odvoditi její rovnici v souřadnicích bodových.

[3]) Má-li daná přímka býti tečnou čáry v daném bodě svém, přistupuje k lineární podmínce pro koeficienty v rovnici čáry, plynoucí z daného bodu, druhá podmínka rovněž lineární; podmínka však pro čáru, aby se dotýkala dané přímky v bodě neznámém, není lineární.

ale $\Delta_y f(x_k)$ není identicky rovno nule (t. j. neplatí $\partial f/\partial x_k = 0$ pro $k = 1, 2, 3$), sluje *jednoduchým* (nebo obyčejným) bodem čáry dané.

Je-li bod $P(x_k)$ dvojnásobným bodem čáry dané, takže o jeho souřadnicích platí $f(x_k) = 0$ a identicky $\Delta_y f(x_k) = 0$, existují body (y_k), pro které jest také $\Delta_y^2 f(x_k) = 0$; protože zde $\lambda^3 = 0$, má spojnice takového bodu $Q(y_k)$ s bodem P na dané čáře tři body splývající, přímka PQ je tečna čáry v bodě P. Body (y_k) této vlastnosti vyplňují čáru

$$\Delta_y^2 f(x_k) = 0,$$

tedy čáru druhého stupně. Podle geometrického významu svého skládá se kuželosečka ta ze dvou přímek, jež jsou tečnami čáry dané v bodě dvojnásobném.[4])

Že kuželosečka $\Delta_y^2 f(x_k) = 0$ se rozpadá ve dvě přímky, lze ovšem dokázati analyticky: podle věty Eulerovy o funkcích homogenních a na základě toho, že bod (x_k) je dvojnásobným bodem čáry dané, platí

$$\begin{aligned}(n-1) f_1 &\equiv x_1 f_{11} + x_2 f_{12} + x_3 f_{13} = 0,\\ (n-1) f_2 &\equiv x_1 f_{21} + x_2 f_{22} + x_3 f_{23} = 0,\\ (n-1) f_3 &\equiv x_1 f_{31} + x_2 f_{32} + x_3 f_{33} = 0,\end{aligned}$$

kde f_k a f_{hk} psáno místo $\partial f/\partial x_k$ resp. $\partial^2 f/\partial x_h \partial x_k$; protože tyto tři rovnice poskytují (nenulové) řešení x_1, x_2, x_3, jest determinant z jejich koeficientů roven nule, t. j.

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

To však je dostačující podmínkou toho, aby kuželosečka

$$\Delta_y^2 f(x_k) \equiv y_1^2 f_{11} + y_2^2 f_{22} + y_3^2 f_{33} + 2y_1 y_2 f_{12} + 2y_1 y_3 f_{13} + 2y_2 y_3 f_{23} = 0$$

byla zvrhlá.

Dvě přímky vyjádřené rovnicí $\Delta_y^2 f(x_k) = 0$ jsou buď reálné různé, dvojnásobný bod maje dvě reálné různé tečny sluje *uzel*; nebo jsou reálné splývající, dvojnásobný bod s dvojnásobnou tečnou (reálnou) sluje *hrot*; nebo jsou sdruženě imaginární, dvojnásobný bod s imaginárními tečnami sdruženými sluje *bodem isolovaným*. Nerozlišujeme-li útvarů reálných a imaginárních, rozeznáváme (často) jen dva druhy bodů dvojnásobných, dvojný bod s tečnami různými (*dvojný bod* v užším smyslu nebo obyčejný) a *hrot* (bod vratu, kuspidální).

Je-li speciálně vrchol (0, 0, 1) základního trojúhelníku dvojnásobným

[4]) Všechny přímky jdoucí dvojnásobným bodem čáry mohou (protínajíce tam čáru ve dvou bodech splývajících) býti nazvány tečnami čáry v bodě tom; protože však za (pravou) tečnu křivky pokládáme obyčejně jenom mezní polohu její sečny pro dva nekonečně blízké (bez omezení se sbližující) průsečíky přímky té s křivkou, nazveme tečnami čáry v bodě dvojnásobném pouze dvě přímky nahoře uvedené, z nichž každá má s jednou větví čáry dva nekonečně blízké body společné a s druhou bod třetí. (Chceme-li všechny přímky bodem dvojným vedené jmenovati tečnami čáry, nazveme dotčené dvě přímky tečnami hlavními.)

bodem čáry $f(x_k) = 0$, jest v její rovnici vedle $u_0 = 0$ také $u_1 = 0$, takže soubor členů s nejvyšší mocninou proměnné x_3 je tam $u_2(x_1, x_2) \,.\, x_3^{n-2}$; a obráceně. Tečny čáry v bodě tom mají pak rovnici $u_2(x_1, x_2) = 0$.[5])

Duální úvaha pro čáru v-té třídy $\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$ vede k *dvojnásobné tečně* (bitangentě) čáry dané: platí-li o souřadnicích přímky (u_k) současně

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} = 0,$$

jest přímka ta dvojnásobnou tečnou čáry $\varphi(u_k) = 0$; její dva dotyčné body jsou vyjádřeny rovnicí

$$u_1^2\varphi_{11} + u_2^2\varphi_{22} + u_3^2\varphi_{33} + 2u_1u_2\varphi_{12} + 2u_1u_3\varphi_{13} + 2u_2u_3\varphi_{23} = 0;$$

jsou buď různé, reálné nebo sdruženě imaginární, tečna tu sluje *dvojnou* v užším smyslu, nebo (reálné) splývající, tečna sluje *inflexní* (tečnou obratu).[6])

c) Týmž způsobem můžeme dospěti k m-násobnému bodu ($m > 2$) čáry algebraické: bod $P(x_k)$ na čáře n-tého stupně $f(x_k) = 0$ sluje *m-násobný*, jestliže každá přímka bodem tím procházející má s čarou společných m bodů splývajících (čára sama prochází bodem tím m-krát).

Budiž m-násobným bodem čáry $f(x_k) = 0$ vrchol $(0, 0, 1)$ základního trojúhelníku. V tom případě a pouze tehdy obsahuje rovnice čáry proměnnou x_3 jenom v mocnině $(n - m)$-té a v mocninách nižších. Neboť čára n-tého stupně s rovnicí

$$u_n + u_{n-1}\, x_3 + \ldots + u_{m+1} \,.\, x_3^{n-m-1} + u_m \,.\, x_3^{n-m} = 0,$$

kde $u_p(x_1, x_2)$ jest homogenní funkce p-tého stupně proměnných x_1 a x_2, je proťata každou přímkou $x_2 = \mu x_1$ v m bodech $(0, 0, 1)$ (a v jiných

---

[5]) Z rovnic $\partial f / \partial x_k = 0$ $(k = 1, 2, 3)$, jimž musí vyhověti souřadnice dvojnásobného bodu čáry $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, jest možno vyloučiti tyto souřadnice a obdržeti tak podmínku pro koeficienty rovnice $f = 0$; *existence dvojného bodu* u čáry n-tého stupně *vyjadřuje se* tedy *rovnicí, platnou o součinitelích rovnice této čáry. A existence hrotu* u čáry takové *jest vyjádřena dvěma rovnicemi pro koeficienty její rovnice*, jak lze snadno seznati třebas z rovnice dvou splývajících tečen ve vrcholu základního trojúhelníku, položeného do bodu toho. Požadavek, *aby daný bod byl dvojným bodem* s různými tečnami *nebo hrotem* čáry, převádí se ve *tři resp. čtyři rovnice*, platné o součinitelích rovnice její; neboť aby bod $(0, 0, 1)$ byl na čáře $u_0x_3^n + u_1x_3^{n-1} + u_2x_3^{n-2} + \ldots$ $\ldots + u_n = 0$ bodem dvojným, musí býti $u_0 = 0$ a $u_1 \equiv ax_1 + bx_2 = 0$, tedy $a = 0$, $b = 0$, aby pak byl hrotem, musí pro $u_2 \equiv cx_1^2 + 2dx_1x_2 + ex_2^2$ dále platiti $d^2 - ce = 0$.

Můžeme tedy říci: Čára n-tého stupně s d body dvojnými (o různých tečnách) a r hroty může (obecně) vyhověti jen $\frac{1}{2}n(n + 3) - d - 2r$ podmínkám. Čára n-tého stupně, jež má míti d dvojných bodů a r hrotů v bodech daných, může (obecně) vyhověti jen $\frac{1}{2}n(n + 3) - 3d - 4r$ dalším podmínkám.

[6]) Tečna dvojná a inflexní jsou duální k dvojnému resp. kuspidálnímu bodu za předpokladu, že tečny čáry v bodě takovém se nedotýkají dané čáry ještě v bodě jiném a že tečna v bodě dvojném není spolu inflexní tečnou příslušné větve.

$n - m$ bodech), jak seznáme odtud, že dosadíme-li za x_2 a dělíme-li mocninou x_3^n, obdržíme

$$a_n \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + \ldots + a_{m+1} \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{m+1} + a_m \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^m = 0,$$

t. j. rovnici s m kořeny $x_1 = 0$ (a $x_2 = 0$ při libovolném μ).

U čáry s m-násobným bodem v bodě (0, 0, 1) mají pak *tečny její* v bodě tom soubornou rovnici

$$u_m(x_1, x_2) = 0.$$

Rozložíme-li totiž homogenní funkci $u_m(x_1, x_2)$ v m lineárních faktorů $x_2 - v_h x_1$ (kde $h = 1, 2, \ldots, m$), dosadíme-li potom odtud $x_2 = v_h x_1$ do hořejší rovnice čáry a dělíme-li faktorem x_3^n, dostaneme

$$b_n \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + b_{n-1} \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + \ldots + b_{m+1} \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{m+1} = 0,$$

protože $u_m(x_1, v_h x_1) = 0$; $m + 1$ nulových kořenů pro x_1/x_3 a tedy pro x_1 i x_2 svědčí o $m + 1$ splývajících bodech, jež mají ony přímky $x_2 = v_h x_1$ s danou čarou v bodě (0, 0, 1) společny.

Úhrnem (a obecněji) tedy platí: Jestliže nejvyšší mocnina proměnné x_k, vyskytující se v rovnici čáry n-tého stupně, jest stupně $(n - m)$-tého, jest k-tý vrchol základního trojúhelníku m-násobným bodem čáry, a soubornou rovnici tečen jejích v bodě tom obdržíme, položíme-li nule rovným koeficient u této mocniny x_k^{n-m}.

Má-li čára n-tého stupně ve vrcholu (0, 0, 1) základního trojúhelníku svůj bod m-násobný, schází v její rovnici, uspořádané podle mocnin proměnné x_3 člen $u_0 x_3^n$ s jedním koeficientem, člen $u_1 x_3^{n-1}$ s dvěma součiniteli, atd. až člen $u_{m-1} x_3^{n-m+1}$ s m koeficienty; celkem tedy jest v rovnici takové čáry o $\frac{1}{2}m(m+1)$ koeficientů méně než v rovnici obecné. Platí tudíž daný m-násobný bod čáry při jejím stanovení tolik jako $\frac{1}{2}m(m+1)$ *bodů obyčejných.*[7])

Body násobné (dvojné i vícenásobné) slují *singulárními body* čáry (proti bodům jednoduchým čili obyčejným); duálně tečny násobné *tečnami* (přímkami) *singulárními.*[8])[9])

---

[7]) Aby bod P (x_k) byl m-násobným bodem dané čáry $f(x_k) = 0$, k tomu je nutno a stačí, jsou-li nule rovny všechny derivace funkce f řádu $(m - 1)$-ho podle x_1, x_2 a x_3, ne však řádu m-tého (pro souřadnice bodu P; podle věty o funkcích homogenních jsou tehdy ovšem rovny nule také všechny derivace řádů nižších). Rovněž odtud plyne hořejší číslo $\frac{1}{2}m(m+1)$, udávající počet lineárních podmínek, ekvivalentních danému bodu m-násobnému.

[8]) Společný bod dvou čar, jenž je m_1-násobným bodem s různými tečnami u jedné a u druhé m_2-násobným bodem s tečnami různými a různými od tečen oné čáry, platí za $m_1 m_2$ průsečíků čar těch. Mají-li však obě uvedené čáry ve společném bodě s tečen společných, platí bod ten za $m_1 m_2 + s$ průsečíků. Při vyšším dotyku jednotlivých větví uvažovaných čar jest tento počet ještě přiměřeně zvýšiti. Viz *L. Painvin*, Sur l'intersection de deux courbes, Bulletin sc. math. astron. 5 (1873); *G. H. Halphen*, Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques, Bulletin Soc. math. France 1

d) Počet dvojnásobných (vícenásobných) bodů jest u čar n-tého stupně omezen (se zřetelem k číslu n). Na př. pravá čára 3. stupně nemůže míti více dvojných bodů než 1: kdyby měla dva, protínala by ji přímka body těmito jdoucí ve čtyřech bodech, což není možno; nebo pravá čára 4. stupně nemůže míti více dvojných bodů než 3: kdyby měla čtyři, protínala by ji kuželosečka těmito body a dalším pátým bodem čáry té určená v devíti bodech, což opět jest nemožné.

Pravá čára n-tého stupně nemůže míti více než $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *dvojných bodů.*

Dejme tomu totiž, že čára n-tého stupně má N bodů dvojných (s tečnami různými i splývajícími). Položme těmito body a dalšími tolika (N') obyčejnými body na čáře n-tého stupně čáru stupně $(n-2)$-ho, aby byla všemi body těmi určena; protože čára $(n-2)$-ho stupně je určena $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ body, zvolíme tedy $N' = \frac{1}{2}(n-2)(n+1) - N$. Protože však dvě čáry n-tého a $(n-2)$-ho stupně mají jen $n(n-2)$ průsečíků a protože průsečík, který je dvojným bodem jedné z obou čar, platí za dva, jest $2N + N' \leqq n(n-2)$, z čehož plyne, že číslo N jest nanejvýš rovno $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

Rozdíl mezi největším možným počtem dvojných bodů čáry n-tého stupně a skutečným počtem takových bodů jejích sluje *rodem* čáry. Je-li N počet dvojných bodů pravé čáry n-tého stupně, jest tedy její rod

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - N.$$[10][11][12])

(1873), a téhož Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes ve franc. vyd. knihy G. Salmonovy Traité de géométrie analytique (courbes planes) (1884).

[9]) Mimo násobné body s různými tečnami vyskytují se u algebraických čar singulární body složitější (ony slují někdy obyčejné singulární). Bylo zjištěno, že algebraickou čáru rovinnou (bez násobných částí) lze vždy biracionální transformací (konečným počtem transformací kvadratických) převésti v jinou rovinnou, jež má jenom body násobné s tečnami různými; a lze ji biracionálně přiřaditi prostorové čáře bez bodů násobných. Algebraickou čáru rovinnou je možno vždy pokládati za průmět algebraické čáry bez násobných bodů, ležící ve vhodném prostoru vyšším; takže každou singulárnost rovinné čáry algebraické lze vytvořiti promítáním z tohoto prostoru. Viz na př. *J. L. Coolidge*, A treatise on algebraic plane curves, p. 196 a n.; *L. Berzolari* v Encyklopädie math. Wiss. III. 2_1, p. 363; také *M. de Franchis*, Sopra una teoria geometrica delle singolarità di una curva algebrica piana, Rendiconti Circolo mat. Palermo 11 (1897); *P. Roth*, Zur Theorie der singulären Punkte ebener algebraischer Kurven, Monatshefte Math. Phys. 27 (1916).

[10]) Největší možný počet dvojných bodů u čáry n-tého stupně můžeme obecněji odvoditi takto: Položme čáru s-tého stupně N dvojnásobnými body dané čáry a dalšími $\frac{1}{2}s(s+3) - N$ obyčejnými body jejími; čára ta protíná uvažovanou čáru ve $2N + \frac{1}{2}s(s+3) - N$ bodech, kterézto číslo smí býti nanejvýš rovno součinu ns; odtud plyne $N \leqq \frac{1}{2}s(2n-s-3)$. Kvadratická funkce $\frac{1}{2}s(2n-s-3)$ má maximum pro $s = n - \frac{3}{2}$; zvolíme-li za s nejbližší číslo celé $s = n-1$ nebo $s = n-2$, dostaneme pro N maximální hodnotu $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. (Při $s \gtrless n$ a při $s \lessgtr n-3$ dostáváme vskutku hodnoty menší.)

76. Čáry polárné. *a*) U algebraické čáry n-tého stupně $f(x_k) = 0$ definujeme řadu přidružených čar pro libovolný bod (y_k) její roviny: *p-tá polárná čára (polára) bodu (y_k), svého pólu, vzhledem k dané čáře $f(x_k) = 0$ jest čára $(n - p)$-tého stupně s rovnicí*

$$\Delta_y^p f(x_k) = 0,$$

kde symbol Δ_y^p je zkratkou pro mocninu $\left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^p$, v níž po umocnění každou mocninu symbolu $\frac{\partial}{\partial x_k}$ jest nahraditi symbolem derivace řádu rovného stupni mocniny, vždy pro připojenou funkci f. Levými stranami těchto rovnic pro polárné čáry pevného bodu (y_k) vzhledem k dané čáře n-tého stupně jsou tedy koeficienty (až na konstantní faktor) v rovnici pro konstantu λ, jež určuje průsečíky přímky, spojující bod (y_k) a libovolný bod (x_k), s danou čarou. Jsou to (pro $p = 1$ až $p = n - 1$) čáry stupně $(n - 1)$-ho až prvního.

Napíšeme-li místo rovnice pro konstantu λ průsečíku $(x_k + \lambda y_k)$ přímky jdoucí body (x_k) a (y_k) s danou čarou $f(x_k) = 0$, totiž rovnice

---

[11]) Rod algebraické čáry jest její nejdůležitější číselný *invariant při transformacích biracionálních*; jeho pojem zavedl a uvedenou vlastnost poznal po prvé *B. Riemann* (r. 1857), význam jeho zdůraznil a jméno zvolil *A. Clebsch* (r. 1864, kdežto *A. Cayley* a starší angl. odborníci užívají pro něj názvu deficiency vzhledem k definici hořejší). Všeobecně pro čáru stupně n-tého bez násobných částí platí

$$p = \tfrac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - \Sigma \tfrac{1}{2} m_k (m_k - 1),$$

kde součet se týká všech m_k-násobných bodů čáry; pro čáru, rozpadající se v c částí rodů $p_1, p_2, \ldots, p_c$, platí

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_c + 1 - c,$$

takže její $p \geqq 1 - c$. Důkaz vytčené invariantnosti rodu podali *A. Clebsch* a *P. Gordan*, *L. Cremona*, *E. Bertini*, *H. G. Zeuthen* a j.; viz Repertorium höh. Math. II. 1, p. 297; také *F. Enriques*, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche I, p. 280 a n.; II, p. 124 a n., 412 a n. (a III); *J. L. Coolidge*, A treatise on algebraic plane curves, p. 119 a n., 245 a n.

[12]) Obdobně jako u binárních forem vyšetřují se také u forem ternárních jejich *invarianty*, t. j. (racionální celistvé) funkce jejich koeficientů, jež se při lineární transformaci reprodukují, znásobeny jenom mocninou determinantu transformace. Jde-li současně o dvě nebo více forem daných, sluje funkce jejich koeficientů, jež se (až na uvedený faktor) při lineární transformaci nemění, jejich *invariantem simultánním*. Invarianty, položeny rovnými nule, vyjadřují projektivní vlastnosti příslušné čáry rovinné resp. skupiny dvou nebo více rovinných čar. V širším smyslu slují invarianty nebo častěji *kovarianty* forem ternárních funkce koeficientů jejich a proměnných souřadnic bodových x_k, *kontravarianty* pak funkce koeficientů a souřadnic přímkových u_k, *smíšenými invarianty* konečně funkce koeficientů a proměnných x_k i u_k s uvedenou vlastností invariantnosti. Také tyto širší invarianty, rovny nule, vyjadřují projektivní útvary a vztahy.

$$f(x_k) + \lambda \Delta_y f(x_k) + \tfrac{1}{2}\lambda^2 \Delta_y{}^2 f(x_k) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\lambda^{n-1}\Delta_y{}^{n-1} f(x_k) + \\ + \frac{1}{n!}\lambda^n \Delta_y{}^n f(x_k) = 0,$$

obdobnou rovnici pro konstantu μ průsečíku $(y_k + \mu x_k)$ téže přímky s čarou $f(x_k) = 0$, totiž rovnici

$$f(y_k) + \mu \Delta_x f(y_k) + \tfrac{1}{2}\mu^2 \Delta_x{}^2 f(y_k) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\mu^{n-1}\Delta_x{}^{n-1} f(y_k) + \\ + \frac{1}{n!}\mu^n \Delta_x{}^n f(y_k) = 0,$$

poznáváme, protože konstanty λ a $1/\mu$ určují týž bod uvažované přímky, že platí

$$\frac{1}{p!}\Delta_y{}^p f(x_k) = \frac{1}{(n-p)!}\Delta_x{}^{n-p} f(y_k).$$

Odtud vyplývá, že rovnici p-té polárné čáry bodu (y_k) vzhledem k čáře $f(x_k) = 0$ lze psáti také ve tvaru

$$\Delta_x{}^{n-p} f(y_k) = 0.$$

Z čar polárných jsou nejdůležitější *první polára* stupně $(n-1)$-ho s rovnicí

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

kde ovšem y_k jsou konstantní souřadnice pólu a x_k proměnné; potom $(n-1)$-ní polára prvního stupně (*přímá polára*) o rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial y_3} x_3 = 0,$$

kde derivovaná funkce jest $f(y_k)$; a $(n-2)$-há polára 2. stupně (*konická polára*) o rovnici

$$f_{11}x_1{}^2 + f_{22}x_2{}^2 + f_{33}x_3{}^2 + 2f_{12}x_1x_2 + 2f_{13}x_1x_3 + 2f_{23}x_2x_3 = 0,$$

kde opět f_{hk} jsou druhé derivace funkce $f(y_k)$.[1])[2])

Rovnici p-té poláry bodu (y_k) vzhledem k čáře $f(x_k) = 0$ lze psáti podle hořejšího buď $\Delta_y{}^p f(x_k) = 0$ nebo $\Delta_x{}^{n-p} f(y_k) = 0$; odtud plyne vzájemnost mezi body (x_k) a (y_k) i jejich čarami polárnými: *Leží-li bod (x_k) na p-té poláře bodu (y_k), leží bod (y_k) na $(n-p)$-té poláře bodu (x_k)*, ovšem *při téže čáře základní*.

Speciálně póly všech přímek svazku paprskového se středem P vytvořují první polárnou čáru bodu P (vzhledem k dané čáře); nebo obráceně přímé poláry všech bodů první polárné čáry bodu P procházejí tímto bodem.

---

[1]) Speciálně p-té poláry vrcholů základního trojúhelníku soustavy souřadnic mají rovnice $\partial^p f / \partial x_k{}^p = 0$ pro $k = 1, 2, 3$.

[2]) Polárné formy $\Delta_y f(x_k)$ jsou simultánní kovarianty bodu (y_k) a formy dané $f(x_k)$.

Protože k přímkám svazku se středem P_1 příslušejí póly na polárné čáře c_1 stupně $(n-1)$-ho a k přímkám svazku se středem P_2 zase póly na čáře polárné c_2 téhož stupně, *příslušejí k přímce* P_1P_2, oběma svazkům společné, průsečíky obou čar c_1 a c_2, tedy $(n-1)^2$ *pólů*.

A s druhé strany: První poláry všech bodů na přímce procházejí pólem této přímky (vzhledem k dané čáře); procházejí tedy všemi $(n-1)^2$ póly přímky té.

Protože dále o symbolu Δ^p platí vztah $\Delta_y^{r+s} f(x_k) = \Delta_y^r [\Delta_y^s f(x_k)]$, nalézáme: p-tá polára určitého bodu vzhledem k dané čáře jest r-tou polárou téhož bodu vzhledem k $(p-r)$-té poláře bodu toho vzhledem k čáře dané (při $r < p$), a obráceně.[3])[4])

b) Leží-li bod (y_k) *na dané čáře* $f(x_k) = 0$, *procházejí všechny jeho polárné čáry vzhledem k čáře té tímto bodem* (y_k) *a dotýkají se v něm čáry dané.*

Všimněme si nejprve speciálního případu přímé poláry; protože její rovnice pro bod (y_k) jest, jak bylo uvedeno,

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial y_3} x_3 = 0,$$

vidíme z této rovnice, že jest tečnou dané čáry v bodě jejím (y_k); jest určitá v obyčejném bodě dané čáry, neurčitá v bodě dvojnásobném (a ovšem v bodě m-násobném).

Polárná čára p-tá pro bod (y_k) vzhledem k čáře $f(x_k) = 0$ má rovnici

$$\Delta_y^p f(x_k) = 0;$$

aby bod (y_k) ležel na této poláře, musí platiti $\Delta_y^p f(y_k) = 0$. O homogenní funkci $f(x_k)$ n-tého stupně platí však relace

$$\Delta_x^p f(x_k) = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-p+1)\,f(x_k);$$

neboť po dosazení dvojčlenu $1 + \lambda$ za t do vztahu, jenž charakterisuje funkci homogenní,

$$f(tx_1, tx_2, tx_3) = t^n f(x_1, x_2, x_3)$$

obdržíme

$$f(x_k + \lambda x_k) = (1+\lambda)^n f(x_k),$$

po rozvinutí pak na obou stranách dostaneme uvedenou relaci, platnou pro $p = 1, 2, \ldots, n$. Je-li tedy (y_k) bodem čáry $f(x_k) = 0$, platí $f(y_k) = 0$ a podle dokázaného právě vztahu také

$$\Delta_y^p f(y_k) = 0,$$

t. j. p-tá polára prochází bodem (y_k).

---

[3]) Ze vztahu $\Delta_y^r [\Delta_y^s f(x_k)] = \Delta_y^s [\Delta_y^r f(x_k)]$ vyplývá: r-tá polára určitého bodu vzhledem k s-té poláře jeho (vzhledem k čáře dané) jest spolu s-tou polárou bodu toho vzhledem k r-té poláře jeho (vzhledem k dané čáře).

[4]) Polárné čáry bodu P vzhledem k dané čáře rovinné lze definovati (a vyšetřovati) také jako geometrická místa polárných skupin bodových bodu P na každé přímce jím vedené vzhledem ke skupině průsečíků přímky té s čarou danou.

Tečna p-té poláry $\Delta_y{}^p f(x_k) = 0$ v bodě jejím (x_k) má rovnici

$$\sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta_y{}^p f(x_k)) = 0;$$

protože však jest

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta_y{}^p f(x_k)) = \Delta_y{}^p \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

a protože pro homogenní funkci $\partial f/\partial x_i$ stupně $(n-1)$-ho podle relace nahoře dokázané platí

$$\Delta_x{}^p \frac{\partial f}{\partial x_i} = (n-1)(n-2)\ldots(n-p)\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

má (krátíme-li konstantním faktorem) tečna p-té poláry bodu (y_k) v tomto svém bodě, ležícím na dané čáře, rovnici

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0,$$

což je spolu rovnice tečny pro danou čáru $f(x_k) = 0$ samu v témž bodě. Majíce tudíž polárné čáry bodu, na čáře dané ležícího, s danou čarou ve společném bodě tom společnou tečnu, dotýkají se v něm čáry dané.

Obráceně prochází-li polárná čára vzhledem k čáře dané bodem (y_k), k němuž přísluší, leží bod ten na dané čáře. Neboť v tom případě platí $\Delta_y{}^p f(y_k) = 0$ a proto podle vztahu

$$\Delta_y{}^p f(y_k) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) f(y_k)$$

také $f(y_k) = 0$.[5])[6])

c) O polárných čarách libovolného bodu vzhledem k dané čáře s body singulárními platí: *Bod m-násobný dané čáry jest $(m-1)$-násobným bodem její první poláry, $(m-2)$-násobným bodem její druhé poláry atd.* pro libovolný bod její roviny. Neboť rovnice čáry, jež má v bodě (0, 0, 1) svůj bod m-násobný, jest

$$u_n + u_{n-1} \cdot x_3 + \ldots + u_m(x_1, x_2) \cdot x_3{}^{n-m} = 0;$$

první polára bodu (y_k) má tu rovnici, jejíž levá strana končí členem $\left(y_1 \frac{\partial u_m}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u_m}{\partial x_2}\right) x_3{}^{n-m} + y_3 u_m \cdot (n-m) x_3{}^{n-m-1}$, takže rovnice ta obsahuje x_3 v nejvyšší mocnině $(n-m)$-té; pročež tato čára polárná má v uvažovaném bodě svůj bod $(n-1)-(n-m) = (m-1)$-násobný.

Zejména důležitý je případ bodu dvojnásobného: *První polárná čára každého bodu roviny vzhledem k dané čáře prochází jejím bodem dvoj-*

[5]) Kratší je odvození věty, zvolíme-li za uvažovaný bod dané čáry vrchol základního trojúhelníku souřadnic, čehož lze volbou soustavy zajisté docíliti.

[6]) Polárné čáry (jednoduchého) bodu na dané čáře, v němž tato má tečnu s dotykem i-bodovým, vzhledem k ní mají tam s onou tečnou dotyk rovněž i-bodový, jsou-li stupně $\geqq i$, jsou-li však stupně $< i$, mají onu tečnu za svou součástku.

násobným (a všemi dvojnými body jejími, majíc tam body obyčejné). To plyne z obecné věty hořejší nebo také přímo z rovnice první poláry bodu (y_k)

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

jež je souřadnicemi dvojnásobného bodu čáry dané splněna identicky, protože pro něj platí $\partial f / \partial x_k = 0$ $(k = 1, 2, 3)$.[7])

Je-li dvojnásobný bod dané čáry hrotem, dotýkají se první poláry všech bodů roviny (procházejíce jím) dvojnásobné tečny dané čáry v bodě tom. Neboť je-li bod (0, 0, 1) hrotem čáry dané $f(x_k) = 0$ a přímka $x_1 = 0$ příslušnou tečnou, má rovnice čáry tvar

$$u_n + u_{n-1} \cdot x_3 + \ldots + u_3 x_3^{n-3} + x_1^2 x_3^{n-2} = 0.$$

Vypočteme-li odtud první derivace podle proměnných x_k a sestavíme-li pak rovnici první poláry bodu (y_k), totiž $\sum_k y_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$, má člen s nejvyšší mocninou proměnné x_3 koeficientem funkci $2y_1x_1$, z čehož je patrno, že $x_1 = 0$ je tečnou první poláry v bodě (0, 0, 1).[8])

Nalezli jsme prve, že všechny polárné čáry bodu na dané čáře ležícího vzhledem k ní procházejí bodem tím. Je-li bod dané čáry, zvolený za pól čar polárných, dvojnásobným bodem čáry té, jest přímá polára jeho neurčitá; *konická polára dvojnásobného bodu dané čáry vzhledem k ní rozpadá se ve dvě přímky, jež jsou tečnami dané čáry v bodě tom.* To vyplývá přímo z rovnice konické poláry bodu (y_k) vzhledem k čáře $f(x_k) = 0$; neboť rovnici tu můžeme (místo $\Delta_y^{n-2} f(x_k) = 0$) voliti ve tvaru $\Delta_x^2 f(y_k) = 0$, a pro nulové hodnoty prvních derivací funkce $f(y_k)$ se čára ta rozpadá ve dvě přímky, jež jsou vzhledem k hořejšímu tečnami čáry dané.

Pomocí vrcholu základního trojúhelníku soustavy souřadnic dokážeme krátce větu obecnější: *Polárné čáry m-násobného bodu čáry dané vzhledem k této mají v bodě tom rovněž bod m-násobný s týmiž tečnami jako daná čára.* Polárou nejnižšího stupně pro m-násobný bod dané čáry n-tého stupně vzhledem k ní jest $(n - m)$-tá polára stupně m-tého, sestávající z tečen čáry dané v bodě tom.[9])

d) Dotyčné body tečen jdoucích z libovolného bodu (y_k) k dané čáře n-tého stupně $f(x_k) = 0$ leží na první polárné čáře bodu toho vzhledem k čáře dané. Neboť je-li (x_k) jeden z uvedených bodů dotyčných, jest tečna čáry v něm přímou polárou jeho vzhledem k čáře dané; protože

---

[7]) A dále: U první poláry bodu P vzhledem k čáře s bodem dvojnásobným D jest tečna její v tomto bodě D harmonicky sdružena s přímkou DP vzhledem k oběma tečnám dané čáry v D.

[8]) Obecněji: Jestliže dvě z tečen dané čáry v bodě m-násobném splývají, dotýká se první polára každého bodu v rovině této tečny v bodě tom.

[9]) O čarách polárných viz dále na př. *L. Cremona*, Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane.

pak podle předpokladu tato přímá polára bodu (x_k) prochází bodem (y_k), prochází první polára bodu (y_k) bodem (x_k) (viz odst. *a*).

Obrácená věta platí jen s výjimkou: Průsečíky první poláry bodu (y_k) s danou čarou jsou dotyčnými body tečen, vedených z bodu toho k čáře dané, pokud nejsou body dvojnásobnými (m-násobnými). Neboť průsečík dané čáry s první polárou bodu (y_k), je-li bodem obyčejným, má podle vzájemnosti mezi póly a polárnými čarami, právě připomenuté, přímou poláru (t. j. tečnu) jdoucí bodem (y_k); je-li však průsečík ten bodem dvojnásobným, jest přímá polára jeho neurčitá a nepatří k tečnám, vedeným k dané čáře z bodu (y_k).

Počet tečen jdoucích libovolným bodem roviny k dané čáře (jako útvaru bodovému) sluje, jak víme, její *třídou* (v). Protože pak každý průsečík první polárné čáry bodu P s danou čarou, nemá-li tato bodů singulárních, jest dotyčným bodem tečny z bodu P k čáře vedené a protože jenom tyto průsečíky jsou dotyčnými body tečen z bodu P vedených, udává počet průsečíků dané čáry n-tého stupně a její první poláry $(n - 1)$-ho stupně třídu čáry dané. *Čára n-tého stupně bez singulárních bodů jest třídy $n(n - 1)$-ní.*

První polára libovolného bodu vzhledem k dané čáře prochází všemi dvojnásobnými body jejími (viz odst. *c*); každý takový průsečík první poláry v dvojnásobném bodě dané čáry jest pokládati za dva průsečíky, je-li bod dvojnásobným v užším smyslu (protože daná čára má tu dva body své), za tři pak, je-li hrotem (protože první čára polárná má tam s danou čarou společný ještě třetí bod, dotýkajíc se tam dvojnásobné tečny čáry dané). Při stanovení třídy dané čáry jest tedy od součinu $n(n - 1)$ odečísti dvojnásobek počtu bodů dvojných (s různými tečnami) (d) a trojnásobek počtu hrotů (r). *Čára n-tého stupně s d dvojnými body a r hroty jest třídy*

$$v = n(n - 1) - 2d - 3r.$$

Duálně u čáry jako útvaru přímkového v-té třídy sluje počet dotyčných bodů přímek jejích, jež leží na libovolné přímce její roviny, stupněm čáry. Stupeň n čáry v-té třídy, jež má δ dvojnásobných tečen a ϱ tečen obratu, jest tedy

$$n = v(v - 1) - 2\delta - 3\varrho.^{10})$$

Dvojnásobný bod s různými tečnami snižuje třídu čáry, jak vidíme, o dvě jednotky. Protože pak v m-násobném bodě čáry dané má první polára libovolného bodu vzhledem k čáře té bod $(m - 1)$-násobný,

[10]) Jako z n-tého stupně bodové čáry obecné (bez bodů singulárních) plyne její třída $v = n(n - 1)$, vyplývá duálně z v-té třídy přímkové čáry obecné (bez tečen singulárních) stupeň její $v(v - 1)$; že tento stupeň, vyjádřený vzorcem $n(n - 1)[n(n - 1) - 1]$, není roven n, bývá někdy nazýváno *paradoxem Ponceletovým*. Jeho vysvětlení (jak uvedl *Poncelet*) spočívá v tom, že čára, obecná jako útvar bodový, není obecnou jako útvar přímkový (a duálně).

představuje takový bod při různých tečnách $m(m-1)$ průsečíků dané čáry a její první poláry; třída čáry snižuje se proto m-násobným bodem jejím s m různými tečnami o $m(m-1)$ jednotek. *Platí* tedy v tom ohledu *bod m-násobný s různými tečnami jako $\frac{1}{2}m(m-1)$ bodů dvojnásobných s tečnami různými.*[11])

Leží-li bod na dané čáře (jako jednoduchý bod její), snižuje se počet tečen, jež lze vésti z něho k čáře té, nečítáme-li tečnu čáry v něm samém (a je-li tato tečna obyčejná), o dvě; neboť první polára bodu toho dotýká se v něm čáry dané, takže bod ten absorbuje dva průsečíky obou těchto čar (dvě tečny k čáře jdoucí v něm splývají). Duálně počet bodů, v nichž tečna čáry tuto mimo její vlastní bod dotyčný protíná, jest o dva menší než při obecné poloze přímky (dva průsečíky přímky s čarou u tečny splývají).[12])[13])

77. Čára Hesseova. *a*) Mějme opět na zřeteli, že přímka spojující body (x_k) a (y_k) v rovině čáry n-tého stupně $f(x_k) = 0$ protíná čáru tuto v bodech $(x_k + \lambda y_k)$, jejichž konstanty λ jsou kořeny rovnice

$$f(x_k) + \lambda \Delta_y f(x_k) + \tfrac{1}{2}\lambda^2 \Delta_y{}^2 f(x_k) + \ldots + \frac{1}{n!}\lambda^n \Delta_y{}^n f(x_k) = 0;$$

leží-li bod (x_k) na dané čáře, jest $f(x_k) = 0$ a (aspoň) $\lambda_1 = 0$; přímka $\Delta_y f(x_k) = 0$ je tečnou čáry v bodě tom, majíc s ní dva splývající body společné (jest také $\lambda_2 = 0$). Jestliže tedy bod (x_k) leží na čáře $f(x_k) = 0$ a bod (y_k) na tečně čáry té v bodě (x_k), platí vedle $f(x_k) = 0$ též $\Delta_y f(x_k) = 0$. Platí-li pro uvedené body nadto $\Delta_y{}^2 f(x_k) = 0$, má uvažovaná přímka s danou čarou (aspoň) tři splývající body společné: takový bod (x_k) dané čáry jest buď dvojnásobným (ne-li vícenásobným) bodem

[11]) Duálně ovšem μ-násobná tečna s různými body dotyčnými platí za $\frac{1}{2}\mu(\mu-1)$ tečen dvojných (v užším smyslu).

Bod m-násobný, v němž má čára h různých tečen ($h \leqq m$) s dotykem obyčejným, snižuje její třídu o $m(m-1) + (m-h) = m^2 - h$ jednotek, platí zde tedy za $\frac{1}{2}m(m-1)$ bodů dvojných, z nichž je $m-h$ hrotů. Viz *F. Enriques*, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche II, p. 106 a n.

[12]) A z m-násobného bodu čáry, v němž má tato m tečen různých (a s dotykem obyčejným), lze vésti k čáře té tečny v počtu o $2m$ menším než z bodu mimo čáru ležícího.

[13]) Teorie polár u algebraické čáry byla rozšířena v *teorii apolárnosti*: Je-li dána čára n-tého stupně c s rovnicí $f(x_k) = 0$, psanou symbolicky $a_x{}^n \equiv (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^n$, a čára ν-té třídy γ ($\nu < n$) s rovnicí $\varphi(u_k) = 0$ čili symbolicky $u_a{}^\nu \equiv (u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3)^\nu$, sluje polárou čáry γ vzhledem k čáře c čára $(n-\nu)$-tého stupně s rovnicí $\Delta_a{}^\nu f(x_k) \equiv a_a{}^\nu a_x{}^{n-\nu} = 0$; je-li polára čáry γ vzhledem k čáře c neurčitá, sluje γ apolárná vzhledem k c; je-li spec. $\nu = n$, jest uvedená polární forma stupně nultého (redukuje se na bilineární funkci koeficientů rovnic $f = 0$ a $\varphi = 0$, symbolického tvaru $a_a{}^n \equiv a_a{}^n$), a zde při platnosti podmínky $a_a{}^n = 0$ jmenují se čáry c a γ navzájem apolárné (také harmonické). Viz na př. *F. Enriques*, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche II, p. 61 a n.; Repertorium höh. Math. II. 1, p. 280 a n.

čáry a kuželosečka $\Delta_y{}^2 f(x_k) = 0$ rozpadá se ve dvě tečny její v bodě tom; nebo jest bod (x_k) jednoduchým bodem čáry dané, tečna $\Delta_y f(x_k) = 0$ má v něm s čarou dotyk trojbodový, jest *inflexní tečnou* čáry v bodě (x_k), jenž se nazývá také bodem inflexním. V tom případě musí býti $\Delta_y f(x_k)$ faktorem funkce $\Delta_y{}^2 f(x_k)$, jež se tedy opět rozpadá ve faktory lineární; neboť konická polára $\Delta_y{}^2 f(x_k) = 0$ bodu (x_k) dotýká se tečny $\Delta_y f(x_k) = 0$ a může s ní jen uvedeným způsobem míti více než dva splývající body společné.

Analytickou podmínkou toho, aby bod (x_k) byl inflexním bodem nebo bodem dvojnásobným čáry dané, jest tedy podmínka pro rozklad funkce $\Delta_y{}^2 f(x_k)$ na faktory lineární, t. j.

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Tento determinant sluje *determinantem Hesseovým H* funkce $f(x_k)$[1]; důležitá čára, vyjádřená rovnicí $H(x_k) = 0$, sluje *Hesseovou čarou*, příslušnou k čáře $f(x_k) = 0$.[2] Nalezli jsme tedy, že *každý inflexní nebo dvojnásobný* (vícenásobný) *bod čáry dané leží na příslušné k ní čáře Hesseově.*

Obráceně *každý průsečík Hesseovy čáry s čarou danou jest buď inflexním bodem nebo bodem dvojnásobným* (vícenásobným) *dané čáry.* Poznali jsme dříve, že $H = 0$ může vyplynouti z rovnic $\partial f / \partial x_k = 0$ $(k = 1, 2, 3)$; v tom případě jest průsečík (x_k) čáry Hesseovy s čarou danou bodem (aspoň) dvojnásobným. Zbývají případy, kdy průsečík (x_k) obou čar jest jednoduchým bodem čáry dané: kuželosečka $\Delta_y{}^2 f(x_k) = 0$ prochází bodem (x_k), protože $\Delta_x{}^2 f(x_k) = n(n-1) f(x_k) = 0$; tato kuželosečka, jsouc konickou polárou bodu (y_k), na dané čáře ležícího, vzhledem k této čáře, dotýká se v něm čáry té; a protože se kuželosečka ta rozpadá ve dvě přímky $(H = 0)$, jest jedna z nich nutně tečnou dané čáry; proto jest v hořejší rovnici pro průsečíky tečny čáry v uvažovaném bodě $\lambda^3 = 0$ a bod ten je bodem inflexním.[3])

Protože Hesseův determinant obsahuje součiny tří derivací druhého řádu funkce stupně n-tého, jest *u dané čáry n-tého stupně Hesseova čára stupně* $3(n-2)$*-ho.* Vzhledem k předcházejícímu vyplývá odtud, že daná *čára n-tého stupně bez bodů singulárních má* $3n(n-2)$ *bodů*

---

[1]) Determinant Hesseův (forma Hesseova) čili krátce *hessian* sluje tak (z návrhu *Sylvestrova*) podle *O. Hesseho*, jenž jej první (r. 1844) studoval.

[2]) Hesseova forma H je kovariantem dané formy f; proto sluje Hesseova čára $H = 0$ čáry $f = 0$ *kovariantní čarou*, příslušnou k čáře dané; rovněž tak dále uvedené čáry Steinerova a Cayleyova.

[3]) Daná čára má v bodě, v němž se své tečny dotýká i-bodově, s Hesseovou čarou svou dotyk $(i-2)$-bodový.

Při úvaze o významu Hesseovy čáry pro čáru danou jest vyloučiti případ, že daná čára má svými součástkami přímky (a že má části násobné).

inflexních; neboť všechny průsečíky této čáry stupně n-tého a její Hesseovy čáry stupně $3(n-2)$-ho a jenom tyto jsou body inflexními.[4])

b) Víme, že Hesseova čára čáry dané prochází také jejími body dvojnásobnými. *Ve dvojnásobném bodě dané čáry s různými tečnami má její čára Hesseova také bod dvojnásobný s týmiž tečnami; v hrotu dané čáry má její Hesseova čára bod trojnásobný, z jehož tečen dvě splývají s dvojnásobnou tečnou čáry dané.*

Obě tyto věty dokážeme výpočtem, zvolíce dvojnásobný bod dané čáry v bodě (0, 0, 1) a dvě tečny její ve stranách $x_1 = 0$ a $x_2 = 0$ základního trojúhelníku, resp. dvojnásobnou tečnu ve straně $x_1 = 0$. V prvním případě má čára s dvojnásobným bodem a dvěma různými tečnami v něm rovnici

$$u_n + \ldots + u_3(x_1, x_2) \cdot x_3^{n-3} + x_1 x_2 x_3^{n-2} = 0.$$

Stačí ovšem přihlížeti ke členům s nejvyšší mocninou proměnné x_3; protože z druhých derivací funkce $f(x_k)$ obsahují derivace f_{11}, f_{22}, f_{33} pořadem členy toho druhu $\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} x_3^{n-3}$, $\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} x_3^{n-3}$, $(n-2)(n-3) \cdot x_1 x_2 x_3^{n-4}$, derivace pak f_{12}, f_{13}, f_{23} členy x_3^{n-2}, $(n-2) x_2 x_3^{n-3}$, $(n-2) x_1 x_3^{n-3}$, dostaneme pro Hesseův determinant jako člen s nejvyšší mocninou proměnné x_3 výraz

$$[2(n-2)^2 - (n-2)(n-3)] \cdot x_1 x_2 x_3^{3n-8} = (n-1)(n-2) x_1 x_2 x_3^{3n-8}.$$

Má tedy Hesseova čára stupně $(3n-6)$-ho v tomto případě rovnici končící členem, jenž svědčí o tom, že v bodě (0, 0, 1) má tato čára bod dvojnásobný s tečnami $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

V případě druhém má čára $f(x_k) = 0$ rovnici

$$u_n + \ldots + u_3(x_1, x_2) \cdot x_3^{n-3} + x_1^2 x_3^{n-2} = 0;$$

derivace f_{11}, f_{22}, f_{33} mají zde jako členy s nejvyšší mocninou proměnné x_3 pořadem $2x_3^{n-2}$, $\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} x_3^{n-3}$, $(n-2)(n-3) x_1^2 x_3^{n-4}$, derivace f_{12}, f_{13}, f_{23} pak členy $\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} x_3^{n-3}$, $2(n-2) x_1 x_3^{n-3}$, $(n-3) \frac{\partial u_3}{\partial x_2} x_3^{n-4}$. Hesseova čára stupně $(3n-6)$-ho má zde rovnici končící členem

$$[2(n-2)(n-3) - 4(n-2)^2] \cdot x_1^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} x_3^{3n-9} =$$

$$= -2(n-1)(n-2) x_1^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} x_3^{3n-9};$$

---

[4]) Z průsečíků Hesseovy čáry s čarou danou rozlišíme bod inflexní od bodu dvojnásobného třebas tím, že pro dvojnásobný (vícenásobný) bod čáry $f(x_k) = 0$ platí $\partial f / \partial x_k = 0$ $(k = 1, 2, 3)$, nikoli však pro bod inflexní (není-li snad spolu dvojným). Také odtud, že inflexní (obyčejný) bod čáry dané jest obyčejným bodem čáry Hesseovy, kdežto bod dvojnásobný jest (aspoň) dvojnásobným bodem Hesseovy čáry, jak uvidíme. Přeložíme-li vyšetřovaný bod do bodu (0, 0, 1), schází v transformované rovnici čáry dané člen $u_0 x_3^n$, avšak je-li bod ten inflexní (obyčejný), zůstává tam $u_1(x_1, x_2) \cdot x_3^{n-1}$ a mimo to $u_2(x_1, x_2)$ obsahuje jako faktor funkci u_1.

odtud vysvítá, že bod (0, 0, 1) je trojnásobným bodem čáry Hesseovy s tečnami $x_1 = 0$, $x_1 = 0$, $\partial^2 u_3/\partial x_2^2 = 0$.[5])

Má-li daná čára n-tého stupně body singulární, snižuje se tím uvedený prve počet jejích bodů inflexních $3n(n-2)$. V každém dvojnásobném bodě svém s různými tečnami je čára daná proťata čarou Hesseovou tak, že bod ten absorbuje 6 průsečíků; neboť každá ze dvou větví Hesseovy čáry, protínajíc tam dvě větve čáry dané a majíc s jednou z nich společnou tečnu, má tam s čarou danou tři společné body splývající. V každém hrotu svém má čára daná s čarou Hesseovou 8 bodů společných; neboť každá ze dvou větví čáry Hesseovy protíná čáru danou v bodě dvojnásobném a má s ní společnou tečnu, což činí šest bodů, třetí větev čáry Hesseovy pak protíná danou čáru v bodě dvojnásobném (bez společné tečny), čímž se uvedený počet zvyšuje na osm. Proto čára n-tého stupně, jež má d dvojných bodů s různými tečnami a r hrotů, má inflexních (bodů a) tečen

$$\varrho = 3n(n-2) - 6d - 8r.^{6})^{7})$$

Duálně pak čára ν-té třídy, jež má δ tečen dvojnásobných a ϱ tečen inflexních, má hrotů

$$r = 3\nu(\nu-2) - 6\delta - 8\varrho.$$

c) Konická polára bodu (y_k) vzhledem k čáře $f(x_k) = 0$ o rovnici $\Delta_x^2 f(y_k) = 0$ rozpadá se ve dvě přímky, je-li splněna podmínka

$$H(y_k) \equiv \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

[5]) Hesseova čára, příslušná k čáře obecné (bez bodů singulárních) nemá vůbec bodů dvojných (její $d = 0$, $r = 0$). Pro důkaz viz *P. del Pezzo*, Sulla curva Hessiana, Rendiconto Acc. Napoli 22 (1883); nebo *F. Enriques*, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche II, p. 180. Jaké prvky singulární u dané čáry a její čáry Hesseovy sobě odpovídají a jakých singulárních prvků Hesseova čára míti nemůže, vyšetřuje *T. R. Hollcroft*, Singularities of the Hessian, Bulletin Amer. math. soc. 33 (1927).

[6]) Podobně jako u bodu dvojného a u hrotu lze zjistiti, že v m-násobném bodě dané čáry má její Hesseova čára bod $(3m-4)$-násobný s týmiž tečnami jako čára daná (dalšími $2(m-2)$ tečnami čáry Hesseovy jsou přímky, tvořící Hesseovu skupinu oněch m tečen ve svazku se středem v bodě uvažovaném; jenom v případě, že všechny tečny dané čáry v bodě m-násobném splývají v jednu, má tam Hesseova čára bod $3(m-1)$-násobný). Takový společný bod obou čar platí za $m(3m-4) + m$ průsečíků; a protože dvojný bod s různými tečnami platí za 6 průsečíků s čarou Hesseovou, nalézáme opět, že m-násobný bod dané čáry jest ekvivalentní $\frac{1}{2}m(m-1)$ bodům dvojnásobným. Určitěji m-násobný bod čáry dané s h tečnami různými ($h \leqq m$), jež nejsou inflexní, snižuje počet inflexních bodů (a tečen) u dané čáry o $3m(m-1) + 2(m-h)$, je tedy ekvivalentní $\frac{1}{2}m(m-1)$ bodům dvojným, z nichž je $m-h$ hrotů. Viz *F. Enriques*, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche II, p. 49 a n., 109 a n.

[7]) Z této relace plyne také, že čára lichého nebo sudého stupně má lichý resp. sudý počet (tečen a) bodů inflexních.

kde derivace f_{hk} jsou funkce proměnných y_k. Dvojnásobný bod této kuželosečky vyhovuje tu svými souřadnicemi (z_k) třem rovnicím

$$z_1 f_{k1} + z_2 f_{k2} + z_3 f_{k3} = 0 \ (k = 1, 2, 3);$$

jestliže tyto rovnice znásobíme faktory y_k a sečteme, dostaneme vzhledem k tomu, že $\sum_k y_k f_{kh} = (n-1) f_h$, po zkrácení rovnici

$$z_1 f_1 + z_2 f_2 + z_3 f_3 = 0,$$

kde opět derivace f_h jsou funkce proměnných y_k. Pokládáme-li (z_k) za pól, má první polára jeho vzhledem k dané čáře rovnici $\Delta_z f(x_k) = 0$, rovnice pak, k níž jsme dospěli, praví, že bod (y_k) leží na první poláře bodu (z_k); a protože první derivace této funkce $z_1 f_1 + z_2 f_2 + z_3 f_3$ podle y_k jsou, jak hořejší rovnice svědčí, rovny nule, jest bod (y_k) dvojnásobným bodem první poláry bodu (z_k). Z úvahy této tedy vyplývá:

Má-li konická polára bodu (y_k) vzhledem k dané čáře dvojnásobný bod v bodě (z_k), má první polára bodu (z_k) vzhledem k téže čáře dvojnásobný bod v bodě (y_k), a obráceně.

Spolu je patrno, že bod (y_k) leží na Hesseově čáře $H = 0$ čáry dané. *Jest* tedy *Hesseova čára $H = 0$ dané čáry geometrickým místem bodů (y_k), jejichž konické poláry vzhledem k čáře dané se rozpadají*, nebo také *geometrickým místem bodů, jež jsou dvojnásobnými body prvních polár vzhledem k dané čáře.*

V souvislosti s tím sluje *geometrické místo bodů (z_k), jež jsou dvojnásobnými body konických polár*, nebo také bodů, *jejichž první poláry mají bod dvojnásobný*, *Steinerova čára $S = 0$* dané čáry. Rovnice čáry Steinerovy vyplývá vyloučením proměnných y_k z rovnic $z_1 f_{k1} + z_2 f_{k2} + z_3 f_{k3} = 0 \ (k = 1, 2, 3)$.[8])[9])

Při dané čáře přísluší ke každému bodu (y_k) čáry Hesseovy bod (z_k) čáry Steinerovy a obráceně; body tyto slují *konjugované*. Přímky spojující dvojice sobě odpovídajících bodů (y_k) a (z_k) obou uvedených čar obalují čáru, jež sluje *Cayleyovou čarou* čáry dané.[10])[11])[12])

---

[8]) Steinerova čára, příslušná k čáře n-tého stupně, má stupeň $3(n-2)^2$. Neboť eliminací tří proměnných z rovnic stupňů s_1, s_2, s_3 obdrží se rovnice obsahující koeficienty první rovnice ve stupni $s_2 s_3$-tém, koeficienty druhé rovnice ve stupni $s_1 s_3$-tém a koeficienty třetí rovnice ve stupni $s_1 s_2$-tém; rovnice zde uvedené jsou pak stupně $(n-2)$-ho v y_1, y_2, y_3 a lineární v koeficientech z_1, z_2, z_3, pročež rovnice výsledná jest stupně $(n-2)^2$ v každé z veličin z_k.

[9]) Čára Steinerova jest také čára vytvořená přímkami, z jejichž pólů dva splývají; čára Hesseova jest pak vytvořena těmito splývajícími póly.

[10]) Jednoduše odvozuje hlavní vlastnosti uvedených čar *A. B. Basset*, On the Hessian, the Steinerian and the Cayleyan, Quart. Journal math. 47 (1916). Syntheticky vyšetřoval čáru Hesseovu (a útvary příbuzné) zvl. *E. Kötter*, Die Hesse'sche Curve in rein geometrischer Behandlung, Math. Annalen 34 (1889).

[11]) Čáry, jež byly od *Cremony* nazvány *Steinerovou* a *Cayleyovou*, vyšetřoval první obecně *J. Steiner* (r. 1848), druhou pro $n = 3$ už *A. Cayley* (r. 1844).

d) Pro čísla udávající stupeň n, třídu v, počet dvojnásobných bodů s různými tečnami d a se splývajícími tečnami (hrotů) r, počet dvojnásobných tečen s různými body dotyčnými δ a se splývajícími body dotyčnými (inflexních) ϱ nalezli jsme v předcházejících úvahách čtyři relace po dvou duální, t. zv. *vzorce Plückerovy*:

$$\begin{aligned} v &= n(n-1) - 2d - 3r, \\ n &= v(v-1) - 2\delta - 3\varrho, \\ \varrho &= 3n(n-2) - 6d - 8r, \\ r &= 3v(v-2) - 6\delta - 8\varrho. \end{aligned}$$

Z těchto důležitých rovnic[13]) jsou však jen tři nezávislé; neboť vyloučíme-li veličinu d z rovnice první a třetí, potom veličinu δ z rovnice druhé a čtvrté, dojdeme téže relace $3(n - v) = r - \varrho$.[14])

Veličiny obsažené ve vzorcích Plückerových jsou k sobě po dvou duální, k číslům n, d a r jsou duálními čísla v, δ a ϱ; ze vzorců těch lze odvoditi relace, vyjadřující rovnost výrazu, jenž obsahuje pouze veličiny jedné skupiny, a výrazu, obsahujícího veličiny duální. Tak zejména vychází, odečteme-li rovnici druhou od první a přičteme-li k výsledku hořejší rovnici $0 = 3(n - v) - (r - \varrho)$, rovnice

$$0 = (n^2 - v^2) + 3(n - v) - 2(d - \delta) - 4(r - \varrho),$$

Stupeň, třídu, počet dvojných i kuspidálních bodů a počet tečen dvojných i inflexních pro čáry Hesseovu, Steinerovu a Cayleyovu, příslušné k dané čáře bez bodů singulárních, uvádí na př. *L. Berzolari*, Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven v Encyklopädie math. Wiss. III. 2_1, p. 341; nebo *F. Enriques*, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche II, p. 183 a 187. Viz dále *B. S. Madhavarao* a *M. Lakshmanmurthi*, On the covariant curves of a singular n-ic, Bulletin Math. soc. Calcutta 14 (1923).

[12]) Pojem čáry Hesseovy zobecnil (v čáru, jež je geometrickým místem dvojných bodů k-tých polár čáry dané) *T. R. Hollcroft*, The generalized Hessian, Quart. Journal math. 50 (1927).

Dotyčné body dvojných tečen vytíná na dané čáře n-tého stupně t. zv. *čára bitangenciální* stupně $(n - 2)(n^2 - 9)$, kterou zavedl *A. Cayley* (1846). Viz také *A. Cayley*, On the double tangents of a plane curve, Phil. Trans. R. soc. London 149 (1859, Collected papers 4.); *O. Dersch*, Doppeltangenten einer Curve n^{ter} Ordnung, Math. Annalen 7 (1873).

Body, v nichž tečny vedené k čáře n-tého stupně z bodu její roviny (neležícího na této čáře, ani na její čáře Hesseově, ani na singulární tečně ani na tečně v singulárním bodě jejím) tuto dále protínají, leží na čáře, jež má stupeň $(n - 1)(n - 2)$ (a nemění se, nahradíme-li danou čáru jinou ze svazku, určeného touto čarou a libovolnou skupinou n přímek oním bodem jdoucích); čára ta byla nazvána *satelitní čarou* zvoleného bodu vzhledem k čáře dané. Viz *G. Kohn*, Über die Satellitcurven und Satellitflächen, Sitzungsberichte Akad. Wien 89 (1884); *J. L. Coolidge*, A treatise on algebraic plane curves, p. 159 a n.

[13]) Z relací těch nalezl první dvě už *Poncelet*, všechny pak *J. Plücker* (z části r. 1834, úplné a s důkazem r. 1839), podle něhož se obyčejně jmenují.

[14]) Pro počet dvojných tečen lze z rovnic Plückerových nalézti $\delta = d + \frac{1}{2}(n^2 - 2n - 2d - 3r)(n^2 - 9 - 2d - 3r)$.

ze které prostou úpravou plyne

$$\tfrac{1}{2}n(n+3) - d - 2r = \tfrac{1}{2}\nu(\nu+3) - \delta - 2\varrho.$$

Smysl této relace je jednoduchý: Čára n-tého stupně jest určena obecně $\frac{1}{2}n(n+3)$ body svými; má-li však bod dvojný s různými tečnami nebo hrot, snižuje se tento počet o jednu resp. o dvě jednotky (protože koeficienty její rovnice musí vyhověti jedné resp. dvěma podmínkám); obdobně v případu duálním. Uvedený vztah tedy praví, že počet bodů, jimiž je čára určena, rovná se počtu tečen určujících čáru duální (což je ovšem samozřejmé).

Odečteme-li opět od prvé rovnice Plückerovy rovnici druhou, dále pak rovnici $0 = 3(n - \nu) - (r - \varrho)$, obdržíme po roztřídění členů

$$n^2 - 3n - 2d - 2r = \nu^2 - 3\nu - 2\delta - 2\varrho;$$

přidáme-li na obou stranách číslo 2 a dělíme-li číslem 2, dostaneme

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - r = \tfrac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2) - \delta - \varrho.$$

Číslo $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - r = \frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2) - \delta - \varrho$, platné pro čáru algebraickou i její duální, sluje — jak už bylo uvedeno — rodem algebraické čáry.

Toto velmi důležité číslo má největší hodnotu $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ u čáry n-tého stupně bez bodů singulárních ($d = 0$, $r = 0$), nejmenší pak hodnotu nulovou u čáry n-tého stupně s $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ body dvojnásobnými (nebo s ekvivalentním počtem bodů vícenásobných).[15])

78. Parametrické vyjádření; čáry racionální. *a*) Jsou-li souřadnice x_1, x_2, x_3 každého bodu na čáře v rovině analyticky dány jako funkce téže proměnné (t), pravíme, že *čára jest vyjádřena parametricky* pomocí parametru t. Dejme tomu tedy, že čára jest dána parametricky rovnicemi

$$x_1 = \varphi(t), \quad x_2 = \psi(t), \quad x_3 = \chi(t),$$

při čemž předpokládáme, že každému bodu čáry přísluší (obecně) jediná hodnota parametru t.

Stupeň algebraické čáry určíme z rovnice $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, kterou nalezneme vyloučením parametru t z rovnic

$$x_1 : x_2 : x_3 = \varphi(t) : \psi(t) : \chi(t);$$

[15]) Čísla uvedená v rovnicích Plückerových slují *charakteristická* (nebo Plückerova) *čísla* algebraické čáry rovinné. Čára projektivní k dané má táž čísla charakteristická; obráceně čáry s týmiž čísly charakteristickými nejsou vždy projektivní. O Plückerových číslech algebraické čáry z historicko-literárního hlediska viz *L. Berzolari* v Encyklopädie math. Wiss. III. 2_1, p. 343, z věcného na př. *J. L. Coolidge*, A treatise on algebraic plane curves, p. 99 a n. O čarách daného stupně se zvolenými body dvojnými a hroty *J. L. Coolidge*, On the existence of curves with assigned singularities, Bulletin Amer. math. soc. 28 (1922); také *T. R. Hollcroft*, Singularities of curves of given order, Bulletin Amer. math. soc. 29 (1923).

nebo zjistíme stupeň čáry ze stupně rovnice pro přímku $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, dosadíme-li tam za x_k uvedené funkce φ, ψ a χ, tedy z rovnice

$$a\varphi(t) + b\psi(t) + c\chi(t) = 0.$$

Abychom nalezli rovnici pro tečnu čáry, dané parametricky, v bodě jejím s parametrem t, všimněme si, že přímka spojující dva body (t) a (t_1) dané čáry má rovnici, jež vyplývá z rovnic

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 &= 0, \\ a\varphi(t) + b\psi(t) + c\chi(t) &= 0, \\ a\varphi(t_1) + b\psi(t_1) + c\chi(t_1) &= 0 \end{aligned}$$

eliminací konstant a, b, c, tedy rovnici

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \varphi(t) & \psi(t) & \chi(t) \\ \varphi(t_1) & \psi(t_1) & \chi(t_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Odečteme-li v tomto determinantu prvky druhého řádku od prvků řádku třetího (v témž sloupci) a dělíme-li tyto rozdíly rozdílem $t_1 - t$, nalezneme po limitování prvků tak vzniklých při $\lim (t_1 - t) = 0$ rovnici

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \varphi(t) & \psi(t) & \chi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) & \chi'(t) \end{vmatrix} = 0,$$

jež vyjadřuje tečnu dané čáry v bodě (t).

Odtud vidíme, že tečna čáry $x_1 = \varphi(t)$, $x_2 = \psi(t)$, $x_3 = \chi(t)$ má souřadnice

$$u_1 = \psi\chi' - \psi'\chi, \quad u_2 = \chi\varphi' - \chi'\varphi, \quad u_3 = \varphi\psi' - \varphi'\psi;$$

třídu čáry dané určíme tedy buď z rovnice, která vyplyne eliminací parametru t z rovnic

$$u_1 : u_2 : u_3 = (\psi\chi' - \psi'\chi) : (\chi\varphi' - \chi'\varphi) : (\varphi\psi' - \varphi'\psi);$$

nebo ze stupně rovnice

$$a(\psi\chi' - \psi'\chi) + b(\chi\varphi' - \chi'\varphi) + c(\varphi\psi' - \varphi'\psi) = 0.$$

Čára $x_1 = \varphi(t)$, $x_2 = \psi(t)$, $x_3 = \chi(t)$ má dvojný bod (s parametry t_1, t_2), mají-li funkce φ, ψ a χ pro t_1 týž poměr hodnot jako pro t_2, t. j. platí-li

$$\varphi(t_1) : \varphi(t_2) = \psi(t_1) : \psi(t_2) = \chi(t_1) : \chi(t_2).$$

Uvažovaná čára má v bodě (t) hrot, platí-li pro jeho parametr

$$\varphi'(t) : \varphi(t) = \psi'(t) : \psi(t) = \chi'(t) : \chi(t).$$

Neboť označíme-li společnou hodnotu poměrů $\varphi(t_1) : \varphi(t)$, $\psi(t_1) : \psi(t)$ a $\chi(t_1) : \chi(t)$ v podmínkách dvojného bodu písmenem k a dosadíme-li tam $\varphi(t_1) = \varphi(t) + (t_1 - t) \cdot \varphi'[t + \vartheta(t_1 - t)]$ a obdobně pro $\psi(t_1)$ i $\chi(t_1)$, obdržíme pro první poměr, týkající se funkce φ,

$$1 + (t_1 - t)\frac{\varphi'[t + \vartheta(t_1 - t)]}{\varphi(t)} = k \text{ čili } \frac{\varphi'[t + \vartheta(t_1 - t)]}{\varphi(t)} = \frac{k - 1}{t_1 - t}$$

a obdobné výrazy pro funkce ψ a χ; odtud pak vidíme, že pro $\lim (t_1 - t) = 0$ nabývají poměry $\varphi'(t) : \varphi(t)$, $\psi'(t) : \psi(t)$ a $\chi'(t) : \chi(t)$ téže hodnoty $\lim \frac{k-1}{t_1 - t}$.

V duálních případech dvojné tečny a tečny inflexní platí obdobné podmínky, týkající se souřadnic u_1, u_2, u_3, nahoře uvedených, jako funkcí parametru t.[1])

b) Čáry rodu 0 lze parametricky vyjádřiti funkcemi racionálními. Předpokládejme nejprve, že jest dána pravá čára n-tého stupně rodu 0 s body (pouze) dvojnásobnými, tedy v počtu $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. K důkazu důležité věty uvedené zvolme soustavu čar q-tého stupně, jdoucích všemi dvojnásobnými body čáry dané a tolika dalšími body čáry té, aby počet všech těchto pevných bodů byl $\frac{1}{2}q(q+3) - 1$; tím docílíme, že čáry zvolené tvořiti budou svazek. Je-li možno q tak zvoliti, aby každá z čar uvedeného svazku protínala danou čáru n-tého stupně v $nq - 1$ bodech pevných a jediném bodě dalším, lze každému bodu dané čáry přiřaditi jednu čáru uvažovaného svazku a tedy jednu hodnotu parametru této čáry ve svazku tom. Uvedeným podmínkám se vyhoví volbou $q = n - 2$: v tom případě bude basi svazku čar na dané čáře tvořiti $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ jejích bodů dvojných a $n - 3$ body další, dohromady $\frac{1}{2}(n-2)(n+1) - 1$; pevných průsečíků každé čáry svazku s čarou danou bude tedy $2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + (n-3) = n(n-2) - 1$, jak bylo žádáno.

Rovnice dané čáry n-tého stupně jest $f(x_1, x_2, x_3) = 0$; rovnice uvedeného svazku čar $(n-2)$-ho stupně budiž $g(x_1, x_2, x_3) + th(x_1, x_2, x_3) = 0$. Vyloučíme-li z těchto dvou rovnic jednu proměnnou, třebas x_2, obdržíme rovnici $n(n-2)$-ho stupně v x_1, x_3, v níž je t obsaženo racionálně; kořeny této rovnice dávají při určitém t poměr souřadnic $x_1 : x_3$ všech průsečíků čáry dané s určitou čarou svazku. Poměr součinitele při nejvyšší mocnině x_3 a součinitele při nejvyšší mocnině x_1 v této rovnici dává součin jejích kořenů; vyloučíme-li odtud konstantních $n(n-2) - 1$ poměrů uvažovaných souřadnic bodů pevných, dostáváme poměr $x_1 : x_3$ souřadnic proměnného bodu na dané čáře. Tak vidíme, že x_1/x_3 vychází rovno poměru dvou racionálních funkcí φ/χ, obou n-tého stupně v t. Dosadíme-li pak takto nalezený poměr x_1/x_3

[1]) Jestliže, vycházejíce od rovnice tečny, nahoře uvedené, uplatníme podmínku, že parametr jejího průsečíku s čarou se bez omezení blíží parametru dotyčného bodu jejího, nalezneme pro parametr inflexního bodu podmínku (nutnou)

$$\begin{vmatrix} \varphi & \psi & \chi \\ \varphi' & \psi' & \chi' \\ \varphi'' & \psi'' & \chi'' \end{vmatrix} = 0.$$

Jest viděti, že této rovnici vyhovuje také parametr hrotu čáry; ten však (u čar algebraických) je dvojnásobným kořenem této rovnice, kdežto parametr bodu inflexního je jejím kořenem jednoduchým.

do rovnice čáry dané, dostaneme rovnici n-tého stupně v x_2, x_3 (s konstantním koeficientem u x_2^n); z jejích kořenů jeden, vyjadřující x_2/x_3 rovněž jako poměr dvou racionálních funkcí ψ/χ n-tého stupně v t, přísluší proměnnému bodu, jehož souřadnice hledáme.

Tak tedy se nalezne parametrické vyjádření čáry n-tého stupně rodu 0

$$x_1 = \varphi(t), \qquad x_2 = \psi(t), \qquad x_3 = \chi(t),$$

kde funkce φ, ψ a χ jsou racionální celistvé funkce n-tého stupně parametru t.

Jestliže daná čára n-tého stupně má obyčejné body násobné, stačí zvoliti opět za čáru q-tého stupně žádané soustavy čáru stupně $(n-2)$-ho a takovou, aby měla v každém k-násobném bodě čáry dané svůj bod $(k-1)$-násobný a aby procházela $n-3$ dalšími pevnými body čáry té: Máme-li zřetel ke všem násobným bodům čáry dané, bude mezi koeficienty rovnice čáry stupně q-tého platit $\Sigma \frac{1}{2}k(k-1) + n - 3$ relací (neboť požadavek, aby čára měla v daném bodě svůj bod m-násobný, platí za $\frac{1}{2}m(m+1)$ lineárních podmínek), což je opět počet $\frac{1}{2}(n-2) \cdot (n+1) - 1$, protože u čáry rodu 0 jest $\Sigma \frac{1}{2}k(k-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$; a pevných průsečíků čáry dané a čáry stupně q-tého bude $\Sigma k(k-1) + n - 3 = n(n-2) - 1$.[2])

c) Platí však i věta obrácená: *Čára, jejíž souřadnice x_k lze vyjádřiti racionálními funkcemi parametru, jest rodu 0.* Předpokládejme tedy, že souřadnice bodu na dané čáře n-tého stupně jsou

$$x_1 = \varphi(t), \qquad x_2 = \psi(t), \qquad x_3 = \chi(t),$$

kde funkce φ, ψ a χ jsou racionální celistvé n-tého stupně. Tečna této čáry v bodě (t) má rovnici

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \varphi & \psi & \chi \\ \varphi' & \psi' & \chi' \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$x_1(\psi\chi' - \psi'\chi) + x_2(\chi\varphi' - \chi'\varphi) + x_3(\varphi\psi' - \varphi'\psi) = 0;$$

koeficienty při x_1, x_2, x_3 jsou zde funkce stupně nejvýše $2(n-1)$-ho (protože nejvyšší členy v rozdílech těch se zruší). Pokládáme-li x_k za konstanty, podává tato rovnice parametry dotyčných bodů tečen, vedených k čáře z pevného bodu (x_k); také však parametry hrotů čáry dané (protože parametry vyhovující relacím $\varphi'/\varphi = \psi'/\psi = \chi'/\chi$ splňují uvedenou rovnici). Je-li tedy třída dané čáry v a počet jejích hrotů r, platí

$$v + r \gtreqless 2(n-1).$$

Avšak třída čáry n-tého stupně s d dvojnými body a r hroty je $n(n-1) - 2d - 3r$, což dosazeno do hořejšího vztahu dává

$$n(n-1) - 2d - 2r \gtreqless 2(n-1)$$

[2]) Má-li konečně daná čára vyšší singulárnosti, lze ji (kvadratickými transformacemi) převésti na případ hořejší, takže uvedená věta platí všeobecně.

čili $$2\,[\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-d-r] \gtrless 0.$$

A protože rod čáry $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)-d-r$ nemůže býti záporný, jest $p = 0$.

Ježto tedy čáry rodu 0 a čáry vyjádřené parametricky funkcemi racionálními (při homogenních souřadnicích celistvými, při nehomogenních obecně lomenými) jsou tytéž, slují čáry rodu 0 *čarami racionálními*.[3][4][5])

79. Soustavy čar algebraických. *a*) Jsou-li dány dvě čáry $f(x_k) = 0$ n-tého stupně a $g(x_k) = 0$ p-tého stupně, hledejme v jejich rovině body, jež mají vzhledem k oběma těmto čarám tutéž přímou poláru.

Přímé poláry bodu (y_k) vzhledem k $f = 0$ a vzhledem ke $g = 0$ mají rovnice

$$x_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0,$$

$$x_1\frac{\partial g}{\partial y_1} + x_2\frac{\partial g}{\partial y_2} + x_3\frac{\partial g}{\partial y_3} = 0;$$

[3]) Racionální čáry se dříve (podle návrhu *Cayleyova*) někdy nazývaly *unikursální* (což však není jméno vhodné pro všechny a jenom čáry rodu 0). Kdyby parametrické vyjádření racionální čáry neposkytovalo pro každý bod její jen jednu hodnotu parametru, lze (zavedením nové proměnné) toho docíliti, aby korespondence mezi body čáry a hodnotami parametru byla obapolně jednoznačná, jak ukázal *J. Lüroth*, Beweis eines Satzes über rationale Curven, Math. Annalen 9 (1876). Jak z parametrických rovnic racionální čáry nalézti její obyčejnou rovnici, ukazuje na př. *J. E. Rowe*, A new method of finding the equation of a rational plane curve from its parametric equations, Bulletin Amer. math. soc. 22 (1916) (k tomu *J. E. Rowe* a *H. W. Richmond* tamtéž 23, 1917). Souřadnice každého bodu racionální čáry n-tého stupně ($n > 2$) lze s výhodou také vyjádřiti racionálními funkcemi goniometrického sinu a kosinu v případě, že čára má dvojný bod isolovaný, funkcemi hyperbolického sinu a kosinu tehdy, má-li čára uzel, konečně mnohočleny n-tého stupně bez členů stupně ($n-1$)-ho, jestliže má čára hrot: ve všech případech tak, aby pro parametry průsečíků dané čáry s libovolnou čarou algebraickou platilo $\Sigma t_k \equiv 0 \bmod \pi i$, resp. $\bmod \pi$, resp. $\Sigma t_k = 0$. Viz *H. Hilton*, Plane algebraic curves, p. 153 a n.; o racionálních čarách vůbec *J. L. Coolidge*, A treatise on algebraic plane curves, p. 368 a n.

[4]) Čáry rodu 1 slují také *eliptické*, protože souřadnice všech bodů takové čáry lze racionálně vyjádřiti funkcemi eliptickými a obráceně, je-li vyjádření toho druhu možné, jest čára rodu 1. Viz na př. *H. Hilton*, Plane algebraic curves, p. 156 a n.; *J. L. Coolidge*, A treatise on algebraic plane curves, p. 363 a n. Zde (p. 354 a n.) také parametrické vyjádření čar rodu $p > 1$.

[5]) Rovinné čáry, invariantní při spojité jednoparametrové grupě kolineací (jež *F. Klein* a *S. Lie* nazvali pro neproměnný dvojpoměr čarami W podle slova Wurf), byly uvedeny už v čl. 63*c*; viz také lit. zprávy *G. Schefferse* v Encyklopädie math. Wiss. III. 3, p. 204 a n.; k tomu *R. Aranjo*, Las curvas W, Pubbl. Lab. Sem. mat. Madrid 3 (1919). O autopolárných nebo aspoň soběduálních čarách pojednávají *P. Appell*, Courbes autopolaires, Nouv. Annales math. (3) 13 (1894); *P. Zeeman*, Jets over autopolaire krommen en oppervlaken, Nieuw Archief (2) 7 (1905); *P. Suchar*, Sur les courbes invariantes par une transformation par polaires réciproques, Nouv. Annales (4) 12 (1912); *T. R. Hollcroft*, Conditions for self-dual curves, Annals math. (2) 27 (1926); *L. E. Wear*, On the group for a class of selfdual plan rational curves, Amer. Journal math. 51 (1929); a j.

aby obě poláry byly totožné, musí platit úměra

$$f_1 : f_2 : f_3 = g_1 : g_2 : g_3$$

čili rovnice

$$f_1 g_2 - f_2 g_1 = 0, \quad f_1 g_3 - f_3 g_1 = 0, \quad f_2 g_3 - f_3 g_2 = 0,$$

kde index k u funkcí f a g proměnných y_1, y_2, y_3 značí derivaci podle y_k. Hledanými body jsou ty, jejichž souřadnice vyhovují těmto rovnicím: první dvě rovnice, jsouce každá stupně $(n + p - 2)$-ho, mají $(n + p - 2)^2$ skupin kořenů; avšak kořeny rovnic $f_1 = 0$, $g_1 = 0$ v počtu $(n - 1) \cdot (p - 1)$, jež patří ke kořenům těm, nevyhovují rovnici třetí; proto mají uvedené tři rovnice pouze $(n + p - 2)^2 - (n - 1)(p - 1)$ skupin kořenů. Tento výraz pro počet bodů, splňujících svými souřadnicemi hořejší úměru, lze upraviti na tvar souměrnější $(n - 1)^2 + (n - 1) \cdot (p - 1) + (p - 1)^2$. Platí tedy:

Vzhledem ke dvěma čarám stupně n-tého a p-tého má tutéž přímou poláru každý z $(n - 1)^2 + (n - 1)(p - 1) + (p - 1)^2$ bodů v jejich rovině.

Dvě čáry téhož stupně n-tého $f = 0$ a $g = 0$ stanoví, jak víme, *svazek čar* n-tého stupně s rovnicí

$$f + \lambda g = 0.$$

Čára svazku toho, určená v něm hodnotou parametru λ, má bod dvojnásobný, jestliže platí

$$f_1 + \lambda g_1 = 0, \quad f_2 + \lambda g_2 = 0, \quad f_3 + \lambda g_3 = 0,$$

kde index k označuje derivaci podle x_k. Vyloučíme-li z těchto tří rovnic souřadnice x_k, obdržíme rovnici pro λ, jejíž kořeny jsou parametry čar s bodem dvojným: ze stupně výsledné rovnice vidíme, že takových čar ve svazku $f + \lambda g = 0$ jest $3(n - 1)^2$.

Vyloučíme-li však z rovnic těch $f_k + \lambda g_k = 0$ parametr λ, obdržíme úměru a rovnice nahoře uvedené pro speciální případ $p = n$; odtud poznáváme, že každý dvojný bod čáry v uvažovaném svazku má vzhledem k oběma čarám $f = 0$, $g = 0$ a proto vzhledem ke všem čarám svazku $f + \lambda g = 0$ tutéž přímou poláru. Dospěli jsme tedy k větě:

Ve svazku čar n-tého stupně jest obsaženo $3(n - 1)^2$ *čar s bodem dvojným; každý tento dvojný bod má tutéž přímou poláru vzhledem ke všem čarám svazku.*

Na př. svazek kuželoseček obsahuje 3 kuželosečky s dvojným bodem, a tyto body jsou vrcholy trojúhelníku autopolárného vzhledem ke všem čarám svazku. Svazek čar kubických obsahuje 12 kubik s bodem dvojným, jenž každý má tutéž přímou poláru vzhledem k čarám svazku.[1])

[1]) Skupina dvojných bodů čar ve svazku bývá nazývána *Jacobiova skupina* svazku. Body ty lze geometricky takto nalézti: Ke třem bodům v rovině svazku, neležícím v jedné přímce, příslušejí tři svazky prvních polár jejich vzhledem k danému svazku čar, jež jsou projektivně sdruženy

b) Aby čára obsažená ve svazku čar n-tého stupně $f + \lambda g = 0$ dotýkala se dané čáry q-tého stupně $h(x_k) = 0$, musí obě čáry míti ve společném bodě svém společnou tečnu; musí tedy pro souřadnice společného bodu jejich (x_k) platiti úměra

$$(f_1 + \lambda g_1) : (f_2 + \lambda g_2) : (f_3 + \lambda g_3) = h_1 : h_2 : h_3,$$

kde index k značí opět derivaci podle x_k. Označíme-li hodnotu poměru $(f_k + \lambda g_k) : h_k$ písmenem $-\mu$, musí tedy býti splněny rovnice

$$f_k + \lambda g_k + \mu h_k = 0,$$

z nichž eliminací parametru λ a konstanty μ vyplývá podmínka

$$J \equiv \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0;$$

tato rovnice jest stupně $(2n + q - 3)$-ho v x_k. A protože hledané body dotyku musí ležeti na čáře q-tého stupně $h = 0$, tedy v průsečíku čar $h = 0$ a $J = 0$, existuje takových bodů $q(2n + q - 3)$. Tedy:

Ve svazku čar n-tého stupně jest $q(2n + q - 3)$ *čar, jež se dotýkají dané čáry q-tého stupně* (bez bodů singulárních).

Má-li čára $h(x_k) = 0$ body dvojnásobné, zmenší se udaný počet, protože v takovém bodě jest hořejší podmínková rovnice splněna, aniž se tam vyskytuje případ uvažovaný; neboť pro dvojný bod čáry $h(x_k) = 0$ platí $h_k = 0$, takže tam jest $J = 0$: a protože dvojný bod čáry $h(x_k) = 0$ s různými tečnami absorbuje dva průsečíky čar $h = 0$, $J = 0$, hrot pak tři jejich průsečíky (jak poznáme, položíce do bodu takového vrchol trojúhelníku souřadnic), zmenší se u čáry $h = 0$ s d body dvojnými a r hroty hořejší číslo o $2d + 3r$ jednotek.

Důležité jsou případy zvláštní: Libovolné přímky v rovině dotýká se $2(n - 1)$ čar ze svazku čar n-tého stupně. Ze svazku přímek dotýká se čáry q-tého stupně s d body dvojnými a r hroty $q(q - 1) - 2d - 3r$ přímek (kteréžto číslo udává třídu čáry q-tého stupně). Ze svazku kuželoseček dotýká se čáry q-tého stupně $q(q + 1)$ kuželoseček (spec. dané kuželosečky se dotýká 6 kuželoseček svazku).

c) Jsou-li dány tři čáry $f(x_k) = 0$ n-tého stupně, $g(x_k) = 0$ p-tého stupně a $h(x_k) = 0$ q-tého stupně, hledejme v jejich rovině geometrické místo bodu, jehož přímé poláry vzhledem ke třem čarám těm se protínají v témž bodě.

(při čemž sobě odpovídají poláry zvolených bodů vzhledem k téže čáře svazku daného); body společné vždy třem sdruženým prvním polárám těchto svazků tvoří Jacobiovu skupinu svazku daného.

Bod, který je pro čáru svazku m-násobným s tečnami různými (a leží mimo základní body svazku), platí za $(m - 1)^2$ bodů této skupiny. Viz (také případy složitější) *F. Enriques*, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche II, p. 160 a n.

Přímé poláry bodu (y_k) vzhledem k $f = 0$, $g = 0$ a $h = 0$ mají rovnice

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0,$$
$$x_1 \frac{\partial g}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial g}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial g}{\partial y_3} = 0,$$
$$x_1 \frac{\partial h}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial h}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0$$

a procházejí jedním bodem tehdy a jen tehdy, platí-li

$$J \equiv \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Determinant z prvních parciálních derivací tří funkcí f, g a h, zde uvedený, sluje *determinant Jacobiův* čili stručně *jakobian* funkcí těch; čára pak s rovnicí $J = 0$ sluje *Jacobiovou čarou* daných tří čar $f = 0$, $g = 0$ a $h = 0$. Jacobiova čára, příslušná k čarám stupně n-tého, p-tého a q-tého, jest stupně $(n + p + q - 3)$-ho. Nalezli jsme tedy:

Geometrickým místem bodů, jejichž přímé poláry vzhledem ke třem čarám $f = 0$, $g = 0$ a $h = 0$ se protínají v jednom bodě, jest Jacobiova čára $J \equiv (f_1 g_2 h_3) = 0$ těchto čar.

Ze vzájemnosti mezi přímou a první polárou vzhledem k dané čáře plyne, že čáru Jacobiovu lze také pokládati za geom. místo bodů, v nichž se protínají první poláry téhož bodu vzhledem k daným třem čarám.

Protože podmínkou pro dvojný bod dané čáry jsou nulové hodnoty prvních derivací levé strany její rovnice podle jednotlivých proměnných, obsahuje Jacobiova čára daných tří čar všechny jejich body dvojné (násobné).

Mají-li tři dané čáry $f = 0$, $g = 0$ a $h = 0$ společný bod, prochází jím také Jacobiova čára jejich. Neboť připočteme-li v jakobianu k prvnímu sloupci, znásobenému faktorem x_1, druhý znásobený souřadnicí x_2 a třetí znásobený proměnnou x_3, obdržíme (vzhledem k větě o funkcích homogenních) rovnici čáry Jacobiovy ve tvaru

$$\begin{vmatrix} nf & f_2 & f_3 \\ pg & g_2 & g_3 \\ qh & h_2 & h_3 \end{vmatrix} = 0,$$

z něhož je patrno, že společný bod čar $f = 0$, $g = 0$ a $h = 0$ leží na jejich čáře Jacobiově.[2])

[2]) Bod, který je pro k-tou ze tří daných čar bodem m_k-násobným $(k = 1, 2, 3)$, jest pro Jacobiovu čáru jejich bodem aspoň $(m_1 + m_2 + m_3 - 2)$-násobným. Viz *F. Gerbaldi*, Sulle singolarità della Jacobiana di tre curve piane, Rendiconti Circolo mat. Palermo 8 (1894).

d) Dané tři čáry n-tého stupně v rovině $f(x_k) = 0$, $g(x_k) = 0$ a $h(x_k) = 0$ určují lineární kombinací svých rovnic

$$f(x_k) + \lambda g(x_k) + \mu h(x_k) = 0$$

dvojmocnou soustavu čar, jež sluje *síť čar* stupně n-tého; každou dvojicí hodnot parametrů λ, μ jest určena jedna čára sítě.[3])

Každým bodem v rovině prochází ze sítě čar ∞^1 čar, tvořících svazek. Neboť parametry λ, μ čar sítě, jdoucích bodem zvoleným (y_k), musí vyhověti rovnici

$$f(y_k) + \lambda g(y_k) + \mu h(y_k) = 0;$$

vyloučíme-li z této rovnice a z rovnice uvažované sítě parametr (třebas) μ, obdržíme rovnici (s proměnnými x_k)

$$f(x_k) \,.\, h(y_k) - h(x_k) \,.\, f(y_k) + \lambda\,[g(x_k) \,.\, h(y_k) - h(x_k) \,.\, g(y_k)] = 0,$$

vyjadřující svazek čar.[4])

Jacobiova čára tří čar $f = 0$, $g = 0$ a $h = 0$ n-tého stupně

$$J \equiv \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} = 0$$

(speciální případ hořejšího) sluje *Jacobiovou čarou sítě* $f + \lambda g + \mu h = 0$; *jest stupně* $3(n - 1)$*-ho.*

Jacobiova čára sítě jest geometrickým místem dvojných (násobných) *bodů čar v síti obsažených.* Neboť souřadnice dvojného bodu čáry $f + \lambda g + \mu h = 0$ musí splňovati rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial h}{\partial x_k} = 0$$

pro $k = 1, 2, 3$; eliminací parametrů dostáváme odtud rovnici $J = 0$ pro souřadnice bodů dvojných.[5])

Jacobiova čára sítě prochází společnými body všech čar v síti obsažených, existují-li, a má v nich své body (aspoň) *dvojné.* Neboť z jakobianu $J = (f_1 g_2 h_3)$ po úpravě dříve vytčené plyne

$$Jx_1 = n \begin{vmatrix} f & f_2 & f_3 \\ g & g_2 & g_3 \\ h & h_2 & h_3 \end{vmatrix};$$

---

[3]) Chceme-li, aby rovnice sítě čar byla homogenní v parametrech, píšeme ji ve tvaru

$$\lambda f + \mu g + \nu h = 0,$$

při čemž jednotlivé čáry v síti obsažené určeny jsou hodnotami poměru $\lambda : \mu : \nu$.

[4]) Jednoduchou speciální síť tvoří čáry n-tého stupně jdoucí $\frac{1}{2}n(n + 3) - 2$ pevnými body v rovině; každý z ∞^1 svazků v síti obsažených prochází těmito pevnými body a jedním dalším bodem roviny. Takovou zvláštní síť tvoří na př. kuželosečky jdoucí třemi pevnými body v rovině.

[5]) Jacobiova čára sítě je také geometrickým místem bodů, v nichž se dvě čáry sítě (a tedy nekonečně mnoho čar sítě) sebe dotýkají.

odtud pak vidíme, že souřadnice, vyhovující současně rovnicím $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$ a tedy rovnici $f + \lambda g + \mu h = 0$, vyhovují také rovnici $J = 0$. Derivujeme-li dále podle x_1 vztah právě uvedený

$$Jx_1 = n\,(f\sigma_{11} + g\sigma_{21} + h\sigma_{31}),$$

kde σ_{hk} značí subdeterminant jakobianu, příslušný k prvku h-tého řádku a k-tého sloupce jeho, dostaneme

$$\frac{\partial J}{\partial x_1}\,x_1 + J = n\left(J + f\,\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + g\,\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + h\,\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1}\right);$$

obdobně derivováním vztahů

$$Jx_2 = n\,(f\sigma_{12} + g\sigma_{22} + h\sigma_{32}) \quad \text{a} \quad Jx_3 = n\,(f\sigma_{13} + g\sigma_{23} + h\sigma_{33})$$

podle x_2 resp. x_3 obdržíme

$$\frac{\partial J}{\partial x_2}\,x_2 + J = n\left(J + f\,\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + g\,\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + h\,\frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2}\right)$$

a

$$\frac{\partial J}{\partial x_3}\,x_3 + J = n\left(J + f\,\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + g\,\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + h\,\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}\right).$$

Odtud je patrno, že souřadnice, jež vyhovují rovnicím $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$ a tedy rovnicím $f + \lambda g + \mu h = 0$ a $J = 0$, splňují také rovnice $J_1 = 0$, $J_2 = 0$, $J_3 = 0$.[6])

Jacobiova čára sítě jest geometrickým místem bodů (y_k), *jejichž přímé poláry vzhledem ke všem čarám sítě se protínají v jednom bodě* (z_k); také *geom. místem bodů* (y_k), *v nichž se protínají první poláry téhož bodu* (z_k) *vzhledem ke všem čarám sítě té.* Neboť přímé poláry libovolných tří čar, v dané síti $f + \lambda g + \mu h = 0$ obsažených, s parametry λ_1 a μ_1, λ_2 a μ_2, λ_3 a μ_3 mají rovnice

$$x_1\,\frac{\partial}{\partial y_1}\,(f + \lambda_k g + \mu_k h) + x_2\,\frac{\partial}{\partial y_2}\,(f + \lambda_k g + \mu_k h) + x_3\,\frac{\partial}{\partial y_3}\,(f + \lambda_k g + \mu_k h) = 0$$

a protínají se v jednom bodě, platí-li

$$J \,.\, \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \mu_1 \\ 1 & \lambda_2 & \mu_2 \\ 1 & \lambda_3 & \mu_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ tedy platí-li } J \equiv (f_1\, g_2\, h_3) = 0,$$

[6]) Obecně nemá Jacobiova čára sítě bodů násobných. Dvojný bod má mimo případ nahoře uvedený (ve společném jednoduchém bodě čar sítě, tedy v jejím jednoduchém bodě základním) ještě v bodě, který je dvojnásobným bodem základním pro svazek čar v síti obsažený, nebo v bodě, který je trojnásobným bodem některé čáry v síti obsažené, nebo konečně v bodě, v němž má svazek sítě tři základní body nekonečně blízké. V základním bodě sítě má Jacobiova čára místo bodu dvojného bod (aspoň) trojnásobný, jestliže tam všechny čáry sítě mají společnou tečnu nebo tam některá čára má bod trojnásobný. Viz *F. Enriques*, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche II, p. 35 a n., 176 a n.

t. j. leží-li bod (y_k) na Jacobiově čáře sítě dané. A leží-li bod (z_k) na přímé poláře bodu (y_k) vzhledem k určité čáře, prochází první polára bodu (z_k) vzhledem k téže čáře bodem (y_k).[7])

Důležitým případem sítě čar v rovině jest dvojmocná *soustava prvních polárných čar* $(n-1)$-ho stupně, jež příslušejí ke všem bodům roviny vzhledem k dané čáře stupně n-tého $f(x_k) = 0$. Tato síť prvních polár bodů (y_k) vzhledem k čáře $f(x_k) = 0$ má rovnici

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

s parametry $y_1 : y_2 : y_3$; její Jacobiova čára, majíc rovnici

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

jest Hesseovou čarou čáry dané $f(x_k) = 0$.[8])[9])[10])

---

[7]) Geometrické místo bodů (z_k) sluje *Steinerova čára* sítě čar n-téh o stupně; její stupeň jest $3(n-1)^2$. Přímky, jež spojují body (y_k) a (z_k), sobě odpovídající, vytvořují t. zv. *Cayleyovu čáru* sítě.

[8]) Co bylo dříve uvedeno o čáře Hesseově, také o Steinerově a Cayleyově čáře, příslušných k dané čáře n-tého stupně, lze stejně uvésti o těchto čarách jako útvarech, příslušných k síti prvních polárných čar $(n-1)$-ho stupně všech bodů v rovině vzhledem k základní čáře stupně n-tého.

[9]) Svazek a síť čar n-tého stupně jsou lineární jich soustavy nejnižších řádů prvního a druhého; obecně jest *lineární k-mocný systém* (čili k-mocný svazek) čar n-tého stupně čili lineární jich systém k-tého řádu určen na základě skupiny $k+1$ čar o rovnicích $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \ldots f_k = 0$ (jež jsou lineárně nezávislé) rovnicí

$$f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_k f_k = 0$$

s k (nehomogenními) parametry $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$; nebo také rovnicí

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_k f_k = 0$$

s $k+1$ homogenními parametry $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ (jejichž k poměrů má tutéž úlohu jako oněch k parametrů). A platí na př., že čáry n-tého stupně, splňující $\frac{1}{2}n(n+3) - k$ jednoduchých nezávislých podmínek, tvoří k-mocný systém lineární, jestliže k body obecně položenými prochází vždy jediná čára soustavy. O lineárních systémech čar určitého stupně viz (pro začátky) na př. *F. Enriques*, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche I, p. 90 a n., 233 a n.; *G. B. Guccia*, Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotati di singolarità ordinarie, Rendiconti Circolo mat. Palermo 7 (1893) a 9 (1895); *J. L. Coolidge*, A treatise on algebraic plane curves, p. 378 a n.; lit. zprávy o obsáhlé teorii jejich podává *L. Berzolari* v Encyklopädie math. Wiss. III. 2_1, p. 325 a n., 438 a n.

Algebraický jednomocný systém čar určitého stupně jest definován rovnicí takové čáry, zvolíme-li za součinitele její algebraické funkce jednoho proměnného parametru; o těchto na př. *J. L. Coolidge* na uv. místě, p. 425 a n.; *L. Berzolari* na uv. m. p. 345 a n.

O vytvořování algebraických čar pomocí svazků čar stupňů nižších pokoušeli se už *J. Steiner*, *H. Grassmann*, *M. Chasles* a *E. de Jonquières*; dále viz pozn. [4]) v čl. 49. S tím částečně souvisí pokusy o *ryze geometrickou*

80. Čáry třetího stupně. *a*) Obecná čára 3. stupně v rovině čili (rovinná) *kubika* má ve své rovnici 10 členů (tři tvaru x_k^3, šest tvaru $x_h^2 x_k$ a jeden člen $x_1 x_2 x_3$); obsahujíc tam tedy deset součinitelů homogenních

teorii rovinných čar algebraických (jež lze přiřaditi k Steiner-Chaslesově nebo k Staudtově definici kuželosečky); viz *H. Thieme*, Die Definition der geometrischen Gebilde durch Construction ihrer Polarsysteme, Zeitschrift Math. Phys. 24 (1879); *E. Kötter*, Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der allgemeinen ebenen Curven, Abhandlungen Akad. Berlin (Preisschrift) 1887, a Die Hesse'sche Curve in rein geometrischer Behandlung, Math. Annalen 34 (1889); *R. de Paolis*, Le corrispondenze projettive nelle forme geometriche fondamentali di 1ª specie, Memorie Accad. Torino (2) 42 (1892); *R. Schumacher*, Die Punktsysteme auf der Geraden und ihre Anwendung zur Erzeugung der algebraischen ebenen Curven, Journal r. a. Math. 101 (1893); *G. B. Guccia*, Una definizione sintetica delle curve polari, Rendiconti Circolo mat. Palermo 7 (1893); a obšírně *D. J. Rey Pastor*, Teoría geométrica de la polaridad en las figuras de primera y segunda categoría (Madrid 1929).

[10]) Úvahy o *reálnosti algebraických čar* rovinných vycházejí od pojmu reálné uzavřené čili úplné větve (okruhu) takové čáry; tak se totiž jmenuje část algebraické čáry reálné (t. j. čáry, jejíž rovnice v reálné rovině při reálném trojúhelníku základním má všechny součinitele reálné), která může býti vytvořena spojitým uzavřeným pohybem reálného bodu; liší se větev sudá a lichá podle toho, protíná-li ji libovolná přímka téže roviny v sudém resp. lichém počtu bodů. K vyšetřováním o počtu a vztazích reálných uzavřených větví algebraických čar a jejich reálných prvků singulárních, jež začali *Staudt* a *Möbius*, podali nejdůležitější příspěvky *A. Harnack* a *F. Klein*. Platí zejména: Čára rodu p nemůže míti více než $p + 1$ reálných větví (a čáry s tímto největším počtem větví při daném n a přípustném p vskutku existují). Obecná čára sudého nebo lichého stupně nemá liché větve, resp. má jen jednu lichou větev. Pro čáry n-tého stupně a ν-té třídy platí $n + \varrho' + 2\delta' = \nu + r' + 2d'$, kde r' a ϱ' je počet reálných hrotů resp. inflexních tečen, d' a δ' počet reálných dvojných bodů resp. tečen se sdruženě imaginárními tečnami resp. dotyčnými body. O dotčených vlastnostech alg. čar rovinných pojednávají zejména *A. Harnack*, Über die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven, Math. Annalen 10 (1876); *D. Hilbert*, Über die reellen Züge algebraischer Curven, Math. Annalen 38 (1891); *Ch. A. Scott*, On the circuits of plane curves, Transactions Amer. math. soc. 3 (1902); *V. Ragsdale*, On the arrangement of the real branches of plane algebraic curves, Amer. Journal math. 28 (1906); *L. Brusotti*, Sulla generazione di curve piane algebriche reali mediante „piccola variazione" di una curva spezzata, Annali mat. (3) 22 (1914); *J. v. Sz. Nagy*, Über die reellen Züge algebraischer ebener und Raumkurven, Math. Annalen 77 (1916); *T. R. Hollcroft*, On the reality of singularities of plane curves, Math. Annalen 97 (1926); také *H. Hilton*, Plane algebraic curves, p. 350 a n.; *J. L. Coolidge*, A treatise on algebraic plane curves, p. 50 a n.; též *L. Berzolari* v Encyklopädie math. Wiss. III. 2_1, p. 383 a n.

Velmi důležité jsou vlastnosti geometrických útvarů, jež jsou *invariantní při transformacích biracionálních* (jsou obecnější než vlastnosti projektivní). O nich jednající t. zv. algebraická geometrie označuje se v našem případě jako geometrie na algebraické čáře; přehled příslušné teorie podává *L. Berzolari* v Encyklopädie math. Wiss. III. 2_1, p. 405 a n. Viz zejména *A. Brill-M. Noether*, Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie, Math. Annalen 7 (1874); *E. Bertini*, La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico, Annali

a lineárních, jest jednoznačně určena *devíti* svými *body* obecně položenými.[1])[2])

mat. (2) 22 (1894); *C. Segre*, Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito, Annali mat. (2) 22 (1894); *F. Severi*, Vorlesungen über algebraische Geometrie (1921), Trattato di geometria algebrica I (Bologna 1926) a La géométrie algébrique, Proceedings Congress Toronto 1 (1928); *V. Snyder-. . .-C. H. Sisam*, Selected topics in algebraic geometry (Washington 1928); také *F. Enriques*, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche III (1924); *J. L. Coolidge*, A treatise on algebraic plane curves (1931), p. 250 a n.

Projektivní vlastnosti rovinných čar (a geometrických útvarů v prostoru i v prostoru s libovolným počtem rozměrů vůbec) ve směru diferenciálním vyšetřuje soustavně v poslední době *projektivní geometrie diferenciální*. O čarách rovinných v tomto ohledu viz zvl. *E. J. Wilczynski*, Projective differential geometry of curves and ruled surfaces (1906), p. 58 a n.; *L. Berwald*, Zur projektiven Differentialgeometrie der Ebene, Jahresbericht D. Math. Ver. 30 (1921); *G. Sannia*, Nuova trattazione della geometria proiettivo- differenziale delle curve piane (4 poj.), Rendiconti Accad. L. Roma (5) 31 (1922); *E. Čech*, Projektivní diferenciální geometrie (1926), p. 214 a n.; *A. Kawaguchi*, Über projektive Differentialgeometrie III, Tôhoku Math. Journal Sendai 28 (1927); *G. Fubini-E. Čech*, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces (1931), p. 8 a n.; také Encyklopädie math. Wiss. III. 3 (*D* 11: *L. Berwald*, Differentialinvarianten in der Geometrie, 1923, p. 105 a n.).

[1]) Čára 3. stupně se může rozpadnouti v kuželosečku a přímku (jejichž průsečíky představují dva body dvojné) nebo ve tři přímky, jež tvoří trojstran (jeho vrcholy jsou tři dvojné body zvrhlé kubiky) nebo procházejí jedním bodem (trojnásobným bodem čáry), po případě dvě nebo i všechny tři splývají.

[2]) Mimo případy zcela zvláštní (kdy z daných devíti bodů leží aspoň pět na přímce nebo po čtyřech na dvou přímkách nebo aspoň osm na kuželosečce) jest zde totiž připomenouti větu (viz čl. 72*d* pro $n = 3$): *Všechny kubiky jdoucí osmi body pevnými* (průsečíky dvou z nich) *procházejí* (obecně) *také devátým bodem pevným* (průsečíkem oněch dvou). Odtud vyplývá na př.: Jestliže dvě přímky a, b protínají kubiku v bodech A_1, A_2, A_3, resp. B_1, B_2, B_3, protínají přímky A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 kubiku v bodech C_1, C_2, C_3, ležících v jedné přímce c. A speciálně: Tečny kubiky ve třech průsečících jejích s přímkou protínají kubiku v dalších třech bodech, ležících v jedné přímce. Nazveme-li (třetí) bod, v němž tečna kubiky tuto ještě protíná, (podle *G. Salmona*) *tečnovým* (tangenciálním) *bodem* dotyčného bodu oné tečny, lze tedy říci: Tečnové body tří bodů kubiky ležících v jedné přímce leží opět v jedné přímce; tato přímka sluje (podle *A. Cayleyho*) *satelitní přímkou* oné. K dané přímce přísluší jedna satelitní přímka, ale 16 přímek, k nimž je daná přímkou satelitní. Hořejší věta (o přímkách a, b) je speciálním případem věty: Tři přímky, spojující po dvou šest průsečíků kuželosečky s (pravou) kubikou, protínají tuto v bodech ležících v jedné přímce (takových přímek jest u dané kubiky při zvolené kuželosečce obecně šest). Odtud zejména plyne: Tečny kubiky ve třech bodech, v nichž se jí dotýká kuželosečka, protínají kubiku v bodech jedné přímky; přímky spojující tři dotyčné body kuželosečky s kubikou protínají tuto také v bodech jedné přímky. Z věty na počátku uvedené vyplývá dále na př.: Tři kuželosečky mající dva společné body protínají se po dvou ve dvojicích bodů, jejichž tři spojnice procházejí jedním bodem (stačí pokládati každou kuželosečku a přímku spojující nespolečné průsečíky ostatních dvou za kubiku). Rovněž věta: Jestliže dvě dvojice protějších stran (jednoduchého) šestiúhelníku

Kdežto u pravé čáry 2. stupně existuje jen jeden typ (nerozlišujeme-li kuželosečky imaginární od reálné, t. j. kterékoli dvě kuželosečky lze projektivní transformací ztotožniti), jest pravých čar 3. stupně projektivně různých nekonečně mnoho. Neboť proti devíti nezávislým konstantám v rovnici kubiky disponujeme pouze osmi nezávislými parametry u rovinné kolineace; zbývá tedy v rovnici čáry kubické jedna konstanta, jejíž ∞^1 hodnot stanoví kubiky projektivně různé.

Podle obecné teorie algebraických čar může pravá kubika býti *rodu 1 nebo 0*, t. j. může býti bez singulárního bodu nebo s jedním bodem dvojnásobným.[3]) Kubická křivka rodu 1, nemajíc dvojnásobného bodu, sluje také *obecná* nebo eliptická (také nesingulární, t. j. bez singulárních bodů); jest (podle rovnic Plückerových) třídy 6. a má 9 tečen (bodů) inflexních. Křivka kubická rodu 0 čili *racionální* má ve dvojném bodě svém buď dvě různé tečny (reálné nebo imaginární, takže bod ten je uzlem nebo isolovaným), jest třídy 4. a má 3 tečny inflexní; nebo má dvojný bod s tečnami splývajícími (hrot), jest třídy 3. a má 1 tečnu inflexní.[4])

b) Z každého bodu obecné kubiky lze vésti ke křivce čtyři tečny (nečítaje tečnu čáry v bodě tom): *dvojpoměr* této *čtveřiny tečen jest* u dané čáry 3. stupně *konstantní*.[5])

kubice vepsaného protínají se v bodech této čáry, platí to také o třetí dvojici (pokládáme totiž dvě trojice nesousedních stran šestiúhelníku za kubiky). Speciálním případem věty této je Pascalova věta o šestiúhelníku kuželosečce vepsaném (kubiku tvoří zde totiž kuželosečka a přímka Pascalova). Věta o šestiúhelníku přejde ve větu o čtyrúhelníku, splynou-li dva a dva vrcholy onoho, při čemž jejich spojnice se stanou tečnami kubiky. A nalezneme: Prochází-li kubika šesti vrcholy úplného čtyrstranu, protínají se dvojice tečen vždy ve dvou protějších vrcholech jeho sestrojené na kubice ve třech bodech jedné přímky. Konečně můžeme zde (přejdouce od tečen vedených ze tří průsečíků přímky s kubikou k případu, kdy dva z nich splynou) dokázati: Čtyři dotyčné body tečen vedených ke kubice z některého bodu jejího jsou vrcholy čtyřrohu, jehož úhlopříčné vrcholy jsou dotyčnými body ostatních tečen jdoucích ke kubice z tangenciálního bodu k onomu příslušného. Poslední větu jinak odvozuje *F. Machovec*, O křivkách třetího řádu procházejících vrcholy úplného čtyrúhelníku a jeho diagonálného trojúhelníku, Časopis mat. fys. 16 (1887).

[3]) Jest přímo patrno, že kubika, nemá-li se rozpadnouti, může míti nejvýše jeden bod dvojný; neboť kdyby měla dva takové body, měla by přímka je spojující aspoň čtyři body s kubikou společné, což není možno.

[4]) Teorii čar 3. stupně podávají přehledně (s hojnými doklady literárními) *G. Kohn* v Encyklopädie math. Wiss. III. 2_1 (*C* 5: Spezielle ebene algebraische Kurven, 1*A*, 1908) a *G. Giraud* v Pascalově Repertorium höh. Math., 2. vyd. II. 1. (kap. 17, 1910). Značná pozornost se jim věnuje ve spisech o algebraických čarách vůbec (dříve uvedených, zejména *G. Salmon*, *L. Cremona*, *F. Enriques*, *S. Ganguli*, *H. Hilton*). Samostatně o nich pojednávají: *H. Durège*, Die ebenen Kurven dritter Ordnung (1871); *H. Schröter* Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung (1888, ryze syntheticky); *A. B. Basset*, An elementary treatise on cubic and quartic curves (1901); *F. Dumont*, Introduction à la géométrie du troisième ordre (1904); *H. S. White*, Plane curves of the third order (1925).

[5]) Tato věta sluje někdy *Salmonova* (dokázal ji *G. Salmon* r. 1851).

Abychom to dokázali, zvolme dva vrcholy O_1, O_2 základního trojúhelníku souřadnic na křivce kubické, strany jeho O_1O_3 a O_2O_3 pak položme do tečen kubiky v bodech těch (při čemž předpokládáme, že tečna kubiky v O_1 nejde bodem O_2 ani tečna v O_2 bodem O_1); tím vymizí z rovnice křivky členy x_1^3, $x_1^2x_3$ a x_2^3, $x_2^2x_3$. Protože pak volbou jednotkového bodu lze docíliti, aby u zbývajících členů v rovnici kubiky dva ze součinitelů rovnaly se třetímu, můžeme rovnici křivky 3. stupně psáti v jednodušším tvaru

$$x_3^3 + (x_1 + x_2)\, x_3^2 + x_1x_2\,(ax_1 + bx_2 + cx_3) = 0.$$

Přímka jdoucí vrcholem O_1 s rovnicí $x_2 = tx_3$ protíná kubiku v bodech, o jejichž souřadnicích platí

$$atx_1^2 + (bt^2 + ct + 1)\, x_1x_3 + (t + 1)\, x_3^2 = 0;$$

je tedy tečnou, platí-li o jejím parametru t rovnice

$$(bt^2 + ct + 1)^2 - 4at\,(t + 1) = 0$$

čili

$$b^2t^4 + 2bct^3 + (c^2 + 2b - 4a)\, t^2 + 2\,(c - 2a)\, t + 1 = 0.$$

Dvojpoměr k čtyř prvků, daných v základním útvaru jednomocném rovnicí $a_x^4 = 0$, jest — jak víme (čl. 34*e*) — určen relací

$$108\,\frac{(k^2 - k + 1)^3}{(k + 1)^2\,(k - 2)^2\,(2k - 1)^2} = \frac{S^3}{T^2},$$

kde $S = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2$, $T = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$. V naší rovnici, určující parametry t čtyř tečen z bodu O_1 k dané kubice vedených, jest $a_0 = b^2$, $a_1 = \frac{1}{2}bc$, $a_2 = \frac{1}{6}(c^2 + 2b - 4a)$, $a_3 = \frac{1}{2}(c - 2a)$, $a_4 = 1$; odtud vypočteme

$$S = \tfrac{1}{12}[16\,(a^2 - ab + b^2) + 24abc - 8\,(a + b)\, c^2 + c^4],$$

$$T = \tfrac{1}{216}[64\,(a^3 + b^3) - 96ab\,(a + b) - 216a^2b^2 + 144ab\,(a + b)\, c - 24\,(2a^2 + ab + 2b^2)\, c - 36abc^3 + 12\,(a + b)\, c^4 - c^6].$$

Protože výrazy pro S a T jsou souměrné vzhledem k veličinám a, b, dostaneme tutéž rovnici pro dvojpoměr čtyř tečen, vedených k dané kubice z bodu O_2; jsou tedy dvojpoměry čtyř tečen, jdoucích z bodů O_1 a O_2 k dané kubice, sobě rovny. Proto mají dvojpoměry čtyř tečen, vedených ke křivce 3. stupně ze dvou libovolných bodů jejích, tutéž hodnotu; tento dvojpoměr k, jenž se ovšem nemění při projektivní transformaci čáry kubické, sluje jejím *modulem* (nebo absolutním invariantem).[6][7][8]

[6]) Místo dvojpoměru k béře se za *absolutní invariant* čáry 3. stupně jeho funkce nahoře uvedená

$$J = \frac{(k^2 - k + 1)^3}{(k + 1)^2\,(k - 2)^2\,(k - \frac{1}{2})^2}$$

c) Z obecné teorie polár budiž pro čáru 3. stupně vytčeno: K libovolnému bodu P v rovině kubiky přísluší vzhledem k této jako první polára kuželosečka, jež kubiku protíná v dotyčných bodech tečen z bodu P k ní vedených, jako druhá polára pak přímka, jež je pólarou bodu P vzhledem k polárné kuželosečce jeho. Konické poláry všech bodů na přímce vzhledem k čáře kubické tvoří svazek kuželoseček, jehož čtyři body základní jsou póly oné přímky vzhledem ke kubice.[9])[10])

(kterou lze racionálně vyjádřiti koeficienty v rovnici kubiky); důležité jsou také jeho součástky, invarianty S a T, při čemž $J = S^3/27T^2$. Kubická čára s dvojpoměrem harmonickým $k = -1,\ 2,\ \frac{1}{2}$ sluje *harmonická* (je charakterisována hodnotou invariantu $T = 0$); kubika s dvojpoměrem ekvianharmonickým $k = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$ sluje *ekvianharmonická* ($S = 0$). Jestliže ze čtyř tečen kubiky, z libovolného bodu jejího k ní vedených (mimo tečnu v bodě tom), dvě splývají, jest $k = 1,\ 0,\ \infty$ a čára 3. stupně má dvojný bod s různými tečnami ($S^3 - 27T^2 = 0$); splynou-li tři z dotčených tečen, jest k neurčitý a čára 3. stupně má hrot ($S = 0,\ T = 0$).

[7]) V případě, který jsme při volbě základního trojúhelníku vyloučili, že totiž tečna čáry v jednom z obou uvažovaných bodů prochází bodem druhým, platí věta ovšem také; stačí zvoliti bod třetí na kubice (jako pomocný), jímž neprochází tečna prvního ani druhého bodu a v němž obráceně tečna kubiky nejde žádným z bodů oněch.

[8]) Velmi jednoduše můžeme větu uvedenou dokázati pomocí konické poláry: Polárná kuželosečka, příslušná k libovolnému bodu P křivky 3. stupně vzhledem k této, dotýká se křivky v bodě tom a protíná ji ve čtyřech bodech, dotyčných bodech tečen křivky jdoucích bodem P. Protože čtyři body kuželosečky se z kterýchkoli dvou bodů jejích promítají skupinou paprsků konstantního dvojpoměru, platí to o čtveřinách tečen kubiky, vedených z bodu P a z bodu k němu nekonečně blízkého. Infinitesimálními kroky dospějeme od bodu P k libovolnému bodu Q na kubice, jenom však tehdy, leží-li body P a Q na téže větvi křivky 3. stupně.

Obecný důkaz synthetický lze podati pomocí věty, že dvojice průsečíků přímek svazku se středem na kubice promítají se z bodu jejího opět do dvojic průsečíků přímek svazku se středem na kubice té (věta tato plyne z věty o kubikách s osmi společnými body pevnými; jsou-li dány středy obou svazků, obdrží se střed promítání v dotyčném bodě tečny, vedené ke kubice z průsečíku spojnice obou středů s kubikou); odtud vyplývá projektivní korespondence mezi oběma svazky. Viz také *R. Sturm*, Über die ebenen Curven dritter Ordnung, Journal r. a. Math. 90 (1881); *E. Goursat*, Sur le théorème de Salmon, Nouv. Annales math. (3) 15 (1896); *A. C. Dixon*, A projective proof of the anharmonic property of tangents to a plane curve, Messenger math. (2) 26 (1896); *J. Thomae*, Projektiver Beweis einiger elementaren Sätze aus der Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung, Berichte Ges. Wiss. Leipzig 54 (1902).

[9]) Synthetickou teorii polár pro čáru 3. stupně podali zejména *A. Milinowski*, Zur Polarentheorie der Curven und Flächen 3. Ordnung, Journal r. a. Math. 89 (1880); *St. Jolles*, Die synthetische Polarentheorie der ebenen kubischen Kurven, Archiv Math. Phys. (3) 14 (1909); viz také *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage III.

[10]) Sestrojíme-li konickou poláru bodu P vzhledem ke kubice a poláru bodu P' vzhledem k této kuželosečce, nebo obráceně konickou poláru bodu P' vzhledem ke kubice a poláru bodu P vzhledem k této kuželosečce, obdržíme tutéž přímku, jež sluje *smíšenou pólarou* bodů P a P' vzhledem k čáře 3. stupně. Tři body tvoří *konjugovaný trojúhelník* vzhledem ke kubice,

Konická polára bodu na křivce 3. stupně ležícího vzhledem k této jest geometrickým místem bodů harmonicky sdružených k pólu na přímkách jím jdoucích vzhledem k ostatním dvěma průsečíkům přímek těch s danou kubikou.

Neboť z rovnice pro parametry průsečíků o souřadnicích $(y_k + \mu x_k)$ přímky bodem (y_k) jdoucí s křivkou 3. stupně $f(x_k) = 0$, totiž z rovnice

$$\mu^3 f(x_k) + \mu^2 \Delta_y f(x_k) + \mu \Delta_x f(y_k) + f(y_k) = 0$$

vyplývá v případě, leží-li bod (y_k) na dané kubice, pro parametry μ ostatních dvou průsečíků rovnice

$$\mu^2 f(x_k) + \mu \Delta_y f(x_k) + \Delta_x f(y_k) = 0.$$

Jestliže v této rovnici jest $\Delta_y f(x_k) = 0$, t. j. leží-li bod (x_k) na konické poláře bodu (y_k), a jenom tehdy, platí o uvedených parametrech $\mu_1 + \mu_2 = 0$, t. j. oba tyto průsečíky jsou harmonicky sdruženy vzhledem k bodům (y_k) a (x_k).[11])

Je-li zvolený bod na kubice inflexní, rozpadá se konická polára jeho vzhledem ke křivce dané ve dvě přímky, v inflexní tečnu křivky v bodě tom a v přímku, jež je geometrickým místem bodů harmonicky sdružených s uvažovaným bodem vzhledem ke dvěma zbývajícím průsečíkům přímek bodem tím vedených s kubikou; tato přímka sluje proto *harmonickou polárou*, příslušnou k uvedenému bodu inflexnímu. Splynou-li oba průsečíky přímky inflexním bodem vedené s kubikou čili stane-li se přímka taková tečnou kubiky, padne bod, harmonicky sdružený k bodu inflexnímu, do téhož bodu, dotyčného bodu tečny té. Tedy:

Geometrickým místem bodů harmonicky sdružených k inflexnímu bodu křivky 3. stupně vzhledem k dvojicím průsečíků přímek bodem tím vedených s kubikou jest přímka (harmonická polára bodu inflexního), *obsahující také dotyčné body tří tečen inflexním bodem tím ke křivce jdoucích.*[12])

Dejme tomu, že přímka protíná kubiku ve třech bodech A_k $(k = 1, 2, 3)$; spojnice každého tohoto průsečíku A_k s inflexním bodem kubiky I protne křivku v třetím bodě B_k a harmonickou poláru bodu I v bodě C_k. Protože čtveřiny $A_k B_k I C_k$ jsou harmonické a protože body A_k leží v přímce, jakož i body C_k, leží také body B_k v jedné přímce. A splynou-li

leží-li třetí na smíšené poláře prvních dvou; tehdy jsou kterékoli dva z bodů těch konjugovány vzhledem k polárné kuželosečce třetího. Čtyři body tvoří *konjugovaný čtyrúhelník* vzhledem ke kubice, tvoří-li kterékoli tři z nich trojúhelník konjugovaný. O těchto viz *E. Caporali*, Teoremi sulle curve del terz'ordine, Atti Accad. Lincei Roma (3) 1 (1877, nebo téhož Memorie di geometria, 1888).

[11]) Z hořejší věty vyplývá také: Protíná-li přímka vedená bodem A na kubice tuto v bodech B, C a konickou poláru bodu A vzhledem ke kubice v bodě D, procházejí tečny kubiky v B a C i tečna konické poláry v D jedním bodem.

[12]) Harmonická polára, příslušná k inflexnímu bodu I křivky 3. stupně, obsahuje dále průsečíky vždy dvou tečen kubiky, vedených k této v průsečících libovolné přímky bodem I jdoucí s kubikou, a také průsečík tečen kubiky ve dvou inflexních bodech jejích, ležících s bodem I na téže přímce.

body A_k v inflexní bod kubiky A, splynou také body B_k v inflexní bod B; leží tedy tři inflexní body I, A, B v přímce:

Přímka spojující dva inflexní body křivky 3. stupně prochází třetím inflexním bodem křivky té.[13])[14])

d) Protože Hesseova čára kubiky jest 3. stupně, má obecná křivka kubická (ve svých průsečících s čarou Hesseovou) devět bodů inflexních; protože z bodů těch sudý počet může býti imaginární, jest lichý počet inflexních bodů reálných. Můžeme zjistiti, že kubika rodu 1 má tři reálné body inflexní ležící v přímce.[15])

Položíme-li do tří reálných inflexních tečen obecné křivky 3. stupně (předpokládajíce, že tyto tečny neprocházejí jedním bodem) strany základního trojúhelníku soustavy souřadnic a zvolíme-li spojnici inflexních bodů těch za přímku jednotkovou $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, nabude rovnice kubiky jednoduchého tvaru

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 + 6mx_1x_2x_3 = 0.$$

Neboť přímka $x_1 = 0$ musí jako inflexní tečna míti s kubikou společné tři body, splývající v jeden na přímce $x_1 + x_3 + x_3 = 0$; souřadnice tohoto bodu jsou tedy (0, 1, — 1) a v rovnici kubiky musí po substituci $x_1 = 0$ zbývati soubor členů $(x_2 + x_3)^3$. Obdobně po dosazení $x_2 = 0$ zbude v rovnici čáry kubické $(x_1 + x_3)^3$ a po dosazení $x_3 = 0$ zbude $(x_1 + x_2)^3$. Odtud vyplývá, že v rovnici kubiky musí členové x_1^3, x_2^3, x_3^3 míti téhož součinitele, za který můžeme zvoliti 1, dále pak členové $x_1^2(x_2 + x_3)$, $x_2^2(x_1 + x_3)$, $x_3^2(x_1 + x_2)$ téhož součinitele 3; zbývá člen $x_1x_2x_3$ s obecným koeficientem (zvolme jej $6m$). Pro obecnou kubiku, jejíž tři reálné tečny inflexní se protínají v témž bodě, není ovšem tento tvar rovnice možný. Obráceně zjistíme, že kubická čára, uvedenou rovnicí vyjádřená, má tři a jenom tři reálné inflexe: body (0, 1, — 1), (1, 0, — 1), (1, — 1, 0) a tečny $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, nejdoucí týmž bodem.[16])

[13]) Plyne také odtud, že satelitní přímka, příslušná k přímce jdoucí dvěma body inflexními, splývá s touto přímkou.

[14]) Přímky obsahující tři inflexní body čáry kubické nazval *F. Enriques přímkami Mac Laurinovými* (podle *Mac Laurina*, který hořejší větu r. 1748 uvedl).

[15]) Že čára 3. stupně bez bodů singulárních má aspoň tři inflexní body reálné, nalezneme, sledujíce lichou větev této čáry vzhledem k přímce, jež se jí v jednom bodě dotýká a v druhém ji protíná, a majíce na zřeteli, že spojnice dvou reálných bodů inflexních prochází třetím takovým bodem. S druhé strany poznáme, že reálných bodů inflexních nemůže u kubiky býti více než tři: Označme tři reálné inflexní body na kubice (ležící v přímce) I_1, I_2, I_3; kdyby zde existoval čtvrtý reálný inflexní bod I_4, protínaly by spojnice I_1I_4, I_2I_4, I_3I_4 křivku kubickou v dalších reálných bodech inflexních I_5, I_6, I_7; z téhož důvodu obsahovaly by spojnice I_1I_7 a I_3I_5 opět reálné inflexní body resp. I_8, o nichž lze předpokládati, že leží na I_2I_5, resp. na I_2I_7; avšak spojnice I_1I_6 a I_3I_6 protínaly by kubiku v dalších reálných inflexních bodech, čímž by počet devíti bodů inflexních byl překročen.

[16]) Rovnicí uvedeného tvaru jest však možno vyjádřiti také racionální křivku 3. stupně s bodem isolovaným. Taková kubika má totiž také tři

Pro konstantní dvojpoměr k čtyř tečen, vedených ke kubice o této rovnici z libovolného bodu jejího, nalezneme týmž postupem jako prve rovnici

$$\frac{(k^2 - k + 1)^3}{(k+1)^2(k-2)^2(2k-1)^2} = \frac{m(m+4)^3}{4(m^2+6m+6)^2}.$$

Můžeme jej totiž hledati třebas pro bod $(0, 1, -1)$: přímka $x_1 = t(x_2 + x_3)$ je tečnou kubiky s hořejší rovnicí, platí-li o jejím parametru t rovnice

$$2t^4 + 6t^3 + 3(m+2)t^2 + 2t = 0;$$

odtud určíme S, T a uvedenou rovnici.

Speciálně tvoří čtyři tečny kubiky $(x_1 + x_2 + x_3)^3 + 6mx_1x_2x_3 = 0$, vedené k ní z bodu jejího, čtveřinu harmonickou, platí-li o konstantě m čáry té $m^2 + 6m + 6 = 0$, tvoří čtveřinu ekvianharmonickou pro $m = -4$.

e) Rovnici obecné křivky 3. stupně jest vždy možno uvésti na tvar

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6px_1x_2x_3 = 0.^{17})$$

Dosadíme-li totiž do rovnice kubiky rodu 1 (jejíž reálné tři tečny inflexní neprocházejí týmž bodem)

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 + 6mx_1x_2x_3 = 0$$

nové souřadnice x'_k rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1 &= -2px'_1 + x'_2 + x'_3, \\ x_2 &= x'_1 - 2px'_2 + x'_3, \\ x_3 &= x'_1 + x'_2 - 2px'_3 \end{aligned}$$

a zvolíme-li konstantu p (za tím účelem, aby v nové rovnici odpadly členy $x'_h{}^2x'_k$ pro $h \neq k$ a $h, k = 1, 2, 3$) tak, aby byla splněna relace

$$4(p-1)^3 - m(4p^2 - 2p + 1) = 0,$$

obdržíme

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 + 6mx_1x_2x_3 \equiv$$
$$\equiv \frac{8(2p+1)^2(1-p)^3}{4p^2 - 2p + 1}(x'_1{}^3 + x'_2{}^3 + x'_3{}^3 + 6px'_1x'_2x'_3) = 0.$$

Přechází tedy rovnice $(x_1 + x_2 + x_3)^3 + 6mx_1x_2x_3 = 0$ v rovnici $x'_1{}^3 + x'_2{}^3 + x'_3{}^3 + 6px'_1x'_2x'_3 = 0$, vyjímaje případy $p = -\frac{1}{2}$ a $p = 1$, jak také z determinantu uvedené substituce vyplývá. Avšak v prvém případě vyňatém ($p = -\frac{1}{2}$) jest $m = -\frac{9}{2}$ a kubika je racionální, v druhém ($p = 1$) jest $m = 0$ a kubika je zvrhlá. Rovnice $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 +$

---

reálné inflexe; pro dvojný bod kubiky s hořejší rovnicí nalezneme $x_1 = x_2 = x_3$ a odtud $m = -\frac{3}{2}$. Má tedy křivka 3. stupně s dvojným bodem isolovaným vzhledem k základnímu trojúhelníku se stranami v inflexních tečnách svých, leží-li spojnice inflexních bodů jejích v přímce $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, rovnici $(x_1 + x_2 + x_3)^3 - 27x_1x_2x_3 = 0$ a dvojný bod $(1, 1, 1)$.

[17]) Bývá nazýván *Hesseův normální tvar* rovnice pro obecnou kubiku (uvedl jej totiž po prvé *O. Hesse* r. 1844); základní trojúhelník jeho obsahuje, jak uvidíme, na svých stranách všech devět inflexních bodů kubiky.

$+ 6px_1x_2x_3 = 0$ sama značí pro $p = -\frac{1}{2}$ tři přímky, pro $p = 1$ pak kubiku, jejíž tři reálné tečny inflexní procházejí jedním bodem.

Strany nového trojúhelníku souřadnic $O'_1O'_2O'_3$ mají v původní soustavě rovnice $(2p-1)\,x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + (2p-1)\,x_2 + x_3 = 0$. $x_1 + x_2 + (2p-1)\,x_3 = 0$.

O konstantním dvojpoměru k čtveřiny tečen, jdoucích ke kubice $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6px_1x_2x_3 = 0$ z libovolného bodu jejího, platí

$$\frac{(k^2-k+1)^3}{(k+1)^2\,(k-2)^2\,(2k-1)^2} = \frac{16p^3\,(p^3-1)^3}{(8p^6+20p^3-1)^2},$$

jak nalezneme buď přímo obdobnou cestou jako prve pro kubiku $(x_1 + x_2 + x_3)^3 + 6mx_1x_2x_3 = 0$ nebo dosazením výrazu pro m do relace tam určené.[18])

f) Devět inflexních bodů obecné křivky 3. stupně

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6px_1x_2x_3 = 0$$

nalezneme jako průsečíky křivky té s její křivkou Hesseovou; touto křivkou jest čára 3. stupně

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6qx_1x_2x_3 = 0,$$

kde $q = -\dfrac{2p^3+1}{6p^2}$.

Protože pro průsečíky obou křivek těch platí $x_1x_2x_3 = 0$, vidíme, že všechny inflexní body kubiky $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6px_1x_2x_3 = 0$ leží na stranách základního trojúhelníku soustavy souřadnic. Určíme tak *soustavu* všech *devíti inflexních bodů* dané kubiky o souřadnicích (kde ε, $\varepsilon^2 = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$):

$$\begin{array}{lll} (0,\ 1,\ -1), & (0,\ \varepsilon,\ -1), & (0,\ \varepsilon^2,\ -1), \\ (1,\ 0,\ -1), & (\varepsilon^2,\ 0,\ -1), & (\varepsilon,\ 0,\ -1), \\ (1,\ -1,\ 0\ ), & (\varepsilon,\ -1,\ 0\ ), & (\varepsilon^2,\ -1,\ 0\ ). \end{array}$$

Inflexní tečny mají na př. v bodech křivky na přímce $x_1 = 0$ ležících rovnice $-2px_1 + x_2 + x_3 = 0$, $-2px_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 = 0$, $-2px_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3 = 0$; obdobně v ostatních bodech inflexních. Dostaneme je přímo jako tečny ve známých bodech křivky nebo jako součástky konických polár jednotlivých bodů inflexních; druhými částmi těchto zvrhlých kuželoseček jsou harmonické poláry inflexních bodů.

Tak určíme *devět harmonických polár*, příslušných k jednotlivým inflexním bodům dané kubiky, o rovnicích:

$$\begin{array}{lll} x_2 - x_3 = 0, & x_2 - \varepsilon x_3 = 0, & x_2 - \varepsilon^2 x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0, & x_1 - \varepsilon^2 x_3 = 0, & x_1 - \varepsilon x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, & x_1 - \varepsilon x_2 = 0, & x_1 - \varepsilon^2 x_2 = 0. \end{array}$$

[18]) Podmínkou toho, aby tři body (x_k), (x'_k) a (x''_k) na kubice $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6px_1x_2x_3 = 0$ ležely v jedné přímce, jest platnost relace $x_1x'_1x''_1 + x_2x'_2x''_2 + x_3x'_3x''_3 = 0$. Viz *A. Cayley*, A memoir on curves of the third order, Phil. Trans. R. soc. London 147 (1857, Collected papers 2.).

O inflexních bodech poznáváme z jejich souřadnic, že leží po třech na dvanácti přímkách: tři trojice inflexních bodů, uvedených v jednotlivých řadách, leží na $x_1 = 0$, resp. $x_2 = 0$, resp. $x_3 = 0$; tři trojice bodů v jednotlivých sloupcích leží na $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, resp. $x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 = 0$, resp. $x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3 = 0$; šest trojic šikmo položených (ve směru jedné nebo druhé úhlopříčky schematu) tak, že z každého řádku a z každého sloupce vezmeme vždy jen po jednom bodě, leží na přímkách $\varepsilon x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + \varepsilon x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + \varepsilon x_3 = 0$, $\varepsilon^2 x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + \varepsilon^2 x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + \varepsilon^2 x_3 = 0$. Z těchto přímek procházejí každým inflexním bodem kubiky čtyři; dvanáct přímek těch tvoří čtyři trojstrany (se stranami v přímkách trojic nahoře vytčených), z nichž každý obsahuje (na svých stranách) všech devět inflexních bodů křivky (a sluje proto inflexním trojstranem kubiky).[19])[20])

O harmonických polárách seznáme z jejich rovnic (nebo souřadnic), že tvoří systém duální k soustavě bodů inflexních. Harmonické poláry protínají se po třech ve dvanácti bodech: jsou to v témž pořádku jako nahoře body (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1); (1, 1, 1), (1, ε^2, ε), (1, ε, ε^2); (ε^2, 1, 1), (1, ε^2, 1), (1, 1, ε^2); (ε, 1, 1), (1, ε, 1), (1, 1, ε). Z těchto bodů leží na každé harmonické poláře čtyři a všechny body ty tvoří čtyři trojrohy, z nichž každý obsahuje ve svých vrcholech všech devět harmonických polár.

Trojrohy zde uvedené jsou totožny s hořejšími trojstrany.[21])

---

[19]) Jak z hořejšího vidíme (a jak bylo z části už uvedeno), má obecná čára 3. stupně ze svých inflexních bodů tři reálné, ležící na téže reálné přímce, a šest imaginárních, jež leží po dvou sdruženy na třech reálných přímkách, jdoucích jednotlivě oněmi třemi body reálnými; tyto tři přímky tvoří jediný reálný trojúhelník inflexní, kdežto z ostatních tří inflexních trojúhelníků jeden má reálné jenom stranu a protější vrchol, další dva pak mají strany i vrcholy imaginární.

[20]) Z věty o kubikách s osmi společnými body pevnými vyplývá: Aby bod kubiky byl jejím bodem inflexním, k tomu je nutno a stačí, by tři přímky bodem tím jdoucí protínaly kubiku v šesti bodech ležících na kuželosečce. Každá přímka jdoucí inflexním bodem kubiky protíná ji ve dvou dalších bodech, jež jsou dotyčnými body kuželosečky, mající v nich s kubikou dotyk trojbodový. A odtud (splynou-li ony dva body): Harmonická polára protíná kubiku ve třech bodech, z nichž každý je dotyčným bodem kuželosečky, mající tam s kubikou dotyk šestibodový. Takové body slují *sextaktické*; jest jich na kubice 27. (Proti skupině 27 kuželoseček, majících s kubikou dotyk šestibodový, tvoří kuželosečky, dotýkající se kubiky ve třech bodech, tři soustavy po ∞^2 členech a kuželosečky, mající s kubikou ve dvou bodech dotyk trojbodový, devět soustav po ∞^1 členech.)

[21]) Konfiguraci (9_4, 12_3), tvořenou inflexními body kubiky a incidentními přímkami, jakož i duální konfiguraci (12_3, 9_4), vznikající z harmonických polár kubiky, studoval zejména *O. Hesse*. Příslušná grupa 216 kolineací, při nichž jsou obě devítičlenné skupiny inflexních bodů i harmonických polár a čtyrčlenná skupina trojúhelníků invariantní, sluje proto *Hesseova* (uvedená už v čl. 62).

Kterékoli dva inflexní trojúhelníky čáry kubické jsou šestkrát homologické, při čemž osami a středy homologie jsou ostatní strany resp. vrcholy

g) Jest samozřejmé (a bylo vytčeno), že čára 3. stupně s určitým modulem přechází při kolineární transformaci své roviny v čáru 3. stupně téhož modulu. Můžeme však dokázati: *Aby dvě* (obecné) *čáry 3. stupně byly projektivní, k tomu* (je nutno a) *stačí, by jejich moduly byly sobě rovny.*

Že dvě kubické čáry c a c' s týmž modulem jsou kolineární, zjistíme stanovením příslušné kolineace. Abychom určili rovinnou kolineaci, převádějící kubiku c v kubiku c', zvolme na c jeden z jejích bodů inflexních I, jehož harmonická polára protíná čáru v bodech A, B, C a jest inflexní tečnou čáry v I proťata v bodě D; obdobně označme na čáře c' body téhož významu I', A', B', C', D'. Protože čáry c a c' mají týž modul, platí $A'B'C'D' \barwedge ABCD$ (dvojpoměr těchto čtyř bodů je totiž roven uvedenému modulu). Budiž dále P bod na c obecně položený; bodem I' veďme potom přímku, odpovídající přímce IP v projektivnosti mezi paprsky svazků se středem I a I', určené vztahem $I'(A'B'C') \barwedge I(ABC)$; tato přímka protíná kubiku c' ve dvou dalších bodech, z nichž jeden označme P'. Kolineace, v níž bodům I, A, D, P odpovídají pořadem body I', A', D', P', převádí kubiku c v kubiku c'; neboť čára 3. stupně, korespondující v této kolineaci čáře c, má s čarou c' deset společných bodů (tři v I', po dvou v A', B', C' a bod P'), takže je s ní totožna.

Z uvedeného plyne také, že modul čáry kubické jest jediným absolutním invariantem jejím; a můžeme říci: *Existuje* ∞^1 *čar 3. stupně bez bodů singulárních, jež jsou projektivně různé.*

Protože inflexnímu bodu na c lze při uvedeném stanovení kolineace přiřaditi kterýkoli z devíti inflexních bodů na c' a protože je možno, jak jsme viděli, za bod, odpovídající čtvrtému bodu (P) na c, zvoliti na c' kterýkoli ze dvou průsečíků přímky tam uvedené s touto čarou, *existuje* 18 *kolineací, jež převáději jednu ze dvou obecných čar 3. stupně v druhou.*

A speciálně: *Obecná čára 3. stupně je invariantní při* 18 *kolineacích, jež tvoří grupu.* Tato grupa 18 kolineací obsahuje mimo identitu 9 harmonických homologií, z nichž každá má střed v inflexním bodě čáry ku-

---

hořejších trojúhelníků. Viz *H. Wieleitner*, Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung, p. 216.

O inflexích obecné kubiky viz dále: *G. H. Halphen*, Recherches sur les courbes planes du troisième degré, Math. Annalen 15 (1879); *W. Wirtinger*, Über eine Eigenschaft der Wendetangenten der Curven dritter Ordnung (k tomu násl. pozn. *G. Kohnova*), Monatshefte Math. Phys. 4 (1893); *H. S. White*, Inflexional lines, triplets and triangles associated with the plane cubic curve, Bulletin Amer. math. soc. (2) 4 (1898); *A. Emch*, The configurations of the points of inflexion of a plane cubic and their harmonic polars, Rendiconti Circolo mat. Palermo 23 (1907); *L. E. Dickson*, The points of inflexion of a plane cubic curve, Annals math. (2) 16 (1914); *B. M. Turner*, Plane cubics with a given quadrangle of inflexions, Amer. Journal math. 44 (1922), a dále Annals math. (2) 23 (1922), (2) 26 (1925), Amer. Journal math. 47 (1925).

bické a osu v harmonické poláře k němu příslušné, a 8 periodických kolineací s periodou 3, z nichž každá (a její čtverec) nemění vrcholy jednoho z inflexních trojúhelníků a vrcholy každého z ostatních tří zaměňuje.[22])[23])

81. Koviariantní čáry kubiky. *a*) Jako Hesseovu čáru obecné kubiky

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6px_1x_2x_3 = 0$$

nalezli jsme čáru

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6qx_1x_2x_3 = 0,$$

kde $q = -\dfrac{2p^3+1}{6p^2}$, tedy kubiku, jejíž rovnice je téhož tvaru jako rovnice čáry dané. Z toho důvodu a protože souřadnice inflexních bodů dané křivky kubické nezávisí na konstantním koeficientu její rovnice, *má Hesseova čára obecné kubiky tytéž inflexní body jako ona sama.*[1])

Daná čára kubická a její čára Hesseova určují (jako dvě různé čáry 3. stupně) svazek čar kubických, jehož rovnici zvolíme ve tvaru $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6px_1x_2x_3 = 0$ s parametrem p; tento svazek, jehož každá čára má týchž devět bodů inflexních (a tytéž harmonické poláry), sluje *svazek syzygetický*.

Hesseova čára každé kubiky syzygetického svazku náleží do tohoto svazku, majíc rovnici uvedeného tvaru. Obráceně každá kubika bez bodů singulárních přísluší jako čára Hesseova ke třem čarám syzygetického svazku, v němž je obsažena; neboť ke zvolenému q přísluší tři hodnoty veličiny p, vyhovující rovnici $2p^3 + 6p^2q + 1 = 0$.

---

[22]) Analytické vyjádření 18 kolineací grupy, při nichž je obecná kubika invariantní, obdržíme pro Hesseovu rovnici kubiky, jestliže jednak permutujeme souřadnice x_1, x_2, x_3, jednak je znásobíme třemi různými hodnotami třetí odmocniny z 1. O vlastnostech obecné kubiky ve spojení s touto grupou viz *B. Bydžovský*, O jisté grupě rovinných kollineací, Časopis mat. fys. 38 (1909).

Uvedený počet 18 kolineací, příslušných k obecné čáře 3. stupně, zvyšuje se u kubiky harmonické a ekvianharmonické na dvojnásobek resp. trojnásobek. Neboť ve čtveřině $A'B'C'D'$, vyskytující se při stanovení kolineace, lze provésti při pevném D', je-li čtveřina harmonická nebo ekvianharmonická, jednu resp. dvě permutace. Platí tedy: Harmonická a ekvianharmonická čára 3. stupně jest invariantní při grupě 36 resp. při grupě 54 kolineací. Viz také *F. Fabricius-Bjerre*, Om de kollineationer der förer en plan algebraisk kurve af 3. orden over i sig selv, Mat. Tidsskrift Kobenhavn (B 1928); *R. M. Winger*, The equianharmonic cubic and its group, Tôhoku math. Journal Sendai 29 (1928); *B. Bydžovský*, Kolineace kubických křivek harmonických a ekvianharmonických, Časopis mat. fys. 59 (1929).

[23]) Přehled četných vyšetřování o invariantech ternárních forem kubických (nejjednodušší byly uvedeny v odst. *b*) a jejich významu pro studium rovinných čar 3. stupně (jež zahájili *S. Aronhold*, *A. Cayley*, *G. Salmon*, *A. Clebsch* a *P. Gordan*) podává na př. *G. Kohn* v Encyklopädie math. Wiss. III. 2_1, p. 488 a n.

[1]) Pravá čára kubická a její Hesseova čára nemají ovšem společných tečen inflexních.

Protože pro konstantní dvojpoměr k čtyř tečen, vedených ke kubice $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6px_1x_2x_3 = 0$ z libovolného bodu jejího, platí relace $(k^2 - k + 1)^3 \,.\, (8p^6 + 20p^3 - 1)^2 = (k+1)^2 (k-2)^2 (2k-1)^2 \,.\, 16p^3 (p^3 - 1)^3$, jest v syzygetickém svazku kubik obsaženo 12 (obecně různých) čar téhož určitého dvojpoměru k; speciálně pro k vyhovující rovnici $k^2 - k + 1 = 0$ obdrží se ve svazku 4 kubiky ekvianharmonické, z nichž jen dvě mají reálné p, a pro $k = -1, 2, \frac{1}{2}$ obdrží se 6 kubik harmonických, z nichž opět dvě mají reálnou konstantu p. Do syzygetického svazku kubik patří také 4 kubiky, zvrhlé v trojstrany, jejichž každá strana obsahuje po třech bodech inflexních (pro p vyhovující rovnici $8p^3 + 1 = 0$ a $k = 0, 1, \infty$ a pro $p = \infty$).[2])[3])[4])

[2]) Z hořejšího nalezneme (počtem), že zvrhlá kubika svazku syzygetického, tvořená stranami inflexního trojstranu, má Hesseovu čáru v sobě samé; obráceně však přísluší taková zvrhlá kubika jako Hesseova čára také k jedné z ekvianharmonických kubik svazku toho. Harmonická kubika (a jenom taková) jest pak totožna s Hesseovou čarou své čáry Hesseovy. Řadu čar, z nichž druhá a každá další je Hesseovou čarou čáry předcházející (a n-tá je totožná s čarou původní), vyšetřuje *B. Hostinský*, O zvláštních křivkách třetího stupně, Časopis mat. fys. 41 (1912); také *F. E. Wood*, Cubics whose (Hessian)^{n}s are themselves, Bulletin Amer. math. soc. (2) 35 (1929).

[3]) Syzygetický svazek čar 3. stupně (nazvaný tak od *L. Cremony*) jest invariantní při Hesseově grupě kolineací G_{216}; tuto se zřetelem k dotčenému svazku kubik vyšetřují *H. B. Newson*, On the group of 216 collineations in the plane, Quarterly Kansas univ. 10 (1901); *P. Patrassi*, Le corrispondenze collineari del fascio sizigetico in sè stesso, Giornale mat. 40 (1902); *F. Enriques*, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche II, p. 234 a n.

[4]) Roztřídění rovinných čar kubických podle rodu na čáry eliptické a racionální lze doplniti (se stanoviska topologického) rozlišením oněch na dva typy: čáry s dvěma větvemi (lichou a sudou) a čáry s jednou větví (lichou). Platí zde: Z bodu liché větve lze vésti (mimo tečnu v něm samém) dvě reálné tečny k této a dvě k větvi sudé (existuje-li), z bodu sudé větve žádnou; dotyčné body dvou tečen z bodu liché větve k této vedených dělí spolu s oním bodem větev tu ve tři části, z nichž každá obsahuje jeden reálný bod inflexní.

Se zřetelem k počtu větví a pomocí speciálních případů reálných čar kubických, obsažených ve svazku syzygetickém, podal *H. Wiener*, Die Einteilung der ebenen Kurven und Kegel dritter Ordnung in 13 Gattungen (Halle 1901), klasifikaci rovinných čar 3. stupně (pravých) v 13 typů: Syzygetický svazek (s parametrem p) obsahuje kubiky s dvěma větvemi pro $p < -\frac{1}{2}$, s jednou větví pro $p > -\frac{1}{2}$; obsahuje dvě reálné kubiky zvrhlé pro $p = -\frac{1}{2}$ (trojstran složený z jedné reálné a dvou sdružených imaginárních přímek) a pro $p = \infty$ (trojstran složený ze tří přímek reálných), dvě reálné kubiky ekvianharmonické pro $p = 0, 1$ (Hesseova čára kubiky se skládá ze tří reálných přímek, resp. má jen jednu reálnou přímku), dvě reálné kubiky harmonické pro $p_{1,2} = \mp \sqrt[3]{\frac{1}{4}(3\sqrt{3} \pm 5)}$. Rozeznává podle toho Wiener tyto typy kubických čar rodu 1: dvě skupiny čar s dvěma větvemi, oddělené harmonickou kubikou pro p_1 (tedy pro $p < p_1$, $p_1 < p < -\frac{1}{2}$); čtyři skupiny čar s jednou větví, oddělené harmonickou kubikou pro p_2 a dvěma ekvianharmonickými (tedy pro $-\frac{1}{2} < p < 0$, 0, $0 < p < p_2$, p_2, $p_2 < p < 1$, 1, $p > 1$); k tomu přistupují tři typy kubických čar rodu 0.

b) Jak víme, lze u čáry algebraické definovati Hesseovu čáru její jako geometrické místo dvojných bodů prvních polár (a tedy jako geom. místo bodu, jehož konická polára má bod dvojný), Steinerovu čáru pak jako geometrické místo dvojných bodů konických polár (a tedy jako geom. místo bodu, jehož první polára má bod dvojný). Protože u čáry 3. stupně první polára její jest polára konická, *jsou* zde *čáry Hesseova a Steinerova totožny.*

Body čáry Hesseovy a čáry Steinerovy, jež u čáry algebraické k sobě navzájem jako dvojné body prvních polár a polár konických příslušejí a slují proto konjugované, jsou tedy u čáry kubické konjugovanými body na téže čáře třetího stupně, Hesseově-Steinerově čáře kubiky. Můžeme proto říci: *Jestliže konická polára bodu A vzhledem k čáře kubické se rozpadá ve dvě přímky, protínající se v bodě B, rozpadá se konická polára bodu B vzhledem k téže kubice ve dvě přímky, protínající se v bodě A; body A a B, vytvořující Hesseovu a spolu Steinerovu čáru dané kubiky, tvoří dvojici bodů konjugovaných.*[5])[6])

Hesseova čára čáry 3. stupně jest však také Jacobiovou čarou sítě polárných kuželoseček jejích (příslušných ke všem bodům její roviny), jak plyne z významu jejího u čáry algebraické n-tého stupně. Abychom to samostatně poznali, všimněme si, že polárná kuželosečka libovolného bodu $P(y_1, y_2, y_3)$ vzhledem ke kubice $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ má rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} y_3 = 0;$$

odtud vidíme, že první čáry polárné všech bodů v rovině dané kubiky vzhledem k ní tvoří lineární systém dvojmocný čili síť kuželoseček (pokládáme-li v uvedené rovnici y_k za homogenní parametry systému). Jacobiova čára této sítě kuželoseček (t. j. tří kuželoseček $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$) má rovnici

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

[5]) Přímá polára jednoho z obou konjugovaných bodů (P) na Hesseově čáře dané kubiky, procházejíc druhým (P'), jest harmonicky sdružena se spojnicí $P'P$ vzhledem k oběma přímkám zvrhlé polárné kuželosečky bodu P pro kubiku danou (je totiž polárou bodu P vzhledem k polárné kuželosečce jeho) a dotýká se v bodě P' Hesseovy čáry této kubiky.

[6]) Přímé poláry bodů přímky p vzhledem ke kubice obalují kuželosečku, jež sluje (podle *L. Cremony*) *pólokonikou přímky p* vzhledem k dané kubice; jest spolu geometrickým místem pólů těch konických polár, jež se přímky p dotýkají, a geom. místem pólů přímky p vzhledem ke konickým polárám jejích bodů. Z vlastností této kuželosečky budiž uvedeno: Tečny dané kubiky dotýkají se svých pólokonik (v témž bodě); obráceně přímky, dotýkající se svých pólokonik, jsou tečnami kubiky základní. Pólokonika přímky p dotýká se Hesseovy čáry kubiky ve třech bodech, jež jsou na čáře té konjugovány k jejím průsečíkům s přímkou p. Viz na př. *H. S. White*, Plane curves of the third order, p. 47 a n. Dále *H. S. White*, Conics and cubics connected with a plane cubic by certain covariant relations, Transactions Amer. math. soc. 1 (1900).

tato rovnice vyjadřuje však spolu Hesseovu čáru kubiky dané. Proto platí: *Jacobiova čára sítě všech polárných kuželoseček kubiky jest totožná s Hesseovou čarou této kubiky.*[7])

Ve shodě s definicí a vlastností Jacobiovy čáry u sítě algebraických čar vůbec platí zde tedy: *Póly každého bodu na Jacobiově čáře, příslušné k síti polárných kuželoseček čáry kubické*, (a tedy na Hesseově čáře této kubiky) *procházejí jedním bodem, konjugovaným na čáře té k bodu onomu.*[8])

Poznali jsme dříve, že každá kubika je Hesseovou čarou tří určitých čar kubických; protože pak podle předcházejícího hessian kubiky je spolu jakobianem sítě prvních polárných čar jejích, *lze každou kubiku pokládati za Jacobiovu čáru tří určitých sítí kuželoseček, totiž polárných kuželoseček tří určitých kubik.*[9])

c) Protože každou kubiku můžeme považovati za Jacobiovu čáru sítě kuželoseček, lze body její po dvou sdružiti jako body, z nichž každý je průsečíkem polár druhého vzhledem ke všem kuželosečkám sítě.[10]) Od dvou dvojic bodů takto na dané kubice sdružených dospějeme k třetí dvojici konstrukcí zcela jednoduchou podle věty: *Jsou-li A a A', B a B' dvojice bodů na kubice konjugovaných, tvoří body $(AB, A'B')$ a $(AB', A'B)$ rovněž dvojici bodů konjugovaných.* Neboť body A a A' jsou konjugovány vzhledem ke každé kuželosečce sítě, jejíž čarou Jacobiovou je daná kubika, rovněž body B a B'; avšak jsou-li (podle věty Hesseovy, čl. 71*b*) v úplném čtyrstranu dvě dvojice protějších vrcholů konjugovány vzhledem k určité kuželosečce, jsou vzhledem k ní konjugovány i vrcholy třetí dvojice tohoto čtyrstranu.

Kubika, pojímaná jako Jacobiova čára určité sítě kuželoseček, *jest* (jednoznačně) *určena třemi dvojicemi svých bodů konjugovaných.* Neboť požadavek, aby kuželosečka měla dva dané body v rovině za body konjugované, značí pro ni lineární podmínku; třemi takovými podmínkami se tedy pětimocná soustava všech kuželoseček redukuje na lineární soustavu dvojmocnou čili síť, a k této přísluší jako čára Jaco-

---

[7]) Totéž vidíme odtud, že Jacobiova čára sítě kuželoseček jest (podle obecné věty) geometrickým místem dvojných bodů zvrhlých kuželoseček sítě.

[8]) Budiž vytčeno, že u svazku kuželoseček jest ke každému bodu jeho roviny sdružen průsečík jeho polár vzhledem ke všem kuželosečkám svazku, u sítě kuželoseček mají však obdobnou vlastnost jenom body Jacobiovy čáry k síti příslušné.

[9]) Význam Jacobiovy čáry sítě polárných kuželoseček dané kubiky se zvyšuje větou (nalezenou *Ch. Hermitem* r. 1860): Každou síť kuželoseček (bez kuželosečky, zvrhlé v přímku dvojnásobnou) lze pokládati za síť polárných kuželoseček určité čáry 3. stupně. Viz *J. Hadamard*, Sur les réseaux de coniques, Bulletin sc. math. (2) 25 (1901).

[10]) Konjugované body na každé čáře kubické jsou podle předcházející úvahy sdruženy jednak jako dva body (čáry Hesseovy-Steinerovy), z nichž každý jest dvojným bodem zvrhlé polárné kuželosečky druhého vzhledem k určité kubice základní, jednak jako dva body (čáry Jacobiovy), z nichž každý jest průsečíkem polárných přímek druhého vzhledem ke všem polárným kuželosečkám sítě, příslušné ke kubice základní.

biova jediná určitá kubika. Je-li kubika takto určena, můžeme (obecně) neomezený počet jejích bodů lineárně sestrojiti podle věty předcházející. Jsou-li totiž dány dvojice konjugovaných bodů jejích A a A', B a B', C a C', sestrojíme čtvrtou dvojici $D = (AB, A'B')$ a $D' = (AB', A'B)$, pátou dvojici $E = (CD, C'D')$, $E' = (CD', C'D)$, atd.

Z hořejší věty o třech dvojicích bodů na kubice konjugovaných dále vyplývá: *Tečny ve dvou konjugovaných bodech kubiky protínají se v jejím bodě, a konjugovaným bodem tohoto průsečíku je průsečík spojnice obou dotyčných bodů tečen těch s kubikou.* Neboť oba uvedené průsečíky tvoří třetí dvojici protějších vrcholů ve čtyrstranu, jehož dva vrcholy a dva k nim protější splynuly (v dotyčné body tečen kuželoseček).

Vedeme-li tedy z libovolného bodu kubiky čtyři tečny k této křivce, protínají se přímka spojující dva a přímka spojující ostatní dva z dotyčných bodů těchto tečen v bodě kubiky, konjugovaném k bodu onomu.[11])

d) Čára, vytvořená přímkou, jež spojuje bod na Hesseově čáře dané kubiky s dvojným bodem zvrhlé polární kuželosečky bodu onoho vzhledem k této kubice (ležícím rovněž na čáře Hesseově), sluje *Cayleyovou čarou* kubiky dané. Podle věty prve (v odst. *b*) uvedené lze Cayleyovu čáru kubiky pokládati za obalovou čáru přímek spojujících dvojice bodů, konjugovaných na Hesseově čáře této kubiky.

Čáru Cayleyovu můžeme však pojímati také jako čáru, vytvořenou přímkami zvrhlých kuželoseček polárných, jež příslušejí k bodům Hesseovy čáry kubiky dané vzhledem k této. Neboť máme-li na zřeteli čtyři tečny, vedené z bodu P na čáře 3. stupně (Hesseově čáře dané kubiky) k čáře této s dotyčnými body Q a Q', R a R', protínají se (podle věty odst. *c*) přímky QQ' a RR' v bodě P' uvažované čáry, konjugovaném k bodu P. Polárnou kuželosečkou bodu P vzhledem k dané kubice jest dvojice přímek QQ' a RR', jež spojují konjugované body její čáry Hesseovy; neboť dvě spojnice libovolného bodu L na Jacobiově čáře dané sítě kuželoseček s konjugovanými body čáry té jsou harmonicky sdruženy vzhledem ke zvrhlé kuželosečce sítě o dvojném bodě v L (spojnice bodu L s jedním z bodů konjugovaných je totiž polárou druhého vzhledem k uvedené kuželosečce zvrhlé); a protože

[11]) Protože ze čtyř dotyčných bodů tečen z bodu kubiky k ní jdoucích lze utvořiti tři kombinace po dvou (a dvou zbývajících), jest možno body dané čáry 3. stupně třemi různými způsoby po dvou sdružiti ve dvojice bodů konjugovaných. Totéž plyne z věty dříve uvedené, že daná kubika může býti pokládána za Jacobiovu čáru tří sítí kuželoseček.

S třemi systémy dvojic konjugovaných bodů na kubice souvisí (jak ukázal *Hesse*) tři systémy kuželoseček, jež se čáry kubické trojnásob dotýkají: dotyčné body takové kuželosečky jsou totiž v bodech, odpovídajících v téže soustavě sdružených bodů třem průsečíkům kubiky s přímkou; dvě kuželosečky téže soustavy mají svých šest dotyčných bodů na téže kuželosečce. Viz na př. *Em. Weyr*, Über Projectivitäten und Involutionen auf ebenen rationalen Curven dritter Ordnung, Sitzungsberichte Akad. Wien 81 (1880).

tedy přímky dvojice $P'Q$, $P'Q'$ i dvojice $P'R$, $P'R'$ mají býti harmonicky sdruženy vzhledem ke zvrhlé kuželosečce s dvojným bodem P', jest touto kuželosečkou dvojice QQ', RR'.

Z tohoto pojetí je možno odvoditi rovnici čáry Cayleyovy (v souřadnicích přímkových): U kubiky

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6px_1x_2x_3 = 0$$

přísluší k bodu (y_k) polárná kuželosečka

$$(x_1^2 + 2px_2x_3)\, y_1 + (x_2^2 + 2px_1x_3)\, y_2 + (x_3^2 + 2px_1x_2)\, y_3 = 0;$$

dejme tomu, že se rozpadá v přímky

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \qquad \frac{x_1y_1}{u_1} + \frac{x_2y_2}{u_2} + \frac{x_3y_3}{u_3} = 0.$$

Přirovnáme-li koeficienty této zvrhlé kuželosečky ke koeficientům polárné čáry prve ustanovené, dostaneme relace

$$u_2^2y_1 + u_1^2y_2 - 2pu_1u_2y_3 = 0, \qquad u_3^2y_1 - 2pu_1u_3y_2 + u_1^2y_3 = 0,$$
$$-2pu_2u_3y_1 + u_3^2y_2 + u_2^2y_3 = 0;$$

eliminací souřadnic y_k obdržíme rovnici čáry Cayleyovy ve tvaru

$$u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + \frac{1 - 4p^3}{p}\, u_1u_2u_3 = 0.$$

Odtud vidíme, že Cayleyova čára kubiky jest třídy 3. Z nalezené rovnice plyne mimo jiné, že čára Cayleyova, příslušná k čáře 3. stupně, má k vrcholům základního trojúhelníku týž vztah jako Hesseova čára kubiky té ke stranám jeho. Při proměnném parametru p vyjadřuje rovnice, k níž jsme dospěli, *řadu čar Cayleyových*, příslušných k čarám 3. stupně svazku syzygetického.[12])[13])[14])

---

[12]) Čáry Hesseova a Cayleyova, příslušné k dané čáře 3. stupně, dotýkají se navzájem v devíti bodech, průsečících inflexních tečen čáry dané s příslušnými harmonickými polárami jejích bodů inflexních (a tedy k těmto na čáře Hesseově konjugovaných), při čemž inflexní tečny ty jsou společnými tečnami obou čar; více společných bodů uvedené dvě čáry nemají. Obráceně čára 3. stupně a čára 3. třídy s devíti body dotyčnými mohou býti (obecně) pokládány za Hesseovu a Cayleyovu čáru čáry kubické. Viz *L. Cremona*, Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane; *G. Halphen*, Problème concernant les courbes planes du troisième ordre, Bulletin Soc. math. France 9 (1881). Vlastnosti Hesseovy a Cayleyovy čáry u harmonické kubiky vyšetřuje *T. R. Hollcroft*, Harmonic cubics, Annals math. (2) 27 (1926).

Hořejší řada čar 3. třídy jest soustavou duální k syzygetickému svazku čar 3. stupně; její všechny čáry mají společných devět kuspidálních tečen (v harmonických polárách, příslušných k inflexním bodům onoho svazku kubik). A jako byl svazek syzygetický odvozen ze základní čáry $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6px_1x_2x_3 = 0$, lze k uvedené řadě nalézti základní čáru 3. třídy o rovnici $p(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) - 3u_1u_2u_3 = 0$. Podrobnosti uvádí na př. *H. Wieleitner*, Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung, p. 232 a n.

[13]) O čarách apolárných k dané kubice a o t. zv. polárných n-stranech jejích pojednávají na př. *R. de Paolis*, Alcune applicazioni della teoria

82. Racionální čáry 3. stupně. *a) Racionální křivka 3. stupně* (reálná) *s bodem dvojným* (o různých tečnách) má tři body inflexní, z nichž aspoň jeden musí býti reálný; její rovnici je možno uvésti na tvar (kanonický)

$$x_2^3 - (x_1^2 - \lambda x_2^2)\, x_3 = 0,$$

kde platí $\lambda \neq 0$.

Položíme-li totiž základní trojúhelník souřadnic vrcholem O_3 (0, 0, 1) do (reálného) bodu dvojného, odpadnou z rovnice kubické křivky členy x_3^3, $x_1 x_3^2$ a $x_2 x_3^2$; položíme-li dále vrchol O_1 (1, 0, 0) do reálného bodu inflexního a stranu O_1O_2 do inflexní tečny, odpadnou členy x_1^3, $x_1^2 x_2$ a $x_1 x_2^2$, protože pro $x_3 = 0$ musíme z rovnice křivky obdržeti $x_2^3 = 0$; položíme-li konečně stranu O_3O_2 do přímky harmonicky sdružené k přímce O_3O_1 vzhledem k oběma tečnám kubiky v bodě dvojném (harmonické poláry bodu O_1), musí se koeficient při x_3 redukovati na $x_1^2 - \lambda x_2^2$; volbou jednotkového bodu můžeme ještě specialisovati konstantní koeficient při x_2^3 na -1 (po případě také koeficient λ). Spolu je patrno, že pro $\lambda > 0$ je dvojný bod kubiky s uvedenou rovnicí uzlem, pro $\lambda < 0$ bodem isolovaným.

Pomocí svazku paprsků $x_2 = t x_1$ dospějeme k parametrickému vyjádření kubiky s bodem dvojným

$$x_1 = 1 - \lambda t^2, \qquad x_2 = t\,(1 - \lambda t^2), \qquad x_3 = t^3.$$

Dvojný bod má parametry $\pm \sqrt{1/\lambda}$.

---

generale delle curve polari, Rendiconti Accad. L. Roma (4) 3 (1886); *O. Schlesinger*, Über conjugirte Curven, insbesondere über die geometrische Relation zwischen einer Curve dritter Ordnung und einer zu ihr conjugirten Curve dritter Klasse, Math. Annalen 30 (1887); *F. London*, Über die Polarfiguren der ebenen Curven dritter Ordnung, Math. Annalen 36 (1890); *G. Scorza*, Sopra le figure polari delle curve piane del 3° ordine, Math. Annalen 51 (1898).

[14]) O parametrickém vyjádření obecné kubiky pomocí funkcí eliptických, jež vytkli po prvé *S. Aronhold* (1861) a *A. Clebsch* (1863), a jeho geometrických důsledcích viz na př. *A. Harnack*, Über die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades, Math. Annalen 9 (1875); *O. Schlesinger*, Über die Verwertung der ϑ-Functionen für die Curve dritter Ordnung . . ., Math. Annalen 31 (1888); *E. Kötter*, Note über ebene Curven dritter Ordnung, Journal r. a. Math. 114 (1894); *H. Hilton*, Plane algebraic curves, p. 252 a n.

Geometrii na rovinné křivce 3. stupně (a příslušné transformace biracionální) studovali zejména *A. Harnack* (na uv. místě), *Em. Weyr* (v četných pracích) a j.; viz *G. Kohn* v Encyklopädie math. Wiss. III. 2_1, p. 496 a n. V souvislosti s tím byly spec. vyšetřovány t. zv. *mnohoúhelníky Steinerovy*: tak byl nazván $2n$-úhelník, vepsaný rovinné kubice, jehož strany jdou střídavě jedním a druhým pevným bodem na této čáře zvoleným (o nich po prvé *J. Steiner* r. 1846); viz zejména *K. Küpper*, Über die Steiner'schen Polygone auf einer Curve dritter Ordnung C^3 und damit zusammenhängende Sätze aus der Geometrie der Lage, Abhandlungen Böhm. Ges. Wiss. (6) 6 (1873, totéž s dodatkem Math. Annalen 24, 1884); *P. H. Schoute*, Die Steinerschen Polygone, Journal r. a. Math. 96 (1883); *V. Martinetti*, Teoremi sui polygoni di Steiner, inscritti in una curva di terzo ordine, Rendiconti Circolo mat. Palermo 5 (1891); *E. Czuber*, Die Steiner'schen Polygone, Journal r. a. Math. 114 (1895).

Abychom nalezli podmínku pro parametry tří bodů ležících v přímce, vložme nalezené výrazy pro souřadnice bodu na kubice do rovnice přímky $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$; z rovnice, kterou tak dostaneme, $(c - b\lambda)\, t^3 - a\lambda t^2 + bt + a = 0$, poznáváme, že koeficient členu kvadratického je $(-\lambda)$-násobkem členu absolutního; proto o kořenech této rovnice 3. stupně platí $t_1 + t_2 + t_3 = -\lambda t_1 t_2 t_3$. *Leží* tedy *tři body kubické křivky* $x_2^3 - (x_1^2 - \lambda x_2^2)\, x_3 = 0$ tehdy a jen tehdy *na přímce, jestliže o jejich parametrech platí* $t_1 + t_2 + t_3 + \lambda t_1 t_2 t_3 = 0$. Odtud vidíme na př., že z bodu na kubice lze ke křivce té vésti dvě tečny (nečítáme-li ovšem tečnu v bodě zvoleném); neboť je-li parametr zvoleného bodu t a parametr dotyčného bodu tečny z onoho vedené τ, platí $t + 2\tau + \lambda t\tau^2 = 0$; protože tečna v bodě (t) platí za dvě, je tedy uvažovaná kubika vskutku 4. třídy. Pro parametry inflexních bodů ι vyplývá z nalezené relace $3\iota + \lambda\iota^3 = 0$; mají tedy inflexní body kubiky s bodem dvojným parametry $\iota_1 = 0$, $\iota_{2,3} = \pm\sqrt{-3/\lambda}$. Jak je patrno, jest ze tří inflexních bodů kubiky s uzlem jeden reálný a dva sdruženě imaginární, u kubiky s isolovaným bodem jsou však všechny tři inflexní body reálné; protože pak platí $\iota_1 + \iota_2 + \iota_3 + \lambda\iota_1\iota_2\iota_3 = 0$, leží tři inflexní body kubiky s bodem dvojným v přímce.

Místo konstanty λ můžeme v rovnici vyšetřované křivky, jak bylo dotčeno, zavésti $+1$ pro kubiku s uzlem a -1 pro kubiku s bodem isolovaným, takže rovnice kubických křivek s bodem dvojným (o různých tečnách) nabudou tvaru ještě jednoduššího

$$x_2^3 - (x_1^2 \mp x_2^2)\, x_3 = 0.$$

Jako rovnici přímky obsahující tři inflexní body těchto kubik nalezneme $3x_2 \pm 4x_3 = 0$.

Pro kubiky s rovnicemi právě uvedenými lze s výhodou zvoliti parametrické vyjádření pomocí funkcí hyperbolických resp. goniometrických: pro křivku 3. stupně s uzlem

$$x_1 = \operatorname{ch} t, \qquad x_2 = \operatorname{sh} t, \qquad x_3 = \operatorname{sh}^3 t;$$

pro kubiku s isolovaným bodem

$$x_1 = \cos t, \qquad x_2 = \sin t, \qquad x_3 = \sin^3 t.$$

A platí zde: *Tři body kubiky s uzlem nebo s bodem isolovaným leží v přímce* tehdy a jen tehdy, *je-li součet jejich parametrů roven nule* (nebo $k\pi i$ resp. $k\pi$ při k celém). Neboť dosadíme-li třebas pro kubiku s isolovaným bodem souřadnice jejího bodu $\cos t$, $\sin t$, $\sin^3 t$ do rovnice přímky $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, obdržíme po úpravě na $\operatorname{tg} t$ rovnici $(b + c)\operatorname{tg}^3 t + a\operatorname{tg}^2 t + b\operatorname{tg} t + a = 0$, z níž vidíme, že pro parametry t_1, t_2, t_3 průsečíků přímky s kubikou platí $\operatorname{tg} t_1 + \operatorname{tg} t_2 + \operatorname{tg} t_3 = \operatorname{tg} t_1 \cdot \operatorname{tg} t_2 \cdot \operatorname{tg} t_3$; odtud tedy plyne $t_1 + t_2 + t_3 \equiv 0 \pmod{\pi}$. A obdobně v případě kubiky s uzlem se dostane podmínka $t_1 + t_2 + t_3 \equiv 0 \pmod{\pi i}$. Spec. inflexní

body kubiky s bodem isolovaným mají parametry 0, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$; inflexní body kubiky s uzlem mají parametry 0, $\frac{1}{3}\pi i$, $\frac{2}{3}\pi i$.[1])[2])[3])

b) *Racionální křivka 3. stupně* (reálná) *s hrotem* má jediný bod inflexní, ovšem reálný; její rovnici lze vhodnou volbou soustavy souřadnic uvésti na jednoduchý tvar

$$x_2^3 - x_1^2 x_3 = 0.$$

Stačí k tomu cíli základní trojúhelník soustavy položiti vrcholem O_3 do hrotu kubiky, vrcholem O_1 do inflexního bodu jejího a stranami O_3O_2 i O_1O_2 do tečen v těchto bodech: tím se rovnice kubické čáry redukuje na tvar $x_2^3 + ax_1^2x_3 = 0$. Neboť uvedená poloha hrotu a tečny v něm způsobuje, že z obecné rovnice kubiky odpadnou členy obsahující x_3^3 i x_3^2 a že koeficientem u x_3 musí býti x_1^2; z členů bez x_3 pak zbude x_2^3, protože $x_3 = 0$, jsouc inflexní tečnou křivky, protíná ji ve třech bodech splývajících. Místo konstanty a lze potom pomocí nového bodu jednotkového zavésti speciálně — 1. Nalezená rovnice plyne také z rovnice kubiky s bodem dvojným pro $\lambda = 0$.

Položíme-li hrotem této kubické křivky svazek přímek $x_2 = tx_1$, dojdeme k parametrickému vyjádření jejímu

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = t, \qquad x_3 = t^3.$$

Odtud pak odvodíme: *Tři body kubiky* $x_2^3 - x_1^2x_3 = 0$ *leží na přímce*

---

[1]) Obdobně se zjistí: *Šest bodů kubiky s uzlem nebo s bodem isolovaným leží na kuželosečce* tehdy a jen tehdy, *je-li součet jejich parametrů roven nule* (nebo $k\pi i$ resp. $k\pi$).

[2]) Jiný jednoduchý tvar rovnice pro křivku 3. stupně s bodem dvojným (uzlem) jest $x_1^3 + x_2^3 + ax_1x_2x_3 = 0$, při čemž jsou $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ tečny křivky v uzlu a $x_3 = 0$ přímka obsahující body inflexní. Viz k tomu *F. Dingeldey*, Über die Transformation der Gleichung der ebenen Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt auf die Normalform, Math. Annalen 31 (1888). Zvolíme-li základní trojúhelník se stranami v tečnách inflexních, lze rovnici kubiky s bodem dvojným (isolovaným) dáti tvar $x_1^{\frac{1}{3}} + x_2^{\frac{1}{3}} + x_3^{\frac{1}{3}} = 0$. Pro parametrické vyjádření viz také *G. Pittarelli*, Le curve di 3° ordine e di 4ª classe, Rendiconti Accad. Napoli 24 (1885).

[3]) Všechny polárné kuželosečky kubiky s dvojným bodem procházejí tímto bodem; obráceně síť kuželoseček s bodem společným je sítí polárných kuželoseček, příslušných ke kubice s bodem dvojným v onom společném bodě. Hesseova čára uvažované kubiky je k této homologická, při čemž středem a osou homologie je dvojný bod kubiky, resp. přímka spojující tři inflexní body její, dvojpoměrem pak — 3. Tato křivka obsahuje jen jednu soustavu dvojic bodů konjugovaných; spojnice dvojic těch obalují čáru 2. třídy, jež spolu se svazkem přímek jdoucích bodem dvojným tvoří Cayleyovu čáru kubiky dané. Tečnami kuželosečky té jsou také inflexní tečny kubiky a tečny její v bodě dvojném. Přímka obsahující inflexní body kubiky s bodem dvojným je polárou dvojného bodu jejího vzhledem k uvedené kuželosečce; harmonické poláry bodů inflexních procházejí dvojným bodem dané kubiky. Viz k tomu také *G. Pittarelli*, Sulle curve del terz'ordine con un punto doppio, Rendiconti Accad. Napoli 24 (1885); *B. Bydžovský*, Inflekční přímka kubické křivky racionálné, Časopis mat. fys. 35 (1906), a Remarque sur les points d'inflexion d'une cubique à point double, L'enseignement math. 16 (1914).

tehdy a jen tehdy, *je-li součet jejich parametrů roven nule.* Neboť dosadíme-li souřadnice bodu na uvažované čáře kubické 1, t, t^3 do rovnice přímky $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, dostaneme rovnici $ct^3 + bt + a = 0$, jejíž kořeny t_1, t_2, t_3 jsou parametry průsečíků přímky té s danou kubikou; a protože v této rovnici schází člen t^2, platí $t_1 + t_2 + t_3 = 0$. Z nalezené relace vidíme na př., že z libovolného bodu uvažované kubiky (o parametru t) lze vésti jen jednu tečnu ke křivce, jejíž dotyčný bod má parametr $-\frac{1}{2}t$; jest tedy kubika s hrotem vskutku třídy 3.[4])

Obdobně vyplyne: *Šest bodů kubiky* $x_2^3 - x_1^2 x_3 = 0$ *leží na kuželosečce* tehdy a jen tehdy, *je-li součet jejich parametrů roven nule.* Vložíme-li totiž souřadnice 1, t, t^3 do rovnice kuželosečky $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$, obdržíme rovnici 6. stupně, v níž schází člen t^5; platí tedy pro parametry průsečíků kuželosečky s uvedenou kubikou $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 = 0$.[5])[6])[7])

c) Kolineací dvou rovin přechází ovšem křivka 3. stupně s bodem dvojným opět v kubiku s dvojným bodem (reálnou kolineací přechází však uzel jenom v uzel a isolovaný bod v bod isolovaný) a křivka 3. stupně s hrotem opět v kubiku s hrotem. Obráceně jsou dvě kubické křivky s dvojným bodem i dvě kubiky s hrotem projektivně totožny; a platí:

Existuje šest kolineací, jež danou křivku 3. stupně s bodem dvojným (o různých tečnách) *převádějí v danou křivku téhož druhu.* Označme totiž na jedné ze dvou takových křivek c její dvojný bod O, bod inflexní I a dotyčný bod tečny z tohoto inflexního bodu k ní vedené P; body téhož významu na druhé křivce c' pak buďtež pořadem O', I', P'. Kolineace

[4]) Bod, v němž tečna kubiky protíná tuto křivku, byl — jak uvedeno — nazván (prvním) tečnovým bodem dotyčného bodu jejího; obdobně tečnový bod prvního bodu tečnového sluje druhým tečnovým bodem atd. K bodu uvažované kubiky s parametrem t přísluší tedy tečnový bod s parametrem $-2t$, druhý tečnový bod s parametrem $4t$ atd.; odtud nalezneme, že mezní polohou n-tého tečnového bodu pro libovolný bod kubiky s hrotem (pro $\lim n = \infty$) jest její hrot. O postupných tečnových bodech racionálních kubik pojednává *H. Durège*, Über fortgesetztes Tangentenziehen an Kurven dritter Ordnung mit einem Doppel- oder Rückkehrpunkte, Sitzungsberichte Böhm. Ges. Wiss. 1869. Bod totožný s k-tým bodem tečnovým a geometrický význam jeho vyšetřuje *F. E. Allen*, Closure of the tangential process on the rational plane cubic, Amer. Journal math. 49 (1927).

[5]) Také pro průsečíky kubiky $x_2^3 - x_1^2 x_3 = 0$ s čarou 3. stupně (a pouze pro takové body její) platí $\Sigma t_k = 0$ ($k = 1$ až 9).

[6]) Kdy daných devět bodů určuje kubickou čáru racionální, udává *J. Thomae*, Wann hat eine durch neun Punkte gegebene Curve dritter Ordnung einen Doppelpunkt, Berichte Ges. Wiss. Leipzig 47 (1895). Kdy kubika určená třemi dvojicemi bodů konjugovaných je racionální, vyšetřuje (vedle jiných otázek) *B. Bydžovský*, Kubická křivka racionální jakožto souhrn dvojic konjugovaných bodů, Časopis math. fys. 37 (1908).

[7]) O racionálních čarách 3. stupně vůbec pojednávají také *Em. Weyr*, O rovinných racionálních křivkách třetího stupně, Časopis mat. fys. 3 (1874); *W. Binder*, Theorie der unicursalen Plancurven vierter bis dritter Ordnung in synthetischer Behandlung, 1896.

stanovená korespondencí čtyř dvojic přímek, tím totiž, že přiřadíme tečně křivky c v O tečnu křivky c' v O', inflexní tečně v I inflexní tečnu v I' a přímkám IP, OP přímky $I'P'$, $O'P'$, převádí křivku c v křivku c' (totiž v křivku, mající s c' deset společných bodů: pět v O', tři v I' a dva v P', tedy s c' totožnou). Protože při uvedeném stanovení kolineace lze u křivky c' voliti tečnu v O' dvěma způsoby, tečnu inflexní pak třemi způsoby (v jednom ze tří inflexních bodů křivky té), jest takových kolineací možno šest. Speciálně *křivka 3. stupně s bodem dvojným jest invariantní při grupě šesti kolineací.*

Existuje ∞^1 *kolineací, jež jednu ze dvou křivek 3. stupně s hrotem převádějí v druhou.* Při kolineaci takové musí totiž sobě odpovídati hroty O, O' obou křivek c, c' i jejich tečny v těchto bodech a inflexní body I, I' i tečny inflexní; třemi dvojicemi přímek zde sdružených (dvěma dvojicemi uvedených tečen a dvojicí OJ, $O'J'$) není však kolineace určena, a lze bodu P na jedné křivce přiřaditi ještě libovolný P' z ∞ bodů na druhé. Kolineace tak stanovená převádí c v c' (v křivku, mající s c' deset společných bodů: šest v O', tři v I' a jeden v P'). Speciálně *jest křivka 3. stupně s hrotem invariantní při* ∞^1 *kolineacích, jež tvoří kontinuitní grupu* (jednoparametrovou).[8][9][10][11])

[8]) Důsledkem toho jest na př., že dvojpoměr čtveřiny, tvořené na tečně této křivky dotyčným bodem jejím a průsečíky se stranami invariantního trojúhelníku kolineace, jest konstantní (a duálně); viz čl. 63c.

Racionální kubika s hrotem je soběduální; je invariantní při každé polárnosti, v níž autopolárným trojúhelníkem je trojúhelník, tvořený hrotem i tečnou křivky v něm a inflexní tečnou i jejím bodem dotyčným (a v níž sobě odpovídají zvolený bod křivky s její tečnou v něm).

Přiřadíme-li v rovině pevné kubiky s hrotem každé přímce její přímku satelitní vzhledem ke kubice, dostaneme kolineaci této roviny (jejíž invariantní trojúhelník má strany v tečně kuspidální, v tečně inflexní a ve spojnici hrotu s bodem obratu); řada postupných přímek satelitních (z nichž každá je satelitní přímkou k předcházející) tvoří tečny určité křivky 3. stupně a 3. třídy; viz *K. Zahradník*, Contribution à la théorie des cubiques cuspidales, Nouv. Annales math. (3) 18 (1899).

[9]) K analytickému vyšetření rovinných čar kubických je záhodno připojiti vlastnosti a konstrukce, plynoucí z geometrického vytvoření jejich. Obecná čára 3. stupně vzniká (jak bylo z části už uvedeno) buď jako geometrické místo průsečíků sdružených čar dvou projektivních svazků, svazku přímek a svazku kuželoseček; nebo ze dvou projektivních involucí přímkových se společným paprskem sobě samému odpovídajícím; nebo jako geom. místo dvojic bodů konjugovaných vzhledem ke kuželosečkám sítě; nebo jako soustava průsečíků trojic sdružených přímek tří kolineárních polí přímkových; nebo je vytvořena průsečíky sdružených přímek tří svazků v korespondenci trilineární; nebo dotyčnými body tečen vedených z pevného bodu ke kuželosečkám svazku; nebo je průmětem prostorové čáry 4. stupně prvního druhu z jejího bodu; nebo se objevuje jako součástka zvrhlé čáry 4. stupně; a příbuznými nebo jinými způsoby. Viz zejména (mimo práce, uv. v pozn. [4]) čl. 49): *F. Schur*, Synthetischer Beweis der Identität einer Tripelcurve mit dem Erzeugniss eines Kegelschnittbüschels und eines ihm projectivischen Strahlenbüschels, Zeitschrift Math. Phys. 24 (1879); *G. Castelnuovo*, Studio sulla omografia di seconda spezie, Atti Ist. Veneto (6) 5 (1887); *H. Schröter*, Zurückführung der Grassmann'-

83. Čáry čtvrtého stupně. *a*) Rovnice obecné čáry 4. stupně v rovině obsahuje 3 členy tvaru x_1^4, 6 členů tvaru $x_1^3 x_2$, 3 členy tvaru $x_1^2 x_2^2$ a 3 členy tvaru $x_1^2 x_2 x_3$, celkem tedy 15 členů a tolikéž koeficientů; a protože tyto konstanty jsou v rovnici čáry obsaženy homogenně a lineárně, jest čára 4. stupně v rovině jednoznačně určena 14 lineár-

---

schen Definitionen der Curve dritter Ordnung auf die von Chasles, Cayley und Hesse angegebenen Erzeugungsweisen, Journal r. a. Math. 104 (1888); *A. Hurwitz*, Über die Schröter'sche Construction der ebenen Curven dritter Ordnung, Journal r. a. Math. 107 (1890); *F. London*, Zur Theorie der trilinearen Verwandtschaft dreier einstufiger Grundgebilde, Math. Annalen 44 (1894); *K. Rohn*, Konstruktion der ebenen Kurve 3. Ordnung aus 9 beliebigen Punkten mit Hülfe des Lineals, Jahresbericht D. Math. Ver. 16 (1907); *L. Casteels*, Études sur la génération des cubiques planes, Mémoires Acad. Belgique (2) 7 (1922).

Racionální čára 3. stupně jest vytvořena průsečíky sdružených přímek dvou projektivních svazků, lineárního a kvadratického; nebo průsečíky sdružených přímek dvou svazků v korespondenci jednodvojznačné; je geom. místem dotyčných bodů tečen vedených z libovolného bodu ke kuželosečkám řady; je průmětem prostorové čáry 3. stupně nebo vzniká specialisováním rozmanitých vytvoření kubiky obecné. Viz (mimo pojednání uv. v pozn. [3]) čl. 46 a [4]) čl. 49) zvl.: *A. Ameseder*, Über rationale Curven dritter und vierter Ordnung, Sitzungsberichte Akad. Wien 80 (1879); *G. Pittarelli*, Le cubiche con un punto doppio e la corrispondenza (1, 2), Memorie Accad. L. Roma (4) 3 (1887); *F. Dingeldey*, Über Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt, Math. Annalen 27 (1886); *M. d'Ocagne*, Sur la construction des cubiques cuspidales par points et tangentes, Nouv. Annales (3) 11 (1892); *L. Crelier*, Constructions synthétiques relatives à certaines courbes du 3e degré et de la 3e classe, L'enseignement math. 10 (1908), též 15 (1913).

[10]) Z lineárních soustav rovinných čar kubických byl vyšetřován zvl. svazek jednomocný. Všechny čáry 3. stupně, jdoucí osmi pevnými body v rovině, procházejí ještě týmž bodem devátým, tvoříce (jednomocný) svazek; devátý bod base takového svazku byl z osmi daných často sestrojován; viz na př. *F. London*, Lineare Constructionen des neunten Schnittpunkts zweier Curven dritter Ordnung, Math. Annalen 36 (1890); *H. Picquet*, Nouvelle contribution au problème du huitième point commun à trois quadriques; son identité avec un problème plan, Bulletin Soc. math. France 22 (1894); *T. Kierboe*, Lineaer konstruktion af det niende skaeringspunkt for 2 kurver af 3die orden..., Nyt Tidsskrift math. 7 (*B* 1896). Ve svazku kubik existuje 12 čar s bodem dvojným (tyto dvojné body nazval *A. Cayley* kritickými středy svazku). Zvláštní pozornosti zaslouží svazek čar 3. stupně, jehož čáry mají v bodech base své body inflexní (svazek syzygetický, viz čl. 81*a*). Svazek čar kubických s reálnými body základními studoval *L. Mohrmann*, Über den Büschel von ebenen Kurven dritter Ordnung mit neun reellen Grundpunkten, Math. Annalen 74 (1913). O svazku racionálních čar 3. stupně pojednal *B. Bydžovský*, Příspěvek k theorii svazku kubických křivek racionálných, Program reálky Kladno 1906. O soustavách rovinných čar kubických viz také *F. Dumont*, Introduction à la géométrie du troisième ordre (1904), p. 82 a n.

[11]) O metrických vlastnostech rovinných čar 3. stupně a zejména o často vyšetřovaných kubikách metricky speciálních (mezi nimiž nejdůležitější jsou t. zv. cirkulární, t. j. jdoucí imaginárními kruhovými body roviny) jednají práce, jejichž přehled podává *G. Kohn* v Encyklopädie math. Wiss. III. 2_1, p. 509 a n.; viz také na př. *G. Loria*, Curve piane speciali algebriche e trascendenti I (1930, něm. 2. vyd. 1910), p. 14 a n.

ními nezávislými podmínkami, zejména 14 body svými obecně položenými.[1])

Ze vzorce pro rod čáry algebraické a ze vzorců Plückerových vyplývá: Pravá čára 4. stupně čili čára bikvadratická čili *kvartika* může býti rodu 3 nebo 2 nebo 1 nebo 0. Kvartika *rodu 3* čili *obecná* nemá singulárních bodů (sluje proto někdy také nesingulární) a jest třídy 12.; má 28 dvojných tečen (s různými body dotyčnými) a 24 tečny inflexní. Kvartika *rodu 2* (čili hypereliptická) má jeden bod dvojný (s různými tečnami, uzel nebo bod isolovaný) nebo jeden hrot; v prvním případě je třídy 10., má 16 dvojných a 18 inflexních tečen, v případě druhém je třídy 9., má 10 tečen dvojných a 16 inflexních. Kvartika *rodu 1* (čili eliptická) jest trojího druhu: má buď 2 body dvojné, třídu 8., tečen 8 dvojných a 12 inflexních; nebo má 1 dvojný bod a 1 hrot, třídu 7., tečny 4 dvojné a 10 inflexních; nebo má 2 hroty, třídu 6., 1 dvojnou tečnu a 8 tečen inflexních. Konečně čára 4. stupně *rodu 0* čili *racionální* má buď 3 dvojné body nebo 2 body dvojné a 1 hrot nebo 1 dvojný bod a 2 hroty nebo 3 hroty; jest v těchto čtyřech případech uvedeného pořadí třídy 6., resp. 5., resp. 4., resp. 3. a má (rovněž v pořadí tom) dvojných tečen 4, 2, 1, 1 a tečen inflexních 6, 4, 2, 0.

Vedle obyčejných bodů a tečen singulárních (dvojných bodů a tečen s různými nebo splývajícími tečnami resp. body dotyčnými) mohou se u čar 4. stupně vyskytnouti singulárnosti vyšší.[2])

b) *Čáru 4. stupně vytvoří dva projektivní svazky kuželoseček průsečíky sdružených čar svých.* Neboť jsou-li $k_h = 0$ pro $h = 1, 2, 3, 4$ rovnice čtyř kuželoseček, jsou $k_1 + \lambda k_2 = 0$ a $k_3 + \lambda' k_4 = 0$ rovnice dvou svazků takových čar s parametry λ a λ'; ustanovíme-li mezi svazky těmi projektivnost rovnicí $\alpha\lambda\lambda' + \beta\lambda + \gamma\lambda' + \delta = 0$, dostaneme z rovnic obou svazků a z této rovnice projektivního vztahu jejich eliminací parametrů λ, λ' rovnici geometrického místa bodů, v nichž se sdružené kuželosečky svazků uvažovaných protínají, totiž rovnici

$$\alpha k_1 k_3 - \beta k_1 k_4 - \gamma k_2 k_3 + \delta k_2 k_4 = 0.$$

Protože funkce k_h jsou stupně druhého, vyjadřuje nalezená rovnice čáru čtvrtého stupně.

Ježto rovnice, ke které jsme dospěli, je splněna pro $k_1 = 0$ a $k_2 = 0$, rovněž pro $k_3 = 0$ a $k_4 = 0$, prochází vytvořená čára bikvadratická

[1]) Vyloučeny jsou některé zvláštní polohy, na př. nesmějí uvedené body býti zvoleny ze 16 společných bodů dvou čar 4. stupně.

[2]) Teorii čar 4. stupně (při větší rozsáhlosti látky méně zpracovanou než u čar kubických) přehledně vykládají *G. Kohn* v Encyklopädie math. Wiss. III. 2. (*C* 5: Spezielle ebene algebraische Kurven, 1 *B*, 1908) a *E. Ciani* v Pascalově Repertorium höh. Math. 2. vyd. II. 1. (kap. 18. a 19., 1910); poněkud širší přehled (ač většinou shodný s uvedeným) podává *E. Ciani*, Le curve piane di quart'ordine, Giornale mat. 48 (1910). Ze spisů o algebraických čarách vůbec nejvíce o čarách 4. stupně podává *H. Hilton*, spolu s čarami kubickými o nich krátce jedná *A. B. Basset*.

oběma skupinami po čtyřech základních bodech svazků vytvořujících.[3])

Vycházíme-li od dané kvartiky, nesmíme obě base vytvořujících svazků kuželosečkových zvoliti libovolně: zvolíme-li totiž na kvartice čtyři body A_1, B_1, C_1, D_1 za basi jednoho svazku, protíná určitá kuželosečka tohoto svazku danou kvartiku v dalších čtyřech bodech E, F, G, H; protože tyto body mají býti průsečíky oné kuželosečky s určitou (sdruženou) kuželosečkou svazku druhého, musí base tohoto druhého svazku býti ve zbývajících průsečících A_2, B_2, C_2, D_2 kvartiky s kuželosečkou, položenou body E, F, G, H.

Dejme tomu, že base $A_1B_1C_1D_1$ jednoho a $A_2B_2C_2D_2$ druhého svazku kuželoseček mají jeden bod $A_1 \equiv A_2$ společný: tečny v tomto bodě ke kuželosečkám jednoho svazku a tečny ke sdruženým kuželosečkám svazku druhého tvoří dva projektivní svazky paprskové se společným středem $A_1 \equiv A_2$; samodružný paprsek těchto svazků, jsa ve společném bodě společnou tečnou obou sdružených kuželoseček svazků vytvořujících, jest tečnou vytvořené kvartiky. A protože projektivní soumístné svazky paprskové mají dva paprsky samodružné, jest společný základní bod obou vytvořujících svazků kuželosečkových dvojným bodem vznikající čáry 4. stupně. Splynou-li další dva základní body B_1 a B_2, po případě ještě C_1 a C_2 vytvořujících svazků, vznikne na vytvořené čáře bikvadratické druhý, po případě třetí bod dvojný. Vytvořují tedy dva projektivní svazky kuželosečkové kvartiku rodu 3, 2, 1, 0 podle toho, jestliže obě skupiny po čtyřech základních bodech svazků těch nemají žádný, resp. mají jeden, resp. dva, resp. tři body společné.[4])

---

[3]) Máme-li na zřeteli, že kuželosečka je geom. místo bodů, z nichž se čtyři určité body její promítají čtveřinou paprsků o konstantním dvojpoměru, a že každé kuželosečce svazku přísluší tedy vzhledem k basi jeho dvojpoměr lineárně závislý na parametru kuželosečky té ve svazku, nalezneme: Čára 4. stupně jest geometrické místo bodu, z něhož se dvě skupiny po čtyřech bodech v rovině promítají dvěma čtveřinami paprsků o dvojpoměrech, vázaných určitou relací bilineární (a obsahuje body oněch dvou skupin).

[4]) Vedle jednoduchého vytvoření rovinné čáry 4. stupně průsečíky sdružených čar dvou projektivních svazků kuželoseček, nahoře vyloženého, jest možno uvésti příbuzné vytvoření její ze dvou projektivních svazků přímek a čar kubických; kvartika je také rovinným průsekem kužele, opsaného ploše třetího stupně z jejího bodu; je průsekem Kummerovy plochy 4. stupně; a může vzniknouti jinými způsoby (složitějšími). O některých z těchto vytvoření rovinné kvartiky a hlavně o konstrukcích na nich založených (spec. ze 14 bodů daných) viz *H. J. E. Smith*, Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques, Annali mat. (2) 3 (1869); *C. le Paige*, Sur quelques questions relatives aux quartiques planes, Annales Soc. sc. Bruxelles 8 (1884); *R. Heger*, Zusammenstellung von Constructionen an Curven höherer Ordnung, Zeitschrift Math. Phys. 31 (1886); *J. Cardinaal*, Zur geometrischen Theorie der ebenen Curve vierter Ordnung, Journal r. a. Math. 102 (1887); *H. Valentiner*, Om konstruktionen af curver af 3die og 4de orden ..., Nyt Tidsskrift math. 3 (1892); *M. Long*, On Geiser's method of generating a plane quartic, Proceedings Math. soc. London (2) 9 (1911);

c) V teorii obecné křivky 4. stupně (rodu 3) přední místo zaujímá soustava 28 dvojných tečen (bitangent) jejích.

Ke zvolené dvojici dvojných tečen kvartiky lze připojiti pět jiných dvojic tečen dvojných tak, že čtyři dotyčné body každé této dvojice leží spolu se čtyřmi dotyčnými body oné dvojice na téže kuželosečce. Dokážeme to pomocí úpravy rovnice křivky 4. stupně na tvar $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 = u^2$, kde $\beta_k = 0$ jsou rovnice dvojných tečen a $u = 0$ rovnice kuželosečky. K tomu cíli zvolme dvě dvojné tečny dané křivky za strany O_3O_1 a O_3O_2 trojúhelníku souřadnic; protože tedy rovnice křivky se musí redukovati pro $x_2 = 0$ na rovnici $(x_3^2 + ax_3x_1 + a'x_1^2)^2 = 0$ a pro $x_1 = 0$ na rovnici $(x_3^2 + bx_3x_2 + b'x_2^2)^2 = 0$, má křivka při uvedené volbě soustavy souřadnic rovnici

$$(x_3^2 + ax_3x_1 + a'x_1^2)^2 + (x_3^2 + bx_3x_2 + b'x_2^2)^2 - x_3^4 = x_1x_2 \cdot \varphi(x_1, x_2, x_3).$$

kde φ je obecná funkce 2. stupně proměnných x_1, x_2, x_3. Levou stranu této rovnice můžeme upraviti na tvar

$$(x_3^2 + ax_3x_1 + a'x_1^2 + bx_3x_2 + b'x_2^2)^2 - \\ - 2x_1x_2\,(abx_3^2 + a'bx_3x_1 + ab'x_3x_2 + a'b'x_1x_2),$$

takže rovnice křivky nabude tvaru

$$x_1x_2 \cdot \psi\,(x_1, x_2, x_3) = (a'x_1^2 + b'x_2^2 + ax_1x_3 + bx_2x_3 + x_3^2)^2,$$

M. Antscherl, Die singularitätenfreie Kurve vierter Ordnung als Umrisskurve der allgemeinen Fläche dritter Ordnung, Sitzungsberichte Akad. Wien 123 (1914). Pro kvartiku rodu 2 viz *C. F. E. Björling*, Construction mittels Lineals und Cirkels der Curven vierter Ordnung vom Geschlechte 2, Öfversigt Akad. Stockholm 44 (1887); *J. v. Sz. Nagy*, Über eine neue Ableitung der hyperelliptischen Kurven vierter Ordnung, Math. naturw. Berichte Ungarn 30 (1915). Kvartika rodu 1 se vytvoří mimo způsoby vytčené dvěma svazky přímek v korespondenci (2, 2)-značné, při čemž středy svazků jsou dvojnými body čáry; nebo dvěma soumístnými kvadratickými svazky přímek v uvedené korespondenci; nebo je průmětem prostorové čáry 4. stupně prvního druhu; viz na př. *J. Thomae*, Untersuchungen über zweizweideutige Verwandtschaften und einige Erzeugnisse derselben, Abhandlungen Ges. Wiss. Leipzig 21 (1895). Konečně kvartika rodu 0 může býti vytvořena (mimo specialisace způsobů uvedených) dvěma projektivními kvadratickými svazky přímek; nebo svazkem přímek a k němu projektivní involucí tečen kuželosečky; nebo vzniká jako průmět racionální kvartiky prostorové; a jinými způsoby; viz mimo poj. cit. v pozn. [1]) a [3]) čl. 49 na př. *K. Bobek*, Über rationale Curven vierter Ordnung, Sitzungsberichte Akad. Wien 80 (1879); *C. Beyel*, Die Curven vierter Ordnung mit drei doppelten Inflexionsknoten, Zeitschrift Math. Phys. 30 (1885); *A. Ameseder*, Über Constructionen ebener Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten, Sitzungsberichte Böhm. Ges. Wiss. 1880; *W. Stahl*, Über die rationale ebene Curve vierter Ordnung, Journal r. a. Math. 101 (1887); *K. Zahradník*, Konstruktion der rationalen Kurven dritter und vierter Ordnung resp. Klasse vermittels der kollinear incidenten Elemente, Sitzungsberichte Akad. Wien 117 (1908); také *W. Binder*, Theorie der unicursalen Plancurven vierter bis dritter Ordnung in synthetischer Behandlung, 1896; *A. D. Biddle*, Constructive theory of the unicursal plane quartic by synthetic methods, Publications univ. California 1 (1912); *E. Bally*, Géométrie synthétique des unicursales de troisième classe et de quatrième ordre, 1920.

kde $\psi \equiv \varphi + 2(abx_3^2 + a'bx_3x_1 + ab'x_3x_2 + a'b'x_1x_2)$. Doplníme-li výraz, jehož druhá mocnina tvoří pravou stranu rovnice, totiž $a'x_1^2 + b'x_2^2 + ax_1x_3 + bx_2x_3 + x_3^2 \equiv \chi$, členem cx_1x_2, dostaneme rovnici dané křivky ve tvaru

$$x_1x_2(\psi + 2c\chi + c^2x_1x_2) = (\chi + cx_1x_2)^2.$$

Aby se kuželosečka $\psi + 2c\chi + c^2x_1x_2 = 0$ rozpadla ve dvě přímky, k tomu je nutno a stačí, by determinant z druhých parciálních derivací levé strany podle tří proměnných x_1, x_2, x_3 byl roven nule; rovnice tak vznikající jest 5. stupně v konstantě c. Pro každý z pěti kořenů c_k obdržíme tedy jako rovnici uvažované křivky 4. stupně

$$x_1x_2p_1^{(k)}p_2^{(k)} = u_k^2,$$

kde $p_1^{(k)} = 0$, $p_2^{(k)} = 0$ jest (stejně jako $x_1 = 0$, $x_2 = 0$) dvojice dvojných tečen křivky té a $u_k \equiv \chi + c_kx_1x_2 = 0$ kuželosečka, jdoucí osmi dotyčnými body dvojných tečen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $p_1^{(k)} = 0$, $p_2^{(k)} = 0$.

Můžeme zjistiti, že vyjdouce od kterékoli dvojice dvojných tečen ze šesti dvojic, jež jsme právě nalezli, dospějeme k ostatním pěti dvojicím uvedeným. To vyplývá odtud, že rovnici křivky lze uvésti na tvar, v němž kterékoli tři dvojice jsou (levými stranami svých rovnic) stejně zastoupeny. Vezměme v úvahu dvojice dvojných tečen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; $p_1 = 0$, $p_2 = 0$; $q_1 = 0$, $q_2 = 0$. Podle hořejšího lze levé straně anulované rovnice dané kvartiky dáti tvary

$$x_1x_2p_1p_2 - u_1^2, \qquad x_1x_2q_1q_2 - u_2^2;$$

odtud plyne

$$x_1x_2(p_1p_2 - q_1q_2) \equiv (u_1 + u_2)(u_1 - u_2).$$

Protože x_1 a x_2 nemohou býti činiteli různých činitelů strany pravé (ježto by totiž výraz $(u_1 + u_2) + (u_1 - u_2) = 2u_1$ rovnal se nule pro $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, takže by vrchol O_3, průsečík dvojných tečen prve zvolených ležel na dané kvartice, což není možno), jest součin x_1x_2 roven (až na konstantní faktor) buď $u_1 + u_2$ nebo $u_1 - u_2$ a výraz $p_1p_2 - q_1q_2$ roven (až na převratnou hodnotu onoho faktoru) $u_1 - u_2$ resp. $u_1 + u_2$. Odtud (kladouce konstantní faktor roven 1) dostaneme $2u_1 = x_1x_2 + p_1p_2 - q_1q_2$, takže levá strana rovnice dané kvartiky se převádí na tvar

$$x_1x_2p_1p_2 - \tfrac{1}{4}(x_1x_2 + p_1p_2 - q_1q_2)^2 \equiv$$
$$\equiv -\tfrac{1}{4}(x_1^2x_2^2 + p_1^2p_2^2 + q_1^2q_2^2 - 2x_1x_2p_1p_2 - 2x_1x_2q_1q_2 - 2p_1p_2q_1q_2).$$

Vidíme tedy, že souvislost dvojic p_1p_2, q_1q_2 jest táž jako dvojic x_1x_2, p_1p_2 (a dvojic x_1x_2, q_1q_2), totiž že osm dotyčných bodů těchto čtyř dvojných tečen leží rovněž na jedné kuželosečce.

Skupina šesti dvojic dvojných tečen, z nichž kterékoli dvě dvojice mají dotyčné body své na jedné kuželosečce, sluje *Steinerovou skupinou* dvojných tečen křivky 4. stupně. Jest patrno, že Steinerova skupina šesti dvojic čili dvanácti tečen dvojných jest určena kteroukoli jedinou dvojicí, ve skupině té obsaženou. Proto existují u křivky 4. stupně

$\frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 27 : 6 = 63$ Steinerovy skupiny po šesti dvojicích tečen dvojných.[5][6][7])

d) Víme, že polára dvojného bodu na algebraické čáře vzhledem k ní má tam rovněž bod dvojný s týmiž tečnami jako čára daná; jest proto první polára dvojného bodu čáry 4. stupně vzhledem k této čára 3. stupně s bodem dvojným v bodě tom a s týmiž tečnami, druhá polára se pak rozpadá v tyto dvě tečny.

---

[5]) Čtyři (také tři) dvojné tečny kvartiky, jejichž dotyčné body leží nebo neleží na téže kuželosečce, slují *syzygetické* resp. *azygetické*. Lze tedy říci, že Steinerovu skupinu tvoří šest dvojic dvojných tečen, z nichž každé dvě dvojice jsou syzygetické.

Konfigurace dvojných tečen rovinné kvartiky byla často a několika způsoby vyšetřována; viz zejména *H. E. Timerding*, Über die Gruppirungen der Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung, Journal r. a. Math. 122 (1900); přehled podává *E. Ciani* v Repertorium höh. Math. II. 1, p. 408 a n.

S dvojnými tečnami obecné kvartiky souvisí 63 jednomocné kvadratické soustavy kuželoseček (z nichž každá se kvartiky dotýká ve čtyřech bodech); kvartiku lze pokládati za vytvořenou takovým systémem kuželoseček. O těchto viz na př. *G. Kohn*, Über die Berührungskegelschnitte und Doppeltangenten der allgemeinen Curve vierter Ordnung, Journal r. a. Math. 107 (1890), a Über die Relationen, welche zwischen den verschiedenen Systemen von Berührungskegelschnitten einer allgemeinen Curve vierter Ordnung bestehen, Monatshefte Math. Phys. 1 (1890); *E. Ciani*, Sopra le serie quadratiche di coniche inviluppanti la quartica piana, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 28 (1895). Pro čáry rodu nižšího viz *A. Ameseder*, Geometrische Untersuchungen der ebenen Curven vierter Ordnung, insbesondere hinsichtlich ihrer Berührungskegelschnitte II, Sitzungsberichte Akad. Wien 87 (1883); *G. Fontené*, Sur les dégénérescences des 63 systèmes de coniques quadruplement tangentes à une quartique, Bulletin Soc. math. France 27 (1899).

O soustavě inflexních tečen a bodů u kvartiky rodu 3 není v obecném případě téměř nic známo. Vlastnosti inflexí u kvartik rodu nižšího než 3 podává přehledně *H. W. Richmond*, Note on the inflexions of plane curves with double points, Proceedings Math. soc. London 33 (1901).

[6]) Při klasifikaci rovinných čar 4. stupně jest možno vedle rodu věnovati pozornost počtu reálných větví a u těchto počtu reálných bitangent: rovinná kvartika může míti jen sudé větve, nejvýše čtyři; lze u ní rozlišovati větve bez dotčených bitangent nebo s jednou až čtyřmi bitangentami (celkem má kvartika bitangenty jednotlivých větví vždy čtyři, a tedy nejvýše osm reálných inflexí, mimo to 0 až 24 bitangenty s dotyčnými body na různých větvích). S těmito zřeteli nalezl *H. G. Zeuthen*, Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre, Math. Annalen 7 (1874), pro obecnou kvartiku 36 typů (odtud pak klasifikaci pro kvartiky rodů nižších); viz také *C. Hossfeld*, Über die Realitätsverhältnisse der Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung, Zeitschrift Math. Phys. 31 (1886); *R. Gentry*, On the forms of plane quartic curve, Diss. New. York 1896; *W. G. Bullart*, On the general classification of plane quartic curves, Diss. Worcester Mass. 1899.

[7]) Pro teorii polár (čar polárných a polárných mnohoúhelníků) a teorii invariantů (spec. čar kovariantních), příslušné k rovinné kvartice, viz *G. Kohn* v Encyklopädie math. Wiss. III. 2_1, p. 522 a n.; *E. Ciani* v Repertorium höh. Math. II. 1, p. 399 a n.

Platí však dále: *Přímka vedená dvojným bodem kvartiky jest touto čarou a její první polárou proťata v harmonické čtveřině bodů.* Neboť čára čtvrtého stupně s dvojným bodem v bodě (0, 0, 1) má rovnici

$$x_3^2\varphi_2 + x_3\varphi_3 + \varphi_4 = 0,$$

kde φ_k jsou homogenní funkce souřadnic x_1, x_2 stupně k-tého; první polára bodu (0, 0, 1) vzhledem k ní má pak rovnici

$$2x_3\varphi_2 + \varphi_3 = 0.$$

Všimněme si třebas přímky $x_2 = 0$, jdoucí uvažovaným bodem: ta protíná kvartiku (mimo bod O_3) ve dvou bodech, o jejichž souřadnicích platí

$$ax_3^2 + bx_3x_1 + x_1^2 = 0,$$

její první poláru pak v bodě se souřadnicemi, jež vyhovují rovnici

$$2ax_3 + bx_1 = 0.$$

Dosadíme-li do rovnice, jež je podmínkou pro harmonickou polohu čtveřiny bodů o známých souřadnicích, totiž do rovnice $(\varkappa_1 + \varkappa_2) \cdot (\varkappa_3 + \varkappa_4) - 2(\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_3\varkappa_4) = 0$, jednak souřadnice x_1/x_3 obou průsečíků přímky $x_2 = 0$ s kvartikou mimo bod O_3, totiž $\varkappa_1 + \varkappa_2 = -b$, $\varkappa_1\varkappa_2 = a$, jednak souřadnice bodu O_3 a průsečíku na první poláře, totiž $\varkappa_3 = 0$, $\varkappa_4 = -2a/b$, shledáváme, že relace ta je splněna.

Pozoruhodné jsou dvojné body, jejichž jedna nebo obě tečny jsou inflexní. *Dvojný bod* kvartiky, *jehož jedna tečna je inflexní* (bod fleknodální), má první poláru složenou z této tečny a kuželosečky. To vidíme na rovnici kvartiky s takovým bodem v (0, 0, 1):

$$x_3^2\varphi_1\psi_2 + x_3\varphi_1\psi_2 + \varphi_4 = 0,$$

kde $\psi_{1,2}$ jsou formy 1. resp. 2. stupně proměnných x_1, x_2, φ_k pak stupně k-tého; první polára uvedeného bodu má tu rovnici

$$\varphi_1(2x_3\psi_1 + \psi_2) = 0,$$

rozpadá se tedy v inflexní tečnu $\varphi_1 = 0$ a v kuželosečku.

Obdobně *dvojný bod* kvartiky, *jehož obě tečny jsou inflexní* (bod bifleknodální), má první poláru složenou z těchto dvou tečen a z přímky, jež každou přímku, vedenou dvojným bodem tím, protíná v bodě, harmonicky sdruženém s bodem dvojným vzhledem k oběma ostatním průsečíkům jejím s kvartikou. Neboť rovnice kvartiky s dvojným bodem o dvou tečnách inflexních v bodě (0, 0, 1) jest

$$x_3^2\varphi_2 + x_3\varphi_2\psi_1 + \varphi_4 = 0,$$

kde $\varphi_2 = 0$ jest souborná rovnice inflexních tečen; první polára bodu O_3 jest

$$\varphi_2(2x_3 + \psi_1) = 0,$$

rozpadá se tedy v obě tečny ony a v přímku. Uvedená vlastnost této přímky jest obsažena ve větě nahoře dokázané; z toho důvodu sluje

přímka ta (někdy) *harmonickou polárou* dvojného bodu s inflexními tečnami.

O harmonické poláře dvojného bodu kvartiky s oběma tečnami inflexními nalezneme bezprostředně (z vlastností úplného čtyrstranu a dvojpoměru): Přímky spojující dva a dva z průsečíků kvartiky a dvou libovolných přímek, vedených dvojným bodem jejím s dvěma inflexemi, protínají se na harmonické poláře bodu toho. Totéž platí o tečnách kvartiky v průsečících jejich s libovolnou přímkou, jdoucí jejím dvojným bodem s dvěma inflexemi. Harmonická polára dvojného bodu s dvěma inflexemi na kvartice prochází ostatními dvojnými body této čáry.

e) Mimo dvojné body s jednou nebo dvěma tečnami inflexními všimněme si u čáry 4. stupně složitějších prvků singulárních.

Splynou-li dva dvojné body čáry v jeden, nabude jedna část křivky mezi nimi ležící dotyku s částí druhou (majíc s ní společné dva body splývající): vzniká *dvojný bod dotykový* (bod taknodální). Spolu splynou dvě dvojné tečny čáry v jednu, jež jsouc tečnou křivky v dotykovém bodě dvojném, má tam s ní čtyři splývající body společné (a nemůže tedy míti s kvartikou dalšího společného bodu). Jest tudíž dotykový dvojný bod se svou tečnou u čáry singulárním prvkem soběduálním.

Jestliže se dvojný bod čáry ztotožní s jejím hrotem, obdržíme *hrot druhého druhu* (bod návratu), u něhož obě části křivky tam se stýkající leží na téže straně od tečny křivky v něm (kdežto u obyčejného hrotu leží na různých stranách od tečny jeho). Zároveň splyne dvojná tečna čáry a její tečna inflexní v tečnu hrotu, takže hrot 2. druhu jest se svou tečnou opět singulární prvek soběduální.

Ztotožní-li se s dotykovým dvojným bodem čáry třetí dvojný bod její, splyne také třetí dvojná tečna čáry s tečnou, vzniklou splynutím dvou tečen dvojných v onom bodě: povstane tak *dvojný bod oskulační* (bod osknodální), v němž dvě části čáry mají dotyk trojbodový. Také tento bod se svou tečnou je soběduální prvek singulární.

Konečně splyne-li s dotykovým bodem dvojným na čáře její hrot, vznikne *dotykový hrot*; v něm má čára tečnu, ve kterou splynuly tečna onoho bodu (vzniklá splynutím dvou dvojných tečen) a tečna inflexní, takže i tento singulární bod se svou tečnou je soběduální.

Dotykový bod dvojný, jakož i hrot 2. druhu mohou se vyskytnouti u čar 4. stupně rodu 1 (třídy 8. resp. 7.) nebo rodu 0 (třídy 6. nebo 5., resp. 5. nebo 4.); oskulační bod dvojný a dotykový hrot ovšem jen u racionálních čar bikvadratických (třídy 6. resp. 5.).

U čar 4. stupně (rodu 0) může se dále vyskytnouti *bod trojnásobný;* má-li čára bikvadratická takový bod v bodě (0, 0, 1), jest její rovnice tvaru $x_3\varphi_3 + \varphi_4 = 0$, kde $\varphi_{3,4}$ jsou binární formy 3. a 4. stupně s proměnnými x_1, x_2, a $\varphi_3 = 0$ jest souborná rovnice tečen čáry v trojném bodě O_3. Z formy $\varphi_3(x_1, x_2)$ poznáváme, že tři tečny kvartiky v bodě trojném mohou býti všechny reálné různé nebo dvě splývající a jedna

od nich různá nebo tři splývající nebo může býti jen jedna reálná a dvě sdruženě imaginární.[8])[9])[10])

[8]) Jak víme, platí trojný bod za tři body dvojnásobné (v širším smyslu); vskutku může vzniknouti současným splynutím tří bodů dvojných: v 1. případě uvedeném ze tří uzlů, ve 2. ze dvou uzlů a jednoho hrotu, ve 3. z jednoho uzlu a dvou hrotů a ve 4. z uzlu a dvou bodů isolovaných. Trojný bod nemůže však vzniknouti splynutím tří hrotů (u čáry 4. stupně 3. třídy), protože v duálním případě u čáry 3. stupně (4. třídy) nemohou splynouti tři inflexní tečny, aniž by se čára rozpadla (ve tři přímky).

K hořejšímu budiž připojeno, že obyčejné singulární prvky mohou u kvartiky býti imaginární (po dvou sdružené); z nich pak (a reálných) mohou vzniknouti singulární prvky složené.

Kdežto inflexní tečny (tečny s dotykem trojbodovým) se vyskytují už u křivek kubických, jsou kvartiky křivkami nejnižšího stupně, u nichž jsou (z téhož důvodu jako dvojné tečny s různými body dotyčnými) teprve možny tečny s dotykem čtyrbodovým; tečna s dotykem čtyrbodovým sluje *tečnou undulační*, její dotyčný bod bodem undulačním. Tato singulární přímka jest ekvivalentní dvěma tečnám inflexním spolu s obyčejnou tečnou dvojnou; duální k ní singulární bod je bod trojnásobný s třemi tečnami splývajícími (vznikající splynutím dvou hrotů a bodu dvojného). Protože obecná kvartika má 24 inflexní tečny (z nichž nejvýš osm je reálných), může taková kvartika míti 12 tečen undulačních (a z nich nejvýš čtyři reálné). A platí: V trojúhelníku, tvořeném třemi reálnými undulačními tečnami kvartiky, procházejí spojnice každého vrcholu s dotyčným bodem protější strany týmž bodem. Leží-li tři undulační tečny kvartiky v přímce, protíná přímka ta kvartiku ve čtvrtém bodě undulačním. Viz také *U. Masoni*, Sopra alcune curve del quarto ordine dotate di punti di ondulazione, Rendiconti Accad. Napoli 21 (1882).

[9]) Ze speciálních kvartik rodu 3 byly vyšetřovány především: Kvartika *Clebschova* tím charakterisovaná, že má jeden a tedy ∞^1 polárných pětistranů (t. j. její rovnici lze vyjádřiti jako lineární kombinaci čtvrtých mocnin pěti forem lineárních, položenou za rovnu nule). Kvartika *Lürothova*, jíž může býti vepsán úplný pětistran a tedy ∞^1 takových pětistranů. Kvartika *Caporaliova*, kterou lze definovati (dvakrát) jako Jacobiovu čáru přímky a syzygetického svazku kubik; je tím pozoruhodná, že má 12 inflexních bodů ve vrcholech čtyř trojstranů inflexních uvedeného svazku a 12 bodů inflexních ve vrcholech čtyř inflexních trojstranů svazku druhého. Kvartika *desmická* (*Humbertova*), jež má tři bitangenty takové, že dotyčné body jejich jsou vrcholy úplného čtyrstranu s úhlopříčkami v oněch bitangentách (patří do svazku obsahujícího tři čáry zvrhlé, každou složenou ze čtyř přímek). O nich jednají zejména: *J. Lüroth*, Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung von Curven vierter Ordnung, Math. Annalen 1 (1869); *G. Humbert*, Sur une classe de courbes planes et sur une surface remarquable du quatrième ordre, Journal math. p. a. (4) 6 (1890), a téhož Sur la surface desmique du quatrième ordre, tamtéž (4) 7 (1891); *E. Ciani*, La quartica di Caporali, Rendiconti Accad. Napoli (3) 2 (1896); *G. Scorza*, Sopra la teoria delle figure polari delle curve piane del 4o ordine, Annali mat. (3) 2 (1899); *H. Bateman*, The quartic curve and its inscribed configurations, Amer. Journal math. 36 (1914).

Zajímavé jsou křivky 4. stupně (rodu 3 a nižšího), jež jsou *invariantní při kolineacích*. Všechny takové kvartiky bez singulárních bodů (celkem 12) určil *A. Wiman* (r. 1895), všechny pravé (s body singulárními i bez nich) odvodil *E. Ciani* (r. 1900). Patří sem především kvartika *Kleinova*, invariantní při grupě 168 kolineací; je tím pozoruhodná, že tečnovým bodem každého inflexního bodu jejího je opět bod inflexní a to tak, že existuje osm

84. Racionální čáry bikvadratické. *a*) Racionální čára 4. stupně *s třemi body dvojnými* (trinodální) nabude jednoduché rovnice, položíme-li vrcholy základního trojúhelníku souřadnic do dvojných bodů

trojúhelníků s vrcholy v inflexních bodech jejích a se stranami v inflexních tečnách vždy předcházejícího vrcholu; je-li jeden z trojúhelníků těch základním, má tato kvartika rovnici $x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1 = 0$. Dále kvartika *Dyckova* s rovnicí $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$, invariantní při grupě 96 kolineací, jejichž rovnice dostaneme, permutujeme-li všemi způsoby tři souřadnice a znásobíme-li je všemi hodnotami čtvrté odmocniny z 1; tato kvartika má 12 bodů undulačních, po čtyřech tvořících harmonickou skupinu na stranách trojúhelníku základního. Potom speciální případ kvartiky Caporaliovy, invariantní při grupě 48 kolineací; tato (speciální vůči obecné kvartice tak pojmenované tím, že obě přímky tam uvedené splývají) má čtyři undulační body ležící v přímce a tvořící skupinu ekvianharmonickou, příslušné pak tečny undulační jdoucí jedním bodem. Mimo tyto křivky a mimo kvartiky, invariantní při subgrupách uvedených grup, jsou ostatní kvartiky sem příslušné, až na křivku $x_1^4 + x_2^4 + x_1x_2x_3^2 = 0$ s grupou 16 kolineací, invariantní při konečných grupách cyklických; jen kvartika $x_2^4 + x_1^3x_3 = 0$ je invariantní při kontinuitní grupě jednoparametrové. Viz *E. Ciani*, Le quartiche piane proiettive a sè stesse, Rendiconti Circolo mat. Palermo 28 (1909); *E. Ciani*, Contributo alla teoria del gruppo di 168 collineazioni piane, Annali mat. (3) 5 (1901). Kvartiky invariantní při involučních homologiích určil *E. Ciani*, I varii tipi possibili di quartiche piane più volte omologico-armoniche, Rendiconti Circolo mat. Palermo 13 (1899); racionální kvartiky při kolineacích invariantní (8 případů) stanovil *R. M. Winger*, Self-projective rational curves of the fourth and fifth orders, Amer. Journal math. 36 (1914).

[10]) Z vlastností kvartik *rodu* 2 budiž uvedena věta (speciální případ věty Bertiniovy o čarách n-tého stupně s bodem $(n-2)$-násobným, viz *E. Bertini*, Una nuova proprietà delle curve di ordine n con un punto $(n-2)^{\text{plo}}$, Atti Accad. L. Roma (3) 1 (1877): Dotyčné body šesti tečen, vedených ke kvartice rodu 2 z jejího bodu dvojného, leží na kuželosečce, jež na každé přímce jdoucí dvojným bodem odděluje harmonicky její další průsečíky s kvartikou. Protínají-li tečny kvartiky ve dvojném bodě O tuto čáru ještě v bodech A, B a protíná-li ji přímka AB ještě v bodech C, D, dotýká se ona kuželosečka přímek OC, OD v bodech C, D.

O kvartikách *rodu 2* pojednávají zvláště: *K. Bobek*, Über Curven vierter Ordnung vom Geschlechte zwei, ihre Systeme berührender Kegelschnitte und Doppeltangenten, Denkschriften Akad. Wien 53 (1887); *H. M. Jeffery*, On the identity of the nodes of a nodal curve of the fourth order with those of its quartic and sextic contravariants, Quart. Journal math. 24 (1890); *H. W. Richmond*, Cuspidal quartics, Quart. Journal math. 26 (1892); *W. R. W. Roberts*, Some properties of the uninodal quartic, Proceedings Math. soc. London 25 (1894); *H. W. Richmond*, On the uninodal quartic curve, Proceedings Math. soc. Edinburgh (2) 1 (1927). O kvartice s jedním bodem bifleknodálním viz *F. Brioschi*, Les tangentes doubles à une courbe du quatrième ordre avec un point double, Math. Annalen 4 (1871, a k tomu pozn. *L. Cremony* tamtéž).

O kvartikách *rodu 1* jednají zejména: *A. Ameseder*, Über Configurationen und Polygone auf biquadratischen Curven, Sitzungsberichte Akad. Wien 93 (1886); *H. M. Jeffery*, On the genesis of binodal quartic curves from conics, Proceedings Math. soc. London 21 (1890); *H. M. Jeffery*, On the classification of binodal quartic curves, Proceedings Math. soc. London 23 (1892); *H. W. Richmond*, On the inflexions of a binodal quartic curve, Quart. Journal math. 32 (1900); *G. Majcen*, Ein Satz über die

jejích; v tom případě totiž odpadnou členy obsahující x_k^4 a x_k^3, takže rovnice čáry má tvar

$$ax_2^2x_3^2 + bx_1^2x_3^2 + cx_1^2x_2^2 + 2a'x_1^2x_2x_3 + 2b'x_1x_2^2x_3 + 2c'x_1x_2x_3^2 = 0$$

čili

$$ax_2^2x_3^2 + bx_1^2x_3^2 + cx_1^2x_2^2 + 2x_1x_2x_3\,(a'x_1 + b'x_2 + c'x_3) = 0.$$

Dělíme-li ji součinem $x_1^2x_2^2x_3^2$, dostaneme rovnici

$$\frac{a}{x_1^2} + \frac{b}{x_2^2} + \frac{c}{x_3^2} + \frac{2a'}{x_2x_3} + \frac{2b'}{x_1x_3} + \frac{2c'}{x_1x_2} = 0.$$

S touto kvartikou souvisí několik kuželoseček:

1. *Tečny ve dvojných bodech kvartiky* s třemi body dvojnými *protínají spojnice vždy ostatních dvou dvojných bodů v šesti bodech* kuželosečky; rovnice této kuželosečky jest

$$bcx_1^2 + acx_2^2 + abx_3^2 + 2aa'x_2x_3 + 2bb'x_1x_3 + 2cc'x_1x_2 = 0.$$

Neboť tečny kvartiky s hořejší rovnicí v bodě $O_1(1, 0, 0)$ mají rovnici $cx_2^2 + 2a'x_2x_3 + bx_3^2 = 0$ (kde levá strana je koeficientem u x_1^2 v rovnici dané čáry), kterážto relace platí také o souřadnicích průsečíků uvedené kuželosečky s přímkou $x_1 = 0$; obdobně pro tečny v O_2 a O_3.

2. *Tečny ve dvojných bodech uvažované kvartiky jsou šesti tečnami kuželosečky*

$$au_1^2 + bu_2^2 + cu_3^2 - 2a'u_2u_3 - 2b'u_1u_3 - 2c'u_1u_2 = 0.$$

Neboť tečny této kuželosečky jdoucí bodem O_1 o rovnici $u_1 = 0$ mají souřadnice vyhovující rovnici $bu_2^2 - 2a'u_2u_3 + cu_3^2 = 0$, jsou tedy totožny s tečnami kvartiky v O_1 o rovnici $cx_2^2 + 2a'x_2x_3 + bx_3^2 = 0$; obdobně pro tečny v ostatních dvou bodech dvojných.

3. *Tečny jdoucí ke kvartice* s třemi dvojnými body *z jejích bodů dvojných protínají spojnice vždy ostatních dvou dvojných bodů v šesti bodech kuželosečky*; její rovnice jest

$$Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 - 2A'x_2x_3 - 2B'x_1x_3 - 2C'x_1x_2 = 0,$$

ebene Kurve vierter Ordnung mit einer Spitze zweiter Art, Sitzungsberichte Akad. Wien 119 (1910); *J. Majcen*, Krivulja 4. reda u ravnini sa šiljkom 2. vrste i s defektom 1, Rad Jugosl. akad. Zagreb 185 (1911); *H. Hilton*, On plane quartic curves with a node and a cusp, Messenger math. 46 (1916); *H. Hilton* a *D. S. Tuck*, On plane quartic curves with a tacnode, Messenger math. 47 (1917); *B. Bydžovský*, Kvadratické transformace obecné rovinné křivky bikvadratické rodu 1, Rozpravy Čes. akad. 29 (1920), a Eliptické kvartiky rovinné, projektivně specialisované, tamtéž 33 (1924); viz také *H. Hilton*, Plane algebraic curves, p. 311 a n. Pro parametrické vyjádření těchto křivek viz třebas *E. W. Davis*, An expression of the coordinates of a point on a binodal quartic curve as rational functions of the elliptic functions of a variable parameter, Amer. Journal math. 5 (1883); *G. Humbert*, Sur la courbe du quatrième degré à deux points doubles, Comptes r. Acad. Paris 97 (1883); také *G. Humbert*, Sur les courbes de genre un, Thèse Paris 1885.

kde A, B, C, A', B', C' jsou minory, příslušné v determinantu

$$D \equiv \begin{vmatrix} a, & c', & b' \\ c', & b, & a' \\ b', & a', & c \end{vmatrix}$$

k prvkům a, b, c, a', b', c'. Rovnici dvou tečen, vedených k dané kvartice z bodu jejího O_1, nalezneme nejkratčeji z její rovnice upravené na tvar

$$\left(\frac{a}{x_1} + \frac{c'}{x_2} + \frac{b'}{x_3}\right)^2 + \frac{C}{x_2^2} - \frac{2A'}{x_2 x_3} + \frac{B}{x_3^2} = 0;$$

jest odtud patrno, že přímky $Bx_2^2 - 2A'x_2x_3 + Cx_3^2 = 0$, jdoucí bodem O_1, dotýkají se dané kvartiky (v průsečících jejích s kuželosečkou $ax_2x_3 + c'x_1x_3 + b'x_1x_2 = 0$ mimo body dvojné). Téže rovnici vyhovují svými souřadnicemi průsečíky uvedené kuželosečky s přímkou $x_1 = 0$. A obdobně pro tečny vedené ke kvartice z O_2 a O_3.

4. *Tečny jdoucí ke kvartice uvažované z jejích bodů dvojných jsou šesti tečnami kuželosečky*

$$D\,(au_1^2 + bu_2^2 + cu_3^2 - 2a'u_2u_3 - 2b'u_1u_3 - 2c'u_1u_2) + \\ + (A'u_1 + B'u_2 + C'u_3)^2 = 0.$$

Souřadnice tečen, jdoucích bodem O_1 k uvažované kvartice (mimo tečny v tomto bodě), vyhovují rovnici $Cu_2^2 + 2A'u_2u_3 + Bu_3^2 = 0$, shodují se tedy s tečnami uvedené kuželosečky z bodu toho (pro $u_1 = 0$); rovněž u ostatních dvou dvojných bodů kvartiky.

5. *Čtyři dvojné tečny kvartiky* s třemi dvojnými body *mají svých osm dotyčných bodů na téže kuželosečce* s rovnicí

$$bcx_1^2 + acx_2^2 + abx_3^2 - (a'x_1 + b'x_2 + c'x_3)^2 = 0.$$

Z rovnice dané kvartiky, upravené na tvar

$$(\sqrt{a}x_2x_3 + \sqrt{b}x_1x_3 + \sqrt{c}x_1x_2)^2 - \\ - 2x_1x_2x_3\,[\sqrt{bc}x_1 + \sqrt{ac}x_2 + \sqrt{ab}x_3 - (a'x_1 + b'x_2 + c'x_3)] = 0,$$

poznáváme totiž, že přímka

$$\sqrt{bc}x_1 + \sqrt{ac}x_2 + \sqrt{ab}x_3 - (a'x_1 + b'x_2 + c'x_3) = 0$$

jest dvojnou tečnou uvažované kvartiky s dotyčnými body na kuželosečce $\sqrt{a}x_2x_3 + \sqrt{b}x_1x_3 + \sqrt{c}x_1x_2 = 0$ (jdoucí dvojnými body této kvartiky); další tři dvojné tečny mají rovnici téhož složení, kde však buď $\sqrt{a}$ nebo $\sqrt{b}$ nebo $\sqrt{c}$ má znaménko záporné (a ostatní dvě odmocniny znaménka kladná). A protože rovnici dané kvartiky lze psáti ve tvaru

$$(bcx_1^2 + acx_2^2 + abx_3^2 - \varphi^2)^2 - \\ - (\sqrt{bc}x_1 + \sqrt{ac}x_2 + \sqrt{ab}x_3 - \varphi)\,(\sqrt{bc}x_1 - \sqrt{ac}x_2 - \sqrt{ab}x_3 - \varphi)\,. \\ .\,(-\sqrt{bc}x_1 + \sqrt{ac}x_2 - \sqrt{ab}x_3 - \varphi)\,(-\sqrt{bc}x_1 - \sqrt{ac}x_2 + \sqrt{ab}x_3 - \varphi) = 0,$$

kde $\varphi \equiv a'x_1 + b'x_2 + c'x_3$, vidíme, že dvojice dotyčných bodů uvedených čtyř přímek, dvojných tečen kvartiky, leží na hořejší kuželosečce.[1])[2])[3])

b) Jestliže kvartika s třemi dvojnými body

$$ax_2^2x_3^2 + bx_1^2x_3^2 + cx_1^2x_2^2 + 2x_1x_2x_3\,(a'x_1 + b'x_2 + c'x_3) = 0$$

má v jednom z bodů těch, třebas v O_1 (jednu) tečnu inflexní, mají součinitelé při x_1^2 a při x_1, tedy $cx_2^2 + 2a'x_2x_3 + bx_3^2$ a $2x_2x_3\,(b'x_2 + c'x_3)$, společný lineární faktor. Musí tedy platit

$$cx_2^2 + 2a'x_2x_3 + bx_3^2 = (b'x_2 + c'x_3)\,(\beta x_2 + \gamma x_3);$$

odtud plyne $c = b'\beta$, $b = c'\gamma$, $2a' = b'\gamma + c'\beta$ a po eliminaci veličin β, γ relace mezi koeficienty v rovnici uvažované kvartiky

$$2a'b'c' = bb'^2 + cc'^2.$$

Racionální kvartika může u jednoho nebo u dvou ze svých dvojných bodů míti inflexní tečnu, nikoliv u tří. Neboť kdyby body O_1, O_2 i O_3 měly po jedné inflexní tečně, platilo by

$$2a'b'c' = bb'^2 + cc'^2 = aa'^2 + cc'^2 = aa'^2 + bb'^2,$$

---

[1]) Další kuželosečky, přidružené k trinodální kvartice, jsou: kuželosečka, obsahující šest dotyčných bodů tečen, vedených ke kvartice z jejích bodů dvojných; kuželosečka, obsahující šest průsečíků tečen, vedených ke kvartice z dvojných bodů jejích, s touto čarou; kuželosečka, obsahující šest inflexních bodů kvartiky; kuželosečka, dotýkající se šesti inflexních tečen kvartiky. O hořejších i těchto kuželosečkách a o vztazích mezi nimi i útvarech s nimi souvisících viz *R. A. Roberts*, On certain conics connected with a plane unicursal quartic, Proceedings Math. soc. London 16 (1884); *G. Kohn*, Zur Theorie der rationalen Curven vierter Ordnung, Sitzungsberichte Akad. Wien 95 (1887); *H. W. Richmond* a *T. Stuart*, The inflexion conic of a trinodal quartic curve, Proceedings Math. soc. London (2) 1 (1903); *A. E. Jolliffe*, A property of the trinodal quartic, a Another property of the trinodal quartic, Messenger math. (2) 33 (1903); *A. B. Basset*, On certain conics connected with trinodal quartics, Amer. Journal math. 26 (1904). Viz také *H. Hilton*, Plane algebraic curves, p. 273 a n.

[2]) Dvojpoměr k čtyř průsečíků přímky $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ s trinodální kvartikou o uvedené rovnici nalezneme podobně jako u čtveřiny tečen, vedených k obecné kubice z jejího bodu; jest určen vztahem

$$108\,\frac{(k^2 - k + 1)^3}{(k+1)^2\,(k-2)^2\,(2k-1)^2} = \frac{S^3}{T^2},$$

kde

$$S = 3V^2 - 36u_1u_2u_3U, \quad T = -V^3 + 18u_1u_2u_3UV + 54u_1^2u_2^2u_3^2D,$$

při čemž

$$U = A'u_1 + B'u_2 + C'u_3,$$

$$V = au_1^2 + bu_2^2 + cu_3^2 - 2a'u_2u_3 - 2b'u_1u_3 - 2c'u_1u_2$$

a D je determinant nahoře uvedený.

[3]) Trinodální kvartiku lze vyjádřiti také rovnicí $p_1^{\frac{1}{2}} + p_2^{\frac{1}{2}} + p_3^{\frac{1}{2}} + p_4^{\frac{1}{2}} = 0$, kde $p_k = 0$ jsou rovnice dvojných tečen jejích a dvojice rovnic $p_1 = p_2$, $p_3 = p_4$; $p_1 = p_3$, $p_2 = p_4$; $p_1 = p_4$, $p_2 = p_3$ určují její body dvojné; dotyčné body dvojných tečen kvartiky leží zde na kuželosečce $2\,(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2) - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)^2 = 0$.

tedy

$$aa'^2 = bb'^2 = cc'^2 = a'b'c';$$

odtud pak vyplývá $a'^2 = bc$, $b'^2 = ac$, $c'^2 = ab$, a po dosazení těchto vztahů do hořejší rovnice kvartiky redukuje se levá strana její na úplný čtverec.

Má-li uvažovaná kvartika v jednom svém bodě dvojném, třebas v O_1, dvě tečny inflexní, jest součinitel při x_1^2 faktorem součinitele při x_1, což je možno jenom při

$$b' = 0, \quad c' = 0.$$

Racionální kvartika může míti jeden nebo tři dvojné body s dvojicemi inflexních tečen, nikoliv dva; mají-li totiž dva dvojné body kvartiky o třech bodech dvojných po dvou inflexních tečnách, má takové tečny i třetí bod dvojný. Neboť jsou-li obě tečny kvartiky v O_1 i v O_2 inflexní, platí jednak $b' = 0$, $c' = 0$, jednak $a' = 0$, $c' = 0$, takže z podmínek $a' = 0$, $b' = 0$ vyplývá, že O_3 je téhož druhu jako oba body uvedené.

Vložíme-li podmínky pro dvojný bod s jednou inflexní tečnou a pro dvojný bod s dvěma tečnami inflexními do rovnice kvartiky s třemi dvojnými body, seznáme, že takové dva dvojné body míti nemůže (nemá-li se rozpadnouti).

Kvartika s třemi body dvojnými (ve vrcholech základního trojúhelníku), jež má v bodech těch po dvou inflexních tečnách, má rovnici zvlášť jednoduchou, totiž

$$ax_2^2x_3^2 + bx_1^2x_3^2 + cx_1^2x_2^2 = 0 \quad \text{čili} \quad ax_1^{-2} + bx_2^{-2} + cx_3^{-2} = 0.$$

Z rovnice kuželosečky, které se tečny kvartiky ve třech dvojných bodech jejích sestrojené dotýkají, vidíme v tomto případě, že trojroh z dvojných bodů kvartiky je autopolárným trojúhelníkem vůči této kuželosečce ($bcx_1^2 + acx_2^2 + abx_3^2 = 0$); tvoří tedy dvě inflexní tečny takové kvartiky v každém dvojném bodě jejím se spojnicemi dvojných bodů harmonickou čtveřinu.

Rovnici kvartiky s třemi reálnými body dvojnými, jež mají po dvou inflexních tečnách, lze uvésti na tvar

$$x_1^{-2} + x_2^{-2} = x_3^{-2};$$

dva z dvojných bodů jejích jsou uzly, jeden isolovaný (je průsečíkem úhlopříček čtyrstranu z tečen kvartiky v obou uzlech).[4])[5])

---

[4]) O uvedené křivce 4. stupně platí na př.: Dotyčné body šesti tečen, vedených z libovolného bodu ke kvartice s třemi body bifleknodálními, leží na kuželosečce, jež má další své průsečíky s kvartikou na přímé poláře onoho bodu vzhledem k této kvartice. Dotyčné body čtyř tečen, vedených k této křivce z jejího bodu, leží na přímce. Kvartika s třemi body bifleknodálními je invariantní při grupě 24 kolineací, při které je invariantní čtyrstran tvořený jejími bitangentami. O této zajímavé kvartice jednají (částečně z metrického hlediska) *Em. Weyr*, Die Lemniscate in razionaler Behandlung, Abhandlungen Böhm. Ges. Wiss. (6) 6 (1873); *P. H. Schoute*, Über die Curve vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten, Archiv Math.

c) Racionální *kvartika s třemi hroty* (trikuspidální) jest třídy 3. a proto duální k čáře 3. stupně 4. třídy (s bodem dvojným o různých tečnách); lze tedy na její vlastnosti souditi z vlastností této kubiky. Na př. protože tři dotyčné body inflexních tečen uvedené kubiky leží v jedné přímce, protínají se tečny kvartiky ve třech hrotech jejích v jednom bodě.[6])

Rovnici kvartiky s třemi hroty obdržíme z rovnice kvartiky s třemi dvojnými body, vyjádříme-li, že tečny čáry této v každém dvojném bodě splývají; odtud vychází $a' = \sqrt{bc}$, $b' = \sqrt{ac}$, $c' = \sqrt{ab}$. Má tedy čára 4. stupně s třemi hroty ve vrcholech základního trojúhelníku rovnici

$$ax_2^2x_3^2 + bx_1^2x_3^2 + cx_1^2x_2^2 - 2\sqrt{bc}x_1^2x_2x_3 - 2\sqrt{ac}x_1x_2^2x_3 - 2\sqrt{ab}x_1x_2x_3^2 = 0.$$

Znaménka odmocnin byla v rovnici zvolena záporná, protože tři kladná znaménka (u posledních tří členů) nebo jedno kladné a dvě záporná vedou k čáře zvrhlé (ve dvojnásobnou kuželosečku), volbu pak dvou kladných a jednoho záporného lze snadno převésti na volbu hořejší (má-li rovnice na př. součinitele $-\sqrt{bc}$, $+\sqrt{ac}$, $+\sqrt{ab}$, stačí místo $+\sqrt{a}$ položiti $-\sqrt{a}$).

Nahradíme-li souřadnice x_1, x_2, x_3 jejich násobky $x_1\sqrt{a}$, $x_2\sqrt{b}$, $x_3\sqrt{c}$ a dělíme-li celou rovnici součinem $abcx_1^2x_2^2x_3^2$, dostaneme rovnici uvažované kvartiky ve tvaru velmi jednoduchém

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} - \frac{2}{x_2x_3} - \frac{2}{x_1x_3} - \frac{2}{x_1x_2} = 0.$$

Tečny v hrotech této čáry mají rovnice $x_2 - x_3 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$ a protínají se ovšem v jednom bodě (1, 1, 1). Zjednodušenou rovnici kvartiky lze psáti také ve tvaru $x_1^{-\frac{1}{2}} + x_2^{-\frac{1}{2}} + x_3^{-\frac{1}{2}} = 0$.

Kvartika trikuspidální má jedinou tečnu dvojnou; její rovnice pro kvartiku s rovnicí právě uvedenou jest $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. To vyplývá z úpravy rovnice kvartiky na tvar $(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 4x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 0$; dotyčné body dvojné tečny jsou zbývající dva průsečíky kvartiky s kuželosečkou $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$ (jdoucí hroty dané kvartiky).

Phys. (2) 3 (1885), 4 (1886) a 6 (1888); *L. Berzolari*, Sulla lemniscata projettiva, Rendiconti Ist. Lombardo 37 (1904).

[5]) Rovnici kvartiky s bodem trojnásobným v (0, 0, 1) o třech tečnách reálných různých lze uvésti na tvar $x_1x_2x_3(x_1 + x_2) = ax_1^4 + 2bx_1^2x_2^2 + cx_2^2$. Dotyčné body čtyř dvojných tečen jejích leží na kuželosečce $8a(b + c)x_1^2 + 8c(a + b)x_2^2 - 4(ax_1 + cx_2)x_3 - x_3^2 = 0$. Typy kvartik s bodem trojnásobným uvádějí *H. Hilton-S. D. Jervis*, On plane quartic curves with a triple point, Proceedings Math. soc. London (2) 25 (1926).

[6]) Kvartika 4. třídy s dvěma hroty a jedním bodem dvojným je sobě-duální (mimo ni z kvartik jen dvojice kuželoseček). Viz *L. E. Wear*, Self-dual plane curves of the fourth order, Amer. Journal math. 42 (1920).

Jestliže, pokládajíce $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ za tečnu uvažované kvartiky, zavedeme $u_k = -\frac{1}{2}x_k^{-\frac{3}{2}}$ a odtud určené souřadnice x_k vložíme do rovnice tečny (nebo kvartiky), dostaneme rovnici trikuspidální kvartiky (s hroty ve vrcholech základního trojúhelníku) v souřadnicích přímkových

$$(u_1 + u_2 + u_3)^3 - 27u_1u_2u_3 = 0.^{7})^{8})^{9})$$

---

[7]) Pro parametrické vyjádření racionálních kvartik a jejich vyšetřování pomocí něho viz hlavně *A. Brill*, Über rationale Curven vierter Ordnung, Math. Annalen 12 (1877); *R. A. Roberts*, Notes on the plane unicursal quartic, Proceedings Math. soc. London 16 (1884); *W. Stahl*, Über die rationale ebene Curve vierter Ordnung, Journal r. a. Math. 101 (1887) a 104 (1889).

O racionálních čarách 4. stupně pojednávají dále zejména: *H. Durège*, Über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten, Sitzungsberichte Akad. Wien 72 (1875); *E. Schmidt*, Om de kurver af fjerde orden, hvis ligninger kun indeholde kvadraterne af de variable, Tidsskrift math. (4) 5 (1881); *F. Meyer*, Zur algebraischen Erzeugung sämtlicher, auch der zerfallenden ebenen rationalen Curven vierter Ordnung, Math. Annalen 31 (1888); *R. A. Roberts*, On certain quartic curves of the fourth class and the porism of the inscribed and circumscribed polygon, Proceedings Math. soc. London 23 (1892); *J. de Vries*, La quartique trinodal, Archives Musée Teyler (2) 7 (1900); *W. Binder*, Die Undulationen ebener Curven C_6^4, Sitzungsberichte Akad. Wien 106 (1897) a 107 (1898); *G. Majcen*, Über die rationale Kurve vierter Ordnung mit Spitzen von der ersten und zweiten Art, Sitzungsberichte Akad. Wien 119 (1910); téhož On quartic curve of deficiency zero with a rhamphoid cusp and a node, Verslag Akad. Amsterdam 19 (1910); a téhož Über die Kurve vierter Ordnung mit einer Spitze 2. Art und einem einfachen Wendeknoten, Věstník Spol. nauk 1911; *J. R. Conner*, The rational plane quartic as derived from the normcurve in four dimensions by projection and section, Amer. Journal math. 33 (1911); *A. Longhi*, Sulle quartiche piane tricuspidali, Giornale mat. 63 (1925); *J. H. Neelley*, Compound singularities of the rational plane quartic curve, Amer. Journal math. 49 (1927), a A note on the rational plane quartic curve with cusps or undulations, Bulletin Amer. math. soc. 34 (1928); *L. T. Moore-J. H. Neelley*, Rational tacnodal and oscnodal quartic curves considered as plane sections of quartic surfaces, Amer. Journal math. 50 (1928); *M. Villa*, Sulle quartiche piane tricuspidali, Giornale mat. 68 (1930).

[8]) Četné a důležité jsou metricky speciální případy rovinných čar 4. stupně rodu 1 a 0 (zejména kvartiky t. zv. bicirkulární, mající totiž v kruhových bodech roviny své body dvojné); k informaci viz *G. Kohn* v Encyklopädie math. Wiss. III. 2_1, p. 551 a n., 563 a n.; *G. Loria*, Curve piane speciali algebriche e trascendenti I, p. 119 a n.

[9]) Rovinné čáry 5. a 6. stupně jsou (nehledě k důsledkům obecné teorie rovinných čar algebraických) dosud málo známy, protože byly vyšetřovány jen porůznu některé případy a některé vlastnosti jejich. Viz *G. Loria* v Encyklopädie math. Wiss. III. 2_1 (*C* 5 *b*: Spezielle ebene algebraische Kurven von höherer als der vierten Ordnung, do r. 1914); téhož Curve piane speciali algebriche e trascendenti I (1930), p. 281 a n.; a téhož Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche (4. vyd. 1931),

p. 66 a 313. K tomu *B. Bydžovský*, Dvojnásobné body křivek šestého stupně, Rozpravy Čes. akad. 21 (1912), Konstrukce rovinných křivek šestého stupně rodu 0 až 3, tamtéž 22 (1913), a Příspěvek k teorii eliptické sextiky, Časopis mat. fys. 57 (1928); *J. Vojtěch*, Rovinné sextiky invariantní při periodických kollineacích, Věstník Spol. nauk 1913, Konečné grupy kollineací a rovinné sextiky k sobě příslušné, Rozpravy Čes. akad. 22 (1913), a O racionálních křivkách šestého stupně, Časopis mat. fys. 43 (1914); *C. Crone*, Sur les courbes planes algébriques du sixième ordre e du genre 2, Congrès math. Scand. 1916; *G. D. Sadd*, On certain types of plane unicursal sextic curves, Proceedings Math. soc. London (2) 21 (1922); *H. L. Dorwart-J. H. Neelley*, Discussion of a construction of a rational plane quintic, Tôhoku math. Journal Sendai 32 (1929).

VIII. ÚTVARY ODVOZENÉ Z PROJEKTIVNÍCH ÚTVARŮ DVOJMOCNÝCH.

85. Přímkové kongruence prvního stupně nebo první třídy; kongruence lineární. Podobně jako jednomocné útvary základní vytvořují také projektivní základní útvary dvojmocné sdruženými prvky svými útvary nové.

a) Vezměme v úvahu nejprve útvary, jež vznikají ze dvou kolineárních nesoumístných základních útvarů dvojmocných téhož druhu, t. j. ze dvou kolineárních trsů nebo duálně ze dvou kolineárních polí.

Dva kolineární trsy s různými středy S a S', jež nejsou perspektivní, vytvořují průsečnicemi rovin sobě odpovídajících soustavu ∞^2 přímek, jež sluje kongruence 1. stupně.

Dvě kolineární pole v různých rovinách σ a σ', jež nejsou perspektivní, vytvořují spojnicemi bodů sobě odpovídajících soustavu ∞^2 přímek, jež sluje kongruence 1. třídy.

Kongruencí čar, spec. přímek, sluje vůbec soustava ∞^2 čar téhož druhu, spec. přímek, v prostoru.

Přímkovou kongruencí n-tého stupně sluje taková kongruence přímek, z níž libovolným bodem v prostoru prochází obecně (nejvýše) n přímek jejích; bod, kterým výjimečně prochází nekonečně mnoho přímek kongruence, sluje jejím bodem singulárním.

V uvažovaném případě jde vskutku bodem X, v prostoru obecně položeným, jediná přímka soustavy vytvořené; neboť svazku rovin s osou SX z prvého trsu odpovídá v druhém svazek rovin s osou, jdoucí ovšem bodem S', ale neprocházející obecně bodem X,

Přímková kongruence sluje kongruencí ν-té třídy, jestliže v libovolné rovině prostoru leží obecně (nejvýše) ν přímek jejích; rovina, v níž výjimečně leží nekonečně mnoho přímek kongruence, sluje její rovinou singulární.

V uvažovaném případě leží vskutku v rovině ξ, obecně položené, jediná přímka vytvořené soustavy; neboť bodové řadě na přímce $\sigma\xi$ prvního pole odpovídá v druhém σ' řada bodová s osou neležící obecně v rovině ξ, kterážto osa tedy rovinu ξ protíná v jedi-

jenž tedy vysílá jedinou rovinu svou bodem X; průsek této roviny s korespondující rovinou svazku SX jest přímka kongruence (jdoucí bodem X). Jestliže však ve zvláštním případě bod X je průsečík dvou přímek, odpovídajících sobě v kolineaci trsů S a S', jest osou svazku rovin, jenž odpovídá svazku SX, přímka $S'X$, a bodem X jde nekonečně mnoho přímek kongruence; takový singulární bod kongruence X jest buď středem svazku paprskového, jestliže totiž rovina SXS' odpovídá v projektivnosti svazků rovin s osami SX a $S'X$ sobě samé (svazky jsou perspektivní), nebo jest vrcholem kužele 2. stupně v případě opačném. Všechny singulární body této kongruence patří každé zborcené nebo kuželové ploše 2. stupně, vytvořené sdruženými svazky rovin obou kolineárních trsů S a S'; leží totiž jako průsečíky paprsků, sdružených v kolineaci trsů S a S', vždy na sdružených rovinách těchto trsů, tedy na jejich průsečnici.[1])[2])

b) *Dva kolineární neperspektivní trsy s různými středy S a S', jejichž spojnice SS' odpovídá sobě samé*, (kde však projektivnost soumístných svazků rovin s osou SS' není identická) *vytvořují průsečnicemi rovin sdružených přímkovou kongruenci 1. stupně a 1. třídy.*

ném bodě; spojnice tohoto bodu s korespondujícím bodem řady na $\sigma\xi$ jest přímka kongruence (ležící v ξ). Jestliže však ve zvláštním případě rovina ξ spojuje dvě přímky, odpovídající sobě v kolineaci rovin σ a σ', jsou přímky $\sigma\xi$ a $\sigma'\xi$ osami bodových řad, vytvořujících spojnicemi svých bodů nekonečně mnoho přímek kongruence; taková singulární rovina kongruence ξ jest buď rovinou svazku paprskového, jestliže totiž bod $\sigma\xi\sigma'$ odpovídá v projektivnosti bodových řad na přímce $\sigma\xi$ a $\sigma'\xi$ sobě samému (řady jsou perspektivní), nebo jest rovinou čáry 2. třídy v případě opačném. Všechny singulární roviny této kongruence patří každé zborcené ploše nebo čáře 2. třídy, vytvořené korespondujícími řadami bodů obou kolineárních polí σ a σ'; procházejí totiž tyto roviny, spojujíce přímky v kolineaci polí σ a σ' sobě odpovídající, vždy korespondujícími body těchto polí, tudíž jejich spojnicí.

Dvě kolineární neperspektivní pole v různých rovinách σ a σ', jejichž průsečnice $\sigma\sigma'$ odpovídá sobě samé, (kde však projektivnost soumístných řad bodových s osou $\sigma\sigma'$ není identická) *vytvořují spojnicemi bodů sdružených přímkovou kongruenci 1. třídy a 1. stupně.*

Neboť vytvořená soustava přímek jest podle předešlého u dvou kolineárních trsů 1. stupně, u dvou kolineárních polí 1. třídy. Že soustava

[1]) Kongruencí 1. stupně nulté třídy jest trs paprskový, duální kongruencí 1. třídy nultého stupně jest pole paprskové.

[2]) Kongruenci 1. stupně libovolné třídy lze vytvořiti spojnicemi sdružených bodů dvou rovin, jež jsou v korespondenci obapolně jednoznačné (biracionální) a jejichž průsečnice je složena z bodů samodružných; a duálně. Viz *T. A. Hirst*, On Cremonian congruences, Proceedings Math. soc. London 14 (1883).

prvního případu jest také 1. třídy, poznáváme na průseku roviny obecně položené ξ s danými dvěma trsy; tyto protínají totiž rovinu ξ ve dvou kolineárních polích soumístných, jež mimo samodružný průsečík se spojnicí SS' mají jedinou samodružnou přímku k němu přidruženou, průsečnici dvou rovin v kolineaci trsů S a S' sobě odpovídajících a tedy přímku kongruence. Další dvě samodružné přímky totiž (reálné nebo imaginární) v rovině ξ, jež jdou bodem (ξ, SS'), spojeny se středem S a S', dávají dvě samodružné roviny projektivních soumístných svazků rovin s osou SS', jež jsou singulárními rovinami vytvořené kongruence. Duálně jest kongruence dvěma kolineárními poli za vytčených podmínek vytvořená také 1. stupně.

Přímky vytvořené kongruence, protínající libovolnou přímku q v prostoru obecně položenou, tvoří zborcenou řadu kvadratickou; neboť každým bodem přímky q prochází jedna přímka kongruence, rovněž v každé rovině jdoucí přímkou q leží jedna přímka kongruence.

Přímky kongruence 1. stupně a 1. třídy promítají se ze dvou bodů ležících na kterékoli přímce její p dvěma kolineárními trsy, v nichž sobě odpovídají roviny, promítající tutéž přímku kongruence, přímka p pak odpovídá sobě samé.

Přímky kongruence 1. třídy a 1. stupně protínají dvě roviny jdoucí kteroukoli přímkou její p ve dvou kolineárních polích, v nichž sobě odpovídají průsečíky téže přímky kongruence, přímka p pak odpovídá sobě samé.

Zvolíme-li totiž na p body R a R', obsahuje každá rovina trsu R jednu přímku kongruence, kterou je určena jediná rovina trsu R', ji obsahující. Roviny trsu R, jež tvoří svazek s osou q, promítají přímky kongruence, tvořící zborcenou řadu kvadratickou, složenou z přímek, jež protínají osu svazku q (k níž patří také p); tato řada jest tedy z bodu R' promítána svazkem rovin s osou q', opět řídicí přímkou zborcené řady. Proto jsou trsy R a R', jejichž roviny sobě odpovídající promítají tutéž přímku kongruence, sdruženy v kolineaci. Paprsku l_1 a l_2 (různým od p) v R odpovídá paprsek l'_1 resp. l'_2 v R' (různé od p), rovině $l_1 p$ a $l_2 p$ tedy rovina $l'_1 p$ resp. $l'_2 p$ (protože p je přímka kongruence); tudíž přímka p odpovídá sobě samé. Obdobný je důkaz věty duální.[3])

Přímková kongruence 1. stupně a 1. třídy jest útvar soběduální a bývá stručně nazývána *kongruencí lineární*. Jest ji možno vytvořiti jedním nebo druhým z obou duálních způsobů uvedených. Singulárním bodem jejím prochází singulární rovina; neboť je-li bod X průsečíkem sdružených přímek SX a $S'X$ a tedy singulárním bodem kongruence, odpovídá rovina SXS' sobě samé (protože SS' koresponduje sobě samé), svazky rovin s osami SX a $S'X$ jsou tudíž perspektivní, a jejich rovina

[3]) K tomu lze připojiti, že pole bodové, v němž přímky kongruence 1. stupně 1. třídy protínají rovinu jdoucí libovolnou přímkou její, a trs rovinový, jímž se přímky kongruence promítají z bodu na přímce té ležícího, jsou korelativní.

perspektivnosti (jdoucí bodem X) je singulární rovinou kongruence. A ovšem duálně v singulární rovině leží singulární bod této kongruence.[4])

c) Lineární kongruence *jest určena čtyřmi mimoběžnými přímkami* v prostoru (a, b, c, d, obecně položenými). Neboť zvolíme-li na jedné z nich (a) dva body S a S' za středy trsů, jest touto přímkou a dvojicemi rovin, promítajících ostatní tři (b, c, d) z bodů S a S', určena kolineace trsů S a S', jež vytvořují jedinou lineární kongruenci (obsahující čtyři přímky dané); duálně položíme-li jednou z daných čtyř přímek (a) dvě roviny σ a σ', jest touto společnou jejich přímkou a třemi dvojicemi průsečíků ostatních přímek daných (b, c, d) s rovinami σ a σ' určena kolineace polí v σ a σ', jež vytvořují spojnicemi svých korespondujících bodů kongruenci lineární.[5])

Zborcená řada kvadratická, obsahující tři mimoběžné přímky lineární kongruence l_1, l_2 a l_3, jest složena výhradně z přímek kongruence (jest v kongruenci obsažena). Neboť jsou-li R a R' dva body na přímce kongruence, jež patří k zborcené řadě 2. stupně, určené přímkami l_1, l_2 a l_3, jsou v kolineárních trsech R a R' svazky rovin s osami q a q', jež jsou řídicími přímkami oné soustavy, jak dříve bylo prokázáno, projektivní; v nich odpovídají sobě nejen dvojice rovin promítajících l_1, l_2 a l_3, nýbrž všechny dvojice rovin, jež promítají přímky řady, těmito třemi přímkami určené. Zborcených řad kvadratických obsahuje lineární kongruence ∞^3 (protože každou ze tří přímek řadu určujících lze v kongruenci zvoliti ∞^2 způsoby, avšak kterékoli tři z ∞^1 přímek určité řady vedou k téže řadě).

Kongruence stanovená čtyřmi mimoběžnými přímkami obsahuje každou zborcenou řadu kvadratickou, určenou třemi z těchto čtyř přímek. Jestliže dvě zborcené řady kvadratické, obsažené v lineární kongruenci, mají jeden paprsek p společný, mají společný ještě jeden paprsek q (jenž se však může ztotožniti s oním); neboť každá rovina položená přímkou p obsahuje po jedné z přímek druhého systému uvedených dvou zborcených ploch; jejich průsečíkem tedy prochází přímka q kongruence, příslušná do obou kvadratických řad daných.

Pět přímek a, b, c, d, e jest obsaženo v lineární kongruenci, jestliže průsečík dvou protějších stran čtyřrohu $BCDE$, jehož rovina prochází přímkou a a jehož vrcholy leží na přímkách b, c, d, e, vytvořuje přímku

[4]) Přímky lineární kongruence promítají se však ze dvou bodů, neležících na přímce její, dvěma rovinovými trsy v korespondenci obapolně jednoznačné, ale kvadratické (svazku rovin v jednom trsu odpovídají roviny kužele 2. třídy v trsu druhém). Duálně protínají přímky kongruence lineární dvě roviny, nejdoucí přímkou její, v bodových polích, jež jsou v obapolně jednoznačné korespondenci kvadratické (bodům přímé řady v jedné rovině odpovídají body čáry 2. stupně v rovině druhé).

[5]) Čtyři dané přímky mimoběžné neurčují však lineární kongruenci, patří-li téže zborcené řadě kvadratické (stanovené už třemi z přímek těch); takovou skupinou čtyř přímek prochází nekonečně mnoho kongruencí lineárních.

(a'); neboť jde-li tu o průsečík stran BC a DE, jsou zborcené řady kvadratické s paprsky a, b, c, a' resp. a, d, e, a' obsaženy v lineární kongruenci určené paprsky a, b, d, a'. Také přímky vytvořené ostatními dvěma průsečíky protějších stran v $BCDE$ jsou obsaženy v uvedené kongruenci.

d) Mějme opět na zřeteli vytvoření lineární kongruence dvěma kolineárními trsy (neperspektivními) s různými středy S a S', jejichž spojnice odpovídá v kolineaci sobě samé, jakož i vytvoření duální. Soumístné dva svazky rovin s osou SS' jsou projektivní; v této projektivnosti existují dvě samodružné roviny, buď reálné různé nebo reálné splývající nebo imaginární. Sobě odpovídající dva svazky paprskové trsů S a S', obsažené v takové samodružné rovině, mají společný paprsek SS' samodružný; jsouce tedy perspektivní, vytvořují řadu bodovou u resp. v. Tyto přímky u, v jsou osami řad singulárních bodů kongruence, spolu osami svazků singulárních rovin kongruence, a protínají všechny přímky kongruence lineární; neboť každá rovina trsu S protíná u i v v bodech, v nichž je protíná také korespondující rovina trsu S'. Ze suposice, že trsy S a S' nejsou perspektivní, plyne, že přímky u a v neleží v téže rovině.

Přímky u a v, protínající všechny přímky lineární kongruence, slují její přímky řídicí čili *osy*. Má tedy lineární kongruence buď dvě reálné mimoběžné osy a sluje hyperbolická, nebo dvě splývající osy (jednu) a sluje parabolická, nebo dvě imaginární osy a sluje eliptická.

K osám lineární kongruence dospějeme také od čtyř přímek kongruenci určujících: čtyři mimoběžky a, b, c, d jsou totiž proťaty buď dvěma přímkami, jestliže d protíná plochu kvadratickou určenou přímkami a, b, c; nebo jsou proťaty jednou přímkou, jestliže se d plochy oné dotýká; nebo konečně nejsou proťaty, jestliže d neprotíná plochy uvedené.

Hyperbolická kongruence lineární sestává ze všech ∞^2 přímek, protínajících dvě mimoběžné přímky u a v, její osy. Parabolická kongruence lineární skládá se z ∞^2 tečných přímek zborcené plochy kvadratické, jejichž dotyčné body leží na přímce plochy u, ose (a spolu přímce) této kongruence.

Všechny zborcené plochy kvadratické, obsažené (v počtu ∞^3) v lineární kongruenci, protínají se v osách jejích u a v, je-li kongruence hyperbolická; dotýkají se podél osy u, je-li parabolická; nemají reálných bodů společných, je-li eliptická.[6])

86. Kongruence prvního stupně druhé nebo třetí třídy a útvary duální.

a) *Dva kolineární* (neperspektivní) *trsy o různých středech S a S'*,

Dvě kolineární (neperspektivní) *pole v různých rovinách σ a σ'*,

[6]) O lineární kongruenci jedná obšírně (syntheticky) zejména *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung I, 1892, p. 110 a n.

jejichž spojnice SS' není samodružná, ale jejichž jedna společná rovina (jdoucí spojnicí SS') *odpovídá sobě samé, vytvořují průsečnicemi sdružených rovin přímkovou kongruenci 1. stupně 2. třídy.*

jejichž průsečnice $\sigma\sigma'$ není samodružná, ale jejichž jeden společný bod (na $\sigma\sigma'$) *odpovídá sobě samému, vytvořují spojnicemi bodů sdružených přímkovou kongruenci 1. třídy 2. stupně.*

Stačí, všimneme-li si blíže jednoho z obou případů duálních, třebas levého. Ve společné rovině trsů S a S', jež je v kolineaci jejich samodružnou, leží dva projektivní svazky paprskové středů S a S', které vytvořují čáru 2. stupně k, jdoucí ovšem body S a S'. Každý bod P této kuželosečky k je singulárním bodem kongruence, protože jsa průsečíkem dvou sdružených přímek v S a S' jest středem svazku přímek v kongruenci obsažených, v němž se totiž protínají sdružené svazky rovin s osami SP a $S'P$. Roviny uvedených svazků přímek se středy P na k jsou tedy singulárními rovinami kongruence. Všechny tyto singulární roviny protínají se v přímce v, jejíž všechny body jsou singulární; neboť kterékoli dvě z uvažovaných rovin mají průsečnici, v jejímž bodě se protínají dvě přímky kongruence (po jedné z obou rovin těch) a tedy neomezeně mnoho přímek kongruence (protože tato je 1. stupně). Poněvadž v rovině kuželosečky k jsou pouze body této singulárními, protíná přímka v kuželosečku k. Průsečnice sdružených rovin trsů S a S', přímky vytvořené kongruence, spojují tedy vždy a jedině bod kuželosečky k s bodem přímky v; protože pak v obecné rovině prostoru leží dvě přímky kongruence tak vznikající (jdoucí totiž dvěma průsečíky roviny s kuželosečkou k a průsečíkem jejím s přímkou v), jest kongruence ta 2. třídy. Majíce zřetel také k případu duálnímu, shrnujeme:

Kongruence 1. stupně 2. třídy, vytvořená dvěma kolineárními trsy se společnou rovinou samodružnou, *sestává z paprsků, jež spojují body čáry 2. stupně k s body přímky v, čáru tu v jednom bodě protínající. Čáry k a v slují* proto *řídicími čarami kongruence*; všechny body jejich jsou singulárními body kongruence, singulárními rovinami jsou pak roviny jdoucí přímkou v a rovina čáry k.

Kongruence 1. třídy 2. stupně, vytvořená dvěma kolineárními poli se společným bodem samodružným, *sestává z přímek, v nichž se protínají roviny kužele 2. třídy k s rovinami svazku osy v, ležící v jedné rovině plochy.* Všechny roviny obou svazků (kvadratického k i lineárního v) jsou singulárními rovinami kongruence, singulárními body jsou pak body na přímce v a vrchol plochy k.

O kongruenci 1. třídy 2. stupně lze říci, že se skládá z tečných přímek kuželové plochy kvadratické, jež protínají pevnou tečnu plochy té, neležíce s ní v téže rovině tečné.

Body S a S' (duálně roviny σ a σ') nemají zvláštního postavení mezi singulárními prvky kongruence na čáře k (na kuželi k). Neboť

promítneme-li body řídicích čar k a v ze dvou libovolných bodů P a Q na k (mimo průsečík kv), jsou dva svazky o středech P a Q, promítající k, rovněž dva svazky těchže středů, promítající v, spolu projektivní; společný paprsek obou svazků o středu P odpovídá společnému paprsku obou svazků středu Q (protože promítají společný bod čar k a v). Jest tedy oběma dvojicemi těchto svazků určena kolineace trsů o středech P a Q; a sdružené roviny trsů těch protínají se v přímkách, z nichž každá má jeden bod na kuželosečce k a jeden na přímce v. Můžeme tedy říci:

Kongruence 1. stupně 2. třídy promítá se z kterýchkoli dvou bodů své řídicí kuželosečky k dvěma kolineárními trsy, v nichž rovina čáry k odpovídá sobě samé.

Kongruence 1. třídy 2. stupně protíná se kterýmikoli dvěma rovinami kužele 2. třídy k ve dvou kolineárních polích, v nichž vrchol plochy k odpovídá sobě samému.

b) *Dva kolineární* (neperspektivní) *trsy o různých středech, jejichž společná přímka ani žádná společná rovina neodpovídá sobě samé, vytvořují* průsečnicemi sdružených rovin svých *přímkovou kongruenci 1. stupně 3. třídy.*

Dvě kolineární (neperspektivní) *pole v různých rovinách, jejichž společný paprsek ani žádný společný bod neodpovídá sobě samému, vytvořují* spojnicemi sdružených bodů svých *přímkovou kongruenci 1. třídy 3. stupně.*

Neboť (v případě levém) libovolná rovina protíná oba vytvořující trsy S a S' ve dvou soumístných polích kolineárních; tato pole mají obecně samodružnými tři body a tři přímky, jejich spojnice, jež jsou přímkami vytvořené kongruence (z těchto samodružných prvků mohou, jak známo, dvě dvojice býti imaginární nebo mohou dva body a dvě přímky, po případě všechny tři prvky téhož druhu splynouti). Leží tedy v každé rovině prostoru (nejvýše) tři přímky kongruence (z nichž aspoň jedna je reálná).

Spolu vidíme, že každá rovina obsahuje (nejvýše) tři singulární body kongruence (z nichž aspoň jeden je reálný); tyto body vytvořují *prostorovou čáru 3. stupně* k. Všechny přímky spojující dva body tohoto geometrického místa singulárních bodů kongruence 1. stupně 3. třídy jsou v kongruenci obsaženy. Každý singulární bod kongruence (bod prostorové čáry 3. stupně) jest vrcholem kvadratického kužele, v kongruenci obsaženého, jenž tuto čáru 3. stupně promítá. Vedle ∞^1 kuželů 2. stupně (vytvořených dvojicemi sdružených rovin v projektivních svazcích trsů S a S', jejichž osy se protínají) obsahuje kongruence ∞^2 zborcených řad kvadratických (z nichž každá je vytvořena dvěma sdruženými svazky rovin obou trsů S a S' s osami mimoběžnými); tyto útvary procházejí také čarou k. Kterékoli dvě kvadratické plochy kuželové nebo zborcené, v kongruenci obsažené, mají jednu přímku kongruence společnou; neboť dva rovinové svazky v S mají vždy společnou rovinu, jež protíná rovinu k ní v S' sdruženou (společnou svazkům, jež

oněm odpovídají) v přímce kongruence; mimo to mají společnou uvedenou prostorovou čáru 3. stupně k jako geometrické místo singulárních bodů kongruence.

Také středy S a S' kolineárních trsů, kongruenci a čáru k vytvořujících, leží na prostorové čáře 3. stupně k; neboť jeden i druhý je singulárním bodem kongruence, protože se v něm protíná paprsek SS', počítaný do jednoho trsu, s korespondujícím paprskem trsu druhého. Rovinový svazek s osou $SS' = s$, příslušný do trsu S, a svazek jemu v kolineaci odpovídající s osou s' vytvořují kužel 2. stupně, v kongruenci obsažený a k promítající; rovněž svazek rovin s osou $S'S = t'$ a korespondující svazek s osou t vytvořují kužel téže vlastnosti. *Prostorová čára 3. stupně k jest průsekem obou uvedených kuželů kvadratických s vrcholy S a S', jež mimoto mají společný paprsek SS'.*

Společnému paprsku obou trsů SS' odpovídá v každém z nich *tečna čáry k*, totiž s' v bodě S', resp. t v bodě S (přímka druhého resp. prvého uv. kužele kvadratického). Neboť blíží-li se bod na k neomezeně bodu S', blíží se paprsek v S, bodem tím jdoucí, paprsku $SS' = s$, a paprsek jemu odpovídající blíží se tečně s' čáry k v S'; obdobně v bodě S.

Dvě sdružené roviny kolineárních trsů S a S', protínající uvažované plochy kuželové, promítají dva body čáry k a jejich spojnici, přímku kongruence. Dvě sdružené roviny v S a S', jež jsou tečnými rovinami těchto ploch kuželových, promítají tečnu čáry k. Jestliže rovina trsu S' prochází společným paprskem obou $S'S = t'$ a tečnou t čáry k v S, má korespondující rovina trsu S, jdoucí tečnou t a tečná ke kuželové ploše s vrcholem S, s čarou k tři splývající body společné a sluje *oskulační rovinou čáry k* v bodě S; obdobně rovina trsu S', korespondující rovině ss' trsu S, prochází tečnou s' čáry k, je tečnou rovinou kuželové plochy s vrcholem v S' a oskulační rovinou čáry k v bodě S'.[1])

c) Nazveme-li každou přímku kongruence 1. stupně 3. třídy *bisekantou* prostorové čáry 3. stupně, jež je geometrickým místem singulárních bodů této kongruence, musíme rozlišovati bisekantu skutečnou, protínající čáru ve dvou reálných bodech, tečnu čáry (bisekantu s dvěma splývajícími body čáry), dotýkající se čáry v bodě jejím, a bisekantu ideální bez reálných společných bodů s čarou 3. stupně. Každá přímka uvažované kongruence totiž, jsouc průsečnicí dvou rovin v kolineaci trsů S a S' sdružených, je sdruženými svazky paprskovými v S a S' proťata ve dvou soumístných projektivních řadách bodových, jejichž samodružné body jsou singulárními body kongruence a body čáry 3. stupně; protože řady tyto mají buď dva reálné různé body samodružné nebo dva splývající nebo dva imaginární body samodružné, jest přímka průsečná bisekantou čáry 3. stupně jednoho z uvedených tří druhů.

---

[1]) Budiž poznamenáno, že mimo uvedené zde kongruence 1. stupně 2. nebo 3. třídy existují ještě jiné kongruence tohoto stupně a těchto tříd (i duálně).

Prostorová čára 3. stupně sluje *řídicí čarou kongruence 1. stupně 3. třídy*; kongruence ta je vytvořena bisekantami této čáry.

Obdobné vlastnosti má duální kongruence 1. třídy 3. stupně, vytvořená spojnicemi sdružených bodů dvou kolineárních polí v obecné poloze, jakož i geometrické místo singulárních rovin této kongruence. Zejména jest uvésti, že libovolným bodem v prostoru procházejí (nejvýše) tři singulární roviny této kongruence, takže útvar rovinami těmi vytvořený jest *prostorová čára 3. třídy*; každá přímka, ve které se dvě roviny geometrického místa toho protínají, je obsažena v uvedené kongruenci 1. třídy 3. stupně (a byla proto nazvána *biplanárou* příslušné prostorové čáry 3. třídy).[2][3][4])

87. Prostorová čára třetího stupně (a útvar duální). *a*) V předcházejícím jsme poznali:

Dva kolineární (nesoumístné neperspektivní) *trsy bez společného prvku sobě samému odpovídajícího vytvořují průsečíky dvojic sdružených přímek svých* (v počtu ∞^1) *prostorovou čáru třetího stupně, obsahující také středy obou vytvořujících trsů* a mající v jednom i druhém bodě tom tečnou paprsek, jenž v kolineaci odpovídá společnému paprsku obou trsů.[1])

Dvě kolineární (nesoumístná neperspektivní) *pole bez společného prvku sobě samému odpovídajícího vytvořují rovinami dvojic sdružených přímek svých* (v počtu ∞^1) *prostorovou čáru 3. třídy, obsahující také roviny obou polí vytvořujících*, z nichž se jedna i druhá rovina protíná s rovinou nekonečně blízkou v přímce, odpovídající společné přímce obou polí.

[2]) O kongruencích 1. stupně 2. nebo 3. třídy a kongruencích duálních pojednávají na př. *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage II; *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung II, 1893, p. 23 a n.; také *A. Emch*, On the congruences of rays (3, 1) and (1, 3), Annals math. 11 (1897).

[3]) Kongruenci 3. stupně 1. třídy vytvořují také přímky, jež pět pevných rovin protíná v projektivních skupinách bodů. Viz *G. Halphen*, Sur le mouvement d'une droite, Bulletin Soc. math. France 1 (1875).

[4]) Ustanovíme-li mezi rovinami obou kolineárních trsů, jež kongruenci 1. stupně 3. třídy vytvořují, a bodovým polem v rovině korelaci, odpovídají bisekantám prostorové čáry 3. stupně body této roviny, a to tečnám čáry body kuželosečky, bisekantám skutečným a ideálním body ležící vně resp. uvnitř kuželosečky té, dále kvadratickým řadám zborceným, spec. kuželům, v kongruenci obsaženým, odpovídají přímky roviny, spec. tečny uvedené kuželosečky. Viz *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage II.

[1]) Z ∞^2 dvojic korespondujících paprsků v kolineárních trsech S a S' protíná totiž paprsek x v S svůj korespondující x' v S' jen tehdy, jestliže v něm rovinu trsu S protíná sdružená rovina trsu S', ležící tedy ve svazku s osou $S'S$; odpovídá-li paprsek $S'S = t'$ v S' paprsku t v S, vytvořují roviny tx a $t'x$ kuželovou plochu kvadratickou (pravou) s vrcholem S. Obdobně pak protíná v paprsku x' rovinu trsu S' sdružená rovina trsu S, ležící ve svazku s osou SS'; odpovídá-li paprsku $SS' = s$ v S paprsek s' v S', vytvořují roviny sx' a $s'x'$ kvadratickou plochu kuželovou (pravou) s vrcholem v S'. Uvedené dvě kvadratické plochy kuželové odpovídají sobě v koli-

Dvojice sdružených rovin těchto trsů (v počtu ∞^2) protínají se v bisekantách prostorové kubiky, jež tvoří přímkovou kongruenci 1. stupně 3. třídy. Dvojice sdružených a tedy projektivních svazků rovin s osami mimoběžnými v obou trsech vytvořují ∞^2 zborcených řad kvadratických, sestávajících z bisekant čáry kubické. Z každého bodu prostorové čáry kubické promítá se tato kuželovou plochou 2. stupně, jejíž přímky jsou přímkami kongruence. Každým bodem, ležícím mimo kubiku, prochází jediná bisekanta její, protože kongruence bisekant jest 1. stupně.[2])[3])[4])

Dvojice sdružených bodů těchto polí (v počtu ∞^2) spojují se přímkami, z nichž každá leží ve dvou rovinách oné soustavy kubické, všechny pak tvoří přímkovou kongruenci 1. třídy 3. stupně. Dvojice sdružených a tedy projektivních řad bodových s mimoběžnými osami v obou polích vytvořují ∞^2 zborcených řad kvadratických. Každá rovina kubické soustavy rovin protíná tuto v čáře 2. třídy, jejíž tečny jsou přímkami kongruence. V každé rovině, neobsažené v kubické soustavě uvedené, leží jediná přímka kongruence, protože kongruence ta je 1. třídy.

---

neaci daných dvou trsů, nedotýkají se však podél SS', protože společná tečná rovina byla by samodružnou v kolineaci proti předpokladu.

[2]) Vytvoření prostorové čáry 3. stupně dvěma kolineárními trsy nalezli *Seydewitz*, Lineäre Konstruktion einer Kurve doppelter Krümmung, Archiv Math. Phys. 10 (1847), a nezávisle na něm *Chasles*, Propriétés des courbes à double courbure du troisième ordre, Journal math. p. a. (2) 2 (1857); některé věty podali už dříve Chasles, Cayley a j. Kongruenci bisekant prostorové kubiky vyšetřoval první *Reye* v Geometrie der Lage, II. Viz *Reye*, Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnis der kubischen Raumkurven, übersichtlich dargestellt, Mitteilungen Math. Ges. Hamburg 2 (1890).

[3]) K prostorové čáře 3. stupně, vytvořené dvěma kolineárními trsy o středech S a S' nalezneme její bisekantu, jdoucí bodem P mimo ni položeným, vedeme-li přímku protínající přímky p' a q, jež odpovídají v kolineaci obou trsů přímce $SP = p$ resp. $S'P = q'$. Bez zřetele k trsům čáru vytvořujícím nalezneme její bisekantu jdoucí bodem P tím, že spojnicí p bodu toho s libovolným bodem čáry položíme dvě roviny, obsahující bisekanty čáry p_1, p_2, a vedeme dvěma body čáry přímky q_1, q_2, protínající tyto bisekanty; přímka, jdoucí bodem P a protínající q_1 i q_2, je přímkou hledanou.

[4]) Mají-li dva kolineární nesoumístné neperspektivní trsy S a S' společnou rovinu samodružnou, rozpadá se prostorová čára 3. stupně v kuželosečku a přímku ji protínající (jedna i druhá kuželová plocha s vrcholem v S resp. S', jejichž průsekem jest vedle přímky SS' čára kubická, rozpadají se v rovinu samodružnou a druhou rovinu; projektivní svazky paprskové se středy S a S' v samodružné rovině vytvořují uvedenou kuželosečku, druhé dvě roviny se protínají v uvedené přímce); kongruence 1. stupně 3. třídy se rozpadá v kongruenci 1. stupně 2. třídy a v paprskové pole samodružné roviny. Mají-li oba trsy dvě společné roviny samodružné a tedy společnou přímku samodružnou, rozpadá se prostorová čára kubická ve tři přímky (společnou přímku a dvě přímky mimoběžné ji protínající, jež jsou osami perspektivnosti sdružených svazků paprskových v jedné a druhé rovině samodružné; podle toho, je-li projektivnost rovinových svazků s osou ve společné přímce obou trsů hyperbolická nebo parabolická nebo

Z kterýchkoli dvou bodů prostorové čáry 3. stupně promítá se kongruence jejích bisekant dvěma kolineárními trsy.

Kterékoli dvě roviny prostorové čáry 3. třídy protíná příslušná kongruence ve dvou kolineárních polích.

Neboť (v případě na straně levé) promítneme-li kongruenci 1. stupně 3. třídy, vytvořenou dvěma kolineárními trsy o středech S a S', z libovolného bodu S'' příslušné čáry kubické, prochází průsečnicí každé dvojice sdružených rovin ξ a ξ' trsů S a S' rovina ξ'' trsu S''. Zborcená nebo kuželová plocha 2. stupně, vytvořená průsečnicemi dvou sdružených svazků rovin v trsech S a S' s osami s a s', promítá se z bodu S'' svazkem rovin, jehož osa s'' je řídicí přímkou zborcené plochy resp. přímkou plochy kuželové. Odpovídá tedy každé rovině ξ a každému paprsku jejímu s v trsu S rovina ξ'' a paprsek její s'' v trsu S''; jsou tudíž trsy S a S'' kolineární a vytvořují tutéž kongruenci jako trsy S a S'.[5])

Nemají tedy středy trsů, čáru 3. stupně vytvořujících, a duálně roviny polí, vytvořujících čáru 3. třídy, zvláštního postavení na útvaru vytvořeném.

b) Z kterýchkoli dvou svých bisekant promítají se body prostorové čáry 3. stupně dvěma projektivními svazky rovin.

Roviny prostorové čáry 3. třídy protínají kterékoli dvě přímky příslušné kongruence ve dvou projektivních řadách bodových.

Neboť jsou-li (v případě levém) dvěma libovolnými bisekantami kubické čáry přímky p a q, promítá se jedna i druhá ze středů S a S' vytvořujících trsů vždy dvěma korespondujícími rovinami. Obě uvedené roviny trsu S určují svazek rovin, odpovídající svazku rovin trsu S', určenému oběma uvedenými rovinami jeho; tyto dva svazky rovinové vytvořují plochu 2. stupně, k jejímž přímkám patří p a q. Plochu tuto lze vytvořiti přímkou x, jež protíná přímky p, q a v jednom bodě X prostorovou čáru 3. stupně; dvě roviny pak, z nichž jedna jde přímkami p, x, druhá přímkami q, x a obě tedy bodem X čáry kubické, tvoří dva projektivní svazky s osami p resp. q, jež uvedenou plochu kvadratickou vytvořují.[6])

---

eliptická, jsou uv. dvě přímky reálné různé nebo splývající nebo imaginární); kongruence 1. stupně 3. třídy rozpadá se v kongruenci 1. stupně 1. třídy a dvě paprsková pole rovin samodružných.

[5]) V prostoru jest ∞^{12} kubických čar prostorových. Neboť za středy dvou trsů, čáru vytvořujících, lze zvoliti dva body v prostoru ∞^6 způsoby, ke stanovení jejich kolineace jest potřebí čtyř dvojic paprsků, jež lze zvoliti ∞^8 způsoby; avšak táž čára vzniká z ∞^2 dvojic kolineárních trsů se středy v libovolných bodech jejích.

[6]) Máme-li na zřeteli ∞^1 kolineárních trsů, jež danou kongruenci 1. stupně 3. třídy a příslušnou prostorovou čáru 3. stupně promítají, vidíme, že přímky z těchto všech trsů, promítající týž určitý bod čáry kubické, tvoří kuželovou plochu kvadratickou, soustavy pak jiných sobě odpovídajících přímek trsů těch (unisekanty čáry) tvoří zborcenou řadu kvadra-

Vyjděme od libovolných dvou kolineárních trsů s různými středy na prostorové čáře 3. stupně, jež čáru tu podle předešlého vytvořují; jejich kolineace může býti stanovena třemi dvojicemi sdružených rovin, které se protínají v bisekantách čáry kubické, a jednou dvojicí sdružených přímek, jež se protínají v bodě čáry té. Zvolíme-li tři dotčené bisekanty kubické čáry za osy s_1, s_2, s_3 svazků rovin a přiřadíme-li v těchto svazcích navzájem roviny, promítající týž bod prostorové čáry 3. stupně, obdržíme podle hořejšího tři svazky rovin, po dvou projektivní; označíme-li dva středy trsů, od nichž jsme vyšli, A a B, dotčený bod čáry pak, jenž sloužil také k stanovení jejich kolineace, C, jsou projektivnosti tří uvedených svazků rovinových stanoveny vždy třemi dvojicemi rovin, tyto body promítajících: $s_1(ABC) \barwedge s_2(ABC) \barwedge \barwedge s_3(ABC)$. Tím dospíváme k výsledku, že *prostorová čára 3. stupně*, vytvořená dvěma kolineárními trsy, *je totožná s čarou, kterou* podle dřívější úvahy (v čl. 47) *vytvořují tři projektivní svazky rovin*, jejichž osy jsou bisekantami čáry.

A duální útvar uvažovaný, prostorová čára 3. třídy, vznikající ze dvou kolineárních polí, jest totožný s útvarem, vytvořeným dříve třemi projektivními řadami bodů (jejichž osami jsou biplanáry čáry té).

Vzhledem k tomu pak, že — jak bylo tam nalezeno — prostorová čára 3. stupně tvoří svými oskulačními rovinami prostorovou čáru 3. třídy, seznáváme, že oba navzájem duální útvary zde definované, bodovou čáru 3. stupně a rovinovou čáru 3. třídy v prostoru, jest pokládati za týž soběduální útvar, složený z bodů a rovin.[7])

c) Všimněme si, *jakou polohu může míti rovina v prostoru vůči prostorové čáře 3. stupně.*

---

tickou. Neboť dvojici rovin, jdoucích takovou přímkou v jednom trsu, odpovídají v ostatních trsech dvojice rovin tak, že jeden i druhý systém sdružených těchto rovin prochází určitou bisekantou čáry kubické; tyto dva svazky rovin s osami v bisekantách čáry, promítajíce jednotlivé body její, jsou projektivní a vytvořují tedy uv. plochu. Soustavu kolineárních trsů rovinových se středy na prostorové čáře 3. stupně, jejichž dvojice kongruenci k ní příslušnou vytvořují, studuje *F. Schur*, Über die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen, Math. Annalen 18 (1881). K jednomocné soustavě té jest přidružena dvojmocná soustava projektivních svazků rovinových, jejichž trojice vytvořují uvažovanou čáru kubickou (sdružené roviny všech trsů oné soustavy skládají svazek této soustavy, obráceně sdružené roviny všech svazků soustavy této skládají trs soustavy oné); viz *Th. Reye*, Über lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel oder Räume I, Journal r. a. Math. 104 (1889).

[7]) O prostorové čáře kubické (odvozené především ze dvou kolineárních trsů) pojednávají zejména *H. Schröter*, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde, 1880, p. 439 a n.; *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage II; *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften II, 1908, p. 172 a n.; *J. Kounovský*, Prostorová křivka stupně třetího, 1910; *V. Jarolímek*, Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru III, 1914.

Dva kolineární trsy s vrcholy ve dvou bodech prostorové kubiky, jež promítají přímkovou kongruenci 1. stupně 3. třídy, ke kubické čáře příslušnou, a čáru 3. stupně samu, protínají rovinu, kterou předpokládáme ležící mimo jeden i druhý vrchol tento, ve dvou soumístných polích kolineárních.

Tato kolineace v uvažované rovině nemůže býti homologická, nemají-li kolineární trsy míti společného prvku samodružného (a nemá-li se tedy kubická čára rozpadnouti). Jest to kolineace typu I. s třemi reálnými body samodružnými nebo s jedním reálným a dvěma imaginárními body samodružnými nebo kolineace typu II. nebo typu III.

Podle toho může rovina míti čtverou polohu k prostorové čáře 3. stupně: Rovina buď 1. protíná prostorovou kubiku ve třech bodech reálných různých a obsahuje tři její skutečné bisekanty; nebo 2. protíná prostorovou kubiku v jednom bodě reálném i ve dvou bodech imaginárních a obsahuje jedinou její ideální bisekantu; nebo 3. dotýká se prostorové kubiky v jednom (reálném) bodě (má s ní dva splývající body společné) a protíná ji v druhém (reálném) bodě, obsahujíc tečnu čáry v bodě prvém a skutečnou bisekantu; nebo 4. je oskulační rovinou prostorové kubiky, obsahujíc jeden její (reálný) bod (tři splývající) a tečnu čáry v bodě tom.[8])

88. Určenost prostorové čáry 3. stupně. *a*) Kolineace dvou trsů, prostorovou čáru 3. stupně vytvořujících, jest určena, jsou-li dány čtyři dvojice prvků sobě odpovídajících, a to buď čtyři dvojice přímek, nebo tři dvojice přímek a jedna dvojice rovin, nebo tři dvojice rovin a jedna dvojice přímek, nebo konečně čtyři dvojice rovin; středy obou trsů musí ovšem ležeti na čáře kubické. Odtud vyplývá:

Prostorová čára 3. stupně jest určena buď šesti body svými nebo pěti body a jednou bisekantou nebo třemi body a třemi bisekantami nebo konečně dvěma body a čtyřmi bisekantami svými (v poloze obecné).

V řadě skupin prvků, kubiku určujících, schází skupina čtyř bodů a dvou bisekant; tato neurčuje prostorové čáry kubické. Neboť pro-

[8]) Podle toho, kterou z těchto čtyř poloh má nevlastní rovina vůči prostorové křivce 3. stupně, rozeznáváme *čtyři metrické typy* prostorové kubiky: prostorová křivka 3. stupně, kterou nevlastní rovina protíná ve třech bodech reálných různých, sluje *prostorová hyperbola*; křivka, kterou rovina nevlastní protíná v jednom bodě reálném a dvou imaginárních, sluje *prostorová elipsa*; křivka, která se roviny nevlastní dotýká a má s ní ještě jiný bod společný, sluje *parabolická hyperbola* (nebo hyperbolická parabola); konečně křivka, která má nevlastní rovinu za oskulační, sluje *prostorová parabola*.

Metrické vlastnosti prostorových čar 3. stupně vyšetřovali zejména *H. Schröter*, Metrische Eigenschaften der kubischen Parabel, Math. Annalen 25 (1885); *E. Heinrichs*, Einige metrische Eigenschaften der kubischen räumlichen Hyperbel, Zeitschrift Math. Phys. 39 (1894); *R. Sturm*, Metrische Eigenschaften der kubischen Raumkurve, Zeitschrift Math. Phys. 40 (1895), tamtéž *R. Mehmke* (v článku stejného jména). Věty toho druhu uvádějí také H. Schröter (v cit. knize), J. Kounovský a j.

jektivnost dvou svazků rovin s osami v daných dvou bisekantách jest určena třemi body čáry kubické, a čtvrtý bod její musí ležeti na ploše kvadratické těmito svazky vytvořené.

K dalším skupinám prvků, prostorovou čáru kubickou určujícím, dojdeme, obrátíme-li zřetel k tečnám čáry kubické. Z každého bodu svého P promítá se prostorová kubika kuželovou plochou 2. stupně; tečné roviny plochy této promítají tečné přímky čáry kubické, tečná přímka čáry v bodě P leží na ploše. Jsou-li určeny dvě kuželové plochy 2. stupně, kubickou čáru promítající, jest tím určena také čára sama (jejich průsek vedle spojnice vrcholů); každá z ploch těch je pak určena pěti prvky svými (přímkami a rovinami tečnými). Nalézáme tedy:

Prostorová čára 3. stupně jest také určena buď pěti body svými a tečnou v jednom z nich nebo čtyřmi body a tečnami ve dvou z nich nebo konečně třemi body a tečnami svými v nich.

Ze způsobů, jež prostorovou kubiku určují, je také pozoruhodný:

Prostorová čára 3. stupně jest určena třemi svými body a tečnami i oskulačními rovinami ve dvou z nich.

Neboť jsou-li tři body kubiky A, B, C, jsou-li dále v bodě A a B tečna i oskulační rovina její a, α, resp. b, β, jest kolineace trsů s vrcholy A, B stanovena dvěma dvojicemi projektivních svazků rovin, jednak dvou svazků s osami AB a b, jejichž projektivnost určují tři dvojice sdružených rovin, jdoucích přímkami a, BA, bodem C, a rovin Ab, β, jednak dvou svazků s osami a a BA, jejichž projektivnost určují tři dvojice sdružených rovin, jdoucích přímkami AB, b, bodem C, a rovin α, Ba; při čemž v obou projektivnostech společné rovině prvních svazků aB odpovídá táž společná rovina druhých svazků bA.[1][2][3])

[1]) Se zřetelem k soběduálnosti prostorové čáry 3. stupně a 3. třídy je důsledkem hořejších vět: Prostorová čára kubická jest také určena svými dvěma body, tečnami i oskulačními rovinami v nich a třetí rovinou oskulační; jest určena svými šesti oskulačními rovinami, nebo pěti rovinami oskulačními a tečnou v jedné z nich, nebo čtyřmi rovinami oskulačními a tečnami ve dvou z nich, nebo třemi rovinami oskulačními a tečnami svými v nich; jest určena svými pěti oskulačními rovinami a jednou biplanárou, nebo třemi rovinami oskulačními a třemi biplanárami, nebo konečně dvěma rovinami oskulačními a čtyřmi svými biplanárami.

[2]) Čtyrstěn se stěnami v rovinách a, Ab, Ba, β (kde tedy roviny a a β jsou oskulačními rovinami čáry v bodě A resp. B, roviny Ab a Ba pak spojují jeden i druhý z bodů těch s tečnou čáry v bodě druhém resp. prvém) byl nazván *oskulačním čtyrstěnem* prostorové čáry 3. stupně. O významu uvedeného čtyrstěnu pro kubickou čáru v prostoru píše *G. Kohn*, Über kubische Raumkurven, Sitzungsberichte Akad. Wien 112 (1903). Viz také téhož Beweis eines Satzes über zwei kubische Raumkurven, welche dasselbe Tetraeder in gleicher Weise zum Schmiegungstetraeder haben, Monatshefte Math. Phys. 14 (1903).

[3]) Počet prostorových čar 3. stupně, jež vyhovují daným podmínkám, vyšetřuje *R. Sturm*, Erzeugnisse, Elementarsysteme und Charakteristiken von kubischen Raumkurven, Journal r. a. Math. 79 (1874), a pokračování tamtéž 80 (1875).

b) Prostorovou čáru 3. stupně k danou šesti body *sestrojíme* velmi jednoduše. Označme dva z bodů těch S a S', ostatní čtyři A, B, C, D. Protože čtyři z daných bodů nesmějí ležeti v téže rovině, jsou body A, B, C a D vrcholy čtyrstěnu; stačí vzíti v úvahu dvě dvojice mimoběžných jeho hran protějších, třebas $AB = p_1$, $CD = p_2$ a $AC = q_1$, $BD = q_2$; jsou to ovšem bisekanty hledané kubiky. Bodem S položme jeden paprsek r protínající p_1 a p_2, druhý s protínající q_1 a q_2; obdobné dva paprsky r' a s' veďme také bodem S'. Paprsky r a r', rovněž paprsky s a s' odpovídají sobě v kolineaci trsů S a S', určené čtyřmi dvojicemi rovin, jež promítají p_1, p_2, q_1 a q_2; odpovídají tedy sobě také rovina rs a rovina $r's'$, jejich průsečnice l jest pak bisekantou kubiky. Paprsky p_1, p_2 a l, rovněž q_1, q_2 a l určují dvě zborcené plochy kvadratické, jež se protínají v l a v čáře kubické k (neboť jednu i druhou zborcenou plochu kvadratickou lze vytvořiti dvěma projektivními svazky rovin, z nichž vždy jeden svazek má osu l, a tři tyto projektivní svazky rovin vytvořují prostorovou kubiku s bisekantou l). Položíme-li přímkou l libovolnou rovinu, protíná tato p_1 a p_2 ve dvou bodech, rovněž q_1 a q_2 ve dvou bodech; spojnice oněch (přímka první plochy zborcené) a spojnice těchto (přímka druhé plochy) protínají se zajisté v bodě hledané čáry kubické.

Tato konstrukce hodí se také na případ, kdy prostorová křivka 3. stupně jest dána dvěma body a čtyřmi bisekantami, po dvou mimoběžnými.[4])

c) Jestliže šest bodů určuje jednoznačně prostorovou čáru 3. stupně, musí sedm bodů jejích míti vzájemnou polohu vázanou (obdobně jako šest bodů kuželosečky). Promítneme-li šest bodů prostorové kubiky ze sedmého bodu jejího, dostaneme (jednoduchý) šestihran, vepsaný ovšem kvadratickému kuželi, jímž se z tohoto sedmého bodu čára promítá. Podle věty Pascalovy protínají se tři dvojice protějších stěn šestihranu toho ve třech přímkách téže roviny (jdoucí vrcholem šestihranu). Platí tedy o sedmi bodech prostorové čáry kubické: *Protější strany šestiúhelníku s vrcholy na prostorové čáře 3. stupně promítají se ze sedmého*

[4]) První sestrojení prostorové čáry 3. stupně (ze šesti jejích bodů) podali Möbius, Seydewitz, Chasles a Cremona. Četné konstrukce uvádí H. Schröter (v cit. knize); také konstrukci kubiky z jednoho bodu a pěti bisekant (kdežto šesti bisekantami je určeno šest čar). Konstrukcí kubiky, určené (dvojznačně) pěti body a jednou rovinou oskulační (nebo duálně), zabývá se *V. Jarolímek*, O imaginární prostorové křivce kubické, Rozpravy Čes. akad. 23 (1914). O sestrojení prostorové čáry kubické ze šesti bodů imaginárních (po dvou sdružených) pojednávají zejména *C. Bobek*, Über Construction von Flächen zweiter Ordnung aus imaginären Bestimmungsstücken, Věstník Spol. nauk 1882; *C. Hossfeld*, Über eine Aufgabe aus der projectiven Geometrie des Raumes. Construction der Raumkurve dritter Ordnung aus imaginären Punkten, Zeitschrift Math. Phys. 33 (1888); *J. Thomae*, Lineare Konstruktion einer Raumkurve dritter Ordnung aus drei Paaren konjugiert imaginärer Punkte, Berichte Ges. Wiss. Leipzig 54 (1902); *J. Sobotka*, K sestrojení prostorové křivky řádu 3., řádu 4. prvého druhu a plochy 2. stupně z největšího možného počtu daných bodů sdruženě imaginárních, Rozpravy Čes. akad. 34 (1925).

bodu jejího dvojicemi rovin, jejichž průsečnice leží v jedné rovině (tímto bodem procházející).

Utvořme ze sedmi bodů prostorové kubiky (jednoduchý) sedmiúhelník a protněme každou rovinu, položenou třemi sousedními vrcholy jeho, protější jeho stranou (jdoucí totiž dvěma vrcholy k oné trojici nesousedními). Z hořejší věty vyplývá: *Tři sousední roviny, určené vždy třemi sousedními vrcholy sedmiúhelníku kubické čáře vepsaného,* (o společném bodě ve vrcholu jeho) *jsou protějšími stranami sedmiúhelníku proťaty ve třech bodech, jež leží s oním společným vrcholem v téže rovině.* Neboť označíme-li vrcholy sedmiúhelníku pořadem 1 až 7, jsou uvedené sousední roviny třebas 567, 671, 712 (se společným vrcholem 7) a protější k nim strany (v témž pořadí) 23, 34, 45; protože dvojice rovin promítajících z vrcholu 7 přímky 23 a 56, 34 a 61, 45 a 12 mají podle hořejšího průsečnice ležící v téže rovině (jež obsahuje bod 7), leží tři průsečíky oněch rovin s protějšími stranami a bod 7 v jedné rovině. Věty této lze (rozmanitými způsoby) užíti k sestrojení kubické čáry prostorové.

Máme-li pak zřetel ke všem stranám sedmiúhelníku a protějším rovinám vrcholy jeho určeným, obdržíme větu: *Strany sedmiúhelníku, vepsaného kubické čáře prostorové, protínají roviny, položené vždy protější trojicí jeho vrcholů, ve vrcholech druhého sedmiúhelníku, jenž je danému nejen vepsán, nýbrž i opsán.*

Jiný vztah mezi sedmi body prostorové čáry 3. stupně dostaneme takto: Promítněme tři a tři body čáry z bodu sedmého; oba trojhrany tak vznikající jsou vepsány kvadratické ploše kuželové, kterou se z onoho bodu promítá čára kubická. Protože tyto dva trojhrany jsou vepsány témuž kuželi 2. stupně, jsou spolu opsány jinému kuželi stupně 2.; rovina jednoho z obou daných trojúhelníků protíná trojhran, jenž promítá trojúhelník druhý, v trojúhelníku, který spolu s oním je opsán kuželosečce (průseku uvedené plochy kuželové s dotčenou rovinou). Této kuželosečky (určené pěti tečnami) dotýkají se nejen strany onoho trojúhelníku, nýbrž i průsečnice jeho roviny s rovinami, jež jdou vždy třemi z ostatních čtyř bodů na čáře kubické. Tím odůvodněna jest věta: *Trojúhelník a čtyrstěn, jejichž sedm vrcholů leží na prostorové čáře 3. stupně, jsou opsány téže kuželosečce.*[5])[6])[7])

---

[5]) O osmi bodech prostorové čáry kubické lze uvésti větu: Dvojice rovin, položených protějšími trojicemi vrcholů osmiúhelníku prostorové kubice vepsaného, protínají se ve čtyřech přímkách zborcené plochy kvadratické. Viz *A. Buchheim*, An extension of Pascal's theorem to space of three dimensions, Messenger math. (2) 14 (1884).

[6]) O prostorové čáře kubické vzhledem ke kvadratickým plochám přímkovým, ji obsahujícím, platí: *Polárné roviny, příslušné k libovolnému bodu P vzhledem k ∞^2 kvadratickým plochám jdoucím prostorovou čarou kubickou, procházejí jedním bodem P', při čemž PP' je bisekantou této čáry.* Body P a P' slují *konjugované* vzhledem k prostorové čáře kubické. Na každé bisekantě kubické čáry k, jež není její tečnou, tvoří dvojice bodů

89. Plocha druhého stupně a plocha druhé třídy. *a*) Obraťme se dále k útvaru, odvozenému ze dvou korelativních polí nesoumístných, a duálně k útvaru, odvozenému ze dvou korelativních trsů nesoumístných. U dvou trsů korelativních s různými středy S a S' v prostoru protíná každá přímka jednoho trsu korespondující rovinu trsu druhého v bodě; jestliže přímka a trsu S protíná odpovídající rovinu a' trsu S' v bodě X, protíná přímka b' z S', spojnice středu S' s bodem X, odpovídající rovinu β z S v témž bodě X, protože rovina β prochází přímkou a (ježto b' leží v a'). Duálně u dvou polí korelativních v různých rovinách σ a σ' prostoru určuje každý bod jednoho pole (kteréhokoli z obou) s korespondující přímkou pole druhého rovinu.

Dva korelativní trsy o různých středech S a S' vytvořují průsečíky svých sdružených přímek a rovin dvourozměrnou soustavu bodů, plochu druhého stupně, obsahující také body S a S'.

Libovolná přímka má totiž s vytvořenou takto soustavou (obecně nanejvýš) dva body společné. Neboť přímka p v prostoru je proťata přím-

Dvě korelativní pole v různých rovinách σ a σ' vytvořují rovinami svých sdružených bodů a přímek dvourozměrnou soustavu rovin, plochu druhé třídy, obsahující také roviny σ a σ'.

Libovolnou přímkou procházejí totiž (obecně nanejvýš) dvě roviny soustavy takto vytvořené. Neboť z přímky p v prostoru pro-

vzhledem ke k konjugovaných involuci hyperbolickou nebo eliptickou podle toho, je-li bisekantou skutečnou nebo ideální (v prvém případě jsou samodružnými body involuce průsečíky bisekanty s kubikou); bod kubiky je konjugovaný ke každému bodu na tečně čáry v něm. K bodům přímky p jsou vzhledem ke kubice k konjugovány body na druhé čáře kubické k', k oné projektivní (jejímiž bisekantami jsou sdružené poláry přímky p vzhledem ke kvadratickým plochám k obsahujícím). *Autokonjugovanou* vzhledem k prostorové čáře kubické sluje čára nebo plocha, jejíž body jsou po dvou vzhledem k čáře té konjugovány. O bodech (a rovinách) vzhledem k prostorové kubice konjugovaných pojednává *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage II; o útvarech vzhledem ke kubice autokonjugovaných *Th. Reye*, Über Beziehungen zwischen kubischen Raumkurven II, Math. Annalen 75 (1914).

[7]) Některé vztahy mezi dvěma prostorovými čarami kubickými (na př. že mají při obecné poloze 10 společných bisekant) vyšetřuje *Th. Reye*, Über Beziehungen zwischen kubischen Raumkurven, Math. Annalen 68 (1910). Mnohoúhelníky, jejichž vrcholy leží na prostorové kubice a jejichž roviny třemi sousedními vrcholy určené jsou oskulačními rovinami jiné kubiky, hledá *G. Kohn*, Über räumliche Poncelet'sche Polygone, Sitzungsberichte Akad. Wien 106 (1897).

Dvojmocnou soustavu prostorových čar kubických, jdoucích pěti body v prostoru, studuje *Th. Reye*, Curvenbündel dritter Ordnung, Zeitschrift Math. Phys. 13 (1868); o ní jedná také *A. C. Dixon*, On twisted cubics, which fulfil certain conditions, Quart. Journal math. 23 (1889). O dvojmocné soustavě kubických čar v prostoru se společným čtyrstěnem oskulačním pojednává *E. Heinrichs*, Über den Bündel derjenigen kubischen Raumkurven, welche ein gegebenes Tetraeder in derselben Art zum gemeinsamen Schmiegungstetraeder haben, Dissertation Münster 1887.

kami svazku o středu S, ležícího v rovině Sp, v řadě bodové; rovinami pak svazku s osou, odpovídající v trsu S' rovině Sp, proťata je v druhé řadě bodové. Protože svazek paprskový v rovině Sp a svazek rovinový s osou k této rovině v S' sdruženou sobě v dané korelaci odpovídají a jsou tedy projektivní, jsou projektivní obě uvedené soumístné řady bodové na p. V této projektivnosti obou řad bodových na p existují dva prvky samodružné, jež leží na ploše oběma trsy vytvořené: je-li projektivnost ta hyperbolická, protíná p plochu ve dvou reálných bodech (je sečnou plochy), je-li eliptická, má s ní společné dva body imaginární (leží mimo plochu), je-li konečně parabolická, má p s plochou jeden bod společný (je tečnou přímkou plochy).

V případě, kdy přímka p je průsečnicí dvou rovin, jež odpovídají spojnicím jednoho bodu jejího X se středy S a S' v trsech S' resp. S, jest projektivnost na ní degenerovaná (svazku přímek v rovině Sp o středu S koresponduje totiž svazek rovin s osou $S'X$, protínající p v singulárním bodě X, jenž odpovídá v projektivnosti na p všem průsečíkům onoho svazku přímek s p; stejně pro svazek paprskový v $S'p$ a sdružený svazek rovinový s osou SX); přímka p je tečnou plochy v bodě X.

Jestliže však (speciálně) svazek přímek o středu S v rovině $Sp = \alpha$ a projektivní svazek rovin v S' s osou a', odpovídající v korelaci rovině α, jsou perspektivní, jest uvažovaná projektivnost obou soumístných řad bodových na p identická, všechny body přímky p mítá se svazek přímek v σ o středu σp svazkem rovin; přímka p jest pak také osou svazku rovin, určeného přímkou p a řadou bodovou korespondující v σ' onomu svazku o středu σp. Protože oba tyto svazky rovinové, promítajíce sdružené a tedy projektivní útvary polí σ a σ', jsou projektivní a soumístné, existují v jejich projektivnosti dvě roviny samodružné, jež patří soustavě sdruženými prvky obou korelativních rovin vytvořené. Tato projektivnost dvou soumístných svazků rovinových jest buď hyperbolická, přímkou p jdou dvě reálné roviny k ploše, nebo je eliptická, obě roviny jdoucí přímkou p k ploše jsou imaginární, nebo je konečně parabolická, přímkou p prochází jediná rovina vytvořené plochy.

V případě, kdy přímka p spojuje dva body rovin σ a σ', jež průsečnicím jedné roviny ξ jdoucí přímkou p s rovinami σ' resp. σ odpovídají, jest projektivnost ve svazcích rovin osy p degenerovaná (svazku rovin, jenž promítá z p svazek v σ o středu σp, koresponduje totiž singulární rovina ξ, protože svazku o středu σp odpovídá řada bodová na ose $\sigma'\xi$; stejně pro svazek paprskový v σ' o středu $\sigma' p$ a sdruženou řadu bodovou v σ na ose $\sigma\xi$); přímka p obsahuje jedinou rovinu ξ odvozené soustavy.

Jestliže však (speciálně) svazek přímek v rovině σ o středu $\sigma p = A$ a projektivní řada bodová v σ' s osou a', odpovídající v korelaci bodu A, jsou perspektivní, jest uvažovaná projektivnost obou soumístných svazků rovin s osou p identická, všechny roviny svazku p

leží na ploše vytvořené, přímka p je přímkou plochy.[1])

patří soustavě vytvořené, přímka p je přímkou plochy.

Z obou duálních útvarů odvozených stačí věnovati pozornost hlavně ploše $\varkappa$, vytvořené dvěma korelativními trsy (o středech S a S').[2])

b) Každá rovina α jdoucí jedním z obou středů, třebas S, protíná plochu $\varkappa$ v čáře 2. stupně; tato čára prochází bodem S a bodem, v němž rovina α je proťata přímkou a', v S' k ní sdruženou. Neboť v rovině α leží jednak z trsu S svazek paprskový o středu S, jednak svazek paprskový o středu $\alpha a'$, průsek svazku rovin s osou a' v trsu S'; oba tyto svazky přímek jsou projektivní (protože jest projektivní svazek prvý s uvedeným svazkem rovin) a vytvořují čáru 2. stupně, průsek plochy $\varkappa$ s rovinou α. Jestliže ovšem svazek přímek o středu S v α a svazek rovin s osou a' v S' jsou perspektivní (což nastane, jestliže jeden paprsek svazku S v α je incidentní s korespondující rovinou svazku a'), rozpadá se uvedená čára 2. stupně ve dvě přímky, v přímku společnou oběma svazkům paprskovým v α a v osu perspektivnosti obou těchto svazků. Máme tedy výsledek:

Rovina jdoucí jedním ze středů obou korelativních trsů, plochu 2. stupně vytvořujících, protíná tuto plochu v čáře 2. stupně, jež se může rozpadnouti ve dvě přímky.

Z bodu ležícího v jednom z obou korelativních polí, plochu 2. třídy vytvořujících, jde k této ploše kužel 2. třídy, jenž se může rozpadnouti ve dva svazky rovin.

Paprsek a jdoucí středem trsu S protíná plochu $\varkappa$ v druhém bodě, průsečíku svém s rovinou α' jemu v trsu S' odpovídající. Tento druhý průsečík splyne s prvním S a přímka a se stane tečnou plochy $\varkappa$ (majíc s ní dva splývající body společné), jestliže rovina α' prochází spojnicí $S'S$ středů obou korelativních trsů plochu vytvořujících. Svazku rovin s osou $S'S$ v S' odpovídá svazek přímek tečných k ploše $\varkappa$ v bodě S, jež ovšem leží v rovině trsu S (sdružené s přímkou $S'S$); tato rovina je *tečnou rovinou* plochy $\varkappa$ *s dotyčným bodem* S.[3]) Obdobně je tomu, počítáme-li přímku SS' do trsu S; a také v případě duálním. Platí tedy:

Společnému paprsku korelativních trsů S a S' (jako přímce prvého nebo druhého trsu) *odpovídá v dru-*

Společné přímce korelativních polí σ a σ' (jako paprsku prvého nebo druhého pole) *odpovídá v dru-*

[1]) Plochu 2. stupně jako výtvor dvou korelativních trsů definoval první *Seydewitz*, Konstruktion und Klassifikation der Flächen des zweiten Grades mittels projektivischer Gebilde (2. díl), Archiv Math. Phys. 9 (1847).

[2]) Synthetickou teorii ploch 2. stupně podává (vedle větších spisů o geometrii projektivní) zejména *H. Schröter*, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde, 1880.

[3]) Jestliže však svazek rovin s osou $S'S$ v trsu S' jest perspektivní ke svazku přímek se středem S v rovině τ trsu S, s přímkou $S'S$ sdružené, rozpadá se plocha 2. stupně ve dvě roviny (rovinu τ a obdobnou rovinu trsu S').

hém resp. prvém trsu tečná rovina plochy vytvořené v bodě S' resp. S.

hém resp. prvém poli dotyčný bod roviny σ' resp. σ na vytvořené ploše.

c) Středy dvou korelativních trsů, jež plochu 2. stupně vytvořují, nemají na ploše zvláštního postavení; dokážeme totiž, že *každý bod plochy 2. stupně lze zvoliti za střed jednoho ze dvou korelativních trsů, jež plochu vytvořují.* Rovněž v duálním případě *lze každou rovinu plochy 2. třídy zvoliti za rovinu jednoho ze dvou korelativních polí, plochu vytvořujících.*

K tomu cíli budiž plocha 2. stupně $\varkappa$ vytvořena jako prve dvěma korelativními trsy o středech S a S', budiž pak S'' libovolný třetí bod plochy $\varkappa$. Trsy o středech S a S'', libovolnou korelací sdružené, vytvořují opět plochu 2. stupně $\varkappa^*$, obsahující S i S''; jest dokázati, že korelaci mezi S a S'' lze tak zvoliti, aby plocha jimi vytvořená $\varkappa^*$ byla totožná s plochou $\varkappa$. Vskutku zvolíme-li korelaci mezi S a S'' tak, že $\varkappa^*$ má s $\varkappa$ společné dvě kuželosečky, jdoucí bodem S a nejdoucí bodem S'', jest plocha $\varkappa^*$ totožná s plochou $\varkappa$ (a korelativní trsy S a S'' vytvořují tedy tutéž plochu 2. stupně jako trsy S a S'). Abychom došli k vytčené korelaci mezi S a S'', protněme $\varkappa$ dvěma rovinami, jež položíme bodem S, ale mimo S'', v (pravých) kuželosečkách k_1 *a* k_2; společné sečně (nebo tečně) ST těchto kuželoseček, kde T je bod na $\varkappa$ různý od S (nebo s ním splývající), přiřadíme libovolnou rovinu ϱ'' trsu S'', jdoucí přímkou $S''T$, jež protíná k_1 resp. k_2 (mimo T) v bodě K_1 resp. K_2. Promítneme-li kuželosečku k_1 z bodu S svazkem přímek a z osy $S''K_1$ svazkem rovin, projektivním k onomu (jejich projektivnost je způsobena perspektivností obou ke k_1), rovněž kuželosečku k_2 z bodu S i z osy $S''K_2$ projektivními svazky přímek resp. rovin, jsou tím trsy S a S'' uvedeny v určitou korespondenci korelativní, protože dvěma svazkům přímek v S přiřaděny byly v S'' dva projektivní svazky rovin tak, že společnému prvku oněch ST odpovídá společný prvek těchto ϱ''.[4]) Plocha $\varkappa^*$, vytvořená trsy S a S'' tak sdruženými, obsahuje obě kuželosečky k_1 i k_2, vytvořené dvojicemi projektivních svazků (přímek a rovin) v trsech S a S''.

Že původní plocha $\varkappa$ a nově vytvořená plocha $\varkappa^*$ (jež mají společnými dvě kuželosečky k_1, k_2 a bod S'' mimo ně ležící) jsou identické, poznáme takto: Každá rovina položená body S' a S'' protíná obě plochy v téže kuželosečce, protože průsečné kuželosečky takové roviny s $\varkappa$ a $\varkappa^*$ mají společný bod S'' a společné čtyři body další, ležící po dvou na k_1 a k_2: leží tedy bod S' plochy $\varkappa$ na ploše $\varkappa^*$. Budiž pak h jedna taková společná kuželosečka obou ploch jdoucí body S' a S'', ne však bodem S, a bod P libovolný bod jedné z obou ploch; rovina SPS' protíná $\varkappa$ a $\varkappa^*$

[4]) Je patrno, že bod S'' (stejně jako bod S) nesmí ležeti ve vrcholu kuželové plochy 2. stupně, je-li plocha $\varkappa$ takovou plochou (protože by rovina ϱ'' protínala kuželosečky k_1 a k_2 ve dvou bodech K_1, K_2, ležících s bodem S'' v jedné přímce).

ve dvou kuželosečkách, jež mimo body S a S' mají ještě po jednom společném bodě na k_1, k_2 a h; obě kuželosečky tedy splývají v jednu. Leží proto libovolný bod P jedné z obou ploch i na ploše druhé.[5])

Poznali jsme tedy, že plochu druhého stupně lze vytvořiti dvěma korelativními trsy, jejichž středy jsou dva libovolné body plochy (je-li ovšem jejich korelace přiměřeným způsobem zvolena).[6])[7])

Co bylo prve řečeno o rovinách, jdoucích středem jednoho z obou trsů (S nebo S'), jež vytvořují plochu 2. stupně, platí na základě předešlého o rovinách, položených libovolným bodem (S'') této plochy; rovněž v případě duálním:

Každá rovina má s plochou 2. stupně, obsahuje-li aspoň jeden bod její, společnou čáru 2. stupně (průsečnou kuželosečku plochy), jež se může rozpadnouti ve dvě přímky (řady bodové). *V každém* (obecném) *bodě plochy 2. stupně existuje tečná rovina její, obsahující všechny tečné přímky plochy v tomto bodě.*

Každý trs má s plochou 2. třídy, obsahuje-li aspoň jednu rovinu její, společný kužel 2. třídy (kvadratický kužel ploše opsaný), jenž se může rozpadnouti ve dvě přímky (svazky rovin). *V každé rovině své* (obecné) *má plocha 2. třídy bod dotyčný, jímž procházejí všechny tečné přímky plochy v rovině té ležící.*

90. Polárné prvky vzhledem k ploše 2. stupně. *a*) Jako u kuželosečky a se zřetelem k ní lze u plochy 2. stupně zavésti prvky polárné

[5]) Z identičnosti ploch $\varkappa$ a $\varkappa^*$, jež mají společné dvě kuželosečky k_1 a k_2 s dvěma společnými body (S, T) a bod S'', plyne: Plocha 2. stupně jest (jednoznačně) určena dvěma kuželosečkami, jež ležíce v různých rovinách mají dva body společné, a bodem mimo jejich roviny položeným. A duálně. Odtud lze také souditi, že plocha 2. stupně jest určena devíti svými body.

[6]) Korelace mezi trsy S a S'' byla stanovena tím, že byla ve svazku rovin $S''T$ zvolena určitá rovina ϱ'' jako rovina v S'', korespondující paprsku ST v S; protože rovinu ϱ'' lze ve svazku $S''T$ zvoliti nekonečně mnohými způsoby a protože při zvolené rovině ϱ'' jest korelace trsů S a S'', danou plochu vytvořujících, už určena, vidíme, že při zvolených dvou bodech na dané ploše 2. stupně existuje ∞^1 korelací mezi trsy se středy v bodech těch, jež danou plochu vytvořují. (Proti tomu u kuželosečky existuje při zvolených středech jen jedna projektivnost svazků čáru danou vytvořujících.) A poněvadž mezi dvěma trsy s určitými středy jest možno ∞^8 korelací, existuje ∞^7 ploch 2. stupně, jdoucích dvěma danými body. Vzhledem k možným volbám středů obou vytvořujících trsů v prostoru (∞^6) a k možným volbám jejich na vytvořené ploše (∞^4), existuje ∞^9 ploch 2. stupně.

Uvážíme-li pak, že u dané plochy 2. stupně, jež má býti odvozena ze dvou korelativních trsů, lze každý ze dvou středů jejich zvoliti na ploše ∞^2 způsoby a že při zvolených středech existuje ∞^1 korelací tutéž plochu dávajících, poznáváme, že danou plochu 2. stupně lze dvojicí korelativních trsů vytvořiti na ∞^5 způsobů. Viz dále *F. Schur*, Über die Erzeugung der Flächen zweiten Grades durch korrelative Bündel, H. Weber-Festschrift 1912 a Math. Zeitschrift 22 (1925). Také *W. Vogt*, Systeme korrelativer Bündel, welche eine gegebene F^2 erzeugen, Archiv Math. Phys. (3) 13 (1908).

[7]) Vyloučiti jest však vrchol plochy kuželové, je-li takovou uvažovaná plocha 2. stupně.

vzhledem k ploše; předpokládejme, že plocha 2. stupně se nerozpadá (ve dvě roviny) ani není kuželovou (je tedy obecná).

Libovolným bodem P, jenž neleží na dané ploše 2. stupně, vedená přímka, která plochu protíná ve dvou bodech, obsahuje bod, harmonicky sdružený k bodu P vzhledem k průsečíkům přímky té s plochou; tyto harmonicky sdružené body na rozmanitých přímkách bodem P vedených leží v rovině π. Neboť položíme-li bodem P a dvěma z bodů těch rovinu, jest průsekem jejím s plochou 2. stupně kuželosečka, vzhledem k níž má bod P poláru p, jdoucí oběma body prve zvolenými; protože každý bod této přímky p patří geometrickému místu π, obsahuje π každou přímku, jejíž dva body obsahuje, a jest tedy rovinou. Rovina π sluje *polárnou rovinou* bodu P vzhledem k dané ploše 2. stupně a bod P jejím *pólem*.

Podle uvedeného a podle toho, co víme o poláře bodu vzhledem ke kuželosečce, *obsahuje polárná rovina π bodu P* vzhledem k dané ploše druhého stupně:

1. *body harmonicky sdružené k bodu P na přímkách bodem tím vedených* vzhledem k dvojicím průsečíků jejich s plochou *a poláry bodu P na rovinách bodem tím položených* vzhledem k průsečným kuželosečkám jejich s plochou;

2. *dotyčné body všech tečen i všech tečných rovin bodem P k ploše jdoucích*;

3. *průsečíky dvojic přímek a průsečnice dvojic rovin, spojujících po dvou resp. po třech průsečíky přímek bodem P vedených s plochou* (na př. protínají-li přímky a, b, c, bodem P vedené, plochu v bodech A_1, A_2, resp. B_1, B_2, resp. C_1, C_2, leží na π body (A_1B_1, A_2B_2), (A_1C_1, A_2C_2), (A_1B_2, A_2B_1), ... a přímky $(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$, $(A_1B_1C_2, A_2B_2C_1)$, ...);

4. *průsečnice dvojic tečných rovin plochy v průsečících přímky bodem P vedené s plochou.*

Leží-li bod P na dané ploše 2. stupně, protíná každá rovina jím položená plochu v kuželosečce, vzhledem k níž polárou bodu P je tečna její v bodě P; a tyto poláry vyplňují tečnou rovinu plochy v bodě P: *jest* tedy *polárnou rovinou bodu P na ploše ležícího tečná rovina plochy v bodě tom.* Jenom bod ležící na ploše leží ve své rovině polárné a jenom polárná rovina obsahující svůj pól je tečnou rovinou plochy.

Jestliže bod P neleží na ploše, leží však aspoň na jedné tečné rovině (na jedné tečně) plochy, protíná jeho polárná rovina π plochu, protože nemůže býti rovinou tečnou a obsahuje aspoň jeden bod plochy. Každý bod X průsečné kuželosečky té, spojen s bodem P, dává tečnu plochy v bodě X (protože bod harmonicky sdružený k P na PX splývá s bodem X), a jiných tečen z bodu P k ploše jdoucích není (protože dotyčné body všech leží na π); každá a jenom tečna PX určuje s tečnou průsečné kuželosečky v bodě X tečnou rovinu plochy dané v bodě X. Platí tedy:

Bodem ležícím mimo plochu 2. stupně tak, že jím jde aspoň jedna tečna k ploše, prochází ∞^1 *tečen a* ∞^1 *tečných rovin plochy té, jež jsou přímkami a tečnými rovinami kvadratické plochy kuželové; dotyčné body tečných přímek a rovin těchto tvoří kuželosečku, průsek plochy s polárnou rovinou bodu toho.*

Odtud také vyplývá, že přímkou, jež neleží na ploše 2. stupně, lze položiti nanejvýš dvě tečné roviny plochy. Neboť polárné roviny dvou bodů, v nichž dvě tečné roviny plochy uvedenou přímku protínají, mají průsečnici, která plochu protíná nanejvýš ve dvou bodech; to jsou dotyčné body tečných rovin, danou přímkou k ploše jdoucích.

O poloze dvou bodů a jejich rovin polárných vzhledem k ploše 2. stupně platí stejná vzájemnost jako pro body a jejich poláry vzhledem ke kuželosečce: *Jestliže ze dvou bodů druhý leží na polárné rovině prvého, prochází polárná rovina druhého bodu bodem prvním.* Neboť neleží-li spojnice obou bodů těch A, B na ploše, protíná rovina ABC, kde C je libovolný bod plochy, tuto v pravé kuželosečce, vzhledem k níž jsou průsečnice roviny ABC s polárnými rovinami bodů A a B polárami bodů těch; o nich pak platí vzpomenutý vztah, t. j. polára bodu B prochází bodem A, takže polárná rovina bodu B musí obsahovati bod A. Speciálně pak u spojnice AB ležící na ploše (zborcené) obsahují polárné a tedy tečné roviny obou bodů celou spojnici a věta je rovněž splněna.

Můžeme nyní ukázati, že stejně jako k libovolnému bodu přísluší vzhledem k dané ploše 2. stupně určitá rovina polárná, obráceně také k libovolné rovině přísluší určitý pól. Zvolíme-li totiž na nějaké rovině π tři body A, B, C, neležící v téže přímce, protínají se příslušné k nim roviny polárné α, β, γ v jednom bodě P, který podle uvedené vzájemnosti má za polárnou rovinu rovinu $ABC = \pi$ a jest tedy jejím pólem. Že rovina π nemá více pólů než uvedený jeden a že zejména roviny α, β, γ se nemohou protínati v přímce, jejíž všechny body by byly póly roviny π, nahlédneme nepřímo: kdyby rovina měla dva různé póly na ploše, musila by se plochy dotýkati v těchto dvou bodech, což není možno; kdyby měla rovina aspoň jeden ze dvou různých pólů svých mimo plochu, protínala by rovina póly těmi a bodem plochy obecně položená plochu v pravé kuželosečce, vzhledem k níž by řez roviny té s rovinou uvažovanou měl dva různé póly, což opět je nemožno. Všem bodům na rovině přísluší tedy polárné roviny, procházející jejím pólem.

Přiřadíme-li konečně dvěma různým bodům A, B jejich polárné roviny α, β vzhledem k dané ploše 2. stupně, poznáváme, že všem bodům na spojnici AB příslušejí polárné roviny jdoucí průsečnicí $\alpha\beta$, a obráceně všem bodům na přímce $\alpha\beta$ příslušejí roviny polárné jdoucí přímkou AB. Dvě takové přímky slují sdružené *poláry* (každá z obou sluje polárou druhé) vzhledem k ploše 2. stupně.[1])[2])[3])

[1]) Prvky polárné vzhledem k ploše 2. stupně vzal v úvahu po prvé *G. Monge* (r. 1799).

b) Plocha 2. stupně dovoluje, jak jsme seznali, každému bodu v prostoru P přiřaditi jedinou rovinu polárnou π a obráceně každé rovině jediný pól, jenž je v bodě P, je-li rovina v π; jest tedy mezi body a rovinami prostoru možno ustanoviti pomocí plochy 2. stupně korespondenci obapolně jednoznačnou a involuční; je obdobná známé polárnosti v rovině vzhledem ke kuželosečce její a sluje *polárnost vzhledem k ploše 2. stupně.*

V této korespondenci odpovídá dále každé přímce, ose řady bodové, její polára, osa svazku polárných rovin oněch bodů, a obráceně řadě bodů na druhé přímce odpovídá svazek rovin s osou v přímce prvé. Sdružené poláry jsou obecně mimoběžné; dvě přímky v polárnosti sdružené protínají se totiž jen tehdy, jsou-li tečnami plochy v témž bodě; přímka pak odpovídající sobě samé a jen taková přímka leží na ploše. Neboť protíná-li přímka a svou poláru a', prochází polárná rovina jejich průsečíku, počítaného k přímce a, přímkou a' a tedy i průsečíkem samým, takže je tečnou rovinou plochy v bodě tom; protože pak průsečík obou přímek lze čítati také k přímce a', jde jeho polárná rovina také přímkou a. Jsou-li přímky a, a' totožny, jest polárná rovina každého bodu jejich tečnou rovinou plochy v bodě tom, takže přímka taková leží na ploše; a obráceně.

Na každé rovině, jež není tečnou rovinou dané plochy 2. stupně, odpovídá libovolnému bodu přímka, v níž rovinu protíná polárná rovina bodu toho, a této přímce onen bod; bodům na přímce roviny odpovídají přímky svazku paprskového, ve kterém rovinu protíná svazek rovin, korespondující v polárnosti řadě bodové na oné přímce. V rovině vzniká tím známá korespondence, involuční korelace čili polárnost rovinná; jest uvažovanou polárností plochy 2. stupně na rovině indukována. Odtud plyne, že každá rovina, jež není tečnou rovinou plochy 2. stupně, má s ní společnou kuželosečku, inciděční čáru indukované polárnosti své; tato kuželosečka jest buď reálná (rovina je sečnou rovinou plochy) nebo imaginární (rovina leží mimo plochu).

---

[2]) Poláru sdruženou k dané přímce nalezneme buď jako průsečnici polárných rovin, příslušných ke dvěma bodům oné, (spec. tečných rovin plochy v průsečících oné s plochou) nebo jako spojnici pólů, příslušných k dvěma rovinám onou procházejícím, (spec. dotyčných bodů tečných rovin plochy onou položených); také pomocí průsečných kuželoseček ležících ve dvou rovinách nebo pomocí kvadratických kuželů z tečných rovin jdoucích dvěma body.

[3]) Jako metricky speciální lze z polárných vlastností plochy 2. stupně odvoditi její *vlastnosti průměrové*: průměrovou rovinou plochy 2. stupně sluje polárná rovina bodu nevlastního, průměrem polára přímky nevlastní; protože nevlastní body a přímky leží v rovině nevlastní, procházejí průměrové roviny a průměry plochy pólem této roviny, který sluje středem plochy, je-li v konečnu; průměrová rovina kolmá k soustavě rovnoběžných přímek jdoucích jejím pólem sluje hlavní rovinou (rovinou souměrnosti) plochy, průměr kolmý k soustavě rovnoběžných rovin procházejících jeho polárou sluje osou (souměrnosti) plochy.

Na každé přímce, jež není tečnou plochy 2. stupně ani na ní neleží, indukuje polárnost plochy té involuční projektivnost bodů, v níž sobě obapolně odpovídají bod a průsečík přímky s jeho rovinou polárnou.

Všimli jsme si už, že bodům řady na jedné ze dvou sdružených polár odpovídají roviny svazku s osou v druhé; tato korespondence je projektivní. Neboť jsou-li přímky ty různé, platí to o řadě bodové na jedné z nich a o svazku paprskovém, v němž svazek rovin polárných s osou v přímce druhé je proťat rovinou přímky prvé (v polárnosti indukované na rovině té); splývají-li sdružené poláry, je to známá vlastnost přímek na zborcené ploše.[4])[5])

c) Pomocí uvedené polárnosti plochy 2. stupně můžeme nyní dokázati, že soustava tečných rovin v bodech plochy 2. stupně tvoří plochu 2. třídy, a obráceně i duálně, že soustava dotyčných bodů v rovinách plochy 2. třídy tvoří plochu 2. stupně, čili že obecná *plocha 2. stupně se svými rovinami tečnými a* obecná *plocha 2. třídy s dotyčnými body svých rovin jsou útvary totožné.*

Budiž daná plocha 2. stupně vytvořena dvěma korelativními trsy se středy S a S'; tečné roviny plochy té v bodě S a S' buďtež σ a σ'. Libovolný bod P plochy 2. stupně jest průsečíkem přímky x trsu S a roviny ξ' trsu S', jež přímce té v dané korelaci odpovídá (nebo průsečíkem roviny η trsu S a korespondující přímky y' trsu S'). Přímce x, jdoucí bodem S (ležícím na ploše), odpovídá polárností dané plochy jako její pólára přímka x', ležící v rovině σ (tečné rovině plochy v bodě S, jeho rovině polárné); rovině ξ' bodu S' odpovídá polárností dané plochy jako pól bod X roviny σ' (z téhož důvodu). Rovina π, určená přímkou x' a bodem X, jest polárnou rovinou bodu P vzhledem k dané ploše,

---

[4]) Polárnost příslušnou k ploše 2. stupně, určené dvěma korelativními trsy, lze sestrojiti na základě věty: Jsou-li S a S' středy daných trsů a P libovolný bod v prostoru (neležící na ploše trsy těmi vytvořené), odpovídá-li pak přímce $SP = a$ v trsu S' rovina a' a přímce $S'P = b'$ v trsu S rovina β, jest rovina, položená průsečnicí rovin a', β a vzhledem k nim harmonicky sdružená k rovině $(a'\beta, P)$, polárnou rovinou bodu P vzhledem k ploše danými trsy stanovené. Viz *H. Schröter*, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung . . ., p. 496 a n.

[5]) Čtyřstěn sluje *autopolárným* vzhledem k dané ploše 2. stupně, jestliže každý vrchol jeho je pólem protější stěny. Takový čtyrstěn $ABCD$ lze sestrojiti buď tak, že jeden vrchol jeho A zvolíme libovolně, v polárné rovině bodu toho zvolíme kdekoli vrchol druhý B, na poláře přímky AB, průsečnici polárných rovin bodů A a B, pak zvolíme vrchol třetí C; vrchol čtvrtý D, pól roviny ABC, leží na uvedené poláře v průsečíku jejím s polárnou rovinou bodu C. Nebo sestrojíme takový čtyrstěn tak, že na libovolné rovině určíme autopolárný trojúhelník vzhledem k průsečné kuželosečce roviny té s plochou; k jeho třem vrcholům připojíme pak pól oné roviny jako vrchol čtvrtý. Nebo na libovolné přímce zvolíme kdekoli jeden vrchol, druhý vrchol je v bodě sdruženém k němu vzhledem k průsečíkům přímky té s plochou, na poláře oné přímky zvolíme libovolný bod za třetí vrchol, a vrchol čtvrtý leží v bodě k tomuto sdruženém. Ze všech těchto konstrukcí vyplývá, že při dané ploše 2. stupně existuje ∞^6 autopolárných čtyrstěnů.

protože spojuje prvky, odpovídající v této polárnosti prvkům x a ξ', bod ten určujícím; a protože bod P leží na uvažované ploše 2. stupně, jest jeho polárná rovina π tečnou rovinou plochy té v bodě P. Avšak korespondence mezi přímkami x' roviny σ a body X roviny σ' jest korelace, protože jsou korelacemi uvedené korespondence mezi přímkami x' roviny σ a přímkami x trsu S, mezi těmito a rovinami ξ' trsu S', mezi těmito a body X roviny σ'. Jsou proto tečné roviny π dané plochy 2. stupně v jejích bodech P rovinami, jež spojují sdružené prvky dvou korelativních polí v tečných rovinách σ a σ' plochy té, a vytvořují tedy plochu 2. třídy.

Z toho důvodu bylo také vhodné omezit se při vyšetřování výtvorů dvou korelativních stejnojmenných útvarů dvojmocných na dva korelativní trsy.

Plochu 2. stupně a spolu 2. třídy jmenujeme stručně také *plochou kvadratickou* (kvadrikou).

91. Druhy ploch kvadratických. *a*) Vezměme u plochy 2. stupně $\varkappa$, vytvořené dvěma korelativními trsy o středech S a S', v úvahu svazek rovin s osou SS' a sdružený s ním svazek paprskový: počítáme-li přímku $SS' = s$ do trsu S, odpovídá jí danou korelací v S' tečná rovina σ' plochy $\varkappa$ v bodě S'; počítáme-li $SS' = t'$ do trsu S', odpovídá jí korelací inversní v S tečná rovina τ plochy $\varkappa$ v bodě S. Svazku paprskovému o středu S v rovině τ, obsaženému v trsu S, odpovídá v S' projektivní svazek rovin s osou t' a tedy jeho řez v rovině τ; máme tak v rovině τ dva soumístné projektivní svazky paprskové. Obdobně obdržíme v rovině σ' dva soumístné projektivní svazky paprskové, svazek obsažený v trsu S' a projektivní s ním řez korespondujícího svazku rovin trsu S s osou s. Obě tyto projektivnosti soumístných svazků v τ a σ' jsou téhož druhu: neboť samodružným paprskem u v τ je paprsek trsu S, jímž prochází korespondující rovina trsu S'; této rovině, počítané do trsu S, a incidentnímu paprsku u musí v S' odpovídati paprsek v' a ona rovina opět incidentní, takže v' jest samodružným paprskem v σ'. Samodružný paprsek uv. soumístných projektivních svazků v τ nebo σ' jest vždy a výhradně přímkou plochy $\varkappa$.

Projektivnost uvedených dvou soumístných svazků paprskových v rovině τ (a stejně i v rovině σ') jest buď hyperbolická nebo eliptická nebo parabolická.[1])

V prvním případě obsahuje rovina τ dvě různé (reálné) přímky plochy $\varkappa$, rovněž tak rovina σ': body S a S' slují *hyperbolické body* plochy 2. stupně; označíme-li samodružné přímky v τ písmeny u, v, samodružné přímky v σ' pak u', v', protínají se u a v', rovněž v a u', protože jedna i druhá dvojice leží v rovině, odpovídající přímkám těm v korelaci dané a inversní.

[1]) Vylučujeme případ, kdy je projektivnost tato identická: tehdy se plocha 2. stupně rozpadá ve dvě roviny (τ a σ'). A také případ, kdy rovina τ (a tedy i σ') prochází spojnicí SS'.

V druhém případě neobsahují tečné roviny τ a σ' (reálných) přímek plochy $\varkappa$ (obsahují po dvou konjugovaně imaginárních přímkách plochy $\varkappa$), mají s plochou společné pouze dotyčné body S a S': body ty slují *eliptické body* plochy.

V třetím případě obsahuje rovina τ i rovina σ' po jedné přímce (dvou splývajících) plochy $\varkappa$, a tyto přímky se protínají: body S a S' slují *parabolické body* plochy.

Je patrno, že *plocha 2. stupně má všechny body téhož druhu*: má-li jeden bod hyperbolický nebo eliptický nebo parabolický, má všechny body takové. Budiž totiž bod S plochy $\varkappa$ hyperbolický nebo eliptický nebo parabolický, a zvolme za S' libovolný bod plochy; protože v korelaci mezi trsy S a S', jež plochu $\varkappa$ vytvořují, je projektivnost dvou soumístných svazků paprskových, prve uvažovaných, v tečné rovině plochy s dotyčným bodem S hyperbolická resp. eliptická resp. parabolická, jest téhož druhu také projektivnost soumístných svazků tečné roviny v bodě S' (jsou-li totiž přímka v S a sdružená k ní rovina v S' incidentní, jsou těmto prvkům trsu S odpovídající prvky trsu S', t. j. uvedená rovina v S a sdružená k ní přímka v S', rovněž incidentní).

Podle toho rozeznáváme tři druhy plochy 2. stupně, projektivně různé: *plochu 2. stupně s body eliptickými* (*nepřímkovou*), *plochu 2. stupně s body hyperbolickými a plochu 2. stupně s body parabolickými*.

b) Kvadratické plochy s body hyperbolickými a s body parabolickými jsou *přímkové*; dokážeme, že plocha 2. stupně s body parabolickými jest *kuželová plocha* kvadratická, kdežto plocha 2. stupně s body hyperbolickými jest *zborcená plocha* kvadratická.

Mějme opět na zřeteli u plochy 2. stupně $\varkappa$, vytvořené dvěma korelativními trsy S a S', její tečnou rovinu τ v S i tečnou rovinu σ' v S'. Jsou-li body S a S' parabolickými body plochy $\varkappa$, jest projektivnost mezi svazkem paprsků o středu S v rovině τ a soumístným svazkem, v němž korespondující svazek rovin s osou $S'S$ rovinu τ protíná, parabolická, a samodružný její paprsek u je jedinou společnou přímkou roviny τ s plochou $\varkappa$; obdobně v rovině σ' jest jediná přímka v' společnou přímkou této roviny s plochou $\varkappa$; obě přímky u a v' se protínají v bodě O. Rovina τ dotýká se plochy $\varkappa$ v každém bodě své přímky u (obdobně rovina σ' v bodech přímky v'); neboť každá přímka roviny τ má s $\varkappa$ jediný bod společný, svůj průsečík s přímkou u, v němž splývají dva její průsečíky s plochou. Každá rovina ξ jdoucí přímkou u protíná plochu $\varkappa$ v přímce, jež prochází bodem O; neboť rovina ξ, jdouc bodem O, protíná rovinu σ' v přímce jdoucí bodem O, plochu $\varkappa$ pak v přímce (druhé části průsečné zvrhlé kuželosečky roviny ξ s plochou), jež se s přímkou roviny σ' právě uvedenou nemůže jinde protínati než v O, ježto přímka ona má podle předcházejícího jediný bod (na v') s plochou společný. Protože tedy všechny roviny jdoucí přímkou u protínají plochu $\varkappa$ v přímkách, jež procházejí bodem O, promítají tyto přímky jednotlivé body kuželosečky na $\varkappa$, v níž ji jiná rovina bodem S položená

protíná: plocha $\varkappa$ jest *kuželová plocha 2. stupně*. Její body jsou, jak bylo uvedeno, parabolické, vyjma vrchol O, který sluje singulárním, *dvojným bodem* plochy, ježto každá přímka, jím obecně položená, protíná plochu jenom v něm (a jest jej tedy pokládati za dva splývající průsečíky přímky s plochou).

Jsou-li středy S a S' vytvořujících trsů korelativních na ploše $\varkappa$ body hyperbolickými a má-li tečná rovina plochy τ v S s touto společné přímky u a v, tečná rovina σ' v S' pak přímky u' a v', tvoří čtyři tyto přímky prostorový čtyrstran, jehož strany u a v', v a u' se protínají, kdežto strany u a u', v a v' jsou mimoběžné. Zvolíme-li na ploše $\varkappa$ mimo uvedený čtyrstran bod P a položíme-li jím přímku protínající u a u' v bodě L resp. L', leží tato přímka na ploše $\varkappa$, majíc s ní tři body společné. Na mimoběžných přímkách u a u' jest třemi dvojicemi bodů S a $u'v$, uv' a S', L a L' stanovena projektivnost bodových řad; spojnice sdružených bodů těchto dvou projektivních řad na u a u' vytvořují *zborcenou plochu 2. stupně* $\varkappa^*$, jež je totožná s plochou $\varkappa$. Neboť každý bod plochy $\varkappa^*$ leží na $\varkappa$: plocha $\varkappa^*$ má totiž s plochou $\varkappa$ společné tři přímky v, v' a LL'; každý bod plochy $\varkappa^*$ leží na některé přímce protínající tyto tři mimoběžky, taková přímka leží však vždy na $\varkappa$, obsahujíc tři její body. Obráceně každý bod plochy $\varkappa$ leží na $\varkappa^*$, protože obě pravé kuželosečky, v nichž rovina, obecným bodem plochy $\varkappa$ a obecným bodem plochy $\varkappa^*$ položená, tyto protíná, jsou totožny (podle předešlého má totiž kuželosečka na $\varkappa^*$ býti částí kuželosečky na $\varkappa$, vyčerpává ji však, protože jsou pravé).[2])[3])[4])

[2]) Zdali plocha 2. stupně, vytvořená dvěma korelativními trsy s různými středy S a S', obsahuje (reálné) přímky či ne, poznáme podle hořejšího pomocí tečné roviny třebas v S a jí korespondující přímky $S'S$. Přímkám svazku v této tečné rovině o středu S, tečným přímkám plochy v S, odpovídají (v korelaci mezi trsy S a S', plochu vytvořujícími) jednotlivé roviny svazku s osou $S'S$; leží-li dvě nebo jedna z oněch přímek tečných v korespondující rovině tohoto svazku, jsou to přímky na ploše 2. stupně (zborcené resp. kuželové); neleží-li však žádná z tečen svazku S v odpovídající rovině svazku $S'S$, jest plocha nepřímková. Ve zvláštním případě, kdy tři a proto všechny uvedené přímky v S jsou incidentní s rovinami jim odpovídajícími, rozpadá se plocha 2. stupně ve dvě roviny.

[3]) Obsahuje-li plocha 2. stupně jednu přímku, obsahuje jich neomezené množství; neboť rovina ϱ_k, předpokládanou přímkou p jakkoli položená, protíná plochu v kuželosečce, jež se rozpadá v uvedenou přímku p a druhou přímku q_k. Přímky q_k jsou všechny buď mimoběžné (přímková plocha je zborcená plocha 2. stupně) nebo se protínají v témž bodě na p (plocha přímková je kuželová plocha 2. stupně). Jestliže totiž z přímek q_k dvě (q_1, q_2) se protínají v bodě Q, leží tento průsečík jejich na p (protože roviny ϱ_1 a ϱ_2 mají společnou přímku p). Jsou-li pak A a B dva body, ležící na ploše dané mimo p, q_1, q_2, a kuželosečky α a β dvě kuželosečky, položené na ploše 2. stupně body A a B, jsou dvě kuželové plochy, jedna promítající α z bodu Q, druhá promítající β z téhož bodu Q, totožny, protože mají pět přímek společných (QA, QB, p, q_1, q_2); a každá přímka kuželové plochy této leží na dané ploše 2. stupně, majíc s ní společné tři body (Q a dva na α i β); jest tudíž uvažovaná plocha 2. stupně kuželovou. Jestliže však

c) Nepřímková plocha 2. stupně a zborcená plocha 2. stupně jsou dva obecné typy ploch kvadratických.[5])[6]) Proti tomu plocha kuželová (s body parabolickými) tvoří typ zvláštní; protože obsahuje singulární bod dvojný ve svém vrcholu, nazývá se speciální nebo také zvrhlou plochou 2. stupně.

žádné dvě z přímek q_k se neprotínají, jest plocha zborcená, jsouc vytvořena také přímkou, protínající kteroukoli trojici mimoběžek q_k (neboť přímka protínající mimoběžky q_1, q_2 a q_3 leží, majíc tři své body na ploše 2. stupně, celá na ploše této).

[4]) Kdežto vůči kvadratické ploše s body hyperbolickými jest možno rozeznávati, jak víme, jen dvojí druh rovin, roviny plochu protínající (v reálné pravé kuželosečce) a roviny tečné (jež mají s plochou společné dvě reálné přímky), existují u kvadratické plochy s body eliptickými roviny trojího druhu: roviny plochu protínající (v reálné pravé kuželosečce), roviny tečné (jež mají s plochou společný bod dotyčný) a roviny ležící mimo plochu (jež nemají s plochou reálného bodu společného). Existence rovin prvního a druhého druhu byla prokázána; existenci rovin neobsahujících žádného bodu plochy zjistíme takto: V rovině, jež plochu 2. stupně s body eliptickými protíná, jest každý bod P, ležící uvnitř průsečné kuželosečky (z něhož totiž nelze ke kuželosečce té vésti reálných tečen) bodem, z něhož nelze vésti (reálné) tečny a roviny tečné k ploše; neboť kdyby bylo možno bodem P vésti tečnou rovinu plochy, která by se jí dotýkala v bodě D a kuželosečku uvedenou protínala v bodě A, ležela by spojnice DA na ploše (dotýkajíc se plochy v D a majíc s ní další bod A společný), což není možno, protože plocha obsahuje jen body eliptické. Polárná rovina takového bodu P vzhledem k uvažované ploše nemá s plochou žádného bodu společného; kdyby totiž měla takový bod, byl by dotyčným bodem tečny, jdoucí k ploše z bodu P, proti dokázané povaze bodu P.

Z předcházejícího jest viděti, že vůči kvadratické ploše s body eliptickými můžeme lišiti *body* (mimo plochu ležící) *vnější* a *vnitřní*, nazývajíce vnějším nebo vnitřním bod, z něhož lze resp. nelze vésti k ploše reálnou přímku (rovinu) tečnou. *Kvadratická plocha s body eliptickými rozděluje prostor ve dva obory, jeden složený z bodů vnějších, druhý z bodů vnitřních.* Proti tomu u kvadratické plochy s body hyperbolickými jsou všechny body neležící na ploše vnějšími. *Kvadratická plocha s body hyperbolickými rozděluje prostor rovněž ve dva obory, jež však oba jsou složeny z bodů vnějších*; dva body příslušejí témuž oboru nebo oborům různým podle toho, jestliže rovina jimi položená plochu protíná v kuželosečce, vůči níž jsou body ty téhož druhu (oba vnější nebo oba vnitřní) resp. různého druhu (jeden vnější a druhý vnitřní). U kvadratické plochy s body ať eliptickými ať hyperbolickými nelze přejíti (přímou cestou) z jednoho oboru do druhého, aniž bychom plochu protali (v bodě reálném).

[5]) Z metricky speciálních případů obou obecných typů plochy kvadratické byly už uvedeny metrické typy plochy zborcené: zborcený hyperboloid (jednodílný) a zborcený (hyperbolický) paraboloid. Metrické typy kvadratické plochy nepřímkové jsou tři podle toho, jakou polohu má plocha k rovině nevlastní: jestliže nevlastní rovina nepřímkovou plochu kvadratickou neprotíná nebo protíná nebo se jí dotýká, sluje plocha ta *elipsoid* resp. *eliptický hyperboloid* (dvojdílný) resp. *eliptický paraboloid*. Elipsoid obsahuje jenom elipsy, eliptický paraboloid elipsy a paraboly, eliptický hyperboloid obsahuje elipsy, hyperboly i paraboly.

[6]) O vytvoření plochy 2. stupně dvěma trsy, jež promítají dvě soumístná pole korelativní, uvažuje *B. Procházka*, Poznámka ku projektivnému vytvoření plochy 2. stupně, Věstník Spol. nauk 1911.

Proti kuželové ploše 2. stupně, jednoduše zvrhlé, tvoří dvojice různých rovin (bodových polí) dvojnásobně zvrhlou plochu 2. stupně, mající v průsečnici své celou (přímou) řadu ∞^1 bodů dvojných; každá přímka, jdoucí kterýmkoli bodem na průsečnici obou rovin, má totiž s plochou jen tento bod jako dva splývající průsečíky společný (nebo leží na ploše celá, patří-li do jedné z obou rovin).[7]) Dvě splývající roviny tvoří konečně trojnásobně zvrhlou plochu 2. stupně, jejíž všechny body, ∞^2 bodů roviny, jsou dvojné.

Obecné dva typy ploch kvadratických (nepřímková a zborcená) jsou jako útvary bodové i rovinové soběduální (plocha zborcená také jako útvar přímkový). Avšak ke kuželové ploše 2. stupně jest útvarem v prostoru duálním čára 2. třídy; jest (jako soustava ∞^2 tečných rovin) speciální nebo jednoduše zvrhlou plochou 2. třídy, ježto rovina její je singulární, dvojnou rovinou plochy.

Duálním útvarem ke dvojici různých rovin jest dvojice různých bodů (dva rovinové trsy); jest to plocha 2. třídy dvojnásobně zvrhlá, obsahujíc ve spojnici obou bodů osu svazku ∞^1 rovin dvojných.[8]) Konečně dva splývající body tvoří ∞^2 rovinami svého trsu plochu 2. třídy trojnásobně zvrhlou.

92. Soustavy ploch kvadratických. *a*) *Dvě různé plochy 2. stupně mají společné* (všechny a jenom) *body prostorové čáry 4. stupně.* Libovolná rovina protíná totiž obě plochy kvadratické $\varkappa_1$ a $\varkappa_2$ ve dvou kuželosečkách; tyto kuželosečky mají společné (nanejvýš) čtyři body, jež při proměnné rovině průsečné vytvořují jednomocnou spojitou soustavu bodů, mající tedy na libovolné rovině (nejvýše) čtyři své body.

Všechny plochy 2. stupně, jež mají společnou prostorovou čáru 4. stupně, průsečnou čáru dvou ploch kvadratických $\varkappa_1$ a $\varkappa_2$, tvoří (lineární jednomocný) *svazek ploch 2. stupně*; společná jejich čára 4. stupně sluje *základní čarou* čili *basí* svazku toho.[1])

---

[7]) Tento případ při vytvoření plochy 2. stupně dvěma korelativními trsy S a S' nastane, jak už bylo dotčeno, tehdy a jen tehdy, jestliže rovinám SS' počítaným do S (nebo S') odpovídají v S' (resp. v S) přímky incidentní; plocha 2. stupně se tu rozpadá ve dvě roviny, z nichž jedna jde bodem S, druhá bodem S', obsahující paprsky, jež odpovídají rovinám svazku SS' v S' resp. v S.

[8]) Tento případ při vytvoření plochy 2. třídy dvěma korelativními poli σ a σ' nastane tehdy a jen tehdy, jestliže bodům na $\sigma\sigma'$, počítaným do σ (nebo σ') odpovídají v σ' (resp. v σ) přímky incidentní; plocha 2. třídy se tu rozpadá ve dva body, jeden v σ a jeden v σ', středy svazků paprskových, jejichž paprsky odpovídají bodům řady $\sigma\sigma'$ v σ' resp. v σ.

[1]) Prostorová čára 4. stupně, jež je základní čarou svazku ploch kvadratických, jest buď pravá nebo zvrhlá, t. j. rozpadá se v (pravou) prostorovou čáru 3. stupně a přímku (její bisekantu, spec. tečnu) nebo ve dvě (pravé) kuželosečky (ve dvou bodech se protínající, spec. se dotýkající nebo splývající) nebo v (pravou) kuželosečku a dvě přímky (ji a sebe protínající) nebo ve čtyři přímky (tvořící prostorový čtyrúhelník, spec. z části splývající); podle toho lze rozlišovati rozmanité druhy svazku ploch 2. stupně. Významné jsou spec. případy, kdy základní čára svazku je složena ze dvou

Každým bodem prostoru, ležícím mimo pevnou čáru 4. stupně k, *prochází* totiž *jedna a jediná plocha svazku*. Neboť vzhledem k tomu, že každá rovina jdoucí zvoleným bodem P protíná dané dvě plochy kvadratické $\varkappa_1$ a $\varkappa_2$ ve dvou kuželosečkách se čtyřmi body společnými, leží v rovině té jedna a jediná kuželosečka, určená těmito čtyřmi body a bodem P; všechny tyto kuželosečky, ležící v rovinách trsu o středu P, vytvořují jednu a tutéž plochu 2. stupně, obsahující průsečnou čáru 4. stupně daných dvou ploch. Všimněme si přímky p jdoucí bodem P; ta protíná plochy $\varkappa_1$ a $\varkappa_2$ ve dvou dvojinách bodů, určujících involuci na p, v níž bodu P přísluší určitý bod P'; tento bod P' je proto společný všem kuželosečkám, ležícím v rovinách svazku s osou p a určeným tam čtyřmi průsečíky každé roviny té s čarou k a bodem P. Body P', stanovené tak na všech přímkách určité roviny ϱ jdoucí bodem P, leží na kuželosečce, určené v rovině ϱ čtyřmi průsečíky jejími s čarou k a bodem P. Plocha tedy, vytvořená body P', sdruženými k bodu P na každé přímce trsu o středu P v involuci, stanovené tam dvojicemi průsečíků ploch $\varkappa_1$ a $\varkappa_2$, jest totožná s plochou, vytvořenou kuželosečkami, určenými na každé rovině trsu o středu P průsečíky jejími s čarou k a bodem P. Libovolná přímka v prostoru r protíná plochu tak vzniklou ve dvou bodech, protože rovina rP plochu tu protíná v kuželosečce (jdoucí bodem P), jež má s přímkou r společné dva body. Podle toho lze též sestrojiti plochu 2. stupně, obsaženou ve svazku a jdoucí daným bodem.

Z uvedeného také vyplývá: *Svazek ploch kvadratických protíná každou rovinu ve svazku kuželoseček, každou přímku v involuci bodové.*

Involuční projektivnost, v níž průsečíky kvadratických ploch svazku na přímce obecně položené jsou sdruženy, má dva (reálné nebo sdruženě imaginární) body samodružné; svazek kuželoseček, v němž plochy svazku protínají rovinu, obsahuje obecně tři kuželosečky, rozpadající se ve dvojice přímek (reálných nebo sdruženě imaginárních). A protože přímka, mající s kvadratickou plochou dva splývající body společné, jest tečnou její a rovina, mající s plochou kvadratickou společnou kuželosečku zvrhlou, jest tečnou rovinou její, platí: *Svazek ploch kvadratických obsahuje dvě plochy dotýkající se dané přímky a tři plochy dotýkající se dané roviny.*[2])[3])

různých kuželoseček nebo z kuželosečky dvojnásobné nebo z přímek prostorového čtyrstranu. V dalším béřeme v úvahu zpravidla pravou čáru 4. stupně.

[2]) Duální věty platí o *řadě ploch 2. třídy*, soustavě duální ke svazku ploch 2. stupně, t. j. o (lineární jednomocné) soustavě ploch kvadratických, jež mají společnou jednomocnou soustavu rovin (tečných), společných dvěma různým plochám 2. třídy.

[3]) O soustavách ploch kvadratických pojednávají syntheticky na př. *H. Schröter*, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung (1880); *R. Sturm*, Untersuchungen über das Flächennetz zweiter Ordnung, Journal r. a. Math. 70 (1869); *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage III; také *V. Jarolímek*, Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru II a III.

b) Hledejme, co vytvoří polárné roviny, příslušné k bodu nebo k soustavě bodů vzhledem k plochám svazku ploch 2. stupně.

Polárné roviny, sdružené k danému bodu vzhledem k dvěma plochám $\varkappa_1$ a $\varkappa_2$, určujícím svazek kvadrik, protínají se v přímce; průsečík této přímky s libovolnou rovinou je bodem, v němž se protínají poláry bodu daného vzhledem ke všem kuželosečkám svazku, průseku roviny té s uvažovaným svazkem ploch kvadratických. Proto platí: *Polárné roviny, sdružené k bodu vzhledem ke všem plochám svazku ploch kvadratických, tvoří svazek rovin*; osu tohoto svazku pokládáme za sdruženou k danému bodu vzhledem ke svazku kvadrik.

K bodům přímky jsou vzhledem k dvěma plochám svazku $\varkappa_1$ a $\varkappa_2$ sdruženy dva svazky rovin polárných, projektivní k řadě bodové na dané přímce a proto navzájem projektivní, jejichž osami jsou poláry, sdružené k přímce té vzhledem k plochám $\varkappa_1$ a $\varkappa_2$. Dva tyto svazky rovinové vytvořují průseky sdružených rovin svých zborcenou řadu kvadratickou, jejíž přímky jsou sdruženy k jednotlivým bodům přímky dané vzhledem ke svazku kvadrik, plochami $\varkappa_1$ a $\varkappa_2$ určenému; přímky kvadratické řady zborcené, doplňkové k řadě právě uvedené, jsou polárami dané přímky vzhledem k plochám uvažovaného svazku kvadrik. *Poláry, sdružené k přímce vzhledem ke svazku ploch kvadratických, tvoří kvadratickou řadu zborcenou*; druhou řadu přímek zborcené plochy kvadratické tvoří osy svazků rovin polárných, sdružené k bodům přímky dané. Vzhledem k tomu, že přímky prvé řady se promítají ze dvou libovolných přímek řady druhé svazky projektivními, jsou svazky rovin polárných, příslušné ke dvěma bodům vzhledem ke svazku kvadrik, navzájem projektivní, při čemž sobě odpovídají dvě roviny polárné, sdružené k bodům těm vzhledem k téže ploše svazku.[4])

Ke třem bodům, neležícím v jedné přímce, příslušejí vzhledem ke svazku kvadrik tři svazky polárných rovin obecně položené; učiníme-li je projektivními způsobem právě uvedeným, vytvořují průsečíky sdružených rovin svých prostorovou čáru 3. stupně. Body této čáry kubické jsou póly, příslušnými k rovině oněch tří bodů vzhledem k plochám svazku kvadrik. K jednotlivým bodům roviny té jsou vzhledem ke svazku kvadrik sdruženy přímky (osy svazků rovin polárných), jež jsou bisekantami uvedené čáry kubické. *Póly, sdružené k rovině vzhledem ke svazku ploch kvadratických, tvoří prostorovou čáru kubickou*; jejími bisekantami jsou přímky, sdružené k bodům dané roviny.

Polárné roviny čtyř bodů prostoru, neležících v téže rovině, vzhledem k plochám svazku kvadrik tvoří čtyři projektivní svazky rovin.

---

[4]) Můžeme tedy zavésti projektivnost svazku ploch kvadratických se svazkem rovin polárných, příslušných ke zvolenému bodu vzhledem ke svazku kvadrik (spec. se svazkem tečných rovin těchto ploch v bodě základní čáry svazku) a s jiným útvarem jednomocným. Odtud pak plyne mezi jiným, že svazek kvadratických ploch je určen kterýmikoli dvěma (různými) plochami ve svazku obsaženými.

U čtyř projektivních svazků rovinových existují (podle čl. 47) obecně čtyři body, z nichž každým procházejí čtyři sdružené roviny svazků těch; tyto body jsou vrcholy kuželových ploch, obsažených v uvažovaném svazku ploch kvadratických. Neboť jdou-li polárné roviny, příslušné ke čtyřem bodům neležícím v rovině vzhledem ke kvadratické ploše $\varkappa$, týmž bodem A, procházejí bodem tím polárné roviny všech bodů vzhledem ke $\varkappa$; libovolná rovina má totiž svůj pól vzhledem ke $\varkappa$ v bodě A, protože poláry jejích průsečnic s rovinami, určenými vždy třemi ze čtyř bodů uvedených, vzhledem ke $\varkappa$ jdou bodem A. A kvadratická plocha $\varkappa$, vzhledem k níž polárné roviny všech bodů procházejí týmž bodem A, jest nutně kužel s vrcholem A. Platí tedy: *Ve svazku ploch 2. stupně existují obecně čtyři plochy kuželové.*[5])

Na přímce spojující vrcholy dvou kuželů, obsažených ve svazku ploch kvadratických, vytínají plochy svazku involuci dvojic bodových, jejímiž samodružnými body jsou ony vrcholy; odtud poznáváme: *Všechny plochy svazku ploch kvadratických mají společný čtyrstěn autopolárný, jehož vrcholy jsou vrcholy kuželů ve svazku obsažených.*

c) *Prostorová čára 4. stupně* (čili bikvadratická), jež je společnou čarou dvou ploch kvadratických a tedy ∞^1 ploch svazku, sluje určitěji *prvního druhu* na rozdíl od druhé čáry tohoto stupně (kterou prochází jediná plocha kvadratická).[6])

Přímka má s bikvadratickou čarou 1. druhu nejvýše dva body společné (neboť kdyby ji protínala ve třech bodech, ležela by na všech kvadratických plochách svazku, takže by byla součástkou jejich společné čáry) a jest v tomto případě její *bisekantou*. Plocha 2. stupně, určená čarou bikvadratickou a bodem její bisekanty, obsahuje tuto přímku (protože obsahuje tři její body) a jest tedy plochou přímkovou (zborcenou, spec. kuželovou). Přímky všech zborcených (a kuželových) ploch svazku s basí v dané čáře 4. stupně jsou bisekantami čáry té; podle toho, má-li involuce bodů na přímce takové plochy vzhledem k ostatním plochám svazku (v jejich polárnosti) sdružených dva samodružné body reálné různé nebo splývající nebo sdruženě imaginární, jest tato přímka skutečnou bisekantou čáry bikvadratické resp. její tečnou resp. bisekantou ideální.

Z libovolného bodu v prostoru lze k dané čáře 4. stupně 1. druhu vésti dvě bisekanty; neboť na kvadratické ploše svazku, určené čarou tou a zvoleným bodem, jdou tímto bodem dvě přímky její (reálné nebo sdruženě imaginární). A protože v libovolné rovině leží (nejvýše) šest

[5]) Můžeme také říci, že prostorovou čarou 4. stupně, basí svazku kvadrik, lze obecně položiti čtyři kužele kvadratické.

[6]) O prostorové čáře 4. stupně 1. druhu jedná syntheticky zejména *H. Schröter*, Grundzüge einer rein-geometrischen Theorie der Raumkurve vierter Ordnung erster Species (1890). *A. Milinowski*, Zur Theorie der Raumkurven vierter Ordnung erster Art, Journal r. a. Math. 97 (1884), odvozuje z vlastností této křivky vlastnosti rovinné křivky 3. stupně obecné a křivky 4. stupně s dvěma body dvojnými.

bisekant uvažované čáry (jež po dvou spojují čtyři její průsečíky s rovinou), tvoří soustava všech bisekant prostorové čáry bikvadratické 1. druhu přímkovou *kongruenci 2. stupně 6. třídy.*

Bikvadratickou čarou 1. druhu a její bisekantou jest určena plocha 2. stupně (určená ve svazku ploch kvadratických s basí v dané čáře 4. stupně touto čarou a bodem její bisekanty). Kvadratická plocha tato obsahuje ∞^1 bisekant dané čáry bikvadratické, jež danou bisekantu její (mimo body na čáře) protínají; neboť taková bisekanta, obsahujíc tři body plochy 2. stupně (dva na uvedené čáře bikvadratické a třetí na uvedené bisekantě), leží na ní celá.[7])

d) Čára 4. stupně 1. druhu má s plochou 2. stupně, na níž neleží, (nanejvýš) *osm* (reálných) *bodů společných.* Neboť společné body čáry bikvadratické k a plochy kvadratické $\varkappa$ jsou společnými body dvou kvadratických ploch čarou k procházejících s plochou $\varkappa$, tedy společnými body dvou bikvadratických čar k_1 a k_2 na ploše $\varkappa$ (průseků oněch ploch s plochou touto). A dvě čáry 4. stupně na ploše 2. stupně ležící mohou míti osm a jenom osm bodů společných. Zvolíme-li totiž na ploše kvadratické $\varkappa$ šest bodů A_k ($k = 1, 2, \ldots, 6$) v obecné poloze, lze jimi vésti prostorovou čáru 3. stupně c, neležící na ploše $\varkappa$; vedeme-li pak k této čáře c bisekantu b, protínající plochu $\varkappa$ ve dvou bodech A_7 a A_8 na c neležících, protínají dvě kvadratické plochy čarou c a přímkou b položené plochu $\varkappa$ ve dvou čarách bikvadratických k_1 a k_2, jež mají osm bodů A_1 až A_8 společných. Kdyby však čáry k_1 a k_2 měly společný ještě bod devátý A_9, ležel by tento na $\varkappa$ a na čáře c; dvě kvadratické plochy, z nichž každá je určena jednou z čar k_1 a k_2 i jejich bisekantou A_6A_7, protínaly by se mimo tuto přímku v kubické čáře c', jdoucí body A_1 až A_5 a body A_8, A_9; dvě kubické čáry c a c', různé proto, že bod A_8 ležící na c' neleží na c, měly by tedy šest bodů (A_1 až A_5, A_9) společných, což není možno. Spolu je

[7]) *Tečna* t prostorové čáry 4. stupně 1. druhu k v bodě jejím P jest její bisekanta, mající tam s čarou k dva splývající body společné; *oskulační rovina* σ čáry k v bodě P, t. j. rovina mající tam s čarou k tři splývající body společné, jest rovina jdoucí tečnou t a druhou bisekantou s čáry k, jež na zborcené ploše kvadratické, určené čarou k a tečnou t, bodem P prochází. Tečnu i oskulační rovinu v bodě P obdržíme pomocí dvou kvadratických ploch zborcených, položených čarou k. Dejme tomu, že jedna z takových ploch obsahuje ve své tečné rovině s dotyčným bodem P (obsahující t) přímky $p = PQ$ a $q = PR$; druhé přímky plochy té, jdoucí (vedle p) bodem Q a (vedle q) bodem R, buďtež $q' = QQ'$ resp. $p' = RR'$, při čemž Q' a R' leží na k. Protože přímky p' a q' (patříce do různých řad na ploše) se protínají, protínají se také přímky QR a $Q'R'$. Zborcená plocha 2. stupně, určená čarou k a její tečnou t, obsahuje bisekantu QR (protínající t) a bisekantu $Q'R'$ (mimoběžnou k t); druhá přímka této plochy, jdoucí bodem P, protíná tedy $Q'R'$ (v bodě P'). Přímka tato $s = PP'$ určuje spolu s tečnou t rovinu mající v bodě P s čarou k tři společné body splývající. Stačí tedy vésti u jedné zborcené plochy kvadratické, čarou k položené, rovinu PQR i rovinu $PQ'R'$, obdobně u druhé takové plochy rovinu prvou i druhou; roviny na prvních místech uvedené se protínají v přímce t, roviny druhé v přímce s, jež spolu s t určuje σ.

patrno, že prostorová čára 3. stupně má s plochou 2. stupně (rovněž tak s prostorovou čarou 4. stupně 1. druhu) (nejvýše) šest společných bodů. Hořejší větu, zde dokázanou, lze vysloviti také ve tvaru: *Tři plochy 2. stupně*, jež neprocházejí touže bikvadratickou čarou 1. druhu, *mají* (nanejvýš) *osm* (reálných) *bodů společných.*

Osm bodů, jež jsou průsečíky plochy 2. stupně s prostorovou čarou 4. stupně 1. druhu, na ní neležící, nebo tedy průsečíky tří ploch 2. stupně, nepatřících do téhož svazku, tvoří skupinu t. zv. bodů *asociovaných* (navzájem přidružených).[8])[9])

Dvě bikvadratické čáry 1. druhu mohou míti nanejvýš osm bodů společných; a mají-li tolik společných bodů, lze jimi položiti plochu kvadratickou. Neboť jsou-li A_1, A_2 dva ze společných bodů dvou čar bikvadratických k_1, k_2, o nichž můžeme předpokládati, že neleží obě se svou bisekantou A_1A_2 na téže ploše kvadratické (protože v případě opačném lze je nahraditi čarami této vlastnosti, průseky kvadratických ploch danými čarami jdoucích), položme touto bisekantou a jednou, potom druhou z čar těch dvě různé plochy kvadratické; tyto plochy protínají se v přímce A_1A_2 a v prostorové čáře kubické, jež obsahuje všechny ostatní společné body čar k_1 a k_2. A protože kubická čára prostorová může s čarou bikvadratickou míti nejvýše šest bodů společných, jest společných bodů čar k_1 a k_2 nejvýše osm. Že pak dvě bikvadratické čáry k_1 a k_2 s osmi společnými body leží na téže ploše kvadratické, plyne odtud, že kvadratická plocha $\varkappa$, položená jednou z čar těch k_1 a devátým bodem P na druhé k_2, obsahuje také tuto druhou čáru k_2 celou; neboť kdyby tomu tak nebylo, měla by čára k_2 s průsečnou čarou plochy $\varkappa$ a kvadratické plochy jdoucí čarou k_1 devět společných bodů (osm společných bodů čar k_1, k_2 a bod P), což je vyloučeno. Vzhledem k tomu, že každou z obou čar bikvadratických k_1 a k_2 lze položiti další plochu kvadratickou, jest osm oněch společných bodů dvou čar k_1 a k_2 body asociovanými. A platí: *Osmi body obecně položenými*, jež zejména netvoří skupinu bodů asociovaných, *jest určena prostorová čára 4. stupně 1. druhu.* Kdyby totiž body těmi procházely dvě čáry bikvadratické, byly by body ty podle předcházejícího skupinou bodů asociovaných.

Bikvadratickou čáru 1. druhu, stanovenou osmi body A_1 až A_8 v obecné poloze, můžeme pohodlně sestrojiti pomocí dvou kvadratických ploch zborcených, body těmi položených. Veďme k tomu cíli šesti z daných bodů, třebas A_1 až A_6, prostorovou čáru kubickou, bodem A_7 a bodem A_8 pak po její bisekantě; z této kubiky a jejích obou bisekant sestrojíme zborcenou plochu kvadratickou. Druhou plochu téhož druhu sestrojíme pak obdobně, zvolíce pro kubickou čáru její jinou skupinu

[8]) Jméno toto pro osm bodů uvedené skupiny zvolil *Th. Reye* (r. 1869).

[9]) Speciálně dvě různé roviny (tvořící zvrhlou plochu 2. stupně) protínají prostorovou čáru 4. stupně 1. druhu v osmi bodech asociovaných; obráceně leží-li čtyři z osmi asociovaných bodů v jedné rovině, leží ostatní čtyři v druhé rovině.

šesti bodů mezi body danými a vedouce k ní ze zbývajících dvou bodů opět bisekanty. Průsečná čára tak získaných dvou ploch 2. stupně jest hledanou čarou 4. stupně 1. druhu.[10])

e) Jak jsme poznali, mají tři plochy 2. stupně, jež nepatří témuž svazku ploch kvadratických, osm společných bodů (asociovaných).

Všechny plochy 2. stupně, jež mají společných osm bodů, průsečíků tří ploch kvadratických $\varkappa_1, \varkappa_2$ a $\varkappa_3$, tvoří (lineární) *dvojmocný svazek ploch 2. stupně*; skupina osmi společných bodů této soustavy (osm bodů asociovaných) sluje *skupinou základních bodů* čili *basí* dvojmocného svazku toho. Povaha tohoto systému ploch kvadratických vyplývá z jeho rovinného průseku: Libovolná rovina protíná soustavu kvadratických ploch, stanovenou plochami $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ a $\varkappa_3$, v dvojmocném svazku čili síti kuželoseček; neboť protínají plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ a $\varkappa_3$ ve třech kuželosečkách, jež nepatří témuž svazku jednomocnému. Protože jedním bodem nebo dvěma body v rovině sítě kuželoseček prochází svazek kuželoseček v síti obsažených, resp. jediná kuželosečka sítě té, platí: *Každým bodem v prostoru prochází jednomocný svazek ploch, obsažených ve dvojmocném svazku ploch kvadratických; dvěma body v prostoru prochází jedna a jediná plocha dvojmocného svazku kvadratických ploch.* Předpokládáme ovšem, že jeden resp. dva body uvedené byly zvoleny mimo basi dvojmocného svazku kvadrik, resp. jednomocného svazku v něm obsaženého.[11])[12])

[10]) Konstrukci bikvadratické čáry 1. druhu z osmi daných bodů jako průsečné čáry dvou zborcených ploch 2. stupně lze provésti také tím způsobem, že sestrojení takové plochy, mající na zřeteli její vytvoření dvěma projektivními svazky rovin, převedeme na t. zv. problém projektivnosti v rovině: promítneme-li totiž pět daných bodů A_1 až A_5 z přímky spojující další dva A_6 a A_7 pěti rovinami svazku, existuje jediná přímka jdoucí osmým bodem daným A_8, z níž se oněch pět bodů promítá skupinou rovin, projektivní ke skupině prve uvedené; jde tedy v libovolné rovině ϱ, celý útvar protínající, o sestrojení bodu, z něhož se pět bodů známých (průsečíků přímek A_8A_k, kde $k = 1, 2, \ldots, 5$, s rovinou ϱ) promítá skupinou paprsků, projektivní se známou skupinou pěti paprsků svazku (průseků pěti rovin $A_6A_7A_k$ s rovinou ϱ). Viz *H. Schröter*, Grundzüge einer reingeometrischen Theorie der Raumkurve vierter Ordnung erster Species, p. 5 a n. Konstrukce prostorové čáry 4. stupně 1. druhu lze nalézti zejména při úvahách o sestrojení plochy 2. stupně; viz zvl. *Th. Reye*, Einfache lineare Construction der Flächen zweiter Ordnung aus neun und ihrer Durchdringungscurven aus acht Punkten, Zeitschrift Math. Phys. 13 (1868); *R. Sturm*, Das Problem der Projectivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades, Math. Annalen 1 (1869); *H. G. Zeuthen*, Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre, Math. Annalen 18 (1881); *H. Picquet*, Sur trois problèmes fondamentaux relatifs aux surfaces du second degré, Journal r. a. Math. 99 (1885); *F. London*, Über constructive Probleme aus der Theorie der reciproken Verwandtschaft und der Flächen 2. Ordnung, Math. Annalen 38 (1891).

[11]) Odtud, že zvrhlé kuželosečky sítě průsečných kuželoseček dvojmocného svazku kvadrik s rovinou mají své dvojné body na čáře 3. stupně, vyplývá: Plochy obsažené v dvojmocném svazku ploch kvadratických, jež se dané roviny dotýkají, mají své dotyčné body na rovinné čáře 3. stupně.

Máme-li na zřeteli dvě čáry bikvadratické, jdoucí osmi asociovanými body v prostoru (basí dvojmocného svazku kvadrik), a položíme-li jednou i druhou z nich jednomocné svazky ploch kvadratických, vidíme, že průsečné čáry každé plochy jednoho a každé plochy druhého svazku toho tvoří ∞^2 čar; tvoří tedy prostorové čáry 4. stupně, jdoucí skupinou osmi asociovaných bodů, *dvojmocný svazek čar bikvadratických* s basí v osmi bodech těch. Na ploše 2. stupně, položené osmi body asociovanými, leží *jednomocný svazek bikvadratických čar* body těmi jdoucích, obsažený tedy v uvedeném jejich svazku dvojmocném; jsou to průsečné čáry uvažované plochy kvadratické s kvadratickými plochami svazku jednomocného, jehož base prochází danými osmi body a na ploše té neleží. Libovolným bodem v prostoru (zvoleným mimo basi dvojmocného svazku čar bikvadratických) prochází jedna a jediná prostorová čára 4. stupně, ve svazku čar těch obsažená; je to základní čára jednomocného svazku kvadrik, obsaženého ve dvojmocném svazku ploch těch s basí v osmi základních bodech uvedeného svazku čar bikvadratických. Kdežto jednou čarou bikvadratickou prochází ∞^1 kvadrik, prochází — jak jsme poznali — dvěma prostorovými čarami 4. stupně, obsaženými ve dvojmocném svazku jejich, jediná plocha kvadratická.

f) Polárné roviny bodu vzhledem ke všem plochám dvojmocného svazku ploch kvadratických tvoří trs rovin, procházejíce bodem, jejž nazveme sdruženým k bodu onomu vzhledem k dvojmocnému svazku kvadrik. Neboť dejme tomu, že dvojmocný svazek kvadrik je určen třemi plochami $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ a $\varkappa_3$; polárné roviny bodu P vzhledem k těmto třem plochám kvadratickým protínají se v bodě P'. Bodem P' procházejí polárné roviny bodu P vzhledem ke všem plochám uvažovaného svazku dvojmocného: roviny polárné, příslušné k bodu P vzhledem k jednomocnému svazku kvadrik, určenému plochami $\varkappa_1$ a $\varkappa_2$, jakož i vzhledem ke svazku, určenému plochami $\varkappa_2$ a $\varkappa_3$, tvoří dva svazky rovin, jejichž osy se protínají v bodě P', protože oba svazky rovin obsahují polárnou rovinu bodu P vzhledem k ploše $\varkappa_2$; libovolná plocha prvního z uvedených dvou svazků jednomocných a libovolná plocha druhého ze svazků těch určují svazek, vzhledem k němuž příslušné roviny polárné bodu P tvoří svazek rovin jdoucí bodem P', protože bodem P' podle předešlého procházejí polárné roviny základních ploch svazku toho.

K bodům na přímce přísluší vzhledem ke kvadratickým plochám $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ a $\varkappa_3$, dvojmocný svazek určujícím, tři svazky rovin polárných, jež jsou projektivní k řadě bodové na dané přímce a tedy navzájem projektivní; osy jejich jsou polárami přímky té vzhledem k plochám $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ a $\varkappa_3$. Tři svazky tyto vytvořují průsečíky trojic sdružených rovin svých prostorovou čáru 3. stupně, jejíž body jsou sdruženými k bodům přímky dané vzhledem k uvažovanému dvojmocnému svazku ploch kvadratických a jejíž bisekanty jsou polárami přímky té vzhledem

[12]) Duální věty lze vysloviti o *dvojmocné řadě ploch kvadratických*, jež je duální k dvojmocnému svazku takových ploch.

k plochám svazku kvadrik. *Poláry, sdružené k přímce vzhledem k dvojmocnému svazku ploch kvadratických, tvoří kongruenci bisekant prostorové čáry kubické*; body této čáry jsou sdruženy k bodům přímky dané. Protože bisekanty prostorové čáry kubické promítají se ze dvou libovolných bodů jejích kolineárními trsy rovin, jsou trsy polárných rovin, příslušných k dvěma bodům vzhledem ke kvadratickým plochám dvojmocného svazku, kolineární, při čemž sobě odpovídají dvě polárné roviny trsů, příslušné k bodům těm vzhledem k téže ploše svazku.[13])

Ke třem bodům, neležícím v přímce, jsou vzhledem k dvojmocnému svazku kvadrik sdruženy tři trsy rovin polárných obecně položené; zavedeme-li mezi nimi uvedeným způsobem vztah kolineární, vytvořují trsy tyto průsečíky rovin sobě odpovídajících, jak poznáme, plochu 3. stupně. *Póly, sdružené k rovině vzhledem k dvojmocnému svazku ploch kvadratických, tvoří obecnou plochu třetího stupně*; body této plochy jsou sdruženy k bodům dané roviny.

g) *Skupina osmi bodů asociovaných* v prostoru je tím pozoruhodná, že *jest určena sedmi body svými*. Osmi body této skupiny a dalším bodem (mimo ni ležícím) jest totiž, jak bylo uvedeno, určena prostorová čára 4. stupně, patřící do dvojmocného svazku takových čar s basí v oněch osmi bodech. Protože však čára 4. stupně v prostoru jest určena osmi body (jež netvoří skupinu bodů asociovaných), musí čára 4. stupně, jdoucí sedmi body oné skupiny a dalším bodem dotčeným, procházeti také osmým bodem skupiny té.[14])

Můžeme tedy říci: *Všechny prostorové čáry 4. stupně 1. druhu, jdoucí sedmi pevnými body prostoru, procházejí ještě týmž bodem osmým*; těchto osm bodů tvoří basi dvojmocného svazku prostorových čar bikvadratických. A obdobně: *Všechny plochy 2. stupně, jdoucí sedmi pevnými body v prostoru, procházejí ještě týmž bodem osmým*; skupina těchto bodů jest basí dvojmocného svazku ploch kvadratických. Neboť dvěma prostorovými čarami 4. stupně, jež jdou sedmi body v obecné poloze a tedy osmi body asociovanými, určena je jedna plocha 2. stupně; tato plocha spolu s dalšími dvěma, z nichž každá prochází jednou z uvedených čar, tvoří (nepatříce témuž svazku jednomocnému) základ dvojmocného svazku ploch kvadratických. Lze pak dvojmocný svazek ploch kvadratických, stejně jako dvojmocný svazek prostorových čar bi-

[13]) Se zřetelem k tomu můžeme zavésti kolineaci dvojmocného svazku ploch kvadratických s trsem rovin polárných, příslušných ke zvolenému bodu vzhledem k tomuto svazku, a tedy s jiným útvarem dvojmocným. Odtud potom mezi jiným plynou jednoduché věty: Jednomocný svazek ploch kvadratických, určený dvěma plochami dvojmocného svazku kvadrik, jest obsažen v tomto svazku. Dva jednomocné svazky kvadrik, obsažené v dvojmocném svazku takových ploch, mají společnou jednu plochu kvadratickou. Dvojmocný svazek ploch kvadratických jest určen kterýmikoli třemi plochami svými, jež nepatří témuž svazku jednomocnému.

[14]) Proto sluje každý z nich asociovaným čili přidruženým k sedmi ostatním.

kvadratických, definovati jako *soustavu* ploch 2. stupně resp. čar 4. stupně *jdoucí sedmi body obecně položenými*.

Mějme na zřeteli prostorovou čáru kubickou, určenou šesti ze skupiny bodů asociovaných, a přímku, jdoucí ostatními dvěma z bodů těch (z nichž žádný neleží na oné kubice); shledáme, že *přímka, vedená dvěma z osmi bodů asociovaných, jest bisekantou prostorové čáry 3. stupně, položené ostatními šesti body této skupiny*. Neboť přímkou p, jež spojuje dva body uvažované skupiny, a prostorovou kubikou c, jež prochází ostatními šesti, lze vésti zborcenou plochu kvadratickou čáry ty obsahující. Každá rovina jdoucí přímkou p protíná čáru c ve třech bodech a uvedenou plochu kvadratickou mimo p v druhé přímce q; protože přímka q má s bikvadratickou čarou, zvrhlou v čáry c a p, jeden bod na p společný, může procházeti jen jedním z dotčených tří bodů na c, takže přímka p musí procházeti ostatními dvěma z bodů těch a jest tedy bisekantou kubické čáry c. Odtud vyplývá, že bisekanta, kterou k prostorové čáře kubické položené šesti ze skupiny bodů asociovaných vedeme sedmým bodem této skupiny, obsahuje také osmý bod její.[15])

Pomocí této věty dospějeme snadno *od sedmi daných bodů k osmému bodu k nim přidruženému*: Budiž v prostoru dáno sedm bodů v obecné poloze A_k ($k = 1, 2, \ldots, 7$) (jež neleží na téže prostorové čáře kubické). Položíme-li šesti z daných bodů, třeba s A_1 až A_6, prostorovou čáru 3. stupně c_1 a vedeme-li bodem sedmým A_7 její bisekantu b_1, leží hledaný bod na této přímce b_1; hledaný bod leží však také na bisekantě b_2, vedené jiným z daných bodů, třebas bodem A_1 k prostorové čáře 3. stupně c_2, položené ostatními šesti z bodů daných A_2 až A_7. Nalezneme tedy osmý bod k daným sedmi asociovaný jako průsečík přímek b_1 a b_2.[16])[17])[18])

[15]) Osm bodů asociovaných dostaneme snadno jako průsečíky tří ploch 2. stupně, zvrhlých ve dvojice rovin: položíme-li vždy třemi sousedními ze šesti bodů prostoru v určitém pořadí zvolených rovinu, dostaneme jednoduchý šestistěn, jehož dvojice protějších stěn lze pokládati za tři kvadratické plochy; plochy ty protínají se mimo šest vrcholů šestistěnu ve dvou bodech, společných vždy třem nesousedním stěnám šestistěnu; těchto osm bodů tvoří skupinu bodů asociovaných. Vzhledem k hořejší větě lze poznamenati, že spojnice posledních dvou průsečíků je bisekantou prostorové čáry kubické, jdoucí oněmi šesti body zvolenými.

[16]) První konstrukci osmého bodu, asociovaného k sedmi daným, podal *O. Hesse*, De curvis et superficiebus secundi ordinis, Journal r. a. Math. 20 (1840), potom *Staudt*, *R. Sturm*, *H. Picquet*, *H. G. Zeuthen* a j. Viz také *C. Bobek*, Über Constructionen von Flächen zweiter Ordnung aus imaginären Bestimmungsstücken, Věstník Spol. nauk 1882. O dalších takových konstrukcích pojednávají *F. Caspary*, Zur Construction des achten Schnittpunkts dreier Oberflächen zweiter Ordnung; *H. Schröter*, Construction des achten Schnittpunkts dreier Oberflächen zweiter Ordnung, von denen sieben gemeinschaftliche Punkte willkürlich und unabhängig von einander gegeben sind; *H. Picquet*, Sur trois problèmes fondamentaux relatifs aux surfaces du second degré; *R. Sturm*, Über den achten Schnittpunkt dreier Flächen zweiter Ordnung; *H. G. Zeuthen*, Constructions du huitième point commun aux surfaces du second ordre qui passent par sept points donnés, vše Journal r. a. Math. 99 (1886). *Th. Reye*, Lineare Construction des achten Schnitt-

93. Sestrojení plochy kvadratické z devíti bodů. *a) Plocha 2. stupně jest určena devíti body obecně položenými.* Neboť jest určena prostorovou čarou 4. stupně 1. druhu, jež je stanovena osmi body v obecné poloze, a bodem mimo čáru tuto ležícím; zejména tedy nesmějí dané body

---

punktes von drei Flächen zweiter Ordnung, Journal r. a. Math. 100 (1887) (také Die Geometrie der Lage III, Anhang) udává toto jednoduché sestrojení: Z daných sedmi bodů A_k ($k = 1, 2, \ldots, 7$) vyberme šest A_1 až A_6 a utvořme z nich tři dvojice takové, aby přímky jimi určené $a_{12} = A_1A_2$, $a_{34} = A_3A_4$, $a_{56} = A_5A_6$ byly mimoběžné. Z jednoho i druhého bodu každé dvojice veďme po přímce ostatní dvě uvedené přímky protínající, tedy z A_1, A_2 přímky a_1, a_2 protínající a_{34} a a_{56}, z A_3, A_4 přímky a_3, a_4 protínající a_{12} a a_{56}, z A_5, A_6 přímky a_5, a_6 protínající a_{12} a a_{34}; z bodu A_7 veďme potom tři přímky a'_{12}, a'_{34}, a'_{56}, protínající a_1 a a_2, resp. a_3 a a_4, resp. a_5 a a_6. Ze stěn trojhranu s hranami a'_{12}, a'_{34}, a'_{56} protněme $a'_{34}a'_{56}$ přímkou a_{12} v bodě B_{12}, $a_{12}a'_{56}$ přímkou a_{34} v bodě B_{34}, $a'_{12}a'_{34}$ přímkou a_{56} v bodě B_{56}; rovina $B_{12}B_{34}B_{56}$ ať protne pak stěny trojhranu toho v přímkách b_{12}, b_{34}, b_{56}. Roviny $a_{12}b_{12}$, $a_{34}b_{34}$, $a_{56}b_{56}$ protínají se v hledaném osmém bodě k daným sedmi asociovaném. Kratší konstrukci podal *H. Neumann*, Die acht assoziierten Schnittpunkte von drei Flächen zweiter Ordnung, Math. Annalen 73 (1912). Přehled příslušných publikací podává *H. G. Zeuthen* v L'Intermédiaire math. 1 (1894); a *K. Rohn*, Einige Beiträge zum Problem der Bestimmung des achten Schnittpunktes von drei Flächen zweiten Grades, Berichte Ges. Wiss. Leipzig 53 (1901); k tomu *H. S. White*, The associated point of seven points in space, Annals math. (2) 23 (1923).

[17]) Skupina osmi bodů asociovaných má řadu pozoruhodných vlastností; mimo hořejší buďtež uvedeny: Kterékoli čtyři z osmi asociovaných bodů promítají se ze dvou přímek jdoucích dvěma a dvěma z bodů ostatních projektivními čtveřinami rovin. Čtyři dvojice protějších stěn jednoduchého prostorového osmiúhelníku, tvořeného osmi body asociovanými, protínají se ve čtyřech přímkách zborcené řady kvadratické (věta Weddleova). Vepíšeme-li jednoduchému prostorovému šestiúhelníku s vrcholy v šesti z osmi bodů asociovaných dva Brianchonovy šestiúhelníky tak, aby vrcholy jejich ležely po řadě na hranách onoho šestiúhelníku a spojnice protějších vrcholů jejich procházely bodem sedmým resp. osmým, leží dvanáct stran obou těchto šestiúhelníků na téže kvadratické ploše zborcené (věta Hesseova). Leží-li na prostorové čáře bikvadratické 1. druhu dvě skupiny po osmi bodech asociovaných a tvoří-li z těchto 16 bodů kterýchkoli osm novou skupinu bodů asociovaných, platí to také o zbývajících osmi bodech (věta Reyeova). A speciálně: Spojíme-li všech 12 průsečíků prostorové čáry bikvadratické s třemi rovinami libovolně po třech, vybraných z různých rovin, čtyřmi rovinami, leží další čtyři průsečíky těchto rovin s onou čarou v téže nové rovině. O vlastnostech osmi asociovaných bodů (mimo četné práce Hesseovy i jiných a práce, citované pro konstrukci této skupiny) viz dále: *H. Dobriner*, Über des räumliche Achteck, welches die Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung bilden, Acta math. 12 (1889); *H. G. Zeuthen*, Note sur les huit points d'intersection de trois surfaces du second ordre, tamtéž; k tomu *H. Schröter*, Über die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung, Acta math. 14 (1890); *H. Picquet*, Nouvelle contribution au problème du huitième point commun à trois quadriques, Bulletin Soc. math. France 22 (1894). Hlavní krátce podává *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage III.

[18]) *O trojmocném svazku ploch 2. stupně*, který je určen čtyřmi kvadrikami, neležícími v témž svazku dvojmocném, a obsahuje ∞^3 ploch kvadratických, patřících s kteroukoli plochou danou a libovolnou plochou dvoj-

ležeti na téže čáře bikvadratické, spec. nesmí žádných osm z bodů daných býti asociovaných.

Plochu 2. stupně, určenou devíti body, lze sestrojiti rozmanitými způsoby; abychom její konstrukci mohli sledovati, označme devět bodů v obecné poloze daných, jimiž má kvadratická plocha procházeti, písmeny A_k $(k = 1, 2, \ldots, 9)$.[1])[2])

Konstrukci plochy 2. stupně z devíti jejích bodů jest možno založiti na vytvoření jejím dvěma korelativními trsy. Zvolíme-li z daných bodů dva, na př. A_8 a A_9, za středy dvou trsů, jest nalézti ke každému ze sedmi paprsků jednoho z nich A_8A_k $(k = 1, 2, \ldots, 7)$ rovinu druhého jdoucí paprskem A_9A_k, sdruženou k onomu v určité korelaci. Bod žádané plochy na libovolné přímce jdoucí bodem A_8 (nebo bodem A_9) sestrojí se pak jako průsečík přímky této s rovinou, jež jí v korelaci té odpovídá. Paprsky A_8A_k a A_9A_k protnou libovolnou rovinu ϱ (nebo dvě různé roviny) ve dvou skupinách po sedmi bodech B_k resp. B'_k $(k = 1, 2, \ldots, 7)$; hledaná korelace trsů A_8 a A_9 bude stanovena, nalezneme-li v ϱ ke každému z bodů B_k přímku b'_k jdoucí bodem B'_k, která onomu v určité korelaci roviny ϱ koresponduje.

Přiřadí-li se bodům B_1 až B_4 pořadem přímky b'_1 až b'_4, jdoucí resp. body B'_1 až B'_4, jest korelace v ϱ určena. Avšak korelacemi, v nichž bodům B_1, B_2, B_3 odpovídají zvolené přímky b'_1, b'_2, b'_3, bodu B_4 pak rozmanité přímky b'_4 svazku o středu B'_4, přiřaděny jsou dalšímu bodu B_5 přímky b'_5, jež jdou pevným bodem;[3]) tento střed svazku přímek b'_5

mocného svazku, ostatními třemi danými určeného, do téhož svazku jednomocného, pojednává zvl. *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage III (1923), p. 143 a n., 240 a n.

[1]) O sestrojení plochy 2. stupně (zejména) z devíti bodů jejích jednají příslušné spisy souborné (dříve uvedené, na př. *H. Schröter*, *Th. Reye*, *V. Jarolímek* a j.). Přehled konstrukcí podali *R. Heger*, Die Construction einer Fläche 2. Ordnung aus neun gegebenen Punkten und verwandte Constructionen, 1881; *H. Bögehold*, Historisch-kritische Darstellung der Konstruktionen der Fläche 2. Ordnung aus 9 Punkten, Dissertation Jena 1898; *E. Kötter*, Die Entwickelung der synthetischen Geometrie, 1901; *R. Gidály*, Die Hauptmethoden der Konstruktion einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten, Programm Wiener-Neustadt 1911.

[2]) Při úloze sestrojiti plochu 2. stupně z devíti daných bodů jejích žádá se obyčejně sestrojiti druhý průsečík plochy té s libovolnou přímkou jdoucí jedním z bodů daných (nebo sestrojiti kuželosečku plochy na rovině jdoucí třemi body danými, po případě menším počtem těchto bodů). Obecněji jde o stanovení involuce, určené hledanou plochou na libovolné přímce v prostoru, nebo o stanovení polárnosti, určené plochou tou na libovolné rovině, nebo v nejširším smyslu o stanovení prostorové polárnosti, hledanou plochou určené. Přednost se dává konstrukcím lineárním (jež používají jen přímek a rovin). Dané body předpokládáme obyčejně reálné; některé metody připouštějí dané body také (aspoň z části) imaginární (jednu až čtyři dvojice bodů sdruženě imaginárních, dané eliptickými involucemi na reálných přímkách) nebo se pro takový případ upravují.

[3]) Řada průsečíků přímek b'_5 na b'_1 je totiž projektivní k řadě průsečíků příslušných přímek b'_4 na b'_3. Neboť všimneme-li si, že ke skupině přímek

lze nalézti ze dvou přímek jeho (odpovídajících bodu B_5 ve dvou z korelací těch, kde bodu B_4 korespondují dvě různé přímky jdoucí bodem B'_4). Z takových korelací zvolme tu, v níž bodu B_5 odpovídá přímka b'_5 onoho svazku, jdoucí bodem B'_5. Z uvedeného vysvítá, že korelace v ϱ je určena, přiřadí-li se bodům B_1, B_2, B_3 pořadem přímky b'_1, b'_2, b'_3 a určí-li se, aby přímky korespondující bodům B_4, B_5 procházely body B'_4, B'_5. V korelacích však odtud tím vznikajících, že přímku b'_3 sdruženou k bodu B_3 nahradíme přímkami svazku se středem B'_3, odpovídají dalšímu bodu B_6 opět přímky b'_6 určitého svazku; z korelací těch vyberme tu, ve které bodu B_6 koresponduje přímka b'_6, jdoucí také bodem B'_6. Konečně vyjdouce od korelace, určené tak, že se bodům B_1, B_2 přiřadí pořadem přímky b'_1, b'_2 a že se ustanoví, aby přímky sdružené k bodům B_3 až B_6 procházely body B'_3 až B'_6, přijdeme ke korelacím, v nichž sice bodu B_1 odpovídá přímka b'_1 bodem B'_1 původně položená, bodu B_2 však odpovídají přímky svazku o středu B'_2, takže poslednímu bodu B_7 korespondují zase přímky b'_7 svazku s určitým středem; z těchto vyberme korelaci, ve které bodu B_7 odpovídá přímka b'_7 vedená bodem B'_7. Konstrukce vedoucí cestou zde popsanou k hledané korelaci roviny ϱ je zdlouhavá, i když se vhodnými volbami poněkud zjednoduší.

Od korelace roviny ϱ přejdeme potom ke korelaci trsů A_8 a A_9,[4]) odtud pak můžeme obdržeti jednotlivé body kvadratické plochy na přímkách, jdoucích bodem A_8 nebo A_9.[5])[6])

B_1 ($B_2B_3B_4B_5$) je projektivní skupina průsečíků přímky b'_1 s přímkami b'_2, b'_3, b'_4, b'_5 (kde b'_4 a b'_5 jsou přímky, odpovídající bodu B_4 resp. B_5 v téže korelaci) a tedy i skupina přímek tyto průsečíky z bodu $b'_3b'_4$ promítajících, vidíme, že skupiny tyto jsou při proměnných přímkách b'_4 a b'_5 navzájem projektivní a při pevné přímce b'_3 i bodech $b'_1b'_2$, B_4 perspektivní, takže spojnice bodů $b'_3b'_4$ a $b'_1b'_5$ procházejí pevným bodem, ležícím na spojnici bodů $b'_1b'_2$ a B_4. Obdobně je řada bodů $b'_2b'_5$ na b'_2 projektivní k řadě bodů $b'_3b'_4$ na b'_3. Jsou tudíž řady bodů $b'_1b'_5$ a $b'_2b'_5$ projektivní; mající pak bod $b'_1b'_2$ společný, jsou také perspektivní: procházejí tedy přímky b'_5 pevným bodem (tvořice svazek projektivní ke svazku přímek b'_4).

[4]) Těchto korelací dvou trsů se středy A_8 a A_9, vytvořujících kvadratickou plochu danými devíti body stanovenou, jest ∞^1, jak vysvítá z možných voleb přímky b'_1, jdoucí v ϱ bodem B'_1 a korespondující bodu B_1, a jak už dříve bylo vytčeno.

[5]) Konstrukci tuto (s podrobnostmi) uvádí *H. Schröter*, Problematis geometrici ad superficiem secundi ordinis per data puncta construendam spectantis solutio nova, Journal r. a. Math. 62 (1863). Viz také *F. Seydewitz*, Konstruktion und Klassifikation der Flächen des zweiten Grades mittels projektivischer Gebilde, Archiv Math. Phys. 9 (1847); *Th. Reye*, Geometrische Verwandtschaften zweiten Grades, Zeitschrift Math. Phys. 11 (1866); *F. London*, Über constructive Probleme aus der Theorie der reciproken Verwandtschaft und der Flächen 2. Ordnung, Math. Annalen 38 (1891).

[6]) Konstrukce kvadratické plochy z devíti bodů na základě jejího vytvoření dvěma projektivními svazky rovin vede k t. zv. problému projektivnosti; viz *R. Sturm*, Das Problem der Projectivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades, Math. Annalen 1 (1869).

b) S výhodou lze plochu 2. stupně, jdoucí devíti danými body, sestrojiti pomocí jednomocného svazku kvadratických ploch se společnými osmi z bodů těch; kvadratická plocha tohoto svazku, jdoucí bodem devátým, jest plochou hledanou. Buďtež roviny položené trojicemi bodů daných $A_1A_2A_3 = \alpha$, $A_4A_5A_6 = \beta$, $A_7A_8A_9 = \gamma$, průsečnice vždy dvou z těchto rovin $\beta\gamma = a$, $\gamma\alpha = b$, $\alpha\beta = c$ a průsečík všech tří rovin $\alpha\beta\gamma = O$.

Zvolme na přímce b libovolný bod B. Svazek kuželoseček k_1, k_2, k_3, . . ., položených v α body A_1, A_2, A_3, B, protne přímku b po druhé v řadě bodů B_1, B_2, B_3, . . . První z těchto kuželoseček k_1 (jdoucí bodem B_1) protne přímku c ve dvojici bodů $C'_1C''_1$, kuželosečka v β položená body $A_4A_5A_6C'_1C''_1$, stručně kuželosečka $(A_4A_5A_6C'_1C''_1)$, protne přímku a ve dvojici $A'_1A''_1$ a konečně kuželosečka $(A_7A_8A'_1A''_1B)$ v γ protne přímku b po druhé (mimo bod B) v bodě B'_1; obdobně druhá kuželosečka k_2 svazku s basí $A_1A_2A_3B$ v α (jdoucí bodem B_2) protne c ve dvojici $C'_2C''_2$, kuželosečka $(A_4A_5A_6C'_2C''_2)$ v β protne a ve dvojici $A'_2A''_2$ a kuželosečka $(A_7A_8A'_2A''_2B)$ protne b po druhé v bodě B'_2; vycházejíce dále od kuželosečky k_3 (jdoucí bodem B_3), dostaneme na c dvojici $C'_3C''_3$, na a dvojici $A'_3A''_3$, na b konečně bod B'_3; atd. Tímto způsobem dostaneme na přímce b dvě řady bodů B_k a bodů B'_k, jež jsou projektivní:

$$B_1B_2B_3 \ldots \overline{\wedge} B'_1B'_2B'_3 \ldots .^{7})$$

Tyto dvě projektivní řady bodové mají dva body samodružné; z nich jeden je O (protože postupujíce jako nahoře, přijdeme od kuželosečky $(A_1A_2A_3B\,O)$ v α ke kuželosečce $(A_4A_5A_6O\,C')$ v β a odtud ke kuželosečce (A_7A_8BOA') v γ, jež má s přímkou b společné body B a O), druhý pak označme B''. Kuželosečka $(A_1A_2A_3BB'')$ protne c ve dvojici CC'', kuželosečka $(A_4A_5A_6CC'')$ protne a ve dvojici AA'', konečně kuželosečka $(A_7A_8AA''B)$ protne b (mimo B) v bodě B''; tyto tři kuželosečky patří ploše kvadratické, jdoucí body A_1 až A_8 a bodem B, jsouce jejími průseky s rovinami α, β, γ.

Zvolíme-li na přímce b řadu bodů B, obdržíme tam uvedeným způsobem druhou řadu bodů B'', k oné involučně projektivní. Tato involuce na přímce b určuje spolu se skupinou bodů $A_1A_2A_3$ v rovině α svazek kuželoseček, jenž na přímce c vytíná opět involuci; tato určuje spolu se skupinou $A_4A_5A_6$ v rovině β druhý svazek kuželoseček, jenž přímku a protíná zase v involuci bodové; dvě involuce na b a na a tak získané určují spolu s body A_7, A_8 v rovině γ třetí svazek kuželoseček, jenž má mimo A_7 a A_8 ještě dva body základní. Tři svazky kuželoseček, k nimž jsme dospěli, jsou průseky svazku kvadratických ploch, jdoucích body A_1 až A_8, s rovinami α, β, γ. Kuželosečka svazku v rovině γ urče-

[7]) K řadě bodů B_k přísluší totiž podle konstrukce projektivní řada dvojic $C'_kC''_k$ (kterou lze nahraditi projektivní řadou bodů, harmonicky sdružených k libovolnému bodu C na c vzhledem k C'_k a C''_k), k této projektivní řada dvojic $A'_kA''_k$ a k této projektivní řada bodů B'_k.

ného, jdoucí bodem A_9, jest průsekem hledané plochy kvadratické s rovinou γ; od kuželosečky té dojdeme pak bezprostředně k průsečným kuželosečkám plochy na rovinách α a β.[8])[9])

c) Chceme-li nalézti plochu 2. stupně, danou devíti body, na základě jednomocného svazku kvadratických ploch, jdoucích osmi z bodů těch, jest příhodné sestrojiti zvolenými osmi body dvě kvadratické plochy zborcené.

Zborcená plocha kvadratická, jdoucí body A_1 až A_8, jest určena prostorovou čarou kubickou, procházející šesti z těchto bodů a jejími dvěma bisekantami, vedenými k ní z bodu sedmého a osmého. Můžeme postupovati tak, že třebas body A_1 až A_6 položíme dva kvadratické kužele s vrcholy třebas A_1 a A_2, jež se (mimo přímku A_1A_2) protínají v prostorové čáře kubické, jdoucí body A_1 až A_6, a hledáme bisekanty této kubiky bodem A_7 a bodem A_8. Sestrojíme druhé přímky uvedených

[8]) Tuto konstrukci uvedl první *M. Chasles*, Principe de correspondance entre deux objets variables qui peut être d'un grand usage en géométrie, Comptes r. Acad. Paris 41 (1855). Příbuzné konstrukce podali *H. Müller*, Der Flächenbüschel zweiter Ordnung in synthetischer Behandlung, Math. Annalen 1 (1869), a *J. H. Engel*, Konstruktionen zur Geometrie der Flächen zweiter Ordnung und der ebenen Kurven dritter Ordnung, Vierteljahrschrift nat. Ges. Zürich 34 (1889). Uvedenou metodu Chaslesovu v konstrukci všude lineární modifikovali *R. Heger*, Zur Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten, Zeitschrift Math. Phys. 25 (1880) a Schlömilchs Handbuch der Math. II, a *H. Bögehold* na uv. místě. Chaslesova konstrukce připouští tři dvojice z daných bodů sdruženě imaginární; pro čtyři dvojice imaginárních bodů ji pozměňuje *J. Cardinaal*, Zur Construction einer Oberfläche zweiter Ordnung, Zeitschrift Math. Phys. 27 (1882).

[9]) Uvedený postup můžeme poněkud pozměniti: Abychom nalezli tři kuželosečky, v nichž hledaná plocha kvadratická, body A_1 až A_9 určená, protíná roviny α, β a γ, totiž kuželosečky, jdoucí trojicemi bodů tam daných a mající na přímkách a, b a c po dvou bodech společných, hledejme dvojice kuželoseček, v nichž dvě kvadratické plochy se společnými body A_1 až A_8 každou z uvedených rovin protínají. K řadě bodů na c nalezneme projektivní řadu bodů na b, protneme-li přímkou A_2A_3 přímky b i c v bodech B resp. C a přejdeme-li od svazku kuželoseček s basí $A_4A_5A_6C$ v β, jenž na c vytíná první řadu uvedenou, ke svazku kuželoseček v γ, určenému dvojicemi průsečíků onoho svazku na a a body A_7, A_8, B; tento svazek protíná přímku b mimo B ve zmíněné řadě druhé. Obě tyto řady na b a c jsou však perspektivní, majíce společný bod O, takže spojnice sdružených bodů jejich mají společný průsečík S. Ke kuželosečce v α, složené z přímek A_2A_3 a A_1S, dostaneme hořejší cestou kuželosečky v β a v γ se společnými sečnami v a, b, c; obdobně nalezneme druhou trojici takových kuželoseček, vycházejíce (místo od A_2A_3) od přímky (třebas) A_1A_3 v α. Tři dvojice kuželoseček v rovinách α, β, γ tak získané určují v těchto rovinách svazky průsečných kuželoseček rovin těch se svazkem kvadratických ploch, jdoucích body A_1 až A_8. Kuželosečka svazku v rovině γ, vedená bodem A_9 a k ní příslušné kuželosečky v α a β obou ostatních svazků jsou průseky hledané plochy kvadratické na těchto rovinách. Toto sestrojení plochy 2. stupně uveřejnil (upraviv je z pozůstalosti *Steinerovy*) *C. F. Geiser*, Konstruktion der durch neun gegebene Punkte gehenden Fläche zweiten Grades, Journal r. a. Math. 68 (1868).

kuželů a_1 resp. a_2, ležící v rovinách $A_1A_3A_7$ resp. $A_2A_3A_7$; přímky tyto a_1, a_2 určují s uvedenou kubikou zborcenou řadu kvadratickou, tvořenou bisekantami oné kubiky; její přímku jdoucí bodem A_7 nalezneme, vedeme-li bodem A_4 a bodem A_5 po přímce protínající a_1, a_2 a bodem A_7 přímku sekoucí obě přímky právě sestrojené; obdobně nalezneme bisekantu oné kubiky jdoucí bodem A_8. Druhou kvadratickou plochu zborcenou, jdoucí body A_1 až A_8, sestrojíme, zvolíce třebas body A_1 až A_5 a bod A_7 za body určující prostorovou kubiku a položíce body A_6, A_8 její bisekanty.

Na libovolné přímce, vedené bodem A_9, vytnou uvedené dvě zborcené plochy kvadratické dvě dvojice bodů, jimiž je na této přímce stanovena involuce dvojic průsečíků kvadratických ploch vytčeného svazku; zbývá tedy k bodu A_9 sestrojiti bod, k němu v involuci té sdružený, jenž je bodem hledané plochy kvadratické.[10])

d) Východiskem pro sestrojení plochy 2. stupně z devíti daných bodů může býti polárná vlastnost dvojmocného svazku ploch kvadratických, jdoucích sedmi body: k libovolnému bodu přísluší totiž vzhledem k dvojmocnému svazku kvadrik určitý bod, průsečík polárných rovin jeho vzhledem k jednotlivým plochám svazku toho.

Majíce na zřeteli dvojmocný svazek ploch kvadratických, jdoucích třebas body A_1 až A_7, sestrojme ke zvolenému bodu P bod uvedeným způsobem sdružený P'. Použijeme k tomu cíli tří zborcených ploch kvadratických, položených oněmi sedmi body; taková zborcená plocha určena je třebas přímkami A_1A_2, A_3A_4 a třemi přímkami, jež jdouce jednotlivě body A_5, A_6, A_7 ony dvě přímky protínají (ploch takto určených je obecně 105). Vedouce bodem P tři přímky, z nichž každá protíná dvě přímky téže řady na uvedené ploše zborcené, a sestrojíce na každé z nich bod harmonicky sdružený k bodu P vzhledem k oběma průsečíkům jejím s uvažovanou plochou, obdržíme v rovině těmito body položené polárnou rovinu bodu P vzhledem k ploše té. Průsečík polárných rovin bodu P takto vzhledem ke třem zvoleným plochám sestrojených jest bod P'.

Jestliže z daných devíti bodů vybéřeme třikrát po sedmi bodech a sestrojíme hořejším způsobem po každé bod, sdružený k bodu P vzhledem k dvojmocnému svazku kvadratických ploch body těmi určenému, tedy celkem tři body P'_1, P'_2, P'_3, dostaneme rovinu polárnou $P'_1P'_2P'_3$, příslušnou k bodu P vzhledem ke kvadratické ploše hledané, jež je společnou plochou tří uvedených svazků dvojmocných.

---

[10]) Toto sestrojení plochy kvadratické podává *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage (po prvé v dílu II, 1868). Z daných devíti bodů mohou jedna nebo dvě dvojice býti sdruženě imaginárních; úpravu konstrukce té také pro větší počet bodů imaginárních provedl *C. Hossfeld*, Construction der Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten, von denen acht imaginär sind, Zeitschrift Math. Phys. 33 (1888). Příbuzná Reyeově je konstrukce, kterou uvedl *C. le Paige*, Note sur l'homographie du troisième ordre, a Sur les surfaces du second ordre, Bulletin Acad. Belgique (3) 5 (1883).

Na přímce vedené bodem P a některým z daných devíti bodů sestrojíme potom bod hledané plochy jako bod harmonicky sdružený k danému bodu vzhledem k bodu P a průsečíku přímky té s nalezenou polárnou rovinou bodu P. Chceme-li však sestrojiti bod plochy na libovolné přímce položené některým z bodů daných, stačí zvoliti bod P na této přímce a provésti popsanou konstrukci polárné roviny jeho.[11])

V případě, že z daných devíti bodů jsou některé (až čtyři dvojice) imaginární, stačí uvedenou konstrukci málo pozměniti. Dejme tomu, že body A_1 a A_2, A_3 a A_4, A_5 a A_6, A_7 a A_8 jsou jako dvojice bodů sdruženě imaginárních dány eliptickými involucemi na reálných přímkách a_{12}, a_{34}, a_{56}, a_{78}. Za sedm bodů, kterými si myslíme položeny tři zborcené plochy kvadratické, abychom vzhledem k nim sestrojili k bodu P sdružený bod P'_1 (P'_2, P'_3) zvolme vždy tři dvojice na přímkách právě uvedených a bod P_9. Zvolíce napřed body A_1 až A_6 a A_9, položme přímkou a_{12} a bodem A_9 rovinu, jež protne a_{34} v bodě B_{34} a a_{56} v bodě B_{56}; kuželosečka k, určená body A_1, A_2, A_9, B_{34}, B_{56}, a přímky a_{34}, a_{56} stanoví kvadratickou plochu zborcenou. Abychom nalezli polárnou rovinu bodu P vzhledem k této ploše, veďme bodem P tři přímky, protínající a_{34} a a_{56}, a_{34} a k, a_{56} a k (tyto ovšem mimo B_{34}, B_{56}), a sestrojme na nich čtvrté body harmonické k P vzhledem k průsečíkům jejich s čarami uvedenými; body ty určují polárnou rovinu bodu P vzhledem k oné ploše kvadratické. K stanovení dalších dvou zborcených ploch kvadratických použijeme roviny jdoucí přímkou a_{34} resp. a_{56} a bodem A_9; v dalším postupu potom vybereme ze čtyř uvedených dvojic bodů sdruženě imaginárních dvakrát jiné tři dvojice a bod A_9.[12])[13])

---

[11]) Původcem tohoto nejstaršího (projektivního) a v zásadě jednoduchého sestrojení plochy 2. stupně z devíti bodů jest *O. Hesse*, Über die Construction der Oberflächen zweiter Ordnung, von welchen beliebige neun Punkte gegeben sind, Journal r. a. Math. 24 (1842); metoda tato vede, jak patrno, k polárnosti hledané plochy. Hesseovu metodu zjednodušil *J. Thomae*, Lineare Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten, Berichte Ges. Wiss. Leipzig 44 (1892); její modifikaci pro čtyři dvojice bodů sdruženě imaginárních podává týž v poj. Lineare Construction der Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten, tamtéž 49 (1897); viz také téhož Zur Hesse'schen Konstruktion einer Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten, Zeitschrift Math. Phys. 43 (1898). Metodu Hesseovu a Chaslesovu spojil *K. Rohn*, Die Construction der Fläche zweiten Grades durch neun gegebene Punkte, Berichte Ges. Wiss. Leipzig 46 (1894).

[12]) O sestrojení plochy 2. stupně z devíti bodů pojednávají (vedle autorů dříve uvedených, z nichž někteří uvádějí více konstrukcí) dále zejména: *F. Seydewitz*, Leichtfassliche Construction einer Fläche des zweiten Grades, von welcher neun Punkte beliebig gegeben sind, Archiv Math. Phys. 17 (1851); *G. K. Ch. Staudt*, Beiträge zur Geometrie der Lage III (1860); *Th. Reye*, Einfache lineare Construction der Flächen zweiter Ordnung aus neun und ihrer Durchdringungscurven aus acht Puncten, Zeitschrift Math. Phys. 13 (1868); *G. Darboux*, Sur un mode de transformation des figures et son application à la construction de la surface de deuxième ordre déterminée par neuf points, Annales École norm. sup. 6 (1869); *H. Picquet*, Solution de quelques problèmes relatifs aux surfaces du second degré, Journal r. a.

94. Plocha třetího stupně.

a) Tři kolineární trsy o různých středech S, S' a S'' vytvořují průsečíky trojic sdružených rovin svých plochu třetího stupně, obsahující také body S, S' a S''.

Tři kolineární pole v různých rovinách σ, σ' a σ'' vytvořují rovinami, jež spojují trojice sdružených bodů jejich, plochu 3. třídy, jejímiž rovinami jsou i σ, σ' a σ''.

Omezíme se na plochu odvozenou ze tří kolineárních trsů. Abychom poznali, že plocha tato jest 3. stupně, všimněme si korespondence mezi dvěma soumístnými řadami bodů na libovolné přímce p (neležící na ploše), jež tam vznikají jednak prvky trsu S, jednak z obou ostatních trsů S' a S''. Každému bodu X na p odpovídají dva body Y tímto způsobem: paprsku SX koresponduje v kolineaci mezi S a S', resp. mezi S a S'' jeden paprsek v S' a jeden v S'', svazku rovin s osou SX odpovídají dva svazky rovin v S' a S'' s osami právě uvedenými; tyto svazky rovin protínají p ve dvou projektivních soumístných řadách bodových, jejichž samodružné body jsou Y_1 a Y_2 (čili tyto svazky rovin vytvořují zborcenou řadu kvadratickou, jež protíná p ve dvou bodech Y_1 a Y_2).

Math. 73 (1871), k tomu Sur trois problèmes fondamentaux relatifs aux surfaces du second degré, tamtéž 99 (1885); *N. Salvatore-Dino*, Sulla costruzione della superficie di 2º ordine data da nove punti, Rendiconti Accad. Napoli 18 (1879); *C. Beyel*, Lineare Construction einer Fläche zweiten Grades aus neun gegebenen Puncten, Zeitschrift Math. Phys. 29 (1884); *A. Petot*, Sur une extension des théorèmes de Pascal et de Brianchon aux surfaces du second ordre, Comptes r. Acad. Paris 98 (1884); *L. Ravier*, Construction du dixième point d'une quadrique, Nouv. Annales math. (2) 11 (1892); *H. Liebmann*, Über die Construction der Fläche zweiten Grades aus neun gegebenen Punkten, Zeitschrift Math. Phys. 41 (1896), k tomu tamtéž *J. Kleiber*; *E. Kötter*, Konstruktion der Oberfläche zweiter Ordnung, welche neun gegebene Punkte enthält, Jahresbericht D. Math. Ver. 9 (1901); *A. Adler*, Zur Construction der Flächen zweiten Grades aus neun gegebenen Punkten, Sitzungsberichte Akad. Wien 110 (1901); *Ch. Méray*, Construction de la surface du second ordre déterminée par neuf points ou neuf plans tangents, Nouv. Annales math. (4) 6 (1906); *A. K. Vlasov*, Novyj sposob postrojenija poverchnosti 2-go porjadka po 9-ti dannym jeja točkam, Mat. sbornik Moskva 26 (1906); *R. Gidály*, Drei Konstruktionen der Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten, Sitzungsberichte Akad. Wien 116 (1906).

[13]) Speciální případy, kdy z daných devíti bodů plochy 2. stupně leží tři na přímce nebo pět v rovině, lze řešiti jednodušeji než případ obecný: jde tu o konstrukci kvadratické plochy zborcené z její přímky a šesti bodů, resp. o konstrukci kvadratické plochy z její kuželosečky a čtyř bodů dalších.

Uvedené konstrukce plochy kvadratické z devíti jejích bodů jest ovšem možno převésti na duální sestrojení kvadratické plochy, je-li dáno devět tečných rovin jejích. Analogická jsou sestrojení plochy 2. stupně, určené osmi body a tečnou v jednom z nich nebo sedmi body a tečnou rovinou v jednom z nich; k hořejší konstrukci kvadratické plochy z devíti bodů lze dospěti také při úlohách sestrojiti plochu 2. stupně, jdoucí osmi danými body a dotýkající se dané přímky nebo dané roviny (kde vyhovují dvě resp. tři plochy).

Obráceně bodu Y odpovídá jeden bod X: každým bodem Y přímky p prochází totiž jedna přímka kongruence 1. stupně 3. třídy, vytvořené trsy S' a S'' (jedna bisekanta kubické čáry prostorové, těmito trsy vytvořené), rovina pak odpovídající v S oběma rovinám v oné bisekantě se protínajícím protíná p v jednom bodě X. Jest tedy korespondence mezi body X a Y na přímce p jednodvojznačná.

Obecná jednodvojznačná korespondence mezi prvky jednomocného útvaru o souřadnici x a prvky soumístného útvaru o souřadnici y jest analyticky vyjádřena rovnicí $a_1xy^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6 = 0$; její samodružné prvky obdržíme pro $y = x$, tedy z rovnice třetího stupně $a_1x^3 + (a_2 + a_3)\,x^2 + (a_4 + a_5)\,x + a_6 = 0$; jsou tudíž tři (jež ovšem mohou z části nebo všechny splynouti nebo býti z části imaginární). Proto *existují na p tři body samodružné*, z nichž v každém se protínají tři korespondující roviny tří kolineárních trsů daných, *body vytvořené plochy*; jest tedy tato plocha stupně třetího.[1])

Tři kolineární nesoumístné trsy, majíce vytvořiti plochu 3. stupně, nesmějí býti perspektivní ani nesmějí dva a dva z nich vytvořovati tutéž kongruenci 1. stupně 3. třídy, t. j. nesmějí určovati tutéž prostorovou čáru kubickou, obsahující jejich středy; v tomto případě totiž procházejí každým bodem v prostoru tři sdružené roviny takových trsů (protínající se v téže přímce kongruence, bodem tím jdoucí).[2])

Jestliže se v bodě P protínají dvě sdružené přímky dvou ze tří uvedených kolineárních trsů, třebas o středech S a S', leží bod ten na ploše 3. stupně jimi vytvořené; neboť svazkům rovin s osami SP a $S'P$ odpovídá v trsu S'' svazek rovin, jehož jedna rovina jde vždy bodem P, takže tento bod je průsečíkem tří rovin sobě odpovídajících a proto bodem plochy. *Plocha 3. stupně obsahuje* tudíž *tři prostorové čáry kubické, vytvořené dvojicemi kolineárních trsů o středech S, S' a S''; i obsahuje také tyto středy.*[3])[4])[5])

---

[1]) První práce o ploše 3. stupně podali *A. Cayley* a *G. Salmon* (r. 1849). Základ pro ryze geometrický výzkum této plochy položil *J. Steiner*, Über die Flächen dritten Grades, Journal r. a. Math. 53 (1857) (podávaje zde řadu vět bez důkazu); následovaly dvě obšírné a významné práce synthetické (podnícené konkursem berlínské akademie o cenu Steinerovu): *L. Cremona*, Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre, Journal r. a. Math. 68 (1868); *R. Sturm*, Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, 1867. Doplňkem této jest *R. Sturm*, Zur Theorie der Flächen 3. Ordnung, Journal r. a. Math. 88 (1879). O plochách 3. stupně vůbec jednají syntheticky (mezi jiným) dále *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage III; *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften II, p. 183 a n.; krátce také *V. Jarolímek*, Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru II, p. 76 a n.

Budiž poznamenáno, že duální plocha 3. třídy (vznikající ze tří kolineárních polí) jest od plochy 3. stupně zcela rozdílná.

[2]) Je-li společná rovina tří kolineárních trsů samodružná, rozpadá se plocha 3. stupně jimi vytvořená v tuto rovinu a v plochu 2. stupně.

[3]) Vytvoření plochy 3. stupně třemi kolineárními trsy nalezl *H. Grassmann*, Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades und die dadurch

b) Ke každému paprsku jednoho ze tří kolineárních trsů, jež vytvořují plochu 3. stupně, přísluší po jednom paprsku ostatních obou trsů; *tři korespondující* a tedy projektivní *svazky rovin s osami v* takových *sdružených třech přímkách uvažovaných trsů vytvořují prostorovou čáru kubickou, ležící na ploše 3. stupně. Těchto kubických čar prostorových jest* tedy *na ploše* ∞^2 (tolikéž co paprsků v trsu).

Každým bodem plochy 3. stupně prochází ∞^1 čar kubických na ploše ležících; je-li totiž bod ten průsečíkem sdružených rovin ξ, ξ' a ξ'' z kolineárních trsů S, S' a S'', procházejí jím čáry kubické vytvořené trojicemi projektivních svazků rovin s osami ve sdružených paprscích ze svazků v rovinách ξ, ξ' a ξ'' (o středech S, S' a S'').

Kterýmikoli dvěma body plochy 3. stupně prochází jedna prostorová kubika na ploše ležící; neboť jsou-li body ty X a Y průsečíky sdružených rovin ξ, ξ' a ξ'', resp. η, η' a η'' tří daných trsů, vytvořují svazky rovin s osami $\xi\eta$, $\xi'\eta'$ a $\xi''\eta''$ čáru 3. stupně, jdoucí na ploše body X a Y.

Kterékoli dvě prostorové čáry kubické na ploše 3. stupně ležící mají jeden bod společný; neboť jsou-li čáry ty vytvořeny projektivními svazky rovin s osami x, x' a x'', resp. y, y' a y'' tří daných trsů, jest průsečík rovin xy, $x'y'$ a $x''y''$ jediným průsečíkem čar těch.

Z uvedeného jest patrno, že prostorové čáry stupně 3. tvoří na ploše 3. stupně obdobný systém jako přímky v rovině, dvojmocnou lineární soustavu čili *síť čar kubických* na ploše 3. stupně; každý bod plochy je středem *svazku čar* na ploše té.[6])

---

erzeugten Oberflächen, Journal r. a. Math. 49 (1855), uváděje tamtéž ještě jiná vytvoření. Viz také *C. Segre*, Sur la génération projective des surfaces cubiques, Archiv Math. Phys. (3) 10 (1906), a tamtéž *R. Sturm*, Über die Erzeugung der Fläche dritter Ordnung durch kollineare Bündel und trilineare Büschel; dále *H. Schröter*, Lineare Constructionen zur Erzeugung der kubischen Fläche, Journal r. a. Math. 96 (1884), a spisy jednající o ploše 3. stupně vůbec.

[4]) Jest patrno, že každá přímka, jdoucí středem jednoho z trsů uvažovanou plochu vytvořujících, má mimo bod ten s plochou společné ještě dva body (průsečíky své s plochou 2. stupně, vytvořenou dvěma svazky rovin, jejichž osy odpovídají v obou ostatních trsech přímce té). Také bisekanta každé ze tří uvedených prostorových čar kubických má mimo dva své body na čáře s uvažovanou plochou společný ještě třetí bod (průsečík svůj s rovinou, odpovídající ve zbývajícím trsu oběma rovinám v ní se protínajícím); ovšem přímky, v nichž se protínají sdružené roviny všech tří trsů S, S' a S'', leží celé na ploše 3. stupně.

[5]) Čtyři kolineární trsy rovinové s různými středy vytvořují průsečíky sdružených rovin svých *prostorovou čáru 6. stupně* (rodu 3), v níž se dvě kubické plochy, dvěma trojicemi trsů těch vytvořené, vedle prostorové kubiky (která vzniká ze dvou trsů trojicím těm společných) protínají. Viz *R. Sturm*, Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, p. 202; *F. Schur*, Über die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen, Math. Annalen 18 (1881).

[6]) Nalezená síť kubických čar prostorových na ploše 3. stupně přejde v soustavu všech přímek roviny takto: Trojici sdružených rovin tří kolineár-

c) *Libovolná rovina* ϱ *protíná plochu 3. stupně v čáře 3. stupně*; neboť čára ta má (stejně jako plocha) na každé přímce roviny ϱ tři své body (nejvýš tři reálné).

Prostorovou čáru kubickou uvedené sítě na ploše protíná rovina ϱ ve třech bodech (ležících ovšem na průsečné čáře plochy s rovinou); každou přímkou jednoho ze tří trsů, plochu 3. stupně vytvořujících, procházejí tedy tři roviny, jež se s oběma sdruženými rovinami ostatních dvou trsů protínají v bodech roviny ϱ (tři trojice rovin ve třech bodech, průsečících prostorové čáry kubické s ϱ). Obalují tudíž ty roviny jednoho ze tří trsů uvažovaných, jež se sdruženými rovinami obou ostatních trsů vytvořují rovinnou čáru na ϱ, průsek roviny té s plochou 3. stupně, *kuželovou plochu 3. třídy* (protože lze každým paprskem onoho trsu vésti tři roviny její soustavy); takový kužel 3. třídy existuje v každém ze tří vytvořujících trsů plochy 3. stupně.

Rovina ϱ protíná tři uvažované kolineární trsy ve třech soumístných kolineárních polích, tři uvedené kužele 3. třídy *ve třech čarách 3. třídy*; každá z těchto čar jest vytvořena přímkami jednoho pole, jež se svými sdruženými v obou polích ostatních se protínají vždy v témž bodě. Tyto průsečíky trojic sobě odpovídajících přímek ve třech soumístných polích (spolu průsečíky trojic sdružených rovin ve třech uvažovaných trsech) tvoří v ϱ, jak bylo uvedeno, čáru 3. stupně; čára ta prochází ovšem vrcholy tří trojúhelníků, složených ze samodružných prvků vždy dvou ze tří kolineárních polí v ϱ.[7])[8])

d) Mimo síť kubických čar prostorových, prve uvedenou, existuje na ploše 3. stupně ještě *druhá síť čar kubických*; k ní patří také tři pro-

---

ních trsů, plochu 3. stupně π vytvořujících, přiřaďme bod roviny α tak, aby korespondence mezi body tohoto pole a rovinami jednoho, tedy i ostatních dvou trsů byla korelace. Odpovídá pak každému bodu plochy π určitý bod roviny α, obráceně každému bodu v α určitý bod plochy π, v němž se trojice sdružených rovin protíná. Přímé řadě bodové v α odpovídají tři svazky rovin, k řadě té a navzájem projektivní, proto přímce v α odpovídá prostorová čára 3. stupně, svazky těmi vytvořená; obráceně prostorové čáře 3. stupně na π odpovídá projektivně přímka v α, uvedené soustavě ∞^2 kubických čar prostorových na ploše π odpovídá tedy pole paprskové v rovině α. Důležité toto zobrazení plochy 3. stupně na rovinu uvádí po prvé (analyticky) a čáry na ploše pomocí něho studuje *A. Clebsch*, Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung, Journal r. a. Math. 65 (1866).

[7]) Duálně body každého ze tří uvedených soumístných polí v rovině ϱ, jež se svými sdruženými body ostatních dvou polí leží v přímce, vytvořují čáru 3. stupně, celkem tedy tři takové čáry; přímky pak, dotčené trojice bodů obsahující, vytvořují čáru 3. třídy, k jejímž přímkám patří strany tří samodružných trojúhelníků polí těch po dvou kombinovaných.

[8]) Jako tři soumístná kolineární pole paprsková vytvořují průsečíky trojic sdružených přímek rovinnou čáru 3. stupně, obdobně tři soumístné kolineární trsy rovinové vytvořují průsečnicemi trojic sdružených rovin kužel 3. stupně; a duálně tři soumístná kolineární pole bodová vytvořují spojnicemi trojic sdružených bodů rovinnou čáru 3. třídy, konečně tři soumístné kolineární trsy paprskové vytvořují rovinami trojic sdružených přímek kužel 3. třídy.

storové kubiky, vytvořené třemi základními trsy plochy o středech S, S' a S'', jež se po dvou protínají v prostorové čáře kubické a v kongruenci jejích bisekant.

Dejme tomu, že kolineární trsy S' a S'' vytvořují prostorovou čáru 3. stupně h. Kongruence bisekant této čáry h promítá se z každého bodu čáry trsem, kolineárním k trsům S' a S''; můžeme tedy čáru tuto vytvořiti také trsy S'_1 a S'', kde trs libovolného středu S'_1 na h, kolineární k trsům S' a S'', nastoupil místo trsu S'. Při tom však prostorová kubika plochy 3. stupně, vytvořená trsy S a S', přejde v jinou kubiku plochy této, vytvořenou trsy S a S'_1; při každé poloze bodu S'_1 na čáře h vznikne kubika druhé soustavy čar kubických na uvažované ploše. Každým bodem R plochy 3. stupně prochází kubická čára prostorová, vytvořená kolineárními trsy S a S'_h, z nichž trs S'_h má střed na h. V bodě R protínají se totiž sdružené roviny α, α' a α'' tří trsů daných S, S' a S''; paprsku $SR = a$ v α odpovídají v α' a α'' paprsky a' resp. a''; sdružené a tedy projektivní svazky rovin s osami a' a a'' vytvořují zborcenou řadu kvadratickou (nebo kužel kvadratický), obsaženou v kongruenci bisekant čáry h a obsahující přímku $a'a''$ (jdoucí bodem R). Řídicí přímka této zborcené řady (event. přímka uv. kužele) a'_h, jdoucí bodem R, protíná h v bodě S'_h. Trsy o středech S a S'_h vytvořují průsečíky sdružených paprsků svých kubickou čáru jdoucí bodem R; neboť paprsek a' trsu S' přejde v paprsek a'_h trsu S'_h, jenž protíná sdruženou přímku a trsu S v bodě R.

Je patrno, že střed trsu S můžeme přemístiti kamkoli na prostorové čáře kubické právě nalezené, zejména také do bodu jejího R, jenž je libovolným bodem plochy 3. stupně. Odtud vyplývá, že *každý bod plochy 3. stupně lze zvoliti za střed jednoho ze tří kolineárních trsů plochu vytvořujících*, že tedy body S, S' a S'' nemají zvláštního postavení na ploše 3. stupně; nesmějí ovšem body ty, jak uvedeno, býti středy trsů, vytvořujících tutéž prostorovou čáru kubickou.[9])

Z toho opět plyne pro kubické čáry druhé soustavy čar na ploše 3. stupně: Dvěma libovolnými body plochy 3. stupně prochází jedna prostorová kubika druhé soustavy; neboť prochází jedna taková čára středy dvou původních trsů vytvořujících. Spolu jest viděti, že kubických čar druhé soustavy jest na ploše 3. stupně ∞^2; jeden i druhý z bodů čáru určujících lze totiž zvoliti na ploše ∞^2 způsoby, proti tomu však ∞^1 bodů každé čáry vede k téže čáře plochy. Tvoří tedy prostorové kubiky uvažované druhé soustavy také síť čar na ploše 3. stupně.

Pro vztah mezi kubickými čarami první sítě (g) a čarami druhé sítě (h) na ploše 3. stupně nalezneme: Každá kubická čára první sítě leží s každou kubickou čarou sítě druhé na zborcené (nebo kuželové)

[9]) Protože středy tří trsů lze v prostoru zvoliti ∞^9 způsoby, kolineaci pak dvou z nich k třetímu lze zvoliti $\infty^8 . \infty^8$ způsoby, s druhé strany však každý z bodů plochy může býti středem trsu vytvořujícího, takže ∞^6 voleb vede k téže ploše, existuje v prostoru ∞^{19} ploch 3. stupně.

ploše kvadratické (obě tvoří úplný průsek plochy 3. stupně a plochy 2. stupně); je-li plocha ta zborcenou, sestává jeden systém přímek jejích z bisekant jedné, druhý systém z bisekant druhé čáry kubické. Neboť kubická čára sítě (h) vzniká ze dvou kolineárních trsů, třebas o středech S' a S'', kubická čára sítě (g) ze tří projektivních svazků rovin trsů S, S' a S''; sdružené svazky rovin s osami a', a'' trsů S' a S'' vytvořují řadu bisekant čáry h, (obecně) jednu soustavu přímek plochy kvadratické, k jejíž druhé soustavě patří bisekanty a', a'' čáry g; obě čáry g i h leží ovšem na uvedené ploše kvadratické. Vzhledem k tomu mají dvě prostorové kubiky různých sítí (g) a (h) na ploše 3. stupně pět bodů společných (reálných nebo z části imaginárních).[10])

Podobně jako o čarách první sítě platí také o čarách sítě druhé, že libovolné dvě prostorové kubiky druhé soustavy na ploše 3. stupně protínají se v jednom bodě; neboť obě plochy 2. stupně, na nichž leží jedna h_1, resp. druhá h_2 z uvažovaných čar spolu s touže čarou g sítě první, protínají se v této čáře g a v její bisekantě, jež má s plochou 3. stupně společné tři body, dva na g a třetí jako průsečík čar h_1 a h_2. Každým bodem plochy 3. stupně prochází svazek kubických čar druhé sítě.[11])

Na základě předcházejícího lze *plochu 3. stupně sestrojiti ze dvou daných čar druhé sítě* h_1 *a* h_2. Každá rovina ϱ, položená jejich průsečíkem S, promítá totiž jednu bisekantu p_1 čáry h_1 a jednu bisekantu p_2 čáry h_2; přímku p_1 má rovina ϱ v trsu S společnou s korespondující rovinou kolineárního trsu S' (jenž s trsem S vytvořuje h_1), druhou p_2 pak s korespondující rovinou trsu S'' (který spolu s trsem S vytvořuje h_2). Průsečík obou bisekant p_1 a p_2 jest bodem plochy 3. stupně (vytvořené třemi kolineárními trsy S, S' a S'').[12])[13])[14])

---

[10]) Při zobrazení plochy 3. stupně na rovinu, nahoře dotčeném, přecházejí tedy kubické čáry druhé sítě v čáry stupně pátého.

[11]) O uvedených dvou sítích prostorových čar 3. stupně na ploše uvažované viz *Th. Reye*, Beziehungen der allgemeinen Fläche dritter Ordnung zu einer kovarianten Fläche dritter Klasse, Math. Annalen 55 (1902).

[12]) Majíce na zřeteli vytvoření plochy 3. stupně třemi kolineárními trsy o středu S a dalších dvou středech S' a S'' na ploše, poznáváme, že bisekanty vedené libovolným bodem plochy P k prostorovým čarám kubickým druhé sítě (h) na ploše, jež procházejí bodem S, leží v rovině jdoucí bodem S; se zřetelem k vytvoření prostorových čar kubických první sítě (g) na ploše trojicemi projektivních svazků rovinových leží pak také bisekanty, vedené z bodu S k čarám sítě (g) bodem P procházejícím, v téže rovině. Obsahuje-li tato rovina tečny dvou čar h_1 a h_2 bodem S jdoucích (jež při uvedeném vytvoření odpovídají přímkám $S'S$ a $S''S$ trsů S' a S''), obsahuje (protože bod P padne do S) tečny všech čar sítě (h) v bodě S na ploše; sluje proto *tečnou rovinou* plochy 3. stupně v bodě S. Lze zjistiti, že tečná rovina plochy v bodě S obsahuje také tečny všech čar sítě (g) bodem tím na ploše procházejících, z kterýchž tečen jen dvě (reálné různé nebo reálné splývající nebo imaginární sdružené) mají tam s plochou dotyk trojbodový (a slují hlavními tečnami plochy v bodě hyperbolickém resp. parabolickém resp. eliptickém).

95. Přímky na ploše 3. stupně. *a*) Protněme plochu 3. stupně π dvěma rovinami ϱ_1 a ϱ_2 (ve dvou čarách 3. stupně); jejich průsečnice $\varrho_1\varrho_2$ má s plochou π tři body společné. Obě kuželové plochy 3. třídy, příslušné k těmto rovinám v jednom ze tří kolineárních trsů plochu π vytvořujících, tak totiž, že jsou obaleny rovinami, jež průsečíkem svým s oběma sdruženými rovinami v ostatních dvou trsech vytvořují řez

[13]) Pro plochu 3. stupně bylo mimo vytvoření třemi kolineárními trsy udáno a vyšetřováno mnoho jiných způsobů vytvoření: Z citovaného pojednání *H. Grassmannova* plyne také: Obecná plocha 3. stupně jest geometrickým místem průsečíků dvou přímek, spojujících body X_1, Y_1 a body X_2, Y_2, v nichž roviny jdoucí pevným bodem P protínají dvě dvojice pevných přímek mimoběžných a_1, b_1, a a_2, b_2. Čtyři vytvoření podal (na uvedeném místě) *J. Steiner*. Z nich nejdůležitější jest vytvoření plochy 3. stupně kuželosečkami, v nichž roviny svazku rovin protínají sdružené plochy projektivního svazku ploch kvadratických. Speciálně jest plocha 3. stupně vytvořena kuželosečkou, podél níž se kuželová plocha s vrcholem v daném bodě dotýká plochy daného svazku kvadrik. Nebo jest plocha 3. stupně geometrickým místem pólů pevné roviny vzhledem k plochám dvojmocného svazku ploch kvadratických. Viz také *C. F. Geiser*, Zur Theorie der Flächen zweiten und dritten Grades, Journal r. a. Math. 69 (1868); *E. de Jonquières*, Construction géométrique de la surface du troisième ordre. Réflexions sur la génération des surfaces algébriques à l'aide de deux faisceaux projectifs, a další dvě jeho pojednání podobného názvu, Comptes r. Acad. Paris 106 a 107 (1888). Několik vytvoření plochy 3. stupně založeno je na trilineárním vztahu tří svazků rovin; zejména jedno z vytvoření Grassmannových: Uvedeme-li tři svazky rovin v projektivní příbuznost s třemi jinými svazky rovin, pak roviny odpovídající v druhé trojici rovinám prvé trojice, jež procházejí proměnným bodem pevné roviny, protínají se v bodě vytvořujícím obecnou plochu 3. stupně. Viz *F. August*, Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis, Dissertation Berlin 1862. Nebo jsou-li dány tři roviny, tři přímky a bod, vytvořuje průsečík tří rovin, v nichž se ze tří přímek daných promítají průsečíky přímky daným bodem jdoucí s danými rovinami, plochu 3. stupně. Viz *F. Deruyts*, Génération d'une surface du troisième ordre, Mémoires Soc. sc. Liège (2) 14 (1888). Pro další vytvoření na základě vztahu trilineárního a pro jiné způsoby vytvoření plochy 3. stupně budiž uvedeno: *C. le Paige*, Sur les surfaces du troisième ordre, Acta math. 3 (1882) a 5 (1884); *F. London*, Zur Theorie der trilinearen Verwandtschaft dreier einstufiger Grundgebilde, Math. Annalen 44 (1894); *W. A. Versluys*, Étude de singularités d'une surface du troisième ordre, engendrée par un système de faisceaux homographique H_3^2, Mémoires Soc. sc. Liège (2) 20 (1898); *G. Affolter*, Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung, Archiv Math. Phys. 56 (1874); *H. Picquet*, Sur un nouveau mode de génération des surfaces du troisième ordre, Bulletin Soc. math. France 4 (1876); *G. v. Escherich*, Die Construction der algebraischen Curven und Flächen aus der Anzahl der bestimmenden Punkte mittelst reciproker linearer Systeme höherer Stufe, Sitzungsberichte Akad. Wien 85 (1882); *R. Sturm*, Über die 27 Geraden einer kubischen Fläche, Math. Annalen 23 (1884); *F. Deruyts*, Sur un procédé de génération de la surface cubique, Bulletin Acad. Belgique (3) 22 (1891); *G. Majcen*, Eine neue Erzeugungsart für verschiedene typische Formen der Fläche dritter Ordnung, Jahresbericht D. Math. Ver. 14 (1905).

[14]) U plochy 3. stupně lze stanoviti a vyšetřovati *plochy polárné* a útvary s nimi souvisící. K libovolnému bodu P, ležícímu na dané ploše 3. stupně π, přísluší plocha 2. stupně, vytvořená body, jež na každé přímce bodem P

roviny ϱ_1, resp. ϱ_2 s plochou π, mají devět společných rovin (tečných). Z těchto devíti rovin protínají se tři se sdruženými rovinami obou ostatních trsů v dotčených bodech přímky $\varrho_1\varrho_2$, ostatních šest má však své průsečíky se sdruženými rovinami jednak v ϱ_1, jednak v ϱ_2 (mimo $\varrho_1\varrho_2$); má tedy každá ze šesti uvedených rovin se sdruženými rovinami celou přímku společnou, která ovšem leží na ploše 3. stupně π. Tyto (reálné nebo imaginární) průsečnice vždy tří sobě odpovídajících rovin (ve třech kolineárních trsech S, S' a S'', π vytvořujících) označme $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Jsou mimoběžné: neboť kdyby dvě z nich, třebas a_1 a a_2, se protínaly, měly by roviny α_1, α'_1 a α''_1, jdoucí přímkou a_1, i roviny α_2, α'_2 a α''_2, jdoucí přímkou a_2, jejich průsečík za společný bod, t. j. protínaly by se sdružené paprsky $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha'_1\alpha'_2$ a $\alpha''_1\alpha''_2$ trsů S, S' a S'' v jednom bodě, což obecně neplatí. *Leží tedy na ploše 3. stupně šest mimoběžných přímek* $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, z nichž každá je průsečnicí tří

---

jdoucí jsou harmonicky sdruženy vzhledem k ostatním dvěma průsečíkům přímky té s plochou π; plocha tak vznikající sluje *polárnou kvadrikou* (nebo kvadratickou polárou) bodu P vzhledem k ploše π. Polárná kvadrika bodu P na ploše π vzhledem k ní dotýká se této plochy v bodě P a obsahuje dotyčné body tečen z bodu toho k ploše π vedených (i hlavní tečny plochy π v bodě P). Polárné kvadriky tří průsečíků přímky p s plochou π leží ve svazku ploch kvadratických (jak plyne pomocí průsečných čar v rovinách jdoucích přímkou p); stanovíme-li mezi body přímky p a kvadrikami svazku toho projektivnost tím, že oněm třem bodům přiřadíme příslušné k nim polárné kvadriky tohoto svazku, přísluší touto projektivností ke každému bodu na přímce p určitá kvadrika uvedeného svazku, kterou nazveme polárnou kvadrikou bodu toho vzhledem k ploše π. Tak obdržíme ke každému bodu v prostoru příslušnou kvadratickou poláru vzhledem k ploše π; polárná kvadrika libovolného bodu P vzhledem k ploše π obsahuje dotyčné body tečen i tečných rovin, vedených bodem P k ploše π. Jako tvoří polárné kvadriky všech bodů na přímce ležících vzhledem k ploše π svazek jednomocný, tak polárné kvadriky všech bodů roviny nebo všech bodů prostoru tvoří dvojmocný resp. trojmocný svazek ploch kvadratických.

Polárná rovina libovolného bodu P vzhledem k polárné kvadrice jeho $\varkappa$ u plochy π sluje *polárnou rovinou* (nebo lineární polárou) bodu P vzhledem k ploše π. Leží-li spec. bod P na ploše π, dotýká se jeho polárná rovina vzhledem k π polárné kvadriky $\varkappa$ bodu toho i plochy π v bodě P. Jsou-li obecněji $\varkappa_1$ a $\varkappa_2$ kvadratické poláry dvou bodů P_1 a P_2 vzhledem k π, jsou polárná rovina bodu P_1 vzhledem ke $\varkappa_2$ a polárná rovina bodu P_2 vzhledem ke $\varkappa_1$ totožny (tato rovina sluje polárnou rovinou dvojice P_1P_2).

K libovolnému bodu P mimo danou plochu 3. stupně π ležícímu lze přiřaditi plochu 3. stupně, vytvořenou body, jež jsou na každé přímce bodem P jdoucí harmonicky sdruženy k bodu P vzhledem k jednotlivým dvojicím ze tří průsečíků přímky té s plochou π; tato plocha 3. stupně sluje *polárnou plochou kubickou* (kubickou polárou) bodu P vzhledem k ploše π. Leží-li spec. bod P na ploše π, rozpadá se kubická polára jeho v polárnou kvadriku bodu toho a tečnou rovinu plochy π v bodě P. Viz dále *R. Sturm*, Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung; *R. Sturm*, Zur Theorie der Flächen 3. Ordnung, Journal r. a. Math. 88 (1879); *A. Milinowski*, Zur Polarentheorie der Curven und Flächen dritter Ordnung, Journal r. a. Math. 89 (1880); *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage III.

sdružených rovin kolineárních trsů S, S' a S''; tyto přímky jsou společnými bisekantami druhé sítě (h) prostorových čar kubických na ploše.[1])

Vezměme v úvahu tři sobě odpovídající kuželové plochy 2. třídy v trsech S, S' a S''; protože každá z nich má s kuželovou plochou 3. třídy téhož trsu (jejíž každá rovina se s třemi korespondujícími protíná v bodě rovinného řezu plochy π) šest rovin společných, vytvořují tyto tři kuželové plochy 2. třídy průsečnicemi sdružených rovin svých prostorovou čáru 6. stupně, ležící na ploše π (a neprotínající přímek a_k). Jestliže taková kvadratická plocha kuželová v jednom trsu dotýká se pěti z přímek uvedené šestiskupiny (zvolme za ně a_2, a_3, a_4, a_5, a_6), dotýkají se jich také ostatní dvě sdružené plochy kuželové; uvedená čára 6. stupně rozpadá se tedy v těchto pět přímek a v šestou přímku b_1, jež protíná přímky a_2 až a_6, k přímce a_1 jest však mimoběžná. Poněvadž pět ze šesti přímek skupiny a můžeme vybrati šesti způsoby, přicházíme tak opět k šesti přímkám plochy π, jež označíme písmeny $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$; z nich každá je mimoběžná k přímce a_p téhož indexu, takže všechny tyto přímky b_p jsou mimoběžné. *Na ploše 3. stupně leží* tedy *druhá skupina šesti mimoběžných přímek* $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$, z nichž každá b_p protíná pět přímek skupiny a vyjma a_p, jsouc k této mimoběžná.

Dvanáct nalezených přímek plochy 3. stupně tvoří *dvě skupiny po šesti přímkách* (dvojitou šestiskupinu přímek)

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6,$$
$$b_1b_2b_3b_4b_5b_6,$$

z nichž každá je mimoběžná k přímkám téhož řádku a k přímce téhož sloupce, protíná však ostatní přímky řádku druhého.

Přímka skupiny a neprotíná prostorových čar kubických první sítě (g) na ploše π; neboť tři sdružené roviny, jejichž společnou průsečnicí jest a_k, neleží obecně ve třech svazcích rovin kubiku vytvořujících (leží-li tam, rozpadá se kubika v přímku a_k a v kuželosečku). Protože ze tří svazků rovin v kubice g se protínajících každý vysílá dvě roviny (tečné) ke kuželové ploše 2. třídy téhož trsu, má čára g dva body společné s prostorovou čarou 6. stupně, vytvořenou třemi sdruženými kuželovými plochami 2. třídy; nemajíc s přímkou skupiny a žádného bodu společného, má tedy každá kubika první sítě dva body společné s každou přímkou skupiny b.

b) Mimo uvedených 12 přímek dvojité skupiny a_p, b_p existují však na ploše π ještě další přímky. Jestliže trojicemi sdružených rovin kolineárních trsů S, S' a S'', jež se protínají v přímce a_1 resp. a_2, jsou roviny α_1, α'_1 a α''_1, resp. α_2, α'_2 a α''_2, vytvořují sdružené svazky rovin

[1]) Větu právě nalezenou lze takto vysloviti: Ze tří kolineárních trsů o různých středech protíná se (nanejvýš) šest trojic sdružených rovin v přímkách. A protože od dvou prostorových čar kubických se společným bodem můžeme dospěti ke třem kolineárním trsům, jež vytvořují plochu 3. stupně čáry ty obsahující, platí také: Dvě prostorové čáry 3. stupně se společným bodem mají (nanejvýš) šest společných bisekant.

s osami a_1a_2, $a'_1a'_2$ a $a''_1a''_2$ prostorovou čáru 3. stupně sítě (g), která se rozpadá ve dvě přímky a_1, a_2 a v třetí přímku c_{12}; tato má s přímkami a_1, a_2 po jednom bodě společném. Tak dostáváme dalších *patnáct přímek* c_{pq} (kde $p, q = 1, 2, \ldots, 6$, ale $p \neq q$), tedy c_{12}, c_{13}, c_{23}, $\ldots$, c_{56}, *ležících na ploše 3. stupně*.

Přímky skupiny c mají s prostorovými čarami 3. stupně první sítě (g) po jednom bodě společném; neboť každá c_{pq} jest částí prostorové kubiky na π z první sítě a má proto s každou jinou kubikou g jeden společný bod, který leží na c_{pq}, ježto neleží na a_p ani na a_q.

Úhrnem tedy mají přímky a_p, b_p, c_{pq} vůči prostorovým čarám 3. stupně první sítě (g) na ploše 3. stupně tuto polohu: přímka a_p neprotíná žádné kubiky této soustavy, přímka b_p má s každou kubikou její dva body společné, přímka c_{pq} jeden bod společný. Proti tomu platí o poloze přímek těch vůči prostorovým čarám 3. stupně druhé sítě (h) na ploše: přímka a_p protíná každou kubiku soustavy té dvakrát, přímka b_p neprotíná žádnou, přímka c_{pq} protíná každou v jednom bodě. Neboť a_p jest bisekantou čáry h, jak bylo uvedeno; přímce c_{pq} připadá z pěti průsečíků čáry h s kubikou, rozpadávající se v a_p, a_q a c_{pq}, zbývající jeden (po dvou připadá totiž na a_p, a_q); konečně b_p nemá s čarou h společného bodu, protože přímky a_q, b_p a c_{pq} leží v rovině (vzhledem k tomu, že a_q a b_p, potom a_q a c_{pq} se protínají podle předešlého, b_p a c_{pq} pak proto, že ze dvou průsečíků přímky b_p s přímkami a_p, a_q a c_{pq}, jež tvoří kubiku první sítě, jest jeden na a_q, žádný na a_p) a že ze tří průsečíků této roviny $a_qb_pc_{pq}$ s čarou h leží dva na a_q a jeden na c_{pq}.

Vzájemnou polohu *27 přímek na ploše 3. stupně* (ve skupinách a, b, c) poznáváme z uvedené nahoře věty o vzájemné poloze přímek dvojité skupiny po šesti přímkách a, b a z vět dalších: Každá z přímek c_{pq} protíná z přímek skupin a, b jenom a_p, a_q, b_p, b_q, jsouc průsečnicí rovin a_pb_q, a_qb_p. Dvě přímky skupiny c bez společného indexu se protínají, dvě přímky c se společným indexem (jedním) jsou mimoběžné. Neboť bylo už nalezeno, že na př. c_{12} protíná a_1, a_2, každou v jednom bodě; ze dvou průsečíků pak, jež má b_1 (b_2) na kubice, složené z přímek a_1, a_2 a c_{12}, leží jeden na a_2 (a_1), druhý na c_{12}; přímky b_3, b_4, b_5, b_6 neprotínají však c_{12}, protože každá protíná a_1 i a_2, čímž jsou dva průsečíky její s kubikou tou vyčerpány; konečně a_3, a_4, a_5, a_6 neprotínají kubiky, sestávající z přímek a_1, a_2 a c_{12}, vůbec, tedy ani c_{12}. Rovina $a_pb_qc_{pq}$ protíná plochu π ve třech přímkách a_p, b_q a c_{pq}; tuto rovinu protíná každá z ostatních přímek plochy π v jednom bodě, a to podle předešlého přímka c_{pr} na a_p, c_{qr} na b_q, přímka c_{rs} pak (kde $r, s \neq p, q$), neprotínajíc ani a_p ani b_q, protíná c_{pq}.[2])

[2]) První pojednání o 27 přímkách na ploše 3. stupně uveřejnil *A. Cayley*, On the triple tangent planes of surfaces of the third order, Cambridge a. Dublin math. Journal 4 (1849), a doplnil tamtéž *G. Salmon*, On the triple tangent planes to a surface of the third order. Dvojité skupiny po šesti přímkách na ploše 3. stupně (pojmenované *double-six*, dvojšesteřice) postřehl

Odtud pak plyne: *Každá z 27 přímek na ploše 3. stupně protíná deset z ostatních; všechny se protínají v 135 bodech a tvoří 45 trojstranů.*[3])

Z 27 přímek dané plochy 3. stupně lze vybrati vedle dvojité šestiskupiny přímek a_p, b_p, prve uvažované, ještě jiné dvojité šestiskupiny typů

$$a_1a_2a_3c_{56}c_{46}c_{45} \qquad a_1b_1c_{23}c_{24}c_{25}c_{26}$$
$$c_{23}c_{13}c_{12}b_4b_5b_6 \qquad a_2b_2c_{13}c_{14}c_{15}c_{16}$$

těchže vlastností; dvojitých skupin prvního typu jest 20, skupin druhého

---

první *Schläfli*, An attempt to determine the twenty-seven lines upon a surface of the third order, Quart. Journal math. 2 (1858). Vzhledem k vytvoření plochy třemi kolineárními trsy viz *H. Schröter*, Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung, Journal r. a. Math. 62 (1863). Přímkami na ploše 3. stupně zabývá se velmi mnoho pojednání; mimo jinde uvedená na př. *R. Sturm*, Über die 27 Geraden einer kubischen Fläche, Math. Annalen 23 (1884); *K. Küpper*, Die Flächen F^4 und F^3, Abhandlungen Böhm. Ges. Wiss. (7) 2 (1887); *G. Kohn*, Über einige Eigenschaften der allgemeinen Fläche dritter Ordnung, Sitzungsberichte Akad. Wien 117 (1908); *W. Burnside*, On the group of the twenty-seven lines of a cubic surface, Quart. Journal math. 40 (1909); *H. F. Baker*, A geometrical proof of the theorem of a double-six of straight lines, Proceedings R. soc. London 84 (1910), a Notes on the theory of the cubic surface, Proceedings Math. soc. London (2) 9 (1910); *G. T. Bennett*, The double-six, tamtéž; *H. F. Baker*, On a proof of the theorem of a double-six of lines by projection from four dimensions, Proceedings Phil. soc. Cambridge 20 (1920); pomocí zobrazení plochy v rovině je vyšetřuje na př. *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage III, p. 85. Podrobný přehled celé věci podává *A. Henderson*, The twenty-seven lines upon the cubic surface (1911). Viz dále (pro synthetický výklad) *E. Stenfors*, Die Schläflische Konfiguration von zwölf Geraden einer Fläche dritter Ordnung, Helsingfors 1921; *O. Stenström*, Synthetische Untersuchungen des Systems von 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung, Dissertation Uppsala 1925.

[3]) Trojstrany tyto jsou dvojího typu, 30 složených z přímek a_p, b_q, c_{pq} a 15 složených vždy ze tří přímek skupiny c bez společného indexu. Z uvedených 135 průsečíků přímek na ploše 3. stupně lze vybrati 45 skupin po 12 bodech, jež tvoří vždy vrcholy tří t. zv. desmických čtyrstěnů (t. j. čtyrstěnů, z nichž kterékoli dva jsou čtyřmi způsoby perspektivní tak, že středy perspektivnosti jsou vrcholy čtyrstěnu třetího).

Rovina jdoucí přímkou plochy 3. stupně protíná plochu tu ještě v kuželosečce, jejíž dva průsečíky s přímkou jsou dotyčnými body oné roviny s plochou; obsahuje tedy plocha 3. stupně 27 jednomocných soustav kuželoseček ležících ve svazcích rovin, jejichž osami jsou přímky plochy, a roviny těchto svazků dotýkají se plochy vždy ve dvou bodech. V každém svazku tom jest pět rovin, jejichž průsečná kuželosečka na ploše se rozpadá ve dvě přímky, takže roviny takové se plochy dotýkají vždy ve třech bodech; těchto tečných rovin plochy 3. stupně s dotykem ve třech bodech jest ovšem 45. Z vět sem příslušných budiž ještě uvedeno: Vedeme-li třemi přímkami plochy 3. stupně, tvořícími trojstran, tři libovolné roviny, leží jejich průsečné kuželosečky s plochou na téže ploše 2. stupně; a obráceně. U roviny, dotýkající se plochy 3. stupně ve třech bodech, tvoří čtveřiny dalších takových rovin, jdoucích každou ze tří přímek roviny té na ploše, skupinu téhož dvojpoměru. K tomuto viz *G. Kohn*, Beweis eines Satzes von Cayley, Monatshefte Math. Phys. 2 (1891).

typu 15 (protože stačí vybrati ze šesti přímek a tři do jednoho řádku, resp. dvě do jednoho sloupce nové skupiny); všech *dvojitých šestiskupin po 12 přímkách jest* tedy *u plochy 3. stupně 36.*[4])[5])[6])

[4]) Ke každé skupině takové můžeme jako ke skupině hořejší připojiti dvě sítě prostorových čar kubických na ploše, z nichž čáry jedné sítě protínají přímky první šestiskupiny ve dvojicích bodů a přímek druhé šestiskupiny neprotínají, kdežto u čar druhé sítě je tomu obráceně. Při určitých třech bodech dané plochy 3. stupně jako středech lze kolineaci trsů vytvořujících zvoliti tak, že učiníme sdruženými roviny jdoucí čtyřmi přímkami téhož jednoho nebo druhého řádku v některé z uvedených dvojitých skupin přímek na ploše (zbývající dvě přímky řádku toho jsou pak také průsečnicemi rovin při této volbě sdružených); jest tedy možno určitou plochu 3. stupně vytvořiti na 72 způsoby třemi kolineárními trsy týchž zvolených středů na ploše (a existuje na ploše 3. stupně 36 dvojic sítí prostorových čar kubických).

Z vět o přímkách dvojité šestiskupiny přímek na ploše 3. stupně jest také důležité, že kterékoli dvě mimoběžné přímky různých šestiskupin (tedy téhož sloupce, na př. a_p, b_p) jsou sdruženými polárami vzhledem k určité ploše 2. stupně. O této kvadratické ploše, jakož i o ploše 3. třídy, sdružené v polárnosti plochy té s danou plochou 3. stupně, pojednává zejména *Th. Reye*, Beziehungen der allgemeinen Fläche dritter Ordnung zu einer kovarianten Fläche dritter Klasse, Math. Annalen 55 (1902).

Z 27 přímek plochy 3. stupně lze sestaviti vedle nejširších skupin šestičlenných mnohé skupiny po dvou až pěti přímkách mimoběžných (skupiny pětičlenné dvojího druhu). Je na př. zajímavé, že zborcená plocha kvadratická, určená jednou trojicí mimoběžných přímek plochy 3. stupně, protíná tuto v druhé trojici takové; těchto ploch kvadratických a tedy dvojic trojčlenných skupin přímek na ploše 3. stupně jest 360. Mimo trojstrany nahoře uvedené byly vyšetřovány prostorové n-úhelníky z přímek plochy 3. stupně složené (pro $n = 4, 5, 6$, vyšší nejsou možny).

[5]) Roviny kterýchkoli dvou z vytčených 45 trojstranů bez společné strany protínají se v přímce, jejíž tři průsečíky s plochou 3. stupně jsou spolu průsečíky vždy dvou stran těchto trojstranů. Tři roviny, jdoucí těmito dvojicemi stran obou trojstranů, tvoří trojstěn, jehož stěny protínají plochu v dalších třech přímkách, skládajících opět trojstran; roviny obou původních trojstranů a tohoto třetího tvoří druhý trojstěn, s oním sdružený. Stěny každého z dvojice takových *sdružených trojstěnů* (t. zv. *Steinerových*) protínají stěny druhého v devíti přímkách plochy. Ke každé dvojici sdružených trojstěnů lze připojiti dvě jiné tak, že všechny tři obsahují všech 27 přímek plochy. Na ploše 3. stupně existuje 120 dvojic sdružených trojstěnů Steinerových (40 skupin po třech dvojicích uvedené vlastnosti). Trojstěny až devítistěny, tvořené trojnásobnými tečnými rovinami plochy 3. stupně (z nichž žádné dvě nemají společnou přímku plochy), vyšetřil *E. Bertini*, Contribuzione alla teoria delle 27 rette e dei 45 piani tritangenti di una superficie di 3° ordine, Annali mat. 12 (1884).

[6]) Obecná plocha 3. stupně (reálná), vytvořená třemi reálnými trsy rovinovými, jejichž kolineace jest reálná, má podle reálnosti svých přímek *čtyři druhy*: obsahuje buď 27 reálných přímek nebo 15 nebo 7 nebo 3 (přímek skupiny a má reálných buď 6 nebo 4 nebo 2 nebo žádnou, rovněž tolik reálných přímek skupiny b). K tomu ještě přistupuje pátý druh obecné plochy 3. stupně (s třemi reálnými přímkami), jehož však nelze vytvořiti uvedeným způsobem; všech pět druhů vzniká dvěma projektivními (reálnými) svazky, svazkem rovin a svazkem ploch kvadratických. Viz na př. *R. Sturm*, Synthetische Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung, p. 310.

c) Konfigurace 27 přímek, vyskytující se u plochy 3. stupně, a plocha 3. stupně sama *jest* (jednoznačně) *určena pěti* (mimoběžnými) *přímkami z téže polovice dvojité šestiskupiny svých přímek.* Můžeme totiž z těchto přímek sestrojiti další přímky dvojité šestiskupiny i ostatní přímky konfigurace.

Vyjděme od daných pěti mimoběžných přímek (na př.) a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, k nimž existuje přímka je protínající b_6 (t. j. přímka kterékoli čtyři z nich protínající protíná i pátou, takže ji podle toho lze sestrojiti); nebo obráceně od přímky b_6 a pěti přímek ji protínajících a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, z nichž žádné dvě neleží v téže rovině a žádné čtyři nepatří téže kvadratické řadě zborcené. Pro každou skupinu čtyř přímek, vybraných z pěti přímek a_1 až a_5, sestrojíme přímku je (vedle b_6) protínající; tak obdržíme pro přímky a_1, a_2, a_3, a_4 přímku b_5, pro a_1, a_2, a_3, a_5 přímku b_4, pro a_1, a_2, a_4, a_5 přímku b_3, pro a_1, a_3, a_4, a_5 přímku b_2, pro a_2, a_3, a_4, a_5 přímku b_1; konečně sestrojíme pro kterékoli čtyři ze skupiny pěti přímek tak nalezených b_1 až b_5 přímku je protínající a_6, jež protíná také pátou z přímek těch (neboť kterékoli čtyři z přímek b_1 až b_5, majíce jednu z přímek a_1 až a_5 za přímku je společně protínající, mají ještě a jenom druhou přímku této vlastnosti).

Ostatních patnáct přímek c_{pq} dostaneme jako průsečnice rovin $a_p b_q$, $a_q b_p$. Jsou-li dané přímky reálné, jsou i přímky zde sestrojené reálné.

Plocha 3. stupně vytvoří se na základě uvedených přímek daných třemi kolineárními trsy: jestliže totiž středy tří trsů zvolíme třebas na a_5 a jejich kolineace ustanovíme čtyřmi trojicemi sdružených rovin, jdoucích přímkami a_1 až a_4, obsahuje plocha trsy těmi vytvořená také přímku b_6 (obsahujíc její čtyři body), tedy i bod $a_5 b_6$ a přímku a_5.[7]) Přímky nahoře sestrojené leží na této ploše, protože na ní mají po čtyřech svých bodech. Z přímek můžeme nalézti pomocí jejich průsečíků s rovinou řez plochy 3. stupně na libovolné rovině.

96. Plocha 3. stupně s bodem dvojným. *a*) U tří kolineárních trsů s různými středy S, S' a S'', jež vytvořují obecnou plochu 3. stupně, neprotíná se žádná trojice sdružených přímek v jednom bodě. Jestliže však *tři sdružené paprsky* těchto trsů *se protínají v témž bodě* D, jest bod ten *dvojným bodem* vytvořené plochy: libovolná přímka bodem tím jdoucí má s plochou společné dva body v něm splývající (a obecně jen třetí průsečík od něho různý).

Neboť na libovolné přímce p, vedené bodem D, změní se jednodvojznačná korespondence mezi body X a Y (uvedená v čl. 94 *a*) v projektivnost s jedním bodem samodružným v D, takže jediným bodem plochy na p mimo D ležícím (v obecném případě) je druhý samodružný bod této

[7]) Viz *S. Jolles*, Der Zusammenhang der Doppelsechs mit der Grassmann'schen Erzeugung kubischer Flächen, Archiv Math. Phys. (3) 16 (1910).

projektivnosti. Ze dvou bodů Y_1 a Y_2, které u obecné plochy 3. stupně odpovídají bodu X na p, splyne jeden vždy s bodem D, protože zborcená řada kvadratická, vytvořená projektivními svazky rovin v trsech S' a S'' s osami, jež korespondují paprsku SX, prochází bodem D (dvě sdružené roviny vytvořujících svazků jdou totiž sdruženými přímkami $S'D$ a $S''D$). U obapolně jednoznačné korespondence mezi body X a Y splývá jeden samodružný bod s bodem D, protože bodu $X = D$ odpovídá průsečík Y kvadratické plochy kuželové, vytvořené svazky rovin s osami $S'D$ a $S''D$ (ježto tyto přímky odpovídají přímce SD), s přímkou p, tedy vrchol této kuželové plochy D.

Všechny prostorové čáry 3. stupně sítě (*g*) *i sítě* (*h*) *procházejí dvojným bodem plochy D.* Neboť z projektivních svazků rovin se sdruženými osami (trsů S, S' a S''), jež vytvořují každou kubiku první sítě, procházejí tři sdružené roviny bodem D, totiž roviny jdoucí přímkami SD, $S'D$ a $S''D$. Tři kubiky druhé sítě, vytvořené vždy dvěma z trsů S, S' a S'', jdou bodem D jako průsečíkem sdružených přímek trsů těch; a při volitelnosti středů pro vytvořující trsy plochy uvažované platí totéž o všech kubikách sítě druhé.

Dvojným bodem plochy 3. stupně D *jde šest přímek plochy, z nichž v každé splývají dvě* (mimoběžné) z 27 přímek plochy obecné, takže obě řady téže dvojité skupiny o 12 přímkách přecházejí v tuto skupinu šesti přímek; ostatních 15 přímek plochy leží po jedné v rovinách, jež těchto šest po dvou spojují. Neboť bodem D procházejí předně tři přímky, ve které se rozpadá prostorová čára kubická, vytvořená projektivními svazky rovin s osami SD, $S'D$ a $S''D$; tyto přímky skupiny a označme třebas a_1, a_2, a_3. Tři projektivní svazky rovin se sdruženými osami trsů S, S' a S'', jež protínají tytéž další dvě přímky skupiny a, třebas a_4 a a_5, vytvořují kubiku, složenou z těchto přímek a třetí přímky na ploše c_{45}; tato c_{45} prochází také bodem D (jako součást čáry kubické, protože bodem D nejdou a_4, a_5), obdobně pak ještě přímky c_{46} a c_{56}. Protože pak ze tří přímek c_{45}, c_{46} a c_{56} každá protíná všechny přímky skupiny a vyjma a_k (pro $k = 6, 5, 4$) (na př. c_{45} protíná a_1, a_2, a_3 v bodě S, a_4, a_5 podle předpokladu), jest to spolu přímka b_k; konečně přímky a_1, a_2, a_3 jsou totožny resp. s přímkami c_{23}, c_{13}, c_{12}, protože na př. pro a_1 v trojicích přímek po dvou se protínajících $a_1 b_4 c_{14}$ a $c_{23} c_{56} c_{14}$ při totožnosti dvakrát dvou přímek musí splývati i zbývající dvě.

Aby plocha 3. stupně měla dvojný bod D, zajistíme tím, že při stanovení kolineace tří trsů S, S' a S'', plochu vytvořujících, učiníme přímky SD, $S'D$ a $S''D$ sdruženými; odtud je také patrno, že plocha 3. stupně může míti *jeden až čtyři body dvojné.* Že však plocha 3. stupně (s konečným počtem dvojných bodů) nemůže míti více bodů dvojných než čtyři, vysvítá z jejího sestrojení pomocí dvou prostorových čar kubických h_1 a h_2 se společným bodem S (podle čl. 94 *d*); takové dvě čáry mohou mimo uvedený bod míti nejvýše čtyři body společné, a v každém

jejich průsečíku (mimo S) protínají se tři sdružené paprsky trsů S, S' a S'', plochu vytvořujících.[1])

b) K ploše 3. stupně s dvojným bodem dospějeme také u tří kolineárních trsů, z nichž *dva jsou soumístné a třetí s nimi nesoumístný*. Společný střed dvou z těchto trsů je dvojným bodem plochy.

Buďtež středy dvou trsů S a S' totožny, střed trsu třetího S'' od nich různý. Prostorová čára kubická, vytvořená v případě obecném dvěma kolineárními trsy o různých středech S a S', rozpadá se zde ve tři přímky jdoucí bodem S, samodružné přímky v kolineaci soumístných trsů S a S'; všechny body takové přímky leží zajisté na ploše, protože se v každém protínají dvě sdružené roviny trsů S a S' (jdoucí uvažovanou přímkou jako samodružnou) a sdružená k nim rovina trsu S''. Libovolná jiná přímka trsu S a spolu trsu S', jsouc průsečnicí dvou určitých rovin, sdružených v kolineaci trsů S a S', má jako bisekanta kubické čáry z trsů těch vznikající v bodě S dva splývající body s plochou 3. stupně společné; třetím bodem přímky té s plochou společným je pak průsečík její s rovinou, sdruženou k oběma dotčeným v trsu S''.

Dvojným bodem S plochy 3. stupně procházejí mimo uvedené tři přímky, samodružné paprsky kolineace dvou soumístných trsů vytvořujících S a S', ještě další tři přímky, totiž přímka $S''S$ a dvě přímky, které jí jako paprsku trsu S'' v trsech S a S' odpovídají. Neboť tyto přímky, sdružené v daných trsech, jsou osami projektivních svazků rovin se společným bodem S, a dvěma sdruženým rovinám dvou ze svazků těch, jež procházejí přímkou třetí, odpovídá rovina třetího svazku, takže tato třetí osa je průsečnicí tří rovin sdružených.

O nalezených zde šesti přímkách platí totéž, co bylo uvedeno nahoře. Neboť tři přímky na druhém místě vytčené jsou jako průsečnice vždy

[1]) Typy ploch 3. stupně podle dvojných bodů (a reálnosti přímek) odvodil analyticky *Schläfli*, On the distribution of surfaces of the third order into species, in reference to the absence or presence of singular points and the reality of their lines, Philos. Transactions London 153 (1863); nalezl (v prvém ohledu) mimo obecnou plochu 3. stupně 20 druhů ploch s konečným počtem dvojných bodů (a dva druhy ploch přímkových). Geometricky vyšetřuje plochy 3. stupně s jedním až čtyřmi body dvojnými (na základě vytvoření plochy dvěma projektivními svazky, rovin a ploch kvadratických) *R. Sturm*, Synthetische Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung, p. 349; uvedené roztřídění jednoduchou cestou geometrickou podal a vytvoření všech typů způsobem právě dotčeným popsal *K. Bobek*, Zur Klassification der Flächen dritter Ordnung, Sitzungsberichte Akad. Wien 96 (1887). Viz také *G. Kohn*, Über Flächen dritter Ordnung mit Knotenpunkten, tamtéž. Dále *M. Zacharias*, Untersuchungen über die Flächen dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten, Archiv Math. Phys. (3) 18 (1911); doplnil (analyticky) *H. E. Timerding*, Über Flächen dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten, Archiv Math. Phys. (3) 20 (1913). O přímkách plochy 3. stupně s bodem dvojným viz *L. Cremona*, Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà del esagramma di Pascal, Memorie Accad. L. Roma (3) 1 (1877), a *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage III, Anhang.

tří sdružených rovin kolineárních trsů S, S' a S'' přímkami skupiny a, tedy třebas a_1, a_2, a_3. Další přímky této skupiny (a_4, a_5, a_6) jsou průsečnice každé ze tří samodružných rovin dvou soumístných trsů S a S' s rovinou, jež jí v trsu S'' odpovídá; odtud plyne, že tři přímky na prvním místě vytčené, samodružné přímky trsů S a S', jest označiti c_{45}, c_{46}, c_{56}. Ostatek se shoduje s úvahou hořejší.[2])

---

[2]) Mají-li tři kolineární trsy společnou přímku samodružnou, jest každý její bod dvojným bodem plochy, trsy těmi vytvořené; k takové přímce na ploše přijdeme také u tří kolineárních trsů s různými středy, jestliže předpokládáme, že tři průsečíky vždy tří sdružených paprsků jejich leží v přímce. Oběma způsoby vzniká *přímková plocha 3. stupně*. Viz na př. *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften II, p. 199.

IX. KOLINEACE ZÁKLADNÍCH ÚTVARŮ TROJMOCNÝCH.

97. Kolineace a její stanovení. *a*) Dvě prostorové soustavy bodů a rovin (dva prostory) slují *projektivní*, jestliže každému prvku, bodu nebo rovině, každé z obou soustav odpovídá jediný prvek druhé soustavy a jestliže incidentním prvkům v jedné soustavě odpovídají prvky incidentní v soustavě druhé.

Máme-li na zřeteli prostorové soustavy složené jenom z elementů téhož druhu, soustavy bodové a soustavy rovinové, můžeme říci, že dva základní útvary trojmocné, vyplněné elementy téhož druhu nebo různého druhu, jsou projektivní, *jestliže každému prvku jednoho i druhého koresponduje jeden prvek druhého resp. prvního a jestliže prvkům vyplňujícím dvojmocný útvar základní odpovídají prvky vyplňující opět základní útvar dvojmocný.*

Jak patrno, jest nutno rozeznávati *dvojí projektivnost základních útvarů 3. řádu*: projektivnost mezi dvěma prostory, při níž sobě odpovídají elementy téhož druhu (bodu bod, rovině rovina) a tedy také dvojmocné útvary téhož druhu (poli pole, trsu trs) — tato projektivnost sluje *kolineace* (homografie); projektivnost dvou prostorů, v níž sobě korespondují prvky různého druhu (bodu rovina, rovině bod) a dvojmocné útvary různého druhu (poli trs, trsu pole) — tato projektivnost sluje *korelace* (reciprocita).

Omezíme se v dalším zatím na kolineaci.

b) Buďtež dány dva kolineární prostory Σ a Σ'; odpovídá tedy každému bodu X a každé rovině ξ v Σ jeden bod X' resp. jedna rovina ξ' v Σ', bodům pak X vyplňujícím pole ξ a rovinám ξ vyplňujícím trs X odpovídají body X' tvořící pole ξ' resp. roviny ξ' tvořící trs X'; a obráceně.

Avšak také přímky sobě v kolineárních prostorech odpovídají. Platí totiž:

V kolineaci mezi dvěma prostory odpovídají bodům ležícím na libovolné přímce v jednom body přímky (korespondující) v druhém.

V kolineaci mezi dvěma prostory odpovídají rovinám jdoucím libovolnou přímkou v jednom roviny přímky (korespondující) v druhém.

Neboť rovinám ξ a η, jež se protínají v přímce x prostoru Σ, korespondují roviny ξ' a η' prostoru Σ'; bodům ležícím na ξ i na η a tedy na x odpovídají body obsažené v ξ' i v η', tudíž body jejich průsečnice x'; a duálně rovinám, jež jsou společny trsům X a Y v Σ, odpovídají roviny obsažené v obou korespondujících trsech X' a Y' prostoru Σ', t. j. rovinám svazku s osou XY roviny svazku s osou $X'Y'$.

Obráceně platí o korespondenci mezi body resp. rovinami dvou prostorů:

Jestliže mezi body dvou prostorů existuje korespondence obapolně jednoznačná, v níž bodům každé přímky v jednom odpovídají body přímky v druhém, jest tato korespondence kolineací.

Jestliže mezi rovinami dvou prostorů existuje korespondence obapolně jednoznačná, v níž rovinám každé přímky v jednom odpovídají roviny jdoucí přímkou v druhém, je korespondence ta kolineací.

Abychom totiž dokázali (pro případ na straně levé), že bodům na rovině v jednom z obou daných prostorů (v Σ) odpovídají body roviny v druhém (Σ'), zvolme v rovině ξ prostoru Σ přímku x a bod mimo ni ležící X; těmto prvkům x a X odpovídají podle předpokladu v Σ' přímka x' resp. bod X', mimo x' ležící (kdyby totiž X' ležel na x', musil by X ležeti na x). Bodům každé přímky y, ležící v rovině ξ a jdoucí bodem X, odpovídají v Σ' body přímky y', procházející bodem X'; a protože y protíná x, má také každá přímka y' jeden svůj bod na x', vytvořuje tudíž přímka y' rovinu $X'x'$ ($\equiv \xi'$), jejíž všechny body korespondují bodům roviny ξ.

Obě uvedené věty (i s duálními) můžeme shrnouti v jednu: Kolineace mezi dvěma základními útvary trojmocnými je obapolně jednoznačná korespondence té charakteristické vlastnosti, že *prvkům základního útvaru jednomocného v jednom odpovídají prvky základního útvaru jednomocného téhož druhu v druhém.*

Odtud pak vyplývá: Jestliže ve dvou kolineárních prostorech sobě odpovídají dvě roviny, korespondují si body těchto rovin obapolně jednoznačně tak, že bodům na přímce v jedné rovině odpovídají body přímky v rovině druhé; jsou tedy obě sdružená pole rovinná kolineární. Jestliže ve dvou kolineárních prostorech sobě odpovídají dvě přímky, korespondují si jejich řady bodové (protože přímky ty lze pokládati za sdružené ve dvou kolineárních rovinách) projektivně. Tyto úsudky shrnuty s duálními dávají důležitou větu:

V kolineaci mezi dvěma prostory jsou kterékoli dvě sdružené roviny a dva sdružené trsy kolineární, kterékoli dvě sdružené řady bodové a sdružené svazky rovinové projektivní.

Také *kterékoli dva sdružené svazky paprskové* (jakožto sdružené svazky v kolineárních rovinách obou kolineárních prostorů) *jsou projektivní.*

Tyto kolineace mezi základními útvary 2. řádu a projektivnosti mezi základními útvary 1. řádu dvou kolineárních prostorů jsou, jak říkáme, danou kolineací prostorů *indukovány* (vytvořeny, jsou kolineaci prostorů těch podřaděny).[1])

c) Jestliže ve dvou kolineárních prostorech Σ a Σ' odpovídá trsu o středu S_1 kolineární trs o středu S'_1 a trsu S_2 kolineární trs S'_2, odpovídá svazku rovin s osou S_1S_2 projektivní svazek rovin s osou $S'_1S'_2$; a duálně jestliže v kolineárních prostorech Σ a Σ' sobě odpovídají dvě dvojice kolineárních polí v rovinách σ_1 a σ'_1, σ_2 a σ'_2, odpovídají sobě řady bodové na průsečnicích jejich $\sigma_1\sigma_2$ a $\sigma'_1\sigma'_2$.

Kolineace mezi dvěma prostory Σ a Σ' jest (*jednoznačně*) *určena,*

jestliže dvěma trsům jednoho prostoru o středech S_1 a S_2 přiřadíme dva trsy druhého prostoru, trs o středu S'_1 kolineární k S_1 a trs o středu S'_2 kolineární k S_2, tak, aby svazku rovin s osou S_1S_2 odpovídal touže projektivností (*v obou těchto kolineacích*) *svazek rovin s osou $S'_1S'_2$.*

jestliže dvěma polím jednoho prostoru Σ v rovinách σ_1 a σ_2 přiřadíme dvě pole druhého prostoru Σ', σ'_1 kolineární k σ_1 a σ'_2 kolineární k σ_2, tak, že obě tyto kolineace indukují ve sdružených řadách bodových $\sigma_1\sigma_2$ a $\sigma'_1\sigma'_2$ prostorů těch tutéž projektivnost.

Kolineace prostorů Σ a Σ' jest totiž za podmínek uvedených (na straně levé) možna a jest jediná: Neboť každému bodu P v prostoru Σ, ležícímu mimo spojnici S_1S_2, jest tím přiřaděn jediný bod P', průsečík přímky p'_1, odpovídající přímce S_1P v dané kolineaci mezi S_1 a S'_1, a přímky p'_2, odpovídající v dané kolineaci mezi S_2 a S'_2 přímce S_2P, kteréžto dvě přímky p'_1 a p'_2 se musí protínati, ležíce v rovině, jež koresponduje rovině S_1S_2P (určené paprsky S_1P a S_2P). Abychom k libovolné rovině ϱ v Σ (nejdoucí bodem S_1 ani S_2) nalezli korespondující rovinu ϱ' v Σ', zvolme na ϱ tři body P_1, P_2 a P_3 (ležící mimo S_1S_2 a neležící v přímce) a určeme předešlým způsobem body jim odpovídající P'_1, P'_2 a P'_3 v Σ'; body tyto (nemohouce ležeti v přímce) stanoví hledanou rovinu ϱ'. Rovina ϱ' nesmí ovšem záviseti na volbě bodů P_1, P_2 a P_3: trsy o středech S_1 a S_2 promítajíce pole roviny ϱ stávají se tím perspektivními (s rovinou perspektivnosti ϱ), trsy pak o středech S'_1 a S'_2, z nichž prvý je kolineární k trsu S_1 a druhý k trsu S_2, jsou proto navzájem kolineární, a majíce nadto společný svazek rovin sobě samým odpovídajících s osou $S'_1S'_2$, jsou perspektivní; leží tedy vskutku všechny body P' určené dvojicemi paprsků, jež v S'_1 a S'_2 odpovídají danými kolineacemi

[1]) Stejně jako při kolineaci (nebo korelaci) dvou základních útvarů dvojmocných jest také při kolineaci (a obdobně při korelaci) dvou trojmocných útvarů základních uvedená projektivnost základních útvarů jednomocných na sdružených nosičích důsledkem korespondence těchto útvarů jenom v prostorech s prvky reálnými (jaké zde na počátku předpokládáme); v prostorech s prvky komplexními jest dotčenou projektivnost zvlášť požadovati (stačí to však učiniti pro jednu speciální dvojici sdružených útvarů jednomocných).

paprskům v S_1 a S_2, promítajícím body roviny ϱ, v téže rovině ϱ'. Konečně k bodu ležícímu na spojnici S_1S_2 nalezneme bod korespondující v Σ', jestliže ke kterékoli rovině položené bodem tím (ne však spojnicí S_1S_2) určíme rovinu sdruženou a její průsečík se spojnicí $S'_1S'_2$; že poloha tohoto bodu nezávisí na volbě pomocné roviny, vysvítá odtud, že dvěma rovinám protínajícím se na S_1S_2 odpovídají zase dvě roviny protínající se na $S'_1S'_2$ (neboť dvěma rovinám trsů S_1 a S_2, jež se protínají mimo S_1S_2, a tedy i jiným rovinám této vlastnosti odpovídají dvě roviny protínající se mimo $S'_1S'_2$ a obráceně). Vše to platí také obráceně při přechodu od prvků prostoru Σ' k prvkům prostoru Σ.

Obdobná je duální úvaha u kolineace dvou prostorů, stanovené kolineacemi dvou dvojic polí s touže indukovanou projektivností jejich společných řad bodových.[2])

Uvedeným postupem kolineaci jedním nebo druhým způsobem určenou také sestrojíme.

d) Místo dvou dvojic kolineárních trsů nebo duálně kolineárních polí, jejichž obě dané kolineace indukují mezi společnými svazky rovin resp. řadami bodů tutéž projektivnost, můžeme kolineaci dvou prostorů s výhodou stanoviti pěti dvojicemi bodů nebo duálně rovin. Platí totiž:

Kolineace mezi dvěma prostory (Σ a Σ') jest jednoznačně určena,

jestliže pěti nezávislým bodům (A, B, C, D, E) jednoho přiřadíme pět nezávislých bodů (A', B', C', D', E') druhého.

jestliže pěti nezávislým rovinám (α, β, γ, δ, ε) jednoho přiřadíme pět nezávislých rovin (α', β', γ', δ', ε') druhého.

Neboť přiřadíme-li (v případě na straně levé) bodu A bod A', bodu B bod B', bodu C bod C', bodu D bod D' a bodu E bod E', jsou v korespondujících trsech obou prostorů o středech A a A', B a B' jejich kolineace určeny čtyřmi dvojicemi přímek $A(B, C, D, E)$ a $A'(B', C', D', E')$, resp. čtyřmi dvojicemi $B(A, C, D, E)$ a $B'(A', C', D', E')$; tyto kolineace pak indukují ve svazcích rovin $AB(C, D, E)$ a $A'B'(C', D', E')$ tutéž projektivnost. Obdobně v případě duálním. Nesmějí však žádné čtyři z daných skupin po pěti bodech ležeti v téže rovině, což spolu vylučuje polohu tří bodů v jedné přímce, duálně nesmějí žádné čtyři z daných rovin procházeti týmž bodem (tři touže přímkou). Kdyby totiž dané prvky (sdružené v obou prostorech) nebyly takto nezávislé, nebyly by uvedené kolineace útvarů dvojmocných určeny.

[2]) Na uvedené případy lze převésti jiné způsoby, jimiž je kolineace prostorů Σ a Σ' určena: Kolineace mezi Σ a Σ' je stanovena, jestliže třem řadám bodovým na hranách trojhranu v Σ přiřadíme tři projektivní řady bodové na hranách trojhranu v Σ' tak, aby společnému bodu oněch odpovídal v daných projektivnostech společný bod těchto; duálně jestliže třem svazkům rovin s osami ve stranách trojstranu v Σ přiřadíme obdobné tři svazky rovinové v Σ' tak, aby společné rovině oněch odpovídala společná rovina těchto. Dále také jestliže poli v rovině σ a dvěma bodům A, B (mimo σ) v Σ přiřadíme kolineární pole v rovině σ' a dva body A', B' (mimo σ') v Σ' tak, aby průsečíku (AB, σ) odpovídal v dané kolineaci průsečík $(A'B', \sigma')$; a duálně.

Toto stanovení kolineace dvou prostorů můžeme převésti na předcházející také způsobem duálním. Vezmeme-li totiž opět v úvahu případ pěti dvojic bodových, promítněme bod pátý E z bodu A na rovinu BCD do bodu E_1 a z bodu B na rovinu ACD do bodu E_2, obdobně pak bod E' z A' na $B'C'D'$ do E'_1 a z bodu B' na $A'C'D'$ do E'_2; ze spojnice AB promítá se E na přímku CD do bodu E_3 (tamtéž E_1 z bodu B a E_2 z bodu A), z $A'B'$ bod E' na $C'D'$ do bodu E'_3 (rovněž E'_1 z B' a E'_2 z A'). Mezi sdruženými rovinami BCD a $B'C'D'$ jest kolineace určena čtyřmi dvojicemi nezávislých bodů B a B', C a C', D a D', E_1 a E'_1, mezi sdruženými rovinami ACD a $A'C'D'$ čtyřmi dvojicemi bodů A, C, D, E_2 a A', C', D', E'_2, z nichž žádné tři neleží v téže přímce; obě tyto kolineace vytvořují na sdružených přímkách CD a $C'D'$ tutéž projektivnost, určenou třemi dvojicemi bodů C a C', D a D', E_3 a E'_3.

Jednu z pěti dvojic nezávislých bodů (rovin) jest možno nahraditi dvojicí rovin (bodů), takže kolineace dvou prostorů jest také určena čtyřmi dvojicemi bodů a jednou dvojicí rovin, duálně čtyřmi dvojicemi rovin a jednou dvojicí bodů, jež sdružíme. Čtyři (nezávislé) body určují totiž čtyři roviny, k nimž přistupuje pátá daná, duálně čtyřmi rovinami jsou určeny čtyři body, k nimž se druží daný bod pátý (v jednom i v druhém prostoru).[3])

Kolineaci dvou prostorů Σ a Σ', danou některým ze způsobů právě vytčených, jest možno sestrojiti na základě uvedených projektivností cestou v podstatě už vytčenou. Dejme tomu na př., že chceme sestrojiti kolineaci mezi Σ a Σ', jež je dána pěti dvojicemi bodů sdružených A a A' až E a E'. Mějme při tom na zřeteli třebas indukovanou projektivnost mezi řadami bodovými na přímkách AB a $A'B'$, dále indukovanou kolineaci mezi poli na rovinách CDE a $C'D'E'$, jakož i kolineace mezi trsy o středech A a A' i o středech B a B' (jež ona dvě pole promítají). K libovolnému bodu P (mimo přímku AB a rovinu CDE) sestrojíme bod korespondující P', jestliže k paprskům AP a BP sestrojíme paprsky sdružené v trsu A' resp. B' a jejich průsečík. K libovolné rovině π (obecně položené) sestrojíme rovinu korespondující π', jestliže k průsečíku oné na přímce AB a k průsečnici její na rovině CDE sestrojíme bod sdružený na $A'B'$ resp. přímku sdruženou na $C'D'E'$ a rovinu oba tyto prvky spojující.[4])[5])

[3]) Proti tomu nelze stanoviti kolineaci třemi dvojicemi sdružených bodů a dvěma dvojicemi sdružených rovin (nebo duálně třemi dvojicemi rovin a dvěma dvojicemi bodů); neboť ve svazcích rovinových s osami v průsečnicích daných dvou rovin jednoho a druhého prostoru není při libovolně daných třech (ani dvou) bodech zaručena nutná projektivnost (a duálně).

[4]) O sdružených *skupinách šesti bodů* ve dvou kolineárních prostorech a jejich významu pro tuto kolineaci (obdobně k významu sdružených skupin pětibodových ve dvou rovinách kolineárních) pojednává *G. Kohn*, Über die Erweiterung eines Grundbegriffs der Geometrie der Lage, Math. Annalen 46 (1895). Viz dále téhož Über eine Gruppe von Sätzen der projektiven Geometrie, Jahresbericht D. Math. Ver. 18 (1909).

[5]) Kolineace dvou prostorů Σ a Σ', stanovená pěti dvojicemi sdružených prvků, jest *zvrhlá*, nemají-li uvedené prvky téhož (jednoho) prostoru

e) Při úvahách o prostorech kolineárních buď nepřihlížíme k tomu, že jsou vždy soumístné, (rozlišujíce útvary místně nebo časově) nebo je vyšetřujeme jako útvary soumístné, z čehož vznikají nové otázky a výsledky jejich řešení.

Z definice kolineární korespondence mezi dvěma prostory vyplývá, že dva prostory kolineární k třetímu jsou navzájem kolineární; neboť podmínky kolineace, obapolná jednoznačnost a incidence prvků, zůstávají při opětovaném přechodu od prostoru k prostoru nedotčeny.

Protože dvě kolineární transformace, převádějící prostorovou soustavu v soumístnou soustavu prostorovou, mají produktem opět transformaci kolineární (soustavy prvé v třetí), *tvoří všechny kolineace prostoru grupu*. Ježto pak je kolineace dvou prostorů stanovena pěti dvojicemi korespondujících prvků (bodů nebo rovin), z nichž každý (v druhém útvaru) lze zvoliti ∞^3 způsoby, tvoří všechny kolineace prostoru grupu o ∞^{15} členech (s 15 parametry).

98. Souřadnice v prostoru. V prostoru zavedeme souřadnice bodové a rovinové, nehomogenní i homogenní, zcela obdobně jako souřadnice bodové a přímkové v rovině.

a) Pro stanovení polohy bodu v prostoru zvolíme tři základní přímky, tvořící trojhran s vrcholem O, totiž přímky x, y a z za *osy souřadnic*, na každé z nich zvolíme tři základní body, na x body $A_0 = O$, A_1 a A_∞, na y body $B_0 = O$, B_1 a B_∞, na z body $C_0 = O$, C_1 a C_∞; roviny xy, xz

Abychom mohli stanoviti polohu roviny v prostoru, zvolíme tři základní přímky, tvořící trojstran v rovině ω, totiž přímky u, v a w za *osy souřadnic*; ve svazcích rovin s osami v těchto přímkách zvolíme po třech základních rovinách, ve svazku prvém roviny $\alpha_0 = \omega$, α_1 a α_∞, v druhém roviny

polohu obecnou. Z rozmanitých případů zvrhlé kolineace jest na prvním místě uvésti kolineaci se singulárním bodem S v Σ, singulární rovinou σ' v Σ' a určitou kolineací mezi trsem o středu S a polem v rovině σ': odpovídají tu sobě bod S a libovolný bod v Σ', libovolná rovina v Σ a rovina σ', každý bod na přímce jdoucí bodem S a bod na σ', korespondující přímce té vytčenou kolineací mezi trsem S a polem σ', rovina bodem S a každá rovina jdoucí přímkou v σ', korespondující oné rovině v kolineaci vytčené; dále také kolineaci se singulárními přímkami s v Σ, s' v Σ' a určitými projektivnostmi mezi svazkem rovin s osou s a řadou bodů na s', mezi bodovou řadou na s a rovinovým svazkem s osou s': zde si odpovídají každý bod roviny jdoucí přímkou s a bod na s', korespondující rovině té v první projektivnosti vytčené, bod na s a každý bod roviny svazku s' korespondující jemu v druhé vytčené projektivnosti, každá rovina v Σ jdoucí bodem na s a rovina svazku s' korespondující bodu tomu v druhé projektivnosti, rovina přímkou s a každá rovina v Σ' jdoucí bodem na s' oné v první projektivnosti korespondujícím. O zvrhlých kolineacích (napřed obyčejně o zvrhlých korelacích) dvou prostorů pojednávají zejména *T. A. Hirst*, On the correlation of two spaces each of three dimensions, Proceedings Math. soc. London 21 (1890); *G. del Prete*, Le corrispondenze proiettive degeneri, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 30 (1897); *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, p. 422 a n.

a yz slují rovinami souřadnic. Daný libovolný bod v prostoru P (neležící v rovině $A_\infty B_\infty C_\infty$) promítněme z přímky $B_\infty C_\infty$ na osu x do bodu P_x, z přímky $C_\infty A_\infty$ na osu y do bodu P_y a z přímky $A_\infty B_\infty$ na osu z do bodu P_z; nehomogenní souřadnice bodu P_x na ose x (ve stupnici určené body A_0, A_1 a A_∞) budiž a, souřadnice bodu P_y na y (ve stupnici dané body B_0, B_1 a B_∞) budiž b, souřadnice bodu P_z na z (ve stupnici C_0, C_1 a C_∞) budiž c. Čísla a, b, c jsou pak nehomogenní souřadnice x resp. y resp. z bodu P ve zvolené soustavě. Je patrno, že každému bodu P v prostoru, vyjma body na rovině (singulární) $A_\infty B_\infty C_\infty$ přísluší takto jediná trojice čísel a, b, c; obráceně každé trojici čísel přísluší jediný bod v prostoru (protože trojicí a, b, c jsou určeny body P_x na x, P_y na y a P_z na z, roviny $P_x B_\infty C_\infty$, $P_y C_\infty A_\infty$ a $P_z A_\infty B_\infty$ i jejich průsečík P). Píšeme $P\,(a, b, c)$.

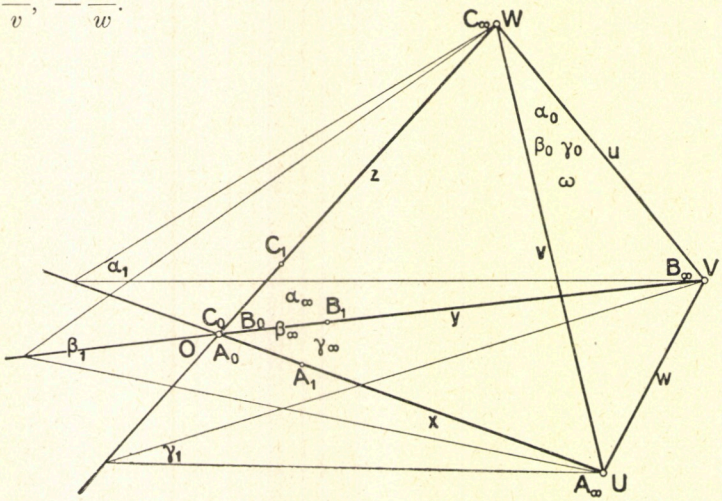
$\beta_0 = \omega$, β_1 a β_∞, v třetím roviny $\gamma_0 = \omega, \gamma_1$ a γ_∞; průsečíky $uv = W$, $uw = V$ a $vw = U$ lze nazvati středy souřadnic. Daná libovolná rovina π v prostoru (nejdoucí bodem $\alpha_\infty \beta_\infty \gamma_\infty$) protne přímku $\beta_\infty \gamma_\infty$ v bodě, který se z osy u promítá rovinou π_u, průsečík roviny π s přímkou $\gamma_\infty \alpha_\infty$ se promítá z osy v rovinou π_v a průsečík $\pi\alpha_\infty\beta_\infty$ se promítá z osy w rovinou π_w; nehomogenní souřadnice rovin π_u, π_v a π_w ve svazcích s osou u resp. v resp. w budiž l resp. m, resp. n. Čísla l, m, n jsou nehomogenní souřadnice u resp. v resp. w roviny π ve zvolené soustavě. Je patrno, že každé rovině π, vyjma roviny trsu o středu (singulárním) $\alpha_\infty \beta_\infty \gamma_\infty$ přísluší takto jediná trojice čísel l, m, n; obráceně každé trojici čísel přísluší jediná rovina (protože trojicí l, m, n jsou určeny roviny π_u, π_v a π_w, body $\pi_u \beta_\infty \gamma_\infty$, $\pi_v \gamma_\infty \alpha_\infty$ a $\pi_w \alpha_\infty \beta_\infty$ i rovina jimi jdoucí π). Píšeme $\pi\,(l, m, n)$.

Abychom dostali *společný systém souřadnic bodových* x, y, z *a souřadnic rovinových* u, v, w v prostoru, uvedeme základní prvky obou soustav vyložených v jednoduchou souvislost tak, že osy souřadnic rovinových u, v a w položíme do přímek $B_\infty C_\infty$ resp. $C_\infty A_\infty$ resp. $A_\infty B_\infty$ (čili středy U, V a W do bodů A_∞ resp. B_∞ resp. C_∞), čímž rovina $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = \omega$ se ztotožní s rovinou $A_\infty B_\infty C_\infty$, roviny α_∞, β_∞ a γ_∞ pak položíme do rovin souřadnic bodových yz resp. xz resp. xy.

Zvolíme tedy v prostoru (obr. 81) základní čtyrstěn $OUVW$, jeho hrany $OU = x$, $OV = y$, $OW = z$ za osy souřadnic bodových, jeho hrany $VW = u$, $UW = v$, $UV = w$ za osy souřadnic rovinových, vrcholy O za $A_0 = B_0 = C_0$, $U = A_\infty$, $V = B_\infty$, $W = C_\infty$, stěny UVW za $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0$, $OVW = \alpha_\infty$, $OUW = \beta_\infty$, $OUV = \gamma_\infty$. Zbývá zvoliti vztah mezi prvky jednotkovými A_1, B_1, C_1 a α_1, β_1, γ_1 obou soustav.

Podle předcházející volby promítají se body na osách x, y, z o souřadnicích 0 a ∞ z os u resp. v resp. w rovinami o souřadnicích ∞ resp. 0; za rovinu svazku u, v, w o souřadnici 1 (α_1 resp. β_1 resp. γ_1) zvolíme tu, jež promítá bod na x resp. y, resp. z o souřadnici -1 (harmonicky sdružený k bodu A_1 vzhledem k bodům A_0 a A_∞, resp. k bodu B_1 vzhle-

dem k B_0 a B_∞, resp. k bodu C_1 vzhledem k C_0 a C_∞). Souvislost obou soustav, soustavy souřadnic bodových s osami x, y, z a soustavy souřadnic rovinových s osami u, v, w, jest po uvedených volbách taková, že rovina (u, v, w) protíná osy x, y, z v bodech o souřadnicích $-\frac{1}{u}$, $-\frac{1}{v}$, $-\frac{1}{w}$.



Obr. 81.

b) Hledejme podmínku toho, aby v zavedené soustavě souřadnic bodových a rovinových bod $P\,(a, b, c)$ ležel na rovině $\pi\,(l, m, n)$.

Dejme tomu, že bod P leží na rovině π. Vylučujeme rovinu $(0, 0, 0)$, jejíž body nejsou vyjádřeny způsobem zavedeným, a z téhož důvodu roviny jdoucí bodem $(0, 0, 0)$; suponujeme zatím, že ani dvě z čísel l, m, n nejsou nulami ($l \neq 0$, $m \neq 0$, rovina π nejde body U a V). Promítneme-li rovinu π ze středu U na rovinu yz a ze středu V na rovinu xz, stanou se tím roviny yz a xz kolineárními (jejich kolineace je produkt perspektivnosti převádějící yz v π a perspektivnosti převádějící π v xz); každý bod roviny yz o souřadnicích y, z přechází touto kolineací v bod roviny xz o souřadnicích x, z. Protože při tom přímka $B_\infty C_\infty$ roviny yz přechází v přímku $A_\infty C_\infty$ roviny xz, jest kolineární transformace ta (roviny yz v xz) vyjádřena rovnicí

$$y = \alpha x + \beta z + \gamma$$

(z bodu na yz je totéž jako z korespondujícího bodu na xz). Abychom stanovili koeficienty α, β, γ, všimněme si nejprve, že průsečík roviny π s osou y o souřadnicích $\left(0, -\frac{1}{m}, 0\right)$ jako bod roviny yz přechází v bod

$(0, 0, 0)$ roviny xz; proto vychází z hořejší rovnice

$$-\frac{1}{m} = \gamma.$$

Dále průsečík roviny π s osou z je invariantní (je to při $n \neq 0$ bod o souřadnicích $\left(0, 0, -\frac{1}{n}\right)$, bod $\left(0, -\frac{1}{n}\right)$ na yz přechází v bod $\left(0, -\frac{1}{n}\right)$ na xz); proto

$$0 = -\frac{\beta}{n} + \gamma \text{ a odtud } \beta = -\frac{n}{m},$$

(což platí i pro $n = 0$). Konečně průsečík roviny π s osou x o souřadnicích $\left(-\frac{1}{l}, 0, 0\right)$ jako bod na xz vzniká z bodu $(0, 0, 0)$ roviny yz; jest tedy

$$0 = -\frac{\alpha}{l} + \gamma \text{ a odtud } \alpha = -\frac{l}{m}.$$

Platí tudíž o souřadnicích každého bodu (x, y, z) na rovině π relace

$$y = -\frac{l}{m}x - \frac{n}{m}z - \frac{1}{m} \text{ čili } lx + my + nz + 1 = 0.$$

A protože bod $P(a, b, c)$ leží na rovině π, platí o jeho souřadnicích

$$la + mb + nc + 1 = 0.$$

Obráceně platí-li tato relace o souřadnicích bodu $P(a, b, c)$, přechází bod $P_1(0, b, c)$ hořejší kolineací v bod $P_2(a, 0, c)$, pročež spojnice UP_1 a VP_2, protínající se v bodě $P(a, b, c)$, protínají se na π. K témuž výsledku dojdeme při úvaze duální, jakož i v případech ostatních (vyjma body ležící na rovině $(0, 0, 0)$ a roviny jdoucí bodem $(0, 0, 0)$). Proto:

Nutnou a dostačující podmínkou toho, aby bod $P(x, y, z)$ byl incidentní s rovinou $\pi(u, v, w)$, jest platnost rovnice $ux + vy + wz + 1 = 0$.

c) Souřadnice bodové a rovinové, jež jsme zavedli, nehodí se pro body ležící na rovině $A_\infty B_\infty C_\infty = \omega$ resp. pro roviny jdoucí bodem $O = \alpha_\infty \beta_\infty \gamma_\infty$. Abychom i s těmito prvky mohli počítati, pozměníme hořejší souřadnice nehomogenní v *souřadnice homogenní*, jak jsme učinili při souřadnicích na přímce i v rovině. Každý bod obdrží čtyři souřadnice x_1, x_2, x_3, x_4, jejichž násobky ϱx_k při libovolném $\varrho \neq 0$ určují týž bod; duálně každá rovina bude určena čtyřmi souřadnicemi u_1, u_2, u_3, u_4, stejně však jejich násobky ϱu_k při libovolném $\varrho \neq 0$.

Zvolíme v prostoru *základní čtyrstěn* s vrcholy O_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ a mimo jeho stěny ležící *bod jednotkový* T; vrcholům základního čtyrstěnu přisoudíme souřadnice, z nichž tři jsou nulové a jedna rovna 1, a to $O_1(1, 0, 0, 0)$, $O_2(0, 1,$

Zvolíme v prostoru *základní čtyrstěn* se stěnami ω_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ a *jednotkovou rovinu* τ, neprocházející jeho vrcholy; stěnám základního čtyrstěnu a rovině jednotkové dáme souřadnice, jak uvedeno: $\omega_1(1, 0, 0, 0)$, $\omega_2(0, 1,$

0, 0), $O_3(0, 0, 1, 0)$, $O_4(0, 0, 0, 1)$, bodu jednotkovému pak souřadnice $T(1, 1, 1, 1)$. Vzhledem k předcházející soustavě souřadnic nehomogenních jest $O_1 = A_\infty$, $O_2 = B_\infty$, $O_3 = C_\infty$, $O_4 = O$.

Na každé ze čtyř stěn základního čtyrstěnu budou tvořiti tři jeho vrcholy a bod T_k, průmět jednotkového bodu T z protějšího vrcholu O_k, základní čtyřroh, v němž bod T_k jest jednotkovým. Bod na rovině $O_1O_2O_3$ o souřadnicích x_1, x_2, x_3 bude v prostorové soustavě míti souřadnice $(x_1, x_2, x_3, 0)$, obdobně body na rovinách $O_2O_3O_4$, $O_1O_3O_4$, $O_1O_2O_4$ souřadnice $(0, x_2, x_3, x_4)$, resp. $(x_1, 0, x_3, x_4)$, resp. $(x_1, x_2, 0, x_4)$; takže o bodech na oné rovině platí $x_4 = 0$, o bodech na těchto třech pak $x_1 = 0$, resp. $x_2 = 0$, resp. $x_3 = 0$. Na každé ze šesti hran základního čtyrstěnu budou základními prvky dva vrcholy jeho, bodem jednotkovým průsečík roviny vedené protější hranou a bodem T; na př. na hraně O_3O_4, jež je průsečnicí stěn $x_1 = 0$ a $x_2 = 0$, jsou základní body $O_3(0, 0, 1, 0)$, $O_4(0, 0, 0, 1)$ a bod jednotkový $(0, 0, 1, 1)$, průsečík hrany O_3O_4 s rovinou O_1O_2T, při čemž tento bod je spolu průsečíkem hrany O_3O_4 se spojnicí O_2T_1 i téže hrany se spojnicí O_1T_2 a oběma způsoby je stejně určen.

V soustavě tak zavedené platí:

Je-li P libovolný bod prostoru (ležící mimo stěny základního čtyrstěnu), *existují čtyři čísla* x_1, x_2, x_3, x_4 (všechna různá od nuly) *tak, že průměty bodu P z vrcholů* O_1, O_2, O_3, O_4 *základního čtyrstěnu na protější stěny jeho mají souřadnice* $0, 0)$, $\omega_3(0, 0, 1, 0)$, $\omega_4(0, 0, 0, 1)$, $\tau(1, 1, 1, 1)$. Vzhledem k předcházející soustavě souřadnic nehomogenních jest $\omega_1 = \alpha_\infty$, $\omega_2 = \beta_\infty$, $\omega_3 = \gamma_\infty$, $\omega_4 = \omega$.

V každém ze čtyř vrcholů základního čtyrstěnu (v příslušném trsu) budou tvořiti tři jeho stěny a rovina τ_k, jdoucí průsečnicí jednotkové roviny τ se stěnou protější, základní útvar soustavy homogenních souřadnic v trsu, v němž rovina τ_k jest jednotkovou. Rovina, jejíž souřadnice v trsu o středu $\omega_1\omega_2\omega_3$ jsou u_1, u_2, u_3, bude v prostorové soustavě míti souřadnice $(u_1, u_2, u_3, 0)$, obdobně roviny v trsech ostatních; takže o rovinách v $\omega_1\omega_2\omega_3$ platí $u_4 = 0$, v $\omega_2\omega_3\omega_4$ dále $u_1 = 0$, v $\omega_1\omega_3\omega_4$ pak $u_2 = 0$, v $\omega_1\omega_2\omega_4$ konečně $u_3 = 0$. V každém ze šesti svazků rovin s osou v hraně základního čtyrstěnu budou základními prvky dvě stěny čtyrstěnu, jednotkovou rovinou pak rovina promítající průsečík roviny τ s hranou protější; na př. ve svazku s osou $\omega_3\omega_4$, jež spojuje body $u_1 = 0$ a $u_2 = 0$, jsou základní roviny $\omega_3(0, 0, 1, 0)$, $\omega_4(0, 0, 0, 1)$ a rovina jednotková $(0, 0, 1, 1)$, při čemž tato jest rovinou promítající z $\omega_3\omega_4$ průsečnici $\omega_2\tau_1$ i průsečnici $\omega_1\tau_2$ a jest oběma způsoby stejně určena.

Je-li π libovolná rovina prostoru (nejdoucí žádným vrcholem základního čtyrstěnu), *existují čtyři čísla* u_1, u_2, u_3, u_4 (všechna různá od nuly) *tak, že průsečnice roviny π se stěnami základního čtyrstěnu* ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 *promítají se z protějších*

$(0, x_2, x_3, x_4)$, $(x_1, 0, x_3, x_4)$, $(x_1, x_2, 0, x_4)$, $(x_1, x_2, x_3, 0)$; *tato čtyři čísla slují homogenní souřadnice bodu* P, jejž tedy označujeme $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$, stručně $P(x_k)$. Obráceně *každá čtveřice čísel* (vyjma 0, 0, 0, 0), pojímaná v určitém pořádku jako homogenní souřadnice bodu, *určuje* při zvoleném čtyrstěnu základním a bodu jednotkovém *jediný bod prostoru.*

vrcholů jeho rovinami $(0, u_2, u_3, u_4)$, $(u_1, 0, u_3, u_4)$, $(u_1, u_2, 0, u_4)$, $(u_1, u_2, u_3, 0)$; *tato čtyři čísla slují homogenní souřadnice roviny* π, kterou tedy značíme $\pi(u_1, u_2, u_3, u_4)$, stručně $\pi(u_k)$. Obráceně *každá čtveřice čísel* (vyjma 0, 0, 0, 0), vzatých v určitém pořadí za homogenní souřadnice roviny, *určuje* při zvoleném čtyrstěnu základním a rovině jednotkové *jedinou rovinu prostoru.*

Stačí totiž (pro důkaz první části věty o souřadnicích bodových) přejíti od průmětu bodu P na stěnách základního čtyrstěnu k průmětům na hranách jeho. Průmětem bodu P z vrcholu O_1 $(1, 0, 0, 0)$ na protější stěnu jest bod $P_1(0, x_2, x_3, x_4)$, kde žádné z čísel x_2, x_3, x_4 není 0; průmětem bodu P z vrcholu O_2 $(0, 1, 0, 0)$ na protější stěně jest $P_2(x'_1, 0, x'_3, x'_4)$, kde opět žádné z čísel x'_1, x'_3, x'_4 není 0. Avšak rovina O_1O_2P protíná rovinu $x_1 = 0$ v přímce, spojující bod O_2 $(0, 1, 0, 0)$ s bodem $P_1(0, x_2, x_3, x_4)$, rovinu $x_2 = 0$ v přímce, spojující O_1 $(1, 0, 0, 0)$ s $P_2(x'_1, 0, x'_3, x'_4)$; podle toho, co bylo nalezeno při zavádění souřadnic bodových v rovině, protíná hranu O_3O_4 první přímka O_2P_1 v bodě $(0, 0, x_3, x_4)$, druhá přímka O_1P_2 v bodě $(0, 0, x'_3, x'_4)$. Protože oba tyto body jsou totožny (jsouce průsečíkem roviny O_1O_2P s hranou O_3O_4), platí $x'_3 : x'_4 = x_3 : x_4$; jest tedy při volbě $x'_1 = x_1 \cdot x'_4/x_4$ bod $(x'_1, 0, x'_3, x'_4)$ identický s bodem $(x_1, 0, x_3, x_4)$. Podobně ukážeme, že průmět $P_3(x''_1, x''_2, 0, x''_4)$ bodu P z O_3 na $x_3 = 0$ je totožný s bodem $(x_1, x_2, 0, x_4)$, a že průmětem bodu P z O_4 na $x_4 = 0$ jest $P_4(x_1, x_2, x_3, 0)$. Obráceně jsou-li dána čtyři čísla x_k $(k = 1, 2, 3, 4)$, z nichž jedno je nulové, jest jimi jednoznačně určen bod na stěně základního čtyrstěnu; není-li pak žádné z čísel těch rovno nule, leží přímka, spojující vrchol O_1 s bodem $(0, x_2, x_3, x_4)$, a přímka, spojující vrchol O_2 s bodem $(x_1, 0, x_3, x_4)$, v rovině, spojující hranu O_1O_2 s bodem $(0, 0, x_3, x_4)$, takže se obě přímky protínají v jediném bodě, jenž ovšem podle předešlého má souřadnice x_1, x_2, x_3, x_4.

Spolu vysvítá, že bod nebo rovina jsou určeny poměrem čtyř homogenních souřadnic $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$, resp. poměrem čtyř homogenních souřadnic $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$ (čili že souřadnice $\varrho x_1, \varrho x_2, \varrho x_3, \varrho x_4$, resp. $\varrho u_1, \varrho u_2, \varrho u_3, \varrho u_4$, ať $\varrho \neq 0$ je jakékoli, určují týž bod resp. rovinu).[1])[2])[3])

[1]) Dva body $X(x_k)$ a $Y(y_k)$ jsou (tehdy a jen tehdy) totožny, jsou-li jejich souřadnice (s týmž indexem) úměrny čili jsou-li nule rovny všechny determinanty 2. stupně, obsažené v matici $\left\| \begin{matrix} x_1 x_2 x_3 x_4 \\ y_1 y_2 y_3 y_4 \end{matrix} \right\|$. A duálně.

[2]) Projektivní souřadnice homogenní pro body v prostoru jest možno přímo zavésti pomocí dvojpoměrů takto: Zvolme v prostoru pět bodů v obecné poloze (žádné čtyři totiž ať neleží v téže rovině), z nichž čtyři buďtež vrcholy O_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ základního čtyrstěnu a pátý bodem jednotkovým T.

d) Majíce na zřeteli speciální vzájemnou polohu základních prvků obou soustav souřadnic nehomogenních, bodových i rovinových, a příslušnou podmínku incidence pro bod (x, y, z) a rovinu (u, v, w) v této společné soustavě, totiž rovnici $ux + vy + wz + 1 = 0$, zaveďme obdobné spojení obou soustav souřadnic homogenních a vyšetřme podmínku incidence bodu a roviny.

Základním útvarem soustavy homogenních souřadnic bodových (obr. 82) jest čtyrstěn $O_1O_2O_3O_4$ (se stěnami $x_k = 0$ proti O_k) a jednotkový bod T. Základní čtyrstěn soustavy homogenních souřadnic rovinových zvolme tak, aby rovina ω_1 (1, 0, 0, 0) byla v $O_2O_3O_4$ ($x_1 = 0$), ω_2 (0, 1, 0, 0) v $O_1O_3O_4$ ($x_2 = 0$), ω_3 (0, 0, 1, 0) v $O_1O_2O_4$ ($x_3 = 0$) a ω_4 (0, 0, 0, 1) v $O_1O_2O_3$ ($x_4 = 0$); jednotkovou rovinu τ (1, 1, 1, 1) položme body (— 1, 0, 0, 1) na O_1O_4, (0, —1, 0, 1) na O_2O_4 a (0, 0, —1, 1) na O_3O_4 (jde pak také třemi dalšími body, harmonicky sdruženými na ostatních hranách čtyrstěnu $O_1O_2O_3O_4$ k jednotkovým bodům jejich vzhledem k vrcholům čtyrstěnu tam ležícím).[4])

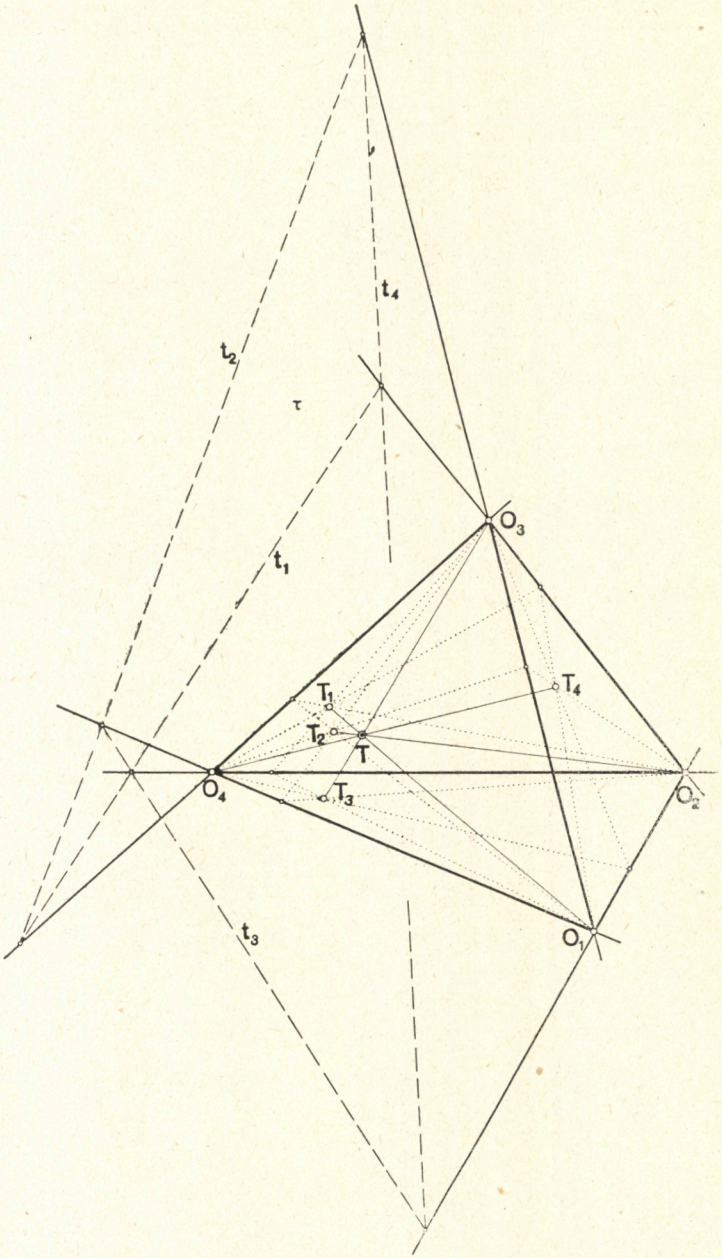
Jestliže žádná ze souřadnic bodu (x_1, x_2, x_3, x_4) a roviny (u_1, u_2, u_3, u_4) není rovna nule, položme $x_1/x_4 = x$, $x_2/x_4 = y$, $x_3/x_4 = z$, $u_1/u_4 = u$, $u_2/u_4 = v$, $u_3/u_4 = w$. Jsou pak čísla x, y, z, nehomogenní souřadnice bodové na přímce O_4O_1, resp. O_4O_2, resp. O_4O_3, nehomogenními souřadnicemi bodu v prostoru; čísla u, v, w, nehomogenní souřadnice roviny v prostoru, zvolena jsou tu tak, že nutnou a dostačující podmínkou

---

Libovolný bod v prostoru P a spolu bod T promítněme z každé hrany O_hO_k základního čtyrstěnu rovinami, jež hranu protější O_iO_j protnou v bodě P_{ij} resp. T_{ij}. Ze šesti dvojpoměrů δ_{ij} vždy čtyř rovin $O_hO_k(O_iO_jTP)$ a tedy vždy čtyř bodů $O_iO_jT_{ij}P_{ij}$ jsou tři, u nichž osy čtveřin rovinových tvoří trojúhelník resp. u nichž osy čtveřin bodových tvoří trojhran, nezávislé a ostatní tři jsou jimi jednoduše určeny (platí na př. $\delta_{12} = \delta_{14} : \delta_{24}$); daným bodem P jsou při zvoleném útvaru základním určeny uvedené dvojpoměry, obráceně (třemi) vytčenými dvojpoměry jest určen jediný bod P. Zavedeme-li potom $\delta_{14} = x_1/x_4$, $\delta_{24} = x_2/x_4$, $\delta_{34} = x_3/x_4$, jest dále $\delta_{12} = x_1/x_2$, $\delta_{13} = x_1/x_3$, $\delta_{23} = x_2/x_3$; ke každému bodu P přísluší určitá skupina čtyř čísel ϱx_k, kde $\varrho \neq 0$ je libovolná konstanta, obráceně ke každé skupině čtyř čísel ϱx_k (vyjma 0, 0, 0, 0) přísluší určitý bod. Pro body na stěnách a hranách základního čtyrstěnu i pro vrcholy jeho vyplynou odtud známé skupiny souřadnic, z části nulových. Obdobně lze zavésti duální souřadnice homogenní pro roviny. Viz na př. *E. Ciani*, Il metodo delle coordinate proiettive omogenee nello studio degli enti algebrici, 1915; nebo *L. Heffter*, Lehrbuch der analytischen Geometrie II, 1923.

[3]) Vzhledem k tomu, že bod i rovina v prostoru určeny jsou čtyřmi čísly, svými homogenními souřadnicemi, sluje obor těchto bodů a rovin, tedy obor útvarů prostorových, *kvaternárním*.

[4]) Jednotkový bod T a jednotková rovina τ ve speciální poloze vzájemné, ve které byly pro obě duální soustavy souřadnic zvoleny (kdy totiž na každé hraně základního čtyrstěnu jsou průmět bodu T z hrany protější a průsečík roviny τ harmonicky sdruženy vzhledem k dvěma vrcholům čtyrstěnu tam ležícím), slují harmonicky spolu sdruženými nebo *pólem* a *polárnou rovinou* vzhledem ke čtyrstěnu základnímu.



Obr. 82.

incidence bodu (x, y, z) s rovinou (u, v, w) jest rovnice dříve odvozená $ux + vy + wz + 1 = 0$. Tato podmínka přechází nyní ve tvar

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0.$$

Zbývá ukázati, že relace tato platí i pro body a roviny, jejichž některá souřadnice jest rovna nule; budiž třebas $u_4 = 0$. Roviny (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) a (1, 1, 1, 0) jdoucí vrcholem O_4 protínají stěnu $x_4 = 0$ v přímkách, jejichž rovnice v této rovině jsou $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; jsou proto první tři souřadnice každé roviny $(u_1, u_2, u_3, 0)$, jdoucí bodem O_4, přímkovými souřadnicemi její průsečnice na $x_4 = 0$, jestliže bod (x_1, x_2, x_3) jest incidentní s přímkou (u_1, u_2, u_3) za platnosti podmínky $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. Leží tedy bod $(x_1, x_2, x_3, 0)$ na rovině $(u_1, u_2, u_3, 0)$ tehdy a jen tehdy, je-li splněna podmínka právě uvedená; avšak také bod (x_1, x_2, x_3, x_4) leží na rovině $(u_1, u_2, u_3, 0)$, jestliže platí $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$ (protože bod ten má tři první souřadnice své rovny prvním třem souřadnicím na průsečnici uvedené roviny s $x_4 = 0$). Duálně může některá ze souřadnic bodových býti nulová.[5])

Platí tedy: *V systému homogenních souřadnic bodových a rovinových* (jejichž základní prvky mají uvedenou polohu vzájemnou) *jest podmínkou incidence bodu* (x_1, x_2, x_3, x_4) *a roviny* (u_1, u_2, u_3, u_4) *platnost relace*

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0.^{6})^{7})^{8})$$

[5]) Při obecné vzájemné poloze jednotkového bodu a jednotkové roviny jest podmínka incidence bodu a roviny méně jednoduchá než uvedená. Označíme-li totiž průmět jednotkového bodu T na hraně O_iO_j základního čtyrstěnu z hrany protější T_{ij} a průsečík jednotkové roviny τ na téže hraně T'_{ij}, označíme-li dále dvojpoměry čtveřin $O_1O_4T_{14}T'_{14}$, $O_2O_4T_{24}T'_{24}$ a $O_3O_4T_{34}T'_{34}$ pořadem — a_1/a_4, — a_2/a_4 a — a_3/a_4, jsou bod (x_1, x_2, x_3, x_4) a rovina (u_1, u_2, u_3, u_4) incidentní (tehdy a jen tehdy), platí-li

$$\frac{u_1x_1}{a_1} + \frac{u_2x_2}{a_2} + \frac{u_3x_3}{a_3} + \frac{u_4x_4}{a_4} = 0.$$

[6]) O základech analytické geometrie projektivní v prostoru viz na př. *L. Heffter*, Lehrbuch der analytischen Geometrie II, p. 73 a n.; *G. Scorza*, Elementi di geometria analitica, p. 526 a n.

[7]) Zvolíme-li v prostoru dvě různé roviny a na nich racionální soustavy bodů a přímek (rovinné sítě Möbiovy) tak, aby na průsečnici obou rovin byla táž racionální soustava bodů do obou sítí příslušná, spojíme-li pak všechny body a přímky v síti jedné roviny se všemi body a přímkami v síti roviny druhé, vytvoří tyto spojující přímky a roviny jakož i body a přímky, v nichž se protínají, *racionální soustavu bodů, přímek a rovin v prostoru* (*prostorovou síť Möbiovu*); na každé přímce této soustavy existuje racionální soustava bodů (a duálně rovin), na každé rovině racionální síť bodů i přímek (a duálně v každém bodě racionální soustava rovin i přímek); kterékoli dvě roviny v síti obsažené mohou býti východiskem pro tutéž síť prostorovou. K takové racionální soustavě prvků v prostoru dospějeme také, vyjdeme-li od pěti bodů (nebo rovin) v prostoru obecně položených, tvoříce všechny možné spojující i průsečné prvky postupně odtud vznikající; zvolíme-li čtyři z původních prvků za vrcholy (stěny) základního čtyrstěnu

99. Rovnice roviny, bodu i přímky v prostoru. *a*) V zavedené soustavě souřadnic pro body v prostoru můžeme analyticky vyjádřiti především rovinu jako pole bodové, v duální soustavě souřadnic pro roviny pak bod jako trs rovinový.

Rovnici, které vyhovují souřadnice x, y, z všech a jenom bodů ležících na určité rovině, nazýváme *rovnicí* této *roviny*.

Rovnici, které vyhovují souřadnice u, v, w všech a jenom rovin jdoucích určitým bodem, nazýváme *rovnicí* tohoto *bodu* (v prostoru).

Z podmínky incidence bodu a roviny vyplývá bezprostředně:

Rovnice

$$mx + ny + pz + 1 = 0$$

jest rovnicí roviny o souřadnicích (m, n, p).

Rovnice

$$au + bv + cw + 1 = 0$$

jest rovnicí bodu o souřadnicích (a, b, c).

A dále při souřadnicích homogenních:

Rovnice roviny o homogenních souřadnicích (m_k) *v homogenní soustavě bodové jest*

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 = 0.$$

Levou stranu této rovnice značíme stručně μ.

Speciálně rovina, jež je stěnou ω_h základního čtyrstěnu sou-

Rovnice bodu o homogenních souřadnicích (a_k) *v homogenní soustavě rovinové jest*

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4 = 0.$$

Levou stranu této rovnice značíme stručně $\mathbf{A}$.

Speciálně bod, jenž je vrcholem O_h základního čtyrstěnu sou-

a pátý za prvek jednotkový, má každý bod a každá rovina racionální sítě prostorové homogenní souřadnice, jež jsou čísla racionální celá; obráceně všechny body a roviny s homogenními souřadnicemi racionálními celými jsou v soustavě té obsaženy. Každému prvku v prostoru, jehož souřadnice nejsou čísla racionální celá, lze se prvky sítě libovolně přiblížiti. Viz *O. Veblen-J. W. Young*, Projective geometry I, p. 89 a n.; *K. Doehlemann*, Geometrische Transformationen I, p. 258 a n.

[8]) Jak poznáme třebas pomocí dvojpoměrů čtveřin, tvořených na každé hraně základního čtyrstěnu $O_1O_2O_3O_4$ dvěma vrcholy jeho a průměty jednotkového bodu T i daného bodu P z hrany protější, jsou homogenní souřadnice x_k bodu v prostoru úměrny poměrům vzdáleností bodu P a bodu T od stěny k O_k protější; při zvláštní volbě jednotkového bodu nebo základního čtyrstěnu dospějeme odtud ke speciálním soustavám metrickým. Zvolíme-li na př. T ve středu koule základnímu čtyrstěnu vepsané nebo v těžišti čtyrstěnu toho, jsou x_k úměrny vzdálenostem bodu P od stěn čtyrstěnu základního resp. objemům jehlanů se základnami ve stěnách čtyrstěnu a s vrcholy v P. Jestliže jednu ze čtyř základních rovin zvolíme v rovině nevlastní a jednotkový bod tak, aby jeho průměty na průsečnicích ostatních rovin měly od průsečíku rovin těch stejnou vzdálenost, vznikne soustava obyčejných bodových souřadnic rovnoběžkových (Descartesových) a při obvyklé volbě jednotkové roviny soustava rovinových souřadnic Plückerových.

stavy souřadnic, má rovnici $x_h = 0$; rovina, jdoucí hranou $\omega_i\omega_j$ základního čtyrstěnu, má rovnici $m_i x_i + m_j x_j = 0$; rovina, jdoucí vrcholem $\omega_h\omega_i\omega_j = O_k$ základního čtyrstěnu $(h, i, j, k = 1, 2, 3, 4, k \neq h, i, j)$, má rovnici $m_h x_h + m_i x_i + m_j x_j = 0$.

b) Dva různé body o souřadnicích (a_k), (b_k), tedy o rovnicích

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4 = 0,$$
$$b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 + b_4u_4 = 0$$

určují přímku, jež je analyticky vyjádřena systémem obou rovnic zde uvedených. Dva dané body jsou totožny, jsou-li součinitelé a_k, b_k úměrny (jsou-li nule rovny všechny determinanty 2. stupně obsažené v jejich matici).

Leží-li tři dané body v téže přímce, platí to také o jejich průmětech z vrcholů základního čtyrstěnu na protější stěny tohoto; obráceně leží tři body prostoru v přímce, jsou-li v přímce jejich průměty (aspoň na dvou rovinách). Odtud vzhledem ke známé podmínce pro souřadnice tří bodů roviny v téže přímce ležících vyplývá, že nutnou a dostačující podmínkou toho, aby *tři body* (a_k), (b_k), (c_k) *ležely v téže přímce*, jsou nulové hodnoty determinantů 3. stupně z matice jejich souřadnic (nebo součinitelů jejich rovnic)

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{matrix} \right\|.$$[1])

stavy souřadnic, má rovnici $u_h = 0$; bod, ležící na hraně O_iO_j základního čtyrstěnu, má rovnici $a_iu_i + a_ju_j = 0$; bod, ležící na stěně $O_hO_iO_j = \omega_k$ základního čtyrstěnu $(h, i, j, k = 1, 2, 3, 4, k \neq h, i, j)$, má rovnici $a_hu_h + a_iu_i + a_ju_j = 0$.

Dvě různé roviny o souřadnicích (m_k), (n_k), tedy o rovnicích

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 = 0,$$
$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4x_4 = 0$$

určují přímku, jež je analyticky vyjádřena systémem obou rovnic zde uvedených. Dvě dané roviny jsou totožny, jsou-li součinitelé m_k, n_k úměrny (jsou-li nule rovny všechny determinanty 2. stupně v jejich matici).

Procházejí-li tři dané roviny touže přímkou, platí to též o rovinách promítajících jejich průsečnice se stěnami základního čtyrstěnu z protějších vrcholů tohoto; tato věta platí i obrácená (stačí, aby dvě trojice uvedených rovin promítajících procházely vždy touže přímkou). Odtud vyplývá, že nutnou a dostačující podmínkou toho, aby *tři roviny* (m_k), (n_k), (p_k) *procházely touže přímkou*, jsou nulové hodnoty determinantů 3. stupně, obsažených v matici jejich souřadnic (nebo v matici součinitelů jejich rovnic)

$$\left\| \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{matrix} \right\|.$$[1])

[1]) Odtud také vyplývá, že podmínkou toho, *aby bod* (nebo duálně *rovina*) *a přímka byly incidentní*, jsou nulové hodnoty čtyř determinantů 3. stupně, obsažených v matici ze souřadnic daného bodu (roviny) a ze součinitelů v systému dvou rovnic dané přímky, vyjádřené v souřadnicích rovinových (bodových).

c) Tři body, jež neleží v přímce, o souřadnicích (a_k), (b_k), (c_k) určují rovinu, jejíž rovnici nalezneme vyloučením konstant m_k z rovnic $\Sigma m_k x_k = 0$, $\Sigma m_k a_k = 0$, $\Sigma m_k b_k = 0$, $\Sigma m_k c_k = 0$, kde ovšem součty platí pro $k = 1, 2, 3, 4$. *Rovnice roviny, položené třemi danými body* (a_k), (b_k), (c_k), *jest* tedy

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Odtud obdržíme souřadnice roviny danými třemi body určené v subdeterminantech uvedeného determinantu, příslušných k prvkům x_k, tedy v determinantech 3. stupně, obsažených v matici

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{Vmatrix}.$$

Tytéž souřadnice roviny třemi body stanovené nalezneme z rovnic těchto bodů řešením podle u_k.

Tři dané body neurčují rovinu (a určují přímku), jsou-li nule rovny všechny determinanty 3. stupně z uvedené matice (a nejsou-li nule rovny všechny determinanty 2. stupně tam obsažené); neurčují ani přímku, jsou-li i všechny determinanty 2. stupně z matice té rovny nule.

Z hořejší rovnice pro rovinu, určenou třemi body, ve tvaru $(x_1 a_2 b_3 c_4) = 0$ plyne, že podmínkou (nutnou a dostačující) toho, aby *čtyři body* (a_k), (b_k), $c_k)$, (d_k) *ležely v téže rovině*, jest nulová hodnota determinantu 4. stupně z jejich souřadnic, t. j.

$$(a_1 b_2 c_3 d_4) = 0.$$

Tři roviny, jež neprocházejí přímkou, o souřadnicích (m_k), (n_k), (p_k) určují bod, jehož rovnici nalezneme eliminací koeficientů a_k z rovnic $\Sigma a_k u_k = 0$, $\Sigma a_k m_k = 0$, $\Sigma a_k n_k = 0$, $\Sigma a_k p_k = 0$, kde součty platí pro $k = 1, 2, 3, 4$. *Rovnice bodu, průsečíku tří daných rovin* (m_k), (n_k), (p_k), *jest* tedy

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Subdeterminanty tohoto determinantu, příslušné k prvkům u_k, tedy determinanty 3. stupně, obsažené v matici z posledních tří řádků determinantu toho

$$\begin{Vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{Vmatrix},$$

dávají pak souřadnice bodu určeného třemi danými rovinami. Totéž nalezneme z rovnic těchto rovin řešením podle x_k.

Tři dané roviny neurčují bod, (a určují přímku), jsou-li nule rovny všechny determinanty 3. stupně z uvedené matice (a nejsou-li nule rovny všechny determinanty 2. stupně tam obsažené); neurčují ani přímku, jsou-li i všechny determinanty 2. stupně z matice té rovny nule.

Z hořejší rovnice pro bod, určený třemi rovinami, ve tvaru $(u_1 m_2 n_3 p_4) = 0$ plyne, že *čtyři roviny* (m_k), (n_k), (p_k), (q_k) *procházejí týmž bodem* tehdy a jen tehdy, platí-li pro souřadnice těchto rovin relace, kladoucí determinant z nich rovným nule, t. j.

$$(m_1 n_2 p_3 q_4) = 0.$$

Uvedené čtyři body leží v přímce nebo jsou totožny, jsou-li nule rovny také všechny minory 3. stupně resp. 2. stupně hořejšího determinantu.

Uvedené čtyři roviny procházejí přímkou nebo jsou dokonce totožny, jsou-li nule rovny také všechny minory 3. stupně resp. 2. stupně hořejšího determinantu.

d) Stejně jako pro přímku v rovině platí pro přímku v prostoru (podle průmětů jejích na stěnách základního čtyrstěnu a z důvodu duálního):

Každý bod X přímky, jdoucí dvěma různými body $A(a_k)$, $B(b_k)$, má souřadnice

$$x_k = \lambda_1 a_k + \lambda_2 b_k$$

nebo kratčeji $a_k + \lambda b_k$, kde homogenní parametry λ_1, λ_2 nebo parametr λ určují bod ten na uvažované přímce vzhledem k základním bodům (a_k), (b_k); udává totiž λ_1/λ_2 nebo $1/\lambda$ dvojpoměr čtveřiny bodů $ABJX$, kde J jest (jednotkový) bod přímky AB o souřadnicích $a_k + b_k$. Uvedenými rovnicemi $x_k = \lambda_1 a_k + \lambda_2 b_k$ jest *přímka* (určená dvěma body) jako osa řady bodové *vyjádřena parametricky.*

Jsou-li $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{B} = 0$ rovnice daných dvou bodů, jest $\lambda_1 \mathbf{A} + \lambda_2 \mathbf{B} = 0$ rovnice každého a jenom bodu na přímce dvěma body těmi vedené.

Bod X na rovině, jdoucí třemi body obecně položenými $A(a_k)$, $B(b_k)$, $C(c_k)$, má souřadnice

$$x_k = \lambda_1 a_k + \lambda_2 b_k + \lambda_3 c_k$$

nebo kratčeji $a_k + \lambda b_k + \mu c_k$. Toto vyjádření bodu v rovině nalezneme spojením předcházejícího vyjádření bodu Y v řadě na přímce AB a bodu X na přímce YC; přesvědčíme se o tom také dosazením uvedených výrazů do determinantu 4. stupně, jenž položen rovným nule představuje rovnici

Každá rovina ξ, jdoucí průsečnicí dvou různých rovin $\mu(m_k)$, $\nu(n_k)$, má souřadnice

$$u_k = \lambda_1 m_k + \lambda_2 n_k$$

nebo kratčeji $m_k + \lambda n_k$, kde homogenní parametry λ_1, λ_2 nebo parametr λ určují rovinu tu ve svazku uvažované osy vzhledem k základním rovinám (m_k), (n_k); udává totiž λ_1/λ_2 nebo $1/\lambda$ dvojpoměr čtveřiny rovin $\mu\nu\iota\xi$, kde ι jest (jednotková) rovina svazku $\mu\nu$ o souřadnicích $m_k + n_k$. Rovnicemi $u_k = \lambda_1 m_k + \lambda_2 n_k$ jest *přímka* (určená dvěma rovinami) jako osa svazku rovin *vyjádřena parametricky.*

Jsou-li $\mu = 0$, $\nu = 0$ rovnice daných dvou rovin, jest $\lambda_1 \mu + \lambda_2 \nu = 0$ rovnice každé a jenom roviny ve svazku oněmi rovinami určeném.

Rovina ξ v trsu, jehož střed je průsečíkem tří rovin $\mu(m_k)$, $\nu(n_k)$, $\pi(p_k)$, má souřadnice

$$u_k = \lambda_1 m_k + \lambda_2 n_k + \lambda_3 p_k$$

nebo kratčeji $m_k + \lambda n_k + \mu p_k$. Toto vyjádření roviny v trsu obdržíme, spojíme-li hořejší vyjádření roviny η ve svazku s osou $\mu\nu$ a roviny ξ ve svazku $\eta\gamma$; přesvědčíme se o tom také dosazením uvedených výrazů do determinantu 4. stupně, jenž je levou stranou rovnice bodu jako průsečíku tří

roviny jdoucí třemi danými body. Parametry λ_1, λ_2, λ_3 jsou souřadnice bodu X v soustavě, jejíž základní trojúhelník má vrcholy A, B, C a jednotkový bod jest $(a_k + b_k + c_k)$. Rovnice $x_k = \lambda_1 a_k + \lambda_2 b_k + \lambda_3 c_k$ jsou *parametrické rovnice roviny* jako nosiče bodového pole v prostoru.

Jsou-li $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{C} = 0$ rovnice tří bodů neležících v přímce, jest $\lambda_1\mathbf{A} + \lambda_2\mathbf{B} + \lambda_3\mathbf{C} = 0$ rovnice každého a jenom bodu na rovině oněmi třemi body položené.[2)3)]

daných rovin. Parametry λ_1, λ_2, λ_3 jsou souřadnice roviny ξ v soustavě, jejíž základní trojhran má stěny μ, ν, π a jednotková rovina jest $(m_k + n_k + p_k)$. Rovnice $u_k = \lambda_1 m_k + \lambda_2 n_k + \lambda_3 p_k$ jsou *parametrické rovnice bodu* jako nosiče rovinového trsu v prostoru.

Jsou-li $\boldsymbol{\mu} = 0$, $\boldsymbol{\nu} = 0$, $\boldsymbol{\pi} = 0$ rovnice tří rovin nejdoucích přímkou, je $\lambda_1\boldsymbol{\mu} + \lambda_2\boldsymbol{\nu} + \lambda_3\boldsymbol{\pi} = 0$ rovnice každé a jenom roviny v trsu oněmi třemi rovinami určeném.[2)]

e) Jako pro jednomocné útvary v rovině platí také *pro* dva *jednomocné útvary* základní v prostoru, řady bodové a svazky rovinové, jež jsou na základě dvojic svých prvků vyjádřeny pomocí parametrů λ a λ', že jejich *projektivnost* jest určena relací bilineární $\alpha\lambda\lambda' + \beta\lambda + \gamma\lambda' + \delta = 0$ nebo speciálněji (odpovídají-li sobě první a také druhé prvky základní) vztahem $\lambda' = k\lambda$ nebo nejspeciálněji (jestliže si korespondují také prvky jednotkové) vztahem $\lambda' = \lambda$. Podobně při homogenních parametrech λ_1, λ_2 a λ'_1, λ'_2.

A dva *dvojmocné útvary* základní, pole bodů (nebo přímek) a trsy rovin (nebo přímek), vyjádřené vzhledem ke třem základním prvkům svým pomocí homogenních parametrů λ_k a λ'_k $(k = 1, 2, 3)$, *jsou projektivní* (kolineární nebo korelativní podle druhu prvků sdružených), jestliže mezi parametry jejich prvků platí relace $\varrho\lambda'_k = a_{k1}\lambda_1 + a_{k2}\lambda_2 + a_{k3}\lambda_3$ nebo speciálněji $\varrho\lambda'_k = a_{kk}\lambda_k$ nebo nejspeciálněji $\varrho\lambda'_k = \lambda_k$.[4)5)6)]

[2)] Rovnice přímky v uvažovaném poli ABC jsou pak $\mathbf{A} : \mathbf{B} : \mathbf{C} = \varkappa_1 : \varkappa_2 : \varkappa_3$; parametry $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ a $\varkappa_3$ jsou souřadnice přímky té v soustavě se základním trojúhelníkem ABC a jednotkovou přímkou (1, 1, 1). Podmínkou incidence bodu $\lambda_1\mathbf{A} + \lambda_2\mathbf{B} + \lambda_3\mathbf{C} = 0$ a přímky $\varkappa_1 : \varkappa_2 : \varkappa_3 = \mathbf{A} : \mathbf{B} : \mathbf{C}$ jest $\varkappa_1\lambda_1 + \varkappa_2\lambda_2 + \varkappa_3\lambda_3 = 0$, jak nalezneme z podmínky pro tři body roviny, ležící v téže přímce. Duálně rovnice přímky v uvažovaném trsu $\mu\nu\pi$ jsou $\boldsymbol{\mu} : \boldsymbol{\nu} : \boldsymbol{\pi} = \varkappa_1 : \varkappa_2 : \varkappa_3$; parametry $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ a $\varkappa_3$ jsou souřadnice přímky té v soustavě se základním trojhranem $\mu\nu\pi$ a jednotkovou přímkou (1, 1, 1). Podmínka incidence roviny $\lambda_1\boldsymbol{\mu} + \lambda_2\boldsymbol{\nu} + \lambda_3\boldsymbol{\pi} = 0$ a přímky $\varkappa_1 : \varkappa_2 : \varkappa_3 = \boldsymbol{\mu} : \boldsymbol{\nu} : \boldsymbol{\pi}$ jest pak $\varkappa_1\lambda_1 + \varkappa_2\lambda_2 + \varkappa_3\lambda_3 = 0$, jak obdržíme z podmínky pro tři roviny trsu, jdoucí touže přímkou.

[3)] Konečně souřadnice bodu v prostoru jest možno vzhledem ke čtyřem bodům základním $A(a_k)$, $B(b_k)$, $C(c_k)$ a $D(d_k)$, jež neleží v téže rovině, vyjádřiti parametricky ve tvaru $x_k = \lambda_1 a_k + \lambda_2 b_k + \lambda_3 c_k + \lambda_4 d_k$, kde λ_1, λ_2, λ_3 a λ_4 jsou homogenní parametry bodu toho (souřadnice jeho v soustavě se základním čtyrstěnem $ABCD$ a jednotkovým bodem o souřadnicích $a_k + b_k + c_k + d_k$). Duálně pro rovinu.

[4)] Odvoďme analyticky, jaký útvar vytvoří dvě projektivní řady bodů nebo svazky rovin s osami mimoběžnými, dále dva korelativní trsy

100. Analytické vyjádření kolineace. *a*) V souhlasu s analytickým vyjádřením projektivnosti v základních útvarech 1. a 2. řádu platí pro kolineaci základních útvarů 3. řádu:

přímek a rovin. Jsou-li $A(a_k)$, $B(b_k)$, $A'(a'_k)$ a $B'(b'_k)$ čtyři body neležící v téže rovině, takže $\mathbf{A} \equiv a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4 = 0$ a obdobně $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{A}' = 0$, $\mathbf{B}' = 0$ jsou rovnice bodů těch v souřadnicích rovinových, vyjadřují rovnice $\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} = 0$ a $\mathbf{A}' + \lambda'\mathbf{B}' = 0$ při proměnných parametrech λ a λ' řady bodové na dvou přímkách mimoběžných. Učiníme-li řady ty projektivními třebas tím jednoduchým způsobem, že položíme $\lambda' = \lambda$, vytvoří přímky spojující body v této projektivnosti sdružené (svazky rovin s osami v přímkách těch) útvar, jehož rovnice v souřadnicích u_k jest $\mathbf{AB}' - \mathbf{A}'\mathbf{B} = 0$, tedy 2. stupně a vyjadřuje *zborcenou řadu kvadratickou* (plochu 2. třídy). Duálně vyjdeme-li od dvou svazků rovinových $\boldsymbol{\alpha} + \lambda\boldsymbol{\beta} = 0$, $\boldsymbol{\alpha}' + \lambda'\boldsymbol{\beta}' = 0$, jejichž osy jsou průsečnicemi rovin $\boldsymbol{\alpha} \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$, $\boldsymbol{\beta} = 0$, $\boldsymbol{\alpha}' = 0$ a $\boldsymbol{\beta}' = 0$ a jsou mimoběžné, dospějeme při projektivním přiřadění rovin těchto svazků (třebas) relací $\lambda' = \lambda$ k útvaru s rovnicí $\boldsymbol{\alpha\beta}' - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta} = 0$, jež je 2. stupně v souřadnicích x_k a vyjadřuje *zborcenou řadu kvadratickou* (plochu 2. stupně).

Máme-li trs rovin, vyjádřený parametricky při proměnných parametrech λ_k rovnicí $\lambda_1\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2\boldsymbol{\beta} + \lambda_3\boldsymbol{\gamma} = 0$, a trs přímek $\lambda'_1 : \lambda'_2 : \lambda'_3 = \boldsymbol{\alpha}' : \boldsymbol{\beta}' : \boldsymbol{\gamma}'$ při proměnných λ'_k, kde $\boldsymbol{\alpha} \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ a obdobně $\boldsymbol{\beta} = 0$, $\boldsymbol{\gamma} = 0$, $\boldsymbol{\alpha}' = 0$, $\boldsymbol{\beta}' = 0$, $\boldsymbol{\gamma}' = 0$ jsou rovnice dvou trojic rovin trsy ty určujících, a učiníme-li je korelativními třebas jednoduchými relacemi $\varrho\lambda'_1 = \lambda_1$, $\varrho\lambda'_2 = \lambda_2$, $\varrho\lambda'_3 = \lambda_3$, obdržíme jako útvar jimi vytvořený soustavu bodů s rovnicí 2. stupně $\boldsymbol{\alpha\alpha}' + \boldsymbol{\beta\beta}' + \boldsymbol{\gamma\gamma}' = 0$, tedy *plochu 2. stupně*. Při duálním postupu od pole bodového $\lambda_1\mathbf{A} + \lambda_2\mathbf{B} + \lambda_3\mathbf{C} = 0$ a pole přímkového $\lambda'_1 : \lambda'_2 : \lambda'_3 = \mathbf{A}' : \mathbf{B}' : \mathbf{C}'$ dostaneme *plochu 2. třídy* s rovnicí $\mathbf{AA}' + \mathbf{BB}' + \mathbf{CC}' = 0$. Útvar odvozený ze dvou korelativních trsů (nebo útvar duální) nalezneme také třebas tím, že zavedeme mezi trsem přímek se středem $O_1(1, 0, 0, 0)$, tedy přímek o souřadnicích $x_2 : x_3 : x_4$, a mezi trsem rovin se středem $O_2(0, 1, 0, 0)$, tedy rovin o souřadnicích $u_1 : u_3 : u_4$, korelaci rovnicemi $\varrho u_1 = a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4$, $\varrho u_3 = a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4$, $\varrho u_4 = a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4$ a položíme podmínku incidence bodu (x_k) na přímce prvního trsu s korespondující rovinou trsu druhého, tedy $u_1x_1 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$; tím dostaneme rovnici $a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4 + a_{32}x_2x_3 + a_{42}x_2x_4 + (a_{34} + a_{43})\,x_3x_4 = 0$, tedy plochu 2. stupně jdoucí body O_1 a O_2.

[5]) Vedle reálných prvků béřeme v úvahu také *imaginární prvky* v prostoru. Imaginárním sluje *bod*, jehož souřadnice x_k jsou aspoň z části imaginární (tak, že imaginární faktor nelze pojmout do konstanty úměrnosti ϱ), nebo jehož rovnice obsahuje ze součinitelů aspoň jeden imaginární; duálně nazýváme imaginární *rovinu*, jejíž souřadnice u_k nejsou všechny reálné, nebo jejíž rovnice nemá všechny součinitele reálné. Dva body nebo dvě roviny slují sdruženě imaginární, jsou-li jejich stejnolehlé souřadnice čísla komplexní sdružená. O imaginárních bodech a rovinách v prostoru (jež tvoří soustavu šestimocnou) platí věty uvedené o prvcích reálných, zejména táž podmínka incidence. Přímka spojující dva body sdruženě imaginární jest reálná. Imaginárním bodem prochází ∞^1 rovin reálných (svazek rovin jdoucích jeho spojnicí s bodem sdruženě imaginárním), žádná však další reálná rovina není s ním incidentní (protože by jinak bod ten byl průsečíkem uvedené reálné přímky a další reálné roviny, tedy reálný). Přímka společná dvěma rovinám sdruženě imaginárním jest reálná. Imaginární rovina obsahuje ∞^1 reálných bodů (řadu bodů společnou této rovině a rovině

Kolineace dvou prostorů Σ a Σ', jejichž body ve zvolených soustavách mají souřadnice (x_k) a (x'_k), jest vyjádřena lineárními rovnicemi

$$\begin{aligned}
\varrho x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,\\
\varrho x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,\\
\varrho x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,\\
\varrho x'_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4,
\end{aligned}$$

kde ϱ je faktor úměrnosti různý od nuly a součinitelé a_{hk} jsou reálné konstanty; obráceně *taková lineární transformace prostoru Σ v prostor Σ' značí vždy kolineaci.*

Druhou část věty dokážeme tím, že zjistíme obapolnou jednoznačnost při transformaci bodů a při transformaci roviny v rovinu, tak

---

sdruženě imaginární), žádný však další bod reálný. V rovině byly zavedeny (vedle imaginárních bodů) *imaginární přímky (1. druhu)*, z nichž každá obsahuje jeden a jediný bod reálný, svůj průsečík s přímkou sdruženě imaginární; duálně lze v trsu (vedle imaginárních rovin) nalézti tytéž přímky, z nichž každá je duálně incidentní s jednou a jedinou rovinou reálnou. Imaginární body nebo roviny nebo přímky 1. druhu (vždy dva prvky sdruženě imaginární) dostaneme jako samodružné prvky eliptické involuce v řadě bodů na reálné ose, resp. ve svazku rovin s reálnou osou, resp. ve svazku přímek s reálným středem na reálné rovině. Mimo imaginární přímky 1. druhu jsou v prostoru *imaginární přímky 2. druhu*, obsahující (imaginární) body společné dvěma imaginárním rovinám, z nichž každá je položena jednou ze dvou reálných přímek mimoběžných. Tyto imaginární přímky 2. druhu neobsahují vůbec bodu reálného (protože uvedené dvě roviny přímku takovou určující nemají mimo reálné přímky, jimiž jsou položeny, dalších bodů reálných) a nejsou incidentní s žádnou rovinou reálnou. K imaginární přímce 2. druhu existuje (podobně jako k imaginární přímce 1. druhu) přímka imaginární sdružená (nemající však s ní bodu společného). Imaginární přímky 2. druhu (sdružené) obdržíme jako samodružné prvky eliptické involuce ve zborcené řadě kvadratické: dvě projektivní řady bodové $\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} = 0$ a $\mathbf{A}' + \lambda'\mathbf{B}' = 0$ na přímkách mimoběžných (kdy totiž body $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{A}' = 0$, $\mathbf{B}' = 0$ neleží v téže rovině) představují při bilineární relaci mezi parametry λ a λ', speciálně při $\lambda' = \lambda$, soustavu přímek, spojujících sdružené body řad těch, tedy zborcenou řadu kvadratickou; přímky $\mathbf{A} + i\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{A}' + i\mathbf{B}' = 0$ a $\mathbf{A} - i\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{A}' - i\mathbf{B}' = 0$ jsou sdruženě imaginární 2. druhu a jsou samodružné v involuci uvedené řady kvadratické, jež je stanovena relací $\lambda\mu + 1 = 0$. Dva body o souřadnicích $(a_k + b_k i), (a'_k + b'_k i)$ určují přímku reálnou nebo imaginární 1. druhu nebo imaginární 2. druhu podle toho, jsou-li incidentní s ∞ reálnými rovinami resp. s jednou resp. s žádnou rovinou reálnou, tedy jsou-li z determinantů obsažených v matici s řádky $a_k b_k a'_k b'_k$ nule rovny (jenom) všechny determinanty 3. stupně, resp. jen determinant 4. stupně, resp. ani tento (čtyři rovnice $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 = 0$, kde $x_k = a_k, b_k, a'_k, b'_k$, redukují se na dvě, resp. tři, resp. dávají $u_k = 0$). A duálně.

[6]) Projektivnost jednomocného útvaru, vyjádřenou bilineární rovnicí se čtyřmi součiniteli pro souřadnice jeho prvků, lze znázorniti bodem v prostoru o souřadnicích, oněm koeficientům úměrných; na základě toho jest pak možno binární projektivnosti s výhodou vyšetřovati, jak po prvé učinil *C. Stephanos* v poj. uv. v pozn. [7]) čl. 30.

vyjádřených. Vskutku přechází uvedenými rovnicemi každý bod P prostoru Σ, mající zde ve zvolené soustavě souřadnice x_k, v jediný bod P' prostoru Σ', jenž má tam v libovolné soustavě (obecně jiné, spec. téže) souřadnice x'_k; aby také obráceně každému bodu P' v Σ' odpovídal jediný bod P v Σ, musí býti možno rovnice ty řešiti podle x_k, čehož *podmínkou jest nenulová hodnota determinantu* (t. zv. *modulu* transformace)

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \equiv (a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}).$$

Je-li tento determinant transformace různý od nuly, obdržíme řešením hořejších rovnic rovnice inversní transformace

$$\begin{aligned} \sigma x_1 &= A_{11}x'_1 + A_{21}x'_2 + A_{31}x'_3 + A_{41}x'_4, \\ \sigma x_2 &= A_{12}x'_1 + A_{22}x'_2 + A_{32}x'_3 + A_{42}x'_4, \\ \sigma x_3 &= A_{13}x'_1 + A_{23}x'_2 + A_{33}x'_3 + A_{43}x'_4, \\ \sigma x_4 &= A_{14}x'_1 + A_{24}x'_2 + A_{34}x'_3 + A_{44}x'_4, \end{aligned}$$

kde koeficientem A_{hk} je subdeterminant 3. stupně, příslušný v A k prvku a_{hk} (a $\sigma = A/\varrho$).

Rovina π v Σ o rovnici

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

přechází uvedenou transformací v útvar o rovnici

$$\begin{aligned} &(A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 + A_{14}u_4)\, x'_1 + (A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 + A_{24}u_4)\, x'_2 + \\ &+ (A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3 + A_{34}u_4)\, x'_3 + (A_{41}u_1 + A_{42}u_2 + A_{43}u_3 + A_{44}u_4)\, x'_4 = 0, \end{aligned}$$

což jest opět rovina; rovnici této roviny π' můžeme psáti ve tvaru

$$u'_1x'_1 + u'_2x'_2 + u'_3x'_3 + u'_4x'_4 = 0.$$

A protože rovina $\pi(u_k)$ přešla v rovinu $\pi'(u'_k)$, jest uvažovanou lineární transformaci, vyjádřenou původně v souřadnicích bodových, možno také vyjádřiti jako lineární transformaci souřadnic rovinových

$$\begin{aligned} \mu u'_1 &= A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 + A_{14}u_4, \\ \mu u'_2 &= A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 + A_{24}u_4, \\ \mu u'_3 &= A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3 + A_{34}u_4, \\ \mu u'_4 &= A_{41}u_1 + A_{42}u_2 + A_{43}u_3 + A_{44}u_4. \end{aligned}$$

Konečně pro převedení roviny π' prostoru Σ' v rovinu π prostoru Σ platí transformační rovnice

$$\begin{aligned} \nu u_1 &= a_{11}u'_1 + a_{21}u'_2 + a_{31}u'_3 + a_{41}u'_4, \\ \nu u_2 &= a_{12}u'_1 + a_{22}u'_2 + a_{32}u'_3 + a_{42}u'_4, \\ \nu u_3 &= a_{13}u'_1 + a_{23}u'_2 + a_{33}u'_3 + a_{43}u'_4, \\ \nu u_4 &= a_{14}u'_1 + a_{24}u'_2 + a_{34}u'_3 + a_{44}u'_4, \end{aligned}$$

jak nalezneme buď řešením rovnic předcházejících (je-li $A \neq 0$, jest také determinant z prvků A_{hk} různý od nuly, a jako z prvků a_{hk} jsou

složeny subdeterminanty A_{hk}, tak z koeficientů A_{hk} vznikají — až na společný faktor — koeficienty a_{hk}) nebo transformací rovnice $u'_1x'_1 + u'_2x'_2 + u'_3x'_3 + u'_4x'_4 = 0$ pomocí rovnic transformačních pro x'_k.[1])

Snadno zjistíme také, že uvažovanou transformací lineární přechází svazek rovin

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4) + \lambda(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4) = 0$$

v projektivní svazek rovin

$$(a'_1x'_1 + a'_2x'_2 + a'_3x'_3 + a'_4x'_4) + \lambda(b'_1x'_1 + b'_2x'_2 + b'_3x'_3 + b'_4x'_4) = 0,$$

kde $\varkappa a'_k = \Sigma A_{kh}a_h$, $\varkappa b'_k = \Sigma A_{kh}b_h$.

S druhé strany lze dokázati, že existuje jediná lineární transformace, vyjádřená rovnicemi tvaru $\varrho x'_k = \Sigma a_{kh}x_h$ (pro $k = 1, 2, 3, 4$), jež převádí body (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) a (1, 1, 1, 1) v libovolných pět obecně položených bodů prostoru. A protože takovým způsobem (tím totiž, že pěti bodům v Σ, do nichž lze položiti základní body soustavy souřadnic, přiřadíme pět bodů v Σ') jest definována každá kolineace prostorů Σ a Σ', jest každou kolineaci dvou prostorů možno vyjádřiti lineární transformací souřadnic (bodových nebo také rovinových) v uvedeném tvaru s podmínkou $A \neq 0$.[2])[3])[4])

---

[1]) Ze dvou transformací, jež pomocí koeficientů a_{hk} převádějí x_k v x'_k a pomocí a_{kh} převádějí u'_k v u_k, sluje jedna *transponovanou* vůči druhé (rovněž tak transformace s koeficienty A_{hk} a s koeficienty A_{kh}).

[2]) Soustava čtyř rovnic, vyjadřující kolineaci dvou prostorů v souřadnicích bodových nebo rovinových, jest *analytickou definicí* takové kvaternární kolineace.

Kolineaci dvou prostorů Σ a Σ' lze také definovati *rovnicí bilineární*

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)u'_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4)u'_2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4)u'_3 + (a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4)u'_4 = 0$$

(za suposice $A \neq 0$), ve kterou při použití hořejších rovnic přechází podmínka incidence bodu (x'_k) a roviny (u'_k) v prostoru Σ', nebo rovnicí

$$u_1(A_{11}x'_1 + A_{21}x'_2 + A_{31}x'_3 + A_{41}x'_4) + u_2(A_{12}x'_1 + A_{22}x'_2 + A_{32}x'_3 + A_{42}x'_4) + u_3(A_{13}x'_1 + A_{23}x'_2 + A_{33}x'_3 + A_{43}x'_4) + u_4(A_{14}x'_1 + A_{24}x'_2 + A_{34}x'_3 + A_{44}x'_4) = 0,$$

analogicky získanou. (Rovnice tyto jsou bilineární v souřadnicích prvku v Σ a prvku incidentního se sdruženým v Σ' čili v souřadnicích prvků, jež lze nazvati konjugovanými.)

Kolineace, definovaná uvedenými rovnicemi s determinantem koeficientů A rovným nule, jest ovšem zvrhlá.

[3]) Jako v jednomocném útvaru základním jest rozeznávati dva (navzájem opačné) smysly uspořádání jeho prvků, z nichž každý je dán určitým pořadím tří prvků v něm, tak také v prostorové soustavě bodů (a duálně rovin) existují *dva smysly, stanovené vždy pěti body v určitém pořádku* (při němž jsou přípustny záměny cyklické). Kolineace, vyjádřená rovnicemi se součiniteli reálnými, jest pak vzhledem k tomu dvojího druhu: buď nemění smyslu prostorové soustavy, nebo jej převádí ve smysl opačný a sluje podle toho *kladná* (přímá) resp. *záporná* (obrácená), protože determinant z koeficientů jejích rovnic má znaménko kladné resp. záporné. Viz

b) Jestliže speciálně zvolíme vrcholy základních čtyrstěnů souřadnicových soustav v prostoru Σ a prostoru Σ' v bodech, jež sobě danou kolineací odpovídají (tak, že vrcholu O_k odpovídá vrchol O'_k s týmž indexem), jest tato kolineace vyjádřena rovnicemi

$$\varrho x'_k = a_{kk} x_k \quad \text{nebo} \quad \mu u'_k = A_{kk} u_k.$$

Zvolíme-li pak také jednotkové body obou soustav T a T' v bodech danou kolineací sdružených, redukují se rovnice takové kolineace na tvar nejjednodušší (t. zv. *kanonický*)

$$\varrho x'_k = x_k \quad \text{nebo} \quad \mu u'_k = u_k.$$[5][6][7]

na př. *A. Comessatti*, Lezioni di geometria analitica e proiettiva II, p. 269 a n., 284 a n.; také *E. Study*, Die Begriffe Links, Rechts, Windungssinn und Drehungssinn, Archiv Math. Phys. (3) 21 (1913).

[4]) Uvedená kolineace jest *reálná*; leckdy však jest vzíti v úvahu kolineaci *komplexní*, t. j. lineární transformaci, jejíž rovnice mají součinitele komplexní.

Projektivní transformaci prostorovou lze analyticky charakterisovati také velmi jednoduchými rovnicemi diferenciálními; viz *E. O. Lovett*, Note on the general projective transformation, Annals math. 10 (1896).

[5]) O analytickém převodu rovnic kolineace (a korelace) na tvar kanonický pojednává *O. Staude*, Über Kollineationen und Korrelationen im Raume, Journal r. a. Math. 152 (1923).

Přejdeme-li od soustavy souřadnic homogenních k souřadnicím nehomogenním, dostaneme pro kolineaci, jež prostor Σ s body $P(x, y, z)$ převádí v prostor Σ' s body $P'(x', y', z')$, rovnice

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}},$$

$$y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}},$$

$$z' = \frac{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}},$$

kde $A \equiv (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}) \neq 0$.

Táž kolineární transformace jest v souřadnicích rovinových vyjádřena rovnicemi

$$u' = \frac{A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w + A_{14}}{A_{41}u + A_{42}v + A_{43}w + A_{44}},$$

$$v' = \frac{A_{21}u + A_{22}v + A_{23}w + A_{24}}{A_{41}u + A_{42}v + A_{43}w + A_{44}},$$

$$w' = \frac{A_{31}u + A_{32}v + A_{33}w + A_{34}}{A_{41}u + A_{42}v + A_{43}w + A_{44}},$$

kde A_{hk} je subdeterminant 3. stupně v A, příslušný k prvku jeho a_{hk}.

Budiž poznamenáno, že lineární lomené funkce v těchto nehomogenních rovnicích kolineace (pro souřadnice bodové nebo rovinové) musí míti stejné jmenovatele (jak plyne třebas z vyjádření kolineace té ve tvaru homogenním).

[6]) V projektivní geometrii komplexní vyšetřují se vedle kolineací také *antikolineace* prostorové; viz zejména *H. H. Mac Gregor*, Three dimensional chains and the associated collineations in space, Annals math. (2) 14 (1912); *J. L. Coolidge*, The geometry of the complex domain, 1924; *E. Cartan*, Leçons sur la géométrie projective complexe, 1931.

c) Rovnice, vyjadřující kolineaci dvou prostorů, jsou za jistých okolností rovnicemi pro *transformaci souřadnic* z jedné soustavy prostoru do druhé.

Máme-li na zřeteli dvě soumístné prostorové soustavy (bodů a rovin), z nichž jednu vztahujeme k základnímu čtyrstěnu $O_1O_2O_3O_4$ a jednotkovému bodu T, druhou k čtyrstěnu základnímu $O'_1O'_2O'_3O'_4$ a bodu jednotkovému T', má kolineární transformace, převádějící body (x_k) a roviny (u_k) prvého prostoru v body (x'_k) a roviny (u'_k) prostoru druhého, rovnice

$$\varrho x'_k = \Sigma a_{kh} x_h, \text{ resp. } \varrho u'_k = \Sigma A_{kh} u_h.$$

Budiž však každý bod o souřadnicích x'_k totožný s bodem o souřadnicích x_k a každá rovina o souřadnicích u'_k totožná s rovinou o souřadnicích u_k: uvedená kolineace je v tom případě identickou transformací jednoho prostoru v druhý a její rovnice vyjadřují vztahy mezi souřadnicemi každého prvku jednoho a téhož prostoru v obou soustavách souřadnic tam zvolených.[8]) *Vztahujeme-li* tedy *prvky* (body a roviny) *prostoru k základním útvarům dvou soustav homogenních souřadnic, jsou souřadnice každého bodu a každé roviny v jedné soustavě lineárními homogenními funkcemi souřadnic téhož prvku v soustavě druhé*, při čemž determinant z koeficientů těchto funkcí je různý od nuly; obráceně *lineární homogenní transformaci* (se součiniteli uvedené vlastnosti) *souřadnic* x_k *v* x'_k *a souřadnic* u_k *v* u'_k *lze vždy pokládati za transformaci souřadnic bodů resp. rovin v prostoru.*[9])

101. Typy kolineací v prostoru. *a*) Obrátíme se ke kolineaci dvou soumístných soustav prostorových Σ a Σ' a tedy především k vyšetření jejich útvaru samodružného.

Kolineace dvou soumístných prostorů (čili prostě *kolineace prostorová*) jest ovšem jednoznačně určena pěti dvojicemi sdružených prvků nezávislých. Jestliže kolineace v prostoru obsahuje pět nezávislých

---

[7]) Kolineace (lineární transformace, neměnící prvku) jsou nejjednodušším a nejdůležitějším případem transformací *biracionálních* čili *Cremonových* (n-tého stupně), t. j. jednojednoznačných transformací prostoru v prostor, jež roviny každého z obou prostorů převádějí v algebraické plochy n-tého stupně. O nich viz na př. *K. Doehlemann*, Geometrische Transformationen II, 1908; *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften IV, 1909; *H. P. Hudson*, Cremona transformations in plane and space, 1927; krátce také v Repertorium höh. Math. II. 2 (1922), 38. kap. (*H. E. Timerding*, Rationale Transformationen des Raumes). (Souborný referát *L. Berzolariho* v Encyklopädie math. Wiss. II. 2_2, v tisku 1932.)

[8]) Základní čtyrstěn nové soustavy souřadnic (s čárkami) má v původní soustavě souřadnic vrcholy (A_{1k}), (A_{2k}), (A_{3k}), (A_{4k}) a stěny (a_{1k}), (a_{2k}), (a_{3k}), (a_{4k}), jednotkovým bodem soustavy nové jest pak bod $(A_{1k} + A_{2k} + A_{3k} + A_{4k})$ a jednotkovou rovinou rovina $(a_{1k} + a_{2k} + a_{3k} + a_{4k})$.

[9]) Transformace souřadnic v prostoru jest buď kladná nebo záporná podle znaménka svého determinantu A. Více o transformaci souřadnic na př. *L. Heffter*, Lehrbuch der analytischen Geometrie II, p. 89 a n.

bodů nebo rovin samodružných, jest *identická*; neboť těmito dvojicemi jest určena jediná kolineace a identická korespondence jest zajisté kolineární.

Suponujme tedy v dalším, že kolineace dvou soumístných prostorů nemá pět nezávislých prvků samodružných (čili že není identická).

b) Jestliže neidentická kolineace prostorová obsahuje pět samodružných bodů, musí aspoň čtyři z nich ležeti v jedné rovině (samodružné rovině kolineace); duálně z pěti samodružných rovin neidentické kolineace musí aspoň čtyři procházeti jedním bodem (samodružným bodem kolineace prostorové). Kolineace v samodružné rovině, obsahující čtyři body samodružné, jest identická, neleží-li aspoň tři z bodů těch v jedné přímce; duálně jestliže aspoň tři z uvedených čtyř samodružných rovin téhož trsu neprocházejí jednou přímkou, jest kolineace v trsu tom identická. Platí tedy:

Jestliže v neidentické kolineaci prostorové existuje pět samodružných bodů, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce, existuje tam rovina složená z bodů (a přímek) samodružných.

Jestliže v neidentické kolineaci prostorové existuje pět samodružných rovin, z nichž žádné tři neprocházejí jednou přímkou, existuje tam trs složený z rovin (a přímek) samodružných.

A dále: *Jestliže kolineace prostorová obsahuje pole samodružných prvků, má také trs prvků samodružných; a obráceně.*

Neboť tvoří-li v neidentické kolineaci prostorové s rovinou samodružných prvků α body A a A', B a B' dvě dvojice bodů sobě odpovídajících (jež neleží v téže přímce), odpovídá přímce AB přímka $A'B'$; tyto přímky leží v téže rovině, protože bodem, v němž AB protíná α, jako bodem samodružným prochází také $A'B'$. Protínají se tudíž přímky AA' a BB' a vůbec kterékoli dvě spojnice dvojic bodů samodružných; pročež jdou všechny tyto spojnice jedním a týmž bodem, nemohouce zajisté ležeti v téže rovině. Tento bod O je samodružný bod kolineace prostorové: každá přímka jím jdoucí je samodružná, protože odpovídá-li libovolnému bodu X bod X' (různý od X), musí podle uvedeného spojnice XX' procházeti bodem O (takže přímka OX obsahuje bod X'), každá rovina jdoucí bodem O je samodružná, obsahujíc svazek samodružných přímek se středem O. Obrácená věta je duální k větě dokázané.

Tato kolineace prostorová, jež má pole a trs samodružných elementů, sluje *homologie prostorová* (perspektivní kolineace, centrální čili středová kolineace);[1]) střed trsu samodružných prvků sluje *středem homologie*, rovina samodružných prvků *rovinou homologie*. Střed homologie může speciálně ležeti v rovině homologie.[2])

[1]) Pojem i jméno prostorové homologie pochází od *Poncelet* (1822).

[2]) Můžeme také říci: Neidentická kolineace prostorová, jež má samodružné čtyři vrcholy rovinného čtyřrohu nebo čtyři strany čtyrstranu nebo má duálně samodružné čtyři stěny středového čtyrstěnu nebo čtyři hrany čtyrhranu, jest homologie.

c) Pokračujíce v úvaze předešlého odstavce, vidíme:

Jestliže v neidentické nehomologické kolineaci prostorové existuje pět samodružných bodů, leží aspoň tři z nich v přímce, složené proto zcela z bodů samodružných.

Jestliže v neidentické nehomologické kolineaci prostorové existuje pět samodružných rovin, jdou aspoň tři z nich přímkou, jež je proto osou svazku samodružných rovin.

A platí dále: *Jestliže kolineace prostorová má přímou řadu samodružných bodů, má také svazek samodružných rovin; a obráceně.*

Neboť je-li v neidentické a nehomologické kolineaci prostorové přímka a osou bodů vesměs samodružných, jest také osou dvou projektivních rovinových svazků soumístných; tato projektivnost jest buď identická (všechny roviny jdoucí přímkou a jsou samodružné, čímž věta je splněna) nebo není identická (nejvýše dvě reálné roviny jdoucí přímkou a jsou samodružné). Budiž A bod ležící mimo uvedené dvě roviny samodružné, jemu odpovídající bod budiž A', a tomuto ať odpovídá bod A''. Leží-li bod A'' na AA', jest tato přímka samodružnou, každá rovina jdoucí přímkou AA' protíná přímku a v bodě samodružném a jest tedy samodružná (AA' nemůže protínati přímky a, protože by rovina aA byla samodružná proti předpokladu); přímka AA' je osou svazku ve větě uvedeného. Leží-li bod A'' mimo AA', protíná rovina $AA'A''$ přímku a v bodě samodružném (P) a jest samodružná, protože rovině $AA'P$ koresponduje rovina $A'A''P$; nahradíme-li bod A jinými body, obdržíme nekonečně mnoho rovin samodružných, jež tvoří svazek. Obrácená věta je duální k větě právě dokázané.

Kolineace v prostoru, jež má přímku samodružných bodů a svazek samodružných rovin s různými osami, sluje *osová kolineace*; obě osy prvků samodružných jsou obecně mimoběžné, ve speciálním případě se protínají.

Kolineace v prostoru, jejíž první osa samodružných bodů je spolu osou samodružných rovin a druhá osa samodružných rovin je spolu osou samodružných bodů, sluje *dvojosá kolineace*; obě osy samodružných prvků slují *osami* kolineace dvojosé; jsou obecně mimoběžné, ve speciálním případě splývají v jednu.[3])

Existence těchto kolineací bude prokázána v dalším.

d) Víme, že prostorová kolineace s pěti nezávislými prvky samodružnými jest identická. Neidentická kolineace v prostoru má tudíž nejvýše čtyři samodružné body v obecné poloze, rovněž čtyři samodružné roviny, položené trojicemi bodů těch, celkem tedy vrcholy a stěny čtyrstěnu.

Jest pak kolineace v případě nejobecnějším určena samodružným čtyrstěnem svým a dvojicí bodů sdružených P a P', jejichž spojnice neprotíná žádné hrany čtyrstěnu ani neprochází žádným vrcholem jeho.

[3]) Kdyby se osy ty protínaly, měla by rovina jejich všechny body samodružné, kolineace by byla homologií.

Jestliže (v případě druhém) spojnice PP' dvou bodů sobě odpovídajících protíná jednu (a jen jednu) ze šesti hran invariantního čtyrstěnu, jest samodružnou také rovina jdoucí touto hranou a přímkou PP', takže proťatá hrana jest osou dvou projektivních svazků rovinových soumístných s třemi rovinami samodružnými; projektivnost těchto soumístných svazků jest tudíž identická, pročež protější hrana čtyrstěnu jest osou řady samodružných bodů — kolineace jest osová.

Jestliže (v případě třetím) spojnice PP' dvou bodů sdružených protíná dvě protější hrany čtyrstěnu samodružného, jsou obě tyto hrany osami svazků samodružných rovin a spolu osami řad samodružných bodů — kolineace jest dvojosá.

Konečně prochází-li (v případě čtvrtém) spojnice PP' vrcholem invariantního čtyrstěnu, obsahuje trs se středem v tomto vrcholu čtyři samodružné přímky (tři hrany čtyrstěnu a přímku PP') a jest tudíž trsem prvků vesměs samodružných, rovněž protější stěna samodružného čtyrstěnu jest polem prvků samodružných — kolineace jest homologií.

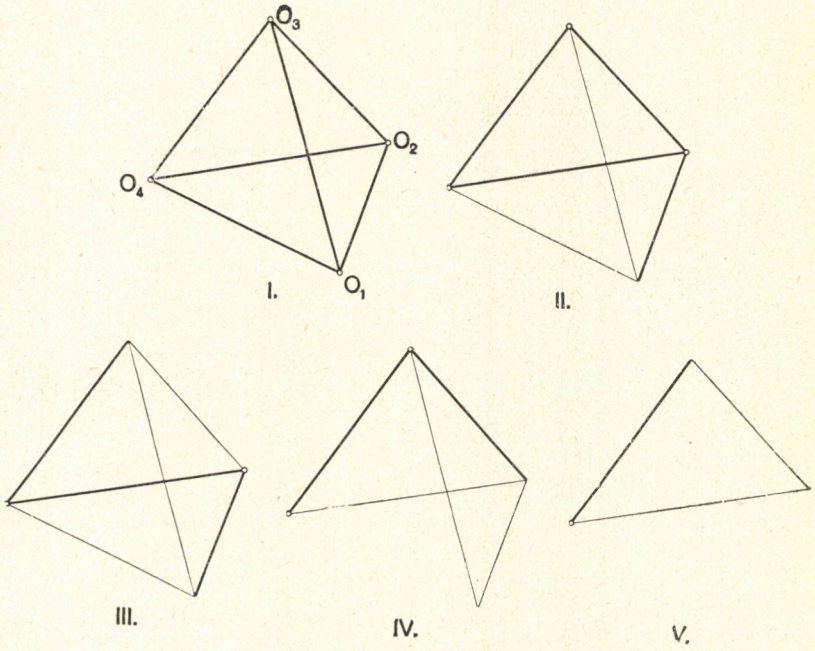
Vedle uvedených čtyř obecných typů kolineace prostorové existuje řada dalších typů (limitních, partikulárních), jež vznikají tím, že některé ze samodružných prvků v jmenovaných typech se ztotožní nebo se stanou incidentními; další případy (subtypy) možno rozeznávati podle reálnosti nebo imaginárnosti prvků samodružných. Označíme-li nejobecnější typ kolineace v prostoru se čtyřmi samodružnými body různými jako I., symbolicky [0000], druží se k němu patrně limitní typ II. s dvěma splývajícími a dvěma různými body samodružnými, symbolu [(00) 00], typ III. s dvěma dvojicemi splývajících bodů samodružných, symbolu [(00) (00)], typ IV. s třemi splývajícími body samodružnými a jedním od nich různým, symbolu [(000) 0], a konečně typ V. se čtyřmi body samodružnými v jeden splývajícími, symbolu [(0000)]. U typu I. může jedna dvojice nebo mohou i obě dvojice bodů samodružných tvořiti skupinu dvou imaginárních bodů konjugovaných (na reálných přímkách), taktéž dvojice různých bodů samodružných u typu II. a dvojice bodů u typu III.

Kolineace osová označuje se jako typ VI., symbolicky [100], protože vedle přímky samodružných bodů obsahuje obecně dva samodružné body na mimoběžné ose svazku samodružných rovin; oba tyto samodružné body mohou býti imaginárními body samodružnými v eliptické projektivnosti na reálné ose. Jestliže oba samodružné body na mimoběžné ose v této kolineaci se ztotožní, vznikne limitní kolineace typu VII., symbolu [1 (00)]. Jestliže osa svazku samodružných rovin protíná osu řady samodružných bodů, děje se tak zajisté v jednom z obou jejích bodů samodružných, po případě v jediném jejím bodě samodružném; tak obdržíme z typu šestého a sedmého typ VIII. symbolu [(10) 0], resp. IX. symbolu [(100)].

Kolineace dvojosá jest typem X. o symbolu [11], obsahujíc dvě přímky bodů vesměs samodružných v poloze mimoběžné; obě tyto osy

mohou býti imaginární. Splynou-li obě osy dvojosé kolineace v přímku jednu, vznikne limitní typ XI., symbolu [(11)].[4])

Homologie, čtvrtý obecný případ kolineace, jest v tomto pořadí typem XII., symbolu [20]; její limitní případ je t. zv. elace, homologie totiž, jejíž střed a rovina samodružných prvků jsou incidentní, jako typ XIII. symbolu [(20)].



Obr. 83.

Samodružný útvar kolineace každého typu jest soběduální.

Z třinácti uvedených typů neidentické kolineace v prostoru jsou typy I. až XI. (tedy mimo homologii a elaci) znázorněny (schematicky) na obr. 83, 84 a 85.[5])

e) Předběžně podaný výčet možných typů prostorové kolineace je záhodno odvodit jednotným způsobem. Abychom obdrželi všechny typy kolineace v prostoru, vezměme v úvahu trs o středu S, jemu v dané kolineaci odpovídající trs o středu S' a tomuto v téže kolineaci korespon-

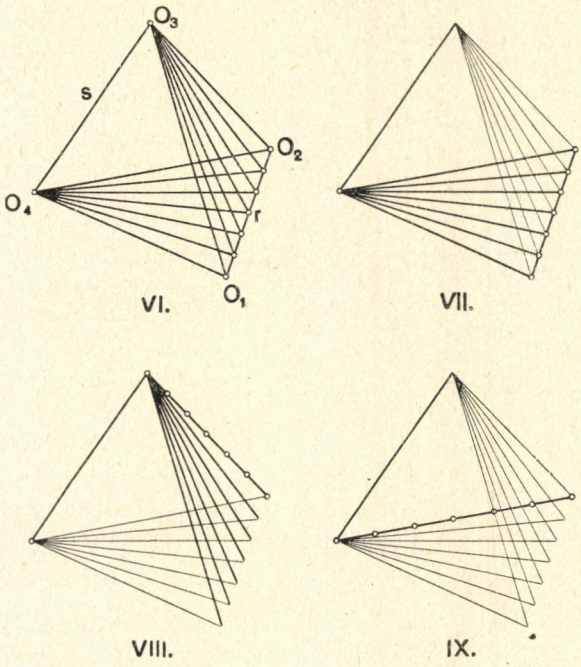
[4]) Tento typ může také vzniknouti, splynou-li obě osy invariantních prvků v kolineaci osové.

[5]) Počítáme-li vedle vytčených třinácti typů identickou kolineaci (podle zvyku) jako typ čtrnáctý a k tomu typy s imaginárními prvky samodružnými (dva u typu I., po jednom u typů II., III., VI. a X.) zvlášť, obdržíme (s hlediska reálnosti) celkem 20 typů kolineací prostorových.

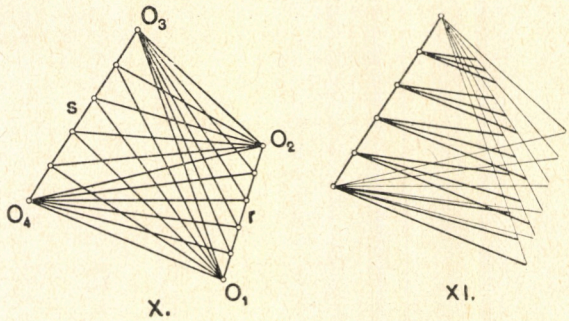
dující trs o středu S''. Sdružené paprsky trsů S a S' vytvořují prostorovou čáru 3. stupně k, jdoucí body S, S' a dotýkající se v S' přímky $S'S''$; obdobně sdružené paprsky trsů S' a S'' vytvořují kubickou čáru prostorovou k', jdoucí body S', S'' a dotýkající se v S' přímky $S'S$; tyto dvě čáry odpovídají sobě v dané kolineaci. Čáry k a k' leží na kuželové ploše 2. stupně, vytvořené projektivními svazky rovin s osami SS' a $S'S''$, s vrcholem S', v němž se protínají; odpovídající sobě body jejich leží vždy na téže přímce kužele. Obráceně lze každou kolineaci prostoru určiti takovými dvěma čarami kubickými.

Společné body obou prostorových čar kubických k a k' mimo bod S' jsou samodružnými body dané kolineace v prostoru a vyčerpávají je. Kubické čáry k a k' protínají se, jak známo, nejvýše v pěti bodech, mimo S' tedy ve čtyřech bodech. Má proto nejobecnější typ kolineace prostorové čtyři různé body samodružné (typ I.); splynou-li z těchto čtyř průsečíků dva nebo dva a dva nebo tři nebo konečně čtyři (čáry k a k' se dotýkají v jednom bodě nebo ve dvou různých bodech, nebo mají dotyk trojbodový nebo dotyk čtyrbodový), vznikne kolineace typu II. rep. III. resp. IV. resp. V. Splyne-li z uvedených čtyř průsečíků jeden s bodem S', dostaneme obecnou homologii (typ XII.) se středem S'; splynou-li dva z bodů těch s bodem S', obdržíme homologii limitní (typ XIII.). Jestliže kvadratický kužel obsahující čáry k a k' se rozpadne ve dvě roviny, rozpadne se kubika k i k' v kuželosečku a přímku; obě tyto kuželosečky leží v jedné z obou rovin, v druhé leží obě přímky v jednu p splývající, p pak má s oběma kuželosečkami jeden jejich průsečík společný (A). Ze čtyř průsečíků obou kuželoseček jest jeden S', ostatní tři jsou samodružnými body prostorové kolineace; přímka p jdoucí jedním z těchto bodů, bodem A, jest osou řady samodružných bodů kolineace; kolineace tato je tedy osová (typ VI.). Jestliže uvedené dvě kuželosečky se dotýkají mimo S' i A, vznikne kolineace typu VII.; dotýkají-li se v bodě A, vznikne kolineace typu VIII.; při dotyku trojbodovém mimo S' obdržíme typ IX. Splyne-li bod A s bodem S' (takže se tam obě kuželosečky dotýkají), objeví se kolineace dvojosá (typ X.) s osami v přímce p a ve spojnici ostatních dvou průsečíků obou kuželoseček; jestliže mají kuželosečky v bodě $A \equiv S'$ dotyk trojbodový, jest kolineace typu XI.[5])[6])[7])

[5]) Obecné typy prostorové kolineace popisuje už *Staudt*, Beiträge zur Geometrie der Lage, 1860; potom *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage II; *G. Battaglini*, Sulla geometria proiettiva III, Giornale mat. 14 (1876); *F. Schur*, Über besondere Lage zweier Tetraeder, Math. Annalen 19 (1882), a j. Synthetický rozbor všech typů kolineace prostorové podává *A. Sannia*, Lezioni di geometria proiettiva, 1895; *H. B. Newson*, Types of projective transformations in the plane and in space, Quarterly Kansas univ. 6 (1897), a On the construction of cellineations, tamtéž 9 (1900). Viz také *G. Loria*, Sulle corrispondenze proiettive fra due piani e fra due spazii, Giornale mat. 22 (1884) (uvádí i zvrhlé kolineace jednotlivých typů); *J. Vojtěch*, Typy a kontinuitní grupy kolineací v S_3, Časopis mat. fys. 38 (1909). Dále *C. Servais*, Sur les faisceaux de surfaces du second ordre, Mémoires Acad.



Obr. 84.



Obr. 85.

102. Analytická klasifikace kolineací prostorových. *a*) Vyčerpávajícího rozboru kolineace prostorové dojdeme nejlépe cestou analytickou. Kolineace dvou prostorů Σ a Σ' je dána rovnicemi

$$\begin{aligned}
\varrho x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,\\
\varrho x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,\\
\varrho x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,\\
\varrho x'_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4
\end{aligned}$$

Belgique (2) 1 (1906); *G. Haenzel*, Theorie und Klassifikation der Kollineationen vermöge der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz, Tôhoku Math. Journal Sendai 31 (1929).

[6]) Při úvaze o metrických vlastnostech kolineace prostorové sluje rovina, odpovídající rovině nevlastní, *rovinou mezní* (limitní, úběžnou); nevlastní rovině prvého nebo druhého ze dvou soumístných prostorů odpovídá v kolineaci dané resp. v kolineaci inversní mezní rovina druhého resp. prvého. Trsu paprskovému se středem v rovině mezní a svazku rovinovému s osou v této rovině odpovídá soustava rovnoběžných přímek resp. rovin. Rovině nebo přímce, rovnoběžné k jedné mezní rovině, odpovídá rovina resp. přímka, rovnoběžná ke druhé rovině mezní; jejich pole jsou afinní, resp. bodové řady podobné.

Metricky speciální kolineace prostorové jsou: 1. *afinita* jest kolineace s invariantní rovinou nevlastní: pole na sdružených rovinách jsou afinní, řady na sdružených přímkách podobné; rovnoběžným rovinám odpovídají roviny rovnoběžné, poměr objemů sdružených těles je konstantní (je-li speciálně roven 1, sluje afinita ekvivalentní); afinita prostorová je určena čtyřmi dvojicemi sdružených (vlastních) bodů nebo rovin (z nichž čtyři body téhož prostoru neleží v jedné rovině, resp. čtyři roviny neprocházejí jedním bodem); všechny afinity tvoří grupu. 2. *podobnost* jest afinita s invariantní polárností absolutní (t. j. kolineace s invariantní rovinou nevlastní a indukovanou shodností na ní): sdružená pole jsou podobná, sdružené úhly vlastních přímek a vlastních rovin jsou si rovny; poměr sdružených úseček (poměr podobnosti) je konstantní; všechny podobnosti tvoří grupu. 3. *shodnost* jest podobnost s poměrem 1; všechny shodnosti tvoří grupu.

Podobnost i shodnost jest buď přímá nebo obrácená. Rozborem možných případů shodnosti nalezneme, že 1. proměnu útvaru prostorového v útvar *přímo shodný* lze uskutečniti šroubovým pohybem, složeným z rotace kolem osy a translace podél ní, kterýžto obecný pohyb se může redukovati na uvedenou rotaci (osová shodnost) nebo na uvedenou translaci (homologická shodnost); 2. proměna útvaru prostorového v útvar *obráceně shodný* je složena z rotace kolem osy a kolmé souměrnosti podle roviny, na osu rotace kolmé, nebo z translace a kolmé souměrnosti podle roviny, na směr translace kolmé. Viz na př. *F. Enriques*, Lezioni di geometria proiettiva, p. 403.

O metrických vlastnostech kolineace a o prostorových kolineacích metricky speciálních pojednává syntheticky na př. *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, p. 25 a n., p. 181 a n. (také o kolineaci t. zv. sféroidální, při níž v prostorech kolineárních existují dvě sdružené plochy kulové); krátce a se zřetelem k některým aplikacím *K. Doehlemann*, Geometrische Transformationen I; též na př. *A. Comessatti*, Lezioni di geometria analitica e proiettiva II, p. 286 a n.; stručně také *J. Vojtěch*, Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických I (4. vyd. 1928), p. 338 a n.

[7]) Podmínky, aby bylo možno dva kolineární prostory, jež nejsou afinní, učiniti sdruženými v homologii nebo v kolineaci dvojosé a j., od-

s determinantem koeficientů $A = (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44})$ od nuly různým; jsou-li soumístné tyto prostory vztahovány k témuž základnímu útvaru soustavy souřadnic, musí pro samodružný bod souřadnice x'_k býti úměrny souřadnicím jeho x_k. Samodružné body kolineace prostorové určíme tedy z rovnic

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \varrho)\, x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= 0,\\
a_{21}x_1 + (a_{22} - \varrho)\, x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= 0,\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \varrho)\, x_3 + a_{34}x_4 &= 0,\\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + (a_{44} - \varrho)\, x_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Tyto čtyři homogenní rovnice pro souřadnice samodružného bodu x_k mají nenulové řešení ($0 : 0 : 0 : 0$ nemá geometrického významu) tehdy a pouze tehdy, je-li nule roven determinant 4. stupně z jejich koeficientů, totiž determinant

$$A(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \varrho \end{vmatrix};$$

odtud úpravou dostáváme rovnici 4. stupně pro ϱ

$$\varrho^4 - \Sigma a_{kk} \cdot \varrho^3 + \Sigma a_{kk} \cdot \varrho^2 - \Sigma A_{kk} \cdot \varrho + A = 0,$$

kde konstantní člen A je determinant 4. stupně $(a_{11}a_{22}a_{33}a_{44})$, koeficient ΣA_{kk} je součet jeho subdeterminantů 3. stupně, příslušných k jednotlivým prvkům úhlopříčky, Σa_{kk} je součet jeho subdeterminantů 2. stupně, obsahujících vždy dva prvky a_{kk} v úhlopříčce, a konečně Σa_{kk} je součet prvků úhlopříčných. K téže rovnici (pro v) dospějeme úvahou duální, hledajíce totiž samodružné roviny téže kolineace prostorové, dané rovnicemi pro souřadnice rovinové $vu'_k = \Sigma a_{hk}u_h$.

Každému kořenu uvedené rovnice 4. stupně (pro ϱ nebo v) přísluší jedna skupina čtyř rovnic hořejších resp. rovnic pro u'_k, jež určuje samodružný bod resp. samodružnou rovinu kolineace; dosadíce tam nalezenou hodnotu kořene ϱ resp. v, vypočteme souřadnice x_k resp. u_k prvku samodružného. Obdobně jako v rovině zjistíme, že dvěma různým kořenům ϱ_1 a ϱ_2 příslušejí dva různé body samodružné (i duálně) a že dvěma různým kořenům ϱ_1 a $\varrho_2 = v_2$ příslušejí samodružný bod a samodružná rovina incidentní.

b) Rozmanité typy prostorové kolineace obdržíme podle povahy kořenů rovnice $A(\varrho) = 0$, podle toho totiž, jaká je jejich násobnost a pokud pro kořen násobný se anulují subdeterminanty determinantu $A(\varrho)$:

---

vozuje ve tvaru analytickém *K. Kommerell*, Über nichtaffine Raumkollineationen, Jahresbericht D. Math. Ver. 29 (1920). Afinity a kolineace z transformací speciálnějších soustavně odvozuje *O. Staude*, Affinität und Kollineation im Raume, Jahresbericht D. Math. Ver. 32 (1923). Kolineaci skládá z pohybu a dvojosé kolineace *H. F. Baker*, On the reduction of homography to movement in three dimensions, Proceedings Phil. soc. Cambridge 20 (1920).

Jsou-li všechny čtyři kořeny ϱ_k různé, existuje invariantní čtyrstěn a kolineace je typu I.; dva nebo dva a dva z kořenů mohou býti imaginární konjugované, mohou tedy býti imaginárními buď dva vrcholy a dvě protější stěny čtyrstěnu invariantního (na reálné hraně resp. s reálnou průsečnicí) nebo všechny čtyři vrcholy a stěny jeho (při dvou reálných mimoběžných hranách invariantních).

Jestliže z kořenů rovnice $A(\varrho) = 0$ jest jeden dvojnásobný $\varrho_1 = \varrho_2$ a ostatní dva ϱ_3 a ϱ_4 různé (od dvojnásobného a mezi sebou), naskytují se dvě možnosti: pro kořen dvojnásobný buď nejsou všechny subdeterminanty 3. stupně rovny nule nebo jsou všechny rovny nule. V prvním případě je kolineace typu II., v druhém typu VI. (kořenem dvojnásobným je zde určena přímka invariantních bodů); v obou případech mohou dva různé kořeny (ϱ_3 a ϱ_4) býti imaginární konjugované, dva invariantní body kolineace II. nebo VI. jsou tu imaginární (na reálné přímce invariantní).

Jsou-li z kořenů ϱ_k dva a dva sobě rovny ($\varrho_1 = \varrho_2$, $\varrho_3 = \varrho_4$, ale $\varrho_1 \neq \varrho_3$), jsou subdeterminanty 3. stupně buď pro oba dvojnásobné kořeny (aspoň z části) různy od nuly, nebo jsou pro jeden dvojnásobný kořen všechny rovny nule a pro druhý nikoli, nebo jsou pro oba dvojnásobné kořeny všechny rovny nule. V prvém případě je kolineace typu III., v druhém typu VII., v třetím typu X. (zde totiž jsou určeny dvě přímky invariantních bodů i rovin); oba dvojnásobné body (a roviny) samodružné u typu III. mohou býti imaginární, rovněž obě osy samodružných bodů a rovin u typu X.

Má-li rovnice $A(\varrho) = 0$ jeden kořen trojnásobný ($\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$) a jeden od něho různý (ϱ_4), vyskytují se tyto možnosti: pro trojnásobný kořen nevymizí všechny subdeterminanty 3. stupně, příslušná kolineace je typu IV.; všechny subdeterminanty 3. stupně vymizí pro uvedený kořen, ale nevymizí všechny subdeterminanty 2. stupně, kolineace je typu VIII.; pro trojnásobný kořen vymizí všechny subdeterminanty 3. i 2. stupně, kolineace je typu XII. (kořenem trojnásobným je zde určena rovina invariantních bodů a duálně trs invariantních rovin).

Konečně jestliže kořeny ϱ_k jsou všechny sobě rovny, musíme rozlišiti tyto případy různé povahy kořene čtyrnásobného: pro čtyrnásobný kořen nevymizí všechny subdeterminanty 3. stupně, kolineace je typu V.; všechny subdeterminanty 3. stupně vymizí, nevymizí však všechny subdeterminanty 2. stupně, kolineace je typu IX. nebo XI. (dvě nezávislé rovnice pro x_k určují jinou přímku než dvě rovnice pro u_k, resp. tutéž přímku); všechny subdeterminanty 3. i 2. stupně vymizí, ale nevymizí všechny prvky determinantu $A(\varrho)$, kolineace je typu XIII.; jestliže konečně jsou nulovými všechny prvky determinantu uvažovaného, jest kolineace identická.[1])

[1]) Analytickou klasifikaci prostorových kolineací uvádí na př. *L. Heffter*, Lehrbuch der analytischen Geometrie II, p. 109 a n.; nebo *G. Scorza*, Elementi di geometria analitica, p. 565 a n.; *A. Comessatti*, Lezioni di geometria

103. Homologie. *a*) Samodružnými prvky homologické kolineace prostorové (dvou soumístných prostorů) jsou všechny body a přímky určitého pole (v rovině homologie ω), všechny roviny a přímky určitého trsu (ve středu homologie O). Dva (různé) body v homologii sobě odpovídající leží vždy v přímce jdoucí středem homologie, dvě (různé) roviny sdružené protínají se vždy v přímce ležící na rovině homologie; dvě (různé) přímky korespondující protínají se v bodě ležícím na rovině ω a leží v rovině jdoucí středem O.[1])

Homologie prostorová *jest určena, jestliže mimo její střed O a rovinu ω jest dána jedna dvojice bodů nebo rovin sobě odpovídajících* (ležících mimo O i ω); dané dva sdružené body musí ovšem míti spojnici v trsu O, dané dvě roviny sdružené musí míti průsečnici v poli ω. Neboť v případě prvém jest kolineace prostorová stanovena jednak identickou kolineací roviny ω, jednak homologickou kolineací kterékoli roviny jdoucí spojnicí daných dvou bodů; v řadě bodové na průsečnici těchto dvou rovin jest pak projektivnost identická. V případě druhém (duálním) jest prostorová kolineace určena identickou kolineací trsu O a homologickou kolineací trsu se středem na průsečnici daných dvou rovin, kteréž dvě kolineace indukují tutéž projektivnost (identickou) ve svazku rovin s osou spojující středy obou trsů.[2])

---

analitica e proiettiva II, p. 297 a n. Jako příklad klasifikace kolineací v prostoru n-rozměrném *C. Segre*, Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, Memorie Accad. Lincei Roma (3) 19 (1884); *P. Predella*, Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni, Annali mat. (2) 17 (1889). Dále *R. Baldus*, Zur Klassifikation der ebenen und räumlichen Kollineationen, Sitzungsberichte Akad. München 1928; a *E. A. Weiss*, Zur Klassifikation der räumlichen Kollineationen, tamtéž 1930.

[1]) V homologii středu O a roviny ω odpovídají sobě ve dvou různých rovinách sdružených perspektivní pole (se středem perspektivnosti v O), ve dvou různých bodech sdružených perspektivní trsy (s rovinou perspektivnosti v ω), na dvou různých přímkách sdružených perspektivní řady bodové (se středem perspektivnosti v O) a perspektivní svazky rovinové (s rovinou perspektivnosti v ω); roviny jdoucí bodem O obsahují homologická pole, body ležící na rovině ω homologické trsy; konečně v rovině ω a v bodě O jsou kolineace soumístných polí resp. trsů identické.

[2]) Libovolnou *kolineaci dvou soumístných prostorů Σ a Σ' lze rozložiti v produkt* (nejvýše) *čtyř homologií*. Dejme tomu, že daná kolineace je stanovena pěti dvojicemi sdružených bodů AA', BB', CC', DD' a EE'. Střed O_1 první homologie $\mathbf{H}_1$ zvolíme na přímce AA', její rovinu ω_1 libovolně (oba prvky mimo A, A') a bodu A přiřadíme bod $A' : \mathbf{H}_1$ převádí $ABCDE$ v $A'B_1C_1D_1E_1$. Střed O_2 druhé homologie $\mathbf{H}_2$ položíme do průsečíku přímek B_1B' a F_1F', kde $F_1 = (A'B_1, C_1D_1E_1)$ a $F' = (A'B', C'D'E')$, rovinu ω_2 bodem A' (mimo B_1B') a bodu B_1 učiníme sdruženým bod $B' : \mathbf{H}_2$ převádí $A'B_1C_1D_1E_1$ v $A'B'C_2D_2E_2$. Pro třetí homologii $\mathbf{H}_3$ zvolíme střed O_3 v průsečíku přímek C_2C' a G_2G', kde $G_2 = (A'B'C_2, D_2F_2)$ a $G' = (A'B'C', D'E')$, rovinu ω_3 jdoucí přímkou $A'B'$ (mimo C_2, C') a bodu C_2 přiřadíme $C' : \mathbf{H}_3$ transformuje $A'B'C_2D_2E_2$ v $A'B'C'D_3E_3$. Konečně homologie $\mathbf{H}_4$ se středem $O_4 = (D_3D', E_3E')$ a s rovinou $\omega_4 = A'B'C'$, v níž bodu D_3 odpovídá D', transformuje $A'B'C'D_3E_3$ v $A'B'C'D'E'$. Jest tedy daná kolineace produk-

b) Střed homologie O leží buď mimo rovinu homologie ω (*homologie obecná* čili homologie v užším smyslu) nebo leží O na ω (homologie speciální čili limitní neboli *elace*).

V homologii obecné existuje na každé přímce x trsu O projektivnost dvou soumístných řad bodových s dvěma různými body samodružnými, bodem O a průsečíkem přímky x s ω (tedy projektivnost typu [00]), na každé rovině ξ trsu O existuje obecná homologie dvou soumístných polí (kolineace typu [10]) se středem O a osou v průsečnici roviny ξ s ω; duálně každá přímka x roviny ω jest osou svazku rovin, v němž existuje projektivnost s dvěma různými rovinami samodružnými, rovinou ω a rovinou xO, každý bod X roviny ω jest středem trsu, v němž existuje homologie se svazkem invariantních přímek v ω a s osou svazku invariantních rovin XO.

Všechny tyto projektivnosti (v útvarech jednomocných) a homologie (v útvarech dvojmocných), obecnou homologií prostorovou indukované, jsou charakterisovány týmž dvojpoměrem k, jenž sluje *dvojpoměrem prostorové homologie* nebo *absolutním invariantem* jejím a určuje spolu se středem a rovinou homologie tuto kolineaci. Plyne to bezprostředně z obdobné vlastnosti homologie rovinné; neboť jsou-li AA' a BB' dvojice bodů v obecné homologii prostorové sdružených (a protínají-li spojnice AA', BB' rovinu ω v bodech A_0, B_0), platí v rovině OAB relace

$$OA_0AA' \barwedge OB_0BB' \quad \text{a obecně} \quad \mathrm{Dp}\,(OX_0XX') = k.$$

Stejně platí pro dvojice $\alpha\alpha'$ a $\beta\beta'$ rovin v téže homologii sdružených (jsou-li α_0, β_0 roviny spojující jejich průsečnice $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ s bodem O)

$$\omega\alpha_0\alpha\alpha' \barwedge \omega\beta_0\beta\beta' \quad \text{a obecně} \quad \mathrm{Dp}\,(\omega\xi_0\xi\xi') = \frac{1}{k};$$

neboť jest $OA_0AA' \barwedge \alpha_0\omega\alpha\alpha'$, jak poznáváme, protnouce uvedenou čtveřinu rovin paprskem trsu O (roviny α, α' v bodech A resp. A'). Také přímky x, x', odpovídající sobě v prostorové homologii, tvoří se spojnicí svého průsečíku (na rovině ω) a středu homologie O i s průsečnicí své roviny (jdoucí bodem O) a roviny homologie ω čtveřinu dvojpoměru k nebo $1/k$ (podle toho, klademe-li na prvé místo onu spojnici nebo tuto průsečnici).

V elaci, jejíž střed O a rovina ω jsou incidentní, existuje na každé přímce trsu O projektivnost typu [(00)] s dvěma invariantními body splývajícími v bodě O, na každé rovině trsu O elace rovinná, t. j. kolineace typu [(10)] se svazkem invariantních přímek středu O a s řadou invariantních bodů v průsečnici roviny zvolené s rovinou ω; duálně

---

tem $\mathbf{H_4H_3H_2H_1}$. Viz také *J. Vojtěch*, O vytvoření kolineace projekcemi nebo homologiemi, Časopis mat. fys. 42 (1913).

Protože tedy každou kolineaci lze pokládati za produkt homologií, a protože obráceně produktem libovolného počtu homologií je zajisté kolineace, můžeme *dva kolineární* (soumístné) *prostory definovati jako prostory, z nichž jeden v druhý přechází konečným počtem homologií.*

každá přímka roviny ω jest osou dvou soumístných svazků rovin, jejichž projektivnost má dvě splývající roviny samodružné v ω, každý bod roviny ω jest středem dvou soumístných trsů, jejichž homologická kolineace má svazek invariantních přímek v rovině ω a svazek invariantních rovin s osou ležící v ω. Absolutní invariant homologie stane se v limitním případě prostorové elace roven 1 (a nepřispívá k stanovení této homologie).[3])[4])

c) K jednoduchému analytickému vyjádření prostorové kolineace nejobecnějšího typu I. položíme základní čtyrstěn soustavy souřadnic do invariantního čtyrstěnu této kolineace; ze suposice, že bod (1, 0, 0, 0) je invariantním, vyplývá v obecných rovnicích kolineace $a_{21} = 0$, $a_{31} = 0$, $a_{41} = 0$, ze suposic dalších, že body (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) a (0, 0, 0, 1) jsou invariantní, plyne obdobně $a_{12} = 0$, $a_{32} = 0$, $a_{42} = 0$, resp. $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{43} = 0$, resp. $a_{14} = 0$, $a_{24} = 0$, $a_{34} = 0$. První typ kolineace jest tedy v soustavě, jejíž základní čtyrstěn jest totožný s invariantním čtyrstěnem kolineace, vyjádřen rovnicemi

$$\varrho x'_1 = a_{11}x_1, \qquad \varrho x'_2 = a_{22}x_2, \qquad \varrho x'_3 = a_{33}x_3, \qquad \varrho x'_4 = a_{44}x_4.$$

Pro analytické vyjádření obecné homologie položme základní čtyrstěn soustavy souřadnic vrcholem O_4 (0, 0, 0, 1) do středu jejího, ostatními třemi vrcholy, tedy rovinou $O_3O_2O_1$ ($x_4 = 0$) do roviny homologie. Rovnice homologie jsou v tomto případě tvaru, uvedeného nahoře pro typ I., v tom však specialisované, že $a_{11} = a_{22} = a_{33}$; neboť rovnice 4. stupně pro ϱ redukovala se hořejší volbou na tvar $(a_{11} - \varrho)(a_{22} - \varrho)(a_{33} - \varrho)(a_{44} - \varrho) = 0$, a protože má pro kolineaci typu XII. tři kořeny sobě rovné, plyne uvedená rovnost tří koeficientů, jež nadto můžeme voliti rovny 1 (pojmouce konstantu do ϱ). Jest tedy obecná homologie (kolineace typu XII.), jejíž střed je v bodě (0, 0, 0, 1) a rovina v rovině $x_4 = 0$, vyjádřena rovnicemi

$$\varrho x'_1 = x_1, \qquad \varrho x'_2 = x_2, \qquad \varrho x'_3 = x_3, \qquad \varrho x'_4 = a_{44}x_4.$$

Koeficient a_{44} udává charakteristický dvojpoměr homologie k.

---

[3]) Při homologii dané a inversní odpovídá rovině nevlastní jedna resp. druhá mezní rovina prostoru; obě jsou rovnoběžné (protínají totiž rovinu homologie v téže, protože invariantní, přímce jako rovina nevlastní); vzdálenost jedné od středu homologie rovná se vzdálenosti druhé od roviny homologie, je však opačného smyslu.

[4]) Metricky speciálními případy obecné homologie prostorové jsou *afinní homologie* (čili homologická afinita), jestliže střed O je v nekonečnu a rovina ω v konečnu (spojnice sdružených bodů jsou všechny rovnoběžné a poměr vzdáleností bodů těch od průsečíku jejich spojnice s rovinou ω je konstantní), a *homothetie* (podobnostní homologie čili homologická podobnost), je-li rovina ω v nekonečnu a střed O v konečnu (spojnice sdružených bodů procházejí všechny bodem O a poměr vzdáleností bodů těch od O je konstantní). Metricky speciálními případy elace prostorové jsou *afinní elace* (čili speciální homologická afinita), je-li rovina ω v konečnu a incidentní střed O v nekonečnu, a *translace*, jestliže střed O a incidentní rovina ω jsou v nekonečnu.

d) Pro elaci zvolme bod O_4 (0, 0, 0, 1) za střed a rovinu $O_4O_3O_2$ ($x_1 = 0$) za rovinu invariantních prvků.

Ze suposice, že bod (0, 0, 0, 1) je bodem invariantním, plyne v obecných rovnicích kolineace $a_{14} = 0$, $a_{24} = 0$, $a_{34} = 0$; protože jsou dále invariantními body (0, 0, 1, 0) a (0, 1, 0, 0), musí v rovnicích kolineace býti $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{43} = 0$, resp. $a_{12} = 0$, $a_{32} = 0$, $a_{42} = 0$. Uplatníme-li ještě požadavek, aby roviny ω_2, ω_3 byly invariantní, dostaneme $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$.

Ze všech součinitelů v rovnicích obecné kolineace zůstávají tedy nenulovými jenom a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} a a_{41}. Při elaci (kolineaci typu XIII.) má rovnice pro ϱ kořen čtyrnásobný; tato rovnice specialisovaná ve tvar $(a_{11} - \varrho)(a_{22} - \varrho)(a_{33} - \varrho)(a_{44} - \varrho) = 0$ poskytuje tedy relaci $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44}$; společnou hodnotu čtyř těchto koeficientů zvolme rovnu 1 (což je vzhledem ke konstantě ϱ transformačních rovnic při x'_k přípustno). Tak dostáváme transformační rovnice pro elaci se středem a rovinou invariantních prvků (0, 0, 0, 1) a $x_1 = 0$ ve tvaru

$$\varrho x'_1 = x_1, \qquad \varrho x'_2 = x_2, \qquad \varrho x'_3 = x_3, \qquad \varrho x'_4 = a_{41}x_1 + x_4.$$

104. Dvojosá kolineace. *a*) V kolineaci dvojosé s reálnými osami *r* a *s* jsou všechny body těchto přímek samodružné, rovněž všechny roviny svazků s osami v přímkách těch. Jsou-li reálné osy *r* a *s* různé (ovšem mimoběžné), sluje dvojosá kolineace *hyperbolickou;* jsou-li splývající, sluje *parabolickou.*

Spojnice kterýchkoli dvou bodů, odpovídajících sobě v hyperbolické kolineaci dvojosé, protíná obě osy její a jest přímkou při kolineaci samodružnou; duálně platí totéž o průsečnici kterýchkoli dvou rovin sdružených. Neboť jsou-li v uvedené kolineaci *P* a *P'* body sdruženými, protíná průsečnice rovin *Pr* a *Ps* obě osy, a jsouc proto (jako spojnice dvou bodů samodružných na *r* a *s*) samodružná a jediná taková přímka bodem *P* jdoucí (protože by bod *P* byl jinak samodružný), obsahuje sdružený bod *P'*. Všechny *spojnice dvojic bodů v dvojosé kolineaci hyperbolické sdružených* (*a spolu průsečnice dvojic sdružených rovin*) *tvoří* tedy soustavu přímek protínajících dvě dané přímky mimoběžné *r* a *s*, tedy *lineární kongruenci přímek v kolineaci samodružných.* Každá přímka této lineární kongruence jest osou bodové řady i rovinového svazku, v nichž existuje projektivnost (hyperbolická) s dvěma reálnými různými prvky invariantními, průsečíky jejími s *r* a *s*, resp. rovinami s *r* a *s* ji spojujícími. Na každé rovině, položené jednou z obou přímek *r* i *s*, indukuje dvojosá kolineace prostorová rovinnou homologii s osou v této přímce a se středem v průsečíku roviny té s přímkou druhou; rovněž duálně v každém trsu se středem v bodě na *r* nebo *s* jest indukovaná homologie, jejíž svazek invariantních rovin má osu v přímce *r* resp. *s* a jejíž svazek invariantních přímek má rovinu jdoucí přímkou *s* resp. *r*.

Také v parabolické kolineaci dvojosé protíná každá spojnice dvou bodů sdružených (a průsečnice dvou sdružených rovin) osu kolineace

$r = s$ a jest přímkou samodružnou. Neboť odpovídá-li bodu P bod P', existuje v samodružné rovině Pr, obsahující přímku samodružných bodů r, limitní homologie se středem v bodě na r; spojnice bodu P s tímto středem elace jest samodružná a obsahuje P'. V každé rovině jdoucí osou r jest svazek invariantních přímek se středem ležícím na ose r; tyto roviny a středy tvoří svazek a řadu projektivní. *Lineární kongruence přímek v parabolické kolineaci dvojosé invariantních jest parabolická*; na každé přímce její existuje projektivnost limitní v řadě bodové i svazku rovinovém.[1])

Hyperbolická kolineace dvojosá jest určena svými dvěma osami r, s a dvojicí bodů sobě odpovídajících (P a P', zvolených ovšem na přímce obě osy protínající); také duálně je určena osami r, s a dvojicí rovin sobě odpovídajících (π a π', jdoucích přímkou obě osy protínající). Neboť prostorová kolineace je tu stanovena dvěma homologiemi soumístných polí na rovině Pr a na rovině Ps, jež na průsečnici rovin těch PP' indukují tutéž projektivnost; tyto korespondence jsou všechny určeny invariantními prvky tam obsaženými s dvojicí bodů P a P'. Parabolická kolineace dvojosá jest určena svou osou, projektivností mezi svazkem samodružných rovin a řadou samodružných bodů této osy a dvojicí sdružených bodů (nebo rovin).

b) Sledujíce předcházející popis hyperbolické kolineace dvojosé, nalézáme dále, že čtveřiny bodů na invariantních přímkách (lineární kongruence), tvořené dvěma body sdruženými a dvěma průsečíky jejich spojnice s osami kolineace, jsou projektivní. Jsou-li totiž P, P' i Q, Q' dvojice bodů sobě odpovídajících a protíná-li přímka PP' osy r a s v bodech P_1 a P_2, přímka QQ' v bodech Q_1 a Q_2, platí

$$P_1P_2PP' \barwedge Q_1Q_2QQ'.$$

Neboť jsou-li body P_1 a Q_1 totožny, vyplývá to z vlastnosti kolineace v rovině $P_1P_2Q_2$; nejsou-li totožny, veďme pomocnou spojnici P_1Q_2, na níž leží třebas R, R' jako body sdružené, takže platí

$$P_1P_2PP' \barwedge P_1Q_2RR' \barwedge Q_1Q_2QQ'.$$

[1]) Obráceně *kolineace prostoru, při níž existuje lineární kongruence samodružných přímek s indukovanými projektivnostmi hyperbolickými nebo parabolickými, jest dvojosá kolineace hyperbolická resp. parabolická.* Neboť předpokládané hyperbolické nebo parabolické projektivnosti na všech přímkách lineární kongruence vedou ke dvěma přímkám (reálným různým resp. splývajícím), složeným ze samodružných bodů projektivností těch. Každá přímka p lineární kongruence je totiž osou samodružného svazku rovin, promítajících všechny ostatní přímky kongruence tak, že sdružené body dvou projektivních soumístných řad na všech přímkách leží ve sdružených rovinách dvou projektivních soumístných svazků osy p; dvě samodružné roviny (reálné různé resp. splývající) soumístných těchto svazků s osou p obsahují po přímce samodružných bodů předpokládaných projektivností, jež jsou osami homologií (obecných nebo elací), danou kolineací indukovaných. Tyto dvě přímky (reálné různé resp. splývající) jsou osy dvojosé kolineace.

Vůbec tedy platí o dvou bodech sdružených X, X', jsou-li X_1, X_2 průsečíky jejich spojnice s osami r, s

$$\mathrm{Dp}\,(X_1X_2XX') = k.$$

A duálně o dvou rovinách sdružených ξ, ξ', jsou-li ξ_1, ξ_2 roviny promítající z jejich průsečnice osy r, s platí

$$\mathrm{Dp}\,(\xi_1\xi_2\xi\xi') = k.$$

Konstantní hodnota k dvojpoměru každé dvojice sdružených bodů a dvou průsečíků jejich spojnice s osami kolineace jest *charakteristickým dvojpoměrem* hyperbolické kolineace dvojosé (jejím absolutním invariantem). Je to charakteristický dvojpoměr všech projektivností v bodových řadách i v rovinových svazcích s osami v samodružných přímkách kolineace dvojosé, jakož i všech homologií v polích samodružných rovin a v trsech samodružných bodů této kolineace. Význam dvojpoměru k lze ještě rozšířiti: jest to dvojpoměr čtyř přímek ve zborcené řadě kvadratické (s řídicí řadou, složenou z invariantních přímek kolineace), z nichž první dvě jsou osy kolineace r, s a druhé dvě jsou přímky x, x' v kolineaci sdružené. Neboť jsou-li x, x' dvě přímky odpovídající sobě v hyperbolické kolineaci dvojosé, odpovídají třem bodům na x tři body na x', a tři spojnice vždy dvou sdružených z těchto bodů protínají obě osy kolineace; jsou tedy tyto osy r, s a přímky x, x' přímkami zborcené řady kvadratické, jejíž řídicí přímky patří k invariantním přímkám kolineace; čtveřina $rsxx'$ protíná každou invariantní přímku řídicí řady ve čtveřině bodů a promítá se z každé takové přímky čtveřinou rovin téhož dvojpoměru k.

Svými osami r, s a tímto dvojpoměrem k jest hyperbolická kolineace dvojosá určena; při kolineaci parabolické jest konstanta k rovna 1 (a pozbývá tohoto významu).[2])

c) Při dvojosé kolineaci hyperbolické existuje lineární kongruence přímek jednotlivě invariantních. Ze dvou libovolných bodů kterékoli přímky p dané kongruence lineární promítají se, jak známo, přímky její dvěma kolineárními trsy, jež mají přímku p za společný paprsek sobě samému odpovídající. Zvolíme-li středy takových dvou trsů ve dvou bodech S a S' přímky p, sdružených v dané kolineaci dvojosé, jest odtud možno tuto kolineaci prostorovou vytvořiti: veďme bodem S dvě roviny α a β, bodem S' pak dvě roviny jim odpovídající α' a β' (protínající totiž α resp. β v přímce uvažované kongruence lineární); přímky této lineární kongruence protínají roviny α a α', β a β' ve dvojicích kolineárních polí, jež na přímkách $\alpha\beta$ a $\alpha'\beta'$ indukují tutéž projektivnost (protože svazky sdružených rovin s osami $\alpha\beta$ a $\alpha'\beta'$ vytvořují zborcenou kvadratickou řadu přímek kongruence, protínajících přímky $\alpha\beta$ a $\alpha'\beta'$); určují tedy

[2]) Jako metricky speciální kolineace budiž zde vytčena hyperbolická kolineace dvojosá, jejíž jedna osa a je v konečnu, druhá b pak v nekonečnu a kolmá k prvé (dva sdružené body leží vždy na přímce, protínající a, a jejich vzdálenosti od a mají konstantní poměr).

tyto dvě kolineace rovinné prostorovou kolineaci, totožnou s kolineací danou. K dané kongruenci lineární lze nalézti ∞^1 dvojosých kolineací prostorových (podle volby bodu S', korespondujícího bodu S).

Lineární kongruence přímková jest, jak víme, určena čtyřmi přímkami svými; při čtyřech přímkách v prostoru existují však buď dvě různé přímky je protínající (kongruence je hyperbolická) nebo jedna (dvě splývající, kongruence je parabolická) nebo dvě přímky imaginární (kongruence je eliptická). Dvojosá kolineace jest podle lineární kongruence svých invariantních přímek buď hyperbolická nebo parabolická nebo konečně *eliptická* (s imaginárními osami r a s). *Eliptická kolineace dvojosá jest* podle hořejšího (stejně jako dvojosá kolineace hyperbolická nebo parabolická) *určena lineární kongruencí svých přímek invariantních* (čtyřmi přímkami jejími) *a dvojicí bodů sdružených na jedné z nich* (nebo duálně dvojicí rovin sdružených, jdoucích jednou z nich).[3][4][5])

[3]) Dvojosá kolineace hyperbolická nebo parabolická je také určena třemi samodružnými přímkami mimoběžnými (a, b, c) a projektivností dvou soumístných řad bodových na jedné z nich (a). Neboť projektivní soumístné řady bodové na a promítají se z b na c a z c na b; osami dvojosé kolineace (reálnými různými nebo splývajícími) jsou pak přímky spojující samodružné body projektivních řad na a, b, c. Existence této kolineace vyplývá odtud, že ve dvou rovinách samodružných, určených přímkou a a jednou resp. druhou osou, existují kolineace soumístných polí s touže podřaděnou projektivností na přímce a; její sestrojení je pak zcela jednoduché pomocí obou os invariantních bodů a invariantních rovin.

Avšak existenci dvojosé kolineace, hořejším způsobem určené, lze prokázati a její sestrojení provésti i bez uvedených os. Neboť protneme-li přímky a, b, c se známými projektivnostmi přímkou p, jest korespondující přímka p' určena body, jež oněm průsečíkům na a, b, c odpovídají; kolineace ve sdružených rovinách $pa, p'a$ a ve sdružených rovinách $pb, p'b$, jež na přímkách sdružených p, p' indukují tutéž projektivnost, stanoví kolineaci prostoru. Sestrojíme ji pak takto: K libovolné rovině π, jež přímky a, b, c protíná ve třech bodech, nalezneme korespondující rovinu π' jako rovinu spojující body, které oněm průsečíkům na a, b, c v projektivnostech přímek těch odpovídají; duálně k libovolnému bodu P, jenž se z přímek a, b, c promítá třemi rovinami, nalezneme korespondující bod P' jako průsečík rovin, které oněm promítajícím rovinám v projektivnostech svazků s osami a, b, c odpovídají.

Tím jsme vedeni také k eliptické kolineaci dvojosé s dvěma imaginárními osami, při níž existuje rovněž lineární kongruence invariantních přímek (s eliptickými projektivnostmi soumístných řad bodových a svazků rovinových).

Z popisu jednotlivých typů kolineace prostorové vychází, že (mimo identickou kolineaci) jenom kolineace dvojosá má více než dvě mimoběžné přímky invariantní. Jednoduchý důkaz věty, že (neidentická) *kolineace prostorová jest kolineací dvojosou, jestliže při ní existují tři mimoběžné přímky invariantní*, podal *Th. Reye*, Über ein Kriterium der gescharten Kollineation, Archiv Math. Phys. (3) 19 (1912); dále *St. Jolles*, Die windschief involutorischen Paarungen in einer linearen Strahlenkongruenz . . ., Math. Zeitschrift 13 (1922).

[4]) Kdežto v kolineaci rovinné musí existovati aspoň jeden reálný bod a jedna reálná přímka samodružné, může, jak vidíme, prostorová kolineace

d) Obecnou kolineaci dvojosou (hyperbolickou) lze vytvořiti jako produkt dvou (obecných) homologií, jestliže střed každé z obou je incidentní s rovinou druhé a jestliže dvojpoměry obou jsou si rovny.

Neboť jsou-li invariantní útvary první homologie ($\mathbf{H}_1$), střed O_1 a rovina ω_1, vůči invariantním útvarům O_2 a ω_2 homologie druhé ($\mathbf{H}_2$) tak položeny, že O_2 leží v rovině ω_1 a ω_2 prochází bodem O_1, jest při kolineaci $\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1$ průsečnice $\omega_1\omega_2$ osou invariantních bodů; je-li pak na spojnici O_1O_2 dvojpoměr projektivnosti, indukované prvou homologií, k a na téže spojnici O_2O_1 dvojpoměr projektivnosti z druhé homologie také k, je resultující projektivnost na O_1O_2 identická (má při dvou různých bodech invariantních O_1 a O_2 dvojpoměr $k \,.\, 1/k = 1$). Kolineace $\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1$ s dvěma různými přímkami invariantních bodů $\omega_1\omega_2$ a O_1O_2 jest dvojosá; její charakteristický dvojpoměr jest k (béřeme-li $O_1O_2 = r$ za první osu, $\omega_1\omega_2 = s$ za osu druhou).

Vskutku zjistíme, že spojnice dvou bodů sdružených v $\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1$ protíná r i s a že body ty tvoří spolu s průsečíky své spojnice a obou os čtveřinu dvojpoměru k. Neboť odpovídá-li v $\mathbf{H}_1$ bodu A bod B a v $\mathbf{H}_2$ tomuto B bod C, odpovídá v $\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1$ bodu A bod C; body A a C leží spolu s B v rovině jdoucí spojnicí O_1O_2 a protínající průsečnici $\omega_1\omega_2$ v bodě S (tato rovina obsahuje dále průsečíky P_1 spojnice O_1A s ω_1 a P_2 spojnice O_2B s ω_2), spojnice AC protíná pak O_1O_2 v bodě R. Protože platí $O_1P_1AB \barwedge RS_1AC$ (při středu promítání O_2) a $O_2P_2BC \barwedge RS_2AC$ (při středu O_1), dále pak $\mathrm{Dp}\,(O_1P_1AB) = \mathrm{Dp}\,(O_2P_2BC) = k$, jest $RS_1AC \barwedge RS_2AC$, tudíž $S_1 = S_2 = S$ a $\mathrm{Dp}\,(RSAC) = k$.

Obráceně dvojosá kolineace, daná osami r, s a dvojicí sdružených bodů P, P', jejichž spojnice protíná osy r, s v bodech R, S, vznikne ze dvou homologických kolineací, jež obě mají středy na ose r v bodech O_1, O_2 a roviny osou s jdoucí $\omega_1 = O_2s$, $\omega_2 = O_1s$, jsou pak mimo to určeny dvojpoměrem $\mathrm{Dp}\,(RSPP') = \mathrm{Dp}\,(O_1P_1PQ) = \mathrm{Dp}\,(O_2P_2QP')$, kde $P_1 = (O_1P, O_2S)$, $P_2 = (O_2P', O_1S)$ a $Q = (O_1P, O_2P')$.[6])

e) Analytické vyjádření dvojosé kolineace (s reálnými osami různými) obdržíme obdobně jako u typů dříve vyšetřených: zvolíme-li osy kolineace r a s v protějších hranách O_1O_2 a O_3O_4 základního čtyrstěnu souřadnic, specialisují se rovnice obecné kolineace tak, že vymizí všechny jejich koeficienty vyjma a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}; a protože rovnice pro ϱ, jež

---

býti bez reálných bodů a rovin samodružných. Viz k tomu *L. Godeaux*, Sur les homographies spatiales n'ayant que deux droites unies, Mathesis 43 (1929).

[5]) O čtyrstěnech, z nichž jeden lze v druhý převésti kolineací dvojosou, pojednává (nazývaje je šikmo perspektivními) *G. Kohn*, Über Tetraeder in schief perspectiver Lage, Sitzungsberichte Akad. Wien 107 (1899); dva takové čtyrstěny jsou tím charakterisovány, že čtyři spojnice sdružených vrcholů a čtyři průsečnice sdružených stěn jejich jsou proťaty dvěma přímkami, osami uvedené kolineace.

[6]) Dvojosou kolineaci parabolickou vytvoří zajisté dvě elace, jestliže střed jedné i druhé leží v rovině druhé resp. prvé kolineace té (a tyto ani ony nesplývají).

nabude tvaru $(a_{11} - \varrho)(a_{22} - \varrho)(a_{33} - \varrho)(a_{44} - \varrho) = 0$, má míti dva a dva kořeny sobě rovné ($\varrho_2 = \varrho_1$, $\varrho_4 = \varrho_3$), obdržíme $a_{22} = a_{11}$, $a_{44} = a_{33}$. Tak nalézáme pro kolineaci typu X. s osami invariantních prvků v O_1O_2 a O_3O_4 rovnice

$$\varrho x'_1 = a_{11}x_1, \qquad \varrho x'_2 = a_{11}x_2, \qquad \varrho x'_3 = a_{33}x_3, \qquad \varrho x'_4 = a_{33}x_4,$$

kde $a_{33} \neq a_{11}$, ale jeden z obou součinitelů lze zvoliti roven 1; poměr a_{11}/a_{33} je charakteristickým dvojpoměrem této kolineace. Téhož výsledku dojdeme, složíme-li uvažovanou kolineaci ze dvou homologií způsobem uvedeným.

Rovnice kolineace typu XI., jež má jedinou osu invariantních prvků v hraně O_3O_4 základního čtyrstěnu, dostaneme analogicky, uplatníme-li požadavky, aby byly invariantními vrcholy O_3, O_4, stěny ω_1, ω_2 a aby rovnice $A(\varrho) = 0$ měla kořen čtyrnásobný. Obdržíme tak pro kolineaci typu XI. s osou O_3O_4 rovnice

$$\varrho x'_1 = x_1, \quad \varrho x'_2 = x_2, \quad \varrho x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + x_3, \quad \varrho x'_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + x_4.^{7})$$

105. Kolineace osová a kolineace s invariantním čtyrstěnem. *a*) *Kolineace osová* (kolineace typu VI.) má řadu invariantních bodů na ose r a svazek invariantních rovin s osou s; obě mimoběžné osy jsou nutně reálné. Každá dvojice bodů sdružených leží v samodružné rovině svazku s, každá dvojice rovin sdružených má průsečnici jdoucí samodružným bodem osy r. V řadě bodové na ose s, jakož i ve svazku rovin s osou r indukuje tato kolineace tutéž projektivnost s dvěma různými invariantními prvky (reálnými nebo imaginárními), takže k uvedené řadě invariantních bodů na ose r přistupují ještě tyto dva invariantní body na ose s a duálně ke svazku invariantních rovin osy s ještě dvě invariantní roviny jdoucí osou r.[1])

V každé samodružné rovině svazku s osou s existuje rovinná kolineace typu I. (s třemi invariantními body); duálně v každém trsu se středem v samodružném bodě osy r existuje kolineace s třemi samodružnými rovinami. V obou samodružných rovinách jdoucích osou r a duálně v obou trsech se středy v samodružných bodech osy s existuje kolineace typu IV. (homologie).

Osová kolineace jest určena osou r invariantních bodů, osou s invariantních rovin, samodružnými body této (a spolu rovinami oné, nebo projektivností prvky ty určující) a dvojicí bodů (nebo rovin) sdružených. Při tom musíme ovšem zvoliti dvojici sdružených bodů v rovině jdoucí přímkou s (nebo dvojici sdružených rovin bodem na r).[2])

---

[7]) Rovnice typu XI. lze uvésti na tvar

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = ax_1 : ax_2 : (x_1 + ax_3) : (x_2 + ax_4).$$

[1]) Dvě pole ležící v různých rovinách sdružených, jež procházejí přímkou r, jsou perspektivní se středem perspektivnosti na s, duálně dva trsy s různými středy sdruženými na přímce s jsou perspektivní s rovinou perspektivnosti jdoucí přímkou r.

Osovou kolineaci (s hyperbolickou projektivností v řadě bodové na s a ve svazku rovinovém s osou r) jest možno vytvořiti jako produkt dvou prostorových homologií. Dvě homologie, $\mathbf{H}_1$ (o středu O_1, rovině ω_1, dvojpoměru k_1) a $\mathbf{H}_2$ (O_2, ω_2, k_2), vytvořují, jestliže O_2 a ω_1, ω_2 a O_1 jsou incidentní (a $k_1 \neq k_2$) osovou kolineaci. Jest zde zajisté $O_1O_2 = s$, $\omega_1\omega_2 = r$ a vlastnosti produktu tytéž, jaké uvedeny u kolineace osové (v řadě bodové na ose O_1O_2 a ve svazku rovinovém s osou $\omega_1\omega_2$ jest dvojpoměr projektivnosti k_1/k_2). Obráceně osová kolineace, daná samodružnými prvky r, O_1, O_2 a dvojicí sdružených bodů PP', vznikne ze dvou homologických kolineací, z nichž jedna má střed O_1, rovinu O_2r a korespondující body P, $Q = (O_1P, O_2P')$, druhá má střed O_2, rovinu O_1r a korespondující body Q, P'.

Z analytického vyjádření kolineace typu I. a z rovnice $A(\varrho) = 0$ (nebo z uvedeného vytvoření dvěma homologiemi) plynou pro kolineaci osovou s řadou invariantních bodů v hraně O_1O_2 základního čtyrstěnu souřadnic a s invariantními body (reálnými) ve vrcholech jeho O_3, O_4 rovnice

$$\varrho x'_1 = a_{11}x_1, \qquad \varrho x'_2 = a_{11}x_2, \qquad \varrho x'_3 = a_{33}x_3, \qquad \varrho x'_4 = a_{44}x_4,$$

kde ze tří konstant a_{11}, a_{33}, a_{44} lze jednu zvoliti rovnu 1.

Pro $a_{33} = a_{44}$ specialisuje se osová kolineace v dvojosou.[3])[4])

b) *Kolineace s invariantním čtyrstěnem* (kolineace typu I.), jejíž invariantní body jsou zároveň vrcholy základního čtyrstěnu souřadnic, má — jak jsme nalezli — rovnice

$$\varrho x'_1 = a_{11}x_1, \qquad \varrho x'_2 = a_{22}x_2, \qquad \varrho x'_3 = a_{33}x_3, \qquad \varrho x'_4 = a_{44}x_4;$$

ze čtyř konstant zde uvedených a_{kk} jsou pouze tři podstatné (čtvrtou je možno zvoliti rovnu 1).

Tato kolineace indukuje na samodružných stěnách invariantního čtyrstěnu rovinné kolineace typu [000], z nichž každá je určena třemi invariantními body a dvěma poměry tří z uvedených konstant; duálně

---

[2]) S osovou kolineací souvisí věty o dvou sdružených čtyrstěnech: U dvou čtyrstěnů přísluší přímce, protínající čtyři spojnice vždy dvou sdružených vrcholů jejich, jediná přímka, protínající čtyři průsečnice jejich sdružených stěn; a obráceně. Speciálně: Jsou-li dva čtyrstěny v té poloze vzájemné, že čtyři spojnice vždy dvou sdružených vrcholů jejich náleží zborcené řadě kvadratické, platí totéž o čtyřech průsečnicích sdružených jejich stěn; a obráceně. V prvním případě existují totiž dvě kolineace osové, v druhém pak nekonečně mnoho takových kolineací, jež z uvedených dvou čtyrstěnů jeden převádějí v druhý. Viz *F. Schur*, Über besondere Lagen zweier Tetraeder, Math. Annalen 19 (1882).

[3]) Homologie má ∞^2 invariantních bodů (a rovin) a ∞^2 invariantních přímek, dvojosá kolineace má ∞^1 invariantních bodů (a rovin, po případě imaginárních) a ∞^2 invariantních přímek, osová kolineace má ∞^1 invariantních bodů (a rovin) a ∞^1 invariantních přímek (po případě imaginárních).

[4]) Metricky speciálním případem osové kolineace jest *rotace kolem osy r*, jestliže osa s je společnou nevlastní přímkou rovin na r kolmých a její invariantní body absolutními body těchto rovin.

jsou vrcholy čtyrstěnu středy trsů, jejichž kolineace je určena třemi invariantními rovinami a týmiž konstantami jako kolineace protější stěny. Na samodružných hranách invariantního čtyrstěnu jako osách bodových řad jsou indukovány projektivnosti typu [00], z nichž projektivnost na O_hO_k jest charakterisována dvojpoměrem a_{hh}/a_{kk}; tytéž dvojpoměry platí pro projektivnosti svazků rovin s osami na hranách protějších.

Buďtež P a P' dva body odpovídající sobě v uvažované kolineaci typu I.; spojnice PP' ať protne stěnu $O_1O_2O_3$ v bodě P_4 atd., tedy stěnu $x_k = 0$ v bodě P_k. Promítneme-li čtveřiny bodů na spojnici PP', složené ze dvou bodů P_k i z bodů sdružených P a P', z jednotlivých hran invariantního čtyrstěnu na protější hranu, seznáme, že jest

$$\mathrm{Dp}\,(P_4P_1PP') = \frac{a_{11}}{a_{44}}, \qquad \mathrm{Dp}\,(P_4P_2PP') = \frac{a_{22}}{a_{44}}, \qquad \mathrm{Dp}\,(P_4P_3PP') = \frac{a_{33}}{a_{44}};$$

odtud pak nalezneme

$$\mathrm{Dp}\,(P_1P_2P_3P_4) = \frac{a_{11} - a_{33}}{a_{22} - a_{33}} : \frac{a_{11} - a_{44}}{a_{22} - a_{44}},$$

t. j. všechny spojnice bodů v kolineaci sdružených protínají stěny invariantního čtyrstěnu ve čtveřinách konstantního dvojpoměru. Totéž platí duálně o čtveřinách rovin, jimiž se z vrcholů invariantního čtyrstěnu promítá průsečnice dvou sdružených rovin.[5])

Kolineaci typu I. s reálnými prvky samodružnými jest možno vytvořiti jako produkt osové kolineace (typu VI.) a homologie (typu XII.), jestliže střed této leží na ose r invariantních bodů oné a rovina této prochází osou s invariantních rovin oné. Nebo vytvořují kolineaci typu I. souměrně svým produktem tři homologie $\mathbf{H}_h(O_h, \omega_h, k_h)$ pro $h = 1, 2, 3$, jestliže střed každé této homologie leží na průsečnici rovin obou ostatních homologií. Obráceně kolineace typu I., daná invariantním čtyrstěnem $O_1O_2O_3O_4$ a dvojicí bodů sdružených PP', vznikne jako produkt tří homologií: $\mathbf{H}_1$ se středem O_1 a rovinou $O_2O_3O_4$, $\mathbf{H}_2$ se středem O_2 a rovinou $O_1O_3O_4$ a $\mathbf{H}_3$ se středem O_3 a rovinou $O_1O_2O_4$, jestliže odpovídá v $\mathbf{H}_1$

[5]) Všechny přímky, které spojují vždy dva body v prostorové kolineaci sdružené, a duálně přímky, v nichž se protínají vždy dvě sdružené roviny — každá přímka oné vlastnosti je přímkou této vlastnosti a obráceně — tvoří trojmocnou soustavu přímek čili *komplex přímek* v prostoru; tento zvláštní komplex přímek, jež protínají stěny určitého čtyrstěnu (v kolineaci invariantního) ve čtveřinách bodů konstantního dvojpoměru a z nichž se vrcholy čtyrstěnu toho promítají čtveřinami rovin téže vlastnosti, sluje *čtyrstěnový* (tetraedrální, také *Reyeův*). Každým bodem prostoru procházejí dvě přímky v kolineaci sdružené (jeho spojnice s bodem, kterému odpovídá, a s bodem, který mu odpovídá), osy projektivních svazků rovinových, jejichž sdružené roviny se protínají v přímkách kužele 2. stupně, do uvedeného komplexu příslušných; duálně v každé rovině leží dvě přímky v kolineaci sdružené, osy projektivních řad bodových, jež spojnicemi sdružených bodů, přímek komplexu uvedeného, vytvořují čáru 2. třídy; sluje proto čtyrstěnový komplex přímek *kvadratickým*.

bodu P bod Q, v $\mathbf{H}_2$ bodu Q bod R a v $\mathbf{H}_3$ bodu R bod P', kde Q a R jsou průsečíky přímky vedené bodem O_2 s přímkami O_1P a O_3P'. Rovnice kolineace typu I., odtud nebo z obecných rovnic plynoucí, jsou — jak bylo nalezeno —

$$\varrho x'_1 = k_1 x_1, \qquad \varrho x'_2 = k_2 x_2, \qquad \varrho x'_3 = k_3 x_3, \qquad \varrho x'_4 = x_4.$$

c) K osové kolineaci (typu VI.) přistupují tři kolineace limitní. Kolineace typu VII., symbolicky [1 (00)], má osu invariantních bodů r a mimoběžnou osu invariantních rovin s, na této však existuje limitní projektivnost [(00)] řady bodové s jediným bodem invariantním a duálně v rovinovém svazku osy r limitní projektivnost s jedinou invariantní rovinou. Na samodružných rovinách svazku s jsou indukované kolineace typu [(00) 0], v samodružné rovině jdoucí osou r existuje homologie (typu [10]); duálně v samodružných bodech. Kolineace typu VII. s osou invariantních bodů $r = O_1O_2$ a s invariantní přímkou $s = O_3O_4$, jež obsahuje invariantní bod O_4, má rovnice

$$\varrho x'_1 = a_{11}x_1, \qquad \varrho x'_2 = a_{11}x_2, \qquad \varrho x'_3 = a_{33}x_3, \qquad \varrho x'_4 = a_{43}x_3 + a_{33}x_4,$$

kde z konstant lze jednu (třebas a_{11} nebo a_{43}) zvoliti rovnu 1.

Kolineace typu VIII., symbolu [(10) 0], má osu r invariantních bodů a na přímce s ji protínající ještě jeden invariantní bod, má svazek invariantních rovin s osou s a mimo ně ještě jednu invariantní rovinu jdoucí přímkou r. Na samodružné přímce r je projektivnost řady bodové identická, na s projektivnost typu [00], na samodružných rovinách svazku s je kolineace [(00) 0], pouze na rovině rs kolineace [10], na zbývající rovině samodružné kolineace [(10)]; duálně ve svazcích rovin se samodružnými osami a v trsech se samodružnými středy. Kolineace typu VIII. s osou r ve hraně O_2O_3, s osou s ve hraně O_3O_4, s invariantním bodem ve vrcholu O_4 a s invariantní rovinou ve stěně $O_1O_2O_3$ základního čtyrstěnu má rovnice

$$\varrho x'_1 = a_{11}x_1, \quad \varrho x'_2 = a_{11}x_2, \quad \varrho x'_3 = a_{31}x_1 + a_{11}x_3, \quad \varrho x'_4 = a_{44}x_4,$$

kde je možno opět třebas za a_{11} nebo a_{43} zvoliti 1.

V kolineaci typu IX., mající symbol [(100)], existuje řada invariantních bodů na ose r a svazek invariantních rovin s osou s, při čemž obě osy se protínají; dalších invariantních prvků zde není. V bodové řadě na s je projektivnost [(00)], taktéž duálně ve svazku rovin s osou r; v rovinách svazku s osou s jsou kolineace [(000)], pouze v rovině rs je kolineace [(10)], obdobně v duálních útvarech samodružných. Zvolíme-li osu r ve hraně O_4O_2 a osu s ve hraně O_4O_3 čtyrstěnu základního, objeví se rovnice kolineace této ve tvaru

$$\varrho x'_1 = x_1, \quad \varrho x'_2 = x_2, \quad \varrho x'_3 = a_{31}x_1 + x_3, \quad \varrho x'_4 = a_{41}x_1 + a_{43}x_3 + x_4.$$[6])[7])

[6]) Rovnicím typu IX. lze dáti tvar

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_3 = ax_1 : ax_2 : (x_1 + ax_3) : (x_3 + ax_4).$$

[7]) Kolineaci typu VII. lze vytvořiti jako produkt dvojosé kolinace a elace, jejíž střed leží na jedné ose a rovina prochází druhou osou oné

d) Limitními případy kolineace s invariantním čtyrstěnem (typu I.) jsou kolineace typu II. až V.

Kolineace typu II. symbolu [(00) 00] má invariantní tři body (buďtež to O_4, O_3, O_2), čtyři přímky, totiž vedle tří spojnic uvedených bodů ještě přímku jdoucí jedním z nich mimo jejich rovinu (přímky O_4O_3, O_4O_2, O_3O_2 a třebas přímku O_2O_1) a tři roviny (ω_1, ω_3, ω_4). Na prvních třech samodružných přímkách jest projektivnost typu [00], na čtvrté typu [(00)], na samodružné rovině $x_1 = 0$ je kolineace [000], na ostatních dvou rovinách kolineace [(00) 0]; obdobně v samodružných útvarech duálních. Rovnice této kolineace (při uvedené poloze invariantních prvků) jsou

$$\varrho x'_1 = a_{11}x_1, \quad \varrho x'_2 = a_{21}x_1 + a_{11}x_2, \quad \varrho x'_3 = a_{33}x_3, \quad \varrho x'_4 = a_{44}x_4,$$

kde jednu z konstant (třebas a_{11} nebo a_{21}) lze specialisovati na 1. Každá dvojice bodů PP' v této kolineaci sdružených tvoří se svými průsečíky na invariantních rovinách P_1, P_3, P_4 čtveřiny s konstantními dvojpoměry, totiž $\mathrm{Dp}\,(P_1P_3PP') = a_{33}/a_{11}$, $\mathrm{Dp}\,(P_1P_4PP') = a_{44}/a_{11}$; a duálně.

Kolineace III. typu [(00) (00)] má samodružné dva body (buďtež to O_4 a O_2), tři přímky, totiž mimo spojnici uvedených dvou bodů ještě každým z nich jednu (O_4O_2, O_4O_3, O_2O_1), a dvě roviny (ω_1, ω_3). Na samodružné přímce O_4O_2 je projektivnost [00], na ostatních dvou [(00)], na samodružných rovinách je kolineace [(00) 0]; obdobně v útvarech duálních. Rovnice kolineace tohoto typu, (při zvolené poloze prvků samodružných) jsou

$$\varrho x'_1 = a_{11}x_1, \quad \varrho x'_2 = a_{21}x_1 + a_{11}x_2, \quad \varrho x'_3 = a_{33}x_3, \quad \varrho x'_4 = a_{43}x_3 + a_{33}x_4,$$

kde opět jednu z konstant lze nahraditi číslem 1. Spojnice dvou bodů sdružených P a P' tvoří se svými průsečíky na samodružných rovinách čtveřinu konstantního dvojpoměru $\mathrm{Dp}\,(P_1P_3PP') = a_{33}/a_{11}$.

Kolineace typu IV., symbolicky [(000) 0], má také dva samodružné body (O_4, O_3), avšak jen dvě samodružné přímky (O_4O_3, O_3O_2) a dvě samodružné roviny (ω_1, ω_4); na těchto jsou různé kolineace, na ω_1 typu [(00) 0], na ω_4 typu [(000)], na oněch různé projektivnosti, na O_4O_3 typu [00], na O_3O_2 typu [(00)]; obdobně v samodružných útvarech duálních. Kolineace tato (při uvedené poloze samodružných prvků) vyjádřena jest rovnicemi

$$\varrho x'_1 = a_{11}x_1, \quad \varrho x'_2 = a_{21}x_1 + a_{11}x_2, \quad \varrho x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{11}x_3, \quad \varrho x'_4 = a_{44}x_4,$$

kde pro jednoduchost lze klásti třebas $a_{11} = 1$. Na přímce spojující dva body v kolineaci sdružené P a P' platí opět $\mathrm{Dp}\,(P_1P_4PP') = a_{44}/a_{11}$.

Konečně V. typ kolineace prostorové má invariantní pouze jeden bod, jednu přímku a jednu rovinu, všechny incidentní; v poli na samo-

kolineace. Kolineace typu VIII. vzniká jako produkt homologie a elace se středem ležícím na rovině homologie a s rovinou jdoucí středem homologie. Kolineace typu IX. vznikne ze dvou elací, z nichž jenom jedna má střed na rovině druhé.

družné rovině je kolineace typu třetího, rovněž v trsu se středem v samodružném bodě, v bodové řadě i v rovinovém svazku s osou v samodružné přímce je projektivnost limitní. Zvolíme-li za samodružné prvky této kolineace vrchol O_4, hranu O_4O_3 a stěnu $O_4O_3O_2$ základního čtyrstěnu soustavy souřadnice a položíme-li $a_{11} = 1$, objeví se její rovnice ve tvaru

$$\varrho x'_1 = x_1, \quad \varrho x'_2 = a_{21}x_1 + x_2, \quad \varrho x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + x_3,$$
$$\varrho x'_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + x_4.^{8})^{9})^{10})$$

106. Involuční kolineace prostorové. *a*) Mezi kolineacemi v prostoru jsou (podobně jako v útvarech nižších řádů) zvlášť jednoduché a významné kolineace involuční; involuční kolineace je ta, jež je totožna se svou inversní čili jež dvakrát aplikována dává transformaci identickou. Prvky dvou soumístných prostorů, odpovídající sobě v kolineaci involuční, odpovídají tedy sobě obapolně; mluvíme proto také o jednom prostoru (involučním) s elementy po dvou sdruženými.

Jestliže v involuční kolineaci dvou soumístných prostorů odpovídá bodu X bod X', odpovídá v téže kolineaci bodu X' bod X, pročež přímce XX' odpovídá přímka $X'X$; jsou tedy spojnice všech dvojic bodů v involuční kolineaci sdružených samodružné. Duálně jsou samodružné všechny průsečnice vždy dvou rovin korespondujících. Každá invariantní přímka involuční kolineace obsahuje patrně involuční projektivnost řady bodové na ní ležící a svazku rovin jí procházejících, leda by jedna nebo druhá projektivnost nebo obě byly identické (není-li totiž projektivnost řady bodové nebo svazku rovinového identická, plyne involuční povaha její z existence jedné dvojice bodů resp. rovin obapolně sdružených). Každým bodem, který není samodružným v dané kolineaci, prochází pouze jedna invariantní přímka, spojující jej s bodem sdruženým; duálně v každé rovině nesamodružné leží jen

---

[8]) Rovnice kolineací posledních tří typů lze zjednodušiti na (kanonický) tvar

pro typ III.: $x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = a_1x_1 : (x_1 + a_1x_2) : a_2x_3 : (x_3 + a_2x_4)$;
pro typ IV.: $x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = a_1x_1 : (x_1 + a_1x_2) : (x_2 + a_1x_3) : a_2x_4$;
pro typ V.: $x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = a_1x_1 : (x_1 + a_1x_2) : (x_2 + a_1x_3) : (x_3 + a_1x_4)$.

[9]) Kolineaci typu II. je možno vytvořiti jako produkt osové kolineace a elace, jejíž střed leží na ose invariantních bodů a rovina prochází osou invariantních rovin kolineace oné. Kolineace typu III. vzniká z kolineace typu VII. a z elace, jejíž střed a rovinu položíme do osy invariantních bodů resp. osou invariantních rovin kolineace prvé. Kolineaci typu IV. vytvoří kolineace typu VIII. a elace, jejíž střed leží na samodružné rovině, jdoucí osou invariantních bodů, a rovina prochází osou invariantních rovin oné kolineace. Kolineaci typu V. dostaneme jako produkt kolineace typu IX. a elace, jejíž střed a rovina leží v samodružné rovině kolineace té, neobsahující osu invariantních bodů jejích.

[10]) Existuje ∞^1 prostorových kolineací, jež na dvou invariantních přímkách mimoběžných indukují dané projektivnosti; tyto kolineace vyšetřuje *E. Meyer*, Über die Kollineationen, die auf zwei windschiefen Geraden vorgeschriebene Punktprojektivitäten erzeugen, Math. Annalen 59 (1904).

jedna přímka invariantní, průsek roviny té s rovinou sdruženou. A protože bodů i rovin je v prostoru ∞^3, jest samodružných přímek involuční kolineace ∞^2; ze známých soustav přímek tohoto počtu vyplňují tedy samodružné přímky involuční kolineace buď trs (jako osy řad bodů sdružených) nebo pole (jako osy svazků sdružených rovin) nebo tvoří lineární kongruenci přímek. Tím dospíváme k dvěma možnostem: *involuční kolineace prostorová jest buď homologie nebo kolineace dvojosá.*

K uvedeným dvěma případům dojdeme také ze suposice, že v prostoru existují dvě různé roviny α a α', jejichž prvky sobě odpovídají obapolně: každé rovině ξ (protínající α a α') odpovídá obapolně rovina ξ' položená přímkami, jež korespondují přímkám $\xi\alpha$ a $\xi\alpha'$; každé přímce x odpovídá obapolně přímka x' spojující body korespondující bodům $x\alpha$ a $x\alpha'$; každému bodu X v prostoru pak odpovídá obapolně průsečík X' tří rovin korespondujících třem rovinám položeným bodem X. Je-li na průsečnici obou rovin $\alpha\alpha'$ indukovaná projektivnost řady bodové identická, jest involuční kolineace prostoru, rovinami α a α' stanovená, homologií; je-li projektivnost na $\alpha\alpha'$ neidentická (involuční), jest prostorová kolineace příslušná kolineací dvojosou. K témuž výsledku dojdeme z předpokladu dvou různých trsů A a A', jejichž roviny a přímky sobě obapolně odpovídají (ve svazku rovin s osou AA' je totiž indukovaná projektivnost buď identická nebo involuční).

Že involučních kolineací v prostoru není více než dvě uvedené, zjistíme touto úvahou: Samodružné přímky, spojující vždy dva body X a X' odpovídající sobě obapolně, jsou v počtu ∞^2 tak rozloženy, že každým bodem v prostoru prochází jedna; tvoří tedy kongruenci 1. stupně. V této kongruenci samodružných přímek buď existují přímky ležící v téže rovině nebo neexistují. Leží-li dvě z uvažovaných přímek v téže rovině, je to rovina samodružná, jež obsahuje involuční homologii rovinnou; taková rovina vyplývá z každé dvojice samodružných přímek se protínajících. Budiž střed homologie jedné z těchto rovin O, osa homologie s; přímka kongruence (samodružná) ležící mimo tuto rovinu (samodružnou) protíná ji v bodě samodružném, tedy buď v bodě O nebo v bodě S na s. V prvém případě má prostorová kolineace trs prvků samodružných (se středem O), tedy i rovinu samodružných prvků: je to homologie (involuční). V druhém případě určuje paprsek bodem S s paprskem prvé roviny, jenž prochází týmž bodem S, rovinu obsahující opět involuční homologii rovinnou se středem S a osou r, jdoucí bodem O; existují tedy dvě přímky r a s složené z bodů samodružných: kolineace je dvojosá (involuční) s (reálnými) osami r a s. Jestliže konečně v kongruenci samodružných přímek neexistují dvě přímky se protínající, určují tři z nich zborcenou řadu kvadratickou, k níž doplňková řada je tvořena dvojicemi přímek odpovídajících sobě obapolně; samodružné přímky této involuční projektivnosti jsou imaginární: kolineace je dvojosá (involuční) s imaginárními osami. Téhož výsledku lze dojíti úvahou duální (prve se objevilo, že kongruence 1. stupně složená ze samodruž-

ných spojnic sdružených bodů je buď nulté nebo první třídy, zde byla by kongruence 1. třídy, složená ze samodružných průsečnic sdružených rovin, nultého nebo prvního stupně).[1])

b) Involuční homologie se středem O a rovinou ω soustav prvků samodružných má ve všech řadách bodových s osami v přímkách trsu O involuční projektivnost, v níž body sdružené X, X' tvoří s bodem O a průsečíkem osy XX' s rovinou ω harmonickou čtveřinu; duálně má ve všech svazcích rovin s osami v rovině ω involuční projektivnost, v níž roviny sdružené ξ, ξ' tvoří spolu s rovinou ω a rovinou spojující osu $\xi\xi'$ s bodem O čtveřinu harmonickou. V samodružných rovinách jdoucích středem O a v trsech se středy ležícími v samodružných bodech roviny ω existují homologie harmonické. Involuční homologie prostorová sluje proto také harmonická.

Homologie involuční jest určena svým středem a svou rovinou invariantních prvků; její charakteristický dvojpoměr jest — 1. Analyticky jest involuční homologie se středem (1, 0, 0, 0) a rovinou $x_1 = 0$ dána rovnicemi

$$\varrho x'_1 = -x_1, \qquad \varrho x'_2 = x_2, \qquad \varrho x'_3 = x_3, \qquad \varrho x'_4 = x_4.$$

Involuční homologii lze určiti také jejím středem invariantních prvků a jednou dvojicí sdružených rovin nebo duálně její rovinou invariantních prvků a jednou dvojicí bodů sdružených; nebo také třemi dvojicemi sdružených bodů na třech hranách trojhranu, duálně třemi dvojicemi sdružených rovin jdoucích třemi stranami trojstranu. Lze totiž v těchto případech bezprostředně a jednoznačně určiti rovinu resp. střed homologie.

Projektivnost základního útvaru jednomocného nebo kolineace základního útvaru dvojmocného jest involuční, jakmile obsahuje jednu resp. dvě dvojice prvků obapolně sdružených. Obdobně jest kolineace prostorová kolineací involuční, obsahuje-li tři dvojice bodů (rovin) obapolně sdružených; jenže nelze zde dvojice tyto zvoliti v poloze libovolné. Má-li involuční kolineace býti homologická, jest ze tří dvojic bodů sobě involučně odpovídajících A a A', B a B', C a C' možno první dvojici A a A' zvoliti jakkoliv, bod B' však nutno zvoliti v rovině $AA'B$, bod C' pak jenom na přímce jdoucí bodem (AA', BB') a bodem C. Jest patrno, že bod A' lze zvoliti ∞^3 způsoby, bod B' ∞^2 způsoby, bod C' ∞^1 způsoby; existuje tedy ∞^6 involučních homologií v prostoru (jak také vyplývá z volby středu a roviny homologie, tuto kolineaci určujících).[2])

c) V involuční (čili harmonické) kolineaci dvojosé existuje lineární kongruence invariantních přímek, z nichž každá obsahuje involuční

[1]) Existenci (jenom) dvou involučních kolineací v prostoru odvozuje analyticky *L. Heffter*, Lehrbuch der analytischen Geometrie II, p. 116 a n.

[2]) Metricky speciální homologie involuční jest *šikmá* nebo *kolmá souměrnost podle roviny* (afinní homologie s poměrem — 1) a *souměrnost podle středu* (homothetie s poměrem — 1).

projektivnost své řady bodové a svého svazku rovinového; charakteristický dvojpoměr této kolineace dvojosé jest —1.

Involuční projektivnost bodových řad a rovinových svazků na všech samodružných přímkách jest buď hyperbolická nebo eliptická v souhlasu s hyperbolickou resp. eliptickou kongruencí jejich. Hyperbolická involuční kolineace dvojosá má dvě reálné osy r a s, jež obsahují invariantní body a roviny všech uvedených projektivností; na každé samodružné rovině této kolineace, jdoucí jednou nebo druhou osou, jest indukovaná homologie harmonická, rovněž duálně v každém trsu se středem na jedné z obou os. Kolineace tato jest určena svými dvěma osami; nebo jednou osou a dvěma dvojicemi sdružených bodů (rovin) na dvou různých přímkách danou osu protínajících (s dvěma různými průsečnicemi této vlastnosti). Položíme-li do os r a s hrany O_1O_2 a O_3O_4 základního čtyrstěnu souřadnic, jest tato kolineace vyjádřena rovnicemi

$$\varrho x'_1 = -x_1, \qquad \varrho x'_2 = -x_2, \qquad \varrho x'_3 = x_3, \qquad \varrho x'_4 = x_4.^{3})$$

Eliptická involuční kolineace dvojosá má dvě osy imaginární; žádné dvě z invariantních přímek jejích se neprotínají.[4])

---

[3]) Jako metricky speciální kolineace involuční budiž zde uvedena *kolmá souměrnost podle osy* (hyperbolická kolineace dvojosá s jednou osou v konečnu a druhou osou na ni kolmou v nekonečnu, s poměrem — 1).

[4]) Involuční kolineace dvojosá, jež má na invariantních přímkách svých eliptické projektivnosti involuční, dovoluje ryze geometricky definovati *dvojici imaginárních přímek mimoběžných* (bez reálného bodu společného a bez reálné roviny společné) jako osy eliptické involuční kolineace dvojosé; jsou to imaginární (komplexní konjugované) přímky *druhého druhu* proti dvojici imaginárních přímek prvního druhu, jež jsou určeny eliptickou involucí ve svazku paprskovém (a mají tedy reálný bod ve středu svazku a leží v reálné rovině svazku).

Neboť v involuční kolineaci jsou přímky, jež spojují dvojice bodů sdružených, invariantní a tvoří, nehledíme-li k involuční homologii, lineární kongruenci přímek; involuční projektivnosti, kolineací na těchto přímkách indukované, jsou perspektivní. Jsou-li tyto projektivnosti hyperbolické, leží samodružné body jejich na dvou reálných přímkách, všechny přímky kongruence protínajících, osách lineární kongruence a kolineace dvojosé. Je tedy přirozeno zavésti i v případě, kdy projektivnosti na invariantních přímkách jsou eliptické, dva soubory imaginárních (konjugovaných) samodružných bodů těchto involucí jako imaginární (komplexní konjugované) přímky, incidentní se všemi invariantními přímkami kolineace, osy této lineární kongruence a kolineace dvojosé.

K takovým dvěma přímkám přicházíme na př. při úloze určiti přímky, jež protínají čtyři dané přímky mimoběžné (nepatřící téže zborcené ploše kvadratické), jestliže neexistují (dvě různé nebo splývající) reálné přímky, úloze vyhovující.

Používajíce pak involuční kolineace jako kolineace, přidružené k dané neinvoluční kolineaci s třemi samodružnými přímkami mimoběžnými, (t. j. záměnné s touto kolineací) dospíváme v případě, že projektivnosti na těchto přímkách jsou eliptické, ryze geometricky k obecné eliptické kolineaci dvojosé. Viz na př. *F Enriques*, Lezioni di geometria proiettiva, p. 413.

Tři invariantní přímky involuční kolineace dvojosé určují zborcenou řadu kvadratickou, složenou z přímek invariantních; přímky druhé soustavy na ploše tak určené tvoří dvojice přímek v kolineaci obapolně sdružených. Takových zborcených ploch kvadratických s řadou přímek involučně sobě odpovídajících existuje v dané involuční kolineaci dvojosé ∞^3 (každá je určena třemi přímkami lineární kongruence invariantních přímek).

Bylo uvedeno, že kolineace v prostoru je involuční, jakmile obsahuje tři dvojice bodů involučně sdružených (jichž ovšem nelze zvoliti libovolně). Má-li involuční kolineace, třemi dvojicemi sdružených bodů AA', BB' a CC' určená, býti dvojosá, jest možno s bodem A sdružiti libovolný bod A', s bodem B libovolný bod B' (tak, aby přímky AA', BB' byly mimoběžné); k bodu C sdružený bod C' leží pak na libovolné přímce (p_3) jdoucí bodem C (mimoběžné k AA' a BB'), jest však uvedenými volbami takto určen: mimoběžné přímky $p_1 = AA'$, $p_2 = BB'$ a p_3 určují zborcenou řadu kvadratickou přímek invariantních, která je proťata doplňkovou řadou přímek involučně sdružených, jejíž involuční projektivnost je stanovena dvojicemi přímek (Ap_2, Ap_3) a $(A'p_2, A'p_3)$, (Bp_1, Bp_3) a $(B'p_1, B'p_3)$; přímka sdružená v této projektivnosti k přímce (Cp_1, Cp_2) protíná p_3 v bodě C'.

Protože každý z bodů A' a B' lze zvoliti ∞^3 způsoby, přímku p_3 pak ∞^2 způsoby, existuje v prostoru ∞^8 involučních kolineací dvojosých (jak v případě reálných os této kolineace plyne z volby těchto).[5][6][7]

[5]) Dvě involuční projektivnosti mají produktem involuční projektivnost, jsou-li záměnné; obráceně dvě involuční projektivnosti jsou záměnné, je-li jejich produktem projektivnost involuční. Dvě involuční homologie prostorové jsou záměnné, leží-li střed každé z obou v rovině druhé; jejich produktem jest involuční kolineace dvojosá s osami ve spojnici středů a v průsečnici rovin homologií těch. Involuční homologie a involuční kolineace dvojosá jsou záměnné, je-li střed a rovina oné incidentní s jednou resp. druhou osou této; dávají involuční homologii, jež má střed v průsečíku prvé osy s rovinou dané homologie a rovinu v rovině spojující druhou osu se středem homologie dané. Dvě involuční kolineace dvojosé jsou záměnné a dávají involuční kolineaci dvojosou, jestliže buď osy obou daných kolineací tvoří prostorový čtyrúhelník nebo náleží téže zborcené řadě kvadratické; výsledná kolineace má své osy v úhlopříčce onoho čtyrúhelníku resp. v přímkách uvedené řady, harmonicky sdružených k oběma dvojicím os daných kolineací (v prvém případě jsou všechny tři dvojice os reálné nebo jedna reálná a dvě imaginární, v druhém jsou dvě dvojice reálné a jedna imaginární nebo všechny tři imaginární).

[6]) Obecná kolineace prostorová je produktem tří involučních kolineací dvojosých; viz *E. B. Wilson*, The decomposition of the general collineation of space into three skew reflections, Transactions Amer. math. soc. 1 (1900). Lze ji také rozložiti v produkt čtyř involučních homologií; viz *M. W. Haskell*, The resolution of any collineation into perspective reflections, Transactions Amer. math. soc. 7 (1906).

[7]) Vedle involučních kolineací jsou pozoruhodné také prostorové kolineace neinvoluční, při nichž se vyskytují dvojice prvků obapolně sdružených. Druhá mocnina takové neinvoluční kolineace jest kolineací buď

107. Kolineace periodické. *a*) Periodická kolineace prostorová jest kolineace, jejíž opakování vede k transformaci identické; periodou čili řádem n kolineace takové $\mathbf{K}$ je nejmenší číslo udávající, kolikrát je nutno kolineaci aplikovat, aby se dospělo k původní soustavě prostorové ($\mathbf{K}^n = \mathbf{1}$). Periodická kolineace řádu n-tého převádí libovolný (nesamodružný) bod X_1 v bod X_2, tento v X_3, tento v X_4 atd., X_{n-1} převádí v X_n a bod X_n konečně v X_1; tvoří tedy z bodů prostoru skupiny po n prvcích, cyklicky se zaměňujících (cykly n-bodové).

Z analytického vyjádření jednotlivých typů kolineace prostorové nebo ze vzniku jejich jako produktů homologií a elací vysvítá, že periodickými mohou býti pouze typy obecné (nikoli však typy limitní), t. j. typy I., VI., X. a XII.

Periodická kolineace řádu 2. (čili t. zv. binární) jest kolineace involuční; jak jsme poznali, existují dva (a jenom dva) druhy involuční kolineace, totiž homologie a kolineace dvojosá (tuto pak opět lze rozeznávati hyperbolickou a eliptickou).

b) Kolineace s periodou 3 (jež sluje také ternární) sestavuje všechny body prostoru v cykly trojbodové $X_1X_2X_3$; třetí bod X_3 leží buď na spojnici X_1X_2 nebo mimo ni, leží tedy cykly kolineace 3. řádu na samodružných přímkách nebo v samodružných rovinách kolineace. Protože periodická homologie (s reálným středem a reálnou osou) může býti pouze involuční, jest periodická kolineace 3. řádu buď dvojosá nebo osová.

Dvojosá kolineace 3. řádu má v bodové řadě každé samodružné přímky, obsažené v příslušné lineární kongruenci, trojbodové cykly a duálně v rovinovém svazku s osou v takové přímce cykly po třech rovinách; rovněž v každé zborcené řadě kvadratické, určené třemi přímkami uvedené kongruence jako přímkami řídicími, existují cykly tří přímek. Reálných bodů ani rovin samodružných zde není.

Osová kolineace 3. řádu má v poli každé samodružné roviny jdoucí osou s periodickou kolineaci 3. řádu s invariantní reálnou přímkou s a reálným bodem na r; duálně každý samodružný bod osy r je středem trsu, v němž existuje periodická kolineace téhož řádu. V bodové řadě na ose s a ve svazku rovinovém s osou r jsou periodické projektivnosti

---

homologickou nebo dvojosou nebo osovou (kolineace ona byla proto v prvním případě nazvána polohomologickou a pod. další). Platí zde na př., že kolineace s jednou dvojicí mimoběžných přímek obapolně si odpovídajících má lineární kongruenci přímek takto po dvou sdružených. Viz *G. Kohn*, Über zwei besondere Arten von Raumkollineationen und die Figur zweier Tetraeder, Sitzungsberichte Akad. Wien 120 (1911), a téhož Über die Erzeugung einer Kollineation, welche zwei windschiefe Geraden untereinander vertauscht, Jahresbericht D. Math. Ver. 20 (1911); *Th. Reye*, Räumliche Kollineationen, die Involutionen enthalten, Archiv Math. Phys. (3) 19 a 20 (1912). Viz dále *St. Jolles*, Die windschief involutorischen Paarungen in einer linearen Strahlenkongruenz und die beiden Arten windschief involutorischer linearer Strahlenkongruenzen, Math. Zeitschrift 13 (1922).

s periodou 3. Kolineace tato jest stanovena buď dvěma trojicemi bodů tvořících cykly v různých rovinách $A_1A_2A_3B_1B_2B_3 \barwedge A_2A_3A_1B_2B_3B_1$, nebo jednou trojicí takovou a dvěma body samodružnými P, Q, tedy vztahem $A_1A_2A_3PQ \barwedge A_2A_3A_1PQ$.

c) Periodická kolineace řádu 4. (čili kvaternární) má čtyrbodové cykly své $X_1X_2X_3X_4$ buď na samodružných přímkách nebo na samodružných rovinách nebo ve vrcholech prostorových čtyrúhelníků. Body X_1 a X_3, rovněž X_2 a X_4 nazývejme protějšími, jejich spojnice X_1X_3 a X_2X_4 úhlopříčkami cyklu. Druhá mocnina této kolineace jest kolineace involuční.

Leží-li bodové cykly kvaternární kolineace na invariantních přímkách, jest kolineace dvojosá; ve zborcených řadách kvadratických, obsažených v kongruenci invariantních přímek kolineace, existují periodické projektivnosti 4. řádu, tedy projektivnosti eliptické, jejich druhé mocniny jsou eliptické involuce; jest tedy druhá mocnina této kolineace eliptická involuční kolineace dvojosá.

Kvaternární kolineace, jejíž cykly leží v invariantních rovinách, jest kolineace osová; kolineace těchto rovin mají společnou reálnou přímku samodružnou s, reálné samodružné body rovinných kolineací těch (průsečíky úhlopříček všech cyklů téže roviny) leží všechny na přímce r. Protější body cyklů jsou harmonicky sdruženy vzhledem k průsečíkům úhlopříčky je spojující s osami r a s; druhá mocnina této kolineace je hyperbolická involuční kolineace dvojosá (s osami r, s).

Tvoří-li bodové cykly periodické kolineace 4. řádu prostorové čtyřrohy, jest kolineace tato typu I. Úhlopříčky cyklů X_1X_3 a X_2X_4 odpovídají sobě v kolineaci uvažované obapolně, v druhé mocnině kolineace té jsou pak přímkami invariantními. Tato druhá mocnina jest involuční kolineace dvojosá (protože uvedené úhlopříčky netvoří trsu), a to buď hyperbolická nebo eliptická. V prvním případě má kolineace 4. řádu invariantní dva body a dvě roviny reálné, v druhém nemá reálných bodů ani rovin invariantních.[1])[2])[3])

[1]) Periodické kolineace obecně, speciálně pak v případech periody 4 až 6 vyšetřuje zejména *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, p. 291 a n. O kolineacích s periodou 4 pojednávají *H. Schröter*, Über cyklisch-projective Punktquadrupel in zwei collinearen Räumen, Math. Annalen 20 (1882); *A. Pampuch*, Über doppeltinvolutorische Systeme im Raume, Diss. Strassburg 1886; *R. Krause*, Über cyklische Collineationen, Progr. Stadtgymn. Stettin 1897; *L. Berzolari*, Sulle collineazioni cicliche del quart'ordine, determinate da un tetraedro, e sul loro legame con la teoria dei tetraedri desmici, Rendiconti Ist. Lombardo 37 (1904); *G. Siegmund*, Zyklische Kollineationen, Progr. I. Staatsrelsch. Wien 1913. Kolineace s periodou 5 popsal *A. Ameseder*, Die Quintupellage collinearer Räume, Sitzungsberichte Akad. Wien 98 (1889). Kolineace s periodou 6 odvodil (kombinováním kolineací řádu 2. a 3.) *R. Krause*, Über senär zyklische Kollineationen im Raume, Diss. Strassburg 1904, ve výtahu Archiv Math. Phys. (3) 9 (1904).

[2]) O kolineaci, při níž existuje čtyrstěn takový, že čtyrstěn s ním sdružený je mu vepsán, (a tedy ∞^9 čtyrstěnů toho druhu), uvažuje *R. Sturm*,

108. Útvary odpovídající sobě v kolineaci. *a*) Jak jsme ve zvláštních případech už poznali, jmenujeme obecně

jednorozměrnou (spojitou) soustavu bodů v prostoru, neležící v rovině, jež má s libovolnou rovinou nejvýše n (reálných) bodů společných, *prostorovou řadou bodovou* čili *prostorovou čarou n-tého stupně.*

Přímka, určená dvěma nekonečně blízkými body čáry, sluje *tečnou* její; rovina, určená třemi nekonečně blízkými body čáry prostorové, sluje *oskulační rovinou* čáry.

jednorozměrnou (spojitou) soustavu rovin v prostoru, neobsaženou v trsu, jež vysílá libovolným bodem nejvýše v (reálných) rovin, *prostorovým svazkem rovinovým* čili *prostorovou čarou v-té třídy.*

Přímka, určená dvěma nekonečně blízkými rovinami svazku, sluje oskulační přímkou jeho; bod, určený třemi nekonečně blízkými rovinami svazku prostorového, sluje oskulačním bodem svazku.

Oskulační roviny prostorové řady bodové tvoří prostorový svazek rovinový, jehož oskulační přímky jsou totožny s tečnami a oskulační body totožny s body dané řady. Neboť dvě nekonečně blízké oskulační roviny dané čáry mají společné dva nekonečně blízké body její a tedy tečnu čáry, tři nekonečně blízké oskulační roviny čáry dané mají společný bod čáry té. Jest tedy *prostorová čára* jako bodová řada čarou *v-té třídy*, jestliže libovolným bodem v prostoru prochází (nejvýše) v oskulačních rovin jejích.

Prostorová čára (řada bodová), jež má r tečen protínajících libovolnou přímku v prostoru, sluje *r-tého řádu.*

Dále jmenujeme obecně

dvourozměrnou (spojitou) soustavu bodů, jež má s libovolnou přímkou nejvýše n (reálných) bodů společných, *polem bodovým* čili *plochou n-tého stupně.*

dvourozměrnou (spojitou) soustavu rovin, jež vysílá libovolnou přímkou nejvýše v (reálných) rovin, *trsem rovinovým* čili *plochou v-té třídy.*

Je-li plocha vytvořena jednak soustavou bodů, jednak soustavou rovin, sluje vytvořující rovina plochy tečnou rovinou její v bodě plochy, s nímž je incidentní, vytvořující bod plochy pak sluje dotyčným bodem její roviny, s níž je incidentní.

Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, p. 287 a n. Viz také *P. Muth*, Die geometrische Deutung von Invarianten räumlicher Collineationen und Reciprocitäten, Math. Annalen 33 (1889).

[3]) Místo uzavřeného cyklu bodů, vznikajících z prvního opakováním kolineace periodické, lze vziti obecněji v úvahu řadu bodů, v níž daný bod přechází postupnými mocninami prostorové kolineace, a žádati, aby všechny tyto body ležely na ploše určitého stupně; tak činí *S. Kantor*, Bemerkungen über lineare Transformationen, Sitzungsberichte Akad. Wien 82 (1880).

Jsou-li Σ a Σ' dva kolineární prostory, odpovídá každému útvaru v Σ útvar téhož druhu v Σ'. Zejména každé prostorové čáře k v Σ odpovídá prostorová čára k' v Σ': bodu čáry k odpovídá bod na k', libovolné rovině protínající čáru k v n bodech odpovídá rovina protínající čáru k' v n bodech, k oněm sdružených; oskulační rovině čáry k odpovídá oskulační rovina čáry k' v bodě sdruženém, ν oskulačním rovinám, jež z libovolného bodu P lze vésti k čáře k, odpovídá ν oskulačních rovin jdoucích z P' k čáře k'; tečně čáry k odpovídá tečna čáry k' v bodě sdruženém, přímce proťaté r tečnami čáry k odpovídá přímka proťatá r sdruženými tečnami čáry k'. *Jsou* tedy *dvě čáry odpovídající sobě ve dvou kolineárních prostorech téhož stupně* (n-tého), *téže třídy* (ν-té) *a téhož řádu* (r-tého).

Každé ploše π v prostoru Σ odpovídá plocha π' v kolineárním prostoru Σ', při čemž každému bodu a každé tečné rovině plochy π odpovídá bod resp. tečná rovina plochy π': přímce protínající π v n bodech odpovídá přímka sekoucí π' v n bodech k oněm sdružených, ν tečným rovinám, vedeným libovolnou přímkou v Σ k ploše π, odpovídá ν rovin tečných, jdoucích sdruženou přímkou k ploše π'. *Jsou* tedy *dvě plochy odpovídající sobě ve dvou kolineárních prostorech téhož stupně* (n-tého) *a téže třídy* (ν-té).

Stupeň a třída (i řád) prostorové čáry a plochy patří tudíž k jejich vlastnostem při kolineaci invariantním.

b) Obraťme se k nejjednodušším odvozeným útvarům v prostoru, k ploše 2. stupně a k prostorové čáře 3. stupně.

Kdežto v rovině (nebo v trsu) lze k dvěma daným (pravým) kuželosečkám (resp. kuželům kvadratickým) vždy nalézti (reálnou) kolineaci, jež jednu z nich převádí v druhou, není tomu tak u dvou libovolných ploch 2. stupně v prostoru. Pravou (reálnou) plochu kvadratickou s eliptickými body jest možno reálnou kolineací transformovati pouze v plochu s body eliptickými, plochu pak s hyperbolickými body opět v plochu s body hyperbolickými. Neboť reálnou kolineací přechází reálná nebo imaginární přímka v přímku reálnou resp. imaginární. A ovšem zvrhlé ploše 2. stupně nebo 2. třídy, kvadratické ploše kuželové resp. kuželosečce, odpovídá v kolineaci prostorové zase zvrhlá plocha 2. stupně resp. 2. třídy.

Jsou-li dány dvě plochy kvadratické téhož typu π a π', ustanovíme kolineaci prostoru, v níž sobě odpovídají, tímto způsobem: Rovině ϱ, jež jednu z daných ploch π protíná v (reálné nebo imaginární) kuželosečce k, přiřaďme rovinu ϱ', protínající plochu π' týmž způsobem v kuželosečce k' (reálné resp. imaginární), a tyto roviny učiňme kolineárními tak, aby čáře k odpovídala čára k'; dále přiřaďme pólu R roviny ϱ vzhledem k ploše π pól R' roviny ϱ' vzhledem k ploše π'; konečně libovolnému bodu P na π (mimo k) přiřaďme bod P' na π' tak, aby průsečík přímky $R'P'$ s rovinou ϱ' byl bodem korespondujícím bodu (ϱ, RP) v kolineaci mezi ϱ a ϱ' prve stanovené. Tím je určena kolineace

prostorová; neboť dvěma trsům se středy R a P, jež promítají pole ϱ, odpovídají kolineární trsy se středy R' a P', promítající kolineární pole ϱ', při čemž projektivnost svazků rovin s osami RP a $R'P'$ je v kolineacích mezi R a R' i mezi P a P' táž. V této kolineaci odpovídá ploše π plocha π': neboť kuželová plocha kvadratická, jež promítá k z R, přechází uvedenou kolineací v kuželovou plochu kvadratickou, promítající k' z R'; plocha π, dotýkající se oné plochy kuželové podél k, přechází v plochu 2. stupně, jež se této plochy kuželové dotýká podél k'; bodem P', jenž koresponduje bodu P, jest pak ve svazku-řadě ploch kvadratických, poslední podmínce vyhovujících, určena plocha π'.

Jsou-li dány dvě plochy 2. stupně π a π', k nimž lze ustanoviti kolineaci prostorovou, jednu v druhou převádějící, můžeme k určité rovině ϱ zvoliti korespondující rovinu ϱ' na ∞^3 způsobů a kolineaci těchto rovin s podmínkou, aby k a k' byly sdruženými, můžeme zvoliti ∞^3 způsoby; body R' a P', odpovídající podle hořejší konstrukce bodům R a P, jsou tím už určeny až na to, že bodem P' může býti jeden nebo druhý průsečík plochy π' s přímkou trsu R', korespondující přímce RP v kolineaci mezi trsy R a R'. *Existuje* tedy *dvakrát* ∞^6 *kolineací, jež danou plochu kvadratickou transformují v danou kvadratickou plochu téhož typu.*

Jest patrno, že k stanovení (ovšem dvojznačnému) kolineace, jež plochu π převádí v plochu π', stačí, jestliže na plochách těch zvolíme tři dvojice bodů jako dvojice bodů sdružených; neboť tím určeny jsou roviny ϱ, ϱ' i jejich žádaná kolineace a také ostatní prvky, jež hledanou kolineaci v prostoru stanoví. Také odtud vyplývá uvedený počet ∞^6 možných kolineací, příslušných k daným dvěma plochám 2. stupně.[1])

K dvěma daným plochám s body hyperbolickými můžeme příslušnou kolineaci prostorovou určiti také pomocí jejich zborcených řad přímkových. Dejme tomu, že plocha π obsahuje řady přímek p_k a q_k, plocha π' pak řady p'_k a q'_k. Kolineace transformující π v π' jest stanovena, jestliže bodům p_1q_1, p_1q_2, p_2q_1, p_2q_2 a p_3q_3 přiřadíme pořadem body $p'_1q'_1$, $p'_1q'_2$, $p'_2q'_1$, $p'_2q'_2$ a $p'_3q'_3$. Těmito pěti dvojicemi bodů sdružených je zajisté určena jediná kolineace; a protože přímkám p_1, p_2, q_1, q_2 odpovídají pořadem přímky p'_1, p'_2, q'_1, q'_2, dále přímce p_3 (jdoucí bodem p_3q_3 a protínající q_1, q_2) přímka p'_3 (jdoucí bodem $p'_3q'_3$ a protínající q'_1, q'_2), obdobně pak přímce q_3 přímka q'_3, odpovídá jedné i druhé řadě zborcené na π jedna resp. druhá zborcená řada plochy π', takže uvedená kolineace převádí π v π'.

---

[1]) Ačkoliv kolineací v prostoru, převádějících danou plochu kvadratickou v danou kvadratickou plochu, jest ∞^6, není přece možno při daných dvou plochách 2. stupně, jež sobě mají odpovídati, zvoliti ještě dvě dvojice bodů v prostoru jako dvojice bodů sdružených; neboť čtveřina bodová, sestávající na spojnici dvou libovolných bodů v jednom prostoru z těchto bodů a z průsečíků spojnice bodů těch s jejich rovinami polárnými vzhledem k dané ploše kvadratické, není obecně projektivní s obdobnou čtveřinou v prostoru druhém.

Kolineace prostorová takto stanovená indukuje v obou dvojicích přímkových řad na daných dvou plochách 2. stupně projektivnosti $p_1p_2p_3 \barwedge p'_1p'_2p'_3$ a $q_1q_2q_3 \barwedge q'_1q'_2q'_3$; obráceně jest těmito projektivnostmi žádaná kolineace určena. Protože jest možno jednu nebo druhou řadu přímkovou na π' přiřaditi určité řadě přímkové na π a protože každou ze šesti přímek p'_1, p'_2, p'_3, q'_1, q'_2, q'_3 jest možno zvoliti v jedné resp. druhé řadě ∞^1 způsoby, dostáváme opět dvakrát ∞^6 kolineací, příslušných k daným dvěma plochám 2. stupně.

Co bylo uvedeno o plochách s body hyperbolickými, lze aplikovati také na plochy 2. stupně s body eliptickými, chceme-li užíti imaginárních přímek jejich.

c) Dvě plochy kvadratické, jež se protínají ve dvou kuželosečkách, mají dva společné kvadratické kužele opsané a odpovídají sobě ve čtyřech homologiích, jejichž středy a roviny jsou vrcholy těchto opsaných kuželů resp. roviny těchto průsečných čar.

Mají-li totiž dvě kvadratické plochy společnou kuželosečku, mají ještě druhou kuželosečku společnou; neboť obě plochy mají s rovinou, jdoucí třemi společnými body jejich, které leží mimo předpokládanou kuželosečku společnou, společny ještě dva průsečíky roviny té s touto kuželosečkou, takže průsečné kuželosečky roviny s jednou i druhou plochou danou jsou totožny. Duálně mají-li dvě kvadratické plochy společný kvadratický kužel opsaný, mají společný ještě druhý kužel takový. Předpoklad společného kvadratického kužele opsaného vede ke společné kuželosečce průsečné a obráceně (duálně); neboť obě kuželosečky, v nichž se společný kužel opsaný jedné i druhé plochy dané dotýká, mají (ležíce na témže kuželi) společné dva body P_1 a P_2, v nichž se tytéž dvě roviny (tečné roviny kužele) jedné i druhé plochy dané dotýkají; rovina těmito dvěma body a dalším bodem průsečné čáry obou daných ploch položená protíná obě plochy v téže kuželosečce (protože obě průsečné kuželosečky této roviny s danými plochami se v bodech P_1, P_2 sebe dotýkají a mají zvolený bod společný).

Dvě společné kuželosečky obou daných ploch kvadratických, ležící v rovinách σ_1, σ_2, protínají se v bodech P_1 a P_2, které jsou dotyčnými body společných rovin tečných obou kvadratických kuželů s vrcholy S_1, S_2, jež se daných ploch dotýkají. Spojnice S_1S_2 a průsečnice $\sigma_1\sigma_2$ (totožná se spojnicí P_1P_2) jsou sdružené poláry vzhledem k oběma daným plochám; body S_1, S_2 a roviny σ_1, σ_2 oddělují se harmonicky. Každý z obou vrcholů S_1, S_2 a každá z obou rovin σ_1, σ_2 tvoří střed a rovinu homologie, jež jednu z obou daných ploch kvadratických převádí v druhou. To poznáváme na kuželosečkách, v nichž libovolná rovina, jdoucí bodem S_1 nebo S_2, obě dané plochy protíná.

Dvě kvadratické plochy, jež mají společné dvě kuželosečky splývající, takže se podél kuželosečky sebe dotýkají, odpovídají si ve dvou homologiích se středem ve vrcholu společného kvadratického kužele opsaného (jehož dotyčnou čarou je ona kuželosečka) a s rovinou v rovině

dotyčné kuželosečky; dvojpoměry těchto dvou homologií liší se pouze znaménkem. Neboť každá rovina, jdoucí vrcholem uvedeného kužele, protíná obě plochy v kuželosečkách, jež se sebe ve dvou bodech dotýkají; spojnice těchto dvou bodů, průsečnice oné roviny s rovinou dotyčné kuželosečky ploch daných, a onen vrchol jsou osou a středem dvou homologií rovinných, jež převádějí jednu kuželosečku v druhou. Dvojpoměry těchto dvou rovinných a stejně dvojpoměry uvedených dvou prostorových homologií jsou jenom různého znaménka; produktem jedné z nich a kolineace inversní ke druhé je totiž homologie involuční, při které je invariantní každá kuželosečka resp. plocha kvadratická s pólem a polárou resp. polárnou rovinou ve středu a ose resp. rovině homologie.

Dvě kvadratické plochy, jež se protínají v prostorovém čtyrstranu, odpovídají si ve dvou kolineacích dvojosých, jejichž osami jsou úhlopříčky čtyrstranu toho, sdružené poláry vzhledem k oběma plochám; dvojpoměry těchto dvou kolineací liší se jen znaménkem. Neboť každá rovina ϱ, jdoucí osou kolineace r, protíná obě plochy ve dvou kuželosečkách, jež se ve vrcholech čtyrstranu na r ležících dotýkají přímek, vrcholy ty s bodem ϱs spojujících; obdobně rovina σ, jdoucí přímkou s, protíná dané plochy ve dvou kuželosečkách, jež se sebe ve vrcholech čtyrstranu na s dotýkají tak, že σr je pólem společné jejich poláry s. Z existence dvou homologií v každé z rovin těch, jež převádějí jednu z vytčených kuželoseček v druhou, vyplývá existence uvedených dvou kolineací dvojosých. Produktem jedné z těchto dvojosých kolineací a kolineace inversní ke druhé je involuční kolineace dvojosá, při níž je invariantní každá kvadratická plocha se sdruženými polárami v osách kolineace.[2])[3])

d) Prostorové čáře třetího stupně k odpovídá v kolineaci prostoru kubická čára k', k ní projektivní; neboť třem svazkům navzájem projektivním, jež vytvořují kubiku k, odpovídají kolineací prostorovou tři svazky rovinové k nim a proto navzájem projektivní, které tedy vytvořují kubiku k', projektivní ke kubice k.

Jsou-li obráceně *dány dvě prostorové čáry kubické k a k', lze vždy ustanoviti kolineaci prostoru, v níž sobě odpovídají; a to tak, aby tato kolineace na daných kubikách indukovala projektivnost předem zvolenou.*

[2]) V obou uvedených případech (u dvou homologií resp. dvojosých kolineací, převádějících jednu ze dvou kvadratických ploch v druhou) protínají přímky, jdoucí vrcholem opsaného kužele resp. protínající sdružené poláry, obě kvadratické plochy uvažované ve čtveřinách bodů konstantního dvojpoměru. Je-li tento dvojpoměr speciálně roven — 1 (takže dvojpoměry kolineací jsou imaginární), t. j. protínají-li vytčené přímky obě plochy kvadratické v harmonických čtveřinách bodů, slují *kvadratické plochy* ty *harmonicky sdruženými při dotyku podél kuželosečky* resp. *při průseku v prostorovém čtyrstranu.*

[3]) Dvojici ploch 2. stupně, jež sobě odpovídají v involuční kolineaci dvojosé, vyšetřuje obšírně *K. Rohn*, Geschart-involutorische Lage zweier Flächen zweiten Grades, Berichte Ges. Wiss. Leipzig 67 (1915).

Dejme tomu totiž, že projektivnost bodových řad na k a k' je určena třemi dvojicemi sdružených bodů A a A', B a B', C a C'. Tečny a oskulační roviny čáry k v bodech A, B označme a, α, resp. b, β, u čáry k' v bodech A', B' pak a', α', resp. b', β'.[4]) Hledanou kolineaci prostorovou ustanovíme tak, že bodům A, B, C na k přiřadíme pořadem body A', B', C' na k' a dále bodům $a\beta$, $b\alpha$ pořadem body $a'\beta'$, $b'\alpha'$. Těmito pěti dvojicemi sdružených bodů nezávislých je určena kolineace, jež převádí k v k'; neboť kolineace ta transformuje k v prostorovou čáru kubickou, která má s čarou k' společné tři body (A', B', C'), jakož i tečny a oskulační roviny ve dvou z nich (a', b', α', β'), takže je s čarou k' totožna.[5])

Protože zvolenou projektivností mezi řadami bodovými na k a k' je podle hořejšího prostorová kolineace, jež k převádí v k', už určena a protože z bodů A', B', C' lze každý zvoliti ∞^1 způsoby, *existuje* ∞^3 *kolineací, jež danou prostorovou čáru 3. stupně transformují v danou prostorovou čáru kubickou.*[6])

Dvě prostorové kubiky, jež mají společné dva body a v každém z nich společnou tečnu i společnou rovinu oskulační čili mají společný t. ř. oskulační čtyrstěn, odpovídají sobě v homologii se středem ve vrcholu tohoto čtyrstěnu a s rovinou v protější jeho stěně, jestliže lze obě protíti přímkou, vrcholem tím jdoucí. Takové dvě kubiky leží na téže kuželové ploše 2. nebo 3. stupně podle toho, je-li uvedeným vrcholem společný bod obou křivek nebo průsečík tečny v jednom společném bodě s oskulační rovinou v druhém.

109. Kolineace s invariantní plochou 2. stupně. *a*) Kolineaci, jež danou *plochu 2. stupně transformuje v ni samu*, sestrojíme způsobem, uvedeným prve pro kolineaci, převádějící jednu z daných dvou kvadra-

[4]) Čtyrstěn s vrcholy v bodech A, B a v bodech $a\beta$, ba sluje, jak bylo uvedeno, oskulační čtyrstěn prostorové křivky 3. stupně, příslušný k bodům A, B (duálně k oskulačním rovinám a, β); jeho hrany a, ($a\beta$, B), b, (ba, A) tvoří t. ř. *oskulační čtyrstran* křivky v A a B.

[5]) Prostorové čáry 3. stupně s týmž oskulačním čtyrstranem (o vrcholech A, $a\beta$, B, ba) tvoří dvojmocnou soustavu prostorových čar kubických; neboť kuželové plochy 2. stupně s vrcholem A, dotýkající se roviny a podél a a roviny Ab podél AB, tvoří svazek-řadu, rovněž tak kuželové plochy 2. stupně s vrcholem B, dotýkající se roviny β podél b a roviny Ba podél BA; každá kuželová plocha jednoho svazku protíná každou plochu kuželovou z druhého svazku v prostorové kubice uvedené soustavy (a v přímce AB). Každým bodem v prostoru (C) je určena jedna čára soustavy. O této soustavě ∞^2 čar kubických viz *E. Heinrichs*, Über den Bündel derjenigen kubischen Raumkurven, welche ein gegebenes Tetraeder in derselben Weise zum Schmiegungstetraeder haben, Diss. Münster 1887.

[6]) Kolineace, jež transformuje k v k', může ještě libovolný bod prostoru L převésti v bod L'; tomuto požadavku vyhovuje z ∞^3 hořejších kolineací devět; neboť jsou-li LAB a $L'A'B'$ bisekanty čáry k resp. k', je žádaná kolineace určena, přiřadíme-li oskulačnímu čtyrstranu čáry k s vrcholy A, B oskulační čtyrstran čáry k' s vrcholy A', B' a jednomu ze tří průsečíků roviny (L, $a\beta$, ba) s čarou k jeden ze tří průsečíků roviny (L', $a'\beta'$, $b'a'$) s čarou k'.

tických ploch v druhou: Zvolíme na dané ploše 2. stupně tři dvojice sdružených bodů AA', BB' a CC', čímž je stanovena projektivnost bodových řad na průsečných kuželosečkách rovin ABC a $A'B'C'$ s plochou a tedy také kolineace polí v rovinách ABC a $A'B'C'$, při které prvé kuželosečce odpovídá druhá; jsou-li D a D' póly rovin těch vzhledem k dané ploše, je spolu určena kolineace trsů se středy D a D'. Bodu E na dané ploše můžeme pak přiřaditi buď bod E'_1 nebo bod E'_2, v nichž plochu protíná přímka, odpovídající v kolineaci trsů D a D' přímce DE. Jsou tedy volbou tří dvojic korespondujících bodů na dané ploše 2. stupně stanoveny dvě kolineace, při nichž je plocha ta invariantní. Spolu vidíme, že existuje ∞^6 kolineací s invariantní plochou kvadratickou.

Užijeme-li dvou zborcených řad přímkových p_k a q_k, doplňkových na ploše kvadratické, rozlišíme *dva druhy kolineace*, převádějící danou plochu kvadratickou v ni samu: kolineace prvého druhu transformuje každou z obou řad plochy v tutéž řadu, kolineace druhého druhu transformuje jednu řadu v druhou. Kolineace prvního druhu je stanovena projektivnostmi

$$p_1p_2p_3 \overline{\wedge} p'_1p'_2p'_3, \quad q_1q_2q_3 \overline{\wedge} q'_1q'_2q'_3,$$

kolineace druhého druhu projektivnostmi

$$p_1p_2p_3 \overline{\wedge} q'_1q'_2q'_3, \quad q_1q_2q_3 \overline{\wedge} p'_1p'_2p'_3;$$

v onom případě je prostorová kolineace určena pěti dvojicemi sdružených bodů (nebo rovin) p_1q_1 a $p'_1q'_1$, p_2q_2 a $p'_2q'_2$, p_3q_3 a $p'_3q'_3$, p_1q_2 a $p'_1q'_2$, p_2q_1 a $p'_2q'_1$, v tomto případě pěti dvojicemi, z nichž tři prvé jsou tytéž jako dříve, další dvě pak p_1q_2 a $p'_2q'_1$, p_2q_1 a $p'_1q'_2$. Jako nahoře určují tedy tři dvojice sdružených bodů na dané ploše 2. stupně dvě kolineace s invariantní touto plochou, jednu prvního a jednu druhého druhu.

Je patrno, že dvě kolineace 1. druhu mají produktem kolineaci 1. druhu, kdežto dvě kolineace 2. druhu mají za produkt kolineaci 1. druhu, konečně jedna kolineace 1. a jedna 2. druhu dávají jako produkt kolineaci 2. druhu; obecně sudý nebo lichý počet kolineací 2. druhu (třebas ve spojení s libovolným počtem kolineací 1. druhu) dává kolineaci 1. resp. 2. druhu.

Speciální významné kolineace obou druhů jsou involuční kolineace dvojosá a involuční homologie: involuční dvojosá kolineace, jejíž osy jsou sdruženými polárami vzhledem k dané ploše kvadratické, transformuje plochu tuto v ni samu, při čemž dvě korespondující přímky jsou mimoběžné, takže kolineace ta je 1. druhu; involuční homologie, jejíž střed a rovina jsou pólem a polárnou rovinou vzhledem k dané kvadratické ploše, převádí plochu tuto v ni samu a je 2. druhu, protože dvě sdružené přímky se protínají.

Z kolineací, sestrojených na počátku pro danou plochu kvadratickou jako invariantní, je jedna 1. a druhá 2. druhu. Neboť involuční homologie se středem D' a rovinou $A'B'C'$, v níž bodu E'_1 odpovídá bod E'_2,

transformuje danou plochu v ni samu a je 2. druhu; její produkt s jednou uvedenou kolineací, jež převádí A, B, C v A', B', C' a bod E v bod E'_1, je druhá kolineace uvedená, převádějící A, B, C v A', B', C' a bod E v E'_2. Vzhledem k tomu, že kolineace 2. druhu, spojená s kolineací invariantní plochy kvadratické, mění druh této kolineace, jsou obě uvedené kolineace druhů různých.

Kolineace s invariantní plochou kvadratickou 1. druhu má v jedné i druhé přímkové řadě plochy obecně po dvou přímkách samodružných; tyto čtyři přímky, tvořící prostorový čtyrstran, jsou hranami, čtyři jejich průsečíky pak a čtyři roviny jimi jdoucí (body na ploše a tečné roviny její v bodech těch) jsou vrcholy a stěnami čtyrstěnu samodružných prvků v kolineaci.

Kolineace s invariantní plochou kvadratickou 2. druhu má v různých přímkových řadách plochy, projektivně sobě odpovídajících, dvě dvojice přímek obapolně sdružených (v projektivnosti dané a inversní); protože jen průsečík dvou přímek (různých řad), jež si obapolně odpovídají, je samodružným bodem kolineace, má kolineace ta pouze dva body plochy a dvě tečné roviny její v bodech těch svými body a rovinami samodružnými.

b) Jako není při libovolné kolineaci v rovině invariantní žádná kuželosečka této roviny, tak libovolná kolineace v prostoru nemá invariantní plochy kvadratické.[1]) Abychom nalezli podmínky pro kolineaci prostoru, jež má danou plochu kvadratickou transformovati v ni samu prvním nebo druhým způsobem uvedeným, vyjdeme od invariantních prvků kolineace na ploše.

Kolineace 1. druhu, převádějící kvadratickou plochu v ni samu tak, že každá z obou přímkových řad jejích je (jako celek) invariantní, musí míti čtyři hrany invariantního čtyrstěnu svého, tvořící čtyrstran $O_1O_2O_3O_4$, v přímkách plochy; dvě hrany čtyrstranu O_1O_2, O_3O_4 patří jedné řadě přímek, dvě O_1O_4, O_2O_3 druhé řadě plochy. Spojnice dvou bodů na ploše X, X', jež sobě ve vyšetřované kolineaci odpovídají, ať protne stěny invariantního čtyrstěnu kolineace v bodech P_k (pro $k = 1, 2, 3, 4$; index průsečíku souhlasí s indexem protějšího vrcholu). Protože čtyři přímky jedné řady na ploše se promítají z kterýchkoli dvou přímek řady druhé projektivními čtveřinami rovin, platí

$$O_1O_2\,(O_3, O_4, X, X') \barwedge O_3O_4\,(O_2, O_1, X, X');$$

neboť oněmi i těmito rovinami promítají se přímky O_2O_3, O_1O_4 a přímky téže řady, jdoucí body X a X'. Odtud plyne

$$\mathrm{Dp}\,(P_4P_3XX') = \mathrm{Dp}\,(P_1P_2XX').$$

Podmínka, kterou obdržíme, promítneme-li z přímek O_1O_4 a O_2O_3 přímky O_1O_2, O_3O_4 a přímky téže řady, jdoucí body X, X', totiž

[1]) Kolineace s invariantní plochou 2. stupně byla nazvána (jako rovinná kolineace s invariantní čarou 2. stupně) kolineací *Hermiteovou*.

Dp $(P_3P_2XX') = \text{Dp}\,(P_4P_1XX')$, je ekvivalentní s podmínkou hořejší. Obráceným postupem vyplývá platnost věty obrácené. Nalezli jsme tedy:

Kolineace s invariantním čtyrstěnem $O_1O_2O_3O_4$ převádí plochu 2. stupně, jdoucí čtyrstranem $O_1O_2O_3O_4$, prvním způsobem v ni samu tehdy a jen tehdy, platí-li Dp $(P_1P_2XX') = \text{Dp}\,(P_4P_3XX')$.

Je-li uvedená podmínka splněna, je při této kolineaci invariantní každá plocha svazku-řady o společném čtyrstranu uvedeném.

Kolineace 2. druhu, při níž kvadratická plocha přechází v sebe samu tak, že její přímkové řady se zaměňují, má jen dva samodružné body na ploše a dvě samodružné roviny tečnými rovinami plochy v bodech těch. Vrcholy invariantního čtyrstěnu kolineace na ploše ležící buďtež O_1, O_2; jsou to průsečíky p_1q_1 a p_2q_2 dvou dvojic přímek p_1, q_1 a p_2, q_2, jež si v řadách plochy obapolně odpovídají. Protože ostatní dva průsečíky přímek těch $p_1q_2 = R$ a $p_2q_1 = S$ si odpovídají obapolně, jest na invariantní přímce je spojující, tedy na hraně O_3O_4 samodružného čtyrstěnu, protější k hraně jeho O_1O_2, involuční projektivnost soumístných řad bodových, stejně je projektivnost v soumístných svazcích rovin s osou O_1O_2 involuční. Odtud plyne, že dvě roviny svazku s osou O_1O_2, jdoucí body X, X' kvadratické plochy sobě v kolineaci odpovídajícími, tvoří s rovinami invariantního čtyrstěnu harmonickou čtveřinu, takže Dp $(P_3P_4XX') = -1$.

Vezměme dále v úvahu čtyrstran O_1RO_2S na ploše ležící. Promítneme-li z přímek O_1R a O_2S body O_2, S, X, X' resp. body R, O_1, X, X', shledáme (obdobně jako dříve), že platí

$$P_1Q_3XX' \barwedge Q_4P_2XX',$$

kde $Q_3 = (O_1O_2S,\ XX')$ a $Q_4 = (O_1O_2R,\ XX')$. Tvoří tedy dvojice P_1P_2, Q_3Q_4 a XX' dvojice bodů na XX' involučně sdružených; a protože jak body X a X', tak body Q_3 a Q_4 jsou harmonicky sdruženy vzhledem k bodům P_3 a P_4 (ono podle hořejšího výsledku, toto pak, protože R, S jsou harmonické k O_3, O_4) platí to také pro body P_1 a P_2, takže Dp $(P_1P_2P_3P_4) = -1$.

Obráceně vedou podmínky Dp $(P_1P_2P_3P_4) = -1$, Dp $(P_3P_4XX') = -1$ k tomu, že příslušná kolineace transformuje kvadratickou plochu druhým způsobem v ni samu. Totéž platí o dvojmocné soustavě takových ploch, jež obdržíme jako soubor svazků ploch 2. stupně se společnými čtyrstrany O_1RO_2S, kde O_1 a O_2 jsou vrcholy invariantního čtyrstěnu kolineace a R, S body na protější hraně jeho harmonicky sdružené k vrcholům O_3, O_4. Nalezli jsme tedy:

Kolineace s invariantním čtyrstěnem $O_1O_2O_3O_4$ převádí plochu 2. stupně, jdoucí body O_1, O_2 a dotýkající se v nich rovin $O_1O_3O_4$ resp. $O_2O_3O_4$, v ni samu druhým způsobem tehdy a jen tehdy, platí-li Dp $(P_1P_2P_3P_4) = -1$ *a* Dp $(P_3P_4XX') = -1$.

c) Použijme podmínek, nalezených pro kolineaci se samodružným čtyrstěnem, při níž je invariantní plocha 2. stupně, také na ostatní obecné typy kolineace.

U kolineace osové s osou r řady samodružných bodů a s osou s svazku samodružných rovin protíná spojnice XX' dvou bodů sobě odpovídajících osu s; budiž to v bodě P. Čtyrstěnem prvků v kolineaci samodružných je každý čtyrstěn s dvěma vrcholy v kterýchkoli bodech na r a s dvěma vrcholy v samodružných bodech na s; zvolíme-li pro kolineaci 1. druhu s invariantní plochou kvadratickou samodružný čtyrstran na ploše ležící $O_1O_2O_3O_4$ tak, že vrcholy jeho O_1 a O_3 jsou na r, O_2 a O_4 na s, splynou z průsečíků P_k spojnice XX' se stěnami invariantního čtyrstěnu P_1 a P_3 v bod P, takže podmínka pro tuto kolineaci nabude tvaru

$$\mathrm{Dp}\,(PP_2XX') = \mathrm{Dp}\,(P_4PXX'),$$

kde ovšem P_2 a P_4 jsou průsečíky spojnice XX' se samodružnými rovinami svazku r. Je-li podmínka tato splněna, transformuje kolineace uvažovaného typu ∞^3 kvadratických ploch, jež procházejí samodružnými body na s a mají osy r i s za sdružené poláry, prvním způsobem v ně samy.[2])

Jiné volby čtyrstranu samodružných přímek na ploše v samodružném útvaru kolineace tohoto typu vedou ke kolineaci dvojosé; podmínce pro kolineaci 2. druhu s invariantní plochou kvadratickou nelze vyhověti.

U kolineace dvojosé s osami r a s můžeme samodružný čtyrstran, ležící při transformaci 1. druhu na invariantní ploše, zvoliti buď tak, že všechny čtyři strany jeho jsou v samodružných přímkách kolineace a osy její tedy sdruženými polárami plochy, nebo tak, že dvě strany samodružného čtyrstranu jsou v osách kolineace a dvě v přímkách samodružných. V prvním případě, kdy vrcholy čtyrstranu toho O_1 a O_3 jsou na r, O_2 a O_4 na s, ztotožní se P_1 a P_3 s průsečíkem P spojnice XX' a osy s, P_2 a P_4 pak s průsečíkem Q spojnice té a osy r; podmínka pro kolineaci s invariantní plochou kvadratickou je zde

$$\mathrm{Dp}\,(PQXX') = \mathrm{Dp}\,(QPXX'),$$

t. j. dvojosá kolineace je v tomto případě involuční. Involuční kolineace dvojosá transformuje ∞^5 ploch kvadratických, jejichž sdruženými polárami jsou osy kolineace, prvním způsobem v ně samy.

V druhém případě, kdy osy dvojosé kolineace r a s leží na ploše kvadratické, jsou-li vrcholy čtyrstranu samodružných přímek O_1 a O_4 na r, O_2 a O_3 na s, ztotožní se P_1 a P_4 s průsečíkem P, P_2 a P_3 s průsečíkem Q a podmínka pro kolineaci se redukuje na $\mathrm{Dp}\,(PQXX') =$

[2]) Metricky speciálním případem této kolineace osové jest *rotace kolem osy r* (s invariantní soustavou ∞^3 kvadratických ploch rotačních); osa s je tu nevlastní přímka kolmá k ose r, její samodružné body absolutními body na ní.

= Dp $(PQXX')$; jsou-li pak vrcholy O_1 a O_2 na r, O_3 a O_4 na s, obdržíme Dp $(PPXX')$ = Dp $(QQXX')$. Vidíme tedy, že každá dvojosá kolineace transformuje plochu kvadratickou, jdoucí osami kolineace, prvním způsobem v ni samu; spolu je při ní invariantních ∞^3 takových ploch. Dvojosá kolineace 2. druhu s invariantní plochou kvadratickou není možna.

Homologie může býti pouze transformací 2. druhu (protože sdružené přímky se protínají); tři vrcholy samodružného čtyrstěnu O_1, O_2 a O_3 buďtež v rovině homologie ω, čtvrtý vrchol O_4 ve středu jejím O, takže P_1, P_2 a P_3 splynou v bod O, P_4 je v ω. První podmínka kolineace s invariantní plochou kvadratickou je splněna, druhá dává Dp (OP_4XX') = — 1. Homologie transformující kvadratickou plochu druhým způsobem v ni samu, je involuční, majíc středem a rovinou pól a polárnou rovinu plochy; při této homologii je invariantních ∞^6 ploch kvadratických se společným pólem a rovinou polárnou.

d) Z vyšetřených kolineací, při nichž je kvadratická plocha invariantní, je nejjednodušší involuční homologie; všimněme si, zdali lze v takové kolineace rozložiti ostatní kolineace s invariantní plochou kvadratickou.

Kvadratická plocha, invariantní při dvou involučních homologiích, jejichž středy a roviny jsou tedy póly a polárnými rovinami vzhledem k ploše, je invariantní také při jejich produktu; tímto součinem je buď dvojosá kolineace involuční s osami ve sdružených polárách vzhledem k ploše, jestliže střed každé z obou homologií položíme do roviny druhé homologie, nebo kolineace osová při obecné poloze obou homologií. Obráceně dvojosou kolineaci involuční, jejíž osy jsou sdružené poláry vzhledem k invariantní ploše kvadratické, lze rozložiti ve dvě involuční homologie, z nichž první má střed O_1 na jedné ose r a rovinu ω_1 jdoucí druhou osou s, druhá pak má střed O_2 v průsečíku $r\omega_1$ a rovinu $\omega_2 = O_1 s$; osovou kolineaci s invariantní plochou kvadratickou lze pak rozložiti ve dvě homologie involuční, jejichž středy leží na ose s a roviny jdou osou r.

Připojíme-li k osové kolineaci, při níž je invariantní kvadratická plocha, involuční homologii, jejíž střed je na ose samodružných bodů r a rovina prochází osou samodružných rovin s oné, obdržíme jako produkt kolineaci s invariantní plochou kvadratickou, která má ze svých čtyř invariantních bodů dva na ploše, totiž samodružné body osy s, a ze svých čtyř invariantních rovin dvě tečnými rovinami plochy, totiž samodružné roviny jdoucí osou r kolineace osové. Obráceně kolineaci s invariantním čtyrstěnem, jež transformuje plochu kvadratickou druhým způsobem v ni samu, lze rozložiti v involuční homologii a kolineaci osovou s invariantní plochou tou, tedy ve tři involuční homologie, při nichž je plocha invariantní; neboť taková kolineace má na hraně invariantního čtyrstěnu, jež spojuje dva vrcholy jeho neležící na ploše, involuční projektivnost řad bodových, která přechází v projektivnost

identickou, položíme-li střed involuční homologie do samodružného bodu jejího a rovinu této homologie druhým bodem samodružným a spojnicí obou invariantních bodů na ploše.[3]) Konečně kolineace s invariantní plochou kvadratickou prvního druhu, násobená involuční homologií s touže plochou invariantní dává kolineaci, jež převádí plochu kvadratickou druhým způsobem v ni samu. Jest tedy možno kolineaci s invariantním čtyrstěnem, při které je plocha 2. stupně druhým nebo prvním způsobem invariantní, rozložiti ve tři resp. ve čtyři involuční homologie s invariantní plochou kvadratickou.[4])[5])

110. Kolineace s invariantní prostorovou čarou 3. stupně. *a*) Kolineaci, při které je daná *prostorová čára 3. stupně invariantní*, sestrojíme týmž způsobem jako kolineaci, převádějící prostorovou kubiku v prostorovou kubiku: dva body dané čáry A, B zvolíme za vrcholy invariantního

[3]) Je-li kolineace s invariantní plochou kvadratickou 2. druhu určena třemi dvojicemi AA', BB', CC' sdružených bodů na ploše, nalezneme uvedené tři homologie jako její složky snadno tak, že střed jedné zvolíme ve vrcholu kužele jdoucího oběma průsečnými kuželosečkami rovin ABC a $A'B'C'$ s danou plochou a rovinu její tak položíme, aby involuční homologie ta převáděla jednu průsečnou kuželosečku v druhou; v rovině kuželosečky, obsahující nyní tři dvojice bodů sdružených, rozložíme kolineaci, jež tuto kuželosečku transformuje v ni samu, převádějíc jednu trojici uvedených bodů jejích v druhou, ve dvě involuční homologie.

[4]) Z uvedených involučních homologií, jež jsou složkami kolineace s invariantní plochou 2. stupně, lze dvě resp. dvě a dvě nahraditi involuční kolineací dvojosou (jejich produktem), takže kolineaci s invariantní plochou kvadratickou 1. nebo 2. druhu (není-li sama involuční homologií resp. involuční kolineací dvojosou) lze rozložiti ve dvě involuční kolineace, obě dvojosé resp. jednu dvojosou a jednu homologickou.

Libovolnou kolineaci prostoru lze pak rozložiti (nejvýše) ve tři involuční kolineace dvojosé. Je-li totiž $O_1O_2O_3O_4$ čtyrstěn samodružných prvků dané kolineace, jež bod X převádí v X', položme čtyrstranem $O_1O_2O_3O_4$ a bodem X plochu kvadratickou, druhou kvadratickou plochu čtyrstranem $O_1O_3O_2O_4$ a bodem X'; X'' budiž bod na průsečné čáře obou těchto ploch. Daná kolineace rozkládá se v involuční kolineace dvojosé, z nichž první má osy v přímkách protínajících O_1O_3, O_2O_4 a převádí X v X'', druhá má osy v přímkách protínajících O_1O_2, O_3O_4 a převádí X'' v X', třetí pak má jednu osu v přímce jdoucí bodem X' a protínající O_1O_4, O_2O_3, druhou v přímce, jdoucí body harmonicky sdruženými na O_1O_4 a O_2O_3 k průsečíkům prvé na nich vzhledem k bodům O_1, O_4 a O_2, O_3.

[5]) Kolineacemi s invariantní plochou 2. stupně zabývali se už na př. *A. Voss*, Zur Theorie der orthogonalen Substitutionen, Math. Annalen 13 (1878); *H. G. Zeuthen*, Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre, Math. Annalen 18 (1881). Syntheticky je obšírně vyšetřoval *R. Sturm*, Über Collineationen und Correlationen, welche Flächen zweiten Grades oder kubische Raumcurven in sich selbst transformiren, Math. Annalen 26 (1886); a Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, p. 66 a n. Analyticky viz na př. *A. Clebsch-F. Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie II, p. 356 a n.; krátce a elementárně *K. Doehlemann*, Geometrische Transformationen I, p. 305 a n. Viz také *R. G. Wood*, The collineations of space which transform a non-degenerate quadric surface into itself, Annals math. (2) 2 (1901); *H. F. Baker*, On transformations with an absolute quadric, Proceedings Phil. soc. Cambridge 20 (1920).

čtyrstěnu kolineace, tečny čáry a, b a oskulační roviny její α, β v bodech těch zvolíme za hrany a stěny čtyrstěnu toho, konečně dva body C a C' čáry učiníme body sdruženými. Kolineace takto stanovená (s invariantním čtyrstěnem v oskulačním čtyrstěnu prostorové čáry 3. stupně) indukuje na dané čáře projektivnost jejích soumístných řad bodových se samodružnými body A, B a sdruženými body C, C', kterou lze předem zvoliti. Je patrno, že existuje ∞^3 kolineací, jež danou prostorovou kubiku transformují v ni samu.

Vyjděme obráceně od prostorové kolineace s daným čtyrstěnem invariantním; aby byla při takové kolineaci prostorová čára 3. stupně samodružnou, musí čára ta procházeti dvěma vrcholy čtyrstěnu A, B a míti za tečny a, b i oskulační roviny α, β v bodech těch protější hrany i stěny čtyrstěnu, jimi jdoucí.[1]) Kolineace se samodružnými prvky vůči čáře tak položenými (v počtu ∞^3) nepřevádějí však bez další podmínky prostorové kubiky v ni samu. Neboť každá kolineace s uvedeným čtyrstěnem invariantním indukuje ve svazku-řadě kuželových ploch kvadratických s vrcholem A, jež se podél přímky a dotýkají roviny α a podél přímky AB roviny Ab, projektivnost, rovněž tak ve svazku-řadě kvadratických ploch kuželových s vrcholem B, které se dotýkají podél přímky b roviny β a podél přímky AB roviny Ba; samodružnými plochami v jednom i druhém k sobě projektivním svazku tom jsou však zvrhlé plochy svazku, takže ze soustavy ∞^2 kubických čar prostorových, v nichž se kužele jednoho svazku a kužele svazku druhého (vedle přímky AB) protínají, není při libovolné kolineaci s uvedenými prvky samodružnými žádná invariantní. Ovšem je-li invariantní jedna kubika této dvojmocné soustavy, jsou invariantní všechny (protože v projektivnosti obou uv. svazků-řad kuželů kvadratických se objeví po třech samodružných plochách).

Podmínku pro kolineaci s daným čtyrstěnem samodružných prvků, aby při ní byla prostorová čára 3. stupně invariantní, nalezneme pomocí kuželových ploch kvadratických s vrcholy A a B, čáru obsahujících. Spojnice dvou bodů na kubické čáře sobě odpovídajících X, X' ať protne stěny invariantního čtyrstěnu kolineace (oskulačního čtyrstěnu čáry) v bodech P_1 na α, P_2 na β, P_3 na $\gamma = aB$ a P_4 na $\delta = bA$. Aby v kolineaci trsu A s invariantním trojhranem $\alpha\gamma\delta$ byla kuželová plocha 2. stupně, dotýkající se stěny α podél a a stěny δ podél AB, invariantní, musí (podle podmínky duální k výsledku úvahy o kolineaci v rovině s invariantní kuželosečkou) platit

$$\mathrm{Dp}\,(P_1P_3XX') = \mathrm{Dp}\,(P_3P_4XX').$$

[1]) Protože u daného čtyrstěnu lze zvoliti šest dvojic vrcholů za A, B a při každé této dvojici dvě dvojice protějších hran za a, b, čímž oskulační čtyrstran čáry jest už určen, můžeme u invariantního čtyrstěnu kolineace zvoliti 12 oskulačních čtyrstranů prostorové čáry kubické (a spolu dvojmocné soustavy takových čar).

Obdobně aby v kolineaci trsu B s invariantním trojhranem $\beta\gamma\delta$ byla invariantní kuželová plocha 2. stupně, jež se stěny β dotýká podél b a stěny γ podél AB, musí býti

$$\mathrm{Dp}\,(P_2P_4XX') = \mathrm{Dp}\,(P_4P_3XX').$$

V obou případech jsou spolu invariantní všechny kvadratické kuželové plochy celého svazku-řady.

Aby tedy *při kolineaci s invariantním čtyrstěnem byla invariantní prostorová čára 3. stupně, musí tento čtyrstěn býti oskulačním čtyrstěnem čáry a tři* (jinak nezávislé) *dvojpoměry čtveřin bodových, jež sestávají ze dvou bodů v kolineaci sdružených a z průsečíků jejich spojnice se stěnami invariantního čtyrstěnu, musí býti sobě rovny ve tvaru*

$$\mathrm{Dp}\,(P_1P_3XX') = \mathrm{Dp}\,(P_3P_4XX') = \mathrm{Dp}\,(P_4P_2XX').$$

Rovnost prvního a třetího dvojpoměru, zde uvedených, vyjadřuje podmínku, aby plocha 2. stupně, obsahující přímky a, $\gamma\beta$, b, $\alpha\delta$, byla invariantní (načež je invariantní každá plocha svazku se společným čtyrstranem o těchto stranách).[2]) Jsou-li uvedené dvě podmínky splněny, jest — jak bylo už vytčeno — při takové kolineaci (a tedy při ∞^1 kolineací) invariantní každá prostorová kubika z dvojmocné soustavy čar těch o společném čtyrstranu oskulačním.[3])

b) Vezměme v úvahu dvojosou kolineaci s osami r, s. Kterékoli dva body na r a dva body na s určují invariantní čtyrstěn kolineace; zvolíme-li oskulační čtyrstran prostorové čáry kubické tak, že tečny čáry v bodě jejím A na r a v bodě B na s jsou samodružnými přímkami kolineace (ne však osami), zbývající dvě strany čtyrstranu jsou pak v osách kolineace, protíná spojnice dvou bodů X, X' na kubické čáře, v kolineaci sobě odpovídajících, osy r, s v bodech, z nichž O_1 na r jest pokládati za splývající body P_1 a P_4, O_2 na s za P_2 a spolu P_3. Podmínky, uvedené nahoře pro kolineaci s invariantní prostorovou čarou 3. stupně, nabudou proto tvaru

$$\mathrm{Dp}\,(O_1O_2XX') = \mathrm{Dp}\,(O_2O_1XX'), \quad \mathrm{Dp}\,(O_2O_1XX') = \mathrm{Dp}\,(O_1O_2XX').$$

Je to tedy kolineace involuční.

---

[2]) Viz podmínku v čl. 109 *b*, proti jehož čtyrstranu na ploše $O_1O_2O_3O_4$ je zde čtyrstran $O_1O_3O_2O_4$.

[3]) Tečna prostorové čáry kubické, invariantní při kolineaci, protíná stěny invariantního čtyrstěnu této kolineace v dvojpoměru určité hodnoty; abychom ji nalezli a tím větu dokázali, označme průsečíky tečny prostorové kubiky v bodě jejím P se stěnami oskulačního čtyrstěnu čáry (při kolineaci invariantního) jako nahoře P_k. Dotyčný bod P tečny a její průsečík P_3 jsou samodružnými body involuce, v níž tečna ta protíná kvadratické kužele svazku s vrcholem A a v níž tedy P_1 a P_4 jsou body sdruženými; platí tedy $\mathrm{Dp}\,(PP_3P_1P_4) = -1$, vzhledem pak ke svazku kuželů kvadratických s vrcholem B obdobně $\mathrm{Dp}\,(PP_4P_2P_3) = -1$. Odtud nalezneme $\mathrm{Dp}\,(P_3P_4P_1P) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Dp}\,(P_3P_4PP_2) = \frac{1}{2}$ a jako součin $\mathrm{Dp}\,(P_3P_4P_1P_2) = \frac{1}{4}$; *protíná* tedy *tečna invariantní prostorové čáry 3. stupně stěny invariantního čtyrstěnu kolineace v dvojpoměru* $\mathrm{Dp}\,(P_1P_2P_3P_4) = \frac{1}{4}$.

Kdybychom oskulační čtyrstran kubické čáry zvolili v jiné poloze vůči osám kolineace (tečny čáry v osách nebo všechny čtyři strany jeho v invariantních přímkách kolineace mimo osy), nebylo by možno hořejším podmínkám pro kolineaci s invariantní kubikou vyhověti. Úhrnem tedy platí: *Aby při dvojosé kolineaci byla invariantní prostorová čára 3. stupně, musí osy kolineace ležeti ve dvou stranách oskulačního čtyrstranu čáry, jež nejsou tečnami jejími, a kolineace musí býti involuční.*

Každá involuční kolineace dvojosá transformuje v sebe samy ∞^6 kubických čar prostorových, protože oskulační čtyrstran čáry lze u ní zvoliti ∞^4 způsoby a při určitém čtyrstranu oskulačním jest invariantních ∞^2 čar kubických, k němu příslušných.

Dvojosá kolineace involuční indukuje na invariantní prostorové čáře kubické involuční projektivnost jejích dvou soumístných řad bodových se samodružnými body na osách kolineace. Obráceně involuční projektivnost na prostorové čáře kubické vede k involuční kolineaci dvojosé, při níž je čára ta invariantní a obsahuje danou projektivnost jako indukovanou. Neboť sestrojíme-li u dané prostorové kubiky v samodružných bodech A, B její involuční projektivnosti oskulační čtyrstran, složený z přímek a, $(a\beta, B)$, b, $(b\alpha, A)$, leží daná čára na zborcené ploše kvadratické, obsahující tento čtyrstran. Spojnice vždy dvou bodů na čáře sdružených tvoří zborcenou řadu přímek v kolineaci invariantních (k níž patří také tečny čáry a, b); osami kolineace jsou přímky $(A, b\alpha)$ a $(B, a\beta)$. Protože mezi soumístnými řadami bodovými na čáře lze ustanoviti ∞^2 involucí, existuje ∞^2 involučních kolineací dvojosých, při nichž je daná prostorová čára 3. stupně invariantní.

Při homologii nemůže prostorová kubika býti invariantní, protože u homologie (jejíž střed by musil ležeti ve vrcholu oskulačního čtyrstranu čáry a rovina procházeti ostatními vrcholy jeho) nelze vyhověti hořejším podmínkám o dvojpoměrech.

c) Pomocí kolineace prostoru s invariantní kubikou můžeme dokázati, že *oskulační roviny prostorové čáry kubické protínají dvě tečny její v projektivních řadách bodových.*

U dané prostorové kubiky s dvěma pevnými tečnami lze totiž zvoliti involuční projektivnost a příslušnou kolineaci prostorovou tak, že projektivnost čtveřin bodových, jež sobě v kolineaci té na uvažovaných tečnách odpovídají, svědčí o projektivnosti uvedené. Buďtež t a t' dvě tečny prostorové čáry kubické k v bodě A resp. B'; oskulační rovina čáry v A ať protíná t' v bodě A', oskulační rovina v B' ať protíná t v bodě B; dále oskulační rovina čáry v jiném bodě jejím P ať protíná t a t' v bodech C, C', konečně oskulační rovina v dalším bodě čáry Q ať protíná t a t' v bodech D, D'. K involuční projektivnosti, určené na čáře k dvojicemi sdružených bodů AB', PQ, ustanovíme kolineaci prostoru tím, že bodu A, tečně čáry t a oskulační rovině v něm přiřadíme bod B', tečnu čáry t' a oskulační rovinu v bodě tom (jakož i obráceně), konečně

bodu P přiřadíme bod Q (a tedy bodu Q bod P). V této kolineaci odpovídají bodům A, B, C, D pořadem body B', A', D', C', takže o těchto skupinách bodů platí $ABCD \barwedge B'A'D'C'$, tudíž také $ABCD \barwedge A'B'C'D'$.

Odtud vyplývá, že soustava oskulačních rovin prostorové čáry kubické jest tvořena rovinami, jež procházejí trojicemi sdružených bodů projektivních řad na třech tečnách čáry té. *Jest* tedy *soustava oskulačních rovin prostorové čáry 3. stupně*, vytvořené třemi projektivními svazky rovin, *totožna se soustavou rovin 3. třídy*, vytvořenou třemi projektivními řadami bodů, jež byla definována jako útvar k čáře té duální.[4])[5])

111. Konečné grupy kolineací v prostoru. Grupy prostorových kolineací s konečným počtem členů jsou četné, a lze je hledati podobně jako konečné grupy kolineací v rovině i projektivností na přímce a pomocí těchto. Nejjednodušší jsou ovšem cyklické grupy periodických kolineací typů XII., X., VI. a I.; perioda takové kolineace je spolu řádem konečné grupy, z jejích mocnin složené. Cyklické grupy homologií (s invariantní rovinou $O_1O_2O_3$ a bodem mimo ni ležícím O_4) obsahují všechny mocniny kolineace $x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : x_2 : x_3 : \alpha x_4$, kde $\alpha^r = 1$ (r je periodou homologie a řádem grupy). Cyklické grupy kolineací dvojosých (s invariantními dvěma přímkami mimoběžnými O_1O_2 a O_3O_4) jsou složeny z mocnin kolineace $x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : x_2 : \alpha x_3 : \alpha x_4$, kde $\alpha^r = 1$. Cyklické grupy kolineací osových (s invariantní osou samodružných bodů O_3O_4 a invariantními body O_1, O_2) jsou tvořeny mocninami kolineace $x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = \alpha x_1 : \alpha^k x_2 : x_3 : x_4$, kde $\alpha^r = 1$, $k \neq 0, 1$. Konečně cyklické grupy kolineací s invariantními čtyřmi vrcholy O_1, O_2, O_3 a O_4 čtyrstěnu mají svými členy mocniny kolineace $x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = \alpha x_1 : \alpha^p x_2 : \alpha^q x_3 : x_4$, kde $\alpha^r = 1$ a z konstant p, q ani jedna není 0 nebo 1. Z cyklických grup jsou nejnižšího řádu vedle grup řádu 2. (složených z kolineace identické a involuční homologie nebo kolineace dvojosé) grupy řádu 3., složené z mocnin homologie nebo kolineace dvojosé nebo kolineace osové s periodou 3, a grupy řádu 4., tvořené mocninami některé ze čtyř obecných kolineací s periodou 4.

Konečné grupy, při nichž jsou invariantními všechny body na jedné ze dvou přímek mimoběžných a dva body na druhé, vznikají ze dvou periodických homologií se středy a rovinami navzájem incidentními. Tak dvě involuční homologie v uvedené poloze vytvořují grupu 4. řádu $\mathfrak{G}_4$, obsahující vedle identity tyto dvě homologie a involuční kolineaci dvojosou; dvě homologie s periodou 3 vytvořují grupu 9.

[4]) O kolineacích s invariantní prostorovou čarou 3. stupně pojednává zejména *R. Sturm*, Über Collineationen und Correlationen, welche Flächen zweiten Grades oder kubische Raumcurven in sich selbst transformiren, Math. Annalen 26 (1886); také Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, p. 88 a n.

[5]) Kolineace s invariantní kuželosečkou vyšetřuje (analyticky) *A. Clebsch-F. Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie II, p. 373 a n.

řádu G_9, jež obsahuje vedle identity čtyři homologie, dvě dvojosé a dvě osové kolineace. Grupy takto vytvořené obsahují ovšem jen kolineace typů XII., X. a VI.

Konečné grupy, jež mají invariantní všechny vrcholy čtyrstěnu, můžeme skládati ze tří periodických homologií se středy a rovinami ve vrcholech a protějších stěnách jeho nebo ze dvou periodických kolineací dvojosých s osami ve dvojicích protějších hran čtyrstěnu. Tak dvě involuční kolineace dvojosé uvedené polohy vytvořují grupu 4. řádu G'_4 (různou od hořejší), obsahující vedle identity tři involuční dvojosé kolineace (s osami ve třech dvojicích protějších hran čtyrstěnu); dvě kolineace dvojosé s periodou 3 vytvořují grupu G'_9, jež obsahuje vedle identity čtyři kolineace dvojosé a čtyři osové. Tři involuční homologie v uvedené poloze vytvořují grupu 8. řádu G_8, jejímiž členy mimo identitu jsou čtyři involuční homologie a tři involuční kolineace dvojosé (všechny po dvou záměnné); ze tří homologií periody 3 vzniká grupa G_{27}, obsahující vedle identity 8 homologií, 6 dvojosých a 12 osových kolineací, všechny s periodou 3.

Z hořejších grup, při nichž jsou jednotlivě invariantní všechny vrcholy čtyrstěnu, lze odvoditi širší grupy, jež mají invariantní skupinu čtyř vrcholů čtyrstěnu; spec. grupy, při nichž jsou invariantní dva vrcholy a ostatní dva se zaměňují, nebo grupy, při nichž je invariantní jeden vrchol a ostatní tři se permutují (permutacemi cyklickými nebo všemi permutacemi tří prvků). Grupy, při kterých jest invariantní čtveřice vrcholů čtyrstěnu (tak, že žádný vrchol není sám invariantní), obdržíme z hořejších připojením kolineací, jež permutují čtyři body původně neproměnné (na př. zaměňují dva vrcholy a po druhé ostatní dva, nebo zaměňují dvě dvojice a po druhé jiné dvě dvojice, nebo permutují čtyři vrcholy cyklicky), zejména permutují čtyři vrcholy 12 sudými nebo všemi 24 permutacemi čtyř prvků.

Grupy naznačeným způsobem odvozené, mimo některé grupy poslední skupiny (s invariantním čtyrstěnem), za to však také grupy další, nalezneme ve třech skupinách: jednak jako grupy s invariantní rovinou a bodem mimo ni ležícím, jednak jako grupy s invariantními dvěma přímkami mimoběžnými, konečně jako grupy s invariantní dvojicí mimoběžných přímek.[1])

Má-li při grupě prostorových kolineací býti invariantní rovina ω a bod na ní neležící O, vyjdeme při konstrukci takové grupy od známých grup kolineací rovinných v ω, k nimž po případě připojíme periodickou homologii středu O a roviny ω; nově tak obdržíme grupy, při nichž na rovině ω existují grupy rovinných kolineací bez invariantního trojúhel-

[1]) Konečné grupy kolineací kvaternárních byly rozlišeny jako *intransitivní* (s invariantní rovinou a bodem mimo ni ležícím nebo s invariantními dvěma přímkami mimoběžnými) a *transitivní*; tyto pak v *imprimitivní* (s invariantní dvojicí přímek nebo s invariantním čtyrstěnem) a *primitivní* (bez invariantního útvaru uvedených druhů).

níku a bodu s neincidentní přímkou. Z grup této skupiny jsou jednoduché i pozoruhodné grupy tetraedrická G_{12}, oktaedrická G_{24} a ikosaedrická G_{60}, k nimž lze také dospěti od grupy G'_4, prve uvedené.[2])

Mají-li při grupě kolineací v prostoru býti invariantní dvě přímky mimoběžné r a s, vycházíme při odvozování od grup projektivností na těchto přímkách; může zde přistoupiti periodická kolineace dvojosá s osami r, s. Sem patří jednoduchá grupa G''_4, složená z identity a tří involučních kolineací dvojosých s osami ve dvojicích přímek zborcené řady kvadratické po dvou harmonických; při ní jest ovšem invariantní kvadratická plocha, jejíž jedna řada přímek je v celku a druhá ve všech svých přímkách invariantní (mezi těmito jsou r a s). Tuto G''_4 mají za subgrupu tři grupy G'_{12}, G'_{24} a G'_{60}, obsahující vedle identity jenom kolineace dvojosé; při nich je rovněž invariantní plocha kvadratická s jednou řadou přímek jednotlivě invariantních, k nimž patří také přímky r a s, obě nesoucí tetraedrickou resp. oktaedrickou, resp. ikosaedrickou grupu binární.

Abychom posléze dostali grupy, při kterých jest invariantní jenom dvojice mimoběžných přímek, stačí k předešlým připojiti involuční kolineaci dvojosou; grupy projektivností na přímkách r a s musí však býti tytéž. U grup této skupiny jest invariantní lineární kongruence přímek s osami r a s. Důležitá je zde grupa G_{16} se soběkonjugovanou subgrupou G'_4, při níž na obou přímkách dvojice existují binární grupy diedrické řádu 4.; obsahuje vedle identity 15 involučních kolineací dvojosých.[3])[4])

Mimo grupy, při kterých jest invariantní buď čtyrstěn nebo dvě přímky (jednotlivě nebo jejich dvojice) nebo bod s rovinou jím neprocházející, existují ještě grupy prostorových kolineací, u nichž není tak jednoduchého útvaru invariantního. Jsou to především grupy s invariantní plochou 2. stupně;[5]) mimo užší grupy hořejších skupin bylo nalezeno 12 takových grup řádu pq, kde $p, q = 12, 24, 60$, tedy řádu 144, 288, 576, 720, 1440, 3600, a rozšířením první z nich dvě grupy řádu 288 a dvě řádu 576, rozšířením pak třetí a šesté ještě grupy řádu 1152[6])

[2]) Metricky speciálními případy těchto tří grup jsou grupy rotací pravidelných těles. Viz *E. Ciani*, Sopra i gruppi finiti di collineazioni quaternarie, oloedricamente isomorfi con quelli dei poliedri regolari, Annali mat. (3) 8 (1903).

[3]) Tato grupa G_{16} obsahuje (při vhodné poloze soustavy souřadnic) kolineace $x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : x_2 — x_3 : — x_4$, $= x_1 : — x_2 : — x_3 : x_4$, $= x_2 : x_1 : x_4 : x_3$, $= x_3 : x_4 : x_1 : x_2$ a jejich produkty.

[4]) Pro grupy imprimitivní viz *L. Autonne*, Sur les groupes quaternaires réguliers d'ordre fini, Journal math. p. a. (5) 7 (1901); *H. F. Blichfeldt*, On imprimitive linear homogeneous groups, Transactions Amer. math. soc. 6 (1905).

[5]) Konečné grupy s invariantní plochou 2. stupně odvodil *É. Goursat*, Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace, Annales École norm. sup. (3) 6 (1889).

[6]) O grupě kolineací řádu 1152, při níž jest invariantní konfigurace

a 7200. Dále sem patří 9 grup se soběkonjugovanou subgrupou G_{16}, a sice grupy řádu $16k$, kde $k = 5, 10, 20, 60$ (dvě), 120 (dvě), 360 a 720; z nich nejširší je tedy grupa řádu 11520, nalezená v geometrii přímkové F. Kleinem.[7]) Potom jest sem zařaditi 7 grup holoedricky isomorfních s grupami sudých nebo všech permutací skupiny 5 nebo 6 prvků, tedy grupy řádu 60 dvě, řádu 120 dvě, řádu 360 a 720, jakož i nejširší tohoto druhu grupa řádu 2520, holoedricky isomorfní s grupou sudých permutací 7 prvků;[8]) z nich zajímavá je grupa řádu 120 těch kolineací, jež permutují 5 bodů v prostoru,[9]) a ovšem grupa řádu 2520 se subgrupou o sobě významnou řádu 168.[10]) Konečně byla nalezena jako grupa s největším počtem členů konečná grupa kolineací řádu 25920 $(=2^6 . 3^4 . 5)$.[11])[12])

$(24_9, 18_4)$, složená ze dvou trojic desmických čtyrstěnů, pojednává obšírně *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, p. 332 a n. Viz také *J. Feder*, Die Configuration $(12_6, 16_3)$ und die zugehörige Gruppe von 2304 Collineationen und Correlationen, Diss. Strassburg 1896 nebo Math. Annalen 47 (1896).

[7]) Viz *E. Hess*, Beiträge zur Theorie der räumlichen Configurationen. Über die Klein'sche Configuration $(60_{15}, 30_6)$ und einige bemerkenswerte aus dieser ableitbare räumliche Configurationen, Nova Acta Akad. Halle 55 (1890), a téhož Weitere Beiträge zur Theorie der räumlichen Configurationen, tamtéž 75 (1899); také *A. Wiman*, Om en med en kvaternär grupp på 11520 kollineationer i samband stående konfiguration, Mat. Tidsskrift 1925.

[8]) Grupy kolineací, holoedricky isomorfní s grupami sudých a všech permutací, vyšetřil *H. Maschke*, Bestimmung aller ternären und quaternären Collineationsgruppen, welche mit symmetrischen und alternirenden Buchstabenvertauschungsgruppen holoedrisch isomorph sind, Math. Annalen 51 (1898).

[9]) *H. Küpper*, Collineationen, durch welche fünf gegebene Punkte des Raumes in dieselben fünf Punkte transformirt werden. Diss. Münster 1890; *H. Himpel*, Über die Gruppe der 120 Kollineationen, durch die ein räumliches Fünfeck in sich selbst übergeht, Diss. Strassburg 1903.; viz také *W. Burnside*, On the double-six which admits a group of 120 collineations into itself, Proceedings Phil. soc. Cambridge 16 (1912).

[10]) *F. Klein*, Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades, Math. Annalen 28 (1887); *H. Maschke*, Über eine merkwürdige Configuration gerader Linien im Raume, Math. Annalen 36 (1890); *E. Meyer*, Über eine Konfiguration von geraden Linien im Raume, Math. Annalen 65 (1908).

[11]) Grupu řádu 25920 vyšetřoval *A. Witting*, Über eine der Hesse'schen Configuration der ebenen Curve dritter Ordnung analoge Configuration im Raume, auf welche die Transformationstheorie der hyperelliptischen Functionen $(p = 2)$ führt, Diss. Göttingen 1887; viz dále *H. Maschke*, Aufstellung des vollen Formensystems einer quaternären Gruppe von 51840 linearen Substitutionen, Math. Annalen 33 (1889); *G. Bagnera*, I gruppi finiti di trasformazioni lineari dello spazio che contengono omologie, Rendiconti Circolo mat. Palermo 19 (1905); syntheticky ji sestrojuje *W. Burnside*, On the simple group of order 25920, Proceedings R. soc. London 77 (1906); viz i téhož On a group of order 25920 and the projective transformations of a cubic surface, Proceedings Phil. soc. Cambridge 23 (1927).

[12]) Úplný výčet konečných primitivních grup kolineací v prostoru (t. j. bez invariantního bodu s rovinou, dvojice přímek a čtyrstěnu) podal

112. Spojité grupy kolineací prostorových. *a*) Všechny kolineace v prostoru tvoří spojitou 15-paramaterovou grupu $\mathbf{G}_{15}$; neboť produkt dvou kolineací jest opět kolineace a obecná kolineace obsahuje ve své rovnici 15 nezávislých konstant. V této nejširší grupě jsou obsaženy všechny ostatní grupy kolineací prostorových; můžeme je, obdobně jako v rovině, jednoduše hledati podle typů kolineací. Kolineace každého z třinácti uvedených typů tvoří při společném invariantním útvaru typu toho *základní grupu* s tolika parametry, kolik mají rovnice kolineace té nezávislých konstant; odtud můžeme sestrojiti širší grupy, u kterých zůstává beze změny jen část invariantního útvaru grupy základní; obráceně zvolíme-li mezi konstantami základní grupy závislost, obdržíme grupy užší (z nichž pak lze opět skládati grupy širší); konečně zvláštní pozornosti zaslouží spojité grupy s invariantním útvarem vyšším (než bod, přímka a rovina).

Homologie, t. j. kolineace typu XII., symbolu [20], tvoří při společném středu a společné rovině invariantních prvků základní spojitou grupu jednoparametrovou $^{12}\mathbf{G}_1$; neboť dvě homologie téhož středu O a téže roviny ω s dvojpoměry k_1 a k_2 mají produktem homologii s týmž útvarem invariantním o dvojpoměru $k = k_1 k_2$. Tato grupa $^{12}\mathbf{G}_1$ s parametrem k má v každém poli na rovině jdoucí bodem O a v každém trsu se středem na rovině ω podřaděnou grupu homologií $^4\mathbf{g}_1$ s parametrem k. Rovněž elace, t. j. kolineace typu XIII., symbolu [(20)], vytvořují při společném středu a společné rovině jím procházející základní jednoparametrovou grupu $^{13}\mathbf{G}_1$; konstanta produktu dvou takových elací jest součtem konstant obou složek; na rovině jdoucí společným středem a v bodě společné roviny existuje $^5\mathbf{g}_1$.

Kolineace dvojosé, t. j. kolineace typu X., symbolu [11], se společnými osami skládají spojitou jednoparametrovou grupu $^{10}\mathbf{G}_1$; vyplývá to z existence jednoparametrové grupy projektivností [00] na každé invariantní přímce takové kolineace, jejíž parametr je spolu parametrem grupy $^{10}\mathbf{G}_1$; při grupě té jsou totiž invariantní všechny přímky lineární kongruence s uvedenými osami. Kolineace typu XI., symbolu [(11)], se společnou osou invariantních prvků tvoří čtyřparametrovou grupu $^{11}\mathbf{G}_4$, jak seznáváme z rovnic této kolineace; v každém poli na rovině jdoucí osou a v každém trsu se středem na ose existují grupy $^5\mathbf{g}_2$.

Kolineace osové, typu VI. a symbolu [100], se společnou osou invariantních bodů r a společnou osou invariantních rovin s, jakož i společnými dvěma invariantními body na ose s a rovinami osou r,

---

cestou algebraickou *H. F. Blichfeldt*, The finite discontinuous primitive groups of collineations in four variables, Math. Annalen 60 (1905). Grupy tohoto druhu, jež obsahují homologie, geometricky určil a popsal *G. Bagnera*, I gruppi finiti di trasformazioni lineari dello spazio che contengono omologie, Rendiconti Circolo mat. Palermo 19 (1905). Grupy homologií neobsahující vyšetřil geometricky *H. H. Mitchell*, Determination of the finite quaternary linear groups, Transactions Amer. math. soc. 14 (1913).

skládají spojitou grupu dvouparametrovou ${}^{6}\mathbf{G}_2$; na každé invariantní rovině a v každém invariantním bodě existuje podřaděná grupa ${}^{1}\mathfrak{g}_2$, jejíž dva parametry jsou spolu parametry grupy ${}^{6}\mathbf{G}_2$; jenom ve dvou samodružných rovinách osou r a ve dvou samodružných bodech na ose s jest ${}^{4}\mathfrak{g}_1$. Kolineace typu VII. a symbolu [1 (00)], jež mají celý invariantní útvar této kolineace společný, tvoří ${}^{7}\mathbf{G}_2$, při čemž na každé invariantní rovině a v každém invariantním bodě jest ${}^{2}\mathfrak{g}_2$ (nebo ${}^{4}\mathfrak{g}_1$). Obdobně kolineace typu VIII. a symbolu [(10) 0] se společným invariantním útvarem této kolineace tvoří ${}^{8}\mathbf{G}_2$ s podřaděnými grupami ${}^{2}\mathfrak{g}_2$ (nebo ${}^{4}\mathfrak{g}_1$ nebo ${}^{5}\mathfrak{g}_1$). Kolineace typu IX. a symbolu [(100)] se společnými osami invariantních prvků se protínajícími vytvořují tříparametrovou grupu ${}^{9}\mathbf{G}_3$, jež na invariantních rovinách a v invariantních bodech indukuje ${}^{3}\mathfrak{g}_3$ (nebo ${}^{5}\mathfrak{g}_1$).

Kolineace typu I., symbolu [0000], se společným čtyrstěnem invariantním tvoří spojitou grupu tříparametrovou ${}^{1}\mathbf{G}_3$; jejími parametry jsou tři nezávislé konstanty, obsažené v rovnicích této kolineace (nebo dvojpoměry tří homologií, kolineaci tu vytvořujících). Na stěnách samodružného čtyrstěnu a v jeho vrcholech existují zde grupy ${}^{1}\mathfrak{g}_2$, charakterisované vždy dvěma z parametrů grupy ${}^{1}\mathbf{G}_3$. Majíce celý invariantní útvar svůj společný, vytvořují kolineace typu II. a symbolu [(00) 00] grupu ${}^{2}\mathbf{G}_3$ s indukovanými ${}^{1}\mathfrak{g}_2$ nebo ${}^{2}\mathfrak{g}_2$ na invariantních rovinách a v invariantních bodech. Obdobně při téže podmínce vytvořují kolineace III. typu a symbolu [(00) (00)] grupu ${}^{3}\mathfrak{C}_3$ s indukovanými ${}^{2}\mathfrak{g}_2$. Kolineace typu IV. a symbolu [(000) 0] vytvořují při celém svém invariantním útvaru společném grupu ${}^{4}\mathbf{G}_4$ s indukovanými ${}^{2}\mathfrak{g}_2$ a ${}^{3}\mathfrak{g}_3$. Konečně všechny kolineace typu V. a symbolu [(0000)], jež mají společné samodružné prvky své (bod, přímku a rovinu incidentní), tvoří, jak poznáváme z rovnic tohoto typu, grupu ${}^{5}\mathbf{G}_6$, při níž existují v invariantních rovině a bodě grupy ${}^{3}\mathfrak{g}_3$.

Všechny základní grupy kolineací prostorových jsou podle svého invariantního útvaru soběduální.

b) Velmi četné jsou *širší grupy* těch kolineací prostorových, jež mají společnou jenom část samodružného útvaru svého (invariantní při všech kolineacích grupy).

Homologie (typu XII.) s touže rovinou samodružných bodů, jejichž středy leží na přímce, tvoří grupu o dvou parametrech ${}^{12}\mathbf{G}_2$; neboť dvě homologie o téže rovině s různými středy O_1, O_2 (a s dvojpoměry k_1, k_2) mají produktem homologii téže roviny se středem ležícím na přímce O_1O_2 (a s dvojpoměrem k_1k_2), jak se přesvědčíme, sledujíce konstrukci bodů sdružených, nebo podle produktu rovinných homologií na rovině, jdoucí přímkou O_1O_2 a body postupně sdruženými. Obdobně shledáme dále, že homologie o téže rovině bodů samodružných, jejichž středy vyplňují pole rovinné nebo celý prostor, tvoří grupu tříparametrovou ${}^{12}\mathbf{G}_3$ resp. čtyřparametrovou ${}^{12}\mathbf{G}_4$. A duálně homologie téhož středu s rovinami

samodružných bodů, jež jsou prvky svazku nebo trsu nebo prostoru, vytvořují grupu ${}^{12}\Gamma_2$ resp. ${}^{12}\Gamma_3$ resp. ${}^{12}\Gamma_4$.[1])

Elace (typu XIII.), jež mají tutéž rovinu bodů samodružných a středy v přímce této roviny, tvoří grupu ${}^{13}\mathbf{G}_2$; vysvítá to z existence grupy ${}^{5}\mathfrak{g}_2$ na každé rovině jdoucí uvedenou přímkou. Elace s touže rovinou a se středy na ní ležícími vytvořují grupu ${}^{13}\mathbf{G}_3$, jak vidíme na produktu tří elací o téže rovině a středech na ní obecně položených. Duální grupy ${}^{13}\Gamma_2$ a ${}^{13}\Gamma_3$ jsou složeny z elací téhož středu, jejichž roviny samodružných bodů tvoří svazek s osou středem tím jdoucí, resp. trs se středem ve středu elací.

U kolineací dvojosých (typu X.) odvodíme širší grupy buď pomocí rozkladu každé takové kolineace ve dvě homologie, speciální volbou invariantních prvků těchto složek a změnou jejich pořadí, nebo pomocí grup homologií dvourozměrných (v rovině nebo v trsu). Obdržíme tak grupy: soběduální ${}^{10}\mathbf{G}_2$ kolineací, jež mají jednu osu r společnou a jejichž druhé osy tvoří svazek; duální ${}^{10}\mathbf{G}_3$ a ${}^{10}\Gamma_3$ se společnou osou r, jejichž osy s vyplňují trs resp. pole; soběduální ${}^{10}\mathbf{G}'_3$, ${}^{10}\mathbf{G}_4$ a ${}^{10}\mathbf{G}_5$ se společnou osou r, jejichž osy s tvoří soustavu přímek protínajících dvě přímky mimoběžné resp. jednu přímku resp. vyplňují prostor; soběduální ${}^{10}\mathbf{G}''_3$ kolineací, jejichž osy r i osy s tvoří svazky paprskové.

Četné grupy kolineací osových (typu VI.) můžeme hledati těmito způsoby: každou z osových kolineací rozložíme ve dvě homologie (kde střed každé z obou je incidentní s rovinou druhé), sdružíme první složky těchto kolineací i druhé složky jejich a vyšetřujeme, kdy ony a tyto tvoří grupu; nebo připustíme na jedné, po případě i na druhé samodružné rovině osové kolineace, jdoucí osou samodružných bodů, rozmanité grupy homologií rovinných a vyšetřujeme přípustné polohy zbývajícího samodružného bodu této kolineace; nebo předpokládáme, že osové kolineace mají společné obě osy nebo jednu osu a zkoušíme grupy projektivností na jedné z os resp. její polohy; k nalezeným grupám připojíme někdy grupy duální nebo provedeme duální úvahu. Tak nalezneme grupy těchto kolineací, jež mají společnou osu r samodružných bodů i osu s samodružných rovin a v řadě bodové na této i ve svazku rovin s osou v oné mají grupu projektivností s dvěma nebo třemi parametry, totiž soběduální ${}^{6}\mathbf{G}_3$ a ${}^{6}\mathbf{G}_4$; grupy kolineací se společnou osou r a oběma samodružnými rovinami touto osou jdoucími, totiž ${}^{6}\mathbf{G}'_3$ a ${}^{6}\mathbf{G}'_4$, kde kolineace mají osy s tvořící svazek resp. trs se středem v jednom samodružném bodě a s druhými samodružnými body na přímce druhé roviny resp. v druhé rovině uvedené (a dvě grupy duální); dále grupy

[1]) Vzhledem k prvním dvěma případům navzájem duálním můžeme také říci: Jsou-li tři prostorové soustavy po dvou homologické, splývají buď roviny těchto homologií a jejich středy leží v jedné přímce nebo splývají středy homologií těch a roviny jejich procházejí jednou přímkou. Upozorňuje na to na př. *C. Rodenberg*, Über collineare räumliche Systeme, Zeitschrift Math. Phys. 30 (1885).

${}^6\mathbf{G}''_3$ a ${}^6\mathbf{G}''_4$ kolineací se společnou osou r a dvěma rovinami samodružnými, kde však samodružné body na osách s vyplňují dvě mimoběžné přímky resp. dvě přímky (na r) se protínající (a dvě grupy duální); potom grupy ${}^6\mathbf{G}_5$ a ${}^6\mathbf{G}_6$ se společnou osou r a samodružnými dvěma rovinami, kde samodružné body os s vyplňují přímku v jedné rovině té a rovinu druhou resp. obě tyto roviny (a dvě duální grupy); a j. grupy. Nejširší grupou kolineací osových jsou ${}^6\mathbf{G}_8$ a duální ${}^6\Gamma_8$ se společnou osou r resp. osou s.

Širší grupy kolineací typu VII. vyhledáme, vycházejíce od samodružné roviny, jdoucí osou r a samodružným bodem na s; na této rovině připustíme rozmanité grupy homologií (${}^4\mathbf{g}_1$, ${}^4\mathbf{g}_2$, ${}^4\gamma_2$, ${}^4\mathbf{g}_3$, ${}^4\gamma_3$) a zjišťujeme, existuje-li na rovinách nebo na rovině osou s procházející některá grupa rovinných kolineací typu II. (nebo postupujeme duálně). Grupy kolineací typu VIII. hledáme opět na základě možných grup homologií rovinných v rovině rs se zřetelem ke grupám kolineací typu II. na rovinách jdoucích osou s nebo v trsech se středem na r; nebo vyjdeme od grup rovinných elací v samodružné rovině tohoto typu jdoucí osou r (nebo duálně). Konečně obdobnou cestou zkoušíme rozšířiti základní grupu kolineací u typu IX.

U kolineací se samodružným čtyrstěnem (typu I.) nalezneme jednoduše řadu širších grup (složených ze základních ${}^1\mathbf{G}_3$), jestliže zvolíme za invariantní jednu ze samodružných rovin takové kolineace, suponujeme na ní rozmanité grupy rovinných kolineací typu I. a vyšetřujeme v každém případě přípustné polohy protějšího vrcholu samodružného čtyrstěnu (nebo postupujeme duálně); zvolíme také za invariantní dvě protější hrany nebo jen jednu hranu čtyrstěnu samodružného a béřeme v úvahu na oněch obou resp. na této jedné rozmanité grupy projektivností. Tím způsobem obdržíme (nečítaje základní ${}^1\mathbf{G}_3$ a ovšem nejširší $\mathbf{G}_{15}$) 13 grup soběduálních a 9 grup se stejným počtem duálních: z nich mají nejvíce parametrů grupa ${}^1\mathbf{G}_{12}$ s invariantní rovinou (na níž existuje $\mathbf{g}_8$) a duální ${}^1\Gamma_{12}$ s invariantním bodem, potom soběduální grupa ${}^1\mathbf{G}_{11}$ s invariantní přímkou (a tříparametrovou grupou projektivností v řadě bodové i svazku rovinovém s touto osou); dále soběduální ${}^1\mathbf{G}_{10}$ s invariantní rovinou a bodem na ní ležícím, ${}^1\mathbf{G}'_{10}$ s invariantní rovinou a přímkou na ní ležící i duální ${}^1\Gamma''_{10}$ s invariantním bodem a přímkou jím jdoucí, a pod.; nejméně parametrů má soběduální ${}^1\mathbf{G}_4$, jejíž všechny kolineace mají společné tři samodružné body a tři roviny samodružné (i čtyři přímky).

Obdobným způsobem jako u typu I. rozšíří se základní grupa kolineací typu II. v grupy obsáhlejší; musíme ovšem míti na zřeteli různou povahu kolineací dvourozměrných resp. projektivností v samodružných prvcích této kolineace; výsledky jsou zase velmi četné. Konečně obdržíme uvedenou cestou několik širších grup kolineací typu III. a IV.

Jak je přirozeno, existují širší grupy u kolineací všech typů vyjma typy V. a XI.

c) U základních grup kolineací prostorových, jež mají více než jeden parametr, můžeme volbou vhodné relace mezi parametry grupy utvořiti *grupy užší*; takové užší grupy mohou se tedy vyskytnouti u všech typů vyjma typy X., XII. a XIII.

Základní grupa ${}^1\mathbf{G}_3$ kolineací typu I. s invariantním čtyrstěnem $O_1O_2O_3O_4$ má, dejme tomu, parametry k_1, k_2, k_3: v bodových řadách na O_1O_4, O_2O_4, O_3O_4 ať jsou grupy projektivností s uvedenými dvojpoměry, tedy v řadách na O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 grupy s dvojpoměry $k_1 \,.\, k_2^{-1}$, $k_2 \,.\, k_3^{-1}$, $k_3 \,.\, k_1^{-1}$. Mezi parametry grupy ${}^1\mathbf{G}_3$ zvolme (vzhledem k parametru produktu dvou kolineací jejích) relace $k_2 = k_1^p$, $k_3 = k_1^q$; na hranách invariantního čtyrstěnu obdržíme tak grupy projektivností s parametry, jež jsou mocninami parametru k_1 při exponentech (v uvedeném pořadí) 1, p, q, $1-p$, $p-q$, $q-1$. Ustanovíme-li p konstantní, vznikne na rovině $O_1O_2O_4$ užší grupa rovinných kolineací ${}^1\mathbf{g}_{1(2)}$, v prostoru tedy dvouparametrová užší grupa ${}^1\mathbf{G}_{2(3)}$ kolineací prostorových s parametry k_1 a k_3 (kdežto $k_2 = k_1^p$); protože při oné jest ∞^1 invariantních čar rovinných a bod O_3 jest také samodružný, existuje při ${}^1\mathbf{G}_{2(3)}$ invariantních ∞^1 kuželů s vrcholem O_3; užších grup tohoto druhu obsahuje ${}^1\mathbf{G}_3$ soustavu jednomocnou (podle hodnot konstanty p). Obdobně dostaneme ještě ve třech případech užší grupy typu ${}^1\mathbf{G}_{2(3)}$: při konstantním q se soustavou invariantních kuželů vrcholu O_2, při konstantním poměru p/q se systémem kuželů o vrcholu O_1 a při konstantním $(p-q)/(1-p)$ se soustavou kuželů vrcholu O_4. Jinými volbami dostaneme tři užší grupy jiného druhu ${}^1\mathbf{G}'_{2(3)}$ v ${}^1\mathbf{G}_3$: Ustanovíme-li za konstantní poměr $(1-p)/q$ $(= \varkappa)$, jsou na O_3O_4 a O_1O_2 jednoparametrové grupy projektivností s parametrem k_3 resp. $k_3^{\varkappa}$; grupa ${}^1\mathbf{G}_3$ se rozkládá (podle hodnot konstanty $\varkappa$) v jednomocnou soustavu grup dvouparametrových, z nichž každá má invariantních ∞^1 ploch přímkových se společnými přímkami O_1O_2 a O_3O_4. Takové užší grupy nalezneme také při konstantním $(1-q)/p$ a při konstantním $p-q$; při oněch jsou invariantní vždy přímkové plochy soustavy se společnými přímkami O_1O_3 a O_2O_4, při těchto se společnými přímkami O_1O_4 a O_2O_3. Konečně lze grupu ${}^1\mathbf{G}_3$ rozložiti ve dvojmocnou soustavu užších grup jednoparametrových ${}^1\mathbf{G}_{1(3)}$, ustanovíme-li p i q konstantní; při takové ${}^1\mathbf{G}_{1(3)}$ jest (vedle rovinných čar, kuželů a přímkových ploch hořejších soustav) invariantních ∞^2 čar prostorových, v nichž se protínají soustavy kuželů a přímkových ploch prve uvedené.

Z kolineací základní grupy typu II. lze obdobně jako u typu I. vybrati opět užší grupy o dvou a jednom parametru. Píšeme-li rovnice kolineace typu II. jednodušeji $\varrho x'_1 = x_1$, $\varrho x'_2 = ax_1 + x_2$, $\varrho x'_3 = k_1 x_3$, $\varrho x'_4 = k_2 x_4$, máme v řadách bodových na O_2O_3 a O_2O_4 grupy projektivností s dvojpoměrem k_1 resp. k_2, na O_2O_1 grupu s konstantou a. Zvolme $k_1 = m^a$, $k_2 = n^a$. Při konstantním m nebo n existuje na rovině ω_4 resp. ω_3 užší grupa kolineací rovinných ${}^2\mathbf{g}_{1(2)}$ s parametrem a, v prostoru tedy užší grupa dvouparametrová ${}^2\mathbf{G}_{2(3)}$ s parametry a, k_2, resp. a, k_1;

k jedné i druhé přísluší ∞^1 invariantních kuželů s vrcholem O_4 resp. O_3. Ustanovíme-li mezi m, n relaci $n = m^p$ s konstantním p, existuje na ω_1 grupa ${}^1\mathfrak{g}_{1(2)}$ s parametrem k_1, v prostoru pak užší grupa ${}^2\mathfrak{G}'_{2(3)}$ s jednomocnými soustavami invariantních čar na rovině ω_1 i kuželů s vrcholem O_2. Při konstantním poměru m/n obdržíme třetí typ užší grupy ${}^2\mathfrak{G}''_{2(3)}$, při níž jsou invariantní přímkové plochy se společnými přímkami O_1O_2 a O_3O_4. Konečně při konstantních m i n rozpadá se ${}^2\mathfrak{G}_3$ ve dvojmocnou soustavu jednoparametrových grup ${}^2\mathfrak{G}_{1(3)}$ s parametrem a.

Kolineace typu III. má rovnice, jež můžeme psáti kratčeji $\varrho x'_1 = x_1$, $\varrho x'_2 = ax_1 + x_2$, $\varrho x'_3 = kx_3$, $\varrho x'_4 = bx_3 + kx_4$; na O_4O_2 existuje grupa projektivností s dvojpoměrem k, na O_2O_1 a O_4O_3 grupy s konstantou a resp. b. Položíme-li $k = m^a$, $b = na$, obdržíme při konstantním m nebo $m^{1/n}$ užší grupy ${}^3\mathfrak{G}_{2(3)}$ s invariantními čarami (na ω_3 resp. ω_1) a kuželi, při konstantním n užší grupu ${}^3\mathfrak{G}'_{2(3)}$ s invariantními ∞^1 plochami kvadratickými o společných přímkách O_1O_2 a O_3O_4, při konstantních m i n užší grupu ${}^3\mathfrak{G}_{1(3)}$ s invariantními útvary zde uvedenými a jejich průseky.

Základní grupa ${}^4\mathfrak{G}_4$ kolineací typu IV. připouští také několik užších grup s menším počtem parametrů; odvodí se z grupy ${}^3\mathfrak{g}_3$ a jejích grup užších na invariantní rovině (ω_4) grupy základní se zřetelem k parametru grupy projektivností na přímce v rovině té neležící (O_3O_4). V základní grupě ${}^5\mathfrak{G}_6$ kolineací typu V. existují v poli na invariantní rovině a v trsu se středem v invariantním bodě dvě grupy ${}^3\mathfrak{g}_3$ s parametry na sobě nezávislými; kombinací grupy ${}^3\mathfrak{g}_3$ a užších grup jejích ${}^3\mathfrak{g}_{2(3)}$, ${}^3\mathfrak{g}_{1(3)}$ v uvedených útvarech dvourozměrných dostaneme řadu grup užších (s 5 až 1 parametrem).

Základní grupa ${}^6\mathfrak{G}_2$ kolineací typu VI. s osami r a s samodružných bodů resp. rovin má dva parametry, dvojpoměry k_1 a k_2, jež jsou také parametry grup ${}^1\mathfrak{g}_2$ na samodružných rovinách jdoucích osou s a v samodružných bodech na ose r; při suposici $k_2 = k_1^p$ a konstantním p existuje v uvedených rovinách a bodech ${}^1\mathfrak{g}_{1(2)}$, v prostoru pak užší grupa ${}^6\mathfrak{G}_{1(2)}$, při níž je na každé rovině dotčené ∞^1 invariantních čar a v každém dotčeném bodě ∞^1 invariantních kuželů.

Základní grupy ${}^7\mathfrak{G}_2$ a ${}^8\mathfrak{G}_2$ lze vedle invariantního útvaru charakterisovati stejně jako grupy ${}^2\mathfrak{g}_2$ na rovinách jdoucích osou s a v bodech na ose r parametry k, a; jako u těchto při $k = m^a$ a m konstantním dostáváme grupy ${}^2\mathfrak{g}_{1(2)}$, tak v prostoru vznikají užší grupy ${}^7\mathfrak{G}_{1(2)}$ a ${}^8\mathfrak{G}_{1(2)}$. U základní grupy ${}^9\mathfrak{G}_3$ jsou na rovinách jdoucích osou s a v bodech na ose r grupy ${}^3\mathfrak{g}_3$; ve shodě s užšími grupami jejich, totiž ${}^3\mathfrak{g}_{2(3)}$ a ${}^3\mathfrak{g}_{1(3)}$, existují v grupě ${}^9\mathfrak{G}_3$ užší grupy ${}^9\mathfrak{G}_{2(3)}$ a ${}^9\mathfrak{G}_{1(3)}$. Grupa ${}^{11}\mathfrak{G}_4$ indukuje v polích rovin, jdoucích invariantní přímkou, grupy ${}^5\mathfrak{g}_2$, obdobně v trsech se středy na této přímce grupy ${}^5\mathfrak{g}_2$, při čemž parametry těchto jsou nezávislé na parametrech oněch; kombinací užších grup jejich dostaneme užší grupy v ${}^{11}\mathfrak{G}_4$ (s 3 až 1 parametrem).

Jako jsme ze základních grup kolineací prostorových sestrojovali

širší grupy, můžeme z mnohých užších grup, jejichž konstrukce zde byla naznačena, tvořiti obdobným způsobem opět grupy širší.[2])[3])

d) U některých užších grup prostorových kolineací a u složených z nich grup širších existuje *invariantní kuželosečka*; aby tomu tak bylo, musí se zajisté taková kuželosečka vyskytovati u grupy kolineací rovinných, jež je prostorové grupě na rovině při ní invariantní podřaděna. Z grup kolineací v rovině mají invariantní kuželosečku grupy kolineací typu I. a III., totiž ${}^1\mathfrak{g}_{1(2)}$ čili ${}^1\mathfrak{g}_1{}^k$ a obsáhlejší grupy z těchto složené ${}^1\mathfrak{g}_2{}^k$ i ${}^1\mathfrak{g}_3{}^k$, jakož i ${}^3\mathfrak{g}_{1(3)}$ čili ${}^3\mathfrak{g}_1{}^k$. Rovinná grupa ${}^1\mathfrak{g}_2$ (k níž je uvedená ${}^1\mathfrak{g}_1{}^k$ grupou užší) jest na invariantní rovině základní grupy prostorových kolineací typů I., II. a VI., grupa ${}^3\mathfrak{g}_3$ (ze které vzniká ${}^3\mathfrak{g}_1{}^k$) jest u typů IV., V. a IX. Můžeme tedy invariantní kuželosečku hledati u grup kolineací v prostoru uvedených šesti typů.

Při grupě kolineací I. typu ${}^1\mathfrak{G}_{2(3)}$ s konstantním p (v relacích mezi parametry k_1, k_2, k_3 grupy té tvaru $k_2 = k_1{}^p$, $k_3 = k_1{}^q$) existuje, jak bylo uvedeno, ∞^1 invariantních čar na rovině $O_1O_2O_4$; pro $p = -1, \frac{1}{2}, 2$ jsou to kuželosečky svazku-řady, jež se dotýkají vždy dvou stran trojúhelníku $O_1O_2O_4$ ve dvou vrcholech jeho, majíce společnou sečnu O_1O_2 resp. O_1O_4 resp. O_2O_4; hořejší grupu označíme v tomto případě ${}^1\mathfrak{G}_2{}^k$, její sub-

[2]) Stanovením spojitých grup kolineací prostorových zabýval se podle své dalekosáhlé analytické teorie grup transformačních, vycházeje od transformací infinitesimálních, *S. Lie:* ve své Theorie der Transformationsgruppen III (1893), p. 224 a n., podal plán vyšetřování a částečně je provedl. Grupy s jedním a dvěma parametry určoval analyticky také *R. Vavasseur*, Les sous-groupes du groupe linéaire homogène à quatre variables; sous-groupes à un et à deux paramètres, Annales Acad. Toulouse (2) 8 (1906) (výtah v Bulletin sc. math. astron. (2) 29, 1905). Počátek elementární teorie těchto grup (pro kolineace typů I. až V. ve 3 článcích) uveřejnil *H. B. Newson*, On the groups and subgroups of real collineations leaving a tetrahedron invariant. A new theory of collineations in space, Quarterly Kansas univ. 10 (1901). Jednoduché geometrické stanovení spojitých grup reálných kolineací prostorových pro všechny typy těchto kolineací (způsobem nahoře uvedeným) obsahuje pojednání *J. Vojtěch*, Typy a kontinuitní grupy kolineací v S_3, Časopis mat. fys. 38 (1909); také grup s invariantními útvary v dalším odvozených. Viz dále *W. Raetz*, Projektive Gruppen des Raumes, ihre Invarianten und geometrische Charakterisierung, Diss. Königsberg 1913.

[3]) Křivky a plochy, invariantní při spojitých grupách kolineací prostorových, určil *S. Lie:* pro grupy s jedním a dvěma parametry v Bestimmung aller Flächen, die eine continuirliche Schaar von projectiven Transformationen gestatten, Berichte Ges. Wiss. Leipzig 47 (1895); pro grupy pak s více parametry v Theorie der Transformationsgruppen III (1893), p. 180 a n. Analyticky stanovil křivky invariantní při grupách jednoparametrových také *G. Pittarelli*, I gruppi continui proiettivi semplicemente infiniti nello spazio ordinario, Annali mat. (2) 22 (1894). Plochy invariantní při spojitých grupách kolineací (obecných typů) vyšetřoval geometricky *F. Enriques*, Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse, Atti Ist. Veneto (7) 4 (1893); jeho výsledky doplnil *G. Fano*, Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse, Rendiconti Accad. L. Roma (5) 4_1 (1895).

grupu ${}^1\mathsf{G}_{1(3)}$ (při konstantním také q) pak ${}^1\mathsf{G}_1{}^k$. Zvolíme-li z uvedených jednu invariantní kuželosečku k za základ, můžeme k ní konstruovati z grup ${}^1\mathsf{G}_2{}^k$ a ${}^1\mathsf{G}_1{}^k$ grupy širší, při nichž se nemění: v rovině $O_1O_2O_4$ předpokládáme totiž grupu ${}^1\mathsf{g}_1{}^k$ nebo ${}^1\mathsf{g}_2{}^k$ nebo ${}^1\mathsf{g}_3{}^k$ a zjišťujeme přípustné polohy vrcholu O_3 samodružného čtyrstěnu kolineací prostorových. Tak nalezneme řadu grup s invariantní kuželosečkou k: na př. při ${}^1\mathsf{g}_1{}^k$ na $O_1O_2O_4$ s invariantními body O_1 a O_2 na k grupy o 3 a 2 parametrech dvou druhů podle toho, je-li samodružnou přímka O_1O_3 nebo O_4O_3, grupy o 4 a 3 parametrech dvou druhů, totiž se samodružnou rovinou $O_1O_3O_4$ nebo $O_1O_2O_3$, grupy o 5 a 4 parametrech bez dalšího prvku samodružného. Nejširší grupou této skupiny jest ${}^1\mathsf{G}_7{}^k$, složená z grup ${}^1\mathsf{G}_2{}^k$, při níž je invariantní pouze kuželosečka k. Podobně lze určiti grupy kolineací s invariantní kuželosečkou také u typů II., IV., V., VI. a IX.[4])

Jednoduše odvodíme grupy kolineací v prostoru, při kterých je *invariantní prostorová čára 3. stupně*. Nalezli jsme, že v základní grupě ${}^1\mathsf{G}_3$ kolineací I. typu je obsažena užší grupa ${}^1\mathsf{G}_{1(3)}$ s parametrem k_1 (při čemž $k_2 = k_1{}^p$ a $k_3 = k_1{}^q$, kde p a q jsou konstantní), jejíž kolineace nemění dvě soustavy ∞^1 kuželů se společnými vrcholy ve vrcholech čtyrstěnu $O_1O_2O_3O_4$; kužele těchto svazků jsou kvadratické se společnou přímkou v hraně O_1O_2 a protínají se (mimo O_1O_2) v soustavě ∞^2 invariantních prostorových čar kubických, jdoucích vrcholy O_1 a O_2, jestliže $p = -2$, $q = -1$ nebo $p = -\frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$. Vyšetříme-li všechny možné případy, kdy invariantní kužele grupy ${}^1\mathsf{G}_{1(3)}$ jsou stupně 2., shledáme, že existuje 12 soustav po ∞^2 prostorových čar kubických, z nichž každá je složena z křivek, invariantních při ${}^1\mathsf{G}_{1(3)}$ s určitými hodnotami konstant p a q: mimo dvě soustavy hořejší ještě dvě jdoucí vrcholy O_1 a O_3 pro $p = -1$, $q = -2$ a $p = \frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$; dvě jdoucí vrcholy O_1 a O_4 pro $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$ a $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$; dvě u vrcholů O_2 a O_3 pro p, q s hodnotami 2, -1 a -1, 2; dvě u vrcholů O_2 a O_4 pro p, q hodnot 3, 2 a $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$; dvě u vrcholů O_3 a O_4 pro p, q hodnot 2, 3 a $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$. K týmž výsledkům přijdeme, vytvořujíce prostorovou kubiku třemi projektivními svazky rovin s osami ve třech souvisících hranách invariantního čtyrstěnu.

Prostorová čára 3. stupně c, která je invariantní při některé z uvedených grup ${}^1\mathsf{G}_{1(3)}$, třebas při první, obsahuje (podle svého vzniku) dva vrcholy O_1 a O_2 invariantního čtyrstěnu, má dvě hrany jeho O_1O_4 a O_2O_3 za tečny i dvě stěny $O_1O_4O_3$ a $O_2O_3O_4$ za roviny oskulační; tuto grupu označme ${}^1\mathsf{G}_1{}^c$. Širší grupy, z grup ${}^1\mathsf{G}_1{}^c$ složené, obdržíme z grup projektivností dvou soumístných řad bodových na invariantní křivce c: při ${}^1\mathsf{G}_1{}^c$ je totiž na c jednoparametrová grupa projektivností typu [00]; suponujeme-li tam však grupu projektivností [00] s dvěma nebo třemi parametry, obdržíme v prostoru grupu ${}^1\mathsf{G}_2{}^c$ s invariantním jedním bodem na c (třebas O_1, s invariantní tečnou O_1O_4 a oskulační rovinou $O_1O_4O_3$), resp. ${}^1\mathsf{G}_3{}^c$ bez invariantního bodu na c. Protože projektivnost

[4]) Spojité grupy kolineací s invariantní kuželosečkou vyšetřil *S. Lie*, Theorie der Transformationsgruppen III, p. 210 a n.

na c může býti také typu [(00)] a příslušná kolineace v prostoru je typu V., přísluší k jednoparametrové grupě uvedených projektivností na c grupa ${}^5\mathbf{G}_1^c$ (subgrupa grupy ${}^5\mathbf{G}_6$). Celkem je prostorová čára 3. stupně invariantní jenom při 4 druzích spojitých grup kolineačních.

Pozoruhodné jsou grupy prostorových kolineací s *invariantní plochou 2. stupně*. Jak bylo uvedeno, mají dva druhy užších grup základní grupy ${}^1\mathbf{G}_3$ kolineací typu I., totiž ${}^1\mathbf{G}'_{2(3)}$ a ${}^1\mathbf{G}_{1(3)}$ soustavu invariantních ploch přímkových, vytvořených spojnicemi sdružených bodů na dvou mimoběžných hranách čtyrstěnu $O_1O_2O_3O_4$; jestliže hodnota výrazu $(1-p)/q$ nebo $(1-q)/p$ nebo $p-q$ jest 1 nebo -1, jsou plochy tyto 2. stupně. Pro parametry k_1, k_2 a k_3 uvažovaných kolineací objeví se tu jedna ze tří relací $k_1 = k_2k_3$ nebo $k_2 = k_1k_3$ nebo $k_3 = k_1k_2$; v prvním případě obsahují invariantní plochy kvadratické čtyrstran $O_1O_2O_4O_3$, v druhém $O_1O_2O_3O_4$, v třetím $O_1O_3O_2O_4$.

Plocha kvadratická (pravá) $\varkappa$, invariantní při některé z uvedených grup o dvou nebo jednom parametru, jež označíme ${}^1\mathbf{G}_2^\varkappa$ a ${}^1\mathbf{G}_1^\varkappa$, má tedy při kolineacích těchto grup invariantní dvě přímky a_1, a_2 jedné soustavy a dvě přímky b_1, b_2 druhé soustavy svých přímek. Odtud vycházejíce, odvodíme z grup ${}^1\mathbf{G}_2^\varkappa$ a ${}^1\mathbf{G}_1^\varkappa$ několik širších grup s invariantní plochou $\varkappa$: zůstanou-li invariantními přímky a_1, a_2, b_1 nebo přímky a_1, b_1, vzniknou z ${}^1\mathbf{G}_2^\varkappa$ širší grupy o 3 a 4 parametrech, z ${}^1\mathbf{G}_1^\varkappa$ pak širší grupy o 2 a 3 parametrech; při invariantních přímkách a_1, a_2 nebo přímce a_1 vzniknou z ${}^1\mathbf{G}_2^\varkappa$ širší grupy o 4 a 5 parametrech (z grupy ${}^1\mathbf{G}_1^\varkappa$ však nevzniknou grupy širší); konečně nejširší grupou s invariantní plochou $\varkappa$, z grup ${}^1\mathbf{G}_2^\varkappa$ složenou, jest ${}^1\mathbf{G}_6^\varkappa$.

Z obecných typů kolineací v prostoru obdržíme kolineace s invariantní plochou kvadratickou ještě u typů VI. a X. Neboť zvolíme-li při hořejších relacích na př. $q = 0$, dostaneme $p = 1$ nebo $p = -1$: kolineace I. typu přejde v druhém případě v kolineaci typu VI. s osou samodružných bodů O_3O_4, v případě prvním v kolineaci typu X. s osami O_3O_4 a O_1O_2. Grupa ${}^1\mathbf{G}_1^\varkappa$ přejde v grupu ${}^6\mathbf{G}_1^\varkappa$, subgrupu grupy ${}^6\mathbf{G}_2$ pro $p = -1$; z této ${}^6\mathbf{G}_1^\varkappa$ plynou pak dvěma způsoby širší grupy o 2 a 3 parametrech. Grupa ${}^{10}\mathbf{G}_1^\varkappa$ (t. j. základní ${}^{10}\mathbf{G}_1$), při níž vycházíme od určité z ∞^3 kvadratických ploch při ní invariantních, skládá dvě grupy širší o 2 a 3 parametrech tím způsobem, že z os r a s na invariantní ploše ležících jedna zůstává invariantní a druhá se mění v přímkové řadě plochy resp. obě osy nabývají rozmanitých poloh na ploše.

Konečně jest plocha kvadratická invariantní při kolineacích typu III., IX. a XI. Plocha 2. stupně, invariantní při užších grupách grupy ${}^3\mathbf{G}_3$, totiž při ${}^3\mathbf{G}_{1(3)}$ a ${}^3\mathbf{G}_{2(3)}$, jež lze tedy označiti ${}^3\mathbf{G}_1^\varkappa$ a ${}^3\mathbf{G}_2^\varkappa$, při čemž samodružné přímky kolineace té (O_2O_1 a O_4O_3, jakož i O_2O_4) jsou přímkami plochy $\varkappa$, jest invariantní také při dvou grupách o 2 a 3 parametrech, složených z oné resp. této (suponujeme-li jako invariantní z uvedených přímek dvě se protínající), a při jedné o 4 parametrech, složené z ${}^3\mathbf{G}_2^\varkappa$ (s invariantní přímkou O_2O_4). Při grupě ${}^9\mathbf{G}_{1(3)}$ je invariantní soustava

∞^3 ploch 2. stupně se společnou tečnou rovinou rs, v níž jsou přímky r a s harmonicky sdruženy vzhledem k přímkám plochy; z této grupy ${}^{9}\mathfrak{G}_1^{\times}$ lze při určité invariantní ploše kvadratické odvoditi grupu o 2 parametrech, jejíž jednoparametrové složky mají přímky r a s ve svazku paprskovém roviny i středu rs. Grupu kolineací typu XI., při jejíchž kolineacích existuje ∞^3 invariantních ploch kvadratických, totiž ${}^{11}\mathfrak{G}_{1(4)}$ čili ${}^{11}\mathfrak{G}_1^{\times}$ nelze rozšířiti.

Celkem je tedy plocha 2. stupně invariantní při spojitých grupách prostorových kolineací 25 druhů.[5])[6])

---

[5]) Spojité grupy kolineací s invariantní plochou 2. stupně nalezl *S. Lie*, Theorie der Transformationsgruppen III, p. 198 a n., 252 a n. Viz také *H. B. Brewster*, On collineations of space which leave invariant a quadric surface, Bulletin Kansas univ. (2) 1 (1902).

[6]) Při některých (konečných nebo spojitých) grupách kolineací prostorových jest invariantní ještě důležitý útvar geometrie přímkové, lineární komplex přímek (dále uvedený).

X. KORELACE ZÁKLADNÍCH ÚTVARŮ TROJMOCNÝCH.

113. Korelace a její stanovení. *a*) Projektivnost dvou prostorových soustav, vyplněných body a rovinami (dvou prostorů), byla charakterisována jako korespondence obapolně jednoznačná, v níž incidentním prvkům jedné soustavy odpovídají v druhé soustavě prvky opět incidentní. Jestliže jeden z obou základních útvarů 3. řádu pokládáme za složený z elementů téhož druhu (jen z bodů nebo z rovin) a rovněž tak útvar druhý, definujeme projektivnost dvou útvarů takových podmínkami, že každému prvku jednoho i druhého útvaru trojmocného odpovídá jediný prvek druhého resp. prvního a že prvkům, tvořícím základní útvar dvojmocný v jednom, korespondují prvky, tvořící v druhém opět základní útvar dvojmocný. Podle toho pak, jsou-li prvky v daných dvou soustavách prostorových téhož druhu nebo druhu různého, jest nutno rozeznávati dvojí projektivnost základních útvarů trojmocných, kolineaci a korelaci.

Korelace (reciprocita) *dvou prostorů Σ a Σ' jest korespondence, v níž každému bodu X a každé rovině ξ v Σ odpovídá jediná rovina ξ' resp. jediný bod X' v Σ' i obráceně rovině a bodu v Σ' odpovídá jediný bod resp. jediná rovina v Σ, a v níž prvkům vyplňujícím dvojmocný útvar základní jednoho prostoru korespondují prvky vyplňující dvojmocný útvar základní prostoru druhého.*

Bodům ležícím na rovině ξ i na rovině η v prostoru Σ odpovídají roviny společné trsu X' a trsu Y' prostoru Σ', tedy řadě bodové na přímce $x = \xi\eta$ odpovídá svazek rovin jdoucích přímkou $x' = X'Y'$; duálně svazku rovin s osou x odpovídá řada bodů na ose x'. Vyplývá tudíž z korespondence mezi body a rovinami daných prostorů korespondence jejich přímek.

Obráceně jestliže mezi body prostoru Σ a rovinami prostoru Σ' existuje korespondence obapolně jednoznačná, v níž bodům přímky x odpovídají roviny svazku s osou x', jest tato korespondence korelací; neboť bodu X a řadě bodů na přímce x, nejdoucí bodem X, v Σ odpovídá v Σ' rovina ξ' resp. svazek rovin s osou x', neležící v ξ', bodům

každé přímky y, jdoucí bodem X a jedním bodem řady x, odpovídají roviny svazku s osou y', ležící v ξ' a v jedné rovině svazku x'; odpovídají tedy všechny body roviny Xx rovinám trsu se středem v bodě $\xi' x'$. Spolu je patrno, že svazku přímek v rovině Xx odpovídá svazek přímek v trsu $\xi' x'$.

Jsou tedy dva korelativní útvary základní 3. řádu vedle obapolné jednoznačnosti své korespondence charakterisovány tím, že *prvkům základního útvaru jednomocného v jednom odpovídají v druhém prvky duálního jednomocného útvaru základního.*

Z obapolně jednoznačné příbuznosti mezi body a rovinami dvou korelativních prostorů, jakož i mezi řadami bodů a svazky rovin jejich vyplývá pak, že také sdružené jejich útvary dvojmocné jsou korelativní; jednomocné útvary v těchto obsažené jsou tudíž projektivní. Platí tedy:

V korelaci dvou základních útvarů trojmocných jsou kterékoli dva sdružené základní útvary dvojmocné (pole a trs) *korelativní a kterékoli dva sdružené základní útvary jednomocné* (řada bodová a svazek rovinový, dva svazky paprskové) *jsou projektivní.*

Tyto korelace útvarů 2. řádu a projektivnosti útvarů 1. řádu jsou, jak pravíme, danou korelací útvarů 3. řádu indukovány.

b) Korelace dvou prostorů Σ a Σ' jest (jednoznačně) *určena, jestliže dvěma* (rovinným) *polím prvého přiřadíme dva korelativní trsy druhého,* poli σ_1 korelativní trs S'_1 a poli σ_2 korelativní trs S'_2, *tak aby společné řadě bodové oněch odpovídal touže projektivností společný svazek rovinový těchto,* řadě s osou $\sigma_1\sigma_2$ projektivní svazek s osou $S'_1S'_2$. Nebo ovšem duálně.

Neboť každé rovině π v Σ (mimo svazek s osou $\sigma_1\sigma_2$) odpovídá za uvedené suposice jediný bod P' v Σ'; průsečnicím p_1 a p_2 roviny π s rovinami σ_1 a σ_2 korespondují totiž danou první resp. druhou korelací útvarů dvojmocných dvě přímky p'_1 v S'_1 a p'_2 v S'_2, jež se protínají v bodě P', protože leží v rovině svazku $S'_1S'_2$, korespondující předpokládanou jedinou projektivností průsečíku p_1p_2 na přímce $\sigma_1\sigma_2$. Pro každý bod v Σ na σ_1 nebo σ_2 (nebo na obou) jest korespondující rovina prostoru Σ' v S'_1 nebo S'_2 (nebo v $S'_1S'_2$) dána; každému bodu P obecně v Σ položenému odpovídá v Σ' jediná rovina π', určená třemi body P'_1, P'_2 a P'_3, jež odpovídají podle předešlého třem rovinám π_1 resp. π_2 resp. π_3, jdoucím libovolně bodem P (nikoli však touže přímkou). Body P'_k, nemohouce ležeti v téže přímce, stanoví rovinu π'; tato rovina π' nezávisí, jak je třeba, na volbě rovin π_k, protože roviny σ_1 a σ_2 protínajíce trs o středu P stávají se tím perspektivními, k nim korelativní trsy S'_1 a S'_2 jsou pak také perspektivní a mají tedy určitou rovinu perspektivnosti π'. Konečně rovině π jdoucí přímkou $\sigma_1\sigma_2$ (prve vyloučené) odpovídá jediný bod ležící na $S'_1S'_2$; stačí zvoliti na π kterýkoli bod (mimo $\sigma_1\sigma_2$), určiti jemu korespondující rovinu a její průsečík s přímkou $S'_1S'_2$ (poloha tohoto průsečíku nezávisí na volbě bodu v rovině π, protože libovolným

dvěma bodům, jejichž spojnice leží v rovině svazku $\sigma_1\sigma_2$, korespondují dvě roviny, jejichž průsečnice protíná $S'_1S'_2$; neboť každé přímce, protínající σ_1 a σ_2 v různých bodech a neprotínající tedy $\sigma_1\sigma_2$, koresponduje přímka neprotínající $S'_1S'_2$). Je tedy patrno, že korelace uvedeným způsobem stanovená jest možna a jediná.

Krátce nalezneme také přímku p' v Σ', odpovídající přímce p v Σ: jestliže p neprotíná přímky $\sigma_1\sigma_2$, jest p' průsečnicí dvou rovin, jež danými korelacemi korespondují v S'_1 a S'_2 průsečíkům přímky p s rovinami σ_1 a σ_2; protíná-li p přímku $\sigma_1\sigma_2$, určíme v Σ' dva body P'_1 a P'_2, korespondující dvěma různým rovinám π_1 a π_2, položeným v Σ přímkou p, jest pak $P'_1P'_2 = p'$.

c) *Korelace dvou prostorů jest určena, jestliže pěti bodům jednoho,* z nichž žádné čtyři neleží v téže rovině, *přiřadíme pět rovin druhého,* z nichž žádné čtyři neprocházejí týmž bodem.

Neboť přiřadíme-li bodům A, B, C, D a E v Σ po řadě roviny $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ a ε' v Σ', odpovídá (třebas) poli v rovině ABC trs se středem $\alpha'\beta'\gamma'$ korelací, stanovenou čtyřmi dvojicemi A a α', B a β', C a γ', $M = (ABC, DE)$ a $\mu' = (\alpha'\beta'\gamma', \delta'\varepsilon')$, dále odpovídá (třebas) poli v rovině ABD trs se středem $\alpha'\beta'\delta'$ korelací, danou čtyřmi dvojicemi A a α', B a β', D a δ', $N = (ABD, CE)$ a $\nu' = (\alpha'\beta'\delta', \gamma'\varepsilon')$, (při čemž mezi řadou bodů na AB a svazkem rovin s osou $\alpha'\beta'$ indukují obě tyto korelace tutéž projektivnost, určenou třemi dvojicemi A a α', B a β', $R = (AB, CDE)$ a $\varrho' = (\alpha'\beta', \gamma'\delta'\varepsilon')$.

Uvedené stanovení korelace dvou prostorů pěti dvojicemi elementů sdružených v obecné poloze jest možno převésti na předcházející stanovení dvěma dvojicemi korelativních útvarů dvojmocných s touže indukovanou projektivností ve společné dvojici útvarů jednomocných také tímto způsobem: Trsům $A\,(B, C, D, E)$ a $B\,(A, C, D, E)$ jsou přiřaděna korelativní pole $\alpha'\,(\beta', \gamma', \delta', \varepsilon')$ resp. $\beta'\,(\alpha', \gamma', \delta', \varepsilon')$, při tom pak svazku rovin $AB\,(C, D, E)$ řada bodů $\alpha'\beta'\,(\gamma', \delta', \varepsilon')$ touže projektivností, oběma korelacemi indukovanou (k témuž cíli lze ovšem zvoliti i trsy se středy v jiných bodech daných a pole v rovinách sdružených).

Je patrno, že jeden z pěti bodů prvého prostoru Σ může býti nahrazen rovinou a k němu příslušná rovina druhého prostoru Σ' bodem; nahradíme-li totiž bod E rovinou ε a rovinu ε' bodem E', změní se hořejší první stanovení dvou korelací jen v tom, že obě korelace tam uvedené jsou určeny třemi z daných čtyř dvojic bodů v Σ a rovin v Σ', čtvrtou pak dvojicí přímek (ABC, ε) a $(\alpha'\beta'\gamma', E')$, resp. přímek (ABD, ε) a $(\alpha'\beta'\delta', E')$, jimi indukovaná projektivnost mezi řadou na AB a svazkem osy $\alpha'\beta'$ je určena dvojicemi A a α', B a β', (AB, ε) a $(\alpha'\beta', E')$.[1])

[1]) Korelace dvou prostorů Σ a Σ' jest také určena, jestliže třem řadám bodovým, jejichž osy procházejí jedním bodem, přiřadíme projektivně tři svazky rovin, jichž osy leží v jedné rovině, a to tak, aby ve všech daných projektivnostech společnému bodu oněch os odpovídala společná rovina

V korelaci dvou prostorů Σ a Σ', stanovené pěti dvojicemi bodů A, B, C, D, E a rovin $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'$, *sestrojíme* k libovolnému bodu P korespondující rovinu π' třebas tím, že k paprskům AP a BP (trsu A resp. B) sestrojíme sdružené paprsky v rovině α' resp. β' a rovinu jimi procházející; protože paprsky AP a BP leží v rovině svazku AB, protínají se paprsky jim odpovídající v bodě na $\alpha'\beta'$ a určují tedy rovinu π'. Leží-li bod P na některé rovině jdoucí třemi body danými, jest ovšem konstrukce sdružené roviny bezprostřední (z korelace útvarů dvojmocných). K libovolné rovině π obecně položené sestrojíme sdružený bod P' třebas tím, že k průsečnicím jejím p_1 s rovinou ABC a p_2 s rovinou ABD sestrojíme sdružené přímky v trsu $\alpha'\beta'\gamma'$ resp. v trsu $\alpha'\beta'\delta'$ a jejich průsečík; protože přímky p_1 a p_2 se protínají na AB, leží přímky jim odpovídající v rovině svazku $\alpha'\beta'$ a protínají se tedy v bodě P'. Při speciální poloze roviny π (ve svazku AB nebo v trsu se středem v bodě daném) jest konstrukce ovšem jednodušší. K libovolné přímce p v Σ sestrojíme přímku sdruženou p' v Σ' buď na základě dvou korelací mezi trsy (třebas A, B) v Σ a rovinami (α', β') v Σ' nebo pomocí dvou korelací mezi rovinami (třebas ABC, ABD) v Σ a trsy $(\alpha'\beta'\gamma', \alpha'\beta'\delta')$ v Σ'.[2])

d) Majíce na zřeteli definici korelativní korespondence mezi dvěma prostory, seznáváme, že dva prostory korelativní k třetímu jsou navzájem kolineární; neboť každému bodu a každé rovině prvého prostoru odpovídá v třetím jediná rovina resp. jediný bod, této rovině resp. tomuto bodu v třetím pak odpovídá jediný bod resp. jediná rovina prostoru druhého; rovněž obráceně; mimo to incidentním prvkům odpovídají ve všech uvažovaných prostorech prvky incidentní.

Zpravidla béřeme v úvahu dva prostory jako útvary soumístné; každý prvek i útvar prostoru si tu představujeme dvojmo. Vzhledem ke stanovení korelace pěti dvojicemi sdružených bodů a rovin jest korelací prostorových (stejně jako kolineací) možno ∞^{15}. Kdežto však dvě kolineace mají produktem opět kolineaci, vyplývá ze dvou transformací korelativních, postupně na prostor aplikovaných, kolineace; produktem pak kolineace a korelace jest korelace. A obecně produktem

těchto os. Nebo také jestliže poli σ v Σ přiřadíme korelativní trs S' v Σ', mimo to dvěma bodům A a B (mimo σ) v Σ dvě roviny α' a β' (mimo S') v Σ', a to tak, aby v dané korelaci bodu (σ, AB) odpovídala rovina $(S', \alpha'\beta')$. Oba tyto způsoby, jimiž lze korelaci dvou prostorů stanoviti, lze totiž převésti na způsoby hořejší.

[2]) Podobně jako v korelativních rovinách bývá nazýván v korelaci dvou prostorů každý prvek incidentní s prvkem, jenž koresponduje prvku danému, *konjugovaným* (sdruženým) k tomuto; odpovídá-li tedy v korelaci bodu X rovina ξ' a rovině ξ bod X', slují k bodu X konjugovanými body a přímky roviny ξ', k rovině ξ konjugovanými roviny a přímky trsu se středem X'; odpovídá-li v korelaci přímce p přímka p', slují k přímce p konjugovanými body v řadě a roviny ve svazku s osou p', jakož i přímky p' protínající. Protože incidentním prvkům odpovídají v korelaci prvky incidentní, jest konjugovanost prvků v korelaci dvou prostorů vzájemná, t. j. je-li jeden prvek konjugován k druhému, jest i tento druhý konjugován k onomu prvému.

libovolného počtu kolineací a korelací jest kolineace nebo korelace podle toho, je-li použitých korelací počet sudý resp. lichý. Tvoří tedy *všechny korelace prostoru spolu se všemi kolineacemi obecnou grupu projektivností prostorových.*[3])

V korelaci prostorové odpovídají prvkům prvky duální, základním útvarům základní útvary duální: *korelací lze uskutečniti dualnost prostoru.*[4])[5])[6])

[3]) Její subgrupou je grupa prostorových kolineací.

[4]) Protože každá z ∞^{15} korelací dvou prostorů jest určena pěti dvojicemi sdružených bodů a rovin, platí pro korelaci jedna daná dvojice taková za podmínku trojnásobnou. Dvojice konjugovaných bodů nebo dvojice konjugovaných rovin tvoří pro korelaci, je-li v ní dána, podmínku jednoduchou (protože je možno ∞^2 voleb roviny daným bodem resp. bodu v dané rovině, abychom měli hořejší dvojici bodu a roviny sdružených). Obdobně zjistíme, že daná dvojice bodu a přímky nebo roviny a přímky konjugovaných jest pro korelaci podmínkou dvojnásobnou, dvojice konjugovaných přímek konečně podmínkou čtyrnásobnou.

[5]) Synthetickou teorii korelací prostorových podali *H. Schröter*, Untersuchung zusammenfallender reciproker Gebilde in der Ebene und im Raume, Journal r. a. Math. 77 (1874), a *D. Montesano*, Su la corrispondenza reciproca fra due sistemi dello spazio, 1885. *R. Sturm*, Über die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften, Math. Annalen 19 (1882), vyšetřuje také kubickou příbuznost mezi dvěma prostory, jež vzniká ze tří korelací jejich (v níž totiž bodu odpovídá průsečík tří rovin k němu tam sdružených). Souborně o korelaci prostoru pojednává *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III. Viz dále *St. Jolles*, Die Bestimmung der Inzidenzen in zwei korrelativen Räumen vermöge der windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz, Math. Zeitschrift 16 (1923).

[6]) *Zvrhlé* korelace dvou prostorů Σ a Σ' (jež se pohodlněji sledují než kolineace zvrhlé) jsou především tři (jednoduše zvrhlé): korelace se singulárními body S a S', jež jsou středy dvou korelativních trsů: odpovídá zde libovolné rovině každého z obou prostorů singulární bod druhého, rovině jdoucí singulárním bodem každý bod přímky, sdružené k této rovině v uvedené korelaci mezi trsy S a S'; korelace se singulárními rovinami σ a σ', jež obsahují dvě korelativní pole: je duální k předcházející; korelace se singulárními přímkami s a s', jež jsou osami projektivních řad bodových i svazků rovinových: bodu odpovídá rovina, sdružená v dané projektivnosti mezi svazky s a s' k rovině spojující bod ten se singulární přímkou, rovině odpovídá bod, sdružený v dané projektivnosti mezi řadami s a s' k průsečíku roviny té s přímkou singulární. K tomu přistupují tři korelace dvojnásob zvrhlé: korelace se singulárními bodem S a přímkou incidentní s v Σ, rovněž S' a s' v Σ', při čemž s a s' jsou osami projektivních svazků rovin: rovině každého z obou prostorů odpovídá singulární bod druhého nebo každý bod na singulární přímce nebo každý bod na rovině, sdružené v uvedené projektivnosti mezi svazky s a s' k oné rovině, podle toho, leží-li rovina ona mimo singulární bod, resp. jde-li singulárním bodem a nejde-li singulární přímkou, resp. jde-li singulární přímkou; korelace se singulárními rovinou σ a přímkou incidentní s v Σ, rovněž σ' a s' v Σ', při čemž s a s' jsou osami projektivních řad bodů: je duální k předešlé; korelace se singulárními bodem S a rovinou incidentní σ v Σ, rovněž S' a σ' v Σ', jež jsou nosiči projektivních svazků paprskových: libovolné rovině odpovídá singulární bod, rovině jdoucí přímkou svazku se singulárním středem v singulární rovině odpovídá každý bod na přímce, sdružené k přímce oné danou

e) Sledujme útvary (vytvořené body, přímkami, rovinami), jež sobě v korelaci dvou prostorů odpovídají.

Čára prostorová jest vytvořena svými body nebo svými tečnami nebo svými rovinami oskulačními; tečna čáry v bodě jejím X, spojnice bodu toho s bodem jemu na čáře nekonečně blízkým, protíná tečnu nekonečně blízkou v bodě čáry, určujíc s tečnou tou oskulační rovinu čáry; oskulační rovina čáry v bodě X, spojující tečnu v bodě X s bodem čáry tomuto nekonečně blízkým nebo spojující bod X s dvěma body na čáře jemu nekonečně blízkými, protíná nekonečně blízkou oskulační rovinu v tečně čáry, dvě nekonečně blízké roviny oskulační protíná v bodě čáry. Čáře prostorové k jako jednomocné soustavě bodů v prostoru Σ odpovídá v korelativním prostoru Σ' prostorová čára k', vytvořená jednomocnou soustavou svých rovin oskulačních; bodu X čáry k odpovídá oskulační rovina ξ' čáry k', tečně čáry k v bodě X odpovídá tečna čáry k' v rovině ξ' (průsečnice této s oskulační rovinou nekonečně blízkou), oskulační rovině čáry k v bodě X odpovídá dotyčný bod oskulační roviny ξ' čáry k' (průsečík této roviny s dvěma oskulačními rovinami nekonečně blízkými). Každé rovině v prostoru, protínající čáru k v n bodech, odpovídá bod, z něhož lze vésti n oskulačních rovin k čáře k', každému bodu v prostoru, jenž vysílá k čáře k ν oskulačních rovin, odpovídá rovina protínající čáru k' v ν bodech. *Koresponduje* tedy *v korelaci čáře prostorové jako bodovému útvaru n-tého stupně ν-té třídy čára jako útvar rovinový n-té třídy ν-tého stupně.* A protože tečně prostorové čáry k, jež protíná libovolnou přímku v prostoru, odpovídá tečna čáry k', protínající přímku k oné sdruženou, *nemění se v korelaci řád čáry prostorové.*

Soustava tečen čáry prostorové tvoří jednomocnou soustavu přímek, *plochu rozvinutelnou* (dvě nekonečně blízké přímky její se protínají, ležíce v oskulační rovině čáry). Jednomocná soustava přímek, jejíž nekonečně blízké přímky jsou mimoběžné, tvoří plochu nerozvinutelnou čili *zborcenou*. Rozvinutelné soustavě přímek v prostoru Σ odpovídá korelací opět rozvinutelná soustava přímková v Σ', přímkové soustavě zborcené odpovídá korelací zborcená soustava přímek.

---

projektivností mezi svazky, a duálně. Konečně korelace trojnásob zvrhlá se singulárními bodem S, přímkou s a rovinou σ incidentními v Σ, rovněž S', s' a σ' v Σ': rovině každého z obou prostorů odpovídá singulární bod nebo každý bod singulární přímky nebo každý bod singulární roviny nebo každý bod prostoru podle toho, jestliže rovina ta leží mimo singulární bod, resp. jde singulárním bodem nikoli však singulární přímkou, resp. jde singulární přímkou nejsouc singulární rovinou, resp. je singulární rovinou (a duálně). Viz *T. A. Hirst*, On the correlation in space, Proceedings Math. soc. London 6 (1875), a On the correlation of two spaces each of three dimensions, tamtéž 21 (1890); *P. Visalli*, Sulle correlazioni in due spazi a tre dimensioni, Memorie Accad. L. Roma (4) 3 (1886); *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, p. 422 a n. V souvislosti s tím vyšetřuje se na uv. místech také počet korelací, jež vyhovují daným podmínkám (což je otázka t. zv. geometrie numerativní).

Plocha jest vytvořena buď svými body nebo svými rovinami tečnými. Ve dvou korelativních prostorech Σ a Σ' odpovídá každému bodu X plochy π tečná rovina ξ' plochy π', tečné rovině plochy π pak bod na ploše π'. Každé přímce protínající π v n bodech odpovídá přímka, kterou prochází k ploše π' n rovin tečných, přímce vysílající k ploše π ν rovin tečných odpovídá přímka, protínající plochu π' v ν bodech. *Koresponduje* tedy *v korelaci dvou prostorů ploše n-tého stupně v-té třídy plocha n-té třídy v-tého stupně.*

114. Analytické vyjádření korelace. *a*) Analyticky jest korelace dvou prostorů vyjádřena lineární transformací souřadnic libovolného bodu jednoho prostoru v souřadnice sdružené roviny prostoru druhého (nebo naopak).

Korelace převádějící bod (x_k) *prostoru* Σ *v rovinu* (u'_k) *prostoru* Σ' *jest vyjádřena rovnicemi*

$$\begin{aligned}
\varrho u'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,\\
\varrho u'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,\\
\varrho u'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,\\
\varrho u'_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4;
\end{aligned}$$

obráceně značí lineární transformace daná těmito rovnicemi korelaci prostorů Σ *a* Σ'.

Můžeme totiž zjistiti, že existuje systém koeficientů a_{hk} v rovnicích uvedeného tvaru, vložíme-li do nich podmínky, aby pět základních bodů soustavy souřadnic v prostoru Σ (čtyři vrcholy základního čtyrstěnu a bod jednotkový) přešlo v pět libovolných rovin obecně zvolených v prostoru Σ'; tím však, že pěti bodům prostoru Σ v obecné poloze (do nichž vložíme základní body soustavy souřadnic) přiřadíme pět obecně položených rovin v Σ', lze určiti každou korelaci prostorů Σ a Σ'. Jest tudíž každá korelace vyjádřena rovnicemi hořejšími. Pro větu obrácenou zjistíme obapolnou jednoznačnost transformace mezi body a rovinami tak vyjádřené a incidenci prvků sdružených; při tom dostaneme tři další systémy rovnic transformačních (jeden pro převod rovin v Σ do bodů v Σ', dvě pro inversní transformaci prostoru Σ' v prostor Σ).

Řešíme-li totiž rovnice hořejší podle x_k, nalezneme

$$\begin{aligned}
\sigma x_1 &= A_{11}u'_1 + A_{21}u'_2 + A_{31}u'_3 + A_{41}u'_4,\\
\sigma x_2 &= A_{12}u'_1 + A_{22}u'_2 + A_{32}u'_3 + A_{42}u'_4,\\
\sigma x_3 &= A_{13}u'_1 + A_{23}u'_2 + A_{33}u'_3 + A_{43}u'_4,\\
\sigma x_4 &= A_{14}u'_1 + A_{24}u'_2 + A_{34}u'_3 + A_{44}u'_4,
\end{aligned}$$

ovšem *za suposice, že determinant z koeficientů* a_{hk}, totiž determinant

$$A \equiv (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44})$$

není roven nule; koeficienty A_{hk} této jednoznačné transformace inversní jsou subdeterminanty 3. stupně, příslušné v determinantu A k prvkům a_{hk}.

Protože transformace daná má body rovinného pole v jednom prostoru převáděti v roviny korespondujícího trsu v prostoru druhém, transformují hodnoty pro x_k, vloženy do rovnice roviny (při proměnných x_k)

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0,$$

tuto v rovnici odpovídajícího bodu (při proměnných u'_k)

$$x'_1u'_1 + x'_2u'_2 + x'_3u'_3 + x'_4u'_4 = 0;$$

vskutku vychází rovnice

$$(A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 + A_{14}u_4)\,u'_1 + (A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 + A_{24}u_4)\,u'_2 +$$
$$+ (A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3 + A_{34}u_4)\,u'_3 + (A_{41}u_1 + A_{42}u_2 + A_{43}u_3 + A_{44}u_4)\,u'_4 = 0,$$

z níž tedy srovnáním s předcházející rovnicí vyčteme transformační rovnice roviny (u_k) prostoru Σ v bod (x'_k) prostoru Σ':

$$\begin{aligned}
\mu x'_1 &= A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 + A_{14}u_4,\\
\mu x'_2 &= A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 + A_{24}u_4,\\
\mu x'_3 &= A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3 + A_{34}u_4,\\
\mu x'_4 &= A_{41}u_1 + A_{42}u_2 + A_{43}u_3 + A_{44}u_4.
\end{aligned}$$

Konečně řešením této třetí soustavy rovnic podle u_k nebo dosazením první soustavy rovnic pro u'_k do rovnice bodu $\Sigma x'_k u'_k = 0$, jemuž koresponduje rovina $\Sigma u_k x_k = 0$, obdržíme čtvrtý systém rovnic transformačních

$$\begin{aligned}
\nu u_1 &= a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + a_{31}x'_3 + a_{41}x'_4,\\
\nu u_2 &= a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{32}x'_3 + a_{12}x'_4,\\
\nu u_3 &= a_{13}x'_1 + a_{23}x'_2 + a_{33}x'_3 + a_{43}x'_4,\\
\nu u_4 &= a_{14}x'_1 + a_{24}x'_2 + a_{34}x'_3 + a_{44}x'_4.
\end{aligned}$$

b) Zvolíme-li speciálně základní body soustavy souřadnic prostoru Σ a základní roviny soustavy souřadnic korelativního prostoru Σ' v prvcích, jež sobě v dané korelaci odpovídají (tak totiž, že vrcholu O_k základního čtyrstěnu a bodu jednotkovému T odpovídá stěna základního čtyrstěnu ω'_k a jednotková rovina τ'), jest korelace tato vyjádřena rovnicemi

$$\varrho u'_k = x_k \text{ nebo } \mu x'_k = u_k.$$

Korelaci v obecném případě, vyjádřené nahoře (prvním) systémem lineárních rovnic, lze dáti ještě poněkud jiný výraz analytický. Protože bod (x_k) v Σ přechází v rovinu (u'_k) v Σ', jejíž rovnice jest

$$u'_1x'_1 + u'_2x'_2 + u'_3x'_3 + u'_4x'_4 = 0,$$

platí mezi bodovými souřadnicemi obou prostorů Σ a Σ' rovnice, vyplývající z rovnice právě uvedené dosazením výrazů pro u'_k, totiž rovnice

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)\,x'_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4)\,x'_2 +$$
$$+ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4)\,x'_3 + (a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4)\,x'_4 = 0.$$

Tato obecná *bilineární forma kvaternární*, položená rovnou nule, vyjadřuje uvažovanou korelaci. Totéž činí obdobná bilineární forma

pro čtyři dvojice proměnných souřadnic rovinových (u_k a u'_k), plynoucí ze třetího systému transformačních rovnic hořejších,

$$(A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 + A_{14}u_4)\,u'_1 + (A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 + A_{24}u_4)\,u'_2 + \\ + (A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3 + A_{34}u_4)\,u'_3 + \\ + (A_{41}u_1 + A_{42}u_2 + A_{43}u_3 + A_{44}u_4)\,u'_4 = 0.^{1})^{2})^{3})^{4})$$

115. Vlastnosti korelace v prostoru. *a*) V korelaci dvou soumístných prostorů (v *korelaci prostorové*) vyšetříme nejprve sdružené body a roviny incidentní.

Jestliže bod X prostoru Σ leží na korespondující rovině ξ' soumístného prostoru Σ', leží bod ten $X = Y'$ jako element prostoru druhého také na korespondující rovině η prostoru prvního, protože incidentním prvkům ξ' a Y' musí odpovídati prvky X a η opět incidentní; a duálně. Platí tedy: Bod ležící na jedné ze dvou rovin, jež mu

---

[1]) Kdežto kolineaci lze definovati rovnicí pro bilineární formu s proměnnými kontragredientními (viz pozn. [2]) čl. 100), obsahuje rovnice korelace bilineární formu s proměnnými kogredientními.

[2]) V souřadnicích nehomogenních jest korelace prostorů Σ a Σ' vydřena rovnicemi, které z uvedených obdržíme, vložíce tam $\frac{x_1}{x_4} = x$, $\frac{x_2}{x_4} = y$, $\frac{x_3}{x_4} = z$ a $\frac{u_1}{u_4} = u$, $\frac{u_2}{u_4} = v$ a $\frac{u_3}{u_4} = w$, obdobně pro souřadnice bodů a rovin v prostoru Σ'.

Korelace, transformující bod (x, y, z) prostoru Σ v rovinu (u', v', w') prostoru Σ', jest tedy dána rovnicemi

$$u' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}},$$
$$v' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}},$$
$$w' = \frac{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}},$$

kde determinant $A \neq 0$; pro převod roviny (u, v, w) v bod (x', y', z') platí pak rovnice

$$x' = \frac{A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w + A_{14}}{A_{41}u + A_{42}v + A_{43}w + A_{44}},$$
$$y' = \frac{A_{21}u + A_{22}v + A_{23}w + A_{24}}{A_{41}u + A_{42}v + A_{43}w + A_{44}},$$
$$z' = \frac{A_{31}u + A_{32}v + A_{33}w + A_{34}}{A_{41}u + A_{42}v + A_{43}w + A_{44}}.$$

Podobné rovnice platí pro transformaci inversní (prostoru Σ' v prostor Σ).

[3]) Pro analytickou úvahu o korelaci dvou prostorů lze uvésti na př. *G. Battaglini*, Sulle forme quaternarie bilineari, Atti Accad. Lincei Roma (3) 6 (1882); *L. Heffter*, Lehrbuch der analytischen Geometrie II, p. 119 a n.; *A. Comessatti*, Lezioni di geometria analitica e proiettiva II, p. 319 a n.

[4]) O korelaci (a antikorelaci) prostorů s prvky komplexními platí obdobně totéž, nač bylo upozorněno v pozn. [4]) čl. 56, v pozn. [1]) čl. 97 a v pozn. [4]) i [6]) čl. 100.

ve dvou inversních korelacích odpovídají, leží také na druhé; rovina procházející jedním ze dvou bodů, jež jí ve dvou inversních korelacích odpovídají, prochází také druhým.

Bodům libovolné přímky v Σ odpovídají roviny korespondujícího svazku v Σ', jež onu přímku protínají v druhé řadě bodů; obě tyto řady bodové jsou projektivní a mají obecně dva body samodružné, body ležící ve sdružených rovinách. Odtud vysvítá, že *body incidentní s rovinami v dané korelaci k nim sdruženými vytvořují plochu 2. stupně* $\varkappa$; duálně *roviny incidentní s body v korelaci k nim sdruženými vytvořují plochu 2. třídy* $\varkappa'$. Tyto dvě plochy kvadratické slují *základními* nebo *incidenčními plochami* korelace prostorové.[1])

Kterýmkoli bodem plochy $\varkappa$ jdoucí (tečné) roviny plochy $\varkappa'$ tvoří kužel 2. třídy, jenž obsahuje také obě roviny s bodem tím sdružené. Kterákoli (tečná) rovina plochy $\varkappa'$ protíná plochu $\varkappa$ v čáře 2. stupně, obsahující také oba body s ní sdružené.

Obě incidenční kvadratické plochy dané korelace $\varkappa$ a $\varkappa'$ odpovídají sobě v této korelaci i v korelaci inversní, t. j. *jsou involučně sdruženy.*[2])

b) *Daná korelace prostorová indukuje v každé rovině prostoru korelaci rovinnou, v každém bodě korelaci obou soumístných trsů jeho.* Neboť kterémukoli bodu X roviny ϱ odpovídá danou korelací rovina ξ', jež ϱ protíná v přímce x', v inversní korelaci prostorové odpovídá pak svazku rovin s osou x' řada bodová na přímce x jdoucí bodem X; jsou tudíž bod X a přímka x' prvky odpovídající sobě v soumístných polích na rovině ϱ (každý odpovídá průseku sdruženého prvku korelace prostorové s rovinou ϱ). Bodům X řady na přímce y v rovině ϱ odpovídají v dané korelaci roviny svazku s osou y', tedy v rovinném poli na ϱ přímky svazku paprsků, v němž onen svazek rovin rovinu ϱ protíná,

---

[1]) Rovnice těchto incidenčních ploch korelace prostorové, vyjádřené rovnicemi $\varrho u'_h = \Sigma a_{hk} x_k$, jsou

$$\Sigma a_{hk} x_h x_k = 0 \text{ a } \Sigma A_{hk} u_h u_k = 0 \text{ (kde } h, k = 1 \text{ až } 4).$$

[2]) K incidenčním plochám prostorové korelace (z nichž jednu vytvořuje bod incidentní s rovinou jemu odpovídající a druhou duálně rovina incidentní s bodem jí korespondujícím) lze připojiti ještě *soustavu přímek, z nichž každá protíná přímku v dané korelaci sdruženou* (každá je incidentní s přímkou korespondující); tyto přímky tvoří *kvadratický komplex přímek.* Předně je patrno, že přímka x, protínající přímku x' v korelaci k ní sdruženou, protíná také jako přímka y' přímku y, sdruženou k ní v korelaci inversní; neboť předpokládanému bodu $x'y'$ odpovídá rovina xy (takže y musí protínati x). Trojmocná soustava přímek incidentních s oběma sdruženými (jež patří také k soustavě té) je kvadratická, protože v libovolném bodě a spolu v libovolné rovině (tedy v libovolném svazku paprskovém) má dvě přímky své; neboť dva svazky přímek v dané korelaci sdružené (při čemž středu a rovině jednoho odpovídá rovina resp. střed druhého) a tedy spolu projektivní mají dvě dvojice sdružených přímek, které se protínají. Uvedený komplex přímek přechází při uvažované korelaci v sebe sama. Projektivnost konjugovaných bodů na každé přímce tohoto komplexu (duálně projektivnost konjugovaných rovin ve svazku s osou v takové přímce) jest zvrhlá.

se středem v průsečíku Y' přímky y' s rovinou ϱ, při čemž osa y řady bodové a střed Y' svazku paprskového jsou prvky sobě na rovině ϱ odpovídající. Existuje tudíž na libovolné rovině uvažovaného prostoru korelace mezi jejími prvky a průseky prvků, s těmito v dané korelaci prostorové sdružených; duálně jest tomu v libovolném trsu prostoru s korelací danou. V tom se liší korelace dvou soumístných prostorů od jejich kolineace, protože v této existují indukované kolineace rovinné pouze v rovinách samodružných a duální kolineace v samodružných trsech.

Základní kuželosečky (složené z prvků, incidentních s prvky sdruženými) v indukované korelaci každé roviny ϱ obdržíme z incidenčních ploch kvadratických $\varkappa$ a $\varkappa'$ dané korelace v prostoru: průsek roviny ϱ s plochou $\varkappa$ jest incidenční kuželosečkou bodovou, incidenční kuželosečkou přímkovou jest pak průsek roviny ϱ s kuželem 2. třídy tečných rovin plochy $\varkappa'$, jehož vrcholem jest bod, odpovídající v dané (nebo inversní) korelaci rovině ϱ. Význam prvního průseku v rovině ϱ jest patrný. Pro povahu průseku druhého všimněme si, že každá tečná rovina uvedené plochy kuželové, jsouc tečnou rovinou plochy $\varkappa'$, obsahuje oba své sdružené body a, procházejíc bodem sdruženým k rovině ϱ, má jeden z obou bodů těch na ϱ; tímto bodem jako jedním ze svých sdružených jde tedy průsečnice oné tečné roviny na ϱ, proto jde i druhým takovým bodem a jest tečnou základní kuželosečky přímkové v korelaci na ϱ (spolu je průsečnicí tečné roviny druhého kužele s vrcholem v bodě, jenž odpovídá rovině ϱ v korelaci inversní). Duálně v indukované korelaci dvou soumístných trsů se středem v každém bodě P dostaneme incidenční plochy kuželové ze základních ploch $\varkappa$ a $\varkappa'$: základní kuželová plocha 2. třídy je vytvořena tečnými rovinami z bodu P jdoucími ku $\varkappa'$, základní kuželová plocha 2. stupně je určena průsekem roviny, odpovídající v dané (nebo inversní) korelaci bodu P, s plochou $\varkappa$.

c) *Ke každé korelaci prostorové jest možno přidružiti kolineaci, v níž sobě odpovídají dva body, korespondující v dané korelaci a v korelaci inversní téže rovině*; v ní odpovídají sobě také dvě roviny korespondující témuž bodu a dvě přímky korespondující téže přímce v obou vytčených korelacích. Neboť každému bodu X v Σ odpovídá v dané korelaci jediná rovina ξ' v Σ', této rovině čítané do prvého prostoru jako rovině η odpovídá touže korelací v prostoru druhém jediný bod Y'; bodům X vytvořujícím přímku odpovídají roviny ξ' svazku a těmto jako rovinám η v Σ body Y' přímky v Σ'; bodům vytvořujícím v Σ rovinu odpovídají danou korelací roviny trsu v Σ', těmto pak jako rovinám v Σ touže korelací opět body roviny v Σ'.

Jest patrno, že kolineace přidružená k dané korelaci vzniká dvojí aplikací této korelace; označíme-li tedy korelaci danou $\mathfrak{K}$, jest kolineace k ní přidružená jejím čtvercem $\mathfrak{K}^2$.

Každý z obou prvků i útvarů, jež sobě v dané korelaci odpovídají involučně, jest v přidružené kolineaci prvkem a útvarem samodružným.

Obě kvadratické základní plochy korelace, plocha 2. stupně $\varkappa$ a plocha 2. třídy $\varkappa'$, jsou tedy v kolineaci přidružené plochami samodružnými.

Obráceně ke každému samodružnému prvku kolineace přísluší v korelaci, k níž dotčená kolineace jest přidružena, prvek v kolineaci té rovněž samodružný, jenž onomu odpovídá v korelaci obapolně. Protože obecná kolineace má samodružnými vrcholy, hrany a stěny čtyrstěnu, odpovídají sobě tyto prvky v korelaci, jejímž čtvercem je zmíněná kolineace, involučně.[3])

d) Čtyrstěn složený z prvků, jež sobě v dané korelaci odpovídají obapolně, vyšetříme analyticky.

Obě prostorové soustavy Σ a Σ', jejichž korelací $\mathbf{K}$ se budeme zabývati, ať jsou vztahovány k téže soustavě souřadnic. Korelace $\mathbf{K}$ převádí bod (x_k) v rovinu (u'_k) rovnicemi

$$\varrho u'_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + a_{k4}x_4;$$

korelace $\mathbf{K}^{-1}$ převádí bod (x_k) v rovinu (u'_k), o jejíž souřadnicích platí

$$\nu u'_k = a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + a_{3k}x_3 + a_{4k}x_4$$

(prostor označený prve Σ a prostor Σ' označen v této druhé korelaci Σ' resp. Σ). Aby bod (x_k) a rovina (u'_k) sobě v korelaci $\mathbf{K}$ odpovídaly obapolně, musí býti roviny o souřadnicích

$$(a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + a_{k4}x_4) \quad \text{a} \quad (a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + a_{3k}x_3 + a_{4k}x_4)$$

identické. Platí tedy pro souřadnice bodu (x_k) každé involuční dvojice bodu a roviny v dané korelaci rovnice

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= \varrho\,(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4),\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= \varrho\,(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4),\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= \varrho\,(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4),\\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= \varrho\,(a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4)
\end{aligned}$$

[3]) *Čtyrstěnový* (*kvadratický*) *komplex přímek*, uvedený u kolineace s invariantním čtyrstěnem, *jest* u kolineace, přidružené k dané korelaci, *složen z přímek, jež spojují vždy dva body sdružené k téže rovině* (v korelaci dané a inversní) a *v nichž se* zároveň *protínají vždy dvě roviny sdružené k témuž bodu*; obě přímky sdružené k přímce komplexu toho protínají se v dotčeném bodě a leží ve zmíněné rovině.

Jestliže bodu $X = Y'$ odpovídá v korelaci dané a v korelaci inversní rovina ξ' resp. η, jest přímka $\xi'\eta$ přímkou uvedeného komplexu čtyrstěnového. Přímky svazku se středem $X = Y'$ v rovině jdoucí přímkou $\xi'\eta$ obsahují involuční projektivnosti bodů v korelaci konjugovaných (protože v každé této projektivnosti sobě odpovídají bod $X = Y'$ a bod na $\xi'\eta$ obapolně), a jiné přímky této vlastnosti uvedeným bodem neprocházejí. *Tvoří* tedy *přímky obsahující involuci bodů v korelaci dvojnásob konjugovaných* trojmocnou soustavu 1. stupně (protože v libovolné rovině jde libovolným bodem jedna přímka soustavy) čili *lineární komplex přímek*; duálně *existuje u korelace druhý lineární komplex přímek, jež jsou osami involuce rovin dvojnásob konjugovaných.*

čili rovnice

$$(a_{11} - \varrho a_{11})\, x_1 + (a_{12} - \varrho a_{21})\, x_2 + (a_{13} - \varrho a_{31})\, x_3 + (a_{14} - \varrho a_{41})\, x_4 = 0,$$
$$(a_{21} - \varrho a_{12})\, x_1 + (a_{22} - \varrho a_{22})\, x_2 + (a_{23} - \varrho a_{32})\, x_3 + (a_{24} - \varrho a_{42})\, x_4 = 0,$$
$$(a_{31} - \varrho a_{13})\, x_1 + (a_{32} - \varrho a_{23})\, x_2 + (a_{33} - \varrho a_{33})\, x_3 + (a_{34} - \varrho a_{43})\, x_4 = 0,$$
$$(a_{41} - \varrho a_{14})\, x_1 + (a_{42} - \varrho a_{24})\, x_2 + (a_{43} - \varrho a_{34})\, x_3 + (a_{44} - \varrho a_{44})\, x_4 = 0.$$

Tyto čtyři rovnice pro x_k mají (nenulové) řešení tehdy a pouze tehdy, je-li nule roven determinant 4. stupně z jejich koeficientů, t. j. musí platit

$$R(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho a_{11} & a_{12} - \varrho a_{21} & a_{13} - \varrho a_{31} & a_{14} - \varrho a_{41} \\ a_{21} - \varrho a_{12} & a_{22} - \varrho a_{22} & a_{23} - \varrho a_{32} & a_{24} - \varrho a_{42} \\ a_{31} - \varrho a_{13} & a_{32} - \varrho a_{23} & a_{33} - \varrho a_{33} & a_{34} - \varrho a_{43} \\ a_{41} - \varrho a_{14} & \varrho_{42} - \varrho a_{24} & a_{43} - \varrho a_{34} & a_{44} - \varrho a_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Každý kořen této rovnice pro ϱ, vložen do hořejších rovnic pro x_k, dovoluje určiti souřadnice bodu, jenž rovině v dané korelaci s ním sdružené odpovídá obapolně. Protože rovnice $R(\varrho) = 0$ jest 4. stupně, *existují v korelaci* **K** *čtyři body a čtyři roviny, jež sobě involučně odpovídají.*

Každý ze čtyř bodů takto zjištěných, jenž rovině s ním sdružené odpovídá obapolně, *leží ve své sdružené rovině.* Abychom to dokázali, všimněme si, že pro bod (x_k) neležící v rovině jemu korespondující (u'_k) platí

$$u'_1 x_1 + u'_2 x_2 + u'_3 x_3 + u'_4 x_4 \neq 0;$$

tento výraz mějž hodnotu n, takže pro bod (x_k), mimo sdruženou rovinu (u'_k) položený, platí

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)\, x_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4)\, x_2 +$$
$$+ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4)\, x_3 + (a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4)\, x_4 = n,$$

a pouze pro bod (x_k), ležící v rovině sdružené, jest $n = 0$. Pro body, jež odpovídají v korelaci svým rovinám sdruženým involučně, jest však

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + a_{k4}x_4 = \varrho\,(a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + a_{3k}x_3 + a_{4k}x_4),$$

kde ϱ jest ovšem kořenem rovnice $R = 0$; rovnice právě uvedená mění se pro tyto body v rovnici

$$(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4)\, x_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4)\, x_2 +$$
$$+ (a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4)\, x_3 + (a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4)\, x_4 = \frac{n}{\varrho}.$$

Pro bod (x_k), příslušný ke kořenu ϱ rovnice $R = 0$, jsou levé strany obou posledních rovnic totožny (lišíce se jen uspořádáním); platí tedy pro takový bod

$$n = \frac{n}{\varrho} \text{ čili } n\,(\varrho - 1) = 0.$$

Jest tedy buď $\varrho = 1$ nebo $n = 0$; avšak $\varrho \neq 1$, protože determinant R nemůže pro $\varrho = 1$ býti roven nule, jak podle předpokladu býti musí (R byl by t. zv. šikmo souměrný determinant: prvky v úhlopříčce jeho

byly by 0, 0, 0, 0, ostatní prvky k úhlopříčce souměrně položené lišily by se pouze znaménkem). Zbývá tedy jenom možnost druhá $n = 0$, což značí, že bod (x_k), příslušný k některému kořenu rovnice $R = 0$, leží v rovině jemu odpovídající.

Čtyři body korelace **K**, odpovídající involučně svým rovinám sdruženým, označme na chvíli A_k, roviny jim odpovídající α_k (takže bodu A_1 odpovídá rovina α_1, bodu A_2 rovina α_2 atd.). Průsečík tří rovin $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ odpovídá rovině $A_1A_2A_3$ a, protože v ní musí ležeti, jest totožný s některým ze tří bodů A_1, A_2, A_3; bod $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$ odpovídající rovině $A_1A_2A_4$ jest buď A_1 nebo A_2 nebo A_4 atd. Tvoří tedy body A_k a roviny α_k jeden a týž čtyrstěn. Tento čtyrstěn, složený z bodů a rovin odpovídajících sobě v korelaci obapolně, liší se od obdobného trojúhelníku při korelaci rovinné tím, že každý jeho vrchol je incidentní se sdruženou rovinou (kdežto u korelace rovinné jsou jen dva vrcholy trojúhelníku incidentní se sdruženými přímkami, třetí vrchol leží proti své sdružené přímce).

Pro jednoduchou a určitou představu položme základní čtyrstěn soustavy souřadnic s vrcholy O_k a protějšími rovinami $x_k = 0$ do čtyrstěnu korelace prostorové, složeného z bodů a rovin involučně sdružených. A zvolme za rovinu odpovídající vrcholu O_1 rovinu $x_3 = 0$, vrcholu O_2 ať odpovídá rovina $x_4 = 0$, vrcholu O_3 rovina $x_1 = 0$, vrcholu O_4 konečně rovina $x_2 = 0$. Hrany $O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4, O_4O_1$ jsou pak v dané korelaci samodružnými; každá z nich je osou řady bodové a svazku rovinového, jež sobě v dané korelaci odpovídají (nikoli ovšem obapolně, až na dvě dvojice bodů a rovin). Zbývající dvě hrany čtyrstěnu O_1O_3 a O_2O_4 odpovídají si v korelaci dané involučně; dva vrcholy čtyrstěnu na jedné z těchto dvou přímek nebo dva a dva vrcholy na obou přímkách těch (reálných) mohou býti imaginární (konjugované).

Při uvedené speciální volbě základního čtyrstěnu soustavy souřadnic jest korelace **K** vyjádřena rovnicemi

$$\varrho u'_1 = a_{13}x_3, \qquad \varrho u'_2 = a_{24}x_4, \qquad \varrho u'_3 = a_{31}x_1, \qquad \varrho u'_4 = a_{42}x_2,$$

jak nalezneme dosazením souřadnic pro hořejší dvojice sobě odpovídající do obecných rovnic transformace korelativní.[4])[5])

[4]) Další vlastnosti prostorové korelace (zejména se zřetelem k incidenčním plochám jejím) vyšetřuje zvl. *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, p. 160 a n.

[5]) Korelaci, jež jednu z daných dvou ploch kvadratických převádí v druhou, lze stanoviti duálně ke kolineaci obdobné vlastnosti, jak bylo uvedeno v čl. 108*b*. Jako kolineace jest také korelace s invariantní plochou kvadratickou dvojího druhu podle toho, transformuje-li každou z obou zborcených řad na ploše v tutéž řadu nebo jednu v druhou. Každá korelace jest korelací s invariantní kvadrikou 1. druhu (nikoli však 2. druhu): každá korelace transformuje prvním způsobem dvě kvadratické plochy v ně samy a navzájem zaměňuje vždy dvě kvadriky jednomocné soustavy (svazku-řady se základním čtyrstranem) ploch, stanovené dvěma incidenčními plochami korelace té a obsahující ony dvě kvadriky invariantní. O korelacích s invariantní plochou kvadratickou, jakož i o korelacích, při nichž je invariantní

116. Involuční korelace prostorové, polárná a nulová. *a*) Zvláštní pozornosti zasluhují korelace, při nichž s každým prvkem prostoru jest prvek jemu odpovídající sdružen obapolně (v korelaci $\mathbf{K}$ i v korelaci inversní $\mathbf{K}^{-1}$), t. j. *korelace involuční;* kolineace k involuční korelaci přidružená jest identická ($\mathbf{K}^2 = \mathbf{1}$).

Abychom involuční korelace nalezli analyticky, vyjděme od čtyř rovnic, uvedených prve pro souřadnice x_k bodu, odpovídajícího rovině v korelaci s ním sdružené obapolně, totiž od rovnic

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \varrho a_{11})\, x_1 + (a_{12} - \varrho a_{21})\, x_2 + (a_{13} - \varrho a_{31})\, x_3 + (a_{14} - \varrho a_{41})\, x_4 &= 0,\\
(a_{21} - \varrho a_{12})\, x_1 + (a_{22} - \varrho a_{22})\, x_2 + (a_{23} - \varrho a_{32})\, x_3 + (a_{24} - \varrho a_{42})\, x_4 &= 0,\\
(a_{31} - \varrho a_{13})\, x_1 + (a_{32} - \varrho a_{23})\, x_2 + (a_{33} - \varrho a_{33})\, x_3 + (a_{34} - \varrho a_{43})\, x_4 &= 0,\\
(a_{41} - \varrho a_{14})\, x_1 + (a_{42} - \varrho a_{24})\, x_2 + (a_{43} - \varrho a_{34})\, x_3 + (a_{44} - \varrho a_{44})\, x_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Tyto rovnice pro x_k musí u involuční korelace býti splněny identicky (pro každé x_1, x_2, x_3, x_4); obráceně platí-li identicky, odpovídají body jednoho prostoru rovinám druhého soumístného vesměs involučně. Jest tedy nutnou a dostačující podmínkou pro involuční korelaci platnost relací

$$a_{hk} - \varrho a_{kh} = 0 \text{ pro } h, k = 1, 2, 3, 4.$$

Z těchto rovnic 4 se týkají koeficientů se stejnými oběma indexy, 12 pak platí pro koeficienty s různými dvěma indexy: nejsou-li všechny koeficienty a_{hh} rovny nule, vychází odtud $\varrho = 1$; jsou-li všechny a_{hh} nulové, musí aspoň některé koeficienty a_{hk} ($h \neq k$) býti od nuly různé, tehdy pak násobme za suposice, že třebas $a_{12} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$, rovnici $a_{12} = \varrho a_{21}$ rovnicí $a_{21} = \varrho a_{12}$, čímž dostáváme $\varrho^2 = 1$ čili $\varrho = \pm 1$.

Případ první, kdy $\varrho = +1$, vede k involuční korelaci s rovnicemi, o jejichž součinitelích platí

$$a_{kh} = a_{hk};$$

tato korelace sluje *polárnou* a jest tedy vyjádřena rovnicemi

$$\begin{aligned}
\varrho u'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,\\
\varrho u'_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,\\
\varrho u'_3 &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,\\
\varrho u'_4 &= a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4.
\end{aligned}$$

Případ druhý, kdy $\varrho = -1$, dává involuční korelaci, jejíž rovnice mají součinitele, o kterých platí

$$a_{kh} = -a_{hk} \text{ a ovšem } a_{hh} = 0;$$

sluje korelací *nulovou* a jest tedy vyjádřena rovnicemi

$$\begin{aligned}
\varrho u'_1 &= \phantom{-a_{11}x_1} + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,\\
\varrho u'_2 &= -a_{12}x_1 \phantom{- a_{22}x_2} + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,\\
\varrho u'_3 &= -a_{13}x_1 - a_{23}x_2 \phantom{- a_{33}x_3} + a_{34}x_4,\\
\varrho u'_4 &= -a_{14}x_1 - a_{24}x_2 - a_{34}x_3.
\end{aligned}$$

prostorová kubika, pojednává zejména *R. Sturm*, Über Collineationen und Correlationen, welche Flächen zweiten Grades oder kubische Raumcurven in sich selbst transformiren, Math. Annalen 26 (1886), a Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, p. 212 a n., 235 a n.

Že tyto dvě involuční korelace, ke kterým jsme dospěli, jsou podstatně různé, poznáme na rovnici vyjadřující incidenci bodu (x_k) a korespondující roviny (u'_k); rovnice ta

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)\,x_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4)\,x_2 + \\ + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4)\,x_3 + (a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4)\,x_4 = 0$$

jest při polárné korelaci splněna jenom pro některé body, kdežto v korelaci nulové jest splněna identicky, jak se přesvědčíme dosazením podmínečných relací pro koeficienty této transformace.

Existují tedy *dvě různé korelace involuční v prostoru*: korelace polárná, jejíž sdružené body a roviny nejsou všechny incidentní, a korelace nulová, jejíž sdružené prvky jsou vesměs incidentní.

b) Polárná korelace v prostoru čili *prostorová polárnost* jest korespondence obdobných vlastností jako polárnost rovinná; každý bod prostoru tvoří tu s korespondující rovinou dvojici elementů obapolně sdružených, jež slují *pól* a *polárná rovina* (k sobě příslušné). O těchto prvcích platí především jako o elementech v korelaci sobě odpovídajících: Leží-li bod B v polárné rovině α bodu A, prochází jeho polárná rovina β oním bodem A; a obráceně. Vytvořuje-li bod X rovinné pole η, vytvořuje jeho polárná rovina ξ trs Y korelativní s oním polem, jehož střed Y jest pólem roviny η. Vytvořuje-li bod X řadu bodovou x, vytvořuje jeho polárná rovina ξ svazek rovinový projektivní s onou řadou, jehož osa x' je v polárnosti sdružena s osou x; přímky x, x' slují sdružené *póláry*.

Korelace dvou soumístných prostorů je polárností, *jakmile* zde *existuje čtyrstěn, jehož každému vrcholu odpovídá protější stěna jeho.* Dejme tomu totiž, že vrcholům A, B, C, D čtyrstěnu odpovídají po řadě protější stěny $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ (jako roviny prostoru druhého). Bodu A čítanému do druhého prostoru jako průsečíku rovin β', γ' a δ' odpovídá (v inversní korelaci) rovina jdoucí body B, C a D, totožná s rovinou α' čítanou do prostoru prvého; odpovídají tedy sobě vrcholy a protější stěny daného čtyrstěnu obapolně. Také kterékoli dvě protější hrany čtyrstěnu $ABCD$ odpovídají si obapolně a jsou osami jednomocných útvarů obapolně sdružených: na př. hraně AB jako spojnici bodů A a B koresponduje obapolně hrana CD jako průsečnice rovin α' a β', nadto řada bodová na AB je projektivní se svazkem rovinovým osy CD a prvky obou útvarů odpovídají sobě obapolně, protože to platí o dvojici A, α' (řada bodů na AB a řada průsečíků rovin k nim sdružených s AB jsou projektivní a to involučně, protože A a B jsou zde involučně sdruženy); duálně svazku rovin s osou AB, průsečnicí rovin γ' a δ', odpovídá obapolně řada bodová na CD, spojnici bodů C a D. Libovolnému bodu X v prostoru odpovídá rovina ξ'; položíme-li bodem X a třemi hranami daného čtyrstěnu, jež leží v téže stěně jeho, tři roviny, vidíme podle předešlého, že rovinám těm odpovídají obapolně tři body ležící na protějších hranách, jdoucích týmž vrcholem čtyrstěnu, a že rovina

jimi určená ξ' je obapolně sdružena s bodem X. Jest tudíž korelace obsahující čtyrstěn, jehož vrcholům korespondují protější stěny jeho, korelací involuční a ovšem polárností.

Obráceně obsahuje polárnost prostorová čili involuční korelace, jejíž sdružené prvky nejsou vesměs incidentní, neomezené množství čtyrstěnů, jejichž vrcholy a protější stěny jsou sdruženy jako pól a polárná rovina. Stačí zvoliti v prostoru bod A, k němuž přísluší rovina polárná α, v rovině α zvolíme bod B, k němuž přísluší rovina polárná β jdoucí bodem A, na průsečnici $\alpha\beta$ zvolíme bod C, k němuž přísluší rovina polárná γ jdoucí spojnicí AB; průsečík $\alpha\beta\gamma = D$ má v rovině ABC rovinu polárnou. Každý vrchol a protější stěna čtyrstěnu $ABCD$ jsou v dané polárnosti pólem a polárnou rovinou; protější hrany čtyrstěnu toho jsou sdružené poláry. Takový čtyrstěn sluje proto *autopolárný čtyrstěn* korelace polárné; z jeho sestrojení plyne, že v dané korelaci polárné existuje ∞^6 čtyrstěnů autopolárných.[1])

c) Druhý případ involuční korelace, *korelace nulová*, jest korespondence, při níž *každý bod prostoru leží v rovině jemu obapolně odpovídající*. V korelaci takové existují (jednoduché) pětiúhelníky, jejichž každý vrchol koresponduje rovině, jím a oběma sousedními vrcholy procházející. Jestliže totiž přiřadíme libovolnému bodu A_1 rovinu jím jdoucí α_1, bodu A_2 v α_1 ležícímu rovinu α_2, jež musí procházeti body A_1 a A_2, bodu A_3 v α_2 zvolenému rovinu α_3 procházející ovšem body A_2 a A_3, bodu A_4 v α_3 rovinu α_4 vedenou body A_3 a A_4, konečně bodu A_5 ležícímu na průsečnici $\alpha_4\alpha_1$ rovinu α_5 určenou body A_4, A_5 a A_1, vznikne pětiúhelník uvedené vlastnosti.

Avšak pěti dvojicemi, složenými z bodů a rovin sobě odpovídajících, jest stanovena korelace prostorová. A tu platí: *Korelace určená prostorovým pětiúhelníkem tak, že každému vrcholu jeho odpovídá rovina jdoucí tímto bodem a oběma vrcholy sousedními, jest korelace nulová.* Dejme tomu totiž, že v korelaci dvou prostorů soumístných Σ a Σ' koresponduje vrcholu pětiúhelníku A_k (v Σ) rovina $\alpha_k = A_jA_kA_l$ (v Σ'), kde $k = 1, 2, 3, 4, 5$ a j, k, l jsou tři sousední čísla z cyklu 1 až 5. Nejprve můžeme zjistiti, že vrcholy a roviny uvedené si odpovídají obapolně: na př. rovině $A_5A_1A_2$, jež podle volby koresponduje v Σ' vrcholu A_1 prostoru Σ, počítané do Σ, odpovídá v Σ' průsečík $\alpha_5\alpha_1\alpha_2$, t. j. bod A_1; atd. Jestliže pak, vycházejíce od pěti udaných dvojic sdružených prvků v prostorech Σ a Σ', hledáme k libovolnému bodu v Σ korespondující rovinu v Σ' nebo k témuž bodu, čítanému do prostoru Σ', korespondující rovinu v Σ, dospějeme k téže rovině, protože právě základní dvojice si odpovídají obapolně; jest tudíž korelace tak definovaná korelací involuční. A dále seznáme, že sdružené body a roviny jsou

[1]) Jiná kriteria polárné korelace (na př. prostorová korelace je polárností, jestliže v ní čtyři mimoběžné přímky, neležící v téže zborcené řadě kvadratické, po dvou sobě obapolně odpovídají) uvádí *St. Jolles*, Einfache Kennzeichen polarer Korrelationen, Math. Zeitschrift 8 (1920).

vesměs incidentní: Každá strana uvedeného pětiúhelníku odpovídá sobě samé (na př. straně A_1A_2 odpovídá průsečnice $\alpha_1\alpha_2$, t. j. průsečnice rovin $A_5A_1A_2$ a $A_1A_2A_3$ čili A_1A_2); svazek paprsků o středu A_k v rovině α_k jest projektivní k sobě samému a, maje tři paprsky samodružné, jest složen z paprsků vesměs samodružných (na př. svazek středu A_1 v α_1 má samodružné paprsky A_1A_5, A_1A_2 a paprsek spojující A_1 s průsečíkem roviny α_1 a přímky A_3A_4); jest tedy každý bod na některé z rovin α_k incidentní se svou sdruženou rovinou, poněvadž leží na samodružné přímce a prochází jím proto sdružená rovina jeho. Existuje tudíž na každé přímce v prostoru projektivnost mezi jejími body a průsečíky s rovinami k nim v dané korelaci sdruženými, jež má pět bodů samodružných (průsečíky totiž přímky té s rovinami α_k); tedy projektivnost identická. Proto jest každý bod (každé přímky v) prostoru incidentní s rovinou k němu v korelaci sdruženou.[2])[3])

Pětiúhelníků jest v prostoru ∞^{15}; ∞^{10} z nich určuje tutéž korelaci nulovou, protože jest možno v ní voliti bod A_1 ∞^3 způsoby, každý z bodů A_2, A_3, A_4 ∞^2 způsoby (na rovině korespondující bodu předcházejícímu) a bod A_5 ∞^1 způsoby (na přímce $\alpha_4\alpha_1$). Existuje tudíž ∞^5 nulových korelací v prostoru, jak ostatně poznáváme také z počtu voleb rovin α_k (α_1 na ∞^2 způsobů, α_2, α_3 a α_4 na ∞^1 způsobů).[4])

Čtyři body A, B, C, D a jim odpovídající roviny $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tvoří v nulové korelaci dva čtyrstěny, z nichž každý je druhému opsán (a spolu vepsán). Jest totiž čtyrstěn $\alpha\beta\gamma\delta$ opsán čtyrstěnu $ABCD$, protože rovina α jde vrcholem A atd.; čtyrstěn $ABCD$ je opsán čtyrstěnu $\alpha\beta\gamma\delta$, protože rovina odpovídající bodu $\beta\gamma\delta$ prochází body B, C, D a leží tedy bod $\beta\gamma\delta$ v rovině BCD atd.[5])

Poznali jsme dva druhy involuční korelace, polárnou a nulovou. Předpoklad, že v involuční korelaci jsou neincidentní dvojice bodů a rovin sobě odpovídajících, vede ke čtyrstěnům autopolárným, které charakterisují korelaci polárnou. Předpoklad pak, že všechny dvojice bodů a rovin v involuční korelaci sobě korespondujících jsou incidentní, dává korelaci nulovou, kterou lze charakterisovati i určiti prostorovým

[2]) První zmínku o nulové korelaci učinil, jak bylo zjištěno, *Giorgini* (1827), vyšetřoval ji pak *Möbius* (1833), od něhož pochází název nulový systém; jméno nulová korelace zvolil *Reye*.

[3]) Kdežto u obecné korelace existují dvě (různé) kvadratické plochy incidenční $\varkappa$ a $\varkappa'$ (vytvořené body incidentními s korespondujícími rovinami, resp. rovinami incidentními s korespondujícími body), není takových ploch u korelace nulové, protože zde každý bod a rovina sdružené jsou incidentní.

[4]) Pěti body v prostoru (jež s přímkami a rovinami je spojujícími dávají úplný prostorový pětiroh) určeno jest dvanáct jednoduchých prostorových pětirohů (pětiúhelníků) a tedy dvanáct nulových korelací; o těchto viz *A. Grüttner*, Das räumliche Fünfeck, Diss. Breslau 1903; *Th. Reye*, Die zwölf Nullkorrelationen des räumlichen Fünfecks, Math. Annalen 75 (1914).

[5]) Takové čtyrstěny bývají někdy — jak už bylo uvedeno — podle Möbia, jenž na ně upozornil, nazývány *Möbiovy*.

pětiúhelníkem, jehož každému vrcholu odpovídá rovina určená tímto a oběma sousedními vrcholy. Více prostorových korelací involučních než uvedené dvě neexistuje.[6])[7])[8])

117. Vlastnosti korelace polárné. *a*) Jako někdy už v obecné korelaci sluje v polárnosti každý bod polárné roviny, příslušné k určitému bodu (pólu), konjugovaným (sdruženým) k bodu tomu; duálně jest každá rovina jdoucí pólem určité roviny (polárné) k této konjugována.

K řadě bodové na libovolné přímce x v prostoru přísluší v polárnosti svazek rovinový s osou ve sdružené poláře x', roviny tohoto svazku protínají pak přímku x v druhé řadě bodů, konjugovaných k bodům řady prvé; ke každému bodu X prvé řady na x přísluší na této jako konjugovaný bod průsečík jeho polárné roviny s přímkou x, obráceně tomuto bodu řady druhé na x přísluší na ní jako bod konjugovaný průsečík jeho polárné roviny s přímkou x, totožný s bodem X. Jest tedy projektivnost mezi řadou bodů na x a soumístnou řadou bodů k nim konjugovaných involuční; duálně jest přímka x' (a ovšem také přímka x) osou dvou soumístných svazků rovin v polárnosti konjugovaných, jejichž projektivnost jest involuční. *Indukuje* tedy *daná polárnost na každé přímce v prostoru involuční projektivnost konjugovaných bodů* na ní ležících, *jakož i involuční projektivnost konjugovaných rovin* jí procházejících. Protože pak dvojice konjugovaných bodů na každé ze dvou sdružených polár x a x' jest incidentní s dvojicí konjugovaných

[6]) Jestliže každý bod v prostoru a rovina s ním v korelaci sdružená jsou incidentní, odpovídají sobě obapolně a korelace je nulová, t. j. involučnost nulové korelace je důsledkem uvedené (obecné) incidence. Neboť odpovídá-li bodu X incidentní rovina ξ', přímce y jdoucí v rovině ξ' bodem X pak přímka y', leží y' v rovině ξ', protože y prochází bodem X. Kdyby y' nebyla totožná s y, byly by na y jen dva body incidentní se svými rovinami sdruženými, totiž X a yy', což odporuje předpokladu; jsou tedy všechny paprsky svazku X v ξ' samodružné. Každý bod T roviny $\eta \equiv \xi'$ leží na samodružném paprsku, a jemu odpovídající rovina τ' prochází body T a X; protože tedy roviny sdružené ke všem bodům na η jdou bodem X, odpovídá tento bod X jako Y' rovině η, t. j. bod $X \equiv Y'$ a rovina $\xi' \equiv \eta$ odpovídají si obapolně. Obráceně však jestliže každý bod v prostoru a rovina s ním v korelaci sdružená sobě odpovídají obapolně, jsou buď všechny incidentní a korelace je nulová, nebo nejsou vesměs incidentní a korelace je polárná.

[7]) Periodická korelace (jejíž cykly prvků sestávají ze stejného počtu bodů a rovin) musí býti sudého řádu; vzniká jako produkt periodické kolineace (řádu téhož nebo polovičního) a involuční korelace s ní záměnné.

[8]) Kdežto nulová korelace přiřaďuje každému bodu v prostoru jednu incidentní rovinu a každé rovině jeden incidentní bod, obecná přímka pak neobsahuje dvojici bodu a roviny sdružených, lze (mimo tento obyčejný čili t. zv. Möbiův systém nulový) definovati *vyšší systémy nulové* jako korespondence mezi body a rovinami se základní vlastností, že bod a rovina korespondující jsou incidentní: v takové příbuznosti odpovídá vždy bodu a incidentních rovin, rovině β incidentních bodů a přímka je incidentní s γ dvojicemi bodu a roviny sobě odpovídajících (označuje se pak charakteristickými čísly (a, β, γ)). Viz na př. *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie I, p. 78 a n.

rovin druhé poláry (při čemž je každý bod incidentní s polárnou rovinou bodu konjugovaného), *jsou involučně projektivní svazky rovin na každé přímce perspektivní s involučně projektivními řadami bodů na její poláře* (a to tak, že jedním i druhým bodem každé dvojice na této prochází polárná rovina druhého resp. prvního, jež obě tvoří dvojici na oné).

Poznali jsme, že na každé rovině a duálně v každém bodě prostoru, který je se soumístným prostorem v korelaci, existuje korelace základních útvarů dvojmocných. Je-li korelace obou soumístných prostorů polárná, jsou polárnými také tyto indukované korelace útvarů dvojmocných. Neboť každému bodu X na libovolné rovině ϱ odpovídá obapolně průsečnice x' polárné roviny jeho ξ' s rovinou ϱ, řadě bodů X na přímce y v ϱ odpovídá obapolně svazek průsečnic svazku polárných rovin ξ' s osou y', středu Y' tohoto svazku průsečnic (průsečíku osy y' s rovinou ϱ) korespondující polárná rovina, procházejíc přímkou y, protíná rovinu ϱ v této přímce, jež tedy obapolně odpovídá bodu Y'; tvoří tudíž bod X a přímka x', bod Y' a přímka y dvojice pólu a poláry v rovině ϱ. A duálně je indukovaná korelace trsu v libovolném bodě rovněž polárná; rovině a přímce jeho odpovídá přímka jdoucí jejím pólem v prostoru resp. rovina jdoucí její sdruženou polárou. *Indukuje* tedy *daná polárnost na každé rovině i v každém bodě prostoru polárnost dvojmocných útvarů základních.* A protože polárná rovina každého bodu v rovině π prochází jeho polárou v této rovině a spolu pólem P roviny π, polára pak každé přímky v π ležící prochází pólem jejím v této rovině a spolu pólem P roviny π, jsou *polárné trsy v každém bodě perspektivní s polárnými poli rovinnými*, jsou-li jejich střed a rovina pólem a příslušnou rovinou polárnou.[1])

b) Prostorová polárnost *jest* jednoznačně *určena autopolárným čtyrstěnem a jednou dvojicí bodu a roviny vzájemně sdružených.* Neboť zvolíme-li čtyrstěn $ABCD$ za autopolárný, jehož vrcholům totiž jako pólům příslušejí protější stěny jako roviny polárné, a zvolíme-li mimo to bod E obecně (mimo stěny onoho čtyrstěnu) položený i rovinu ε (obecně položenou) za pól a polárnou rovinu, jest těmito pěti dvojicemi sdružených prvků určena korelace, jež podle dřívější úvahy jest korelací polárnou. Vskutku jest na každé hraně čtyrstěnu $ABCD$ dvěma vrcholy jeho a průsečíkem roviny spojující bod E s protější hranou čtyrstěnu i průsečíkem s rovinou ε stanovena involuční projektivnost bodů konjugovaných. K libovolnému bodu X sestrojíme rovinu polárnou ξ, položíme-li bodem tím a třemi hranami čtyrstěnu daného, jež leží v téže stěně jeho, roviny a určíme-li k jejich průsečíkům na protějších hranách čtyrstěnu (jdoucích tedy týmž vrcholem jeho) body ve vytčených involucích sdružené; rovina jimi jdoucí je polárná rovina ξ. Obráceně provedeme konstrukci pólu X k libovolné rovině ξ. Leží-li bod X spe-

[1]) Proti tomu indukuje nulová korelace na libovolné rovině korelaci zvrhlou, v níž každému bodu odpovídá přímka spojující jej s pevným bodem této roviny, který je k rovině té v nulové korelaci sdružen.

ciálně na některé stěně čtyrstěnu daného, stačí sestrojiti v polárnosti této roviny poláru bodu X a spojiti ji s protějším vrcholem čtyrstěnu; leží-li pak X na hraně čtyrstěnu, prochází jeho polárná rovina bodem k němu na této hraně involučně sdruženým a hranou protější; obdobně ve speciálních případech duálních.

Libovolnému bodu A v prostoru lze přiřaditi ∞^3 rovin α jako polárných, libovolnému bodu B na této rovině ∞^2 rovin β jdoucích bodem A jako rovin polárných, libovolnému bodu C na $\alpha\beta$ pak ∞^1 rovin polárných γ jdoucích přímkou AB, což dává ∞^6 voleb pro stanovení polárnosti v prostoru (nebo také z ∞^{12} možných čtyrstěnů v prostoru jest ∞^6 čtyrstěnů autopolárných v téže polárnosti prostoru); k tomu přistupuje ∞^3 možných voleb roviny ε jako polárné roviny k libovolnému bodu E. Existuje tedy v prostoru ∞^9 různých korelací polárných.

Polárnost prostoru lze také určiti *polárností v dané rovině* (π) *a involuční projektivností na dané přímce* (p) jdoucí pólem roviny té. Neboť autopolárný trojúhelník ABC na rovině π s jedním vrcholem A v bodě πp a bod D, sdružený na přímce p k tomuto průsečíku, tvoří autopolárný čtyrstěn prostorové polárnosti; k bodu E nalezneme pak příslušnou rovinu polárnou ε jako rovinu jdoucí body, sdruženými na přímce AD, AB, AC k průsečíkům jejím s rovinou BCE, resp. CDE, resp. BDE.

V rovinné polárnosti na π máme na přímkách AB a AC v polárnosti této konjugovaných dvě involuce bodů konjugovaných (jimiž je tato polárnost určena); k nim přistupuje v prostoru involuční projektivnost bodů konjugovaných na přímce $p = AD$. Prostorová polárnost je také určena, *jsou-li dány tři involuční projektivnosti na třech přímkách tvořících trojhran* v prostoru, z nichž každá prochází pólem roviny jdoucí ostatními dvěma. Tři přímky tyto p, q, r tvoří totiž s rovinou položenou body P, Q, R, sdruženými na každé z nich k jejich bodu společnému S, autopolárný čtyrstěn $SPQR$; k libovolnému bodu X nalezneme rovinu polárnou ξ, vedouce roviny PQX, QRX, RPX a určíce body sdružené danými involucemi na r, p, q k průsečíkům těchto rovin; rovina body tak určenými položená jest ξ. Obráceným postupem dojdeme od roviny ξ jejího pólu X.[2])

c) V nulové korelaci tvoří dva čtyrstěny sobě odpovídající dvojici čtyrstěnů navzájem opsaných a vepsaných. Jiný je vztah mezi dvěma čtyrstěny $ABCD$ a $\alpha\beta\gamma\delta$, jež sobě odpovídají v korelaci polárné: spojnice

[2]) Dva korelativní prostory toho druhu, že nevlastní rovině jejich odpovídají (v korelaci dané a inversní) body v konečnu ležící, lze pohybem (na 4 způsoby) učiniti polárnými (stačí ztotožniti v nich trojstěn a trojhran s třemi pravými úhly, jež mají své vrcholy v dotčených dvou bodech a u nichž každé stěně jednoho koresponduje hrana druhého, jdoucí pólem oné na rovině nevlastní, tak aby vznikl čtyrstěn, jehož každému vrcholu odpovídá stěna protější). Uvádí po prvé *Th. Reye*, Über algebraische Flächen, die zu einander apolar sind, Journal r. a. Math. 79 (1875).

vrcholů A a $\beta\gamma\delta$, B a $\gamma\delta\alpha$, C a $\delta\alpha\beta$, D a $\alpha\beta\gamma$ leží (obecně) v jedné zborcené řadě kvadratické, průsečnice rovin BCD a α, CDA a β, DAB a γ, ABC a δ leží v druhé takové řadě.[3])

Neboť dva polárné trojúhelníky v rovinném poli jsou, jak víme, homologické, rovněž dva polárné trojhrany v trsu; proto jsou v prostorové polárnosti homologickými na př. v rovině ABC trojúhelník ABC a řez trojhranu $\alpha\beta\gamma$ s touto rovinou, v trsu o středu $\alpha\beta\gamma$ pak trojhran $\alpha\beta\gamma$ a trojhran promítající trojúhelník ABC. Odtud pak plyne, že každý z uvedených osmi bodů A, B, C, D, $A' = \beta\gamma\delta$, $B' = \gamma\delta\alpha$, $C' = \delta\alpha\beta$, $D' = \alpha\beta\gamma$ jest vrcholem dvou homologických trojhranů (na př. bod A je vrcholem polárných trojhranů $A\,(B, C, D)$ a $A\,(B', C', D')$, při čemž rovině ABC odpovídá přímka AD' atd., a tedy podle předešlého homologických, takže roviny ABB', ACC' a ADD' procházejí jednou přímkou, osou jejich homologie); vidíme, že osm os homologie vytčených dvojic trojhranů je proťato první čtveřicí uvedených přímek, totiž čtyřmi spojnicemi AA', BB', CC' a DD'; čtyři přímky ty patří proto zborcené řadě kvadratické. Druhý útvar (čtveřice průsečnic) je pak polárný k prvému.[4])[5])[6])

---

[3]) O dvou čtyrstěnech, u nichž čtyři spojnice sdružených vrcholů leží v téže zborcené řadě kvadratické (takže to platí také o průsečnicích sdružených stěn jejich) říká se (někdy), že *mají polohu hyperboloidní*.

[4]) Uvedenou větu lze také obrátiti: Jestliže u dvou čtyrstěnů $ABCD$ a $A'B'C'D'$ patří spojnice vrcholů AA', BB', CC', DD' zborcené řadě kvadratické, jsou čtyrstěny ty polárnými, a to tak, že vrcholu A odpovídá rovina $B'C'D'$ atd.; průsečnice jejich stěn (ABC, $A'B'C'$) atd. patří pak rovněž kvadratické řadě zborcené (a duálně).

Jestliže (speciálně) dvě protější hrany čtyrstěnu ($ABCD$ a tedy i čtyrstěnu polárného $\alpha\beta\gamma\delta$) jsou v polárnosti konjugovány, redukuje se uv. zborcená řada kvadratická na dva svazky paprskové s různými středy i rovinami a se společnou přímkou, rovněž tak druhá řada kvadratická; jestliže jsou dvě dvojice (a tedy i třetí dvojice) protějších hran čtyrstěnu konjugovány, patří uv. spojnice vrcholů čtyrstěnů polárných témuž trsu, duálně průsečnice stěn těchto čtyrstěnů leží v téže rovině (polárné ke středu onoho trsu). Viz *J. Vályi*, Über die polarreciproken Tetraeder, Monatshefte Math. Phys. 6 (1895); *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage II, p. 275 a n.; *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, p. 132 a n.

[5]) Další podobnou větu uvádí *P. Muth*, Zur hyperboloidischen Lage von Tetraederpaaren, Zeitschrift Math. Phys. 38 (1893): Jestliže u dvou dvojic polárných čtyrstěnů $ABCD$, $A'B'C'D'$ a $EFGH$, $E'F'G'H'$ spojnice AE', BF', CG', DH' patří téže zborcené řadě kvadratické, leží spojnice $A'E$, $B'F$, $C'G$, $D'H$ rovněž v takové řadě.

O dvou čtyrstěnech v poloze n-násobně hyperboloidní ($n = 2, 3, 4, 4, 6$, pět případů) pojednává na př. *G. Gallucci*, Risoluzione del problema dei tetraedri iperboloidici, Rendiconti Accad. Napoli (3) 11 (1905), a Complementi di geometria proiettiva (1928), p. 34 a n.

[6]) Je pozoruhodné, že každou kolineaci prostorovou lze rozložiti v produkt dvou korelací polárných; při obecné kolineaci mají obě tyto polárnosti v invariantním čtyrstěnu kolineace svůj čtyrstěn autopolárný, jednu z nich můžeme tedy zvoliti na ∞^3 způsobů mezi polárnostmi s autopolárným čtyrstěnem v invariantním čtyrstěnu dané kolineace. Jednoduchý

118. Plocha kvadratická jako základní útvar polárné korelace. *a*) Abychom vyšetřili, zdali v prostorové polárnosti existují incidentní dvojice pólu a roviny polárné čili elementy autokonjugované, vezměme v úvahu autopolárný čtyrstěn $ABCD$ a obecně položenou dvojici pólu P s příslušnou rovinou polárnou π, jež dohromady polárnou korelaci určují.

V autopolárném čtyrstěnu prostorové polárnosti obsahuje každá hrana jednak jako osa řady bodové involuční projektivnost konjugovaných bodů, jednak jako osa svazku rovinového involuční projektivnost konjugovaných rovin, při čemž projektivnosti řady bodové na každé hraně a svazku rovinového na hraně protilehlé jsou téhož druhu (obě hyperbolické nebo obě eliptické). Majíce na zřeteli, že v rovinné polárnosti jsou involuční projektivnosti konjugovaných bodů na stranách autopolárného trojúhelníku (a stejně involuční projektivnosti konjugovaných přímek v protějších vrcholech jeho) buď dvě hyperbolické a jedna eliptická nebo všechny tři eliptické, zkoumejme obdobně, jakého druhu jsou zmíněné projektivnosti involuční na šesti hranách autopolárného čtyrstěnu $ABCD$.

Čtyrstěn $ABCD$ dělí svými stěnami (jež ovšem pokládáme za neomezené roviny) prostor v osm oborů. Dva různé body v prostoru, ležící mimo stěny čtyrstěnu, patří do téhož oboru, jestliže jejich dva průměty, z každé hrany čtyrstěnu na hranu protější, vrcholy této hrany neoddělují, patří však do různých oborů, jestliže aspoň některá z vytčených dvojic průmětů příslušné vrcholy čtyrstěnu odděluje.

Libovolný bod prostoru P (mimo stěny čtyrstěnu) zvolme v určitém z oborů, čtyrstěnem $ABCD$ vymezených. Z každé hrany čtyrstěnu promítá se bod P do bodu hrany protější, který označíme na hraně AB písmenem P_{12}, na AC pak P_{13} atd. Rovina π, sdružená danou polárností k bodu P, protíná hrany čtyrstěnu v bodech, jež označíme P'_{hk}, průsečík na AB totiž P'_{12}, na AC pak P'_{13} atd. Při určité volbě bodu P leží každý z průmětů jeho P_{hk} na hranách čtyrstěnu v určitém z obou úseků, oběma tam položenými vrcholy čtyrstěnu oddělených; rovina π pak buď protíná každou hranu čtyrstěnu v úseku neobsahujícím P_{hk} nebo protíná aspoň jednu v úseku obsahujícím P_{hk}. V prvním případě oddělují na všech šesti hranách čtyrstěnu dvojice bodů P_{hk} a P'_{hk} tam ležících oba příslušné vrcholy čtyrstěnu: involuce konjugovaných bodů na všech hranách autopolárného čtyrstěnu jsou eliptické. V případě druhém budiž AB hranou, na níž body P_{12} a P'_{12} neoddělují vrcholů A a B; v každém z obou trojúhelníků k AB přilehlých ABC a ABD musí rovina π ještě jednu hranu protínati v úseku obsahujícím P_{hk}, tedy buď AC a AD nebo AC a BD. Rozpadá se tedy druhý případ opět ve dva, z nichž v jednom jsou v úseku obsahujícím P_{hk} proťaty tři hrany vy-

analytický důkaz toho podává *C. M. Jessop*, On collineations of space, Quarterly Journal math. 39 (1908).

cházející z téhož vrcholu AB, AC a AD, v druhém hrany AB, AC, BD a také CD, protože v trojúhelnících zbývajících ACD a BDC musí býti v úseku obsahujícím P_{hk} proťato ještě po jedné hraně, kterou nemůže býti leč hrana CD. V prvním z těchto dvou případů dvojice P_{12} a P'_{12}, P_{13} a P'_{13}, P_{14} a P'_{14}, v druhém pak dvojice P_{12} a P'_{12}, P_{24} a P'_{24}, P_{43} a P'_{43}, P_{31} a P'_{31} neoddělují příslušných vrcholů čtyrstěnu, ostatní dvojice však vrcholy svých hran oddělují: involuční projektivnosti konjugovaných bodů na uvedených hranách jsou hyperbolické, na hranách zbývajících pak eliptické.[1])

Podle nalezených tří druhů autopolárných čtyrstěnů existují (vzhledem k reálnosti elementů autokonjugovaných) *tři druhy prostorové polárnosti*: *a*) *na třech hranách čtyrstěnu tvořících trojhran* (jdoucích týmž vrcholem) *jsou involuční projektivnosti konjugovaných bodů hyperbolické, na ostatních třech eliptické*; tam leží po dvou (reálných) bodech autokonjugovaných, zde není bodů soběsdružených (jest po dvou takových bodech imaginárních); *b*) *na čtyřech hranách čtyrstěnu tvořících prostorový čtyrúhelník jsou involuční projektivnosti konjugovaných bodů hyperbolické* (s dvojicemi reálných bodů autokonjugovaných), *na ostatních dvou protilehlých eliptické* s dvojicemi imaginárních bodů soběsdružených); *c*) *na všech šesti hranách čtyrstěnu jsou eliptické projektivnosti involuční* (nikde není reálných bodů autokonjugovaných).

V případě *a* jsou dvě projektivnosti řady bodové a svazku rovinového s touže osou na každé hraně čtyrstěnu různého druhu (jedna hyperbolická, druhá eliptická), v případech *b* a *c* jsou obě téhož druhu.

b) Obě incidenční plochy obecné korelace, plocha 2. stupně $\varkappa$ a plocha 2. třídy $\varkappa'$, *splývají u polárné korelace v jedinou plochu kvadratickou*. Neboť v každé rovině prostoru existuje rovinná korelace, jež jako korelace polárná má dvě incidenční kuželosečky v jednu splývající; rovněž z důvodu duálního. Tato jediná incidenční plocha polárné korelace sluje *základní* čili *incidenční plochou kvadratickou* prostorové polárnosti; jest vytvořena body v polárnosti autokonjugovanými a spolu rovinami soběsdruženými.[2])

Podle předcházejícího rozboru jsou *tři druhy plochy kvadratické* takto danou polárností určené. V případě prvém jest to kvadratická plocha oddělující jeden vrchol čtyrstěnu autopolárného (A) od ostatních tří (B, C, D); rovina BCD protíná plochu v imaginární kuželosečce, ostatní tři stěny čtyrstěnu protínají ji v kuželosečkách reálných, z bodu A jde k ploše imaginární kužel 2. třídy vytvořený tečnými rovinami plochy, z ostatních tří vrcholů čtyrstěnu jdou k ní reálné kužele. V případě druhém odděluje kvadratická plocha základní dvě protější hrany

[1]) V každé polárnosti prostorové jsou všechny autopolárné čtyrstěny téhož druhu (jednoho ze tří uvedených); viz *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, p. 126 a n.

[2]) Obráceně však prostorová korelace, jejíž obě incidenční plochy splývají, není vždy polárností.

autopolárného čtyrstěnu (AD, BC), protínajíc ostatní čtyři (AB, BD, DC, CA); všechny stěny čtyrstěnu jsou plochou proťaty v reálných kuželosečkách, ze všech vrcholů jeho lze vésti k ploše reálné kužele 2. třídy.

V případě *b* je kvadratická základní plocha *reálná přímková*, v případě *a* je *reálná nepřímková*.

V případě třetím protíná plocha kvadratická všechny stěny autopolárného čtyrstěnu v imaginárních kuželosečkách, duálně ze všech vrcholů jeho jdou k ploše imaginární kužele tečných rovin plochy té; plocha kvadratická jest v tomto případě *c imaginární*.

c) Daná polárnost prostorová definuje, jak jsme poznali, plochu kvadratickou; naopak *plocha kvadratická určuje polárnou korelaci v prostoru*. K libovolnému bodu X v prostoru nalezneme totiž příslušnou rovinu polárnou ξ tím, že na každé přímce jdoucí bodem X určíme bod harmonicky sdružený s bodem X vzhledem k oběma průsečíkům přímky té s danou plochou kvadratickou: vytvoří-li přímka bodem X jdoucí svazek paprskový v rovině, vytvoří uvedený bod harmonický poláru bodu X vzhledem ke kuželosečce, v níž rovina svazku danou plochu protíná; tyto poláry bodu X ve všech rovinách bodem X jdoucích, nemohouce procházeti jedním bodem, leží v téže rovině, totožné s geometrickým místem bodů harmonických k bodu X na všech přímkách trsu X, jež jest hledanou rovinou polárnou ξ. Autopolárný čtyrstěn, zvolený na základě příbuznosti danou plochou kvadratickou takto stanovené, určuje spolu s další dvojicí bodu a příslušné roviny polárnou korelaci, jejíž základní plocha je totožná s plochou danou.

Bod a rovinu k sobě v této polárnosti příslušné jmenujeme pólem a polárnou rovinou vzhledem k dané ploše kvadratické, rovněž přímky sobě odpovídající nazýváme polárami vzhledem k této ploše, mluvíme o prvcích konjugovaných vzhledem k ploše kvadratické a pod., zkrátka plochu kvadratickou uvádíme jako útvar, určující známou korelaci polárnou.

Se zřetelem k ploše kvadratické má pól a polárná rovina sobě obapolně odpovídající zejména tyto důležité vlastnosti:

Polárná rovina každého bodu P, jenž neleží na ploše kvadratické, obsahuje

α) všechny body harmonicky sdružené na přímkách trsu P k bodu P vzhledem k průsečíkům těchto přímek s plochou;

β) všechny poláry bodu P vzhledem ke kuželosečkám, v nichž roviny jdoucí bodem P plochu protínají;

Pólem každé roviny π, jež není (tečnou) rovinou plochy kvadratické, procházejí

α) všechny roviny harmonicky sdružené k rovině π vzhledem k rovinám plochy, jdoucím přímkou roviny π;

β) všechny poláry roviny π vzhledem ke kuželům kvadratickým, jež jsou vytvořeny rovinami plochy jdoucími bodem roviny π;

γ) dotyčné body všech tečných rovin plochy, jež procházejí bodem P;

δ) průsečnice vždy dvou tečných rovin plochy, jejichž dotyčné body leží s bodem P v téže přímce.

γ) tečné roviny plochy ve všech bodech kuželosečky, v níž rovina π plochu protíná;

δ) spojnice vždy dvou dotyčných bodů tečných rovin, vedených k ploše přímkou roviny π.

O sdružených polárách p a p' plochy kvadratické pak platí zejména: Dvě tečné roviny jdoucí k ploše jednou z obou mimoběžných polár mají své dotyčné body na druhé poláře; obráceně a duálně tečné roviny plochy v průsečících jedné z obou polár na ploše procházejí druhou polárou. Je-li jedna z obou polár tečnou přímkou plochy, jest i druhá přímkou tečnou v téže rovině tečné se společným bodem dotyčným.[3])[4])

d) Abychom analyticky nalezli útvar, vytvořený v polárnosti dvou soumístných prostorů body (a duálně rovinami) autokonjugovanými, vyjádřeme rovnicí, že bod (x_k) leží na své rovině polárné (u'_k). V polárnosti dané rovnicemi

$$\varrho u'_h = \sum_{k=1}^{4} a_{hk} x_k \quad \text{pro } h = 1, 2, 3, 4,$$

kde $a_{kh} = a_{hk}$, odpovídá bodu (x_1, x_2, x_3, x_4) polárná rovina, jejíž rovnice jest $\Sigma u'_k x'_k = 0$ čili

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)\,x'_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4)\,x'_2 + \\ + (a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4)\,x'_3 + (a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4)\,x'_4 = 0$$

čili v jiném uspořádání

$$a_{11}x_1x'_1 + a_{22}x_2x'_2 + a_{33}x_3x'_3 + a_{44}x_4x'_4 + a_{12}(x_1x'_2 + x_2x'_1) + \\ + a_{13}(x_1x'_3 + x_3x'_1) + a_{14}(x_1x'_4 + x_4x'_1) + a_{23}(x_2x'_3 + x_3x'_2) + \\ + a_{24}(x_2x'_4 + x_4x'_2) + a_{34}(x_3x'_4 + x_4x'_3) = 0,$$

kde ovšem x'_k jsou souřadnice proměnného bodu na rovině polárné.

---

[3]) Úlohy uvedené prve pro (reálné) plochy kvadratické lze obecněji řešiti pro polárnosti, jež plochy kvadratické definují. Hledáme-li na př. kolineaci (nebo duálně korelaci), jež jednu ze dvou daných polárností převádí v druhou, můžeme vzhledem k tomu, že takových kolineací existuje ∞^6 a autopolárných čtyrstěnů dané polárnosti rovněž ∞^6, žádati, aby hledaná kolineace převáděla ještě daný autopolárný čtyrstěn jedné polárnosti v daný čtyrstěn autopolárný u druhé. Polárnosti dané musí ovšem býti (pro reálnou kolineaci) téhož druhu; protože také sdružované prvky čtyrstěnů musí býti téhož druhu (projektivnosti na dvou sdružených hranách musí býti obě hyperbolické nebo obě eliptické), objeví se, že dvě dané polárnosti a dva jejich dané čtyrstěny autopolárné lze učiniti kolineárnými na $8n$ způsobů, kde u polárností druhů 1., 2. a 3. jest $n = 6, 8, 24$.

[4]) Dvě polárnosti mají (v obecném případě jeden) společný čtyrstěn autopolárný (je to čtyrstěn samodružných prvků v kolineaci, jež je produktem obou polárností těch). Vycházejíce od tohoto čtyrstěnu a příslušné kolineace, můžeme syntheticky vyšetřovati svazek a duálně řadu polárností, danými dvěma polárnostmi určené (jak činí na př. *Reye* nebo *Sturm*); přijdeme k větám, uvedeným prve pro svazek nebo řadu ploch kvadratických (s platností obecnější).

Rovnice tato vyjadřuje také relaci mezi souřadnicemi dvou bodů (x_k) a (x'_k) v dané polárnosti konjugovaných; protože je bilineární, leží body, konjugované k danému bodu jednoho prostoru, na rovině prostoru druhého; protože je souměrná vzhledem k x_k a x'_k, následuje z incidence bodu v jednom prostoru a roviny v prostoru druhém incidence polárné roviny onoho a pólu této.

Bod (x_k) je sobě samému konjugovaný tehdy a pouze tehdy, vyhovuje-li $x'_k = x$ hořejší rovnici, t. j. platí-li

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + \\ + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0;$$

to je rovnice *geometrického místa bodů v dané polárnosti autokonjugovaných* (incidentních s příslušnou rovinou polárnou), rovnice *základní plochy 2. stupně* v korelaci polárné.

Duální relace mezi souřadnicemi dvou rovin (u_k) a (u'_k) v dané polárnosti konjugovaných

$$A_{11}u_1u'_1 + A_{22}u_2u'_2 + A_{33}u_3u'_3 + A_{44}u_4u'_4 + A_{12}(u_1u'_2 + u_2u'_1) + \\ + A_{13}(u_1u'_3 + u_3u'_1) + A_{14}(u_1u'_4 + u_4u'_1) + A_{23}(u_2u'_3 + u_3u'_2) + \\ + A_{24}(u_2u'_4 + u_4u'_2) + A_{34}(u_3u'_4 + u_4u'_3) = 0,$$

kde A_{hk} je subdeterminant, příslušný v determinantu všech koeficientů korelace k prvku a_{hk}, má obdobné vlastnosti jako relace hořejší mezi (x_k) a (x'_k) s obdobným významem; pro $u'_k = u_k$ dává pak rovnici *útvaru vytvořeného autokonjugovanými rovinami* (z nichž každá prochází svým pólem)

$$A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + A_{44}u_4^2 + 2A_{12}u_1u_2 + 2A_{13}u_1u_3 + 2A_{14}u_1u_4 + \\ + 2A_{23}u_2u_3 + 2A_{24}u_2u_4 + 2A_{34}u_3u_4 = 0,$$

rovnici *základní plochy 2. třídy* v polárné korelaci. Tato základní plocha 2. třídy je identická se základní plochou 2. stupně.

Obráceně definuje plocha kvadratická polárnou korelaci: z rovnice plochy kvadratické v souřadnicích bodových nebo rovinových

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \Sigma a_{hk}x_hx_k = 0 \text{ resp. } \varphi(u_1, u_2, u_3, u_4) \equiv \Sigma A_{hk}u_hu_k = 0,$$

kde $h, k = 1, 2, 3, 4$ a platí $a_{hk} = a_{kh}$, A_{hk} je pak subdeterminant 3. stupně příslušný v determinantu $(a_{11}a_{22}a_{33}a_{44})$ k prvku a_{hk}, plynou rovnice korelace polárné ve tvaru

$$\varrho u'_k = \frac{\partial f}{\partial x_k} \text{ resp. } \mu x'_k = \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}.^{5)6)7)8)}$$

---

[5]) Plochy kvadratické, *autopolárné* vzhledem k pevné kvadrice základní, tvoří dvě soustavy: přecházejí (jednotlivě) v sebe samy prvním způsobem (viz pozn. [5]) čl. 115), mají se základní plochou vždy společný čtyrstran a tvoří systém čtyrmocný, nebo jsou invariantní druhým způsobem, dotýkají se plochy základní podél kuželosečky a tvoří systém trojmocný. Existují dvě skupiny (8 nebo 10) ploch kvadratických, z nichž každá jest vzhledem ke každé autopolárná. O tom, jakož i o kvadrikách, vzhledem k nimž dvě dané plochy kvadratické jsou polárné, jednají *E. d'Ovidio*, Sulle linee e superficie di 2o ordine, Giornale mat. 10 (1872); *H. Thieme*,

119. Lineární komplex přímek jako základní útvar nulové korelace. *a*) V nulové korelaci jest každá přímka jdoucí bodem v prostoru a ležící v rovině s ním sdružené samodružnou. Neboť odpovídají-li sobě incidentní prvky bod X a rovina ξ, prochází libovolnému bodu Y roviny ξ

Über die Flächen zweiten Grades, für welche zwei Flächen zweiten Grades zu einander polar sind, Zeitschrift Math. Phys. 22 (1877); *C. Stephanos*, Sur les systèmes desmiques de trois tetraèdres, Bulletin sc. math. astron. (2) 3 (1879); *R. Sturm*, Über Flächen zweiten Grades, welche zu sich selbst polar sind, Math. Annalen 25 (1885), a Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, p. 216 a n.; *P. del Pezzo*, Sulle quadriche polari reciproche di sè stesse rispetto ad un' altra, Rendiconti Accad. Napoli 24 (1885); *D. Montesano*, Su certi gruppi di superficie die secondo grado, Annali mat. (2) 14 (1886); také *St. Jolles*, Die durch eine polare Korrelation in sich selbst überführbaren Regelflächen zweiter Ordnung, Math. Zeitschrift 26 (1927).

[6]) Jako plocha kvadratická určuje polárnou korelaci prostoru, tak prostorová čára kubická stanoví korelaci nulovou, při níž je invariantní, tím, že bodu svému přiřaďuje oskulační rovinu svou v tomto bodě; obráceně v dané nulové korelaci je invariantních ∞^7 prostorových čar kubických. Daná prostorová kubika je invariantní v soustavě ∞^2 polárností, obráceně v dané polárnosti je invariantních ∞^5 prostorových kubik. O těchto involučních korelacích vzhledem k invariantním kubikám prostorovým viz na př. *D. Montesano*, Su le correlazioni polari dello spazio rispetto alle quali una cubica gobba è polare a sè stessa, Memorie Accad. L. Roma (4) 3 (1886); *K. Doehlemann*, Zur Theorie des Nullsystems, Jahresbericht D. Math. Ver. 3 (1893); *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage II, p. 200 a n.; *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, p. 243 a n.

[7]) Ze speciálních korelací jest pozoruhodná korelace, jejíž *obě incidenční plochy splývají v jednu plochu kvadratickou* (a jež není korelací polárnou); lze k ní dospěti z předpokladu, že na invariantní ploše kvadratické existuje v jedné řadě přímek projektivnost identická, v druhé řadě projektivnost obecná (neidentická a neinvoluční), takže plocha ta je incidenční plochou $\varkappa$ i plochou $\varkappa'$ této korelace; mimo takovou plochu incidenční je zde invariantních ∞^2 ploch kvadratických. Zajímavá jest také *korelace periodická s cykly bodů a rovin o čtyřech členech*; u této lze všechny body (a spolu roviny) tak po dvou sdružiti, že dvěma bodům A, C dvojice odpovídají v korelaci uvažované určité roviny α', γ', těmže bodům pak $B' = A$, $D' = C$ odpovídají v korelaci inversní tytéž dvě roviny v pořádku obráceném $\beta = \gamma'$, $\delta = \alpha'$, takže tvoří cyklus prvky A, $\alpha' = \delta$, $D' = C$, $\gamma' = \beta$ ($B' = A$), z nichž vždy dva sousední sobě odpovídají. Dvojmoc této korelace je involuční kolineace dvojosá (v níž sobě korespondují oba prvky uvedených dvojic bodů i rovin). Jsou dva druhy takové korelace: jedna je zvláštním případem hořejší korelace s jedinou plochou incidenční (osami příslušné kolineace dvojosé jsou samodružné přímky obecné projektivnosti ve zborcené řadě na ploše incidenční), druhá je zvláštním případem korelace, jejíž incidenční plochy $\varkappa$ a $\varkappa'$ se rozpadají ve dvojici rovin a dvojici bodů (osami příslušné kolineace jsou průsečnice obou rovin a spojnice obou bodů těchto dvojic). O těchto zvláštních korelacích pojednává podrobně zejména *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, p. 254 a n.

[8]) Metrické vlastnosti korelace prostorové vykládá obšírně *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, p. 271 a n. Budiž aspoň vytčeno, že korelace, v níž nevlastní rovině odpovídají body nevlastní, sluje *parabolická*; při analytické definici korelace (bilineární rovnicí s determinantem A koeficientů a_{hk}) jest parabolická korelace charakterisována

korespondující rovina η bodem X; spojnice XY, jsouc totožná s průsečnicí $\xi\eta$, odpovídá v dané korelaci sobě samé. Každému bodu samodružné přímky koresponduje rovina procházející touto přímkou, obráceně a duálně každé rovině jdoucí samodružnou přímkou koresponduje bod na přímce té ležící.

Tvoří tedy samodružné přímky nulové korelace jednomocné svazky paprskové, při čemž střed a rovina každého svazku jsou prvky v korelaci sdruženými; takových svazků jest v prostoru ∞^3 (jako bodů a rovin). Protože v každém z těchto svazků jest obsaženo ∞^1 samodružných přímek a protože proti tomu každá přímka samodružná jest obsažena v ∞^1 svazcích, jejichž středy na ní leží a jejichž roviny jí procházejí, *existuje v nulové korelaci* ∞^3 *samodružných přímek*, které tvoří *komplex přímkový. Komplex samodružných přímek nulové korelace jest 1. stupně a 1. třídy* čili stručně *lineární*, protože každý bod prostoru je středem a každá rovina prostoru rovinou svazku přímek do komplexu příslušných.

Dvě přímky v nulové korelaci sobě obapolně odpovídající jsou *buď mimoběžné nebo splývají*, tvoříce v tomto druhém případě element lineárního komplexu přímek v korelaci samodružných. Neboť jestliže dvě sdružené přímky x a x' se protínají v bodě xx', prochází rovina korespondující tomuto bodu jako bodu na x přímkou x', jest tedy přímka x' jako přímka incidentní s bodem a rovinou spolu sdruženými samodružnou, tudíž totožnou s x.

b) Nulovou korelací v prostoru jest určen lineární komplex přímek v korelaci té samodružných: obráceně každý *lineární komplex přímek určuje korelaci nulovou.*

Protože totiž lineární komplex jest 1. stupně a 1. třídy, prochází každým bodem prostoru a leží v každé rovině jeho svazek paprsků komplexových; tím přiřaďuje tedy lineární komplex každému bodu jedinou rovinu jím procházející a každé rovině jediný bod na ní ležící. Že tato korespondence mezi body a rovinami jest korelací, poznáváme z toho, že v ní bodům řady na přímce odpovídají roviny svazku. Neboť jestliže bodům X_1 a X_2 na přímce p odpovídají roviny ξ_1 a ξ_2 protínající se v přímce p', jde každým bodem Y na p' jeden paprsek ze svazku o středu X_1 v ξ_1 a jeden ze svazku o středu X_2 v ξ_2; rovina η obou těchto paprsků komplexových koresponduje bodu Y na p' a prochází přímkou p. Prochází tedy každým bodem X na p jeden paprsek komplexu jdoucí bodem Y, stejně po jednom paprsku jdoucím kterýmkoli bodem na p'; proto rovina odpovídající bodu X na p prochází přímkou p'.

Korelace takto prokázaná jest nulová, protože sdružené body

podmínkou $A_{44} = 0$. O ní *C. Segre*, Su alcune proprietà metriche delle correlazioni, Giornale mat. 25 (1887). Analyticky roztřiďuje prostorové korelace z tohoto hlediska *K. Kommerell*, Klassifikation der Raumkorrelationen, Math. Zeitschrift 10 (1921). Metrické vlastnosti polárné korelace prostorové podává také na př. *R. Sturm* na uv. místě, p. 150 a n.

a roviny jsou, jak uvedeno, incidentní; paprsky daného komplexu jsou samodružnými paprsky této korelace.

c) Každá přímka protínající dvě různé přímky v nulové korelaci sdružené jest přímkou v této korelaci samodružnou a patří do uvažovaného komplexu; neboť jestliže přímka x protíná sdružené přímky různé p a p', jest bod xp sdružen v dané korelaci s rovinou xp', pročež jest x přímkou samodružnou. Každá samodružná přímka, protínající jednu ze dvou sdružených přímek různých, protíná i druhou; neboť samodružná přímka x protínající p musí ležeti v rovině s bodem xp sdružené, jež však nutně prochází přímkou p'. Jsou-li tedy p a p', q a q' dvě dvojice různých přímek v nulové korelaci sdružených, protíná každý paprsek protínající tři přímky z nich p, p' a q také čtvrtou q'; jest totiž takový paprsek, protínaje p a p', podle první věty předcházející samodružným v dané korelaci, protínaje pak jako takový ještě q, protíná podle druhé věty předchozí také q'. Třemi přímkami v prostoru, z nichž dvě jsou v dané korelaci nulové sdruženými, jest tedy určena zborcená řada kvadratická, obsažená v lineárním komplexu samodružných přímek korelace; doplňková řada příslušné kvadratické plochy zborcené obsahuje vedle tří uvedených přímek p, p' a q ještě q' a spolu s každou další přímkou r obsahuje také přímku s ní v korelaci sdruženou r'.

Odtud vyplývá, že tři (mimoběžné) přímky lineárního komplexu určují zborcenou řadu kvadratickou v komplexu obsaženou. A protože každou z přímek těch jest možno v komplexu zvoliti ∞^3 způsoby a každá jest jednou z ∞^1 přímek zborcené řady, obsahuje lineární komplex ∞^6 *zborcených řad kvadratických*. Týž počet zborcených řad kvadratických v lineárním komplexu obsažených plyne z věty předcházející (dvě přímky, jež nejsou samodružné ani sdružené v korelaci ke komplexu příslušné, lze zvoliti ∞^8 způsoby, jimi a přímkami sdruženými je určena zborcená kvadratická řada v komplexu obsažená; proti tomu však každá z uvedených dvou přímek může býti kteroukoli z ∞^1 přímek doplňkové řady zborcené).

Involuční korelace prostorová, při níž jest kvadratická zborcená řada přímek pouze jako celek invariantní, indukuje v této řadě involuční projektivnost; zborcená plocha 2. stupně, jejíž jedna řada jest složena ze samodružných přímek nulové korelace, má druhou složenu z dvojic přímek v této korelaci sdružených, z nichž jenom dvojice přímek samodružných patří spolu s první řadou lineárnímu komplexu uvedené korelace.

Obráceně *přímky, jež protínají dvojice přímek zborcené řady kvadratické, sdružených v involuční projektivnosti této řady, vytvořují lineární komplex* a určují tudíž korelaci nulovou. Neboť daná zborcená řada involučně projektivní přiřaďuje každé rovině ξ ten incidentní bod X, jenž je středem involuce bodů na průsečné čáře 2. stupně roviny ξ s řadou zborcenou; bodu X pak odpovídá rovina ξ, jež je rovinou, na

které se protínají sdružené roviny involuce rovin v kuželi 2. třídy, promítajícím z bodu X řadu zborcenou; při tom průsečnice sdružených rovin této druhé involuce jsou totožny se spojnicemi sdružených bodů oné první involuce. Vytvořuje-li rovina ξ svazek s osou l, vytvořuje bod X řadu na ose l'; neboť protíná-li přímka l přímky p a q řady zborcené, k nimž v dané involuci této řady jsou sdruženy přímky p' a q', procházejí v každé rovině ξ spojnice $(lp, \xi p')$ a $(lq, \xi q')$ bodem X; protože pak tyto spojnice leží v rovině určené bodem lp a přímkou p' i v rovině jdoucí bodem lq a přímkou q', leží X na průsečnici jejich l'.[1])

d) Každá přímka protínající dvě různé sdružené přímky nulové korelace je v korelaci té samodružnou; proto lineární kongruence přímek protínajících dvě sdružené přímky korelace nulové patří do lineárního komplexu této korelace. Odtud vyplývá, že lineární komplex obsahuje ∞^4 *lineárních kongruencí* (jednu z přímek sdružených lze zvoliti ∞^4 způsoby, druhá přísluší k prvé danou korelací).

Čtyři (mimoběžné) přímky lineárního komplexu, jež nepatří téže zborcené řadě kvadratické, určují lineární kongruenci v komplexu obsaženou; neboť dvě přímky, protínající dané čtyři přímky, jsou sdruženými v příslušné korelaci, ježto přímka sdružená k jedné přímce, ony čtyři protínající, musí je také protínati; a všechny přímky protínající dvě přímky v korelaci sdružené patří do příslušného komplexu lineárního. Odtud vychází rovněž uvedený počet lineárních kongruencí v komplexu obsažených (čtveřici přímek kongruenci určujících lze v komplexu zvoliti ∞^{12} způsoby, každá kongruence je určena ∞^8-krát čtveřicemi svých přímek).

Vytvořuje-li jedna ze dvou přímek v dané korelaci nulové sdružených svazek paprskový středu A v rovině α, vytvořuje druhá projektivní k němu svazek středu A' v rovině α'; rovina α' odpovídá v korelaci bodu A, bod A' rovině α. Společný paprsek obou svazků $AA' = \alpha\alpha'$ odpovídá v této projektivnosti sobě samému. Každá přímka, samodružná v dané korelaci nulové a příslušná tedy do jejího komplexu lineárního, protíná některý paprsek jednoho z uvedených svazků a protíná proto i sdružený k němu paprsek svazku druhého; kterékoli dvě sdružené přímky těchto dvou svazků jsou tedy osami lineární kongruence přímek komplexových.

Obráceně *přímky protínající dvojice přímek sdružených v projektivnosti dvou svazků paprskových o různých středech a různých rovinách, jejichž společný paprsek odpovídá sobě samému, vytvořují lineární komplex* a určují tedy korelaci nulovou. Neboť kterékoli dvě přímky sobě v obou uvedených projektivních svazcích odpovídající určují lineární kongruenci, všechny dvojice tedy určují ∞^3 přímek komplexu. Tento komplex je 1. třídy: neboť libovolná rovina protíná oba svazky ve dvou projektivních řadách bodových, jež majíce v průsečíku roviny se společným

[1]) Toto vytvoření lineárního komplexu udal *M. Chasles* (1839).

paprskem svazků, podle předpokladu samodružným, bod společný sobě samému odpovídající, jsou perspektivní; tvoří tedy spojnice sdružených bodů obou řad svazek paprskový, do komplexu patřící. Z duálního důvodu je komplex ten 1. stupně, tedy lineární; lineárním komplexem je pak určena korelace nulová.[2])[3])

e) *Lineární komplex přímek jest určen pěti přímkami* (v něm obsaženými). Neboť pěti přímkami určena je projektivnost dvou svazků paprskových v obecné poloze, jejichž společný paprsek odpovídá sobě samému, tím pak je podle předešlého určen lineární komplex. Zvolme totiž jednu z přímek daných p za vytčený paprsek společný a položme touto přímkou dvě roviny α, α'; tyto roviny jsou ostatními čtyřmi přímkami p_1, p_2, p_3 a p_4 proťaty v bodech A_1, A_2, A_3, A_4, resp. A'_1, A'_2, A'_3, A'_4; průsečíky spojnice $A_h A_k$ resp. $A'_h A'_k$ s přímkou p označme A_{hk} resp. A'_{hk}. Ustanovíme-li na p dvě projektivnosti

$$A_{12}A_{23}A_{31} \barwedge A'_{12}A'_{23}A'_{31}, \qquad A_{12}A_{24}A_{41} \barwedge A'_{12}A'_{24}A'_{41},$$

mají tyto projektivnosti mimo dvojici $A_{12}A'_{12}$ společnou ještě druhou dvojici AA'. Protneme-li pak trojúhelník $A_1A_2A_3$ resp. trojúhelník $A_1A_2A_4$ přímkou p, obdržíme

$$A_{23}A_{31}A_{12}A \barwedge A\,(A_1, A_2, A_3, p)^4), \qquad A_{24}A_{41}A_{12}A \barwedge A\,(A_1, A_2, A_4, p);$$

stejně z trojúhelníků $A'_1A'_2A'_3$ a $A'_1A'_2A'_4$ plynou relace

$$A'_{23}A'_{31}A'_{12}A' \barwedge A'\,(A'_1, A'_2, A'_3, p), \qquad A'_{24}A'_{41}A'_{12}A' \barwedge A'\,(A'_1, A'_2, A'_4, p).$$

Na základě hořejších projektivností (k jejichž dvojicím patří také AA') vyplývá odtud

$$A\,(A_1, A_2, A_3, A_4, p) \barwedge A'\,(A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, p);$$

jsou tudíž dva svazky paprskové, svazek středu A v rovině α a svazek středu A' v rovině α', projektivní. A přímky protínající vždy dva sdružené paprsky těchto projektivních svazků vytvořují komplex lineární, určený tedy pěti přímkami danými.[5])

---

[2]) Lineární komplex přímek vzniká také u dvou projektivních svazků rovin: jest složen z přímek, jež rovinami svazků těch jsou proťaty v involučních řadách bodových.

[3]) Vytvoření lineárního komplexu přímek na základě dvou projektivních svazků paprskových v obecné poloze se společným paprskem samodružným uvedl *J. Sylvester* (1861).

[4]) Projektivnost tuto dostaneme (po úpravě), jestliže uvedenou čtveřinu paprsků protneme některou stranou onoho trojúhelníku a průsečíky ty promítneme z protějšího vrcholu jeho.

[5]) Jednoznačnost tohoto stanovení lineárního komplexu přímek zjistíme, položíme-li po druhé libovolnou z pěti daných přímek dvě libovolné roviny a přiřadíme-li každé z obou bod, sdružený k ní v nulové korelaci prve stanovené (lineárním komplexem tam vytvořeným); dostaneme dva projektivní svazky paprskové se zvoleným paprskem jako samodružným

Jestliže speciálně z pěti daných přímek dvě se protínají, odpovídá v nulové korelaci hledaného komplexu lineárního jejich průsečík rovině jimi položené; tato korelace a příslušný komplex lineární jsou tedy určeny bodem i rovinou sobě odpovídajícími a třemi přímkami samodružnými. Obdobně jsou nulová korelace a její lineární komplex určeny také dvěma dvojicemi sdružených bodů i rovin a jednou přímkou samodružnou.

Dříve uvedený pětiúhelník, určující korelaci nulovou a tedy lineární komplex přímek v ní samodružných, jest rovněž speciálním případem skupiny pěti paprsků komplex stanovících.

Protože každou z pěti přímek, jež lineární komplex určují, lze v prostoru zvoliti ∞^4 způsoby a protože každá z ∞^3 přímek komplexu může k jeho stanovení býti zvolena, *existuje* v prostoru ∞^5 *lineárních komplexů*; počet ten shoduje se ovšem s počtem nulových korelací prostorových, prve nalezeným.[6])[7])[8])[9])

---

a s paprsky, jež jsou proťaty každým z ostatních čtyř daných, jako sdruženými; odtud obdržíme týž lineární komplex jako prve.

[6]) *Produkt dvou nulových korelací jest kolineace dvojosá*: v této odpovídají sobě dva body, sdružené v obou daných korelacích k téže rovině, a dvě roviny, sdružené v nich k témuž bodu; lineární komplexy přímkové, příslušné k daným korelacím nulovým, mají společnou lineární kongruenci přímek, jež jsou ve výsledné kolineaci samodružnými; osy kongruence té jsou osami uvedené kolineace (jsou vytvořeny samodružnými body a rovinami vždy dvou projektivních soumístných řad bodových resp. svazků rovinových s osou na každé přímce oné kongruence, v nichž sobě odpovídají body resp. roviny, sdružené v daných korelacích k téže rovině přímkou tou položené resp. k témuž bodu na ní ležícímu). Je-li výsledná kolineace dvojosá involuční, pravíme, že *lineární komplexy přímek* k daným nulovým korelacím příslušné *jsou v involuci*; dané korelace nulové, složky involuční kolineace dvojosé, jsou záměnné, rovněž je každá z obou záměnná s výslednou kolineací dvojosou. U dvou lineárních komplexů, jež jsou v involuci, patří přímka, sdružená k přímce jednoho v nulové korelaci druhého, do onoho; obráceně jsou-li dvě různé přímky jednoho ze dvou komplexů sdruženy v korelaci druhého, jsou komplexy ty v involuci.

Hledajíce podmínky, při kterých dvě involuční projektivnosti (dvě korelace nebo kolineace a korelace) jsou záměnné čili mají produktem involuční projektivnost (kolineaci resp. korelaci), nalezneme: Dvě polárnosti prostorové jsou záměnné, jestliže jejich základní plochy jsou harmonicky sdruženy při dotyku podél kuželosečky nebo při průseku v prostorovém čtyrstranu; dávají v prvém případě involuční homologii s rovinou a středem v rovině společné kuželosečky resp. v pólu této roviny, v případě druhém involuční kolineaci dvojosou s osami v úhlopříčkách onoho čtyrstranu. Korelace polárná a korelace nulová jsou záměnné, jestliže jedna zborcená řada základní plochy oné patří do lineárního komplexu této; jejich produktem je involuční kolineace dvojosá s osami v přímkách, jež jsou společny druhé

zborcené řadě na uvedené ploše a komplexu uvedenému. Dvě nulové korelace dávají (jak nahoře uvedeno) involuční kolineaci dvojosou, jsou-li jejich lineární komplexy přímek v involuci, t. j. jsou-li (jednou) dvě sdružené přímky jedné korelace samodružnými v druhé. Involuční homologie a polárnost v prostoru jsou záměnné, jsou-li střed a rovina homologie sdruženy v dané polárnosti; produktem jejich je polárnost, jejíž základní plocha je v dané homologii sdružena k základní ploše polárnosti dané. Involuční homologie a nulová korelace nemohou býti záměnné. Involuční kolineace dvojosá a korelace polárná jsou záměnné, jestliže osy oné jsou samodružnými nebo sdruženými v této; v prvém případě vzniká jako produkt korelace nulová, jejíž lineární komplex obsahuje osy kolineace z jedné řady a všechny přímky z druhé řady na základní ploše polárnosti, v případě druhém vychází polárnost, jejíž základní plocha je v dvojosé kolineaci dané sdružena k základní ploše dané polárnosti. Involuční kolineace dvojosá a korelace nulová jsou záměnné, jestliže opět osy oné jsou samodružnými nebo sdruženými v této; produktem je zde polárnost, jejíž základní plocha obsahuje z lineárního komplexu kolineace v jedné řadě jen ony dvě osy a v druhé řadě všechny přímky, resp. korelace nulová, v níž osy kolineace jsou také sdruženy a jejíž lineární komplex je s komplexem dané korelace v involuci. Viz *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, p. 230 a n.

[7]) Korelace nemohou ovšem samy o sobě tvořiti grupy. Z konečných grup kolineací a korelací jest pozoruhodná na př. grupa 32 projektivností prostorových, obsahující subgrupu G_{16} prve uvedenou (složenou z identické kolineace a z 15 involučních kolineací dvojosých), dále 6 nulových korelací a 10 korelací polárných; k ní vede skupina šesti lineárních komplexů přímkových v involuci (šest nulových korelací po dvou záměnných). Konečnou grupu kolineací lze leckdy rozšířiti na grupu obsahující také korelace; na př. grupa 576 kolineací, při níž jest invariantní trojice desmických čtyrstěnů, tedy konfigurace $(12_6, 16_3)$ (jakož i trojice přidružená), tvoří spolu s 576 korelacemi téže vlastnosti grupu 1152 projektivností s invariantní jednou i druhou trojicí čtyrstěnů desmických; a grupa 1152 kolineací s invariantní skupinou dvou navzájem přidružených trojic takových čtyrstěnů (při čemž přistupujících 576 kolineací převádí jednu trojici v druhou) rozšiřuje se týmž počtem korelací v grupu 2304 projektivností, jež převádějí konfiguraci právě uvedenou v ni samu. Tuto grupu vyšetřuje *J. Feder*, Die Configuration $(12_6, 16_3)$ und die zugehörige Gruppe von 2304 Collineationen und Correlationen, Math. Annalen 47 (1896); viz také *E. Steinitz*, Die Geraden der Reye'schen Konfiguration, Archiv Math. Phys. (3) 1 (1901); *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, p. 332 a n.

[8]) Lineární komplex, sestávající ze všech ∞^3 přímek, jež protínají pevnou přímku v prostoru, sluje obyčejně *speciální komplex lineární*. K němu příslušná nulová korelace je zvrhlá: libovolnému bodu X mimo pevnou přímku o ležícímu odpovídá rovina Xo, bodu na o odpovídá každá rovina jím jdoucí; libovolné rovině η mimo o odpovídá její bod ηo, rovině jdoucí přímkou o odpovídá každý bod na ní ležící.

[9]) Při stanovisku metrickém slují v nulové korelaci a v příslušném lineárním komplexu přímky, sdružené k přímkám nevlastním, *průměry* lineárního komplexu; procházejíce nevlastním bodem, sdruženým k nevlastní rovině prostoru, jsou všechny rovnoběžné; bodům téhož průměru odpovídají incidentní roviny rovnoběžné, jdoucí totiž přímkou nevlastní, k průměru tomu sdruženou. Průměr sdružený v nulové korelaci k poláře nevlastního bodu, jež tomuto v absolutní polárnosti na nevlastní rovině, k němu v korelaci sdružené, koresponduje, je kolmý k rovinám, které jeho bodům odpovídají, a sluje *osou* lineárního komplexu. Paprsky komplexu osu protínající jsou k ní kolmé, obráceně všechny přímky osu kolmo protínající patří komplexu. Přímky komplexu osu neprotínající a mající od ní

konstantní vzdálenost v jsou od ní odchýleny o konstantní úhel φ téhož smyslu; vzdálenost v a úhel φ mění se tak, že součin $v \,.\, \mathrm{tg}\, \varphi$ zůstává pro celý komplex konstantní (*parametr* komplexu, kladný nebo záporný). Polohou své osy a velikostí parametru jest lineární komplex určen. Lineární komplex přímek je invariantní při každém pošinutí podél své osy i při každém otočení kolem ní (tedy při pohybu šroubovém s touto osou).

Möbiovo pojmenování nulový systém mělo při tomto pojímání lineárního komplexu původ v mechanice (přímky lineárního komplexu mají totiž ve statice ten význam, že při redukci dané soustavy sil v prostoru moment soustavy vzhledem k nim jest roven nule).

XI. PLOCHY A ČÁRY PROSTOROVÉ.

120. Plochy druhého stupně a druhé třídy. *a*) Analyticky *definujeme*

plochu 2. stupně jako soubor reálných nebo imaginárních bodů, jejichž homogenní souřadnice x_1, x_2, x_3, x_4 *vyhovují rovnici kvadratické*

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + \\ + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0.$$

plochu 2. třídy jako soubor reálných nebo imaginárních rovin, jejichž homogenní souřadnice u_1, u_2, u_3, u_4 *vyhovují rovnici kvadratické*

$$a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2 + a_{44}u_4^2 + \\ + 2a_{12}u_1u_2 + 2a_{13}u_1u_3 + 2a_{14}u_1u_4 + \\ + 2a_{23}u_2u_3 + 2a_{24}u_2u_4 + 2a_{34}u_3u_4 = 0.$$

Uvedená funkce čtyř proměnných x_1, x_2, x_3, x_4, resp. u_1, u_2, u_3, u_4 jest *kvaternární forma kvadratická*, kterou krátce píšeme

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ nebo } f(x, x), \text{ resp. } \varphi(u_1, u_2, u_3, u_4) \text{ nebo } \varphi(u, u);$$

položíme-li $a_{hk} = a_{kh}$, resp. $\alpha_{hk} = \alpha_{kh}$, můžeme výraz na levé straně rovnice složiti jako součet

$$\sum_h \sum_k a_{hk}x_hx_k \quad \text{čili} \quad \sum_{h,k} a_{hk}x_hx_k,$$

kde indexy h, k nabývají hodnot 1, 2, 3, 4, a obdobně v případě duálním. Součinitele a_{hk} i α_{hk} předpokládáme reálné.

Kvadratická forma $f(x, x)$ může býti složena ze čtyř forem lineárních

$$f_1(x_k) \equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \equiv a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4,$$
$$f_2(x_k) \equiv a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \equiv a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4,$$
$$f_3(x_k) \equiv a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \equiv a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4,$$
$$f_4(x_k) \equiv a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \equiv a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4$$

ve tvaru

$$f(x, x) \equiv x_1f_1(x_k) + x_2f_2(x_k) + x_3f_3(x_k) + x_4f_4(x_k);$$

tyto lineární funkce $f_1(x_k), f_2(x_k), f_3(x_k), f_4(x_k)$, kde index k u x_k, zastupující 1, 2, 3, 4, nebo celý argument pro zjednodušení vynecháme, jsou polovice parciálních derivací dané funkce kvadratické podle jednotlivých proměnných, jak indexem naznačeno.

Obdobně je složena bilineární forma proměnných x_1, x_2, x_3, x_4 a x'_1, x'_2, x'_3, x'_4

$$x_1f_1(x') + x_2f_2(x') + x_3f_3(x') + x_4f_4(x') \equiv x'_1f_1(x) + x'_2f_2(x) + x'_3f_3(x) + x'_4f_4(x),$$

jež je souměrná vzhledem k oběma skupinám proměnných x_k a x'_k; značí se stručně $f(x, x')$ a sluje *polárná forma* dané formy kvadratické; pro $x'_k \equiv x_k$ přechází tato bilineární souměrná forma v původní formu kvadratickou.

Determinant 4. stupně, složený z koeficientů a_{hk} dané kvaternární formy kvadratické, sluje determinantem nebo diskriminantem formy té nebo rovnice a příslušné plochy 2. stupně; označíme jej písmenem A, takže

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix};$$

protože platí $a_{hk} = a_{kh}$, jest determinant A souměrný.

Lineární transformace

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x'_1 + \beta_1 x'_2 + \gamma_1 x'_3 + \delta_1 x'_4, \\ x_2 &= \alpha_2 x'_1 + \beta_2 x'_2 + \gamma_2 x'_3 + \delta_2 x'_4, \\ x_3 &= \alpha_3 x'_1 + \beta_3 x'_2 + \gamma_3 x'_3 + \delta_3 x'_4, \\ x_4 &= \alpha_4 x'_1 + \beta_4 x'_2 + \gamma_4 x'_3 + \delta_4 x'_4, \end{aligned}$$

jejíž determinant $(\alpha_1\beta_2\gamma_3\delta_4) \neq 0$, převádí danou formu kvadratickou $f(x, x)$ v kvadratickou formu

$$\begin{aligned} f(\alpha, \alpha)\, x'_1{}^2 + f(\beta, \beta)\, x'_2{}^2 + f(\gamma, \gamma)\, x'_3{}^2 + f(\delta, \delta)\, x'_4{}^2 + 2f(\alpha, \beta)\, x'_1 x'_2 + 2f(\alpha, \gamma)\, x'_1 x'_3 + \\ + 2f(\alpha, \delta)\, x'_1 x'_4 + 2f(\beta, \gamma)\, x'_2 x'_3 + 2f(\beta, \delta)\, x'_2 x'_4 + 2f(\gamma, \delta)\, x'_3 x'_4 = 0. \end{aligned}$$

O determinantu A' této transformované formy platí

$$A' = (\alpha_1\beta_2\gamma_3\delta_4)^2 \cdot A;$$

jest tedy determinant kvadratické formy jejím invariantem.[1])

Analogické relace platí pro formu duální $\varphi(u, u)$ a její determinant $A \equiv (\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44})$.[2])

[1]) Protože totiž koeficienty formy transformované jsou $f(\varphi,\psi) = \Sigma\varphi_k \cdot f_k(\psi)$, kde $\varphi, \psi = \alpha, \beta, \gamma, \delta$, jest determinant A' z nich složený součinem determinantu $(\alpha_1\beta_2\gamma_3\delta_4)$ a determinantu z prvků $f_k(\psi)$, tento pak jest součinem determinantu $(\alpha_1\beta_2\gamma_3\delta_4)$ a determinantu $(\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44}) \equiv A$.

[2]) Pro analytickou teorii ploch 2. stupně a 2. třídy jest uvésti mimo přehled *O. Staudeův* v Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften III. 2 (*C2*: Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven, 1904), rozšířený (*A. Grévym*) v Encyclopédie des sciences mathématiques III. 4 (22: Quadriques, 1914), také v Pascalově Repertorium der höheren Mathematik, 2. vyd. II. 2 (kap. 25, 26 a 28, 1922) spisy: *O. Hesse*, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung (3. vyd., revid. a doplnil S. Gundelfinger, 1876); *G. Salmon*, A treatise on the analytic geometry of three dimensions I (6. vyd. 1914; něm. zpracování 4. vyd. 1898); *A. Clebsch-F. Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie II (1891); *W. Killing*, Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten II (1901); *L. Heffter*, Lehrbuch der analytischen Geometrie II (1923).

b) Libovolná (lineární) *řada bodová má s plochou 2. stupně společné dva body reálné různé nebo splývající nebo imaginární sdružené nebo náleží celá ploše.*

Libovolný (lineární) *svazek rovinový má s plochou 2. třídy společné dvě roviny reálné různé nebo splývající nebo imaginární sdružené nebo náleží celý ploše.*

Neboť přímka (osa řady bodové), určená jako spojnice dvou (reálných) bodů $X(x_k)$ a $X'(x'_k)$, má s plochou 2. stupně $f(x, x) = 0$ společný svůj bod $(x_k + \lambda x'_k)$, jestliže jeho souřadnice vyhovují rovnici této plochy, t. j. platí-li

$$f(x_1 + \lambda x'_1,\ x_2 + \lambda x'_2,\ x_3 + \lambda x'_3,\ x_4 + \lambda x'_4) = 0$$

čili

$$\lambda^2 f(x', x') + 2\lambda f(x, x') + f(x, x) = 0.$$

Tato rovnice 2. stupně pro konstantu λ, určující bod přímky XX' na uvažované ploše ležící, může míti všechny koeficienty rovny nule; není-li tomu tak, t. j. má-li aspoň jeden koeficient od nuly různý, má rovnice ta (jenom) dva kořeny reálné různé nebo imaginární sdružené nebo reálné splývající podle toho, je-li $f^2(x, x') - f(x, x) \,.\, f(x', x') > 0$ resp. < 0 resp. $= 0$; v posledním případě sluje přímka XX' *tečnou* (přímkou) plochy 2. stupně. Jestliže konečně platí $f(x, x) = 0$, $f(x, x') = 0$, $f(x', x') = 0$, vyhovuje rovnici té každé λ: všechny body přímky XX' leží na ploše, přímka je (vytvořující) *přímkou plochy* 2. stupně. Obdobně v případě duálním; zejména jest přímka uu' tečnou přímkou plochy $\varphi(u, u) = 0$, platí-li $\varphi^2(u, u') - \varphi(u, u) \,.\, \varphi(u', u') = 0$.

Libovolná rovina (pole bodové) *má s plochou 2. stupně společnou čáru 2. stupně, není-li snad její součástkou.*

Libovolný bod (trs rovinový) *má s plochou 2. třídy společný kužel 2. třídy, není-li snad její součástkou.*

Neboť rovina, určená třemi body svými $X(x_k)$, $X'(x'_k)$ a $X''(x''_k)$, obsahuje všechny a pouze body o souřadnicích $x_k + \lambda x'_k + \mu x''_k$, kde λ, μ jsou proměnné parametry; zavedeme-li parametry homogenní, jsou body roviny té dány souřadnicemi $\lambda_1 x_k + \lambda_2 x'_k + \lambda_3 x''_k$. O bodech společných této rovině a ploše 2. stupně $f(x, x) = 0$ platí

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x'_1 + \lambda_3 x''_1,\ \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x'_2 + \lambda_3 x''_2,\ \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x'_3 + \lambda_3 x''_3,$$
$$\lambda_1 x_4 + \lambda_2 x'_4 + \lambda_3 x''_4) = 0$$

čili

$$\lambda_1^2 f(x, x) + \lambda_2^2 f(x', x') + \lambda_3^2 f(x'', x'') + 2\lambda_1\lambda_2 f(x, x') +$$
$$+ 2\lambda_1\lambda_3 f(x, x'') + 2\lambda_2\lambda_3 f(x', x'') = 0;$$

vidíme tedy, že obecně vyplňují čáru 2. stupně. K témuž výsledku dospějeme, užijeme-li takové transformace souřadnic x_k v x'_k, jež danou rovinu převádí třebas v rovinu $x'_4 = 0$ a danou plochu 2. stupně v plochu, jejíž rovnice $f(x', x') = 0$ má koeficienty a'_{hk}; body společné této ploše 2. stupně a této rovině tvoří obecně čáru 2. stupně $a'_{11}x'^2_1 + a'_{22}x'^2_2 +$

$+ a'_{33}x'^2_3 + 2a'_{12}x'_1x'_2 + 2a'_{13}x'_1x'_3 + 2a'_{23}x'_2x'_3 = 0$. Kuželosečka společná ploše 2. stupně a poli bodovému jest buď pravá reálná (jest průsečnou čarou plochy s rovinou pole toho) nebo pravá imaginární nebo zvrhlá (ve dvě přímky různé reálné nebo imaginární sdružené nebo splývající). Duálně kužel společný ploše 2. třídy a trsu rovinovému jest buď pravý reálný (jest promítajícím kuželem plochy z bodu toho, středu trsu) nebo pravý imaginární nebo zvrhlý. Jsou-li však nule rovny všechny koeficienty v kvadratické rovnici pro λ_k (resp. je-li $a'_{hk} = 0$ pro $h, k = 1, 2, 3$), leží všechny body uvažované roviny na ploše 2. stupně, t. j. rovina ta je součástí plochy 2. stupně; a duálně. Hořejší větu (obě věty duální) o společných prvcích přímky a plochy 2. stupně, resp. 2. třídy, můžeme pak odůvodniti poukazem na větu o společných prvcích čáry 2. stupně a řady bodové v její rovině ležící, resp. kužele 2. třídy a svazku rovinového s osou jdoucí jeho vrcholem.

Jako podmínku pro přímku spojující body (x_k) a (x'_k), aby byla tečnou přímkou plochy 2. stupně, jsme nalezli rovnici

$$f^2(x, x') - f(x, x) \,.\, f(x', x') = 0;$$

také ovšem vytvořující přímky plochy 2. stupně, existují-li, jsou touto rovnicí zahrnuty. Pokládáme-li bod (x'_k) za pevný bod, na dané ploše neležící, a (x_k) za bod proměnný, vyhovují uvedené rovnici souřadnice všech bodů (x_k), jež spojeny s bodem (x'_k) dávají tečnu plochy uvažované. Tato plocha 2. stupně, body (x_k) vytvořená, jest kužel 2. stupně s vrcholem X'; protože je složen z tečen plochy dané, jdoucích bodem X', sluje tečným nebo *opsaným kuželem* plochy 2. stupně. Majíce také zřetel k případu duálnímu, můžeme tedy říci:

Tečny plochy 2. stupně $f(x, x) = 0$, *jdoucí libovolným bodem* (x'_k) *ploše nenáležejícím, tvoří kužel 2. stupně s rovnicí*

$$f^2(x, x') - f(x, x) \,.\, f(x', x') = 0.$$

Tečny plochy 2. třídy $\varphi(u,u) = 0$, *ležící v libovolné rovině* (u'_k) *ploše nenáležející, tvoří čáru 2. třídy s rovnicí*

$$\varphi^2(u, u') - \varphi(u, u) \,.\, \varphi(u', u') = 0.$$

Leží-li pevný bod $X'(x'_k)$ na dané ploše 2. stupně, platí $f(x', x') = 0$ a předcházející rovnice se redukuje na $f(x, x') = 0$, opsaný kužel se zvrhne v (dvojnásobnou) rovinu; obdobně v případě duálním. Tedy:

Tečné (a vytvořující) *přímky plochy 2. stupně* $f(x, x) = 0$, *jdoucí bodem* (x'_k) *plochy té, leží v rovině s rovnicí*

$$f(x, x') \equiv x_1f_1(x') + x_2f_2(x') + x_3f_3(x') + x_4f_4(x') = 0,$$

tedy se souřadnicemi $f_k(x')$, jež sluje *tečnou rovinou plochy* $f(x, x) = 0$ *v bodě* (x'_k).

Tečné (a vytvořující) *přímky plochy 2. třídy,* $\varphi(u, u) = 0$ *ležící v rovině* (u'_k) *plochy té, procházejí bodem s rovnicí*

$$\varphi(u, u') \equiv u_1\varphi_1(u') + u_2\varphi_2(u') + u_3\varphi_3(u') + u_4\varphi_4(u') = 0,$$

tedy se souřadnicemi $\varphi_k(u')$, jenž sluje *dotyčným bodem plochy* $\varphi(u,u) = 0$ *v rovině* (u'_k).

Tečná rovina plochy 2. stupně má s plochou tou vždy společnou zvrhlou čáru 2. stupně. Neboť kuželosečka, společná ploše $f(x, x) = 0$ a rovině vytvořené body $(\lambda_1 x_k + \lambda_2 x'_k + \lambda_3 x''_k)$, jest zvrhlá tehdy a jen tehdy, je-li determinant z koeficientů její rovnice roven nule, t. j. jestliže

$$\begin{vmatrix} f(x, x) & f(x, x') & f(x, x'') \\ f(x', x) & f(x', x') & f(x', x'') \\ f(x'', x) & f(x'', x') & f(x'', x'') \end{vmatrix} = 0;$$

avšak pro bod (x_k) na uvažované ploše platí $f(x, x) = 0$, pro tečnou rovinu plochy té v bodě (x_k) s proměnným bodem (x'_k) nebo (x''_k) pak platí $f(x, x') = 0$ a $f(x, x'') = 0$, takže podmínka ta je splněna. Duálně má dotyčný bod plochy 2. třídy s plochou tou společný zvrhlý kužel 2. třídy.

Tečná rovina plochy $f(x, x) = 0$ v bodě jejím jest neurčitá, jestliže souřadnice bodu toho vyhovují rovnicím

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad f_3(x) = 0, \quad f_4(x) = 0;$$

takový bod sluje *singulárním bodem* plochy $f(x, x) = 0$ a plocha jej obsahující *zvrhlou plochou* 2. stupně. Nutnou a dostačující podmínkou toho jest $A = 0$; neboť existuje-li na ploše bod, jehož souřadnice splňují uvedené rovnice, platí $A = 0$; obráceně platí-li $A = 0$, musí uvedené čtyři rovnice míti (nenulové) řešení, a bod tak získaný leží na ploše $f(x, x) = 0$, protože pro jeho souřadnice platí $\Sigma x_k f_k(x) = 0$. Duálně dotyčný bod plochy $\varphi(u, u) = 0$ v rovině její jest neurčitý, vyhovují-li souřadnice roviny té rovnicím $\varphi_k(u) = 0$ pro $k = 1, 2, 3, 4$; taková rovina sluje *singulární rovinou* plochy $\varphi(u, u) = 0$ a plocha ji obsahující *zvrhlou plochou 2. třídy*; podmínkou toho jest $A = 0$.

Plocha 2. stupně a plocha 2. třídy, jež nejsou zvrhlé, slují *pravé*.

c) *Pravá plocha 2. stupně tvoří svými rovinami tečnými pravou plochu 2. třídy, při čemž její body jsou dotyčnými body rovin této plochy; duálně* (a obráceně) *tvoří pravá plocha 2. třídy dotyčnými body svých rovin pravou plochu 2. stupně, při čemž její roviny jsou tečnými rovinami této plochy.*

Plocha 2. stupně totiž, daná kvadratickou rovnicí

$$f(x, x) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0$$

čili rovnicí

$$x_1f_1(x) + x_2f_2(x) + x_3f_3(x) + x_4f_4(x) = 0$$

s koeficienty a_{hk}, o kterých platí $A \equiv (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}) \neq 0$, má v bodě svém (x_k) tečnou rovinu o souřadnicích $f_k(x)$; označme tyto souřadnice tečné roviny u_k. Kladouce tedy $f_k(x) \equiv u_k$, t. j.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= u_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= u_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= u_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= u_4, \end{aligned}$$

můžeme odtud (za učiněné suposice $A \neq 0$) vypočísti souřadnice x_k dotyčného bodu uvažované roviny tečné:

$$\begin{aligned} Ax_1 &= A_{11}u_1 + A_{21}u_2 + A_{31}u_3 + A_{41}u_4, \\ Ax_2 &= A_{12}u_1 + A_{22}u_2 + A_{32}u_3 + A_{42}u_4, \\ Ax_3 &= A_{13}u_1 + A_{23}u_2 + A_{33}u_3 + A_{43}u_4, \\ Ax_4 &= A_{14}u_1 + A_{24}u_2 + A_{34}u_3 + A_{44}u_4, \end{aligned}$$

kde koeficienty A_{hk} jsou minory determinantu A, příslušné k jednotlivým prvkům jeho a_{hk}. Čtyřčlenné výrazy zde uvedené lze zajisté pokládati za polovice parciálních derivací kvadratické formy proměnných u_k

$$\begin{aligned} F(u, u) \equiv A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + A_{44}u_4^2 + 2A_{12}u_1u_2 + 2A_{13}u_1u_3 + \\ + 2A_{14}u_1u_4 + 2A_{23}u_2u_3 + 2A_{24}u_2u_4 + 2A_{34}u_3u_4 = 0; \end{aligned}$$

píšeme je (analogicky jako u formy $f(x, x)$) značkami $F_k(u)$, takže $Ax_k = F_k(u)$.

Rovnici dané plochy 2. stupně

$$f(x, x) \equiv \Sigma x_k f_k(x) = 0$$

lze podle předcházejícího psáti ve tvaru

$$\sum \frac{1}{A} F_k(u) \,.\, u_k \equiv \frac{1}{A} F(u, u) = 0;$$

a vidíme, že tečné roviny plochy $f(x, x) = 0$ jsou rovinami plochy $F(u, u) = 0$.

Dále pak je patrno, že dotyčný bod roviny (u_k) jako prvku plochy $F(u, u) = 0$, maje souřadnice $F_k(u)$, jest podle hořejší skupiny rovnic pro Ax_k totožný s bodem (x_k), t. j. že tečná rovina plochy $f(x, x) = 0$ v bodě (x_k) jest totožna právě s tou rovinou plochy $F(u, u) = 0$, jejímž dotyčným bodem je bod (x_k).

Duální úvaha a počet vede u rovnice plochy 2. třídy

$$\begin{aligned} \varphi(u, u) \equiv a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2 + a_{44}u_4^2 + 2a_{12}u_1u_2 + 2a_{13}u_1u_3 + \\ + 2a_{14}u_1u_4 + 2a_{23}u_2u_3 + 2a_{24}u_2u_4 + 2a_{34}u_3u_4 = 0 \end{aligned}$$

k rovnici plochy 2. stupně

$$\begin{aligned} \Phi(x, x) \equiv A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + A_{33}x_3^2 + A_{44}x_4^2 + 2A_{12}x_1x_2 + 2A_{13}x_1x_3 + \\ + 2A_{14}x_1x_4 + 2A_{23}x_2x_3 + 2A_{24}x_2x_4 + 2A_{34}x_3x_4 = 0, \end{aligned}$$

jejíž koeficienty jsou minory, příslušné k prvkům a_{hk} v determinantu $A \equiv (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44})$.

Vyjadřují tedy, jak bylo uvedeno, rovnice

$$f(x, x) = 0 \text{ a } F(u, u) = 0 \text{ při } A \neq 0,$$

duálně rovnice

$$\varphi(u, u) = 0 \text{ a } \Phi(x, x) = 0 \text{ při } A \neq 0$$

tutéž plochu 2. stupně a 2. třídy čili pravou plochu kvadratickou (pravou kvadriku) jako útvar bodový nebo rovinový resp. obráceně.[3])

[3]) Forma $F(u, u)$ sluje *adjungovanou* k formě $f(x, x)$, rovněž tak forma $\Phi(x, x)$ k formě $\varphi(u, u)$. Přejdeme-li od formy $f(x, x)$ k její formě adjungo-

d) Obecná rovnice plochy kvadratické obsahuje deset členů a tedy deset koeficientů a_{hk} resp. α_{hk}; protože jeden z nich (různý od nuly) lze dělením odstraniti, vidíme, že soustava všech těchto ploch závisí na devíti parametrech, při čemž každé skupině hodnot devíti těchto konstant přísluší jediná plocha kvadratická, různým skupinám pak plochy různé. Tvoří tedy všechny kvadratické plochy (v počtu ∞^9) *systém devítimocný*.

Je-li dáno devět bodů (nebo duálně devět rovin), jimiž má plocha kvadratická procházeti (resp. jichž se má dotýkati), obdržíme, vložíce souřadnice bodů (resp. rovin) těch do obecné rovnice plochy 2. stupně (resp. 2. třídy), devět lineárních rovnic homogenních pro deset koeficientů a_{hk} (resp. α_{hk}). Soustava těchto rovnic poskytuje (jsou-li nezávislé) jediný systém devíti poměrů neznámých desíti součinitelů: *Devíti body prochází obecně jedna a jediná plocha 2. stupně*; duálně *devíti rovin se dotýká obecně jedna a jediná plocha 2. třídy.*

Rovnici plochy 2. stupně, určené devíti body $A(a_k), B(b_k), \ldots, I(i_k)$, dostaneme eliminací koeficientů a_{hk} z obecné rovnice plochy a z připojených devíti rovnic pro souřadnice bodů daných ve tvaru

$$\begin{vmatrix} x_1^2, \ldots, x_4^2, & x_1x_2, \ldots, x_3x_4 \\ a_1^2, \ldots, a_4^2, & a_1a_2, \ldots, a_3a_4 \\ b_1^2, \ldots, b_4^2, & b_1b_2, \ldots, b_3b_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_1^2, \ldots, i_4^2, & i_1i_2, \ldots, i_3i_4 \end{vmatrix} = 0;$$

tato rovnice jest vskutku 2. stupně a souřadnice daných bodů jí vyhovují. Jest neurčitá tehdy a jen tehdy, jsou-li nule rovny všechny determinanty matice složené z 2. až 10. řádku zde uvedených.[4])

---

vané $F(u, u) \equiv A \,.\, f(x, x)$ a od této jako $\varphi(u, u)$ opět k adjungované formě její $\Phi(x, x) \equiv A \,.\, \varphi(u, u)$, při čemž koeficienty ve formě $\Phi(x, x)$ jsou minory determinantu A složeného z prvků A_{hk} a jsou rovny $a_{hk}A^2$, o determinantu jejich pak platí $A = A^3$, obdržíme původní formu $f(x, x)$, znásobenou faktorem A^2. Platí tedy: Forma adjungovaná k adjungované formě dané kvaternární formy kvadratické jest rovna původní této formě, znásobené čtvercem jejího determinantu.

Forma $F(u, u)$ se obdrží z matice pro determinant formy $f(x, x)$ připojením řádku a sloupce prvků $u_1\, u_2\, u_3\, u_4\, 0$ ve tvaru

$$F(u, u) \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \end{vmatrix}.$$

Rovnice $F(u, u) = 0$ jest rovnicí plochy $f(x, x) = 0$ v souřadnicích rovinových (jako útvaru tvořeného tečnými rovinami).

[4]) O podmínkách pro deset bodů, aby ležely na ploše kvadratické, pojednává analyticky *E. Hunyady*, Beitrag zur Theorie der Flächen zweiten Grades, Journal r. a. Math. 89 (1880).

121. Roztřídění ploch kvadratických. *a*) Mějme na zřeteli, že danou kvadratickou formu čtyř proměnných s reálnými koeficienty (jako vůbec při každém počtu proměnných) jest možno libovolnou reálnou lineární transformací s nenulovým determinantem převésti v algebraický součet vždy téhož počtu čtverců lineárních nezávislých forem s reálnými koeficienty, při čemž počet kladných a počet záporných čtverců zůstává nezměněn. Těchto čtverců může se u kvaternární formy kvadratické vyskytnouti 4 nebo 3 nebo 2 nebo 1; a protože u rovnice plochy kvadratické, která vzniká tím, že takovou formu položíme rovnou nule, nezáleží na změně znaménka u všech členů v opačná, mohou se při čtyřech členech rovnice vyskytovati jen tři případy, totiž 4 kladné členy nebo 3 kladné a 1 záporný nebo 2 kladné a 2 záporné, při třech členech dva případy, totiž 3 kladné členy nebo 2 kladné a 1 záporný, při dvou členech dva případy, totiž oba kladné nebo po jednom kladném a záporném, a konečně případ jediného členu kladného.

Lze tedy rovnici plochy 2. stupně $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, jejíž koeficienty ovšem nejsou všechny rovny nule, redukovati pouze na osm typů; jsou to, označíme-li lineární nezávislé formy proměnných souřadnic x_1, x_2, x_3, x_4 s reálnými součiniteli stručně $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, podle hořejšího tyto typy:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 0, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2 = 0, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 - \xi_4^2 = 0;$$
$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 = 0;$$
$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0, \quad \xi_1^2 - \xi_2^2 = 0; \quad \xi_1^2 = 0.$$

Ve třech případech na počátku uvedených jest plocha 2. stupně *pravá* (nemá bodu singulárního, determinant $A \neq 0$); v ostatních pěti jest plocha *zvrhlá* ($A = 0$), v prvních dvou případech zvrhlá v 1. stupni, v dalších dvou v 2. stupni a v případě posledním zvrhlá v 3. stupni.

Z pravých ploch 2. stupně nemá plocha $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 0$ bodu reálného, jest *imaginární*; ostatní dvě plochy pravé jsou reálné.

Z těchto obsahuje druhá dvě soustavy nekonečně velikého počtu reálných přímek mimoběžných. Neboť rovnici její $\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 - \xi_4^2 = 0$ lze rozložiti dvakrát v součin dvou rovnic lineárních, v rovnice

$$\xi_1 - \xi_3 = \lambda(\xi_2 - \xi_4) \text{ a } \xi_1 + \xi_3 = -\frac{1}{\lambda}(\xi_2 + \xi_4)$$

nebo v rovnice

$$\xi_1 - \xi_3 = \mu(\xi_2 + \xi_4) \text{ a } \xi_1 + \xi_3 = -\frac{1}{\mu}(\xi_2 - \xi_4);$$

všechny body, jež leží na obou rovinách první dvojice a tedy na jejich průsečnici při libovolné hodnotě parametru λ, leží na uvažované ploše 2. stupně, stejně body ležící na průsečnicích dvojic rovin s parametrem μ; a protože osy obou prvních svazků rovinových jsou mimoběžné (determinant z koeficientů čtyř rovin je určujících je různý od nuly), tvoří soustava průsečnic svazků těch kvadratickou řadu (přímek mimoběžných), rovněž tak soustava průsečnic druhých dvou svazků rovino-

vých. Plocha $\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 - \xi_4^2 = 0$ jest tedy *přímková* (zborcená); sluje také *hyperbolická*.

Obráceně obsahuje-li pravá plocha 2. stupně jedinou reálnou přímku, jest typu právě uvedeného. Neboť jsou-li rovnice předpokládané přímky na ploše $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = 0$, změňme soustavu souřadnic tak, aby $\varrho_1 = 0$ a $\varrho_2 = 0$ byly dvě nové roviny souřadnic; rovnice plochy musí míti tvar

$$\varrho_1\varrho_3 + \varrho_2\varrho_4 = 0,$$

kde ϱ_3, ϱ_4 jsou lineárně složeny z ϱ_1, ϱ_2 a ostatních dvou nových souřadnic (neboť přímka $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = 0$ leží na ploše); avšak uvedený dvojčlen lze nahraditi výrazem

$$\tfrac{1}{4}\,[(\varrho_1 + \varrho_3)^2 + (\varrho_2 + \varrho_4)^2 - (\varrho_1 - \varrho_3)^2 - (\varrho_2 - \varrho_4)^2],$$

v němž lineární formy $\varrho_1 \pm \varrho_3$, $\varrho_2 \pm \varrho_4$ jsou nezávislé (nelze jich redukovati na menší počet, protože plocha je pravá). Rovnice plochy nabývá tak tvaru hořejšího. Odtud vyplývá, že první z reálných pravých ploch 2. stupně $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2 = 0$ neobsahuje žádné reálné přímky, pročež bývá nazývána nezvrhlá reálná *nepřímková*, kratčeji *eliptická*.

Jak vidíme, jest determinant A u pravé plochy imaginární a plochy hyperbolické kladný, u pravé plochy eliptické záporný; a protože se A při lineární transformaci násobí čtvercem jejího determinantu, při změně znaménka u všech členů v rovnici plochy se pak jeho znaménko rovněž nemění, charakterisuje toto kladné resp. záporné znaménko determinantu A plochy uvedených typů.

U ploch zvrhlých v 1. stupni $\xi_1^2 + \xi_2^2 \pm \xi_3^2 = 0$ lze ξ_k pokládati za souřadnice přímky v trsu se středem (0, 0, 0, 1); rovnice ty vyjadřují kužele 2. stupně s uvedeným vrcholem, $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0$ kužel imaginární (s reálným vrcholem), $\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 = 0$ kužel reálný.[1])

[1]) Snadno dokážeme, že *všechny body reálné plochy kvadratické jsou téhož druhu, jsou hyperbolické nebo eliptické nebo parabolické podle toho, je-li diskriminant plochy kladný resp. záporný resp. nulový.* Jmenujeme totiž bod reálné plochy 2. stupně *hyperbolickým* nebo *eliptickým* nebo *parabolickým*, jestliže dvě přímky, v nichž tečná rovina její v bodě tom plochu protíná, jsou reálné různé resp. sdruženě imaginární resp. reálné splývající. Je předně patrno, že kuželové plochy kvadratické mají body parabolické. Vylučujíce vrchol kuželové plochy, položme do libovolného bodu plochy kvadratické reálné $f(x, x) = 0$ vrchol (0, 0, 0, 1) základního čtyrstěnu a do tečné roviny v bodě tom jednu stěnu tohoto čtyrstěnu, třebas $x_1 = 0$. Obecná rovnice uvažované plochy 2. stupně se touto transformací souřadnic zjednoduší: protože (0, 0, 0, 1) leží na ploše, jest $a_{44} = 0$; protože tečná rovina v bodě (0, 0, 0, 1) o rovnici $a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 = 0$ se ztotožní s rovinou $x_1 = 0$, jest dále $a_{24} = 0$, $a_{34} = 0$ (avšak $a_{14} \neq 0$). Obdržíme tedy rovnici plochy ve tvaru

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

Rovina tečná $x_1 = 0$ protíná tuto plochu v čáře $a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$, $x_1 = 0$, jež se ovšem rozpadá ve dvě přímky jdoucí dotyčným bodem (0, 0, 0, 1). Tyto dvě přímky jsou reálné různé nebo imaginární sdružené nebo reálné splývající podle toho, je-li výraz $a_{23}^2 - a_{22}a_{33}$ větší resp. menší než nula.

Plochy 2. stupně zvrhlé v 2. stupni $\xi_1^2 \pm \xi_2^2 = 0$ jsou dvojice různých rovin imaginárních (sdružených, s reálnou průsečnicí) nebo reálných; plocha zvrhlá v 3. stupni $\xi_1^2 = 0$ je tvořena rovinou dvojnásobnou.

Můžeme tedy plochy 2. stupně a plochy 2. třídy *projektivně* takto *roztříditi*:

Plocha 2. stupně může býti pravá imaginární nebo pravá eliptická (nepřímková) *nebo pravá hyperbolická* (přímková); *nebo se může zvrhnouti v* (pravý) *kužel 2. stupně imaginární nebo reálný*; *nebo se může rozpadnouti ve dvě různé roviny* (pole bodů) *imaginární nebo reálné nebo* konečně *v rovinu dvojnásobnou* (reálnou).

Plocha 2. třídy může býti pravá imaginární nebo pravá eliptická (nepřímková) *nebo pravá hyperbolická* (přímková); *nebo se může zvrhnouti v* (pravou) *čáru 2. třídy imaginární nebo reálnou*; *nebo se může rozpadnouti ve dva různé body* (trsy rovin) *imaginární nebo reálné nebo* konečně *v bod dvojnásobný* (reálný).

b) Chceme-li nalézti kriteria, podle kterých lze z koeficientů určité plochy kvadratické

$$f(x, x) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + \\ + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0$$

zjistiti typ této plochy, mějme na zřeteli lineární reálnou transformaci

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1\xi_1 + \beta_1\xi_2 + \gamma_1\xi_3 + \delta_1\xi_4, \\ x_2 &= \alpha_2\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \gamma_2\xi_3 + \delta_2\xi_4, \\ x_3 &= \alpha_3\xi_1 + \beta_3\xi_2 + \gamma_3\xi_3 + \delta_3\xi_4, \\ x_4 &= \alpha_4\xi_1 + \beta_4\xi_2 + \gamma_4\xi_3 + \delta_4\xi_4 \end{aligned}$$

s determinantem $(\alpha_1\beta_2\gamma_3\delta_4) \neq 0$, jež rovnici dané plochy 2. stupně převádí na tvar

$$\lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \lambda_3\xi_3^2 + \lambda_4\xi_4^2;$$

odtud vidíme, že o dvaceti součinitelích $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ a λ_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ musí platit deset rovnic

$$f(\alpha, \alpha) = \lambda_1, \quad f(\beta, \beta) = \lambda_2, \quad f(\gamma, \gamma) = \lambda_3, \quad f(\delta, \delta) = \lambda_4,$$
$$f(\alpha, \beta) = 0, \quad f(\alpha, \gamma) = 0, \quad f(\alpha, \delta) = 0, \quad f(\beta, \gamma) = 0, \quad f(\beta, \delta) = 0, \quad f(\gamma, \delta) = 0.$$

Vezměme speciálně v úvahu transformaci (orthogonální), jež součet $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ převádí v součet $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2$; odtud

---

resp. roven nule. Avšak diskriminant plochy s jednodušší rovnicí uvedenou má hodnotu $a_{14}^2(a_{23}^2 - a_{22}a_{33})$, jeho znaménko tudíž, protože $a_{14} \neq 0$, souhlasí se znaménkem výrazu předcházejícího; jest tedy bod $(0, 0, 0, 1)$ na uvažované ploše hyperbolický nebo eliptický nebo parabolický podle toho, je-li tento diskriminant kladný resp. záporný resp. nulový. K tomu stačí připojiti, že se transformací souřadnic znaménko diskriminantu plochy kvadratické nemění, takže o každém bodě dané plochy platí totéž, co o bodě prve zvoleném.

plyne pro součinitele transformace dalších deset rovnic

$$\Sigma\alpha_k^2 = 1, \quad \Sigma\beta_k^2 = 1, \quad \Sigma\gamma_k^2 = 1, \quad \Sigma\delta_k^2 = 1,$$
$$\Sigma\alpha_k\beta_k = 0, \quad \Sigma\alpha_k\gamma_k = 0, \quad \Sigma\alpha_k\delta_k = 0, \quad \Sigma\beta_k\gamma_k = 0, \quad \Sigma\beta_k\delta_k = 0, \quad \Sigma\gamma_k\delta_k = 0,$$

z těchto pak ještě deset

$$\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 + \delta_k^2 = 1 \quad \text{pro } k = 1, 2, 3, 4,$$
$$\alpha_h\alpha_k + \beta_h\beta_k + \gamma_h\gamma_k + \delta_h\delta_k = 0 \quad \text{pro } h, k = 1, 2, 3, 4 \text{ a } h \neq k.$$

Jestliže v první skupině desíti rovnic znásobíme každou ze čtyř, jež obsahují α_k, tedy rovnice

$$\Sigma\alpha_k f_k(\alpha) = \lambda_1, \quad \Sigma\beta_k f_k(\alpha) = 0, \quad \Sigma\gamma_k f_k(\alpha) = 0, \quad \Sigma\delta_k f_k(\alpha) = 0,$$

faktorem α_1 resp. β_1 resp. γ_1 resp. δ_1 a všechny sečteme, dostaneme se zřetelem k druhé skupině relací, platných pro substituci orthogonální, rovnici

$$f_1(\alpha) = \lambda_1\alpha_1;$$

obdobně dále při použití faktorů α_2, β_2, γ_2, δ_2, potom faktorů α_3, β_3, γ_3, δ_3, konečně faktorů α_4, β_4, γ_4, δ_4 obdržíme

$$f_2(\alpha) = \lambda_1\alpha_2, \; f_3(\alpha) = \lambda_1\alpha_3, \; f_4(\alpha) = \lambda_1\alpha_4.$$

Touže cestou nalezneme vždy ze čtyř rovnic, vybraných z téže první skupiny, analogické rovnice pro β_k, γ_k a δ_k, totiž

$$f_k(\beta) = \lambda_2\beta_k, \quad f_k(\gamma) = \lambda_3\gamma_k, \quad f_k(\delta) = \lambda_4\delta_k, \quad \text{kde } k = 1, 2, 3, 4.$$

Těmto šestnácti rovnicím musí koeficienty lineární transformace vyhověti; aby první čtyři rovnice (pro α_k), totiž rovnice

$$\begin{aligned}
a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + a_{14}\alpha_4 &= \lambda_1\alpha_1,\\
a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + a_{24}\alpha_4 &= \lambda_1\alpha_2,\\
a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + a_{34}\alpha_4 &= \lambda_1\alpha_3,\\
a_{41}\alpha_1 + a_{42}\alpha_2 + a_{43}\alpha_3 + a_{44}\alpha_4 &= \lambda_1\alpha_4
\end{aligned}$$

poskytovaly řešení nenulové $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4$, musí platiti

$$A(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

pro λ_1; táž podmínka pro λ_2, λ_3 a λ_4 vyplývá z druhé resp. třetí resp. čtvrté skupiny čtyř hořejších rovnic pro β_k resp. γ_k resp. δ_k.

Je nutno tedy, aby konstanty λ splnily rovnici $A(\lambda) = 0$ čili

$$\lambda^4 - \lambda^3\Sigma a_{hh} + \lambda^2\Sigma A_{hh,kk} - \lambda\Sigma A_{hh} + A = 0,$$

kde Σa_{hh} je součet členů v hlavní úhlopříčce determinantu A dané plochy 2. stupně, ΣA_{hh} součet minorů 3. stupně k nim příslušných a $\Sigma A_{hh,kk}$ součet minorů 2. stupně, vznikajících z A vynecháním h-tého a k-tého řádku i sloupce (s příslušným znaménkem, $h, k = 1, 2, 3, 4$, $h \neq k$).

Lze ukázati, že tato rovnice (t. zv. charakteristická rovnice kvaternární formy kvadratické $f(x, x)$) poskytuje čtyři kořeny λ_k jen reálné a že tyto kořeny, dosazeny do lineárních rovnic pro koeficienty α_k, β_k, γ_k, δ_k, dovolují určiti je tak, aby transformace jimi stanovená byla orthogonální.

Z koeficientů rovnice $A(\lambda) = 0$ lze určiti, kolik jejích kořenů je nenulových a jakého znaménka: Je-li $A \neq 0$, jsou všechny čtyři kořeny λ_k nenulové; je-li v řadě součinitelů A, ΣA_{hh}, $\Sigma A_{hh,kk}$, Σa_{hh}, 1 prvním nenulovým členem druhý, třetí, čtvrtý, jsou jen tři, resp. jen dva, resp. jen jeden kořen nenulový. Počet kladných a počet záporných kořenů rovnice charakteristické jest roven počtu shod resp. počtu změn ve znaménkách sousedních členů uvedené řady; pro povahu plochy je ovšem lhostejno, změní-li se znaménka všech členů její rovnice v opačná.

Vyšetříme-li v těchto směrech všechny možné případy, shledáme: Je-li $A \neq 0$, má transformovaná rovnice plochy čtyři členy: všechny mají stejné znaménko, jsou-li znaménka členů v řadě A, ΣA_{hh}, $\Sigma A_{hh,kk}$, Σa_{hh} buď $++++$ nebo $+-+-$; dva členy jsou kladné a dva záporné, je-li $A > 0$ a mají-li ostatní členy uvedené řady libovolná znaménka vyjma vytčená; tři členy mají stejná znaménka a čtvrtý opačné znaménko, je-li $A < 0$. V případě $A = 0$, $\Sigma A_{hh} \neq 0$ má rovnice tři členy: mají stejná znaménka, jsou-li znaménka členů v řadě ΣA_{hh}, $\Sigma A_{hh,kk}$, Σa_{hh} buď $+++$ nebo $-+-$, mají nestejná znaménka v ostatních případech. V případě $A = 0$, $\Sigma A_{hh} = 0$, $\Sigma A_{hh,kk} \neq 0$ má rovnice dva členy: stejného znaménka pro $\Sigma A_{hh,kk}$ kladné, různých znamének pro $\Sigma A_{hh,kk}$ záporné. Je-li konečně $A = 0$, $\Sigma A_{hh} = 0$, $\Sigma A_{hh,kk} = 0$, $\Sigma a_{hh} \neq 0$, má rovnice plochy člen jediný.

K tomu jest ještě poznamenati, že vhodnou volbou jednotkového bodu může rovnice předcházející transformací získaná, $\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2 + \lambda_4 \xi_4^2 = 0$ býti redukována na tvar, kde každý člen $\lambda_k \xi_k^2$ je nahrazen členem $+ \xi_k^2$ nebo $- \xi_k^2$.

Výsledek celé úvahy můžeme se zřením k odstavci předešlému a také pro případ duální vysloviti takto:

Plocha 2. stupně daná rovnicí $f(x, x) = 0$ *jest pravá, je-li determinant* $A \neq 0$: *jest imaginární nebo hyperbolická, je-li* $A > 0$, *a to imaginární, mají-li členové řady* ΣA_{hh}, $\Sigma A_{hh,kk}$, Σa_{hh} *znaménka* $+++$ *nebo* $-+-$, *hyperbolická v ostatních případech*; *jest eliptická, je-li* $A < 0$. *Jest kuželová, je-li* $A = 0$, *ale* $\Sigma A_{hh} \neq 0$, *a to imaginární, mají-li členové hořejší řady znaménka* $+++$ *nebo* $-+-$, *reálná*

Plocha 2. třídy daná rovnicí $\varphi(u, u) = 0$ *jest pravá, je-li determinant* $A \neq 0$: *jest imaginární nebo hyperbolická, je-li* $A > 0$, *a to imaginární, mají-li členové řady* ΣA_{hh}, $\Sigma A_{hh,kk}$, Σa_{hh} *znaménka* $+++$ *nebo* $-+-$, *hyperbolická v ostatních případech*; *jest eliptická, je-li* $A < 0$. *Jest čarou 2. třídy, je-li* $A = 0$, *ale* $\Sigma A_{hh} = 0$, *a to imaginární, mají-li členové hořejší řady znaménka* $+++$ *nebo* $-+-$,

v ostatních případech. Rozpadá se ve dvě různé roviny, je-li $A = 0$, $\Sigma A_{hh} = 0$, *ale* $\Sigma A_{hh,kk} \neq 0$, *a to v roviny imaginární, je-li* $\Sigma A_{hh,kk}$ *kladný, v reálné, je-li záporný. Jest konečně zvrhlá v rovinu dvojnásobnou, platí-li* $A = 0$, $\Sigma A_{hh} = 0$, $\Sigma A_{hh,kk} = 0$, *ale* $\Sigma a_{hh} \neq 0$.

reálná v ostatních případech. Rozpadá se ve dva různé body, je-li $A = 0$, $\Sigma A_{hh} = 0$, *ale* $\Sigma A_{hh,kk} \neq 0$, *a to v body imaginární, je-li* $\Sigma A_{hh,kk}$ *kladný, v reálné, je-li záporný. Jest konečně zvrhlá v bod dvojnásobný, platí-li* $A = 0$, $\Sigma A_{hh} = 0$, $\Sigma A_{hh,kk} = 0$, *ale* $\Sigma a_{hh} \neq 0$.[2])[3])

122. Polárné vlastnosti ploch kvadratických. *a*) Je-li dána pravá plocha 2. stupně $f(x, x) = 0$, protíná ji přímka procházející dvěma body v prostoru $X(x_k)$ a $X'(x'_k)$, jež neleží oba na ploše, v bodech o souřadnicích $x_k + \lambda x'_k$, kde $\lambda_{1,2}$ jsou kořeny rovnice

$$\lambda^2 f(x', x') + 2\lambda f(x', x) + f(x, x) = 0.$$

Tato dvojice bodů, jež má přímka XX' s danou plochou společny, stanoví na přímce té involuci řady bodové, tvoříc dvojici samodružných bodů jejích; involuce, body těmi jako samodružnými určená, je hyperbolická nebo eliptická podle toho, jsou-li průsečíky přímky XX' a plochy různé reálné nebo imaginární, jest parabolická, je-li XX' tečnou plochy.

Involuce, stanovená takto na přímce XX' plochou $f(x, x) = 0$, má rovnici

$$\lambda\mu f(x', x') + (\lambda + \mu) f(x', x) + f(x, x) = 0;$$

a tvoří-li body X, X' samy její dvojici, redukuje se rovnice involuce na tvar

$$f(x', x) = 0.$$

[2]) O projektivní klasifikaci ploch kvadratických pojednávají zejména *C. Koehler*, Über die Klassifikation der Kurven und Flächen zweiten Grades, Archiv Math. Phys. (3) 3 (1902) (k tomu poznámky *S. Gundelfingera* tamtéž); *L. Heffter*, Zur Klassifikation der quadratischen Formen, der Kurven und Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse, Journal r. a. Math. 126 (1903) (k čemuž poznámky a doplňky podává *S. Gundelfinger* tamtéž 127, 1904); *C. Koehler*, Geometrische Kriterien für die projektive Einteilung der nicht entarteten Kurven und Flächen zweiter Ordnung, Archiv Math. Phys. (3) 6 (1903); *L. Heffter*, Lehrbuch der analytischen Geometrie II (1923), p. 157 a n.

[3]) Z projektivní geometrie lze vyvoditi (do ní zařaditi) — jak bylo už podotčeno — podle myšlenky (o t. zv. projektivní metrice), jejíž původci jsou *A. Cayley* (1859) a *F. Klein* (1871), zejména obě *geometrie neeukleidské* (hyperbolickou i eliptickou) a *geometrii obyčejnou* (Eukleidovu) v prostoru: jejich obsahem jest soubor vlastností útvarů prostorových, jež zůstávají v platnosti při projektivních transformacích s invariantní plochou kvadratickou (*útvarem* základním čili t. zv. *absolutním*) buď pravou reálnou nepřímkovou, resp. pravou imaginární, resp. zvrhlou (jako útvar rovinový) v imaginární kuželosečku. Viz (vedle jiných publikací, uvedených v pozn. [13]) čl. 68) spec. *F. Klein*, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, 3. vyd. nově zprac. 1928. Všechny možné případy toho druhu odvozuje *D. M. Y. Sommerville*, Classification of geometries with projective metric, Proceedings Math. soc. Edinburgh 28 (1910).

Dva body uvažované involuce slují *body sdruženými vzhledem k dané ploše 2. stupně*. Duálně se definují a analyticky stanoví dvojice *sdružených rovin vzhledem k dané ploše 2. třídy* $\varphi(u, u) = 0$. Tedy:

Dva body (x_k) *a* (x'_k) *jsou sdruženy vzhledem k nezvrhlé ploše 2. stupně* $f(x, x) = 0$ *tehdy a jen tehdy, platí-li o jejich souřadnicích rovnice*

$$f(x, x') = 0.$$

Dvě roviny (u_k) *a* (u'_k) *jsou sdruženy vzhledem k nezvrhlé ploše 2. třídy* $\varphi(u, u) = 0$ *tehdy a jen tehdy, platí-li o jejich souřadnicích rovnice*

$$\varphi(u, u') = 0.$$

Na každé reálné přímce v prostoru, jež není přímkou plochy, existují vzhledem k dané ploše involuce sdružených bodů a involuce sdružených rovin, jejichž samodružné prvky jsou body plochy na přímce ležící resp. roviny plochy přímkou procházející.

b) Ke každému bodu (x'_k) přísluší na každé přímce jím jdoucí určitý bod, sdružený k němu vzhledem k dané pravé ploše 2. stupně, vyjímaje případ, kdy (x'_k) leží na ploše a přímka je tečnou přímkou plochy. Z rovnice

$$f(x, x') \equiv x_1 f_1(x') + x_2 f_2(x') + x_3 f_3(x') + x_4 f_4(x') = 0,$$

kterou spolu souvisí souřadnice bodů vzhledem k ploše $f(x, x) = 0$ sdružených, poznáváme, že *geometrickým místem bodů, k pevnému bodu* (x'_k) *vzhledem k dané ploše 2. stupně* $f(x, x) = 0$ *sdružených, jest určitá rovina s uvedenou rovnicí*; tato rovina o souřadnicích $f_k(x')$ sluje *polární rovina bodu* (x'_k) vzhledem k ploše $f(x, x) = 0$. Leží-li spec. bod (x'_k) na ploše, jest (se zřetelem k předešlému čl.) polární rovina k němu příslušná tečnou rovinou plochy v bodě tom.

Duálně nalezneme, že ke každé rovině (u'_k) přísluší v každém svazku rovin s osou na ní položenou určitá rovina, sdružená k ní vzhledem k dané ploše 2. třídy (vyjímaje opět případ roviny a tečné přímky plochy); *všechny roviny, k pevné rovině* (u'_k) *vzhledem k dané ploše 2. třídy* $\varphi(u, u) = 0$ *sdružené, tvoří trs rovin se středem o rovnici*

$$\varphi(u, u') \equiv u_1 \varphi_1(u') + u_2 \varphi_2(u') + u_3 \varphi_3(u') + u_4 \varphi_4(u') = 0$$

čili o souřadnicích $\varphi_k(u')$; bod ten sluje *pólem roviny* (u'_k) vzhledem k ploše $\varphi(u, u) = 0$. Spec. k tečné rovině přísluší jako pól její bod dotyčný.

Určeme k polárné rovině, příslušné ke zvolenému bodu (x'_k) vzhledem k dané ploše kvadratické $f(x, x) = 0$, příslušný pól vzhledem k téže ploše $F(u, u) = 0$, duálně pojaté: jsou-li $f_k(x') \equiv u'_k$ souřadnice polárné roviny, jsou $F_k(u')$ souřadnice pólu k ní příslušného, a protože platí $F_k(u') = A x'_k$, jest hledaným bodem původní bod (x'_k). Tedy *pólem polárné roviny libovolného bodu* při téže ploše základní *jest bod ten sám* a duálně *polárnou rovinou pólu libovolné roviny jest* při téže ploše základní *rovina ta sama.*

Všimněme si ještě vzájemné polohy polární roviny příslušné k bodu (x_k) a pólu příslušného k rovině (u_k) při téže ploše základní v případě, že bod (x_k) a rovina (u_k) jsou incidentní. Polárná rovina bodu (x_k) vzhledem k $f(x, x) = 0$ má souřadnice $f_k(x)$, pól roviny (u_k) vzhledem k $F(u, u) = 0$ má souřadnice $F_k(u)$: jsou-li (x_k) a (u_k) incidentní, platí $\Sigma x_k u_k = 0$: tu však platí také $\Sigma f_k(x) \,.\, F_k(u) = 0$, t. j. uvažované prvky sdružené jsou rovněž incidentní, protože

$$\Sigma f_k(x) \,.\, F_k(u) = A \Sigma u_k x_k.$$

Z uvedeného vidíme, že daná pravá plocha kvadratická jest podkladem korespondence, v níž každému bodu a každé rovině v prostoru přísluší jediná určitá rovina (polárná) resp. jediný určitý bod (pól), při tom pak obráceně pólem roviny té jest bod původní resp. polárnou rovinou bodu toho jest rovina původní, a konečně prvkům incidentním příslušejí prvky opět incidentní: tato korespondence mezi prvky prostoru jest *polárnost*, známá z dřívějších úvah jako speciální korelace. Plocha kvadratická, od které při této definici polárnosti vycházíme, přísluší sobě samé (ploše té jako útvaru bodovému přísluší ona sama jako útvar rovinový a obráceně).

c) Předcházející úvahu jest doplniti pro přímky. Pokládáme-li zvolenou přímku p za průsečnici dvou rovin (u_k) a (u'_k), z nichž jedné a druhé vzhledem k dané ploše kvadratické odpovídá bod (x_k) resp. bod (x'_k), soudíme (z hořejšího poznatku o incidenci), že bodům přímky p, ježto leží na jedné i druhé rovině uvedené, příslušejí roviny jdoucí oběma vytčenými body, tedy přímkou $p' = XX'$; a z téhož důvodu rovinám jdoucím přímkou p příslušejí body ležící na téže přímce p'. Přímky p a p' slují (navzájem) *sdružené poláry* vzhledem k dané ploše kvadratické.

Je-li speciálně přímka p přímkou plochy, jest sdružená polára její p' s ní totožna; a jenom přímky plochy jsou vlastními polárami. Neboť pro přímku XX', vytvořenou body $(x_k + \lambda x'_k)$, leží-li na ploše $f(x, x) = 0$, platí

$$f(x, x) = 0, \quad f(x, x') = 0, \quad f(x', x') = 0;$$

jsou-li pak roviny (u_k) a (u'_k) polárnými rovinami bodů (x_k) resp. (x'_k), jest $u_k \equiv f_k(x)$, $u'_k \equiv f_k(x')$ a uvedené rovnice lze psáti

$$\Sigma x_k u_k = 0, \ \Sigma x_k u'_k = 0, \ \Sigma x'_k u_k = 0, \ \Sigma x'_k u'_k = 0,$$

kteréžto rovnice však svědčí, že roviny (u_k) a (u'_k) jsou incidentní s body (x_k) a (x'_k), takže průsečnice rovin těch jest totožna se spojnicí oněch bodů.

Je-li přímka p tečnou přímkou plochy, protíná ji sdružená polára, jsouc také tečnou přímkou plochy v téže rovině tečné a s týmž bodem dotyčným; obráceně protínají-li se dvě sdružené poláry, jsou obě tečnými přímkami plochy se společnými prvky uvedenými. Z podmínky pro tečnou přímku plochy $f(x, x) = 0$, t. j. z rovnice

$$\begin{vmatrix} f(x, x) & f(x, x') \\ f(x', x) & f(x', x') \end{vmatrix} = 0,$$

nalezneme totiž počtem, že spojnice bodů (x_k), (x'_k) a průsečnice příslušných rovin polárných (u_k), (u'_k) se protínají; a obráceně. A průsečík sdružených polár musí býti pólem roviny jimi jdoucí.

V protivě k větám o přímkách plochy a o tečných přímkách jejích usuzujeme pak, že sdružené poláry v obecné poloze (není-li totiž jedna z nich ani vytvořující ani tečnou přímkou plochy) jsou mimoběžné.

O sdružených polárách budiž ještě uvedeno: Protíná-li jedna ze sdružených polár plochu danou ve dvou různých bodech reálných nebo imaginárních, vysílá její polára reálné resp. imaginární tečné roviny k ploše té, a obráceně. Vyplývá to z relace

$$\begin{vmatrix} f(x,x) & f(x,x') \\ f(x',x) & f(x',x') \end{vmatrix} = \frac{1}{A^2} \cdot \begin{vmatrix} F(u,u) & F(u,u') \\ F(u',u) & F(u',u') \end{vmatrix},$$

v níž oba determinanty (nejsou-li rovny nule) mají stejné znaménko.

d) Z uvedeného plynou snadno mnohé vlastnosti pólu a polárné roviny, jakož i sdružených polár u dané plochy kvadratické.

Jako zvlášť významnou jest vytknouti větu o incidenci: Jsou-li dva prvky prostoru incidentní, jsou incidentní také prvky k nim polárné.

A větu o reálnosti prvků sdružených: Pól a rovina polárná, jakož i sdružené poláry jsou (pokud ovšem k sobě příslušejí vzhledem k ploše kvadratické s rovnicí o koeficientech reálných) buď současně reálné nebo současně imaginární. Správnost věty vidíme na analytickém vyjádření prvků polárných.

Protože sdružené prvky involuce jsou k sobě harmonické vzhledem k prvkům samodružným, platí:

Polárná rovina pevného bodu vzhledem k ploše 2. stupně jest geometrickým místem bodů harmonicky sdružených s tímto bodem vzhledem k bodům plochy (na přímkách bodem tím jdoucích).[1])

Pól pevné roviny vzhledem k ploše 2. třídy jest středem trsu rovin harmonicky sdružených k této rovině vzhledem k rovinám plochy (ve svazcích rovin s osami na rovině té ležícími).

Protože opsaný kužel plochy $f(x,x) = 0$ s vrcholem (x'_k) má rovnici $f^2(x,x') - f(x,x) \cdot f(x',x') = 0$ a pro dotyčné body jeho na ploše ležící platí $f(x,x) = 0$, tedy také $f(x,x') = 0$, a protože rovnice polárné roviny bodu (x'_k) jest $f(x,x') = 0$, nalézáme:

Polárná rovina pevného bodu vzhledem k ploše 2. stupně obsahuje čáru 2. stupně, která je opsanému kuželi z bodu toho vedenému a ploše společná.

Pól pevné roviny vzhledem k ploše 2. třídy jest vrcholem kužele 2. třídy, který je průsečné čáře 2. třídy v rovině té ležící a ploše společný.

[1]) Obecněji platí: Geometrickým místem bodu, jehož spojnice s pevným bodem protíná kvadriku ve dvou bodech, tvořících s oněmi čtveřinu konstantního dvojpoměru, jest plocha druhého stupně. Viz na př. *A. Clebsch-F. Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie II, p. 134.

A o sdružených polárách platí:

Přímka protínající dvě sdružené poláry má s nimi společnou dvojici bodů (a dvojici rovin), harmonicky sdružených vzhledem k oběma bodům (tečným rovinám) plochy s ní incidentním. Dvě sdružené poláry, jež jsou tečnami plochy, jsou harmonicky sdruženy vzhledem k přímkám plochy v jejich rovině obsaženým.

Polára p' sdružená k přímce p obsahuje dotyčné body obou tečných rovin, přímkou p k ploše jdoucích, a jest obsažena v obou tečných rovinách, v průsečících přímky p s plochou k této vedených.

e) Zvolíme-li bod $X(x_k)$ kdekoli mimo danou plochu 2. stupně $f(x, x) = 0$, jest polárnou rovinou jeho rovina o souřadnicích $f_k(x)$; zvolíme-li bod $X'(x'_k)$ mimo plochu na této rovině, prochází polárná rovina jeho o souřadnicích $f_k(x')$ bodem X; zvolíme-li bod $X''(x''_k)$ mimo plochu na průsečnici obou uvedených rovin, prochází jeho polárná rovina o souřadnicích $f_k(x'')$ bodem X i bodem X' (nikoli však průsečnicí rovin $f_k(x)$ a $f_k(x')$); průsečíkem rovin $f_k(x)$, $f_k(x')$ a $f_k(x'')$ jest tedy určitý bod X''' s polárnou rovinou $XX'X''$ (jež bodem X''' neprochází, takže X''' leží mimo plochu).

Body X, X', X'', X''', z nichž žádný neleží na dané ploše kvadratické, tvoří tedy čtyrstěn, jehož každý vrchol jest pólem protější stěny; tento sluje *čtyrstěnem autopolárným*. Čtyři body (x_k), (x'_k), (x''_k), (x'''_k), neležící v téže rovině, určují autopolárný čtyrstěn vždy a jenom tehdy, platí-li o jejich souřadnicích

$$f(x, x') = 0, \quad f(x, x'') = 0, \quad f(x, x''') = 0,$$
$$f(x', x'') = 0, \quad f(x', x''') = 0, \quad f(x'', x''') = 0.$$

Z rovnice polárné roviny bodu (x'_k) vzhledem k ploše $f(x, x) = 0$, totiž z rovnice $\Sigma x_k f_k(x') = 0$, a duálně z rovnice pólu roviny (u'_k) vzhledem k ploše $F(u, u) = 0$, totiž z rovnice $\Sigma u_k F_k(u') = 0$, specialisovaných pro vrcholy resp. stěny základního čtyrstěnu souřadnic, poznáváme:

Koeficienty $a_{h1}, a_{h2}, a_{h3}, a_{h4}$ v rovnici kvadratické plochy v souřadnicích bodových $f(x, x) = 0$ jsou souřadnice polárných rovin, příslušných k jednotlivým vrcholům O_h, a koeficienty $A_{h1}, A_{h2}, A_{h3}, A_{h4}$ (minory determinantu plochy A, příslušné k uvedeným prvkům jeho) *v rovnici téže plochy v souřadnicích rovinových $F(u, u) = 0$ jsou souřadnice pólů, příslušných k jednotlivým stěnám ω_h základního čtyrstěnu soustavy souřadnic vzhledem k této ploše.*

Hořejší podmínky pro souřadnice vrcholů autopolárného čtyrstěnu vzhledem k dané ploše kvadratické jsou totožné s podmínkami (dříve uvedenými) pro lineární transformaci, převádějící kvaternární formu kvadratickou ve tvar $\sum_1^4 \lambda_k x_k^2$; odtud plyne:

Rovnice plochy kvadratické v souřadnicích bodových $f(x, x) = 0$ nebo v souřadnicích rovinových $F(u, u) = 0$ *obsahuje pouze čtverce*

souřadnic tehdy a jen tehdy, *je-li základní čtyrstěn soustavy souřadnic autopolárným čtyrstěnem vzhledem k ploše.*[2])[3])

123. Svazek (a řada) ploch kvadratických. *a*) Jsou-li $f(x, x) \equiv \equiv \Sigma a_{hk} x_h x_k = 0$ a $g(x, x) \equiv \Sigma b_{hk} x_h x_k = 0$ rovnice dvou různých ploch 2. stupně (s reálnými součiniteli a_{hk} resp. b_{hk}), vyjadřuje rovnice

$$f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$$

soustavu kvadrik, jež sluje *svazek ploch kvadratických*; λ jest parametrem této soustavy, jehož každé hodnotě přísluší určitá kvadrika svazku. Připustíme-li u parametru λ vedle reálných hodnot i hodnoty imaginární, musíme vzíti v úvahu také útvary, jejichž rovnice 2. stupně má koeficienty imaginární.

Duálně sluje soustava ploch 2. třídy

$$\varphi(u, u) - \lambda \psi(u, u) = 0,$$

---

[2]) Že rovnice plochy 2. stupně, vztahované ke čtyrstěnu autopolárnému, (a jenom takové plochy) má tvar $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0$, vyplývá ovšem i odtud, že polárnými rovinami, jež přísluší k vrcholům O_k základního čtyrstěnu, jsou protější stěny jeho o rovnicích $x_k = 0$. Na základě této rovnice (zjednodušené ještě na rovnici se součiniteli ± 1) lze snadno rozlišiti možné typy ploch kvadratických, projektivně různé.

[3]) Mnohoúhelníky opsané ploše kvadratické (jejichž strany jsou totiž tečnami plochy) a mnohoúhelníky kvadrice vepsané, jejichž strany procházejí danými body, vyšetřovali hlavně *H. G. Zeuthen*, Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre, Math. Annalen 18 (1881) a 26 (1885); *A. Voss*, Über Polygone, welche einem Gebilde zweiten Grades umschrieben sind, Math. Annalen 25 (1885), a Über Poncelet-Zeuthen'sche Polygone, welche einem Gebilde zweiten Grades eingeschrieben sind, Math. Annalen 26 (1885); viz také *G. Loria*, I poligoni di Poncelet, 1889. Čtyrúhelník kvadrice opsaný má tu vlastnost, že dotyčné body jeho stran buď leží všechny v jedné rovině nebo každý spolu s průsečíkem své strany na rovině ostatními třemi určené odděluje harmonicky vrcholy strany té. O něm na př. *J. Sobotka*, O čtyrúhelníku ploše 2. stupně opsaném, Časopis mat. fys. 33 (1904). Mnohoúhelníky druhé skupiny (Poncelet-Zeuthenovy) existují při lichém počtu stran vždy dva, při sudém počtu buď žádný nebo v neomezeném množství.

O čtyrstěnech, jejichž hrany se dotýkají plochy kvadratické, uvádějí a dokazují řadu vět *J. Steiner*, *Th. Weddle* a zejména *Th. Reye*, Über Tetraeder, deren Kanten eine Fläche zweiter Ordnung berühren, Archiv Math. Phys. (3) 9 (1905), resp. (3) 16 (1910); *E. Brand*, Über Tetraeder, deren Kanten eine Fläche zweiter Ordnung berühren, Diss. Strassburg 1908; viz též *G. Kober*, Die harmonisch zugeordneten Flächen zweiten Grades, Diss. Halle 1888 (k tomu Math. Annalen 33, 1889, a tamtéž 40, 1892).

Mnohostěny vepsané jedné kvadrice a spolu opsané kvadrice druhé studoval *G. Fontené*, Sur l'extension du théorème des polygones de Poncelet à l'espace par des polyèdres de genre un, Nouv. Annales math. (4) 4 (1904) a Bulletin Soc. math. France 32 až 35 (1904 až 1907); čtyrstěny toho druhu *G. Humbert*, Sur les tétraèdres inscrits et circonscrits à des quadriques, Bulletin Soc. math. France 32 (1904).

kde $\varphi(u, u) = 0$ a $\psi(u, u) = 0$ jsou dvě různé plochy této třídy a λ proměnný parametr, *řadou ploch kvadratických*; vlastnosti řady plynou jako duální z vlastností svazku, na něž se tedy můžeme omeziti.

Plochy svazku a hodnoty parametru λ odpovídají si obapolně jednoznačně; uvedená rovnice svazku obsahuje totiž λ lineárně, a dvě různé hodnoty parametru určují dvě různé plochy kvadratické (jejichž stejnolehlé koeficienty nejsou úměrny), protože opačná suposice vede k hodnotám parametru sobě rovným. Jest tedy svazek ploch 2. stupně ve shodě s ∞^1 reálných hodnot parametru λ soustavou jednomocnou.

Plochy $f(x, x) = 0$ a $g(x, x) = 0$ slují základními plochami svazku $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$. Jako základní plochy svazku lze však zvoliti kterékoli dvě různé plochy jeho; neboť máme-li na zřeteli svazek $F - \mu G = 0$, kde $F \equiv f - \lambda_1 g = 0$ a $G \equiv f - \lambda_2 g = 0$ jsou při libovolných různých hodnotách λ_1 a λ_2 dvě různé plochy svazku $f - \lambda g = 0$, seznáme, že každá plocha tohoto svazku s parametrem μ jest obsažena v onom svazku s parametrem λ i obráceně (ježto ke každé hodnotě μ lze určiti hodnotu λ i obráceně), takže oba svazky $f - \lambda g = 0$ a $F - \mu G = 0$ jsou totožny. Jest tedy svazek ploch kvadratických stanoven libovolnými dvěma různými členy svými.

Každý bod, společný dvěma plochám svazku, jest společný všem plochám jeho; neboť platí-li pro bod (x_k) jak $f(x_k) = 0$, tak $g(x_k) = 0$, platí pro něj také $f(x_k) - \lambda g(x_k) = 0$ při každém λ. Soustava bodů společných dvěma a tedy všem plochám svazku tvoří *základní útvar* čili *basi* svazku. *Base svazku ploch kvadratických* jest řada bodová v prostoru čili *prostorová čára čtvrtého stupně* (*bikvadratická*); neboť libovolná rovina protíná dvě základní plochy svazku kvadrik ve dvou kuželosečkách, basi uvažovaného svazku tedy ve čtyřech průsečících těchto kuželoseček.

Každým bodem, ležícím mimo basi svazku ploch kvadratických, prochází jediná kvadrika svazku toho; neboť pro bod (x_k), pro který neplatí současně $f(x_k) = 0$ a $g(x_k) = 0$, lze z rovnice $f(x_k) - \lambda g(x_k) = 0$ vypočísti jedinou hodnotu parametru λ.

Duálně basi řady ploch kvadratických tvoří jednomocná soustava všech rovin (tečných), společných dvěma a tedy všem plochám řady; tato soustava rovinová jest ovšem 4. třídy.

b) Abychom nalezli všechny druhy svazku kvadrik, projektivně různé,[1]) vezměme v úvahu determinant, složený z koeficientů v rovnici svazku $f - \lambda g = 0$, tedy z prvků $a_{hk} - \lambda b_{hk} \equiv c_{hk}(\lambda)$, který označíme $C(\lambda)$; příslušná rovnice

$$C(\lambda) \equiv \lambda^4 B - \lambda^3 \Sigma a_{hk} B_{hk} + \lambda^2 S - \lambda \Sigma b_{hk} A_{hk} + A = 0$$

[1]) Klasifikaci průseků dvou kvadrik a svazků ploch kvadratických podali zejména: *L. Painvin*, Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre, Nouv. Annales math. (2) 7 a 8 (1868 a 1869); *W. Killing*, Der Flächenbüschel 2. Ordnung, Dissertation Berlin 1872; *O. Hesse*, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes (3. vyd. 1876); *L. Lévy*,

sluje *charakteristickou rovnicí* svazku ploch 2. stupně. Tato rovnice obsahuje vedle determinantů 4. stupně A a B, tvořených součiniteli a_{hk} resp. b_{hk} v rovnicích obou kvadrik základních, jakož i jejich minorů 3. stupně A_{hk} resp. B_{hk} v součtech součinů u λ a λ^3 ještě u λ^2 koeficient S, který je algebraickým součtem 36 součinů ze všech minorů 2. stupně determinantu A s příslušnými k nim minory 2. stupně determinantu B (jež totiž určíme, vynecháme-li v B dva řádky a dva sloupce na týchž místech, na kterých jsou prvky onoho minoru v A), při čemž každý součin má znaménko kladné nebo záporné podle toho, lze-li prvního činitele přemístit do 1. a 2. řádku i sloupce sudým resp. lichým počtem záměn vždy dvou sousedních řádků nebo sloupců.[2])

Kořeny rovnice $C(\lambda) = 0$ určují zvrhlé kvadriky svazku; vyloučíme-li zatím případ, kdy rovnice $C(\lambda) = 0$ je splněna pro každé λ (takže všechny kvadriky svazku jsou zvrhlé), může tedy svazek ploch kvadratických obsahovati jenom čtyři plochy zvrhlé. Zdali plocha svazku, příslušná ke kořenu λ_i uvažované rovnice, jest kvadratický kužel nebo dvojice rovin nebo rovina dvojnásobná, záleží na tom, je-li determinant $C(\lambda_i)$ řádu 3. nebo 2. nebo 1., t. j. jestliže minory nejvyššího stupně v $C(\lambda_i)$, jež nejsou všechny rovny nule, jsou stupně 3. resp. 2. resp. 1.

Je-li λ_i jednoduchým kořenem rovnice $C(\lambda) = 0$, musí $C(\lambda_i)$ býti řádu 3. Neboť dosadíme-li do $C(\lambda) = 0$ $\lambda = \lambda_i + \mu$, obdržíme z determinantu $C(\lambda)$ determinant o prvcích $a_{hk} - (\lambda_i + \mu) b_{hk} = c_{hk}(\lambda_i) - \mu b_{hk}$, takže rovnice $C(\lambda) = 0$ přejde v rovnici

$$\mu^4 B - \mu^3 \Sigma c_{hk}(\lambda_i) B_{hk} + \mu^2 S' - \mu \Sigma b_{hk} C_{hk}(\lambda_i) + C(\lambda_i) = 0,$$

kde S' se od S liší jen tím, že místo a_{hk} obsahuje $c_{hk}(\lambda_i)$; kdyby determinant $C(\lambda_i)$ byl řádu nižšího než 3., měla by tato rovnice kořen $\mu = 0$ (aspoň) dvojnásobný, takže by λ_i byl (aspoň) dvojnásobným kořenem rovnice $C(\lambda) = 0$ proti předpokladu. Obdobně zjistíme dále: Je-li λ_i dvojnásobným kořenem rovnice charakteristické, může $C(\lambda_i)$ býti řádu 3. nebo 2.; pro trojnásobný kořen λ_i může $C(\lambda_i)$ býti řádu 3. nebo 2. nebo 1.; konečně pro čtyrnásobný kořen λ_i může $C(\lambda_i)$ býti řádu 3. až 1. nebo také nultého (tehdy jsou všechny prvky v $C(\lambda_i)$ rovny nule, svazek se redukuje na jedinou plochu a sluje identický).

Intersection de deux quadriques, Nouv. Annales (3) 10 (1891); *H. Andoyer*, Sur l'intersection de deux quadriques, Nouv. Annales (3) 15 (1896); *C. Servais*, Sur les faisceaux de surfaces du second ordre, Mémoires Acad. Belgique (in 8°) (2) 1 (1905); *L. Heffter*, Lehrbuch der analytischen Geometrie II (1923); *O. Staude*, Zur Theorie des Flächenbüschels 2. Ordnung, Journal r. a. Math. 156 (1927); *R. Baldus*, Zur Theorie der Büschel von Flächen 2. Ordnung, Sitzungsberichte Akad. München 1931 (také souvislost s klasifikací prostorových kolineací a j.).

[2]) Pravé plochy kvadratické $f = 0$ a $g = 0$ (s diskriminantem A resp. B) slují *apolární* (nebo jedna harmonicky vepsaná resp. opsaná druhé), platí-li $\Sigma b_{hk} A_{hk} = 0$ nebo $\Sigma a_{hk} B_{hk} = 0$; v tom případě lze totiž autopolárný čtyrstěn jedné plochy vepsati resp. opsati ploše druhé. Jsou-li současně splněny obě uvedené podmínky, slují plochy ty *harmonické*.

Podle počtu i násobnosti různých kořenů λ_i rovnice $C(\lambda) = 0$ a podle řádu příslušných determinantů $C(\lambda_i)$ můžeme svazky kvadrik roztříditi v tolik typů, kolik jich bylo nalezeno při klasifikaci kolineací prostorových. V jednotlivých případech musíme věnovati pozornost zvrhlým plochám svazku a jejich bodům singulárním, jakož i povaze základní čáry svazku.

V nejobecnějším případě má charakteristická rovnice svazku kvadrik *čtyři kořeny různé* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a λ_4. Protože determinanty $C(\lambda_i)$ jsou zde všechny řádu 3. (všechny minory C_{hk} nejsou u žádného z kořenů těch rovny nule), *obsahuje tento I. typ svazku kvadrik čtyři kvadratické kužele. Vrcholy čtyř kuželů v tomto svazku obsažených jsou všechny různé, tvoří čtyrstěn a sice jediný společný autopolárný čtyrstěn všech kvadrik svazku.* Neboť kdyby vrcholy dvou kuželů svazku splývaly v jeden bod, byl by tento bodem base, což není možno (protože by takový vrchol kužele jako bod plochy $g = 0$ souřadnicemi svými splňoval rovnici $\Sigma b_{hk} C_{hk}(\lambda_i) = 0$, takže by rovnice $C(\lambda_i + \mu) = 0$ měla kořen 0 a proto rovnice $C(\lambda) = 0$ kořen λ_i kořenem dvojnásobným). Každý z vrcholů V_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ uvedených kuželů má vzhledem ke všem kvadrikám svazku tutéž polárnou rovinu; neboť pro jeho souřadnice platí $f_k(x) - \lambda_i g_k(x) = 0$, takže u rovnice polárné roviny jeho vzhledem ke každé kvadrice svazku se objeví tytéž souřadnice. Z rovnic tvaru právě uvedeného (vyjadřujících, že body V_i jsou singulární body kvadriky) vyplyne také, že kterékoli dva z bodů těch jsou vzhledem ke všem plochám svazku konjugovány; a protože se zřetelem k předcházejícímu nemohou všechny ležeti v přímce ani v rovině, tvoří čtyrstěn, ovšem autopolárný vzhledem ke všem plochám svazku a jediný. *Základní čarou* svazku kvadrik tohoto typu *jest obecná pravá čára prostorová 4. stupně*, průsek dvou kvadratických ploch kuželových bez společného vrcholu a bez společné přímky.[3])

c) Ostatní typy svazku ploch kvadratických obdržíme v případech, že z kořenů rovnice charakteristické jest jeden dvojnásobný a dva jednoduché nebo dva dvojnásobné nebo jeden trojnásobný a jeden jednoduchý nebo konečně jeden čtyrnásobný.

α) Je-li z kořenů rovnice $C(\lambda) = 0$ *jeden dvojnásobný* (λ_1) *a dva jednoduché* (λ_3, λ_4), mohou nastati dva případy podle toho, jestliže pro kořen λ_1 všechny determinanty 3. stupně C_{hk} nejsou nebo jsou rovny nule:

α_1) Svazek kvadrik (II. typu) obsahuje tři kužele (λ_1), (λ_3) a (λ_4), z nichž jenom kužel (λ_1) má svůj vrchol na čáře základní; každý z vrcholů těch má tutéž rovinu polárnou vzhledem ke všem plochám svazku;

[3]) Máme-li zřetel k reálnosti zvrhlých ploch svazku, musíme u tohoto I. typu lišiti čtyři případy: podle toho, jsou-li kořeny λ_i všechny čtyři reálné nebo dva reálné a dva imaginární nebo čtyři imaginární, obsahuje svazek kvadrik čtyři reálné kužele nebo také dva reálné a dva imaginární s vrcholy reálnými nebo dva reálné kužele a dva imaginární s imaginárními vrcholy nebo čtyři imaginární kužele s imaginárními vrcholy. Podobně u typů dalších.

u kužele (λ_1) je tato rovina, incidentní s jeho vrcholem, společnou tečnou rovinou všech ostatních ploch svazku; v rovině té leží vrcholy kuželů (λ_3) a (λ_4) na přímce nejdoucí vrcholem kužele (λ_1). Základní čarou tohoto svazku je nezvrhlá čára bikvadratická s dvojným bodem o různých tečnách ve vrcholu kužele (λ_1).

α_2) V druhém případě obsahuje svazek kvadrik (VI. typu) dvojici rovin (λ_1) a dva kužele (λ_3), (λ_4), jejichž vrcholy neleží na průsečnici obou rovin (λ_1), protože nejsou body base, ba mají spojnici mimoběžnou k oné průsečnici. Všechny plochy tohoto svazku mají ∞^1 společných čtyrstěnů autopolárných s dvěma vrcholy na průsečnici rovin (λ_1) a s dvěma ve vrcholech kuželů (λ_3) a (λ_4). Base svazku je zde složena ze dvou kuželoseček, v nichž roviny dvojice (λ_1) protínají kužele (λ_3) a (λ_4); tyto kuželosečky protínají se ve dvou bodech společné přímky rovin (λ_1), dotyčných bodech všech ploch svazku.[4])

β) Má-li rovnice $C(\lambda) = 0$ *dva kořeny dvojnásobné* (λ_1, λ_3), mohou oba determinanty $C(\lambda_1)$ a $C(\lambda_3)$ býti řádu 3. nebo může $C(\lambda_1)$ býti řádu 2. a $C(\lambda_3)$ řádu 3. nebo mohou oba býti řádu 2.:

β_1) V prvním případě existují ve svazku kvadrik (typu III.) dva kužele (λ_1) a (λ_3), jejichž vrcholy leží na základní čáře svazku a jsou dotyčnými body jeho ploch; spojnice vrcholů těch je společnou přímkou všech ploch svazku (také obou kuželů). Základní čára svazku skládá se z uvedené přímky a z nezvrhlé čáry kubické, jež má přímku tu za bisekantu.

β_2) V případě druhém jsou zvrhlými plochami svazku kvadrik (typu VII.) kužel (λ_3) a dvojice rovin (λ_1); vrchol kužele (λ_3) leží na basi svazku a plochy svazku se v něm navzájem dotýkají; společná tečná rovina svazku v bodě tom jest jednou rovinou dvojice (λ_1), druhá rovina ji protíná v přímce mimo vrchol kužele (λ_3). Base svazku je složena ze dvou přímek a kuželosečky, které se protínají ve dvou bodech na průsečnici rovin (λ_1), společných dotyčných bodech ploch svazku.

β_3) V třetím případě vyskytují se ve svazku kvadrik (typu X.) dvě dvojice rovin (λ_1) a (λ_3) s průsečnicemi mimoběžnými. Plochy tohoto svazku mají ∞^2 společných čtyrstěnů autopolárných s vrcholy na uvedených dvou přímkách. Base svazku je složena ze čtyř přímek tvořících prostorový čtyrúhelník; v jeho vrcholech se plochy svazku navzájem dotýkají.[5])

γ) Jestliže rovnice $C(\lambda) = 0$ má *kořen trojnásobný* (λ_1) *a jednoduchý* (λ_4), může determinant $C(\lambda_1)$ býti řádu 3. nebo 2. nebo 1., determinant $C(\lambda_4)$ ovšem řádu 3.:

[4]) K tomuto typu (VI. a k dalším, speciálnějším) přijdeme jednoduše z věty: Mají-li dvě kvadriky společnou kuželosečku, mají společnou ještě druhou kuželosečku, jež onu protíná ve dvou bodech nebo s ní splývá.

[5]) Tento typ (X.) obdržíme jednoduše z věty: Mají-li dvě kvadriky společné dvě přímky mimoběžné, mají společné další dvě mimoběžné přímky, ony protínající, takže průsečná čára ploch těch se skládá ze čtyř přímek tvořících prostorový čtyrúhelník.

γ_1) Svazek kvadrik prvního případu (typu IV.) obsahuje dva kužele (λ_1) a (λ_4); vrchol prvého je bodem base a dotyčným bodem ploch svazku; společná tečná rovina pravých kvadrik svazku ve vrcholu kužele (λ_1) je také rovinou obou kuželů. Základní čarou svazku je nezvrhlá čára bikvadratická s hrotem ve vrcholu kužele (λ_1), průsek obou kuželů svazku.

γ_2) Svazek kvadrik druhého případu (typu VIII.) má kužel (λ_4) a dvojici rovin (λ_1), při čemž vrchol onoho kužele neleží na průsečnici těchto rovin; v jednom bodě této průsečnice, ležícím na basi svazku, mají plochy svazku dotyk. Basi tohoto svazku tvoří dvě kuželosečky, průsek dvojice rovin (λ_1) s kuželem (λ_4), jež se ve zmíněném bodě navzájem dotýkají.

γ_3) Svazek kvadrik třetího případu (typu XII.) obsahuje kužel (λ_4) a dvojnásobnou rovinu (λ_1), jež není incidentní s vrcholem onoho kužele. Plochy svazku mají zde ∞^3 společných čtyrstěnů autopolárných s třemi vrcholy na rovině (λ_1) a čtvrtým ve vrcholu kužele (λ_4). Základní čarou svazku je dvojnásobná kuželosečka v rovině (λ_1), v níž tuto rovinu protíná kužel (λ_4); podél ní se všechny plochy svazku navzájem dotýkají.

δ) Má-li konečně rovnice charakteristická *kořen čtyrnásobný* (λ_1), může nejvyšší řád jejích minorů, jež nejsou všechny rovny nule, býti 3. nebo 2. nebo 1.:

δ_1) Svazek kvadrik (typu V.) má jako jedinou plochu zvrhlou kužel; jeho vrchol leží na čáře základní a je dotyčným bodem všech ploch svazku, jeho přímka ve společné tečné rovině je společnou přímkou těchto ploch. Základní čára se skládá z nezvrhlé čáry kubické a z uvedené přímky jako její tečny.

δ_2) Svazek kvadrik obsahuje dvojici rovin, jejichž průsečnice jest buď společnou tečnou všech ploch svazku nebo společnou přímkou jejich; v prvním případě (svazek typu IX.) je jeden bod této průsečnice bodem základní čáry a dotyčným bodem všech ploch svazku, v případě druhém (svazek typu XI.) platí totéž o všech bodech přímky té. Základní čára je složena v onom případě z dvojice přímek a kuželosečky o jediném společném bodě, v případě tomto ze dvou dvojic přímek se protínajících o jedné přímce společné (v průsečnici uvedené dvojice rovin) a ostatních dvou mimoběžných.

δ_3) Svazek kvadrik (typu XIII.) má jedinou zvrhlou plochu v rovině dvojnásobné, jež je společnou tečnou rovinou všech ploch svazku s určitým bodem dotyčným; base svazku skládá se ze dvou dvojných přímek, jdoucích v této rovině tímto bodem.

d) Svazek, jehož všechny kvadriky jsou zvrhlé, sluje *zvrhlý*; jest tedy svazek ploch kvadratických zvrhlý, je-li determinant jeho $C(\lambda)$ identicky (pro každou hodnotu λ) roven nule. Pro zvrhlý svazek kvadrik platí proto

$$B = 0, \quad \Sigma a_{hk} B_{hk} = 0, \quad S = 0, \quad \Sigma b_{hk} A_{hk} = 0, \quad A = 0.$$

Mohou se tu vyskytnouti tři případy: determinant $C(\lambda)$ je řádu 3., t. j. všechny jeho subdeterminanty 3. stupně nejsou identicky rovny nule; nebo je řádu 2., t. j. všechny minory 3. stupně jsou sice rovny nule, nejsou však identicky nule rovny všechny minory 2. stupně; nebo je řádu 1., t. j. všechny minory 2. stupně jsou rovny nule, nikoli však všechny prvky jeho. V prvním případě jest svazek složen z ploch kuželových, v druhém z dvojic rovin a v třetím z rovin dvojnásobných.

Svazek kvadratických ploch kuželových jest určen dvěma základními kužely (nezvrhlými) $\Sigma a_{hk}x_hx_k = 0$ a $\Sigma b_{hk}x_hx_k = 0$, kde $A = 0$ a $B = 0$; jejich vrcholy $(A_{h1}, A_{h2}, A_{h3}, A_{h4})$ a $(B_{h1}, B_{h2}, B_{h3}, B_{h4})$ buď nejsou nebo jsou totožny.

Základní kvadratické kužele zvrhlého svazku, jež mají různé vrcholy, mají společnou přímku (oba vrcholy spojující) *a podél ní společnou rovinu tečnou; totéž platí o všech kuželech svazku.* Suponujeme-li základní kužele nezvrhlé, takže aspoň jeden z minorů A_{hk} a jeden z B_{hk} je nenulový (třebas $A_{11} \neq 0$, $B_{11} \neq 0$), platí $A_{hk}A_{11} = A_{1h}A_{1k}$; relace $\Sigma b_{hk}A_{hk} = 0$, násobena faktorem A_{11}, dává tedy $\Sigma b_{hk}A_{1h}A_{1k} = 0$, což značí, že vrchol prvního kužele základního leží na druhém; obdobně nalézáme (po znásobení relace $\Sigma a_{hk}B_{hk} = 0$ faktorem B_{11}), že vrchol druhého základního kužele leží na prvém. Abychom pak zjistili, že oba základní kužele se společnou přímkou mají podél této společnou rovinu tečnou, položme vrcholy jejich do bodu O_1 (1, 0, 0, 0) resp. O_2 (0, 1, 0, 0): Rovnice prvního kužele jest zde $\Sigma a_{hk}x_hx_k = 0$, kde $h, k = 2, 3, 4$, rovnice druhého pak $\Sigma b_{hk}x_hx_k = 0$, kde $h, k = 1, 3, 4$; a protože vrchol prvého leží na druhém a vrchol druhého na prvém, platí $b_{11} = 0$, resp. $a_{22} = 0$. Vypočteme-li nyní hodnotu výrazu S, který je součtem ze součinů minorů 2. stupně determinantu A s příslušnými minory 2. stupně determinantu B (majíce na zřeteli, že v A jsou nenulové jen prvky $a_{23}, a_{24}, a_{33}, a_{34}, a_{44}$, v B pak jen prvky $b_{13}, b_{14}, b_{33}, b_{34}, b_{44}$), dostaneme výraz, který je podle hořejší střední podmínky zvrhlého svazku roven nule, což svědčí o tom, že tečná rovina prvého kužele ve vrcholu druhého jest rovinou tohoto druhého kužele; uvedená rovina tečná má totiž souřadnice $0, 0, a_{23}, a_{24}$, jež dosazeny do rovnice druhého kužele v souřadnicích rovinových, poskytují týž výsledek jako rovnice $S = 0$. Zvrhlý svazek kvadratických ploch kuželových s různými vrcholy skládá se tedy z kuželů, jejichž vrcholy leží na společné přímce jejich a jež se podél této přímky navzájem dotýkají; base tohoto svazku je tvořena dvojnásobnou přímkou společnou a společnou kuželosečkou.

Jestliže v druhém případě dva základní kužele svazku mají společný vrchol (minory A_{hk} jsou úměrny minorům B_{hk}), seznáme (položíce tento vrchol jejich do některého vrcholu čtyrstěnu souřadnic), že zvrhlý svazek kvadratických kuželů takto určený obsahuje vesměs kužele o společném vrcholu a jest průmětem svazku kuželoseček v rovině z bodu čili útvarem k tomuto svazku duálním.

Svazek kvadrik, složený z dvojic rovin, jest určen dvěma dvojicemi (různých) rovin. Z relace $S = 0$ (jež jediná zbývá z hořejších pěti podmínek zvrhlého svazku) lze dokázati, že průsečnice obou základních dvojic mají aspoň jeden bod společný; mají tedy tyto základní dvojice rovin buď společný bod nebo společnou přímku. *Základní a tedy všechny dvojice rovin zvrhlého svazku, jež mají různé průsečnice, mají společnou jednu rovinu a druhé roviny jejich procházejí společnou přímkou.* Neboť zvolíme-li u jedné základní dvojice rovin průsečnici jejich v přímce $x_1 = 0, x_2 = 0$, u druhé pak v přímce $x_1 = 0, x_3 = 0$, jsou rovnice těchto dvojic $\Sigma a_{hk} x_h x_k = 0$, kde $h, k = 1, 2$, a $\Sigma b_{hk} x_h x_k = 0$, kde $h, k = 1, 3$. Protože podle suposice minor 3. stupně C_{44} v determinantu $C(\lambda)$ je identicky roven nule a minory 2. stupně tam se vyskytující (složené z prvků 1. a 2. sloupce i řádku v A, resp. z 1. a 3. sloupce i řádku v B) nejsou rovny nule, dostaneme $a_{22} = 0$, $b_{33} = 0$. Odtud plyne, že obě zvolené kvadriky mají společnou rovinu $x_1 = 0$ a druhé jejich roviny se protínají v přímce jdoucí bodem O_4; totéž platí o všech členech svazku. Tento svazek kvadrik jest průmětem obdobného svazku zvrhlých kuželoseček. Mají-li však v druhém případě základní kvadriky svazku, složeného z dvojic rovin, společnou osu, jest zvrhlý svazek tvořen dvojicemi rovin ve svazku rovinovém (involuce dvojic rovin).

Jestliže konečně předpokládáme, že svazek kvadrik obsahuje jen roviny dvojnásobné, nalezneme (zvolíce základní dvě roviny dvojnásobné v rovinách jdoucích hranou čtyrstěnu souřadnic, jednu ve stěně jeho) z podmínky, že minory 2. stupně determinantu $C(\lambda)$ jsou identicky rovny nule, že takový svazek má všechny své členy totožné.

e) Libovolná rovina protíná svazek ploch 2. stupně ve svazku kuželoseček. Neboť při vhodné volbě soustavy souřadnic má uvažovaná rovina rovnici $x_4 = 0$; tato rovina protíná pak daný svazek kvadrik v soustavě čar

$$f(x_1, x_2, x_3, 0) - \lambda g(x_1, x_2, x_3, 0) = 0,$$

tedy ve svazku kuželoseček (s týmž parametrem λ).

Svazek kuželoseček, v němž rovina protíná svazek kvadrik, má obecně čtyři body základní; jsou to průsečíky roviny té s basí svazku kvadrik. Při zvláštní poloze roviny je tento průsečný svazek kuželoseček speciální; splynou-li dva nebo tři body jeho base, jest uvažovaná rovina tečnou resp. oskulační rovinou základní čáry svazku ploch kvadratických.

V obecném svazku kuželoseček existují tři kuželosečky zvrhlé; a protože rovina protínající plochu 2. stupně ve dvojici přímek, je tečnou rovinou plochy té, vyplývá odtud: *Libovolná rovina dotýká se obecně tří ploch ve svazku ploch kvadratických.* K tomu lze připojiti, že dotyčné body tří kvadrik svazku na uvažované rovině jsou po dvou harmonicky sdruženy vzhledem ke všem kvadrikám svazku, protože to platí o singulárních bodech zvrhlých kuželoseček, obsažených v průsečném svazku vzhledem ke všem kuželosečkám svazku toho.

Podobně nebo z výsledku, nalezeného u svazku kuželoseček, dostaneme věty: *Libovolná přímka protíná svazek ploch 2. stupně ve dvou bodových řadách involučně projektivních. Libovolná přímka dotýká se obecně dvou ploch ve svazku ploch kvadratických*; dotyčné body dvou těchto ploch na uvažované přímce jsou harmonicky sdruženy vzhledem ke každé kvadrice svazku.

Uvedené věty platí ovšem v případě, že přímka neleží na žádné z kvadratických ploch svazku. Přímka však, jež je přímkou některé plochy ve svazku obsažené, a jenom taková přímka protíná jiné plochy svazku ve dvojici bodů, náležejících basi svazku toho, takže je bisekantou této čáry. Neboť máme-li na zřeteli přímku $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, platí o průsečících jejích se svazkem kvadrik

$$(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) - \lambda(b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2) = 0;$$

tato rovnice vyjadřuje v obecném případě involuci nahoře uvedenou. Je-li však $a_{11} : b_{11} = a_{12} : b_{12} = a_{22} : b_{22} = \nu$, určuje rovnice ta při libovolném $\lambda \neq \nu$ jen dvojici bodů, při $\lambda = \nu$ je pak splněna identicky; a obráceně.[6])

124. Algebraické plochy *n*-tého stupně (a plochy *ν*-té třídy). *a*) *Algebraickou plochou*

n-tého stupně sluje (dvojmocná) *soustava bodů* (reálných nebo imaginárních), *jejichž homogenní souřadnice* x_1, x_2, x_3, x_4 *vyhovují algebraické rovnici n-tého stupně*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

ν-té třídy sluje (dvojmocná) *soustava rovin* (reálných nebo imaginárních), *jejichž homogenní souřadnice* u_1, u_2, u_3, u_4 *vyhovují algebraické rovnici ν-tého stupně*

$$\varphi(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0.$$

[6]) Lineární systém čili *svazek p-mocný* ploch 2. stupně jest soustava těchto ploch, definovaná rovnicí

$$\sum_0^p \lambda_h f_h(x) = 0,$$

kde $f_0 = 0$, $f_1 = 0, \ldots, f_p = 0$ jsou nezávislé (základní) plochy 2. stupně v počtu $p + 1$, svazek určující, a λ_h nezávislé parametry; p body v prostoru prochází obecně jedna a jediná plocha svazku. Duálně se definuje p-mocná řada ploch 2. třídy (s duální vlastností). O těchto soustavách ploch kvadratických pojednávají zejména *G. Darboux*, Sur les systèmes linéaires de coniques et de surfaces du second ordre, Bulletin sc. math. astron. 1 (1870); *Th. Reye*, Über lineare Systeme und Gewebe von Flächen zweiten Grades, Journal r. a. Math. 82 (1876). Nejdůležitější jsou a nejvíce byly vyšetřovány vedle svazku jednomocného svazek dvojmocný a svazek trojmocný. U nich je významná čára resp. plocha Jacobiova (č. nodální), vytvořená bodem, jehož polárné roviny vzhledem ke všem plochám svazku (v počtu ∞^2 resp. ∞^3) procházejí jednou přímkou resp. jedním bodem; útvar ten je také geometrickým místem vrcholů ploch kuželových ve svazku obsažených. Předmětem studia byly také speciální svazky dvojmocné (svazek, jehož plochy mají společnou prostorovou kubiku nebo kuželosečku a dva body nebo přímku a čtyři body, nebo pro jehož plochy existuje společný pěti-

Funkce $f(x_k)$ a $\varphi(u_k)$ jsou racionální celistvé funkce homogenní o čtyřech proměnných čili kvaternární formy, jejichž koeficienty předpokládáme reálné. Omezíme se zpravidla na plochy jako útvary bodové.[1])

Uspořádáme-li funkci $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ podle mocnin jedné z proměnných, nejčastěji x_4, a označíme-li ternární formu k-tého stupně ostatních tří proměnných x_1, x_2, x_3 stručně $u_k(x_1, x_2, x_3)$, lze rovnici plochy n-tého stupně psáti v úpravě

$$u_n + u_{n-1} \cdot x_4 + u_{n-2} \cdot x_4^2 + \ldots + u_1 \cdot x_4^{n-1} + u_0 \cdot x_4^n = 0.$$

Speciálně plocha n-tého stupně jdoucí vrcholem (0, 0, 0, 1) základního čtyrstěnu souřadnic nemá ve své rovnici členu $u_0 x_4^n$ (protože pro souřadnice bodu toho vymizí ostatní členové rovnice, takže $u_0 = 0$).

Protože ternární forma k-tého stupně obsahuje $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ členů (viz čl. 74 *a*), má rovnice plochy n-tého stupně členů a tedy koeficientů $\frac{1}{2}[1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n+1)(n+2)] = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$.[2])

Rovnice plochy n-tého stupně jest homogenní v těchto koeficientech a vyjadřuje tutéž plochu, i když všechny její součinitele libovolným (nenulovým) faktorem znásobíme; jest tedy plocha n-tého stupně stanovena (nezávislými) poměry uvedeného počtu konstant, tudíž $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 1 = \frac{1}{6}n(n^2 + 6n + 11)$ veličinami. Tyto veličiny lze určiti ze stejného počtu neodporujících sobě a nezávislých rovnic; zejména z rovnic vyjadřujících, že plocha prochází $\frac{1}{6}n(n^2 + 6n + 11)$ body obecně položenými. Vzhledem k tomu, že rovnice tyto podmínky podávající jsou lineární, jest *plocha n-tého stupně jednoznačně určena* $\frac{1}{6}n(n^2 + 6n + 11)$ *svými body v obecné poloze zvolenými.*[3])

úhelník té vlastnosti, že rovina jdoucí kterýmikoli třemi vrcholy jeho má svůj pól na přímce spojující ostatní dva jeho vrcholy) a trojmocné (svazek kvadrik se společnou kuželosečkou nebo přímkou nebo se společnými dvěma přímkami nebo šesti body nebo se společným čtyrstěnem autopolárným).

[1]) Přehled teorie algebraických ploch podávají *G. Castelnuovo* a *F. Enriques* v Encyklopädie der math. Wissenschaften III. 2 (*C* 6*a*: Grundeigenschaften der algebraischen Flächen, 1915) a *L. Berzolari* v Pascalově Repertorium der höheren Mathematik, 2. vyd. II. 2 (kap. 30 až 32, 1922). Souborně o nich pojednávají: *G. Salmon*, A treatise on the analytic geometry of three dimensions II (5. vyd. 1912; něm. zpracování 3. vyd. 1880); *L. Cremona*, Preliminari di una teoria geometrica delle superficie, Memorie Accad. Bologna (2) 6 a 7 (1866 a 1867; něm. rozšířeno *M. Curtze*, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung, 1870); *A. B. Basset*, A treatise on the geometry of surfaces, 1910; také *E. Bertini*, Complementi di geometria proiettiva (1927); *E. Ciani*, Introduzione alla geometria algebrica (1931). Obsáhlou zprávu literární sestavil *J. E. Hill*, Bibliography of surfaces and twisted curves, Bulletin Amer. math. soc. (2) 3 (1897); o novějším vývoji teorie jedná také *H. F. Baker*, On some recent advances in the theory of algebraic surfaces, Proceedings Math. soc. London 12 (1913).

[2]) Člen k-tý má totiž hodnotu $\frac{1}{2}(k + k^2)$, takže hořejší výraz se rovná $\frac{1}{2}(\Sigma k + \Sigma k^2)$, kde součty jdou od 1 do $n+1$.

Je-li možno funkci $f(x_k)$ rozložiti v racionální celistvé faktory (s reálnými koeficienty), sestává plocha $f(x_k) = 0$ ze souboru ploch, jejichž rovnice obdržíme, položíce tyto faktory rovnými nule; pravíme tu, že plocha n-tého stupně *se rozpadá* v plochy stupňů nižších (tak ovšem, že součet jejich stupňů jest n).

b) Libovolná *rovina protíná plochu n-tého stupně v algebraické čáře n-tého stupně.* Neboť rovnice roviny $x_4 = 0$ (ve kterou lze danou rovinu lineární transformací převésti), spojena s rovnicí uvažované plochy (jež po téže transformaci jest zajisté obecně tvaru nahoře uvedeného), dává rovnici $u_n(x_1, x_2, x_3) = 0$, vyjadřující (rovinnou) čáru stupně n-tého. Odtud vidíme, že libovolná *přímka má s plochou n-tého stupně n bodů společných*, majíc právě tolik společných bodů s průsečnou čarou roviny jí položené a plochy; z těchto průsečíků přímky a plochy mohou ovšem některé splynouti nebo býti po dvou sdruženě imaginární. Jako u hořejší věty o průseku roviny s plochou jest vyloučiti případ, kdy rovina jest součástkou plochy; tak může přímka ležeti celá na ploše (má-li s plochou n-tého stupně společných více než n bodů).[4])

Dvě plochy $f(x_k) = 0$ a $g(x_k) = 0$ mají obecně společnou jednomocnou soustavu bodů, (*prostorovou*) *čáru*, jež jest analyticky vyjádřena systémem obou oněch rovnic $f(x_k) = 0$, $g(x_k) = 0$; vyjímaje ovšem případ, kdy obě plochy mají společnou plochu, jež je součástí jedné i druhé, nebo kdy jedna z ploch daných je součástkou druhé plochy. Jmenujeme-li počet průsečíků prostorové čáry s libovolnou rovinou stupněm této čáry, mají *dvě plochy stupně m-tého a stupně n-tého* obecně *společnou čáru m . n-tého stupně.* Neboť rovina protínající z daných dvou ploch jednu v čáře m-tého stupně a druhou v čáře stupně n-tého, protíná průsečnou čáru ploch těch v mn společných bodech obou těchto čar.

K tomu lze ještě připojiti: Tři plochy l-tého, m-tého a n-tého stupně mají (obecně) lmn společných bodů (nemají-li nekonečně mnoho bodů společných).[5]) Plocha n-tého stupně a čára p-tého stupně mají (obecně) np společných bodů (nemají-li společných bodů nekonečně mnoho).

[3]) Projektivním vytvořením a konstrukcí algebraické plochy n-tého stupně se zabývali zejména *Th. Reye*, Projectivische Erzeugung der allgemeinen Flächen dritter, vierter und beliebiger Ordnung durch Flächenbündel niederer Ordnung, Math. Annalen 1 (1869); *G. v. Escherich*, Die Construction der algebraischen Flächen aus der Anzahl sie bestimmender Punkte, Sitzungsberichte Akad. Wien 90 (1884); *F. Schur*, Über die Construction der Flächen n^{ter} Ordnung, Math. Annalen 23 (1884); *E. de Jonquières*, Génération des surfaces algébriques d'ordre quelconque, Comptes r. Acad. Paris 105 (1887, dále tamtéž 106, 1888).

[4]) Obecná plocha algebraická stupně vyššího než třetího neobsahuje přímek. Nepřímková plocha n-tého stupně nemůže míti více než $n(11n - 24)$ přímek (pro $n > 3$ pravděpodobně ani tolik). Plochy n-tého stupně ($n > 3$) s konečným počtem přímek hledá *G. Affolter*, Über Gruppen gerader Linien auf Flächen höherer Ordnung, Math. Annalen 27 (1886) a 29 (1887).

[5]) O průsečících tří ploch algebraických (vzhledem k singulárním bodům jejich) pojednává *L. Berzolari*, Sulle intersezioni di tre superficie algebriche, Annali mat. (2) 24 (1896).

Jsou-li $f(x) = 0$ a $g(x) = 0$ rovnice dvou různých ploch, obou stupně n-tého, sluje soustava ploch, definovaná rovnicí

$$f - \lambda g = 0,$$

svazkem ploch n-tého stupně.

Jsou-li $\varphi(u_k) = 0$ a $\psi(u_k) = 0$ rovnice dvou různých ploch, obou třídy ν-té, nazývá se soustava ploch, vyjádřená rovnicí

$$\varphi - \lambda\psi = 0,$$

řadou ploch ν-té třídy.

Dvě plochy n-tého stupně, svazek stanovící, protínají se v čáře stupně n^2, jež sluje *základní čarou* (*basí*) svazku. Každou hodnotou parametru λ jest určena plocha n-tého stupně, jdoucí základní čarou svazku; každým bodem mimo základní čáru zvoleným prochází jedna plocha svazku (hodnotu jejího parametru určíme z rovnice $f - \lambda g = 0$, dosadíce tam napřed souřadnice bodu zvoleného).[6])

c) Zvolíme-li v prostoru dva body $P(x_k)$ a $Q(y_k)$, jest libovolný bod na přímce body těmi procházející stanoven hodnotou konstanty λ, maje souřadnice $x_k + \lambda y_k$; aby bod $(x_k + \lambda y_k)$ ležel na dané ploše n-tého stupně $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, musí jeho parametr λ splniti rovnici

$$f(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, x_3 + \lambda y_3, x_4 + \lambda y_4) = 0.$$

Rozvineme-li funkci zde uvedenou podle věty Taylorovy, obdržíme rovnici

$$f(x_k) + \lambda \Delta_y f(x_k) + \tfrac{1}{2}\lambda^2 \Delta_y{}^2 f(x_k) + \tfrac{1}{6}\lambda^3 \Delta_y{}^3 f(x_k) + \ldots + \frac{1}{n!}\lambda^n \Delta_y{}^n f(x_k) = 0,$$

kde značka $\Delta_y{}^p$ u funkce $f(x_k)$ má pro $p = 1, 2$ význam

$$\Delta_y f(x_k) \equiv y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + y_4 \frac{\partial f}{\partial x_4},$$

$$\Delta_y{}^2 f(x_k) \equiv y_1{}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2} + y_2{}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2} + y_3{}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3{}^2} + y_4{}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_4{}^2} + 2y_1y_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} +$$

$$+ 2y_1y_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} + 2y_1y_4 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_4} + 2y_2y_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} + 2y_2y_4 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_4} + 2y_3y_4 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_4},$$

pro libovolné p pak, symbolicky vyjádřeno,

$$\Delta_y{}^p f(x) \equiv \left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + y_4 \frac{\partial}{\partial x_4}\right)^p f(x_k),$$

při čemž po umocnění exponentem p jest každý člen výrazu toho nahraditi derivací p-tého řádu z funkce $f(x_k)$ podle proměnných tam uvedených; speciálně jest $\dfrac{1}{n!}\Delta_y{}^n f(x_k) \equiv f(y_k)$.

[6]) Obecně jest danými $p + 1$ nezávislými plochami n-tého stupně $f_h = 0$ $(h = 0, 1, 2, \ldots, p)$ určen lineární systém čili *svazek p-mocný* ploch n-tého stupně o rovnici

$$\sum_0^p \lambda_h f_h = 0$$

s $p + 1$ homogenními parametry λ_p; p body v prostoru obecně položenými prochází jedna a jediná plocha této soustavy.

Rovnice pro λ získaná, jsouc n-tého stupně v této neznámé, poskytuje (není-li splněna pro každé λ, t. j. neleží-li přímka PQ na ploše) n hodnot konstanty λ, jež určují n průsečíků přímky PQ s danou plochou. Jestliže speciálně bod $P(x_k)$ leží na ploše, jest $f(x_k) = 0$ a jeho parametr $\lambda_1 = 0$; druhý průsečík přímky PQ s plochou splyne s bodem P, je-li ještě $\lambda_2 = 0$, což nastane pro $\Delta_y f(x_k) = 0$. Všechny body (y_k), jejichž spojnice s bodem $P(x_k)$ dané plochy mají s plochou tou vždy dva body v P splývající společné, a jenom body této vlastnosti mají souřadnice vyhovující rovnici

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + y_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0;$$

přímky uvedené vlastnosti, jsouce *tečnými přímkami* plochy dané, vyplňují, jak patrno, rovinu, která z toho důvodu sluje *tečnou rovinou plochy v bodě* (x_k); bod ten (x_k) sluje pak *dotyčným bodem* roviny tečné.

Spec. plocha obsahující vrchol (0, 0, 0, 1) základního čtyrstěnu a mající tedy rovnici $u_n + u_{n-1} \cdot x_4 + \ldots + (ax_1 + bx_2 + cx_3)\, x_4^{n-1} = 0$ má v bodě tom tečnou rovinu $ay_1 + by_2 + cy_3 = 0$.[7])

Tečná rovina plochy n-tého stupně v bodě jejím (x_k) *protíná ji v čáře* (rovinné stupně n-tého), *jež má v dotyčném bodě tom svůj bod dvojnásobný.* Snadno to vidíme na tečné rovině, jež je některou rovinou souřadnic: prochází-li plocha na př. bodem O_4 základního čtyrstěnu a je-li tečnou rovinou její v bodě tom rovina ω_3, má plocha taková rovnici $u_n + u_{n-1}x_4 + \ldots + u_2 x_4^{n-2} + cx_3 x_4^{n-1} = 0$; průsek plochy té s tečnou rovinou její $x_3 = 0$ jest čára, jejíž rovnice v této rovině jest $u_n(x_1, x_2, 0) + \ldots + u_2(x_1, x_2, 0) \cdot x_4^{n-2} = 0$, takže bod O_4 jest dvojným bodem jejím. Podle toho, má-li tento bod průsečné čáry dvě různé tečny reálné nebo imaginární, sluje *hyperbolickým* resp. *eliptickým bodem* plochy; je-li bod ten na průsečné čáře hrotem, maje dvě tečny splývající, sluje *parabolickým bodem* plochy.[8])

Dvě tečny průsečné čáry plochy s tečnou rovinou její v bodě (x_k) mají tam s plochou po třech splývajících bodech společných a slují *hlavními* nebo inflexními *tečnami* plochy v bodě tom.[9])

d) Tečná rovina plochy $f(x_k) = 0$ v bodě jejím $P(x_k)$, jejíž rovnici jsme v předešlém odstavci nalezli, jest neurčitá tehdy a jen tehdy,

---

[7]) Aby rovina o souřadnicích u_k byla tečnou rovinou plochy $f(x_k) = 0$, musí platit

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = \frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial x_2} : \frac{\partial f}{\partial x_3} : \frac{\partial f}{\partial x_4};$$

vyloučíme-li odtud a z rovnice $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$ souřadnice bodové x_k, obdržíme rovnici plochy dané v souřadnicích rovinových.

[8]) Geometrické místo parabolických bodů na ploše sluje *parabolická čára* plochy (odděluje na ploše reálné body hyperbolické od bodů eliptických).

[9]) Obecně přímka, jež má s plochou v obyčejném bodě jejím (totiž v bodě s určitou rovinou tečnou) společných p (> 2) bodů splývajících, sluje její *tečnou s dotykem řádu* $(p - 1)$*-ho* nebo *s dotykem p-bodovým.*

jsou-li nule rovny všechny koeficienty v její rovnici; takový bod plochy $f(x_k) = 0$, o jehož souřadnicích tedy platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0,$$

sluje *singulárním bodem* jejím. V hořejší rovnici pro λ odpadá v tom případě vedle $f(x_k)$ také $\Delta_y f(x_k)$ při libovolném (y_k): každá přímka jdoucí singulárním bodem (x_k) má tam s plochou (aspoň) dva splývající body společné; není-li identicky nule roven také součinitel $\Delta_y{}^2 f(x_k)$ při λ^2, t. j. nejsou-li rovny nule všechny parciální derivace 2. řádu funkce $f(x_k)$ pro souřadnice uvažovaného bodu (x_k), sluje bod ten *dvojnásobným* (dvojným) *bodem* plochy.

Je-li bod $P(x_k)$ dvojnásobným bodem dané plochy, takže platí $f(x_k) = 0$ a identicky $\Delta_y f(x_k) = 0$, vyplňují body (y_k), jejichž souřadnice vyhovují rovnici

$$\Delta_y{}^2 f(x_k) = 0,$$

plochu 2. stupně, vytvořenou přímkami, jež mají s danou plochou v bodě P tři splývající body společné (protože tu z rovnice pro λ plyne $\lambda^3 = 0$) a jsou tedy tečnými přímkami plochy v bodě tom. Že uvedená plocha kvadratická jest vskutku kuželová, vyplývá analyticky z existence bodu dvojnásobného; neboť podle věty o funkcích homogenních platí zde

$$(n-1) f_h \equiv \sum_{k=1}^{4} x_k f_{hk} = 0 \text{ pro } h = 1, 2, 3, 4,$$

a protože rovnice tyto jsou splněny souřadnicemi bodu dvojného, jest determinant z koeficientů f_{hk} rovnic těch roven nule. To však je spolu determinant z koeficientů uvedené plochy kvadratické, takže tato jest zvrhlá v plochu kuželovou. Kužel $\Delta_y{}^2 f(x_k) = 0$ sluje *tečným kuželem* plochy v bodě dvojném.

Je-li kuželová plocha 2. stupně, vyjádřená rovnicí $\Delta_y{}^2 f(x_k) = 0$, pravá, sluje dvojný bod $P(x_k)$ plochy dané *konický*; rozpadá-li se však kužel ten ve dvě různé roviny, sluje bod plochy *biplanární*, rozpadá-li se konečně kuželová plocha v rovinu dvojnásobnou, sluje bod plochy *uniplanární*.

Je-li speciálně vrchol (0, 0, 0, 1) základního čtyrstěnu dvojným bodem plochy dané, platí $u_0 = 0$ a identicky $u_1 = 0$; $u_2(x_1, x_2, x_3) = 0$ jest pak rovnice kvadratického kužele, tvořeného tečnými přímkami plochy v bodě tom.[10])

[10]) Singulárním prvkem plochy, duálním k dvojnásobnému bodu jejímu, jest *tečná rovina, dotýkající se plochy podél kuželosečky* (duální k tečnému kuželi plochy v bodě dvojném); kdežto tečné přímky plochy v obyčejné rovině tečné tvoří svazek paprskový se středem v dotyčném bodě této roviny, vytvořují zde čáru druhé třídy. Tato kuželosečka jest buď pravá nebo se rozpadá ve dva body (svazky paprskové) různé nebo splývající (tyto tři případy jsou duální ke třem typům bodu dvojného nahoře uvedeným).

Obecně jestliže platí pro bod (x_k) dané plochy $f(x_k) = 0$ identicky $\Delta_y f(x_k) = 0$, $\Delta_y{}^2 f(x_k) = 0$, $\Delta_y{}^3 f(x_k) = 0, \ldots, \Delta_y{}^{m-1} f(x_k) = 0$, nikoli však $\Delta_y{}^m f(x_k) = 0$, sluje takový bod *m-násobným bodem* plochy; každá přímka bodem tím vedená má tam s plochou m splývajících bodů společných. Tečné přímky plochy v bodě m-násobném, mající tam s plochou společných $m + 1$ bodů splývajících, tvoří *tečný kužel* m-tého stupně dané plochy v bodě tom o rovnici $\Delta_y{}^m f(x_k) = 0$.

Plocha n-tého stupně s bodem m-násobným ve vrcholu $(0, 0, 0, 1)$ čtyrstěnu souřadnicového má rovnici $u_n + u_{n-1}x_4 + u_{n-2}x_4{}^2 + \ldots + u_m x_4{}^{n-m} = 0$ a její tečný kužel v tomto bodě má rovnici $u_m(x_1, x_2, x_3) = 0$.[11])[12])[13])

125. Plochy polárné; plocha Hesseova. *a*) K ploše algebraické $f(x_k) = 0$ lze přidružiti řadu ploch, příslušných k libovolnému bodu (y_k) v prostoru: *p-tá polárná plocha (pólára) bodu (y_k), svého pólu, vzhledem k dané ploše n-tého stupně $f(x_k) = 0$ jest plocha $(n-p)$-tého stupně s rovnicí*

$$\Delta_y{}^p f(x_k) = 0,$$

kde symbol $\Delta_y{}^p$ vyjadřuje mocninu $\left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + y_4 \frac{\partial}{\partial x_4}\right)^p$, v níž po umocnění nahrazena p-tá mocnina derivačního symbolu v každém členu symbolem p-té derivace podle proměnných tam zastoupených. Levá strana rovnice pro p-tou poláru jest tedy součinitelem

---

[11]) Plocha n-tého stupně s bodem n-násobným jest *kužel* (plocha kuželová) s vrcholem v bodě tom; plocha n-tého stupně s bodem $(n-1)$-násobným byla (*A. Cayleym* r. 1862) nazvána *monoid*. Spec. kužel s vrcholem v bodě $(0, 0, 0, 1)$ má rovnici $u_n(x_1, x_2, x_3) = 0$, monoid s $(n-1)$-násobným bodem v $(0, 0, 0, 1)$ má rovnici $u_{n-1}(x_1, x_2, x_3) \cdot x_4 + u_n(x_1, x_2, x_3) = 0$.

[12]) Z přímek tečného kužele plochy, jehož vrcholem je m-násobný bod její, jest $m(m+1)$ takových, že mají s plochou po $m + 2$ společných bodech v onom singulárním bodě splývajících; jsou to u hořejší plochy s m-násobným bodem ve vrcholu základního čtyrstěnu společné přímky kuželů $u_m = 0$ a $u_{m+1} = 0$ (u tečného kužele plochy v jejím bodě dvojnásobném jest tedy šest přímek inflexními tečnami plochy v bodě tom). Má-li algebraická plocha nekonečně mnoho bodů m-násobných, tvoří tyto *m-násobnou čáru* její; tečný kužel plochy v obecném bodě takové čáry rozpadá se v m rovin (po případě splývajících), jež procházejí tečnou čáry té v onom bodě. Speciálně *dvojnásobná čára* plochy je složena z dvojnásobných bodů jejích, buď (obecně) biplanárních (dvojná čára v užším smyslu) nebo uniplanárních (čára kuspidální).

[13]) Pro teorii singulárních prvků ploch algebraických jest uvésti zejména: *H. G. Zeuthen*, Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques, Math. Annalen 10 (1876); *K. Rohn*, Ein Beitrag zur Theorie der biplanaren und uniplanaren Knotenpunkte, Math. Annalen 22 (1883); *C. Segre*, Sulla scomposizione dei punti singolari della superficie algebriche, Annali mat. (2) 25 (1896); také *A. B. Basset*, On the singularities of surfaces, Quart. Journal mat. 38 (1906), a téhož Singular tangent planes to autotomic surfaces, tamtéž 41 (1909); *F. Enriques*, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche II, p. 577 a n.

u $\frac{1}{p!}\lambda^p$ v rovnici pro parametr λ průsečíku $(x_k + \lambda y_k)$ přímky jdoucí body (x_k) a (y_k) s danou plochou.

Přirovnáme-li rovnici pro konstantu λ průsečíku $(x_k + \lambda y_k)$ přímky vedené body (x_k) a (y_k) s plochou $f(x_k) = 0$ a rovnici pro konstantu μ průsečíku $(y_k + \mu x_k)$ téže přímky s touže plochou, nalezneme

$$\frac{1}{p!}\Delta_y{}^p f(x_k) = \frac{1}{(n-p)!}\Delta_x{}^{n-p} f(y_k);$$

vidíme tedy, že rovnici p-té poláry bodu (y_k) vzhledem k ploše $f(x_k) = 0$ můžeme psáti také v úpravě

$$\Delta_x{}^{n-p} f(y_k) = 0,$$

z níž je patrný stupeň této plochy.

Z polárných ploch, příslušných k bodu (y_k) vzhledem k ploše n-tého stupně $f(x_k) = 0$, jest vytknouti zejména *první poláru* $(n-1)$-ho stupně o rovnici

$$y_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3\frac{\partial f}{\partial x_3} + y_4\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0,$$

s druhé strany pak $(n-1)$-ní poláru 1. stupně (*lineární poláru* čili polárnou rovinu) s rovnicí

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2}x_2 + \frac{\partial f}{\partial y_3}x_3 + \frac{\partial f}{\partial y_4}x_4 = 0,$$

kde derivovaná funkce je $f(y_k)$, a $(n-2)$-hou poláru 2. stupně (*kvadratickou poláru* čili polárnou kvadriku) s rovnicí

$$f_{11}x_1{}^2 + f_{22}x_2{}^2 + f_{33}x_3{}^2 + f_{44}x_4{}^2 + 2f_{12}x_1x_2 + 2f_{13}x_1x_3 + 2f_{14}x_1x_4 + 2f_{23}x_2x_3 + \\ + 2f_{24}x_2x_4 + 2f_{34}x_3x_4 = 0,$$

kde opět f_{hk} jsou derivace funkce $f(y_k)$.

Průsečná čára dané plochy n-tého stupně a p-té polárné plochy zvoleného bodu vzhledem k ní jest stupně $n(n-p)$-tého (a sluje někdy p-tou polárnou čarou bodu toho na ploše uvažované).

Ze dvou uvedených rovnic pro p-tou polárnou plochu $(n-p)$-tého stupně vyplývá věta o vzájemnosti mezi body (x_k) a (y_k) i jejich plochami polárnými: *Leží-li bod* (x_k) *na* p*-té poláře bodu* (y_k), *leží bod* (y_k) *na* $(n-p)$*-té poláře bodu* (x_k) *vzhledem k téže základní ploše* n*-tého stupně.*

Zejména platí: Póly všech rovin trsu rovinového se středem P (vzhledem k dané ploše) vytvořují první polárnou plochu bodu P (vzhledem k téže ploše); obráceně polárné roviny všech bodů první polárné plochy bodu zvoleného procházejí tímto bodem.

Póly všech rovin svazku rovinového s osou P_1P_2 vzhledem k dané ploše n-tého stupně leží na průsečné čáře prvních polárných ploch bodu P_1 a bodu P_2, jejíž stupeň jest $(n-1)^2$. Odtud plyne: K bodům přímky přísluší první polárné plochy (jednomocného) svazku se základní čarou, jež má stupeň $(n-1)^2$; čára tato byla nazvána *první polárou přímky* zvolené.

K bodům roviny příslušejí první polárné plochy, jež tvoří dvojmocný svazek čili síť s $(n-1)^3$ body základními; tyto body jsou póly oné roviny.

Konečně budiž vytčena věta: p-tá polára určitého bodu vzhledem k dané ploše jest r-tou polárou bodu toho vzhledem k $(p-r)$-té poláře jeho vzhledem k ploše té (při $r < p$), a obráceně.[1])

b) Všechny polárné plochy bodu (y_k) na dané ploše ležícího vzhledem k této procházejí bodem tím a dotýkají se v něm plochy dané.

Neboť p-tá polárná plocha bodu (y_k) vzhledem k ploše $f(x_k) = 0$ má rovnici $\Delta_y{}^p f(x_k) = 0$ a obsahuje bod (y_k), je-li $\Delta_y{}^p f(y_k) = 0$; avšak o homogenní funkci n-tého stupně $f(x_k)$ lze dosazením dvojčlenu $1 + \lambda$ za t do vztahu $f(tx_k) = t^n \,.\, f(x_k)$ a rozvinutím na obou stranách odvoditi relaci

$$\Delta_x{}^p f(x_k) = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-p+1)\,f(x_k),$$

takže platí-li $f(y_k) = 0$, platí také $\Delta_y{}^p f(y_k) = 0$. Tečná rovina p-té poláry $\Delta_y{}^p f(x_k) = 0$ v bodě jejím (x_k) má rovnici

$$\sum_h \xi_h \frac{\partial}{\partial x_h}\left(\Delta_y{}^p f(x_k)\right) = 0;$$

protože však jest

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\Delta_y{}^p f(x_k)\right) = \Delta_y{}^p \frac{\partial f}{\partial x_h} \quad \text{a} \quad \Delta_y{}^p \frac{\partial f}{\partial x_h} = (n-1)\,(n-2)\ldots(n-p)\,\frac{\partial f}{\partial x_h},$$

má dotčená rovina tečná (po zkrácení konstantním faktorem) rovnici

$$\sum_h \xi_h \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0.$$

Mají tedy všechny polárné plochy bodu (x_k) na ploše $f(x_k) = 0$ ležícího ve společném bodě tom tutéž rovinu tečnou, jež je spolu tečnou rovinou plochy dané. Zejména jest *polárná rovina dané plochy v jejím bodě tečnou rovinou plochy* v bodě tom.

Obráceně obsahuje-li polárná plocha vzhledem k dané ploše svůj pól, leží bod ten na ploše dané; neboť z podmínky $\Delta_y{}^p f(y_k) = 0$ plyne podle hořejší relace $f(y_k) = 0$.[2])

---

[1]) Byly definovány také *smíšené poláry* dvou nebo několika bodů vzhledem k dané ploše: smíšená polára dvou bodů (y_k) a (z_k) vzhledem k ploše $f(x_k) = 0$ jest plocha $(n-2)$-ho stupně s rovnicí

$$\Delta_z \Delta_y f(x_k) \equiv \Delta_y \Delta_z f(x_k) \equiv \left(\sum_1^4 y_h \frac{\partial}{\partial x_h}\right)\left(\sum_1^4 z_h \frac{\partial}{\partial x_h}\right) f(x_k) = 0;$$

splyne-li bod (z_k) s bodem (y_k), přejde tato polára v druhou polárnou plochu bodu (y_k). Polára $n-1$ bodů vzhledem k ploše n-tého stupně jest rovina; bod ležící na této rovině tvoří s oněmi skupinu n bodů (konjugovaných), z nichž každý náleží polárné rovině ostatních $n-1$ bodů skupiny.

[2]) A dále platí, že inflexní tečny plochy dané v (obyčejném) bodě jejím jsou průsečnice tečné roviny její v tomto bodě s polárnou kvadrikou bodu toho vzhledem k dané ploše.

Všimněme si polárných ploch, přidružených k ploše s body singulárními, leží-li pól jejich mimo takové body nebo je-li jedním z nich. *Bod m-násobný dané plochy jest (m — p)-násobným bodem její p-té plochy polárné* (při $p < m$) pro libovolný bod v prostoru (mimo něj sama); spec. *první polárná plocha každého bodu* v prostoru *vzhledem k dané ploše prochází všemi dvojnásobnými body jejími* (majíc tam body obyčejné, pokud její pól není tímto bodem). Neboť jestliže daná plocha má v bodě (0, 0, 0, 1) bod svůj m-násobný, jest její rovnice

$$u_n + u_{n-1} \cdot x_4 + \ldots + u_m(x_1, x_2, x_3) \cdot x_4^{n-m} = 0;$$

první polára plochy té, příslušná k bodu (y_k), má rovnici, jejíž levá strana končí členem $\left(y_1 \frac{\partial u_m}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u_m}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u_m}{\partial x_3}\right) x_4^{n-m} + y_4 u_m \cdot (n - m) \cdot x_4^{n-m-1}$, takže první polára stupně $(n - 1)$-ho, majíc v rovnici své x_4 v nejvyšším stupni $(n - m)$-tém, má v uvažovaném bodě bod $(m - 1)$-násobný. A druhá polára dané plochy jako první polára její první poláry při témže pólu má v m-násobném bodě dané plochy, tedy v $(m - 1)$-násobném bodě její první poláry, svůj bod $(m - 2)$-násobný; atd. Důležitá věta speciální (o bodech dvojnásobných) vysvítá také odtud, že rovnice první poláry vzhledem k dané ploše $\Sigma y_h \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0$ jest souřadnicemi bodu dvojného, o nichž platí $\frac{\partial f}{\partial x_h} = 0$, splněna identicky. Tuto větu lze pak doplniti pro případ bodu biplanárního (jak zjistíme z hořejší rovnice plochy, jdoucí bodem O_4, třebas pro $u_m \equiv u_2(x_1, x_2)$): Průsečnice rovin, v něž se tečný kužel bodu biplanárního rozpadá, dotýká se v bodě tom první polárné plochy, majíc s ní společny tři body splývající.[3])

Polárné plochy m-násobného bodu plochy dané vzhledem k ní mají v bodě tom rovněž bod m-násobný s týmž tečným kuželem jako plocha daná. Neboť plocha n-tého stupně s m-násobným bodem v bodě (0, 0, 0, 1) má podle hořejšího pro bod ten první poláru s rovnicí, jež končí členem $(n - m)\, u_m x_4^{n-m-1}$; je tedy bod ten opět $(n - 1) - (n - m - 1) = m$-násobným bodem této poláry, a plocha ta má v něm opět tečný kužel $u_m = 0$.

c) Dotyčné body tečen vedených z libovolného bodu (y_k) k dané ploše leží na první polárné ploše bodu toho vzhledem k ploše dané. Neboť tečná rovina plochy v takovém dotyčném bodě (x_k) tečny, z bodu (y_k) vedené, jest polárnou rovinou bodu toho vzhledem k dané ploše; a protože, obsahujíc všechny tečné přímky plochy v bodě (x_k), prochází bodem (y_k), prochází první polárná plocha bodu (y_k) bodem (x_k). Obráceně jsou body průsečné čáry dané plochy s první polárnou plochou

[3]) První polárné plochy všech bodů prostoru vzhledem k dané ploše tvoří trojmocný svazek, jenž u plochy bez bodů singulárních nemá bodu základního; plochy tohoto svazku procházejí však všechny podle hořejšího násobnými body plochy dané.

bodu (y_k) vzhledem k ní, pokud jsou obyčejnými body plochy dané, dotyčnými body tečen z bodu toho k dané ploše vedených; neboť tečná rovina obyčejného bodu plochy, ležícího na první polárné ploše bodu (y_k), prochází (jsouc polárnou rovinou svého bodu dotyčného) bodem (y_k); avšak dvojné (m-násobné) body dané plochy, jež leží na první poláře libovolného bodu (y_k), mají tečnou rovinu neurčitou. *Kužel, tvořený tečnými přímkami, bodem (y_k) k dané ploše n-tého stupně jdoucími*, a tedy z bodu toho *ploše opsaný, dotýká se* tudíž *plochy té podél průsečné čáry její s první polárnou plochou onoho bodu vzhledem k ní*; protože tato průsečná čára jest $n\,(n-1)$-ho stupně, jest kužel ten téhož stupně (maje v rovině vrcholem vedené $n\,(n-1)$ svých přímek, spojujících bod ten s průsečíky roviny a uvedené čáry průsečné): *Opsaný kužel plochy n-tého stupně* s vrcholem v libovolném bodě mimo plochu položeným *jest stupně $n\,(n-1)$-ho.*[4])

Rovnici opsaného kužele dané plochy n-tého stupně s vrcholem v bodě $O_1\,(1, 0, 0, 0)$ obdržíme, vyloučíme-li z rovnice plochy, upravené na tvar

$$u_n + u_{n-1} \cdot x_1 + \ldots + u_1 \cdot x_1^{n-1} + u_0 \cdot x_1^{n} = 0,$$

kde u_k jsou ternární formy k-tého stupně proměnných x_2, x_3, x_4, a z rovnice první polárné plochy bodu toho

$$u_{n-1} + 2u_{n-2} \cdot x_1 + \ldots + (n-1)\,u_1 \cdot x_1^{n-2} + nu_0 \cdot x_1^{n-1} = 0$$

proměnnou x_1.

Třídu algebraické plochy definujeme (duálně vůči významu stupně jejího) *počtem tečných rovin, jež lze vésti k ploše té libovolnou přímkou* prostoru. Nemá-li daná plocha bodů singulárních, jsou podle předešlého dotyčnými body tečných rovin, zvolenou přímkou k ploše dané vedených, všechny průsečíky plochy s první polárou přímky té vzhledem k uvažované ploše a jenom tyto body. Protože první polára přímky vzhledem k ploše n-tého stupně (základní čára svazku prvních polárných ploch, příslušných k bodům na přímce vzhledem k ploše té) má stupeň $(n-1)^2$, jest dotčených průsečíků na dané ploše $n\,(n-1)^2$. *Třída plochy n-tého stupně bez bodů singulárních jest* tedy $n\,(n-1)^2$.

Třída opsaného kužele plochy n-tého stupně s vrcholem v libovolném bodě prostoru jest rovna třídě plochy té, protože tečná rovina kužele jdoucí přímkou jeho vrcholem položenou jest spolu tečnou rovinou plochy základní; *má* tedy *opsaný kužel plochy n-tého stupně bez bodů singulárních třídu $n\,(n-1)^2$.*

V případě, že daná plocha n-tého stupně má c dvojných bodů konických a b bodů biplanárních, sníží se třída opsaného kužele jejího s vrcholem v libovolném bodě prostoru *o $2c + 3b$ jednotek.* Neboť je-li C konický bod plochy a V vrchol opsaného kužele jejího, jsou tečné roviny tečného

[4]) Stupeň kužele dané ploše opsaného zmenší se o 2 jednotky, leží-li vrchol jeho v (obyčejném) bodě této plochy.

kužele plochy s vrcholem C, jdoucí bodem V, tečnými rovinami plochy dané a tedy tečnými rovinami kužele s vrcholem V; proto je přímka VC dvojnou přímkou opsaného kužele o vrcholu V. A je-li B biplanární bod plochy dané, jest VB kuspidální přímkou opsaného kužele s vrcholem V; dokážeme to (třebas) z rovnice plochy 3. stupně, jež má v O_4 bod biplanární s tečnými rovinami $x_1 = 0$ $ax_1 + bx_2 = 0$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) + x_1(ax_1 + bx_2)\, x_4 = 0.$$

Chtějíce hledati rovinu opsaného kužele s vrcholem O_1, uspořádejme formu $u_3(x_1, x_2, x_3)$ ve tvaru $x_1{}^3 + x_1{}^2 v_1 + x_1 v_2 + v_3$, kde v_k jest binární forma k-tého stupně proměnných x_2, x_3, a rovnici plochy ve tvaru

$$x_1{}^3 + x_1{}^2 (v_1 + ax_4) + x_1 (v_2 + bx_2 x_4) + v_3 = 0;$$

diskriminant této rovnice (vznikající z ní a její derivace podle x_1 vyloučením proměnné x_1) obsahuje nejvyšší mocninu proměnné x_4 v členu $-a^2b^2x_2{}^2x_4{}^4$, z čehož je patrno, že přímka O_1O_4 je kuspidální přímkou opsaného kužele s vrcholem O_1.

Protože pak přímka dvojná a přímka kuspidální mají pro třídu kužele týž význam jako dvojný bod a hrot pro třídu čáry rovinné, jest třída opsaného kužele v uvedeném případě $n\,(n-1)^2 - 2c - 3b$. A ježto třídě opsaného kužele jest rovna třída plochy, platí: *Třída plochy n-tého stupně, jež má c bodů konických a b bodů biplanárních, jest*

$$v = n\,(n-1)^2 - 2c - 3b.^5)$$

d) Každá dvojná tečna plochy, jdoucí zvoleným bodem V, jest dvojnou přímkou opsaného kužele plochy s vrcholem V; a každá inflexní tečna plochy, jdoucí bodem V, jest kuspidální přímkou takového kužele s vrcholem V.

Neboť je-li přímka T_1T_2 tečnou přímkou plochy s dotyčnými body T_1 a T_2, jež prochází bodem V, dotýkají se tečné roviny plochy v bodech T_1 a T_2 opsaného kužele plochy s vrcholem V podél přímky VT_1T_2; a protože jsou tyto tečné roviny kužele obecně různé, jest přímka ta dvojnou přímkou kužele uvedeného.

Druhou větu dokážeme analyticky, zvolíce plochu tak, aby procházela vrcholem O_4 základního čtyrstěnu a měla v bodě tom inflexní přímku tečnou O_4O_1; vezmeme pak v úvahu opsaný kužel plochy s vrcholem O_1. Vzhledem k tomuto napíšeme rovnici uvažované plochy n-tého stupně ve tvaru

$$u_n + x_1 \cdot u_{n-1} + x_1{}^2 \cdot u_{n-2} + \ldots + x_1{}^{n-1} \cdot u_1 + x_1{}^n \cdot u_0 = 0,$$

kde u_k jsou ternární formy proměnných x_2, x_3, x_4; vzhledem pak k volbě předcházející obsahují formy u_n, u_{n-1} a u_{n-2} nejvyšší mocninu proměnné x_4 ve členu $(ax_2 + bx_3)\, x_4{}^{n-1}$, resp. ve členu $(a'x_2 + b'x_3)\, x_4{}^{n-2}$, resp. ve členu $(a''x_2 + b''x_3)\, x_4{}^{n-3}$, takže přímka $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ má vskutku

---

[5]) Bod m-násobný snižuje třídu algebraické plochy o $m\,(m-1)^2$ jednotek, nemá-li tam tečný kužel plochy přímek dvojných.

v bodě O_4 s plochou tři splývající body společné. Každá rovina, položená přímkou O_1O_4 s rovnicí $x_3 = kx_2$, protíná uvažovanou plochu v čáře n-tého stupně, jež je vyjádřena (vedle této rovnice) rovnicí, obsahující nejvyšší mocninu proměnné x_4 ve členu $(a + bk)\, x_2 x_4^{n-1}$; táž rovina protíná první polárnou plochu bodu O_1 vzhledem k ploše dané v čáře $(n-1)$-ho stupně, jež je vyjádřena (rovnicí $x_3 = kx_2$ a) rovnicí, mající nejvyšší mocninu proměnné x_4 ve členu $(a' + b'k)\, x_2 x_4^{n-2}$. Odtud vidíme, že každá rovina, položená přímkou O_1O_4, protíná danou plochu a první polárnou plochu bodu O_1 vzhledem k ní ve dvou čarách, jež mají v bodě O_4 společnou tečnu O_4O_1; jest tedy O_1O_4 dvojnou přímkou opsaného kužele s vrcholem O_1 a, protože rovina $ax_2 + bx_3 = 0$, jsouc jedinou tečnou rovinou plochy v bodě O_4, jest jedinou tečnou rovinou opsaného kužele plochy podél přímky té O_1O_4, má uvažovaný kužel v O_1O_4 přímku kuspidální.

Obráceně má dvojná přímka opsaného kužele plochy (s různými rovinami tečnými) svůj původ buď v dvojné tečně plochy dané nebo (podle předcházejícího odstavce) v konickém bodě jejím; a kuspidální přímka opsaného kužele plochy jest buď inflexní tečnou plochy té nebo spojnicí vrcholu kužele s biplanárním bodem jejím.

Inflexní tečny plochy, jež procházejí zvoleným bodem, nalezneme pomocí první a druhé její plochy polárné: *Průsečíky plochy n-tého stupně s průsečnou čarou první a druhé polárné plochy libovolného bodu vzhledem k ní jsou dotyčnými body inflexních tečen plochy bodem tím jdoucích.* Neboť je-li O_4 průsečným bodem dané plochy a její první i druhé plochy polárné, příslušných k bodu O_1, obsahují v rovnici plochy dané $u_n + x_1 u_{n-1} + x_1^2 u_{n-2} + \ldots + x_1^{n-1} u_1 + x_1^n u_0 = 0$ formy u_n, u_{n-1} a u_{n-2} nejvyšší mocninu proměnné x_4 ve členech $(ax_2 + bx_3)\, x_4^{n-1}$ resp. $(a'x_2 + b'x_3) x_4^{n-2}$ resp. $(a''x_2 + b''x_3) x_4^{n-3}$; dosadíme-li pak do rovnice plochy té $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, shledáme, že levá strana její nabude faktoru x_1^3, takže tedy přímka O_1O_4 má v bodě O_4 s plochou tři splývající body společné čili jest inflexní tečnou plochy v O_4. A protože první a druhá plocha polárná má u plochy n-tého stupně stupeň $n-1$ resp. $n-2$, *jest možno z libovolného bodu k ploše n-tého stupně vésti $n(n-1)(n-2)$ tečen inflexních*; vzhledem k hořejšímu jest to spolu *počet kuspidálních přímek opsaného kužele* (s libovolným vrcholem) *u plochy n-tého stupně bez bodů singulárních.*

Vyšetřme ještě počet dvojných přímek (s různými rovinami tečnými) u opsaného kužele plochy n-tého stupně bez bodů singulárních. Označíme-li stupeň a třídu opsaného kužele algebraické plochy n_t resp. ν_t, počet dvojných a počet kuspidálních přímek jeho d_t resp. r_t, platí o těchto číslech rovnice Plückerova

$$\nu_t = n_t(n_t - 1) - 2d_t - 3r_t.$$

V předešlém odstavci jsme nalezli

$$n_t = n(n-1), \quad \nu_t = n(n-1)^2;$$

nahoře pak jsme zjistili, že kuspidální přímky opsaného kužele a jenom tyto jsou u plochy bez bodů singulárních inflexními tečnami plochy, jež procházejí vrcholem kužele, takže podle další věty tam dokázané platí

$$r_t = n\,(n-1)\,(n-2).$$

Dosadíme-li tyto tři výrazy do uvedené rovnice Plückerovy, vypočteme

$$d_t = \tfrac{1}{2}n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)$$

jako *počet dvojných přímek opsaného kužele* (s libovolným vrcholem) *u plochy n-tého stupně bez bodů singulárních*; vzhledem k hořejšímu je to spolu *počet dvojných tečen plochy n-tého stupně jdoucích libovolným bodem*.

Pro opsaný kužel plochy n-tého stupně s c body konickými a b body biplanárními jsme celkem nalezli

$$n_t = n\,(n-1), \quad v_t = n\,(n-1)^2 - 2c - 3b,$$
$$d_t = \tfrac{1}{2}n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3) + c, \quad r_t = n\,(n-1)\,(n-2) + b.$$

Zbývá vyjádřiti počet dvojných rovin tečných δ_t a počet inflexních tečných rovin jeho ϱ_t čísly n, c a b plochy dané. Z Plückerovy rovnice

$$\varrho_t = 3n_t\,(n_t - 2) - 6d_t - 8r_t$$

vyplývá, dosadíme-li tam uvedené výrazy za n_t, d_t a r_t, relace

$$\varrho_t = 4n\,(n-1)\,(n-2) - 6c - 8b.$$

Konečně z rovnic

$$n_t = v_t(v_t-1) - 2\delta_t - 3\varrho_t, \quad \varrho_t = 3n_t(n_t-2) - 6d_t - 8r_t, \quad v_t = n_t(n_t-1) - 2d_t - 3r_t,$$

vyloučíme-li ϱ_t a d_t, nalezneme nejprve

$$2\delta_t = v_t^2 - 10v_t + 8n_t - 3r_t = (v_t - 5)^2 + 8n_t - 3r_t - 25,$$

a dosadíme-li sem za n_t, v_t a r_t výrazy hořejší, obdržíme

$$2\delta_t = [n\,(n-1)^2 - 2c - 3b - 5]^2 - [n\,(n-1)\,(3n-14) + 3b + 25].^{6})$$

Z výrazů pro v, ϱ_t a δ_t lze určiti největší přípustný počet dvojnásobných bodů plochy n-tého stupně; při $b = 0$ zjistíme tak, že plocha 3. stupně může míti nejvýše 4 konické body a má v tom případě $v = 4$, plocha 4. stupně může míti nejvýše 16 konických bodů a má tehdy také $v = 4$.

e) *Geometrické místo bodů* v prostoru, *jejichž kvadratické poláry vzhledem k dané ploše n-tého stupně* $f(x_k) = 0$ *jsou plochy kuželové*, sluje *Hesseovou plochou* plochy dané. Abychom nalezli její rovnici, vyjádřeme, že $(n-2)$-há polárná plocha bodu (x_k) o rovnici

$$\Delta_x^{n-2} f(y_k) = 0 \quad \text{čili} \quad \Delta_y^2 f(x_k) = 0$$

---

[6]) U plochy n-tého stupně bez bodů singulárních redukuje se tento počet na $\delta_t = \tfrac{1}{2}n\,(n-1)\,(n-2)\,(n^3 - n^2 + n - 12)$.

s proměnnými y_k jest kuželovou plochou kvadratickou; podmínkou toho je nulová hodnota jejího diskriminantu, totiž

$$H \equiv \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

kde f_{hk} značí druhou parciální derivaci funkce $f(x_k)$ podle x_h a x_k. Jak odtud vysvítá, má Hesseova plocha plochy n-tého stupně stupeň 4 (n—2).

Hesseovu plochu lze však definovati také jako *geometrické místo dvojnásobných bodů prvních polárných ploch plochy dané*. Aby totiž první polárná plocha bodu (y_k) vzhledem k ploše $f(x_k) = 0$ o rovnici

$$\Delta_y f(x_k) = 0$$

měla bod dvojnásobný, musí býti nule rovny první parc. derivace funkce $\Delta_y f(x_k)$ podle x_k, musí tedy platit čtyři rovnice

$$y_1 f_{1k} + y_2 f_{2k} + y_3 f_{3k} + y_4 f_{4k} = 0$$

pro $k = 1, 2, 3, 4$. Tyto rovnice pro y_k si neodporují, je-li nule roven determinant $(f_{11} f_{22} f_{33} f_{44})$, t. j. leží-li bod (x_k) na ploše Hesseově.

Hesseova plocha protíná danou plochu v čáře, jež je *geometrickým místem parabolických bodů jejích* a sluje *parabolickou čarou* plochy dané; v každém bodě této čáry splývají totiž obě inflexní tečny dané plochy. Neboť k bodu uvedené čáry průsečné, protože leží na ploše Hesseově, přísluší polárná kvadrika kuželová; protože pak bod ten leží na ploše dané, prochází jím tato kuželová plocha, majíc v něm tutéž tečnou rovinu jako plocha základní; a protože inflexní tečny plochy dané v uvažovaném bodě jsou průsečnice tečné roviny plochy a polárné kvadriky bodu toho, splývají v tomto případě inflexní tečny v přímku dvojnásobnou.

Jako Hesseova plocha dané plochy jest vytvořena body, jejichž polárné kvadriky jsou plochami kuželovými, tak *geometrickým místem vrcholů* těchto *kuželových kvadrik polárných jest plocha Steinerova*, příslušná k ploše dané. Polárná kvadrika bodu (x_k) vzhledem k ploše $f(x_k) = 0$ má rovnici $\Delta_y^2 f(x_k) = 0$, jest kuželová, platí-li $H = 0$, a její vrchol (y_k) vyhovuje svými souřadnicemi rovnicím $\sum_h y_h f_{hk} = 0$ pro $k = 1, 2, 3, 4$; eliminací proměnných x_k z těchto čtyř rovnic obdržíme tedy rovnici plochy Steinerovy. Obdobně jako u plochy Hesseovy lze také plochu Steinerovu definovati jako plochu vytvořenou body, jejichž první polárné plochy mají bod dvojnásobný (ležící na ploše Hesseově).[7][8][9])

[7]) Jest patrno, že Hesseova plocha plochy dané prochází všemi dvojnásobnými (m-násobnými) body této plochy. Lze dále zjistiti, že plocha Hesseova má v každém konickém bodě plochy dané rovněž bod konický s týmž tečným kuželem a týmiž přímkami vyššího dotyku; v biplanárním bodě dané plochy má bod trojnásobný, jehož tečný kužel má mezi svými

126. Plochy třetího stupně. *a*) Obecná plocha 3. stupně[1]) má v homogenních souřadnicích rovnici, jež obsahuje 4 členy tvaru x_1^3, 12 členů typu $x_1^2 x_2$ a 4 členy druhu $x_1 x_2 x_3$, celkem 20 členů; *jest* tedy *určena devatenácti body obecně položenými.*

Plocha 3. stupně bez bodů singulárních jest třídy 12.; její opsaný

součástkami dvě roviny onoho bodu; konečně v uniplanárním bodě plochy dané má bod čtyrnásobný, jehož tečný kužel se rozpadá v dvojnásobnou rovinu bodu onoho a kužel kvadratický.

[8]) O Hesseově ploše plochy algebraické viz dále zejména *K. Rohn*, Das Verhalten der Hesse'schen Fläche in den vielfachen Punkten und vielfachen Curven einer gegebenen Fläche, Math. Annalen 23 (1884); *A. Voss*, Beiträge zur Theorie der algebraischen Flächen I: Zur Theorie der Steiner'schen Kernfläche, Math. Annalen 27 (1886).

[9]) Podobně jako v teorii algebraických čar rovinných lze také v teorii ploch algebraických definovati *Jacobiovy útvary*, příslušné ke dvěma nebo třem nebo čtyřem plochám daných stupňů, resp. příslušné k jednomocnému nebo dvojmocnému nebo trojmocnému svazku ploch téhož stupně: Jacobiova skupina příslušná ke dvěma plochám je tvořena body, z nichž každý má vzhledem k oběma plochám polárné roviny splývající; Jacobiova čára tří ploch je geom. místo bodu, jehož polárné roviny vzhledem k těmto plochám procházejí touže přímkou; Jacobiova plocha čtyř ploch je geom. místo bodu, jehož polárné roviny vzhledem k plochám těm jdou jedním bodem. Obrátíce se k lineárním systémům ploch stupně n-tého, definujeme Jacobiovu skupinu jednomocného svazku ploch n-tého stupně vlastností, že pro každý a jenom bod této skupiny splývají polárné roviny jeho vzhledem ke všem plochám svazku (obsahuje $4\,(n-1)^3$ bodů); Jacobiova čára dvojmocného svazku ploch n-tého stupně je geom. místo bodů, jejichž polárné roviny vzhledem ke všem plochám svazku procházejí jednou přímkou (je stupně $6\,(n-1)^2$); konečně Jacobiova plocha trojmocného svazku ploch n-tého stupně je geom. místo bodů, jejichž polárné roviny vzhledem ke všem plochám svazku jdou týmž bodem (je stupně $4\,(n-1)$). Jacobiovy útvary jsou geom. místy dvojnásobných bodů ploch soustavy, k níž příslušejí; vyskytují se také při stanovení počtu ploch systému, jež se dané plochy nebo čáry dotýkají. Jacobiova plocha trojmocného svazku prvních polárných ploch plochy dané vzhledem ke všem bodům prostoru jest Hesseova plocha dané plochy. Viz *Th. Moutard*, Détermination du degré de l'équation de certaines surfaces enveloppes, Nouv. Annales math. 19 (1860); *L. Cremona*, Preliminari di una teoria geometrica delle superficie; *F. Gerbaldi*, Un teorema sulle singolarità della jacobiana di quattro superficie algebriche, Rendiconti Circolo mat. Palermo 10 (1896); *A. Levi*, Sulle singolarità della jacobiana di quattro superficie, Atti Accad. Torino 31 (1896) a Giornale mat. 34 (1896).

[1]) Přehled četných vyšetřování ploch 3. stupně podali *W. F. Meyer* v Encyklopädie der math. Wissenschaften III. 2 (*C* 10*a*: Spezielle algebraische Flächen: Flächen dritter Ordnung, 1928) a *L. Berzolari* v Pascalově Repertorium der höheren Mathematik, 2. vyd. II. 2 (kap. 34, 1922); částečně také *S. J. Korteweg*, Over de Rodenberg'sche modellen van kubische oppervlakken met historische inleiding, Nieuw Archief Amsterdam 20 (1893). Vedle spisů synthetické povahy dříve vytčených (v čl. 94 a 95) a vedle příslušných kapitol spisů (uv. v pozn. [1]) čl. 124) o analytické geometrii (*G. Salmon*) nebo o plochách algebraických (*L. Cremona*, *A. B. Basset*) nebo o vybraných předmětech projektivní geometrie (*E. Bertini*, *E. Ciani*, také *H. F. Baker*, Principles of geometry III, 1923) jest uvésti ještě monografii (jednající souběžně také o rovinných čarách 3. stupně) *F. Dumont*, Introduction à la géométrie du troisième ordre, 1904.

kužel jest stupně 6. a třídy rovněž 12., nemá přímek dvojných, za to však 6 přímek kuspidálních.

Plocha 3. stupně s největším počtem bodů dvojných má 4 body konické; neboť předpoklad pěti konických bodů vede k třídě 2., tedy k ploše 2. stupně, a k záporné hodnotě pro počet inflexních tečných rovin kužele opsaného. Položíme-li vrcholy základního čtyrstěnu soustavy souřadnic do čtyř konických bodů plochy kubické, nabude její rovnice jednoduchého tvaru

$$ax_1x_2x_3 + bx_1x_2x_4 + cx_1x_3x_4 + dx_2x_3x_4 = 0.$$

Odtud seznáme, že žádný ze čtyř dvojných bodů konických nelze nahraditi dvojným bodem biplanárním, nemá-li se plocha rozpadnout; neboť aby na př. bod (1, 0, 0, 0) byl biplanárním bodem plochy, musel by tečný kužel plochy s tímto vrcholem o rovnici $ax_2x_3 + bx_2x_4 + cx_3x_4 = 0$ zvrhnouti se ve dvě roviny, což vyžaduje, by (aspoň) jeden ze součinitelů jeho rovnice byl roven nule; v tom případě by se však uvažovaná plocha 3. stupně rozpadla (aspoň) v rovinu a kvadratickou plochu kuželovou.

Plocha 3. stupně obsahuje určitý počet přímek. Neboť protože rovnice roviny může splniti tři podmínky, má kubická plocha trojnásobné roviny tečné; taková tečná rovina protíná plochu 3. stupně v čáře 3. stupně s třemi body dvojnými, tedy ve trojici přímek. Každou přímkou kubické plochy lze položiti 5 rovin, z nichž každá protíná plochu ve dvou dalších přímkách. Neboť leží-li přímka $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ na ploše kubické, má rovnice této plochy tvar

$$x_1^2v_1 + x_1x_2v'_1 + x_2^2v''_1 + x_1v_2 + x_2v'_2 + v_3 = 0,$$

kde v_1, v'_1, v''_1, v_2, v'_2 a v_3 jsou formy proměnných x_3 a x_4 stupně udaného indexem; vskutku každá rovina $x_4 = kx_3$ má s touto plochou společnou uvedenou přímku a kuželosečku, jejíž rovnici (vedle rovnice roviny) dostaneme z rovnice plochy, nahradíme-li ve formách těch x_3 a x_4 konstantami 1 rep. k. Rovina $x_4 = kx_3$ stane se tečnou rovinou plochy tehdy a jen tehdy, rozpadne-li se dotčená kuželosečka ve dvě přímky; podmínka toho je vyjádřena rovnicí 5. stupně v k. Lze tedy každou přímkou plochy kubické položiti 5 rovin, jež mají s plochou tou celkem 11 přímek společných. Vyjdeme-li od trojnásobné tečné roviny plochy uvažované, dostaneme tak 27 přímek na ploše ležících. *Obsahuje* tedy *plocha 3. stupně bez bodů singulárních 27 přímek.*

Z provedené úvahy vyplývá hned také počet trojnásobných tečných rovin plochy kubické. Protože totiž každou přímkou plochy lze vésti 5 rovin, z nichž každá plochu protíná v trojici přímek a je tedy její trojnásobnou rovinou tečnou, jest možno 27 přímkami vésti 135 takových rovin; ježto však každou rovinu takovou dostaneme tímto způsobem třikrát, vycházejíce totiž od každé ze tří přímek jejího průseku s plochou, *má plocha 3. stupně bez bodů singulárních 45 trojnásobných rovin tečných.*

b) Hesseova plocha plochy kubické má stupeň 4. a jest totožna se Steinerovou plochou její, t. j. geometrické místo bodu, jehož kvadratická polára je plochou kuželovou, je spolu geometrickým místem vrcholu tohoto kužele.

Neboť *je-li vrcholem kužele, jenž je kvadratickou polárou bodu P vzhledem k dané ploše 3. stupně, bod Q, jest* obráceně *bod P vrcholem kuželové plochy, která je kvadratickou polárou bodu Q vzhledem k téže ploše.* Napíšeme-li totiž rovnici dané plochy 3. stupně ve tvaru

$$x_1^3 + x_1^2 u_1 + x_1 u_2 + u_3 = 0,$$

kde u_k jsou ternární formy k-tého stupně proměnných x_2, x_3, x_4, má kvadratická polára bodu $P\,(1, 0, 0, 0)$ vzhledem k této ploše rovnici

$$3x_1^2 + 2x_1 u_1 + u_2 = 0;$$

aby to byl kužel s vrcholem $Q\,(0, 1, 0, 0)$, nesmí tato rovnice obsahovati proměnnou x_2, takže $u_1 = ax_3 + bx_4$, $u_2 = a'x_3^2 + 2b'x_3x_4 + c'x_4^2$, a rovnice dané plochy jest tedy

$$x_1^3 + x_1^2\,(ax_3 + bx_4) + x_1\,(a'x_3^2 + 2b'x_3x_4 + c'x_4^2) + u_3 = 0.$$

Avšak kvadratická polára bodu Q vzhledem k takové ploše má rovnici

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0;$$

protože v rovnici té není obsaženo x_1, jest to kužel s vrcholem P. Obsahuje tedy plocha vytvořená bodem P (t. j. Hesseova plocha plochy kubické) také bod Q (vytvořující Steinerovu plochu plochy té) a obráceně; body P a Q, jež k sobě na Hesseově ploše takto příslušejí, slují *sdruženými* (konjugovanými) *póly*.

Tečná rovina Hesseovy plochy v bodě jejím P jest polárnou rovinou sdruženého pólu Q vzhledem k dané ploše kubické. Zvolíme-li totiž za sdružené póly P a Q opět vrcholy základního čtyrstěnu souřadnic $O_1\,(1, 0, 0, 0)$ a $O_2\,(0, 1, 0, 0)$, jest rovnice kubické plochy tvaru

$$x_1^3 + x_1^2\,(ax_3 + bx_4) + x_1\,(a'x_3^2 + 2b'x_3x_4 + c'x_4^2) + u_3 = 0.$$

Polárná rovina bodu O_2 vzhledem k této ploše má rovnici

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0;$$

ustanovme ještě rovnici tečné roviny příslušné plochy Hesseovy v bodě O_1. Máme-li v rovnici Hesseovy plochy uvedené plochy kubické zřetel pouze k členům s nejvyšší mocninou proměnné x_1, nalezneme, že souborem takových členů jest

$$8x_1^3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\,(3a'c' - 3b'^2 - a^2c' + 2abb' - a'b^2);$$

má tudíž tečná rovina plochy Hesseovy v bodě O_1 rovnici

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0,$$

tutéž jako hořejší rovina polárná.

Tečné roviny Hesseovy plochy ve sdružených pólech P a Q protínají se na přímce, spojující body sdružené k ostatním dvěma průsečíkům přímky PQ s plochou tou. Při hořejší volbě rovnice pro plochu kubickou, kde $u_3 = x_2^3 v_0 + x_2^2 (ax_3 + \beta x_4) + x_2 (a' x_3^2 + 2\beta' x_3 x_4 + \gamma' x_4^2) + v_3$ (a v_0 je konstanta, v_3 pak forma 3. stupně proměnných x_3, x_4), mají tečné roviny Hesseovy plochy její v bodech $P = O_1$ a $Q = O_2$ rovnice

$$3v_0 x_2 + ax_3 + \beta x_4 = 0, \qquad 3x_1 + ax_3 + bx_4 = 0.$$

Dejme tomu, že přímka PQ protíná plochu Hesseovu ještě v bodech R a S; zvolme bod R za O'_1 a sdruženým pólem jeho budiž O_3, potom zvolme bod S za O'_2 a sdruženým pólem jeho budiž O_4. Při změně čtyrstěnu souřadnic v $O'_1 O_2 O_3 O_4$ nabude rovnice kubické plochy tvaru (protože vrchol O'_1 leží na $O_1 O_2$, takže $x'_2 = x_2 + \lambda x_1$)

$$x_1^3 + x_1^2 (ax_3 + bx_4) + x_1 (a' x_3^2 + 2b' x_3 x_4 + c' x_4^2) + (x'_2 - \lambda x_1)^3 v_0 +$$
$$+ (x'_2 - \lambda x_1)^2 (ax_3 + \beta x_4) + (x'_2 - \lambda x_1)(a' x_3^2 + 2\beta' x_3 x_4 + \gamma' x_4^2) + v_3 = 0;$$

protože kvadratickou polárou bodu O'_1 má býti kužel s vrcholem O_3 (jehož rovnice nesmí tedy obsahovati x_3), dostáváme $a = 0$, $\alpha = 0$, $a' - \lambda a' = 0$, $b' - \lambda\beta' = 0$. Ze změny čtyrstěnu v $O_1 O'_2 O_3 O_4$ plynou obdobně (protože O'_2 leží rovněž na $O_1 O_2$ a tedy $x'_1 = x_1 + \mu x_2$) vzhledem k tomu, že kvadratickou polárou bodu O'_2 má býti kužel s vrcholem O_4, důsledky $b = 0$, $\beta = 0$, $\beta' - \mu b' = 0$, $\gamma' - \mu c' = 0$; tedy z obého ještě $b' = 0$, $\beta' = 0$. Proto rovnice tečných rovin plochy Hesseovy v P a Q se zjednoduší na $x_2 = 0$ a $x_1 = 0$; protínají se tedy roviny ty v přímce $O_3 O_4$, t. j. ve spojnici bodů, sdružených k průsečíkům R a S přímky PQ s plochou Hesseovou.

Rovnice kubické plochy zkrátí se hořejšími volbami na rovnici

$$x_1^3 + x_1 (a' x_3^2 + c' x_4^2) + x_2^3 v_0 + x_2 (a' x_3^2 + \gamma' x_4^2) v_3 = 0;$$

polárná rovina libovolného bodu $(y_1, y_2, 0, 0)$ na $O_1 O_2$ vzhledem k této ploše jest

$$y_1^2 x_1 + v_0 y_2^2 x_2 = 0,$$

obsahuje tedy přímku $O_3 O_4$. Proto platí: *Polárná rovina kubické plochy, příslušná k libovolnému bodu, ležícímu na spojnici dvou sdružených pólů P a Q Hesseovy plochy její, prochází průsečnicí tečných rovin plochy Hesseovy v těchto bodech P a Q.*[2])

---

[2]) O Hesseově ploše plochy kubické jednají dále na př. *F. E. Eckardt*, Eine Eigenschaft der Hesse'schen Fläche einer Fläche dritter Ordnung, Zeitschrift Math. Phys. 19 (1874); *E. Ciani*, Sulle superficie cubiche, la cui Hessiana si spezza, Rendiconti Accad. Lincei Roma (4) 6_1 (1890); *F. Dumont*; Théorème sur la détermination d'une surface du troisième

c) *Rovnici plochy 3. stupně bez bodů singulárních lze uvésti na jednoduchý tvar*

$$a_1x_1^3 + a_2x_2^3 + a_3x_3^3 + a_4x_4^3 - a_5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3 = 0.$$

Abychom tuto rovnici mohli odvoditi, dokažme nejprve větu, že *bod, jehož kvadratická polára vzhledem k ploše kubické se rozpadá ve dvě roviny, jest dvojným bodem její plochy Hesseovy* (a obráceně). Zvolíce jako prve rovnici plochy kubické ve tvaru

$$x_1^3 + x_1^2(ax_3 + bx_4) + x_1(a'x_3^2 + 2b'x_3x_4 + c'x_4^2) + u_3 = 0,$$

při čemž kvadratická polára bodu O_1 jest kužel s vrcholem O_2, shledáme, že podmínkou toho, aby tato kuželová plocha 2. stupně, příslušná k bodu O_1, o rovnici

$$3x_1^2 + 2x_1(ax_3 + bx_4) + a'x_3^2 + 2b'x_3x_4 + c'x_4^2 = 0$$

se rozpadla, jest

$$\begin{vmatrix} 3 & a & b \\ a & a' & b' \\ b & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

čili $3(a'c' - b'^2) + 2abb' - a^2c' - a'b^2 = 0$. Výraz na levé straně této rovnice je však (jak jsme v předešlém odstavci vypočetli) součinitelem při x_1^3 v rovnici Hesseovy plochy uvažované plochy kubické; jeho nulová hodnota je tedy zároveň nutnou a dostačující podmínkou toho, aby Hesseova plocha měla v bodě O_1 bod dvojný.

Přímka, ve které se dvě roviny tvořící kvadratickou poláru, příslušnou k dvojnému bodu plochy Hesseovy, protínají, leží na Hesseově ploše a obsahuje tři dvojné body této plochy. Protože kvadratická polára bodu O_1 na Hesseově ploše uvažované plochy kubické jest kužel s vrcholem O_2, můžeme za průsečnici dvou rovin, skládajících kvadratickou poláru dvojného bodu O_1, zvoliti přímku O_2O_3; rovnice poláry té má tu rovnici

$$3x_1^2 + 2bx_1x_4 + c'x_4^2 = 0,$$

takže v hořejší rovnici poláry i plochy kubické se objeví $a = 0$, $a' = 0$, $b' = 0$ a rovnice kubické plochy nabude tvaru

$$x_1^3 + bx_1^2x_4 + c'x_1x_4^2 + u_3 = 0.$$

Protože kvadratická polára každého bodu na přímce O_2O_3 je kužel s vrcholem O_1, leží přímka ta na ploše Hesseově. Hledajíce pak na přímce O_2O_3 body, jejichž kvadratické poláry vzhledem k dané ploše kubické se rozpadají ve dvojice rovin, obdržíme pro bod na O_2O_3, o jehož souřadnicích platí $x_2 + \lambda x_3 = 0$, kvadratický kužel s rovnicí, jejíž koeficienty jsou lineární funkce parametru λ; a podmínka, aby se tato kuželová plocha rozpadla, obsahuje tedy λ ve 3. stupni.

---

ordre générale par la hessienne, Nouv. Annales math. (3) 15 (1896); také *J. I. Hutchinson*, The Hessian of the cubic surface, Bulletin Amer. math. soc. (2) 5 a 6 (1899 a 1900); a j.

Přikročme k odvození hořejší (Sylvestrovy) rovnice pro obecnou plochu 3. stupně. Je-li bod O_1 dvojným bodem Hesseovy plochy dané plochy kubické, jest kvadratickou polárou jeho vzhledem ke kubické ploše té dvojice rovin s průsečnicí ležící na ploše Hesseově a obsahující tři dvojné body její; za tuto přímku zvolme přímku $x_1 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ a dvojné body na ní položené označme L, M, N. Kvadratická polára bodu O_1 má tedy rovnici

$$a_1 x_1^2 - a_5 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = 0;$$

integrací podle x_1 obdržíme odtud rovnici plochy kubické

$$f(x_k) \equiv a_1 x_1^3 - a_5 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3 + \varphi (x_2, x_3, x_4) = 0,$$

kde můžeme funkci φ dáti tvar $a_2 x_2^2 + a_3 x_3^3 + a_4 x_4^3 + x_2^2 (\alpha x_3 + \beta x_4) + x_2 (\alpha' x_3^2 + 2\beta' x_3 x_4 + \gamma' x_4^2) + \delta x_3^2 x_4 + \varepsilon x_3 x_4^2$.

Bodu L dejme vedle $x_1 = 0$ souřadnici $x_3 = 0$, takže pro něj dále platí $x_2 + x_4 = 0$. Jeho kvadratická polára $\dfrac{\partial f}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f}{\partial x_4} = 0$ jest kužel s vrcholem O_1; protože se rozpadá ve dvě roviny, zvolme za průsečnici jejich přímku $O_1 O_3$. Z toho plyne $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$. Podmínkám pak, aby bodům M a N obdobně položeným příslušely kvadratické poláry rozpadající se ve dvojice rovin, vyhoví se volbou $\beta = 0$, $\gamma' = 0$. Tak tedy dostaneme pro kubickou plochu rovnici

$$a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + a_4 x_4^3 - a_5 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3 = 0.$$

Hesseova plocha plochy 3. stupně takto vyjádřené má rovnici

$$\frac{1}{a_1 x_1} + \frac{1}{a_2 x_2} + \frac{1}{a_3 x_3} + \frac{1}{a_4 x_4} - \frac{1}{a_5 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)} = 0.$$

Při této úvaze vyšli jsme od volby bodu O_1 za dvojný bod plochy Hesseovy a základní čtyrstěn souřadnic položili jsme tak, že rovina $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ protíná strany trojúhelníku $O_2 O_3 O_4$ rovněž ve dvojných bodech této plochy; ze souměrnosti rovnic pro uvažované plochy plyne, že také vrcholy O_2, O_3, O_4 jsou dvojnými body Hesseovy plochy, rovněž tak průsečíky roviny $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ s ostatními třemi hranami čtyrstěnu. *Má* tedy *Hesseova plocha obecné plochy 3. stupně deset bodů dvojných, jež jsou vrcholy pětistěnu; tyto dvojné body leží po třech na deseti přímkách, jež jsou hranami pětistěnu toho.*[3])[4])

[3]) O větě Sylvestrově (uvedené tímto r. 1851), že kvaternární formu kubickou lze (vždy a jen jedním způsobem) vyjádřiti součtem pěti trojmocí forem lineárních, a o t. zv. Sylvestrově pětistěnu pojednává obšírně *P. Gordan*, Über das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung, Math. Annalen 5 (1872).

[4]) O některých speciálních plochách 3. stupně pojednali *F. E. Eckardt*, Über diejenigen Flächen dritten Grades, auf denen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden, Math. Annalen 10 (1876); *F. Dumont*, Sur deux formes particulières de l'équation réduite des surfaces du troisième ordre générales, Bulletin Soc. math. France 26 (1898); *K. Bobek*, Über Flächen dritter Ordnung, welche Collineationen in sich zulassen, Monats-

127. Plochy čtvrtého stupně. *a*) Obecná plocha 4. stupně má ve své rovnici 4 členy tvaru x_1^4, 12 členů typu $x_1^2x_2$, 6 členů druhu $x_1^2x_2^2$, 12 členů tvaru $x_1^2x_2x_3$ a 1 člen $x_1x_2x_3x_4$, celkem 35 členů; *jest* tedy *určena třicetičtyřmi body v obecné poloze.*

Z ploch čtvrtého stupně vyšetřovány byly dosud hlavně některé pozoruhodné případy a skupiny ploch.[1]) Plocha 4. stupně bez bodů singulárních čili obecná kvartika jest třídy 36.; kvartika nejnižší třídy má třídu 3., jest duální k ploše 3. stupně 4. třídy (se čtyřmi dvojnými body konickými) a sluje Steinerova. Tato kvartika patří k monoidům, t. j. k plochám 4. stupně s bodem trojnásobným, jež jsou poměrně jednoduché. Plocha 4. stupně může míti jednotlivých bodů singulárních a sice dvojnásobných bodů konických nanejvýš 16 (protože při c bodech konických má třídu $36-2c$); jest v tomto důležitém případě třídy 4., soběduální a sluje Kummerova. Z ploch o menším počtu bodů dvojných věnována byla pozornost zejména některým kvartikám s 6, 8, 10 a 12 body dvojnými. Plocha 4. stupně může míti singulární přímku nebo kuželosečku nebo čáru třetího stupně; nejvíce z nich byly zkoumány kvartiky s dvojnásobnou kuželosečkou (pravou nebo zvrhlou); kvartika s dvojnou kubikou prostorovou jest plocha přímková. Z jiných hledisek nejvýznamnější jsou úvahy o kvartikách s neomezeným počtem kuželoseček a o kvartikách racionálních (takových totiž, jejichž body mají souřadnice, vyjádřené racionálními celistvými funkcemi tří homogenních parametrů).

---

hefte Math. Phys. 10 (1899); *F. Dumont*, Sur les surfaces du troisième ordre qui sont polaires d'elles-mêmes par rapport à une quadrique, Bulletin Soc. math. France 25 (1897); *L. Seifert*, Příspěvek k theorii plochy stupně třetího s uniplanárním bodem, Spisy přír. fak. univ. Brno 23 (1923), a téhož Sur les surfaces du troisième ordre qui ont, aux points d'une courbe plane, un contact d'ordre deux avec une surface générale, tamtéž 107 (1929) (k tomu Poznámka o parabolické křivce plochy třetího stupně, Časopis mat. fys. 59, 1930). Pomocí kubických transformací involučních podal klasifikaci ploch 3. stupně *J. F. Pobanz*, A study of cubic surfaces by means of involutory cubic space transformations, Publications univ. California 1 (1924). Ze stanoviska metrického vyšetřovali plochy kubické na př. *K. Stoltz*, Untersuchung der Fläche dritter Ordnung hinsichtlich der projectiv verallgemeinerten Mittelpunkts-Eigenschaften, Dissertation Giessen 1890; *E. Ciani*, Sulle superficie algebriche simmetriche, Rendiconti Accad. Lincei Roma (4) 6_1 (1890); *F. Dumont*, Note sur la symétrie dans les surfaces algébriques, Nouv. Annales math. (3) 16 (1897); a j.

[1]) Přehled nejdůležitějších úvah o plochách 4. stupně podává obšírně *W. F. Meyer* v Encyklopädie der math. Wissenschaften III. 2 (*C* 10*b*: Spezielle algebraische Flächen: Flächen vierter und höherer Ordnung, 1931); krátce *H. E. Timerding* v Pascalově Repertorium der höheren Mathematik, 2. vyd. II. 2 (kap. 35, 1922). Po zvláštní kapitole jim věnuje *G. Salmon*, A treatise on the analytic geometry of three dimensions II, a *A. B. Basset*, A treatise of the geometry of surfaces, 1910. Obšírně o kvartikách se singulárními body nebo čarami pojednává *C. M. Jessop*, Quartic surfaces with singular points, 1916. Literaturu uvádí také *G. Loria*, Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche (4. vyd. 1931), p. 93 a n., 326 a n.

b) Rovnice plochy 4. stupně s body dvojnými[2]) mají méně nezávislých konstant než rovnice plochy obecné, protože z existence takového bodu na ploše plyne vazba mezi koeficienty její rovnice. Požadavek pak dvojného bodu v bodě daném jest vyjádřen čtyřmi rovnicemi mezi součiniteli v rovnici plochy; speciálně kvartika, jež má dvojný bod v bodě O_k, má ve své rovnici x_k v nejvyšší mocnině 2.

Kvartika *se čtyřmi dvojnými body* ve vrcholech základního čtyrstěnu má rovnici s 18 nezávislými konstantami, složenou totiž ze 6 členů tvaru $x_1^2x_2^2$, z 12 členů typu $x_1^2x_2x_3$ a z členu $x_1x_2x_3x_4$.[3])

Rovnici kvartiky *s pěti dvojnými body* lze sestaviti pomocí rovnic pěti speciálních ploch 2. stupně, z nichž každá prochází pěti body danými; jsou-li rovnice těchto ploch $p_k = 0$ (pro k od 1 do 5), podává kvadratická homogenní funkce pěti forem p_k, položena rovnou nule, rovnici se 14 nezávislými konstantami, jež je obecnou rovnicí kvartiky s pěti dvojnými body v daných bodech.

Rovnici kvartiky *s šesti body dvojnými* můžeme odvoditi z rovnic čtyř ploch 2. stupně: Jsou-li opět $p_k = 0$ (pro k od 1 do 4) rovnice čtyř speciálních kvadrik, jdoucích danými šesti body, vyjadřuje rovnice, jejíž levá strana je kvadratická forma forem p_k, kvartiku s dvojnými body v bodech daných. Protože však rovnice tak získaná obsahuje jen 9 nezávislých konstant, není pro uvažovanou plochu obecná (zvolenými šesti body dvojnými se totiž počet 34 konstant v rovnici plochy bez bodů singulárních redukuje na 10); takovou rovnici však dostaneme, připočteme-li k uvedené formě levou stranu rovnice speciální kvartiky se šesti body dvojnými v bodech daných (znásobenou konstantou desátou), která ovšem nesmí býti obsažena mezi kvartikami prve vyjádřenými. K tomu účelu se dobře hodí kvartika, jejíž rovnice má za levou stranu jakobian čtyř forem p_k.

Rovnice kvartiky *se sedmi dvojnými body* může vzniknouti z rovnic tří speciálních ploch 2. stupně a z rovnice speciální plochy 4. stupně tohoto druhu: Jsou-li $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$ tři plochy kvadratické, z nichž každá prochází danými sedmi body, vyjadřuje kvadratická forma forem p_k, rovná nule, kvartiku s dvojnými body v bodech daných; obsahujíc však jen pět nezávislých konstant, musí tato rovnice býti

---

[2]) O plochách 4. stupně s body dvojnými soustavně uvažoval *A. Cayley*, A memoir on quartic surfaces, Proceedings Math. soc. London 3 (1870 a 1871, tři pojednání) nebo Collected math. papers VII; viz také *E. E. Kummer*, Über die algebraischen Strahlensysteme, insbesondere über die der ersten und zweiten Ordnung, Math.-phys. Abhandlungen Akad. Berlin, 1866.

[3]) Speciálně plochu 4. stupně se čtyřmi dvojnými body uniplanárními ve vrcholech čtyrstěnu souřadnic lze vyjádřiti rovnicí

$$(a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4 + a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4 + a_{34}x_3x_4)^2 - bx_1x_2x_3x_4 = 0.$$

Viz také *L. Godeaux*, Sur les surfaces du quatrième ordre possédant quatre points doubles uniplanaires ordinaires, Bulletin Acad. Belgique (5) 10 (1925).

doplněna připojením rovnice speciální kvartiky s týmiž body dvojnými (obdobně jako nahoře, pomocí šesté konstanty).[4])[5])

Plochy 4. stupně, jež mají *více než sedm bodů dvojných*, jest možno roztříditi na tomto základě: Kvartika s dvojným bodem v bodě třebas O_4 (0, 0, 0, 1) má rovnici tvaru

$$x_4^2 u_2 + 2x_4 u_3 + u_4 = 0,$$

kde u_k jsou formy k-tého stupně proměnných x_1, x_2, x_3; kuželová plocha s vrcholem O_4, dotýkající se dané kvartiky (opsaný kužel) má rovnici

$$u_2 u_4 - u_3^2 = 0,$$

jest tedy 6. stupně a její řez s rovinou (třebas $x_4 = 0$) jest čára 6. stupně. Protože uvedený kužel má v každé přímce své, jdoucí dalším dvojným bodem kvartiky, přímku dvojnou, má jeho průsečná sextika rovinná v průsečíku svém s touto přímkou dvojný bod. K sextice té přísluší kuželosečka $u_2 = 0$ (také čára 4. stupně $u_4 = 0$), jež se jí ve všech společných bodech dotýká. Podle druhů této sextiky lze rozlišiti druhy ploch 4. stupně s 8 až 16 body dvojnými; protože pravá sextika má nejvýše 10 dvojných bodů, rozpadá se uvažovaná čára 6. stupně u kvartik s 11 až 16 dvojnými body (ovšem rozmanitými způsoby). Celkem lze touto cestou zjistiti po čtyřech druzích kvartiky, má-li 10 nebo 11 nebo 12 bodů dvojných, po dvou druzích v případech 8 nebo 9 nebo 13 dvojných bodů a po jednom typu u ploch se 14 nebo 15 nebo 16 body dvojnými.[6])

c) Ke kvartikám se šesti body dvojnými patří t. zv. *plocha Weddleova*, jež jest geometrickým místem vrcholů kvadratických kuželů, položených šesti danými body.

Jsou-li $p = 0, q = 0, r = 0, s = 0$ rovnice čtyř kvadrik, z nichž každá obsahuje daných šest bodů, vyjadřuje rovnice

$$p + \lambda q + \mu r + \nu s = 0$$

trojmocnou soustavu ploch kvadratických, jdoucích šesti body těmi. Podmínkou toho, aby taková plocha byla kuželovou, jest

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(p + \lambda q + \mu r + \nu s) = 0$$

---

[4]) Za tuto můžeme zvoliti třebas kvartiku složenou z plochy kubické, jež má čtyři dvojné body v bodech daných (třebas vrcholech základního čtyrstěnu souřadnic) a prochází ostatními třemi danými body, a z roviny těmito třemi body jdoucí.

[5]) Jak dokázal Cayley, jest možno z dvojných bodů kvartiky jenom 7 zvoliti libovolně; osmý musí ležeti (u kvartiky s osmi body dvojnými) buď v osmém průsečíku tří ploch 2. stupně, jdoucích sedmi body dvojnými, nebo na zvláštní ploše (nazvané dianodální).

[6]) Klasifikaci ploch 4. stupně s 8 až 16 body dvojnými podal pomocí rovinných čar šestého stupně *K. Rohn*, Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung, 1886 (ve výtahu Math. Annalen 29, 1887).

pro $k = 1, 2, 3, 4$; body, jejichž souřadnice vyhovují těmto rovnicím, jsou vrcholy dotčených kuželů. Vyloučíme-li ze čtyř uvedených rovnic parametry λ, μ, ν, dostaneme rovnici

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{vmatrix} = 0$$

(kde index k označuje derivaci podle x_k), jejíž levá strana je jakobianem čtyř funkcí p, q, r, s; jest to rovnice plochy Weddleovy, příslušné k daným šesti bodům.

Abychom rovnici plochy té nalezli ve tvaru co možná jednoduchém, zvolme za šest daných bodů vrcholy čtyrstěnu souřadnic, mimo to pak body $(1, 1, 1, 1)$ a (a_1, a_2, a_3, a_4). Za kvadratické plochy body těmi jdoucí zvolme dvojice rovin, položených vždy šesti danými body, při čemž jedna z rovin ať je vždy stěnou čtyrstěnu souřadnic; jsou to plochy

$$\begin{aligned} x_1[(a_3 - a_4)\, x_2 + (a_4 - a_2)\, x_3 + (a_2 - a_3)\, x_4] &= 0, \\ x_2[(a_3 - a_4)\, x_1 + (a_4 - a_1)\, x_3 + (a_1 - a_3)\, x_4] &= 0, \\ x_3[(a_2 - a_4)\, x_1 + (a_4 - a_1)\, x_2 + (a_1 - a_2)\, x_4] &= 0, \\ x_4[(a_2 - a_3)\, x_1 + (a_3 - a_1)\, x_2 + (a_1 - a_2)\, x_3] &= 0. \end{aligned}$$

Protože však rovnice čtyř rovin, uvedených zde na druhých místech, nejsou nezávislé (součet první s třetí a součet druhé se čtvrtou jsou totožny), nahradíme čtvrtou dvojici rovin kuželovou plochou s vrcholem O_4, jdoucí ostatními pěti danými body; její rovnice je

$$(a_1 - a_2)\, a_3 x_1 x_2 + (a_3 - a_1)\, a_2 x_1 x_3 + (a_2 - a_3)\, a_1 x_2 x_3 = 0.$$

Určíme-li jakobian oněch tří a této čtvrté formy kvadratické, nalezneme rovnici Weddleovy plochy při zvolených šesti bodech $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 1)$, (a_1, a_2, a_3, a_4) ve tvaru

$$\begin{aligned} &(a_3 - a_4)\,(a_2 x_1^2 - a_1 x_2^2)\, x_3 x_4 + (a_2 - a_1)\,(a_3 x_4^2 - a_4 x_3^2)\, x_1 x_2 + \\ &+ (a_4 - a_2)\,(a_3 x_1^2 - a_1 x_3^2)\, x_2 x_4 + (a_3 - a_1)\,(a_4 x_2^2 - a_2 x_4^2)\, x_1 x_3 + \\ &+ (a_2 - a_3)\,(a_4 x_1^2 - a_1 x_4^2)\, x_2 x_3 + (a_4 - a_1)\,(a_2 x_3^2 - a_3 x_2^2)\, x_1 x_4 = 0. \end{aligned}$$

Jak z této rovnice bezprostředně zjistíme, jest každý z šesti daných bodů dvojným bodem plochy Weddleovy. Plocha Weddleova obsahuje 25 přímek, z nichž 15 jsou spojnice šesti dvojných bodů jejích po dvou a 10 jsou průsečnice dvojic rovin, položených vždy třemi z bodů těch a třemi zbývajícími.[7])[8])

[7]) Kvartika pojmenovaná Weddleovou vyskytuje se po prvé v pojednání *Th. Weddle*, On the theorems in space analogous to those of Pascal and Brianchon in a plane, Cambridge-Dublin math. Journal 5 (1850). Mimo A. Cayleye (v práci nahoře uvedené) zabývali se touto plochou zejména *C. Hierholzer*, Über eine Fläche der vierten Ordnung, Math. Annalen 4 (1871); *H. Bateman*, The Weddle quartic surface, Proceedings Math. soc. London (2) 3 (1905).

[8]) Mezi kvartikami s osmi dvojnými body jest vytknouti plochu 4. stupně, jejíž dvojné body leží v průsečících tří ploch 2. stupně. Její

Z kvartik s deseti body dvojnými budiž uvedena plocha, definovaná rovnicí, jejíž levou stranou je souměrný determinant z lineárních funkcí souřadnic x_k, tedy rovnicí

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

kde $f_{kh} \equiv f_{hk}$ a všechny funkce $f_{hk} \equiv a_{hk}x_1 + b_{hk}x_2 + c_{hk}x_3 + d_{hk}x_4$; tuto plochu nazval *A. Cayley symetroidem.*[9]) Zvláštním případem symetroidu (jsou-li totiž lineární funkce f_{hk} druhé parc. derivace určité formy kubické) jest Hesseova plocha plochy 3. stupně.[10])

---

obecnou rovnici, jejíž levá strana je kvadratickou formou tří forem kvadratických p_k (jež nule rovny dávají rovnice tří kvadrik právě uvedených), lze redukovati na jednoduchý tvar $p_1p_3 - p_2^2 = 0$. Viz *A. Cayley*, On the quartic surfaces $(U, V, W)^2 = 0$, Quart. Journal math. 10 (1869) a 11 (1870).

[9]) Existenci deseti dvojných bodů symetroidu lze vyvoditi odtud, že v trojmocném svazku ploch 2. stupně jest deset ploch, zvrhlých ve dvojice rovin. Neboť geometrickým místem vrcholů kuželových ploch, obsažených v trojmocném svazku kvadrik s rovnicí

$$x_1A + x_2B + x_3C + x_4D = 0,$$

kde x_k jsou homogenní parametry a $A \equiv \Sigma a_{hk}y_hy_k$, obdobně B, C, D jsou levé strany rovnic pro základní kvadriky svazku s proměnnými y_k, jest plocha (Jacobiova), jejíž rovnici dostaneme vyloučením parametrů x_k ze čtyř prvních derivací rovnice svazku toho podle y_k, tedy z rovnic $x_1A_k + x_2B_k + x_3C_k + x_4D_k = 0$, kde A_k, B_k, C_k, D_k jsou parc. derivace funkcí A, B, C, D podle y_k. Vyloučíme-li však z těchto rovnic proměnné y_k, obdržíme symetroid, v jehož rovnici $f_{hk} = a_{hk}x_1 + b_{hk}x_2 + c_{hk}x_3 + d_{hk}x_4$. Protože ze čtyř rovnic právě uvedených (lineárních v x_k i v y_k) lze x_k vyjádřiti jako racionální funkce proměnných y_k i obráceně, odpovídají si body uvedené plochy Jacobiovy a body symetroidu obapolně jednoznačně. Dvojné přímce Jacobiovy plochy trojmocného svazku kvadrik, průsečnici dvou rovin, ve které se kvadrika svazku toho rozpadá, odpovídá dvojný bod symetroidu, pro jehož souřadnice vymizí všechny subdeterminanty 3. stupně v uvedeném determinentu jeho rovnice. A protože Jacobiova plocha uvažovaného svazku obsahuje deset dvojných přímek, jež jsou průsečnicemi vždy dvou rovin zvrhlých jeho kvadrik, má symetroid deset bodů dvojných.

[10]) Jestliže v rovnici symetroidu nahradíme čtyři funkce v hlavní úhlopříčce determinantu nulami, dostaneme plochu 4. stupně, jež má další 4 body dvojné (průsečíky rovin, jejichž rovnice obdržíme, položíce nule rovnými vždy tři funkce téhož řádku v uvedeném determinantu). Rovnici této kvartiky se 14 body dvojnými lze psáti ve tvaru $\sqrt{f_{12}f_{34}} + \sqrt{f_{13}f_{24}} + \sqrt{f_{14}f_{23}} = 0$. Na týž tvar s jednou nebo dvěma podmínkami dalšími jest možno uvésti rovnici kvartiky s 15 nebo 16 body dvojnými. Viz *C. M. Jessop*, The quartic surfaces with fourteen, fifteen and sixteen nodes, Quart. Journal math. 31 (1900). O kvartikách se 14 body dvojnými pojednává také *M. Piazolla-Beloch*, Sulle superficie iperellitiche del 4° ordine con 14 punti doppi, Rendiconti Circolo mat. Palermo 48 (1924).

Zajímavé plochy 4. stupně s dvanácti body dvojnými jsou t. zv. *plochy desmické*; jsou to kvartiky svazku, jehož členy jsou tři kvartiky, rozpadající se každá ve čtyři stěny čtyrstěnu (t. zv. čtyrstěny desmické).[11]) Rovnice desmické kvartiky jest tedy

$$\lambda \Delta_1 + \mu \Delta_2 + \nu \Delta_3 = 0,$$

kde $\Delta_h = \prod_1^4 (a_{hk}x_1 + b_{hk}x_2 + c_{hk}x_3 + d_{hk}x_4)$, při čemž platí identita $\alpha\Delta_1 + \beta\Delta_2 + \gamma\Delta_3 \equiv 0$. Dvanáct dvojných bodů kvartiky desmické tvoří vrcholy tří desmických čtyrstěnů (jiných než jsou členy svazku); šestnáct přímek, z nichž každá spojuje tři vrcholy (různých) čtyrstěnů těch, leží na ploše. Na př. kvartika s rovnicí $(x_1^2 - x_2^2)(x_3^2 - x_4^2) + k(x_1^2 - x_3^2)(x_2^2 - x_4^2) = 0$ je desmická s dvojnými body (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1); (1, 1, 1, 1), (1, 1, — 1, — 1), (1, — 1, 1, — 1), (1, — 1, — 1, 1); (1, 1, 1, — 1), (1, 1, — 1, 1), (1, — 1, 1, 1), (— 1, 1, 1, 1).[12])

d) Důležitá soběduální *kvartika Kummerova* má 16 dvojných bodů (konických) a 16 dvojných rovin tečných (dotýkajících se plochy podél kuželosečky).[13])

---

[11]) K danému čtyrstěnu $ABCD$ obdržíme čtyrstěn desmický, vedeme-li zvoleným bodem A' tři přímky, z nichž každá protíná dvojici protějších hran čtyrstěnu $ABCD$, a vytkneme-li na každé přímce té bod (B', C', D'), harmonicky sdružený k bodu A' vzhledem k oběma průsečíkům přímky s uvedenými hranami. Dva čtyrstěny $ABCD$ a $A'B'C'D'$ jsou čtyrnásobně homologické, a středy těchto homologií jsou vrcholy třetího čtyrstěnu desmického. Vzájemná poloha těchto tří desmických čtyrstěnů je taková, že dvě protější hrany každého ze dvou čtyrstěnů protínají dvě protější hrany třetího; jejich dvanáct stěn prochází po třech šestnácti přímkami a duálně dvanáct jejich vrcholů leží po třech na šestnácti přímkách.

[12]) Viz k tomu zejména *C. Stephanos*, Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres, Bulletin math. astron. (2) 3 (1879); *H. Schröter*, Elementare Construction der Figur dreier in desmischer Lage befindlichen Tetraeder, Journal r. a. Math. 109 (1892); *L. Klug*, Desmische Systeme, Math. naturwiss. Berichte Ungarn 17 (1901); *G. Humbert*, Sur la surface desmique du quatrième ordre, Journal math. p. a. (4) 7 (1891); *Ch. Bioche*, Sur les surfaces desmiques du quatrième ordre, Bulletin Soc. math. France 37 (1909); *R. M. Mathews*, Cubic curves and desmic surfaces, Transactions Amer. math. soc. 28 a 30 (1926 a 1928).

[13]) Tuto plochu vyšetřovali zvláště *E. E. Kummer*, Über die Flächen vierten Grades mit sechszehn singulären Punkten, Monatsberichte Akad. Wiss. Berlin 1864; *A. Cayley*, Note sur la surface du quatrième ordre douée de seize points singuliers et de seize plans singuliers, Journal r. a. Math. 73 (1871); *H. Weber*, Über die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechszehn Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen mit zwei Veränderlichen, Journal r. a. Math. 84 (1878); *K. Rohn*, Die verschiedenen Gestalten der Kummer'schen Fläche, Math. Annalen 18 (1881); *S. Kantor*, Über Collineationsgruppen an Kummer'schen Flächen, Amer. Journal math. 19 (1897); *E. Pascal*, Sulla classificazione delle superficie di Kummer, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 38 (1906). Obsáhlou monografii podal *R. W. H. T. Hudson*, Kummer's quartic surface, 1905; viz také *E. Ciani*, Introduzione alla geometria algebrica, 1931.

Kužel 6. stupně, opsaný této kvartice z jednoho dvojného bodu jejího, maje 15 přímek dvojných ve spojnicích svého vrcholu s ostatními dvojnými body plochy té, rozpadá se v šest rovin. Každá z těchto rovin obsahuje šest dvojných bodů kvartiky (mimo vrchol uvažovaného kužele dalších pět na průsečnicích svých s pěti zbývajícími rovinami, jeho součástkami) a dotýká se plochy podél kuželosečky, na níž šest uvedených bodů dvojných leží; neboť průsečná čára její s plochou 4. stupně, obsahujíc šest dvojných bodů, rozpadá se ve dvojnásobnou kuželosečku (nikoli snad ve čtyři přímky, protože dvojné body plochy neleží po třech v téže přímce). Protože každým dvojným bodem kvartiky Kummerovy prochází šest dvojných tečných rovin jejích a obráceně na každé takové rovině leží šest dvojných bodů plochy, má tato kvartika celkem a právě 16 dvojných rovin tečných, jak uvedeno. Dvojnásobné body a tečné roviny uvažované kvartiky tvoří tedy *konfiguraci* 16_6, jež sluje *Kummerova*.

Složení Kummerovy konfigurace snadno přehlédneme: Označíme-li dvojný bod, od něhož vycházíme, symbolem 0 a dvojné roviny tečné jím jdoucí číslicemi 1 až 6, můžeme ostatních patnáct dvojných bodů označiti symboly 12, 13, . . ., 56, leží-li totiž na průsečnici rovin 1 a 2, rovin 1 a 3, . . ., rovin 5 a 6. Tečné roviny plochy 1 až 6 dotýkají se tečného kužele kvartiky v bodě 0; protože kterékoli tři z nich a ostatní tři tvoří dva trojhrany tomuto kvadratickému kuželi opsané, leží hrany trojhranů těch rovněž na kuželi 2. stupně s vrcholem 0; takových kuželů kvadratických jest deset (kolikrát lze ze šesti rovin sestaviti dvě trojice). Avšak přímky, jež s bodem 0 spojují šest dvojných bodů kvartiky, položených na jedné ze zbývajících deseti dvojných rovin tečných této plochy (a tedy na kuželosečce), leží také na kvadratickém kuželi; tyto kuželové plochy 2. stupně jsou ovšem totožny s oněmi. Leží tedy na téže dvojné rovině tečné na př. dvojné body 12, 23, 31, 45, 56, 64; tuto rovinu označme 123/456; obdobně označíme všech deset rovin nejdoucích bodem 0. A dvojné roviny tečné, jdoucí kterýmkoli z ostatních bodů dvojných, obdržíme ze symbolů rovin těch; na př. bodem 12 jdou roviny 1, 2, 123/456, 124/356, 125/346, 126/345.

Konfiguraci 16_6 lze prostým způsobem vyjádřiti analyticky. Všimněme si, že bod o souřadnicích $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ leží v rovinách o souřadnicích $(\beta, -\alpha, \delta, -\gamma)$, $(-\beta, \alpha, \delta, -\gamma)$, $(-\gamma, \delta, \alpha, -\beta)$, $(\gamma, \delta, -\alpha, -\beta)$, $(\delta, \gamma, -\beta, -\alpha)$ a $(\delta, -\gamma, \beta, -\alpha)$. Podrobíme-li zvolený bod a také roviny jím jdoucí transformacím $x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_2 : x_1 : x_4 : x_3$, $= x_3 : x_4 : x_1 : x_2$, $= x_4 : x_3 : x_2 : x_1$, $= -x_1 : -x_2 : x_3 : x_4$, $= -x_1 : x_2 : -x_3 : x_4$, $= x_1 : -x_2 : -x_3 : x_4$ a jejich produktům, obdržíme spolu s daným bodem 16 bodů a 16 rovin uvažované konfigurace. Spolu je patrno, že konfigurace 16_6 a Kummerova kvartika, jí určená, jsou invariantní při 16 kolineacích grupy, jež uvedenými (záměnnými) kolineacemi je vytvořena; jsou také invariantní při 16 korelacích k těmto přidružených.[14])

Abychom nalezli jednoduchou rovnici kvartiky Kummerovy, mějme na zřeteli vytčené transformace, při nichž tato rovnice má býti invariantní; hledaná rovnice jest proto tvaru

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + A(x_1^2x_2^2 + x_3^2x_4^2) + B(x_1^2x_3^2 + x_2^2x_4^2) + \\ + C(x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2) + Dx_1x_2x_3x_4 = 0.$$

Má-li bod $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ býti dvojným bodem plochy (a spolu s ním ostatní body uvažované konfigurace), musí jeho souřadnice vyhověti čtyřem rovnicím, jež jsou parciálními derivacemi rovnice vytčené podle x_k; odtud dostaneme pro koeficienty rovnice té výrazy

$$A = \frac{\alpha^4 + \beta^4 - \gamma^4 - \delta^4}{\gamma^2\delta^2 - \alpha^2\beta^2}, \quad B = \frac{\alpha^4 - \beta^4 + \gamma^4 - \delta^4}{\beta^2\delta^2 - \alpha^2\gamma^2}, \quad C = \frac{\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 + \delta^4}{\beta^2\gamma^2 - \alpha^2\delta^2},$$

$$D = \frac{\alpha\beta\gamma\delta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2)(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2)}{(\alpha^2\beta^2-\gamma^2\delta^2)(\alpha^2\gamma^2-\beta^2\delta^2)(\alpha^2\delta^2-\beta^2\gamma^2)}.$$

Vyloučíme-li z těchto relací souřadnice zvoleného bodu, obdržíme pro součinitele hořejší rovnice vztah $ABC - A^2 - B^2 - C^2 + D^2 + 4 = 0$. Rovnice Kummerovy kvartiky má míti 18 koeficientů; speciální volba soustavy souřadnic absorbuje 15 a zvolený bod dvojný zbývající 3 konstanty.

Zajímavým speciálním případem kvartiky Kummerovy jest t. zv. *tetraedroid*, jehož dvojné body leží po čtyřech na stěnách čtyrstěnu, tvoříce tam průsečíky vždy dvou kuželoseček, v něž se průsečná čára každé roviny čtyrstěnu s kvartikou rozpadá; čtyřroh, složený na každé stěně čtyrstěnu z dvojných bodů plochy, má své úhlopříčné vrcholy

[14]) O Kummerově konfiguraci viz (mimo publikace o kvartice Kummerově) hlavně *Th. Reye*, Über die Kummer'sche Configuration von sechszehn Punkten und sechszehn Ebenen, Journal r. a. Math. 86 (1879); *H. Schröter*, Über das Fünfflach und Sechsflach und die damit zusammenhängende Kummer'sche Configuration, Journal r. a. Math. 100 (1886); *E. Bertini*, Sulle configurazioni di Kummer più volte tetraedroidali, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 29 (1896); *E. Ciani*, Alcune osservazioni sopra la configurazione di Kummer, Giornale mat. 36 (1898), a téhož Sopra la configurazione di Kummer, tamtéž 37 (1899); *H. E. Timerding*, Über die sechszehn Doppelpunkte und sechszehn Doppelebenen einer Kummer'schen Fläche, Math. Annalen 54 (1901); *V. Martinetti*, Alcune considerazioni sulla configurazione di Kummer, Rendiconti Circolo mat. Palermo 16 (1902); *L. Berzolari*, Sopra la configurazione di Kummer e il suo intervento nella teoria delle cubiche gobbe, Rendiconti Accad. Lincei Roma (5) 16_1 (1907); také na př. *G. Gallucci*, Complementi di geometria proiettiva, 1928.

Konfiguraci Kummerovu jest možno lineárně sestrojiti z daných šesti bodů (z nichž žádné čtyři neleží v téže rovině); takovou skupinou bodů jest určeno 12 těchto konfigurací; viz cit. pojednání H. Schröterovo. Budiž ještě poznamenáno, že z uvažované konfigurace lze vybrati čtyrstěny dvojího druhu: jednak čtyrstěny, jejichž vrcholy jsou dvojné body a stěnami dvojné tečné roviny plochy Kummerovy (slují azygetické čili Rosenhainovy, jest jich 80); jednak čtyrstěny, jejichž stěnami jsou sice dvojné roviny tečné, vrcholy však nejsou body dvojné, za to však hrany obsahují po dvou takových bodech (a k nim duální prostorové čtyřrohy, slují syzygetické čili Göpelovy, jest jich 60).

ve vrcholech čtyrstěnu toho (a duálně pro dvojné roviny tečné).[15]) Rovnici tetraedroidu dostaneme z hořejší rovnice kvartiky Kummerovy, položíme-li na př. $\delta = 0$ (tím se čtyři z dvojných bodů objeví na rovině $x_4 = 0$, obdobně po čtyřech na ostatních rovinách základního čtyrstěnu); rovnice jeho jest tedy (při dvojném bodě $(\alpha, \beta, \gamma, 0)$ a ostatních z něho uvedenými kolineacemi odvozených)

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4) + \gamma^2 (\gamma^4 - \alpha^4 - \beta^4) (x_1^2x_2^2 + x_3^2x_4^2) +$$
$$+ \beta^2 (\beta^4 - \alpha^4 - \gamma^4) (x_1^2x_3^2 + x_2^2x_4^2) + \alpha^2 (\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4) (x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2) = 0.$$

e) Plochu 4. stupně *s dvojnásobnou přímkou* jest možno vyjádřiti rovnicí tvaru

$$x_1^2\varphi + x_1x_2\psi_1 + x_2^2\psi_2 = 0,$$

při čemž přímka $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ je dvojnou přímkou plochy, φ je pak kvadratická forma proměnných x_1, x_2, x_3, x_4 a ψ_1, ψ_2 jsou kvadratické formy proměnných x_2, x_3, x_4. Protože v rovnici této je $10 + 6 + 6 - 1$ nezávislých koeficientů a dvojná přímka při obecné poloze je určena čtyřmi podmínkami, obsahuje rovnice uvažované kvartiky obecně 25 nezávislých konstant.[16])

Každá rovina položená přímkou dvojnou protíná kvartiku (mimo dvojnásobnou přímku) v kuželosečce; obsahuje tedy tato kvartika soustavu ∞^1 kuželoseček (z nichž ovšem každá protíná přímku dvojnou ve dvou bodech). Abychom nalezli, kdy se kuželosečka uvedené soustavy rozpadá ve dvě přímky, vložme do hořejší rovnice $x_1 = \lambda x_2$; kvadratická forma proměnných x_2, x_3, x_4, která z levé strany rovnice té po odloučení faktoru x_2^2 zbude, rozpadá se ve dvě lineární, je-li nule roven determinant z parciálních derivací jejích podle uvedených proměnných; protože tento determinant obsahuje konstantu λ v nejvyšším stupni 8., existuje v oné soustavě osm kuželoseček, složených

---

[15]) Tuto plochu nalezl *A. Cayley*, Sur la surface des ondes, Journal math. p. a. 11 (1846); označuje se také jeho jménem. Viz dále zejména *A. Cayley*, Sur un cas particulier de la surface du quatrième ordre avec seize points singuliers, Journal r. a. Math. 65 (1866), a téhož On the tetraedroid as a particular case of the 16-nodal quartic surface, tamtéž 87 (1879); *K. Rohn*, Einige specielle Fälle der Kummer'schen Fläche, Berichte Ges. Wiss. Leipzig, 1884, a tamtéž *C. Segre*, Sur un cas particulier de la surface de Kummer.

Metricky speciálním případem tetraedroidu jest Fresnelova plocha vlnová, často vyšetřovaná; přehled příslušných pojednání podává *E. Wölffing*, Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von der Fresnel'schen Wellenfläche, Bibliotheca math. (3) 3 (1902).

[16]) Viz *A. Clebsch*, Über die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung, Math. Annalen 1 (1869); *R. Sturm*, Über die Flächen mit einer endlichen Zahl von (einfachen) Geraden, vorzugsweise die der vierten und fünften Ordnung, Math. Annalen 3 (1871); *F. Zimmermann*, Untersuchungen über Flächen vierter Ordnung mit einer doppelten Geraden, Dissertation Breslau 1904; *A. B. Basset*, On the singularities of surfaces, Quart. Journal math. 38 (1907), a téhož Singular lines and curves on surfaces, tamtéž 39 (1908).

vždy ze dvou přímek. Má tedy kvartika s dvojnou přímkou (mimo tuto) 16 přímek, jež leží po dvou v osmi rovinách jdoucích přímkou dvojnou.

Mimo uvedenou soustavu kuželoseček vyskytuje se na kvartice s dvojnou přímkou ještě 128 kuželoseček, jež leží po dvou vždy v jedné rovině a ve svém jednom průsečíku onu přímku protínají. Můžeme to nalézti z věty, že sedm přímek proťatých touže přímkou osmou lze spolu s touto protíti jednou kuželosečkou. Zvolíme-li totiž ze sedmi přímek p_k ($k = 1, 2, \ldots, 7$) pět p_1 až p_5 a za přímku je všechny protínající p hranu čtyrstěnu souřadnic $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, lze analyticky zjistiti, že libovolnou přímkou, třebas hranou $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, jdou tři roviny protínající šest uvedených přímek v bodech kuželosečky; neboť determinant vyjadřující, že průsečíky roviny $x_3 = \lambda x_4$ s přímkami p, p_1 až p_5 (jejich průměty z vrcholu čtyrstěnu na protější stěnu jeho) leží na kuželosečce, obsahuje konstantu λ (mimo faktor λ^2) ve stupni 8., z čehož pět případů (pro průsečíky přímky p s přímkami p_1 až p_5) je samozřejmých, takže zbývají tři hledané. Obalují tedy roviny, jež obsahují kuželosečku protínající přímky p, p_1 až p_5, plochu 3. třídy; uvedené přímky leží na této ploše, protože na př. přímkou p_1 a přímkou, jež vedle p protíná p_1 až p_4, prochází rovina sekoucí uvažovaných šest přímek v bodech (zvrhlé) kuželosečky, a takové roviny lze přímkou p_1 položiti čtyři (pro čtyři kombinace přímek p_2 až p_5 po třech), takže p_1 musí ležeti na ploše 3. třídy. Konečně tři plochy 3. třídy, vytvořené rovinami uvedené vlastnosti pro p, p_1 až p_4 a p_5 nebo p_6 nebo p_7, majíce společné čtyři přímky p_1 až p_4 (a dvě jejich příčky), mají společnou jedinou rovinu tečnou (protože duálně tři plochy 3. stupně se šesti společnými přímkami mají ještě jeden společný bod). Kuželosečka, protínající sedm přímek na kvartice s dvojnou přímkou (z každé dvojice přímek na téže rovině jednu) a přímku dvojnou, leží na této kvartice, protože s ní má devět bodů společných; rovina kuželosečky té protíná kvartiku ještě v druhé kuželosečce, a každá ze dvou těchto kuželoseček je proťata jednou z osmé dvojice přímek na ploše (dvě přímky téže dvojice nemohou totiž protínati tutéž kuželosečku plochy, protože by v tom případě průsečnice roviny obsahující obě kuželosečky a roviny obou přímek měla na oné kuželosečce tři své body). A protože hořejších sedm přímek jest možno ze sedmi dvojic zvoliti na $2^7 = 128$ způsobů, existují 64 roviny, jež na kvartice s dvojnou přímkou vytínají dvojice kuželoseček, proťatých vždy osmi a osmi mimoběžnými přímkami plochy; tyto roviny dotýkají se kvartiky vždy ve třech bodech (průsečících obou uvedených kuželoseček, jež se mimo to protínají na dvojné přímce plochy).

Ze zvláštních případů kvartiky s dvojnou přímkou jest vytknouti plochy, jež mimo přímku dvojnou mají 4 nebo 8 dvojných bodů. Dvojná přímka a čtyři dvojné body kvartiky mohou býti společnými prvky tří ploch 2. stupně $\varphi_k = 0$ ($k = 1, 2, 3$); rovnici takové kvartiky obdržíme,

položíme-li nule rovnu kvadratickou formu těchto tří forem φ_k. U kvartiky s dvojnou přímkou a bodem dvojným splynou dvě z uvedených osmi rovin (jež obsahují 16 přímek plochy) a dvojice přímek v nich ležící, protože dvojný bod plochy zmenšuje počet tečných rovin plochy přímkou položených o dvě (nečítaje rovinu bodem dvojným); má tedy uvedená kvartika mimo dvojnou přímku osm přímek, jež leží po dvou na čtyřech rovinách onou přímkou jdoucích a protínají se tam ve dvojných bodech plochy.

Významná jest plocha 4. stupně s dvojnou přímkou a osmi dvojnými body, jež sluje *Plückerova.*[17]) Vzhledem k tomu, že u kvartiky s přímkou dvojnou mohou jen čtyři roviny jdoucí touto přímkou procházeti dvojnými body, leží dvojné body plochy po dvou na čtyřech rovinách, z nichž každá má s plochou (mimo dvojnou přímku) společné dvě přímky v jednu splývající (spojnici obou dvojných bodů na ní ležících), a dotýká se plochy podél této přímky.

f) Kvartiku *s dvojnou kuželosečkou* lze vyjádřiti rovnicí tvaru

$$\varphi^2 + \varrho^2\psi = 0,$$

kde ϱ je lineární a φ, ψ jsou kvadratické formy proměnných souřadnic; $\varrho = 0$, $\varphi = 0$ jsou tu rovnice dvojné kuželosečky. Jak odtud patrno, obsahuje rovnice plochy 4. stupně s dvojnou kuželosečkou 21 nezávislou konstantu.[18])

---

[17]) *J. Plücker*, Neue Geometrie des Raumes I, 1868; *A. Cayley*, On Plücker's models of certain quartic surfaces, Proceedings Math. soc. London 3 (1871, Coll. papers VII).

[18]) Viz *E. E. Kummer*, Über die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen, Monatsberichte Akad. Berlin 1863 nebo Journal r. a. Math. 64 (1865); *A. Clebsch*, Über die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen, Journal r. a. Math. 69 (1868) (k tomu pojednání *Korndörferova* v Math. Annalen 1 až 4, 1868—71); *C. F. Geiser*, Über die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben, Journal r. a. Math. 70 (1869); *L. Cremona*, Sulle superficie di quarto ordine dotate di una conica doppia, Rendiconti Ist. Lomb. (2) 4 (1871); *H. G. Zeuthen*, Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit, 1879, it. překlad Annali mat. (2) 14 (1887); *K. Bobek*, Über Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitte, Sitzungsberichte Akad. Wien 90 (1884); *B. Tötössy*, Über die Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt, Math. Annalen 19 (1881); *C. Segre*, Étude des différentes surfaces du quatrième ordre à conique double ou cuspidale (générale ou décomposée) considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions, Math. Annalen 24 (1884); *A. Weiler*, Über Flächen vierter Ordnung mit Doppel- und mit Cuspidalkegelschnitt, Zeitschrift Math. Phys. 30 (1885); *L. Berzolari*, Sulla superficie del quarto ordine avente una conica doppia, Annali mat. (2) 13 (1885); *K. Küpper*, Über die Flächen dritter Ordnung und vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt, insbesodere über deren Geraden, Zeitschrift Math. Phys. 34 (1889); *A. del Re*, Sulla superficie del quarto ordine a conica doppia, Rendiconti Accad. Lincei Roma (5) 2 (1893); *J. Pereno*, Alcune ricerche sul gruppo delle sostituzioni e sulla configurazione delle 16 rette della superficie di quart' ordine a conica doppia, Annali mat.

U této plochy existuje pět kuželů kvadratických (jež slují *Kummerovy*) té vlastnosti, že každá tečná rovina takového kužele protíná kvartiku ve dvojici kuželoseček (takže uvažovaná kvartika obsahuje pět soustav ∞^1 dvojic kuželoseček). Neboť hořejší rovnici kvartiky lze upraviti na tvar

$$(\varphi + k\varrho^2)^2 + \varrho^2(\psi - 2k\varphi - k^2\varrho^2) = 0;$$

každá plocha 2. stupně $\psi - 2k\varphi - k^2\varrho^2 = 0$ dotýká se kvartiky podél prostorové čáry 4. stupně; v této soustavě kvadrik jest pět ploch kuželových, protože determinant vyjadřující nulovou hodnotou svou, že plocha soustavy té je zvrhlá, lze rozložiti v součet determinantů s jednoduchými prvky, jež po vyčíslení obsahují konstantu k v nejvyšším stupni pátém. Každá přímka takového kužele dotýká se kvartiky ve dvou bodech; tečná rovina kužele podél této přímky protíná kvartiku v čáře 4. stupně se čtyřmi dvojnými body (z nichž dva jsou dotyčné body oné přímky a dva průsečíky roviny této s dvojnou kuželosečkou plochy), má tedy s kvartikou společné dvě kuželosečky (jejichž dva průsečíky leží na přímce kužele). Vidíme, že libovolným bodem jde deset rovin, jež na uvažované kvartice vytínají dvojice kuželoseček. Rovnici kvartiky s dvojnou kuželosečkou jest pak možno psáti ve tvaru $\varphi_h^2 + \varrho^2\varkappa_h = 0$, kde $\varkappa_h = 0$ jest (pro $h = 1$ až 5) rovnice Kummerova kužele.

Plochu 4. stupně s dvojnou kuželosečkou lze vytvořiti průsečnými čarami sdružených členů dvou projektivních svazků ploch 2. stupně, jež oba mají společnou tutéž kuželosečku (dvojnou kuželosečku kvartiky, kvadriky každého z obou svazků mají ovšem ještě druhou kuželosečku společnou); vycházejíce u kvartiky $\varphi_1^2 + \varrho^2(\alpha\beta - \gamma^2) = 0$, kde $\alpha\beta - \gamma^2 \equiv \varkappa_1$, od vytvořujících svazků kvadrik $\varphi_1 + \varrho\gamma = \lambda\varrho\alpha$, $\varphi_1 - \varrho\gamma = -\lambda'\varrho\beta$ nebo od $\varphi_1 + \varrho\gamma = \lambda\varrho\beta$, $\varphi_1 - \varrho\gamma = -\lambda'\varrho\alpha$ při podmínce projektivnosti $\lambda\lambda' = 1$, můžeme potvrditi správnost hořejšího. Mimoto nalezneme, že z kuželoseček, jež leží v tečných rovinách jednoho z Kummerových kuželů ke kvartice příslušných, dvakrát čtyři (čtyři v každé ze dvou řad) se rozpadají ve dvojice přímek; obsahuje tedy kvartika s kuželosečkou dvojnou 16 přímek, z nichž každá protíná dvojnou kuželosečku plochy. Že na uvažované kvartice existuje právě tento počet přímek (že totiž ostatní Kummerovy kužele vedou k těmže přímkám jako jeden z nich), zjistíme tím, že vyhledáme (při speciální volbě rovnice pro kvartiku) podmínku, aby rovina dotýkající se kvartiky ve dvou bodech měla na spojnici těchto bodů jeden ze svých průsečíků s dvojnou kuželosečkou (takže přímka ta leží na kvartice) a aby potom zbývající součástka jejího průseku s plochou, totiž čára 3. stupně, se

(2) 21 (1893); *R. Suppantschitsch*, Über Oberflächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt, Programm Realsch. Prag II, 1904; také *C. V. Hanumanta Rao*, On the curves, which lie on the quartic surface in space of four dimensions, and the corresponding curves on the cubic surface and the quartic with a double conic, Proceedings Math. soc. London (2) 17 (1919).

rozpadla v přímku a kuželosečku; objeví se tu, že (uvedená a tedy) každá přímka uvažované kvartiky je proťata pěti přímkami plochy navzájem mimoběžnými; z této vlastnosti pak plyne existence 16 přímek na ploše. A protože u každého z Kummerových kuželů je osm tečných rovin, jež protínají kvartiku (mimo kuželosečku) ve dvojici přímek, má tato plocha 40 tečných rovin s třemi body dotyčnými (dva v průsečících oné kuželosečky s přímkou kužele a třetí v průsečíku obou přímek). Konfiguraci 16 přímek na kvartice s dvojnou kuželosečkou dostaneme z konfigurace 27 přímek na ploše kubické, vynecháme-li jednu z přímek těch a deset přímek ji protínajících.

Klasifikaci ploch 4. stupně s dvojnou kuželosečkou podal *C. Segre*; dvojnásobná kuželosečka plochy se může ovšem rozpadnouti ve dvojici přímek. Vedle dvojné kuželosečky může kvartika míti jeden až čtyři body dvojné.[19])

g) Kvartiku *s bodem trojnásobným* čili monoid 4. stupně vyšetřil podrobně *K. Rohn*.[20]) Taková plocha 4. stupně s trojným bodem v bodě O_4 má rovnici

$$x_4 u_3 + u_4 = 0,$$

kde u_3 a u_4 jsou formy 3. resp. 4. stupně souřadnic x_1, x_2, x_3. Kuželové plochy 3. a 4. stupně $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ s vrcholem v O_4 protínají se ve 12 přímkách, jež leží na uvažované ploše (protože souřadnice bodu, vyhovující rovnicím $u_3 = 0$, $u_4 = 0$, vyhovují rovnici plochy).

Monoid je plocha racionální: každá přímka jdoucí bodem trojným protíná kvartiku v jediném bodě dalším a její průsečík s rovinou (třebas $x_4 = 0$) je obrazem tohoto bodu plochy. Pomocí takového zobrazení lze výhodně zkoumati čáry na ploše ležící.

Mimo uvedených 12 přímek, z nichž každá je zobrazena bodem (t. zv. hlavním), obsahuje monoid 4. stupně 66 kuželoseček, jež leží v rovinách položených vždy dvěma přímkami monoidu (a tvoří spolu s oběma přímkami průsek roviny a plochy); tyto kuželosečky zobrazují se přímkami, jež spojují po dvou hlavní body vytčeného zobrazení. Uvažovaná kvartika neobsahuje (obecně) kuželoseček ležících v rovinách, jež neprocházejí trojným bodem plochy; neboť kužel 2. stupně promítající takovou kuželosečku z bodu trojného, obsahoval by 6 přímek plochy (protínaje kvartiku v čáře 8. stupně, jejíž součástkou by byla předpokládaná kuželosečka), což při obecné poloze přímek těch neplatí. Z kuželoseček, určených vždy pěti z 12 hlavních bodů uvedeného

[19]) Důležitým metricky speciálním případem kvartiky s dvojnou kuželosečkou jsou plochy 4. stupně zvané *cyklidy*; dvojnou kuželosečkou jest zde absolutní kružnice (imaginární kružnice na rovině v nekonečnu). Jejich vyšetřováním zabývali se zejména *J. Casey*, *G. Darboux*, *E. Laguerre*, *G. Loria*, *G. Humbert* a j. Cyklida se čtyřmi dvojnými body sluje *Dupinova*; byla známa nejdříve.

[20]) *K. Rohn*, Über die Flächen vierter Ordnung mit dreifachem Punkte, Math. Annalen 24 (1884).

zobrazení monoidu na rovině, vyplývá existence 792 prostorových čar kubických na kvartice s bodem trojným (jdoucích tímto bodem).

Obsahuje-li monoid 4. stupně mimo trojný bod ještě bod dvojný, leží spojnice obou na ploše; lze nadto dokázati, že v tuto spojnici splývají dvě z 12 přímek plochy (vycházejících z bodu trojného). Může tedy uvažovaná kvartika míti až 6 bodů dvojných (konických).

h) Plocha 4. stupně, jež má *bod trojnásobný a tři dvojné přímky bodem tím jdoucí*, sluje *Steinerova*.[21]) Leží-li trojnásobný bod plochy ve vrcholu O_4 základního čtyrstěnu a dvojné přímky její v hranách O_4O_1, O_4O_2, O_4O_3, má plocha ta (při vhodné volbě bodu jednotkového) rovnici

$$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 - 2x_1x_2x_3x_4 = 0.$$

Rovina obecně položená protíná plochu Steinerovu v čáře 4. stupně s třemi dvojnými body (v průsečících roviny s dvojnými přímkami plochy). Tečná rovina kvartiky Steinerovy protíná ji v čáře 4. stupně se čtyřmi body dvojnými, tedy ve dvou kuželosečkách.[22])

Protože trs přímek se středem v trojném bodě plochy protíná ji v jediném bodě proměnném na každé přímce své, lze souřadnice bodu na ploše vyjádřiti racionálními funkcemi tří homogenních parametrů. Dosadíme-li do hořejší rovnice plochy $x_1 = \varrho a$, $x_2 = \varrho b$, $x_3 = \varrho c$ a zvolíme-li pak $bc = x$, $ca = y$, $ab = z$, obdržíme parametrické vyjádření

$$x_1 = 2yz, \quad x_2 = 2zx, \quad x_3 = 2xy, \quad x_4 = x^2 + y^2 + z^2;$$

obráceně jest $x : y : z = x_2x_3 : x_3x_1 : x_1x_2$. Ze vztahů mezi souřadnicemi x_k bodu na ploše Steinerově a hodnotami parametrů x, y, z, pokládáme-li tyto za souřadnice bodu v rovině, vyplývá: Steinerovu plochu můžeme zobraziti na rovinu tak, že každému bodu roviny odpovídá jediný bod

---

[21]) J. Steinerem nazvána byla plochou *římskou*, protože se jí zabýval za svého pobytu v Římě (1844).

[22]) O kvartice Steinerově pojednávají zejména *E. E. Kummer*, Über die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen, Monatsberichte Akad. Berlin, 1863 (otisk v Journal r. a. Math. 64, 1865); *H. Schröter*, Über die Steinersche Fläche vierten Grades, Monatsberichte Akad. Berlin, 1863 (otisk v Journal r.a.Math. 64, 1865); *L. Cremona*, Sur la surface du quatrième ordre, qui a la propriété d'être coupée suivant deux coniques par chacun de ses plans tangents, Journal r. a. Math. 63 (1864); *A. Clebsch*, Über die Steinersche Fläche, Journal r. a. Math. 67 (1867); *R. Sturm*, Über die römische Fläche von Steiner, Math. Annalen 3 (1870); *A. Cayley*, On Steiner's surface, Proceedings Math. soc. London 5 (1874); *G. Darboux*, Sur le contact des courbes et des surfaces, Bulletin sc. math. astron. (2) 4 (1880); *F. Gerbaldi*, La superficie di Steiner studiata nella sua rappresentazione analitica mediante le forme ternarie quadratiche, 1881; *E. Picard*, Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales, Journal r. a. Math. 100 (1887); *E. Lacour*, Sur la surface de Steiner, Nouv. Annales math. (3) 17 (1898); *D. Montesano*, La superficie romana di Steiner, Rendiconti Accad. Napoli (3) 5 (1899); *G. Cotty*, Sur les surfaces de Steiner, Nouv. Annales math. (4) 8 (1908); také *E. Ciani*, Introduzione alla geometria algebrica, 1931.

plochy a každému bodu plochy jediný bod roviny, vyjímaje body na dvojných přímkách plochy (a ovšem bod trojnásobný); bodu na dvojné přímce plochy odpovídají dva body roviny ležící na téže straně základního trojúhelníku, trojnásobnému bodu plochy pak odpovídají tři vrcholy tohoto trojúhelníku. Průsek plochy s rovinou zobrazí se kuželosečkou; spec. řez plochy s tečnou rovinou její zobrazí se dvojicí přímek a obráceně. A protože dvě splývající přímky jsou obrazem tečné roviny plochy, jejíž dvě průsečné kuželosečky splynou, odpovídá dvojná přímka na zobrazující rovině dvojné tečné rovině plochy Steinerovy (s dotyčnou kuželosečkou). Snadno zjistíme, že soustava kuželoseček v rovině, jež zobrazují řezy všech rovin s uvažovanou plochou, obsahuje čtyři přímky dvojnásobné; má tedy Steinerova kvartika čtyři dvojnásobné roviny tečné.

Učiníme-li uvedené čtyři roviny, jež se plochy Steinerovy dotýkají podél kuželoseček, stěnami základního čtyrstěnu, má Steinerova kvartika rovnici

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4} = 0;$$

trojnásobný bod plochy leží tu v bodě jednotkovém.[23])

Steinerova plocha 4. stupně jest plochou duální k ploše 3. stupně se čtyřmi body dvojnými a jest tedy třídy 3.

Speciální případy této plochy obdržíme, splynou-li ze tří dvojných přímek jejích dvě nebo všechny tři.[24])[25])[26])

---

[23]) Odtud vidíme, že tuto plochu lze také vyjádřiti parametricky rovnicemi $x_k = (\pm x \pm y \pm z)^2$.

[24]) Z ostatních vlastností kvartiky Steinerovy budiž uvedeno: Steinerova plocha 4. stupně je jediná plocha nepřímková, jejíž všechny rovinné řezy jsou čáry racionální; rovněž jediná, jež má ∞^2 rovinných řezů se rozpadajících. Každým bodem jejím prochází nekonečně mnoho kuželoseček (což se mimo ni vyskytuje jen u plochy kvadratické a u přímkové plochy kubické).

[25]) Plochy 4. stupně byly vyšetřovány ještě z jiných stanovisek: *F. Schur* studoval kvartiky *vytvořené* sdruženými *členy čtyř kolineárních prostorů rovinových*; plochy ty závisí na 33 konstantách, jsou invariantní při konečném počtu kolineací a zahrnují mnohé plochy speciální. Viz *F. Schur*, Über die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen, Math. Annalen 18 (1881), a téhož Über eine besondere Classe von Flächen vierter Ordnung, Math. Annalen 20 (1882).

E. E. Kummer určil kvartiky, jež *obsahují neomezený počet kuželoseček*, tímto postupem: Protíná-li rovina kvartiku ve dvou kuželosečkách, je každý ze čtyř průsečíků jejich buď dvojným bodem plochy nebo dotyčným bodem roviny té na ploše. V první skupině případů (kdy všechny průsečíky kuželoseček jsou body dvojnými na ploše) mohou z uvedených bodů buď všechny býti proměnlivé nebo jeden nebo dva nebo tři býti pevné; kvartika sestává tu ze dvou kvadrik nebo je kuželová nebo obsahuje dvojnou kuželosečku nebo má dvojnou přímku. Jestliže z dvojných bodů kvartiky některé splývají, dostaneme zvláštní případy dotčených ploch; jenom tehdy, dotýká-li se kvartika sebe samé ve dvou bodech, obdržíme plochu novou, jejíž rovnice má tvar $\varphi^2 - \alpha\beta\gamma\delta = 0$, kde $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0$ vyjadřují roviny jdoucí touže přímkou. Další případ sem spadající (Kumme-

128. Algebraické čáry prostorové a útvary duální.[1])

a) Jednomocná (obecně spojitá) soustava bodů, společných dvěma (nebo více) algebraickým plochám, jest útvarem, jenž sluje *čára algebraická*; tato je speciálně rovinná, leží-li všechny její body v téže rovině; jinak sluje *prostorová*.

Jednomocná (obecně spojitá) soustava rovin, společných (aspoň) dvěma algebraickým plochám, jest útvarem, jenž sluje *algebraická torsa* (plocha rozvinutelná); je speciálně plochou kuželovou, procházejí-li všechny její roviny týmž bodem, jinak *nekuželovou*.

---

rem neuvedený) vznikne, splynou-li vytčené body v jeden. V druhé skupině případů, kdy jeden z průsečíků kuželoseček je dotyčným bodem jejich roviny na ploše, není buď žádný ze zbývajících tří průsečíků pevný nebo je jeden z nich pevný; kvartika má tu dvojnou prostorovou čáru kubickou (pravou nebo zvrhlou) a jest buď přímková nebo obsahuje tři dvojné přímky jdoucí jedním bodem, nebo má dvojnou kuželosečku a jeden bod dvojný; zbývající předpoklad neposkytuje nic nového. Viz *E. E. Kummer*, Über die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen, Journal r. a. Math. 64 (1865).

Zvlášť pozoruhodné jsou kvartiky *racionální* (jejichž bodů souřadnice lze vyjádřiti racionálními funkcemi dvou — nebo tří homogenních — parametrů); patří k nim plochy s násobnými čarami nebo s bodem trojnásobným, mimo to jenom tři speciální plochy 4. stupně. Viz *M. Noether*, Über die rationalen Flächen vierter Ordnung, Math. Annalen 33 (1889).

Projektivní vytvoření obecné plochy 4. stupně pomocí jednodvojznačné korespondence mezi svazkem ploch kvadratických a involuční lineární kongruencí přímek podává *J. Majcen*, Jedno projektivno izvodenje općene površine 4. reda, Rad jugosl. akad. Zagreb 195 (1913).

[26]) Literární zprávy o algebraických plochách stupně 5. a 6. (i vyšších) podává zejména *G. Loria*, Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche (4. vyd.), p. 104 a n., 330 a n.; viz také *W. F. Meyer* v Encyklopädie math. Wiss. III. 2_2 (*C* 10 *b*, 1930).

[1]) Teorii algebraických čar prostorových a útvarů duálních podali v přehledu *K. Rohn* a *L. Berzolari* v Encyklopädie der math. Wissenschaften III. 2 (*C* 9: Algebraische Raumkurven und abwickelbare Flächen, 1926) a *L. Berzolari* v Pascalově Repertorium der höheren Mathematik, 2. vyd. II. 2 (kap. 36 a 37, 1922). Začátky nauky vykládají *G. Salmon*, A treatise on the analytic geometry of three dimensions I (6. vyd. 1914; něm. zpracování 4. vyd. 1898); *L. Cremona*, Preliminari di una teoria geometrica delle superficie, Memorie Accad. Bologna (2) 6 a 7 (1866 a 1867; něm. zprac. *M. Curtze*, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung, 1870); syntheticky *P. H. Schoute*, Enkele algemeene beschouwingen omtrent krommen lijnen, Verslagen Akad. Amsterdam 14 (1879); analyticky *A. B. Basset*, A treatise on the geometry of surfaces, 1910 (viz také *A. B. Basset*, A revision of the theories of twisted curves and of singular tangent planes to anautotomic surfaces, Quart. Journal math. 40, 1909). Příslušnou literaturu sebral *J. E. Hill*, Bibliography of surfaces and twisted curves, Bulletin Amer. math. soc. (2) 3 (1897). Základní pojednání jsou: *A. Cayley*, Mémoire sur les courbes à double courbure et les surfaces développables, Journal math. p. a. 10 (1845), překlad On curves of double curvature and developable surfaces, Cambridge-Dublin math. Journal 5 (1850), také Collected papers I; *A. Cayley*, Considérations générales sur les courbes en espace, Comptes r. Acad. Paris 54 (1862) a 58

Jestliže čára c tvoří úplný průsek dvou ploch $f_1(x_k) = 0$ a $f_2(x_k) = 0$ tak, že jenom její body leží na obou plochách těch, jsou rovnice tyto $f_1 = 0$ a $f_2 = 0$, zároveň platné, analytickým vyjádřením čáry c. Je-li však uvažovaná čára jen částí (rozpadajícího se) průseku obou ploch uvedených, vyhovují rovnicím $f_1 = 0$ a $f_2 = 0$ ještě body zbývající části průseku; hledáme proto plochu $f_3(x_k) = 0$, procházející čarou c, jež však nemá bodů společných s onou částí zbývající (leda snad body ležící také na c); rovnice $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ a $f_3 = 0$ jsou tu splněny body čáry c, tvoří tedy její výraz analytický. Mají-li však plochy $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ některé body společné, jež nepatří čáře c, připojíme k nim plochu čtvrtou $f_4(x_k) = 0$, jdoucí čarou c a těchto bodů neobsahující; tu pak rovnice těchto čtyř ploch $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ a $f_4 = 0$ jsou rovnicemi čáry c.[2])

Každá algebraická čára, pravá (jednoduchá) nebo se rozpadající (složená), jest proťata dvěma libovolnými rovinami, z nichž žádná neobsahuje čáru tu ani její část, v témž počtu svých bodů; duálně pro torsu, pokud jde o počet jejích rovin jdoucích dvěma libovolnými body.

Počet průsečíků libovolné roviny (obecně položené) s čarou algebraickou sluje jejím *stupněm* n. Je-li čára c úplným průsekem dvou ploch stupňů n_1 a n_2, jest stupeň její $n_1 n_2$; neboť libovolná rovina protíná dané dvě plochy v čarách stupňů n_1 a n_2, jež se protínají v $n_1 n_2$ bodech.

Počet rovin torsy, procházejících libovolným (obecně položeným) bodem prostoru, sluje její *třídou* v. Torsa vytvořená všemi společnými rovinami dvou ploch tříd v_1 a v_2, má třídu $v_1 v_2$; neboť z libovolného bodu lze daným dvěma plochám opsati kuželové plochy tříd v_1 a v_2, jež mají $v_1 v_2$ společných rovin.

Přímka, jež spojuje určitý bod P prostorové čáry s bodem k němu na čáře té bez omezení se přibližujícím, sluje *tečnou* (přímkou) čáry prostorové v bodě P.

Přímka, v níž určitá rovina π torsy jest proťata rovinou k ní v soustavě té bez omezení se blížící, sluje (plošnou) *přímkou* torsy v rovině π.

(1864), také Coll. papers V; *G. Halphen*, Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques, Journal éc. polytechn. 52 (1882); *M. Noether*, Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven, Abhandlungen Akad. Berlin 1882, výtah Journal r. a. Math. 93 (1882) (poslední dvě poctěna Steinerovou cenou akad. v Berlíně); *H. Valentiner*, Bidrag til Raumkurvernes Theori, Diss. Kjöbenhavn 1881, rozšířeno Zur Theorie der Raumkurven, Acta math. 2 (1883).

[2]) Že dvě plochy nemohou mnohdy svými rovnicemi stanoviti čáru prostorovou, jest patrno u čar, jež mají s libovolnou rovinou n průsečíků, je-li n číslo kmenné. Že ani tři plochy někdy nestačí ke stanovení prostorové čáry, ukázal na příkladě (určité čáry 5. stupně) *K. Th. Vahlen*, Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischer Raumkurven, Journal r. a. Math. 108 (1891). Dostačující počet čtyř rovnic k určení čáry prostorové jako úplného průseku ploch jimi vyjádřených plyne z úvah algebraických, jež podal *L. Kronecker*, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, Journal r. a. Math. 92 (1881).

Je-li čára c průsekem dvou ploch $f_1(x) = 0$ a $f_2(x) = 0$, jest tečnou její v bodě P průsečnice tečných rovin obou ploch v tomto bodě (majíc s oběma plochami a tedy s jejich průsekem společné dva body soumezné). Rovnice tečné přímky čáry s uvedenými rovnicemi v bodě $P(x_k)$ jsou

$$\sum \frac{\partial f_1}{\partial x_k} y_k = 0, \quad \sum \frac{\partial f_2}{\partial x_k} y_k = 0.$$

Počet tečných přímek čáry, jež protínají libovolnou přímku v prostoru, sluje někdy třídou čáry prostorové.

Rovina jdoucí třemi body prostorové čáry, splývajícími v jeden bod P, sluje její *rovinou oskulační* v tomto bodě P.

Oskulační roviny dané čáry vytvořují její *plochu rozvinutelnou* čili torsu; dvě soumezné roviny oskulační protínají se v přímce torsy, jež je tečnou čáry dané.

Je-li torsa γ vytvořena rovinami dvou ploch $\varphi_1(u) = 0$ a $\varphi_2(u) = 0$, jest přímkou její v rovině π spojnice dotyčných bodů obou ploch v této rovině (ležíc ve dvou soumezných rovinách obou ploch a tedy jejich útvaru společného). Rovnice plošné přímky v rovině $\pi(u_k)$ jsou

$$\sum \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_k} v_k = 0, \quad \sum \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_k} v_k = 0.$$

Počet plošných přímek torsy, určujících s libovolnou přímkou prostoru rovinu, (t. j. počet průsečíků libovolné přímky s plochou rozvinutelnou) sluje stupeň torsy.

Bod určený třemi rovinami torsy, splývajícími v jednu rovinu π, sluje *mezním bodem* jejím v této rovině π.

Mezní body dané torsy tvoří její *čáru úvratu* čili kuspidální[3]); dva nekonečně blízké body mezní určují tečnu této čáry, jež je plošnou přímkou torsy dané.

K prostorové čáře jako jednomocné soustavě bodů jest tedy duální jednomocná soustava rovin: bodu čáry odpovídá rovina této soustavy; oskulační rovině v bodě čáry prostorové, určené bodem tím a dvěma body nekonečně blízkými, odpovídá bod v rovině soustavy, určený tam jako průsečík roviny té s dvěma rovinami k ní bez omezení se přibližujícími. Jako oskulační roviny dané čáry prostorové tvoří jednomocnou soustavu rovin, vytvořují duálně roviny dané soustavy jednomocné prostorovou čáru; lze tedy prostorovou čáru pojímat buď jako geometrické místo bodů nebo duálně jako soustavu (oskulačních) rovin. Tečna prostorové čáry v určitém bodě jejím jako přímka spojující bod ten s bodem nekonečně blízkým jest při duálním pojetí přímkou, v níž oskulační rovinu čáry v bodě tom protíná oskulační rovina v bodě nekonečně blízkém.

Ke stupni n prostorové čary jako počtu jejích průsečíků s libovolnou rovinou jest duální třída ν rozvinutelné plochy, tvořené oskulačními

[3]) Čára vytvořená mezními body plochy rozvinutelné sluje kuspidální čarou této, protože průsečíky její s rovinou jsou hroty čáry, v níž rovina torsu protíná.

rovinami čáry té, jež udává počet oskulačních rovin čáry jdoucích libovolným bodem v prostoru; tato třída torsy k čáře příslušné sluje zpravidla *třídou* čáry samé. Počet tečen prostorové čáry, jež protínají libovolnou přímku v prostoru (nazvaný nahoře třídou čáry) jest roven počtu přímek torsy k čáře příslušné, jež libovolnou přímku protínají (nazvanému nahoře stupněm torsy); toto soběduální číslo sluje zpravidla *řád* (rank) prostorové čáry (i její torsy).

b) Spojíme-li každý bod čáry se zvoleným bodem P v prostoru, vznikne kuželová plocha, jež sluje *promítajícím kuželem* čáry dané z bodu P. Jestliže libovolná přímka promítajícího kužele protíná čáru danou v jediném bodě a leží-li vrchol jeho P mimo čáru tu, jest stupeň promítající plochy kuželové (počet přímek kužele ležících v libovolné rovině položené vrcholem jeho) roven stupni čáry dané; leží-li vrchol P na čáře samé (a každá jeho přímka čáru protíná jen v jednom bodě mimo P), jest stupeň promítajícího kužele o 1 menší než stupeň čáry.

Při obecné poloze bodu P protíná libovolná přímka promítajícího kužele čáru pouze v jednom bodě. Při zvláštních polohách bodu P může se však státi, že každá přímka kužele protíná čáru ve dvou neb i více bodech; je-li tomu tak u bodu P ležícího mimo čáru nebo u bodu P ležícího sice na čáře, ale nečítáme-li bod ten k uvedeným průsečíkům, sluje čára uvažovaná *konická* (kuželová).

Snadno nalezneme rovnici promítající plochy kuželové, jestliže jednoduchá nebo složená čára, kterou promítá, jest úplným průsekem dvou ploch a jestliže vrchol kužele toho leží ve vrcholu základního čtyrstěnu soustavy souřadnic. Stačí tu vyloučiti z rovnic obou ploch, čáru určujících, souřadnici, jež jest nenulovou souřadnicí vrcholu. Bod ležící na spojnici bodů $(0, 0, 0, 1)$ a (x_1, x_2, x_3, x_4) má totiž souřadnice $\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, 1 + \lambda x_4$; leží na průsečné čáře ploch $f_1(x) = 0$ a $f_2(x) = 0$ stupně n_1 resp. n_2, platí-li současně

$$f_1(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, 1 + \lambda x_4) \equiv \lambda^{n_1} f_1\left(x_1, x_2, x_3, x_4 + \frac{1}{\lambda}\right) = 0,$$

$$f_2(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, 1 + \lambda x_4) \equiv \lambda^{n_2} f_2\left(x_1, x_2, x_3, x_4 + \frac{1}{\lambda}\right) = 0.$$

Eliminací veličiny $1/\lambda$ dostaneme odtud rovnici plochy vytvořené přímkami, jež procházejí bodem $(0, 0, 0, 1)$ a body čáry průsečné.

Z ploch, jež obsahují danou prostorovou čáru c stupně n-tého, jest vedle promítající plochy kuželové zvlášť důležitý t. zv. *monoid* (plocha s bodem, jehož násobnost jest o 1 menší než její stupeň).

Předpokládejme, že daná čára c je úplným nebo částečným průsekem dvou ploch $f_1(x) = 0$ a $f_2(x) = 0$ stupňů n_1 resp. n_2 (kde $n_2 \leqq n_1$) a že není (ani její část) konickou čarou z bodu $P\,(0, 0, 0, 1)$; bod P pak že na ní neleží. Rovnice obou ploch, uspořádány podle x_4, buďtež

$$f_1 \equiv u_0 x_4^{n_1} + u_1 x_4^{n_1 - 1} + \ldots + u_{n_1} = 0, \quad f_2 \equiv v_0 x_4^{n_2} + v_1 x_4^{n_2 - 1} + \ldots + v_{n_2} = 0,$$

při čemž u_k a v_k jsou homogenní funkce stupně k-tého proměnných x_1, x_2, x_3. Utvořme rovnice dvou dalších ploch danou čáru obsahujících

$$u_0 x_4^{n_1 - n_2} f_2 - v_0 f_1 = 0, \quad u_{n_1} f_2 - v_{n_2} f_1 = 0,$$

jež obě (druhá po zkrácení faktorem x_4) jsou stupně nejvýš $(n_1 - 1)$-ho v x_4; má-li jedna z těchto rovnic proměnnou x_4 v prvním stupni, ne však vyšším, jest monoidem s násobným bodem v P. Není-li tomu tak, postupujeme uvedeným způsobem dále k plochám stupně nejvýš $(n_1 - 2)$-ho v x_4 atd.; konečně dospějeme tak k ploše o rovnici

$$x_4 \varphi_2 + \varphi_1 = 0,$$

kde φ_1 a φ_2 jsou funkce proměnných x_1, x_2, x_3 stupně s-tého, resp. $(s-1)$-ho. Tato plocha je hledaným monoidem, danou čáru obsahujícím, stupně s-tého s $(s-1)$-násobným bodem v $P(0, 0, 0, 1)$.

Rovnice kuželové plochy $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, jež danou čáru z bodu $(0, 0, 0, 1)$ promítá, a rovnice monoidu s násobným bodem v $(0, 0, 0, 1)$, totiž $x_4 \varphi_2(x_1, x_2, x_3) + \varphi_1(x_1, x_2, x_3) = 0$, podávají t. zv. *monoidní vyjádření* čáry dané.[4])

Monoidní vyjádření prostorové čáry rovnicemi ploch $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ a $x_4 \varphi_2(x_1, x_2, x_3) + \varphi_1(x_1, x_2, x_3) = 0$ je tím výhodné, že tyto dvě plochy — nemají-li čáru c za úplný svůj průsek — se protínají mimo c v přímkách, společných kuželům $f = 0$, $\varphi_1 = 0$ a $\varphi_2 = 0$. Neboť je-li Q bod společný plochám $f = 0$, $x_4 \varphi_2 + \varphi_1 = 0$, neležící na c (a různý od P), má přímka PQ s monoidem společny body P $(s-1)$-násobně, Q a průsečík svůj s čárou c (protože je přímkou kužele $f = 0$); proto leží celá na monoidu, a poněvadž jeho rovnici musí splňovat nezávisle na x_4, leží na obou kuželích $\varphi_1 = 0$ i $\varphi_2 = 0$.

Přímka kužele $f = 0$, jež protíná čáru c ve dvou bodech (bisekanta), leží rovněž (majíc s monoidem společný bod P a dva body uvedené) na monoidu a jest tedy částí průseku obou ploch těch; sluje dvojnásobnou přímkou promítající plochy kuželové a určuje t. zv. *zdánlivý bod dvojnásobný* čáry c z bodu $(0, 0, 0, 1)$, protože paprsek ten čára c dvakrát protíná.

Monoid pravé prostorové čáry n-tého stupně z bodu P jest stupně aspoň $\frac{1}{2}n$-tého za předpokladu, že P neleží na c ani na přímce protínající c ve více než dvou bodech (ani ve vrcholu kužele, tvořeného bisekantami

---

[4]) Důležité vyjádření monoidní pro čáru prostorovou uvedl prvni *A. Cayley* v cit. pojednáních z r. 1862 a 1864, rozšířil *G. Halphen* v cit. práci z r. 1882. Viz také *Ed. Weyr*, Über algebraische Raumkurven, Abhandlungen Böhm. Ges. Wiss. (6) 6 (1874); dále pak *L. Autonne*, Sur la représentation des courbes gauches algébriques et sur le nombre des conditions qui expriment qu'une courbe algébrique est située sur une surface algébrique, Annales univ. Lyon 1896 (výtah Comptes r. Acad. Paris 119, 1894); *R. Montessus de Ballore*, Sur les courbes gauches algébriques, Journal math. p. a. (7) 2 (1916) (výtah Comptes r. Acad. Paris 164, 1917).

čáry c, je-li snad konická). Neboť průsek ploch $f = 0$ a $x_4\varphi_2 + \varphi_1 = 0$ (stupně ns-tého) se skládá z čáry c stupně n-tého, z p bisekant čáry této a z q dalších přímek, takže $ns = n + 2p + q$; průsek kuželů $\varphi_1 = 0$ a $\varphi_2 = 0$ se skládá aspoň z p a q uvedených přímek, takže $s\,(s-1) \geqq p + q$; z první rovnice plyne (protože q je nejméně rovno nule) $p \leqq \frac{1}{2}n\,(s-1)$, z obou pak vyplývá $s\,(s-1) \geqq n\,(s-1) - p$ čili $p \geqq (n-s)\,(s-1)$, takže

$$\tfrac{1}{2}n\,(s-1) \geqq (n-s)\,(s-1) \text{ čili } s \geqq \tfrac{1}{2}n.$$[5])

c) Ke každé čáře v prostoru přísluší — jak víme — torsa, tvořená oskulačními rovinami v bodech čáry té, obráceně ke každé torse přísluší čára úvratu, tvořená mezními body rovin torsy; tečné přímky čáry jsou spolu plošnými přímkami její torsy. Pro čáru a její torsu zavádíme řadu charakteristických čísel, z části po dvou duálních, z části soběduálních.

Budiž — jak bylo uvedeno — stupeň čáry algebraické (počet průsečíků s libovolnou rovinou) označen písmenem n, třída příslušné torsy (počet oskulačních rovin čáry, jdoucích libovolným bodem) písmenem ν; třída čáry a spolu stupeň její torsy čili t. zv. řád obou (počet tečných přímek čáry čili plošných přímek torsy, protínajících libovolnou přímku) budiž označen m.

Nejjednodušším singulárním bodem prostorové čáry jest bod dvojný (skutečný), v němž má totiž čára s libovolnou rovinou bodem tím položenou dva splývající body společné;[6]) jsou-li oskulační roviny čáry v bodě tom různé (reálné nebo imaginární), sluje *bodem dvojným* v užším smyslu, jsou-li splývající, sluje *hrotem*; počet dvojných bodů s různými rovinami oskulačními označme d, počet hrotů označme r. Duálními k nim jsou *dvojná rovina oskulační* (dvojná rovina příslušné torsy), v níž splývají dvě oskulační roviny čáry s různými body dotyčnými, a *inflexní rovina*, jež je oskulační rovinou jdoucí čtyřmi splývajícími body čáry prostorové; jejich počet u dané čáry označme δ resp. ϱ. Přímka, jež je tečnou čáry ve dvou bodech jejích, sluje dvojnou tečnou čáry: jsou-li dotyčné její body (a oskulační roviny v nich) různé, jest *dvojnou tečnou* v užším smyslu, kdežto při splývajících bodech dotyčných (a rovinách oskulačních) jest *tečnou inflexní*; jsou obě soběduální; počet oněch označme t, počet těchto i.

---

[5]) Algebraickou čáru vyjadřuje analyticky jedinou rovnicí pomocí soustavy promítajících kuželů s vrcholy na pevné přímce (hraně základního čtyrstěnu) *A. Brill*, Über die Darstellung algebraischer Raumkurven durch eine Gleichung, Göttinger Nachrichten 1901, a Über algebraische Raumkurven, Math. Annalen 64 (1907); také *F. Löflund*, Über algebraische Raumkurven, Dissertation Tübingen 1912. Pro analytické úvahy o čarách prostorových viz ještě *G. Loria*, Sui fondamenti della teoria projettiva delle curve algebriche sghembe, Rendiconti Circolo mat. Palermo 17 (1903).

[6]) Bod prostorové čáry sluje *s-násobný*, má-li v něm čára s libovolnou rovinou (jím procházející) s splývajících bodů společných.

Počet *zdánlivých bodů dvojných* u dané čáry prostorové, t. j. počet dvojic bodů jejích, jejichž spojnice procházejí libovolným bodem v prostoru, označme h; duální počet *zdánlivých rovin dvojných*, t. j. počet dvojic oskulačních rovin čáry, jejichž průsečnice leží v libovolné rovině, budiž χ. Konečně počet dvojic tečen prostorové čáry, jejichž průsečíky leží v libovolné rovině, označme k; a duální počet dvojic tečen, jejichž roviny procházejí libovolným bodem, budiž $\varkappa$.

Protneme-li soustavu oskulačních rovin dané čáry prostorové libovolnou rovinou a použijeme-li na průsečnou čáru tak vzniklou relací Plückerových, dostaneme čtyři rovnice pro uvedená charakteristická čísla prostorové čáry; duálně promítneme-li danou čáru prostorovou z libovolného bodu a užijeme-li na promítající kužel také vztahů Plückerových, obdržíme opět čtyři rovnice pro dotčená čísla. Dvě tyto skupiny rovnic jsou k sobě (v prostoru) duální; jest tedy možno jednu odvoditi z druhé tím, že každé číslo tam obsažené nahradíme číslem duálním.

V prvním případě u průsečné čáry σ soustavy oskulačních rovin jako přímkového útvaru v rovině shledáme: Stupeň čáry σ je roven počtu průsečíků libovolné přímky v její rovině s touto čarou, tedy počtu tečen dané čáry prostorové, protínajících zvolenou přímku, tudíž m; třída čáry σ je rovna počtu přímek této čáry jdoucích libovolným bodem, tedy počtu oskulačních rovin čáry prostorové, zvoleným bodem procházejících, tudíž v. Vzhledem k tomu, že body a tečny čáry σ jsou průsečíky tečen dané čáry prostorové, resp. průsečnice oskulačních rovin jejích s rovinou této čáry, vyskytne se dvojný bod čáry σ jednak v průsečíku dvou tečen čáry dané, ležícím v této rovině, jednak v průsečíku dvojné tečny dané čáry s rovinou tou; proto jest počet dvojných bodů čáry σ roven $k + t$. Hrot čáry σ objeví se jednak v průsečících dané čáry prostorové s uvažovanou rovinou, jednak v průsečících inflexních tečen čáry dané s rovinou tou; jest tedy počet hrotů čáry σ roven $n + i$. Dvojné tečny čáry σ jsou jednak přímky v její rovině, v nichž se protínají vždy dvě oskulační roviny dané čáry prostorové, jednak průsečnice dvojných oskulačních rovin čáry dané s rovinou tou; jest tedy počet jejich $\chi + \delta$. Konečně inflexní tečny čáry σ vznikají průsekem inflexních rovin dané čáry prostorové s její rovinou, a jejich počet jest proto ϱ.

Dosadíme-li zjištěné výrazy pro šest charakteristických čísel rovinné čáry σ do relací Plückerových, obdržíme čtyři rovnice pro čáru prostorovou:

$$\begin{aligned} v &= m(m-1) - 2(k+t) - 3(n+i), \\ m &= v(v-1) - 2(\chi+\delta) - 3\varrho, \\ \varrho &= 3m(m-2) - 6(k+t) - 8(n+i), \\ n+i &= 3v(v-2) - 6(\chi+\delta) - 8\varrho. \end{aligned}$$

V případě druhém u promítajícího kužele p dané čáry prostorové jako útvaru přímkového nalezneme: Stupeň kužele p jako počet jeho přímek ležících v libovolné rovině vrcholem vedené jest roven stupni n čáry prostorové, protože rovina jdoucí vrcholem kužele protíná čáru

tu v n bodech; třída kužele p jako počet tečných rovin, jdoucích libovolnou přímkou vrcholem vedenou, jest rovna počtu tečen prostorové čáry přímku tu protínajících, tedy m. Dvojné přímky kužele p vznikají ze zdánlivých a ze skutečných dvojných bodů čáry prostorové, takže jejich počet jest $h + d$; kuspidální přímky kužele p jsou přímky jeho jdoucí hroty dané čáry, a jejich počet jest tedy r. Dvojná tečná rovina kužele p objeví se jednak tehdy, kdy dvě tečny prostorové čáry leží v rovině jdoucí vrcholem kužele, jednak v tečné rovině jeho položené dvojnou tečnou čáry té; jejich počet jest proto $\varkappa + t$. Konečně inflexní tečné roviny kužele p obdrží se jako oskulační roviny dané čáry, jdoucí vrcholem kužele, a jako tečné roviny jeho, promítající inflexní tečny čáry té; počet jejich jest tedy $\nu + i$.

Vložíce uvedené výrazy do Plückerových relací, platných pro rovinnou čáru a tedy pro kužel ji promítající, dostaneme čtyři rovnice pro čáru prostorovou:

$$\begin{aligned} n &= m(m-1) - 2(\varkappa + t) - 3(\nu + i), \\ m &= n(n-1) - 2(h + d) - 3r, \\ r &= 3m(m-2) - 6(\varkappa + t) - 8(\nu + i), \\ \nu + i &= 3n(n-2) - 6(h + d) - 8r. \end{aligned}$$

Osm relací tak získaných (z nichž jen šest je nezávislých) tvoří skupinu *Cayleyových rovnic* pro 13 charakteristických čísel čáry prostorové.[7])[8])[9])[10])

[7]) Známe-li z uvedených charakteristických čísel čáry prostorové sedm vhodných, jest možno z Cayleyových rovnic vypočísti ostatních šest; spec. jsou-li u prostorové čáry čísla d, δ, t, i rovna nule, lze určiti z čísel n, ν, r všechna ostatní. Poslední dvě relace jedné i druhé skupiny hořejší nahrazují se rovnicemi (navzájem duálními)

$$n + i - \varrho = 3(m - \nu), \qquad \nu + i - r = 3(m - n),$$

jež plynou z rovnic 1. a 3. nebo 2. a 4. a tvoří s prvními dvojicemi šest relací nezávislých. Snadno se odvodí z rovnic uvedených další, na př.

$$\begin{aligned} k - \varkappa &= \nu - n, \qquad \varrho - r = 2(\nu - n), \\ h + d - (\chi + \delta) &= \tfrac{1}{2}(n - \nu)(n + \nu - 7) \end{aligned}$$

a j. Relace Plückerovy aplikoval na čáry prostorové po prvé *A. Cayley* v cit. pojednání z r. 1845; jeho vztahy bývají proto nazývány také Plücker-Cayleyovy. Viz dále *G. Salmon*, On the classification of curves of double curvature, Cambridge-Dublin math. Journal 5 (1850); *H. G. Zeuthen*, Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable, Annali mat. (2) 3 (1869); a knihy vpředu cit. (*G. Salmon, L. Cremona, A. B. Basset*). Mimo hořejší relace odvodili *G. Salmon* a *L. Cremona* řadu jiných pro zvláštní prvky rozvinutelné plochy a její čáry kuspidální (bývají označovány Salmon-Cremonovy); o nich mimo cit. knihy a práci Zeuthenovu pojednává *A. Cayley*, On the theory of the curve and torse, Quart. Journal math. 11. (1871) a j.; viz také *A. Rosenblatt*, Zur Klassifikation der abwickelbaren algebraischen Flächen, Bulletin Acad. Cracovie 1911.

[8]) Shodně s rovinnými čarami zavádí se pro čáry prostorové jako důležité číslo *rod*: rodem pravé prostorové čáry sluje (podle nejjednodušší definice) rod čáry rovinné, která je jejím průmětem z bodu obecně polože-

d) Je-li prostorová čára *úplným průsekem dvou ploch*, plochy $f_1 = 0$ stupně n_1-tého a plochy $f_2 = 0$ stupně n_2-tého, jest její stupeň $n_1 n_2$. Předpokládejme, že obě dané plochy mají obecnou polohu vzájemnou, t. j. že se navzájem nedotýkají, a že jejich průsečná čára neprochází singulárním bodem žádné z nich; v tom případě nemá průsečná čára bodů dvojných ani hrotů ($d = 0$, $r = 0$).

Řád prostorové čáry jest v tom případě

$$m = n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2).$$

Neboť aby tečna čáry prostorové v bodě jejím (x_k), vyjádřená rovnicemi

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\xi_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_4}\xi_4 = 0,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\xi_3 + \frac{\partial f_2}{\partial x_4}\xi_4 = 0,$$

protínala zvolenou přímku o rovnicích

$$A_1\xi_1 + B_1\xi_2 + C_1\xi_3 + D_1\xi_4 = 0,$$
$$A_2\xi_1 + B_2\xi_2 + C_2\xi_3 + D_2\xi_4 = 0,$$

musí býti nule roven determinant (4. stupně) z koeficientů uvedených čtyř rovnic, tedy z prvních parciálních derivací funkcí f_1 a f_2 podle

---

ného na rovinu (tedy také rod promítajícího kužele a duálně rod rovinného řezu příslušné torsy). Odtud plynou pro rod p prostorové čáry výrazy

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - (h+d+r) = \tfrac{1}{2}(v-1)(v-2) - (\chi+\delta+\varrho)$$
$$= \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - (n+i+k+t) = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - (\nu+i+\varkappa+t).$$

Zavedeme-li do Cayleyových relací rod čáry p, obdržíme vztahy

$$m + r = 2(n + p - 1), \quad m + \varrho = 2(\nu + p - 1),$$
$$n + \nu + t = 2(m + p - 1).$$

Odtud lze odvoditi, že při $t = 0$ musí (pro $n > 3$) býti buď $r > 0$ nebo $\varrho > 0$; viz o tom *G. Fontené*, Courbes gauches. Sur les formules de Cayley, analogues aux formules de Plücker, Nouv. Annales math. (4) 12 (1912).

[9]) Prostorová čára musí míti zdánlivé body dvojné. Minimální počet zdánlivých dvojných bodů jest u pravé prostorové čáry n-tého stupně roven $\frac{1}{4}n(n-2)$ nebo $\frac{1}{4}(n-1)^2$ podle toho, je-li n číslo sudé nebo liché; odtud vyplývá, že maximální rod takové čáry jest $\frac{1}{4}(n-2)^2$ resp. $\frac{1}{4}(n-1)\cdot(n-3)$. Křivky n-tého stupně maximálního rodu existují pro každé n, nemají násobných bodů a leží na ploše 2. stupně; pro n sudé jsou úplným průsekem této kvadratické plochy s plochou stupně $\frac{1}{2}n$-tého, pro liché n jsou spolu s přímkou průsekem plochy kvadratické s plochou stupně $\frac{1}{2}(n+1)$. O tom *G. Halphen*, Mémoire sur les courbes gauches algébriques, Comptes r. Acad. Paris 70 (1870), nebo téhož cit. velké pojednání z r. 1882; také na př. *K. Bobek*, Über das Maximalgeschlecht von algebraischen Raumkurven gegebener Ordnung, Sitzungsberichte Akad. Wien 93 (1886). O horní mezi pro počet (skutečných) dvojných bodů čáry prostorové jedná *T. R. Hollcroft*, Limits for actual double points of space curves, Bulletin Amer. math. soc. 31 (1925).

[10]) O soběduálních čarách prostorových pojednává *T. R. Hollcroft*, Self dual space curves, Amer. Journal math. 48 (1926); viz také *G. Loria*, Sur les courbes gauches algébriques autocorrélatives, Bulletin Soc. math. France 23 (1895); *G. Gherardelli*, Sulle curve sghembe algebriche con soli rami autoduali, Rendiconti Accad. Lincei Roma (5) 33_1 (1924).

proměnných x_1, x_2, x_3, x_4 a z koeficientů A_1, B_1, C_1, D_1 a A_2, B_2, C_2, D_2. Rovnice ta vyjadřuje plochu stupně $(n_1 + n_2 - 2)$-ho, jež prochází dotyčnými body tečen čáry uvažované, protínajících uvedenou přímku. Body, jejichž tečny přímku tu protínají, jsou tedy průsečíky ploch stupňů n_1-tého, n_2-tého a $(n_1 + n_2 - 2)$-ho, takže jich počet jest $n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)$.

Z druhé rovnice druhé skupiny relací Cayleyových nalezneme nyní počet zdánlivých dvojných bodů uvažované čáry:

$$h = \tfrac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 - 1)(n_2 - 1).$$

A protože v obecném případě nemá prostorová čára ani dvojných rovin oskulačních ani tečen dvojných nebo inflexních ($\delta = 0, t = 0, i = 0$), obdržíme z ostatních rovnic Cayleyových:

$$\begin{aligned}
v &= 3n_1n_2(n_1 + n_2 - 3),\\
\varrho &= 2n_1n_2(3n_1 + 3n_2 - 10),\\
\chi &= \tfrac{1}{2}n_1n_2[9n_1n_2(n_1 + n_2 - 3)^2 - 22(n_1 + n_2) + 71],\\
k &= \tfrac{1}{2}n_1n_2[n_1n_2(n_1 + n_2 - 2)^2 - 4(n_1 + n_2) + 8],\\
\varkappa &= \tfrac{1}{2}n_1n_2[n_1n_2(n_1 + n_2 - 2)^2 - 10(n_1 + n_2) + 28].
\end{aligned}$$

Jestliže však průsečná čára dvou ploch má dvojné body a hroty ($d > 0, r > 0$), vznikající tím, že dané plochy se dotýkají, změní se podle toho uvedená čísla, jak stejným postupem nalezneme z relací Cayleyových; zejména je tu $m = n_1n_2(n_1 + n_2 - 2) - 2d - 3r$, $v = 3n_1n_2(n_1 + n_2 - 3) - 6d - 8r$.[11])

Máme-li na zřeteli, že dvojné body průsečné čáry dvou ploch vznikají (mimo jiné) z dotyku daných ploch, můžeme určiti největší počet bodů, v nichž se plochy ty dotýkají. Protože totiž kužel promítající čáru prostorovou je téhož stupně jako ona a má dvojné přímky v přímkách svých, jež jdou skutečným nebo zdánlivým dvojným bodem čáry té, platí vzhledem k maximálnímu počtu dvojných bodů rovinné čáry a tedy kužele

$$d + r + h = \tfrac{1}{2}(n_1n_2 - 1)(n_1n_2 - 2).$$

Dosadíme-li sem výraz pro h, dříve ustanovený, shledáme, že dvě plochy stupně n_1-tého a n_2-tého, protínající se v čáře, jež se nerozpadá, mohou se sebe dotýkati v bodech nejvyššího počtu

$$\tfrac{1}{2}n_1n_2(n_1 + n_2 - 4) + 1.$$

Obraťme se k případu, kdy průsečná čára dvou ploch stupně n_1-tého a n_2-tého *se rozpadá ve dvě čáry* stupňů n a n'; zde ovšem jest

$$n + n' = n_1n_2.$$

Hledejme relace, podle nichž by bylo možno ze známých charakteristických čísel jedné z obou (pravých) těchto čar určiti čísla ta pro čáru

[11]) Prochází-li průsečná čára dvou ploch bodem, jenž je s_1-násobným bodem jedné a s_2-násobným druhé z nich, jest tento bod pro čáru aspoň s_1s_2-násobným.

druhou. Zdánlivý dvojný bod průsečné čáry může zde vzniknouti buď tím, že existuje bisekanta u jedné nebo u druhé z obou složek čáry té (těchto budiž počet h, resp. h'), nebo tím, že přímka protíná jednu i druhou složku; takových zdánlivých průseků uvažovaných čar budiž H. Skutečný průsek obou složek platí za dvojný bod celé čáry a vznikne při (obyčejném) dotyku daných ploch; takových dvojných bodů budiž D. Jinak ať mají obě plochy polohu obecnou.

Vztah uvedený nahoře pro číslo h změní se tedy v relaci

$$h + h' + H = \tfrac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 - 1)(n_2 - 1).$$

Pro jednu i druhou složku průsečné čáry platí Cayleyova rovnice

$$m = n(n-1) - 2h, \quad \text{resp.} \quad m' = n'(n'-1) - 2h',$$

pro celou čáru pak

$$m + m' = n_1 n_2 (n_1 n_2 - 1) - 2(h + h' + H + D);$$

dosadíme-li sem za m a m' předcházející výrazy a užijeme-li vztahu $n + n' = n_1 n_2$, obdržíme

$$H + D = nn',$$

udávající počet zdánlivých a skutečných průsečíků obou složek.

Na počátku této úvahy jsme nalezli, že body prostorové čáry (průseku ploch stupně n_1-tého a n_2-tého), jež jsou dotyčnými body jejích tečen protínajících zvolenou přímku, leží na ploše stupně $(n_1 + n_2 - 2)$-ho; při obecné poloze bodu (x_k) představuje však plocha tam uvedená (s rovnicí ve tvaru determinantním) geometrické místo bodů, jejichž polárné roviny vzhledem k plochám $f_1 = 0$ a $f_2 = 0$ mají průsečnici, protínající zvolenou přímku. Průsečík této plochy s jednou složkou průsečné čáry uvažované je dotyčným bodem její tečny protínající zvolenou přímku; avšak bod plochy té ležící v průsečíku obou složek čáry průsečné nemá toho významu; proto jest

$$n(n_1 + n_2 - 2) = m + D, \quad n'(n_1 + n_2 - 2) = m' + D,$$

odkudž odečtením vyplyne

$$m - m' = (n - n')(n_1 + n_2 - 2).$$

Dosadíme-li však do rovnic právě uvedených z hořejšího výrazy za m, m' a D, obdržíme

$$2h + H = n(n_1 - 1)(n_2 - 1), \quad 2h' + H = n'(n_1 - 1)(n_2 - 1);$$

odečtením pak

$$h - h' = \tfrac{1}{2}(n - n')(n_1 - 1)(n_2 - 1).$$

Z poslední rovnice druhé skupiny rovnic Cayleyových, resp. z první a třetí rovnice první skupiny nalezneme konečně se zřetelem k hořejšímu

$$\nu - \nu' = 3(n - n')(n_1 + n_2 - 3),$$
$$\varrho - \varrho' = 2(n - n')(3n_1 + 3n_2 - 10).$$[12][13][14])

[12]) Racionální křivky prostorové (rodu $p = 0$) obecně vyšetřovali zejména *Em. Weyr*, Intorno alle curve gobbe razionali, Giornale mat. 9

129. Prostorová čára třetího stupně. *a*) Prostorovou čáru 3. stupně[1]) lze definovati jako *částečný průsek dvou ploch 2. stupně, jež mají společnou přímku.* Protože společná přímka dvou ploch kvadratických s rovnicemi $f(x_k) = 0$, $g(x_k) = 0$ o reálných koeficientech musí býti reálná (kdyby totiž byla imaginární, existovala by ještě druhá průsečná přímka sdružená), můžeme za ni zvoliti přímku $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; rovnice kvadratických ploch přímku tu obsahujících mají tvar

$$x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) = 0, \quad x_1 g_1(x) + x_2 g_2(x) = 0,$$

kde $f_1(x)$, $f_2(x)$ a $g_1(x)$, $g_2(x)$ jsou lineární formy proměnných x_1, x_2, x_3, x_4.

Svazek rovin s osou O_3O_4 o rovnici $x_2 = tx_1$ (s parametrem t) protíná průsečnou čáru daných ploch 2. stupně ve všech a pouze bodech prostorové čáry 3. stupně (vyloučíme-li ovšem body jejich osy). Dosadíme-li $x_2 = tx_1$ do obou rovnic hořejších, obdržíme po zkrácení faktorem x_1 (což odpovídá vyloučeným bodům společné přímky $x_1 = 0$, $x_2 = 0$) pro souřadnice x_1, x_3 a x_4 bodů na prostorové čáře 3. stupně dvě rovnice,

(1871), dále Über Involutionen n-ten Grades und k-ter Stufe, Sitzungsberichte Akad. Wien 79 (1879); *M. Genty*, Étude sur les courbes gauches unicursales, Bulletin Soc. math. France 9 (1881); *Em. Weyr*, Über rationale Raumcurven, Sitzungsberichte Böhm. Ges. Wiss. 1882. O jejich projektivním vytvoření (spec. průsečíky sdružených oskulačních rovin tří projektivních čar racionálních) jedná hlavně *A. Brill*, Über rationale Curven und Regelflächen, Math. Annalen 36 (1890); *W. Stahl*, Zur Erzeugung der rationalen Raumkurven, Math. Annalen 40 (1892).

[13]) Rozvinutelná plocha nekuželová má nejnižší stupeň $m = 4$; je tvořena oskulačními rovinami prostorové čáry 3. stupně. Torsy až do stupně 7. (jejichž kuspidální čáry jsou totiž pravé čáry prostorové řádu $m \leqq 7$) jsou všechny racionální; jejich klasifikaci podal *H. A. Schwarz*, De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum, Journal r. a. Math. 64 (1864); doplnil ji *H. Mohrmann*, Über die abwickelbaren Flächen der ersten sieben Ordnungen, Jahresbericht D. Math. Ver. 24 (1915). Viz dále *A. Rosenblatt*, Zur Klassifikation der abwickelbaren algebraischen Flächen, Bulletin Acad. Cracovie 1911.

[14]) Přehled úvah z *diferenciální projektivní geometrie* prostorových čar a ploch podává *L. Berwald* v Encyklopädie math. Wiss. III. 3 (*D* 11, do 1923); pro úvod viz *E. Čech*, Projektivní diferenciální geometrie, 1926; *G. Fubini - E. Čech*, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, 1931.

[1]) Krátký přehled teorie prostorové čáry 3. stupně podává *O. Staude* v Encyklopädie der math. Wiss. III. 2 (*C* 2, odd. X, 1904) a v Pascalově Repertorium der höh. Math. II. 2 (kap. 29 *A*, 1922). Po prvních úvahách A. F. Möbia (1832) studovali tuto čáru syntheticky, jak bylo na příslušných místech uvedeno, zejména F. Seydewitz, M. Chasles, R. Sturm, H. Schröter, Th. Reye; analyticky hlavně *L. Cremona*, Sulle linee di terzo ordine a doppia curvatura, Annali mat. 1 (1858), 2 (1859) a jinde. Pro analytická vyšetřování viz dále *C. A. Drach*, Einleitung in die Theorie der cubischen Kegelschnitte, 1867; *A. Brill*, Über die Raumkurven dritter Ordnung, Rendiconti Circolo mat. Palermo 25 (1908); *O. Staude*, Analytische Geometrie der kubischen Kegelschnitte, 1913; *P. W. Wood*, The twisted cubic (with some account of the metrical properties of cubical hyperbola), 1913; *G. Loria*, Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti I (1925), p. 69 a n.

jež mají u x_1 koeficienty kvadratické v t, u x_3 a x_4 však lineární; jejich řešením nalezneme

$$x_1 : x_3 : x_4 = \varphi_1(t) : \varphi_3(t) : \varphi_4(t),$$

kde funkce φ_1 je stupně 2., funkce φ_3 a φ_4 stupně 3. v parametru t. Připojíme-li ještě $x_2 = t\varphi_1$, dostaneme tedy pro souřadnice bodů na prostorové čáře 3. stupně *parametrické vyjádření* funkcemi stupně nejvýše třetího; toto vyjádření můžeme psáti obecně ve tvaru

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= a_{11}t^3 + a_{12}t^2 + a_{13}t + a_{14},\\
\varrho x_2 &= a_{21}t^3 + a_{22}t^2 + a_{23}t + a_{24},\\
\varrho x_3 &= a_{31}t^3 + a_{32}t^2 + a_{33}t + a_{34},\\
\varrho x_4 &= a_{41}t^3 + a_{42}t^2 + a_{43}t + a_{44},
\end{aligned}$$

kde koeficienty a_{hk} jsou reálné.

Protože souřadnice bodu na uvažované čáře jsou tu vyjádřeny racionálními (celistvými) funkcemi parametru, sluje prostorová čára 3. stupně *čarou racionální*. Každé hodnotě parametru t přísluší jeden a jediný bod prostorové kubiky; reálným hodnotám parametru body reálné. Dosadíme-li výrazy pro x_k zde uvedené do rovnice obecné roviny $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$, vznikne rovnice 3. stupně pro t, jejíž kořeny dávají parametry průsečíků této roviny s čarou 3. stupně: každá rovina protíná prostorovou čáru 3. stupně ve třech bodech.

O součinitelích a_{hk} v parametrickém vyjádření prostorové kubiky musíme předpokládati, že determinant z nich složený jest různý od nuly:

$$A \equiv (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}) \neq 0.$$

Neboť kdyby platilo $A = 0$, bylo by možno určiti hodnoty (ne všechny nulové) pro u_k v rovnici roviny $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$ tak, aby této rovnici, jež dosazením hořejších výrazů za x_k přechází v rovnici 3. stupně pro t, vyhovělo neomezené množství hodnot parametru t; koeficienty této rovnice pro t jsou totiž $a_{1k}u_1 + a_{2k}u_2 + a_{3k}u_3 + a_{4k}u_4$ a, položeny rovnými nule, dávají čtyři rovnice s kořeny u_k ne všemi nulovými, je-li $A = 0$. Kdyby však existovala rovina mající s uvažovanou čarou nekonečně mnoho společných bodů, ležela by čára ta v rovině, čemuž tak není.

Stanovená podmínka $A \neq 0$ má tedy ten význam geometrický, že čára vyšetřovaná jest prostorová. Svědčí dále o parametrickém vyjádření jejím, že aspoň jedna z funkcí tam uvedených jest vskutku 3. stupně.

Obecné výrazy, k nimž jsme při parametrickém vyjádření prostorové kubiky dospěli, můžeme nahraditi velmi jednoduchými výrazy speciálními. Užijeme-li transformace

$$x_h = a_{h1}y_1 + a_{h2}y_2 + a_{h3}y_3 + a_{h4}y_4, \quad \text{kde } h = 1, 2, 3, 4,$$

z níž plyne

$$Ay_k = A_{1k}x_1 + A_{2k}x_2 + A_{3k}x_3 + A_{4k}x_4, \quad \text{kde opět } k = 1, 2, 3, 4,$$

a dosadíme-li sem hořejší výrazy 3. stupně pro x_1, x_2, x_3, x_4, obdržíme

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = t^3 : t^2 : t : 1.$$

Toto parametrické vyjádření prostorové čáry 3. stupně lze nazvati *kanonickým*.[2])

Z kanonického vyjádření parametrického pro kubiku prostorovou vyplývají rovnice

$$\begin{aligned} y_1 y_3 - y_2^2 &= 0, \\ y_2 y_4 - y_3^2 &= 0, \\ y_1 y_4 - y_2 y_3 &= 0; \end{aligned}$$

jsou to rovnice *tří ploch 2. stupně, jež mají společnou uvažovanou prostorovou čáru 3. stupně a pouze tuto.* Z těchto ploch jsou první dvě kuželové (s vrcholem O_4, resp. O_1), třetí přímková pravá; první a druhá mají vedle kubiky společnou přímku $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, první a třetí přímku $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, druhá a třetí přímku $y_3 = 0$, $y_4 = 0$.

Označíme-li rovnice uvedených ploch kvadratických krátce $\varphi(y, y) = 0$, $\psi(y, y) = 0$, $\chi(y, y) = 0$, vidíme, že prostorová čára kubická jest base dvojmocného svazku ploch kvadratických $\varphi + \lambda\psi + \mu\chi = 0$.[3])

b) Zůstaňme v dalším u parametrického vyjádření prostorové čáry 3. stupně ve tvaru nejkratším, jež píšeme

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = t^3 : t^2 : t : 1.$$

Rovina jdoucí třemi body prostorové kubiky o parametrech t_1, t_2, t_3 má rovnici

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^3 & t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^3 & t_3^2 & t_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dosadíme-li sem za x_k výrazy $t^3, t^2, t, 1$, obdržíme rovnici třetího stupně pro t; protože tato rovnice musí míti kořeny t_1, t_2, a t_3, jsou jejími koeficienty $1, -(t_1 + t_2 + t_3)$, $t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3$, $t_1t_2t_3$. Vrátíme-li se pak k rovnici pro x_k, seznáváme, že rovnice roviny jdoucí třemi body o parametrech t_1, t_2, t_3 jest

$$x_1 - (t_1 + t_2 + t_3)\, x_2 + (t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3)\, x_3 - t_1t_2t_3x_4 = 0.$$

Odtud vyplývá pro rovinu, jež má s čarou dva splývající body společné ($t_2 = t_1$) a sluje tečnou rovinou její v bodě t_1, rovnice

$$x_1 - (2t_1 + t_3)\, x_2 + t_1\,(t_1 + 2t_3)\, x_3 - t_1^2t_3x_4 = 0.$$

---

[2]) Jak lze v dalším zjistiti, jest při tomto vyjádření prostorové čáry 3. stupně základním čtyrstěnem soustavy souřadnic t. zv. oskulační čtyrstěn její (vrcholy jeho O_1 a O_4 jsou body, hrany O_1O_2 a O_4O_3 tečnami, stěny ω_4 a ω_1 oskulačními rovinami čáry uvedené).

[3]) V tomto dvojmocném svazku ploch 2. stupně jsou všechny zvrhlé plochy kužele, jejichž vrcholy uvažovanou čáru vyplňují a jejichž přímky jsou bisekantami čáry té, všechny pravé plochy jsou přímkové, jejichž přímky v jedné řadě jsou bisekantami a v druhé řadě unisekantami čáry.

Oskulační rovina prostorové čáry 3. stupně v bodě jejím t má rovnici, kterou z hořejší obdržíme pro $t_1 = t_2 = t_3 (= t)$ ve tvaru

$$x_1 - 3tx_2 + 3t^2x_3 - t^3x_4 = 0;$$

má tedy souřadnice

$$u_1 = 1, \quad u_2 = -3t, \quad u_3 = 3t^2, \quad u_4 = -t^3.$$

Přímka má s prostorovou kubikou společné nejvýše dva body; neboť kdyby obsahovala tři body její, měla by rovina, položená přímkou takovou a dalšími body čáry 3. stupně, s touto společné (aspoň) čtyři body, což není možné.

Přímka mající s prostorovou čarou 3. stupně společné dva body, její sečna čili bisekanta, jest vyjádřena rovnicemi dvou rovin jimi položených; zvolíme-li roviny jdoucí vrcholem O_4, resp. O_1, má tedy bisekanta s průsečíky t_1 a t_2 na čáře rovnice

$$x_1 - (t_1 + t_2)\, x_2 + t_1t_2x_3 = 0,$$
$$x_2 - (t_1 + t_2)\, x_3 + t_1t_2x_4 = 0.$$

Tečna prostorové kubiky v bodě jejím t, která vznikne z uvedené sečny pro $t_2 = t_1 (= t)$, má rovnice

$$x_1 - 2tx_2 + t^2x_3 = 0,$$
$$x_2 - 2tx_3 + t^2x_4 = 0.$$

Bisekanta uvažované čáry, jdoucí zvoleným bodem v prostoru (x'_k), protíná čáru v bodech, o jejichž parametrech t_1 a t_2 platí hořejší dvě rovnice, psané pro x'_k; odtud vypočteme

$$1 : -(t_1 + t_2) : t_1t_2 = (x'_2x'_4 - x'^2_3) : (x'_2x'_3 - x'_1x'_4) : (x'_1x'_3 - x'^2_2).$$

Lze tedy bodem (x'_k) vésti k prostorové kubice bisekantu, jejíž průsečíky s kubikou mají za parametry kořeny rovnice

$$(x'_2x'_4 - x'^2_3)\, t^2 + (x'_2x'_3 - x'_1x'_4)\, t + (x'_1x'_3 - x'^2_2) = 0.$$

Odtud vidíme, že libovolným bodem prostoru prochází obecně jedna a jediná bisekanta prostorové čáry 3. stupně. Bodem na čáře, pro který platí $x_1x_3 - x_2^2 = 0$, $x_2x_3 - x_1x_4 = 0$, $x_2x_4 - x_3^2 = 0$, jde ovšem nekonečně mnoho jejích bisekant.

Bisekanty prostorové kubiky, jdoucí zvoleným bodem jejím o parametru t, vytvořují kužel 2. stupně, čáru obsahující; jeho rovnici nalezneme, vyloučíme-li parametr t_2 druhého bodu bisekanty na čáře z hořejších dvou rovnic jejích. Tento kužel, promítající prostorovou čáru 3. stupně z jejího bodu t_1, má rovnici

$$(x_1x_3 - x_2^2) + (x_2x_3 - x_1x_4)\, t_1 + (x_2x_4 - x_3^2)\, t_1^2 = 0.$$

c) Viděli jsme, že body společné dvěma plochám 2. stupně se společnou přímkou tvoří, vyloučíme-li body této lineární řady bodové, prostorovou čáru 3. stupně čili *bodovou řadu 3. stupně*; souřadnice bodů této řady lze vyjádřiti kubickými funkcemi proměnného parametru. Duálně tvoří roviny společné dvěma plochám 2. třídy se společnou

přímkou, vyloučíme-li roviny tohoto lineárního svazku rovinového, *rovinový svazek 3. třídy* čili torsu 3. třídy; každým bodem v prostoru procházejí totiž tři roviny této soustavy. Souřadnice rovin tohoto svazku lze obdobně vyjádřiti pomocí kubických funkcí parametru.

Obdobně jako oskulační roviny vyšetřované čáry 3. stupně v jejích bodech jest možno analyticky vyjádřiti u duálního útvaru 3. třídy mezní body v jeho rovinách: torsa 3. třídy s rovnicemi

$$v_1 = t^3, \quad v_2 = t^2, \quad v_3 = t, \quad v_4 = 1$$

má v rovině s parametrem t mezní bod, t. j. průsečík tří soumezných rovin, o souřadnicích

$$y_1 = 1, \quad y_2 = -3t, \quad y_3 = 3t^2, \quad y_4 = -t^3.$$

Z předešlého jest patrno, že oskulační roviny bodové řady 3. stupně tvoří rovinový svazek 3. třídy, a duálně (i obráceně) mezní body rovinového svazku 3. třídy tvoří bodovou řadu 3. stupně.

Sledujme tuto souvislost analyticky, vyjdouce od dané čáry 3. stupně o rovnicích

$$x_1 = t^3, \quad x_2 = t^2, \quad x_3 = t, \quad x_4 = 1.$$

Oskulační roviny této čáry tvoří, jak jsme prve nalezli, rovinový svazek o rovnicích

$$u_1 = 1, \quad u_2 = -3t, \quad u_3 = 3t^2, \quad u_4 = -t^3;$$

rovina svazku tohoto o uvedených souřadnicích nabude souřadnic

$$v_1 = t^3, \quad v_2 = t^2, \quad v_3 = t, \quad v_4 = 1$$

transformací $u_1 = v_4$, $u_2 = -3v_3$, $u_3 = 3v_2$, $u_4 = -v_1$. Mezní bod rovinového svazku tak vyjádřeného má podle hořejšího souřadnice

$$y_1 = 1, \quad y_2 = -3t, \quad y_3 = 3t^2, \quad y_4 = -t^3;$$

avšak transformace, jež pro y_k a x_k vyplývá z transformace pro u_k a v_k, právě aplikované, totiž transformace $y_1 = -x_4$, $y_2 = 3x_3$, $y_3 = -3x_2$, $y_4 = x_1$, převádí nalezené souřadnice mezního bodu v souřadnice

$$x_1 = t^3, \quad x_2 = t^2, \quad x_3 = t, \quad x_4 = 1.$$

Protože jsme tak dospěli k původní řadě bodové a protože také při duální úvaze bychom dospěli k původnímu svazku rovinovému, platí: *Bodová řada 3. stupně se svými oskulačními rovinami a rovinový svazek 3. třídy se svými mezními body jsou útvary totožné.*[4])[5])

[4]) Soběduální křivka zde analyticky uvažovaná (prostorová čára nejnižšího stupně) má, jak vyplývá z rovnic Cayleyových a jak nahoře zčásti uvedeno, vedle $n = 3$, $\nu = 3$ zejména $m = 4$, $h = 1$, $\chi = 1$ a ovšem $p = 0$ (také ostatní charakteristická čísla rovna nule). Promítá se z bodu v prostoru mimo ni ležícího kuželem 3. stupně s dvojnou přímkou (tří druhů), takže její průmět na rovině jest rovinná kubika s bodem dvojným.

[5]) Teorii forem binárních aplikovali na prostorovou kubiku *E. d'Ovidio*, Studio sulle cubiche gobbe mediante la notazione simbolica delle forme binarie, Memorie Accad. Torino (2) 32 (1877, výtah v Giornale mat. 17,

130. Prostorové čáry čtvrtého stupně. Prostorových čar 4. stupně jsou dva druhy: kvartika 1. druhu jest úplný průsek dvou ploch 2. stupně, kvartika 2. druhu jest částečný průsek plochy 2. stupně a plochy 3. stupně, jež mimo to mají společné dvě přímky mimoběžné.[1])

a) Kvartika 1. druhu má dva zdánlivé body dvojné; užijeme-li totiž u ní, protože je úplným průsekem dvou ploch, vzorce $h = \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 - 1) . (n_2 - 1)$, obdržíme zde pro $n_1 = 2$, $n_2 = 2$ výsledek $h = 2$.

Průmětem této kvartiky z libovolného bodu mimo ni ležícího na rovinu je rovinná kvartika; ježto tato (je-li pravá) má nejvýše tři body dvojné, může prostorová kvartika 1. druhu míti (mimo uvedené dva zdánlivé body dvojné) jen jeden skutečný bod dvojnásobný (v širším smyslu). Může tedy kvartika 1. druhu býti *trojího typu*: bez bodu singulárního nebo s bodem dvojným nebo s hrotem; první je eliptická, ostatní dvě jsou racionální.

Protože pro čáru s d body dvojnými a r hroty, která je úplným průsekem dvou ploch, platí dále $m = n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) - 2d - 3r$, nalézáme pro *řád* kvartiky 1. druhu výraz

$$m = 8 - 2d - 3r;$$

totéž nalezneme z druhé rovnice druhé skupiny relací Cayleyových $m = n(n-1) - 2(h+d) - 3r$. Jest tedy kvartika 1. druhu bez bodů singulárních řádu 8., kvartika s bodem dvojným řádu 6. a kvartika s hrotem řádu 5.

Kvartika 1. druhu nemá dvojných rovin oskulačních ($\delta = 0$), protože taková rovina má s čarou dvakrát po třech splývajících bodech společných (kdežto s čarou 4. stupně má rovina jen čtyři společné body); nemá dvojných tečen ($t = 0$), protože takové tečny nejsou možny u ploch 2. stupně, jejichž je kvartika průsekem; nemá tečen inflexních ($i = 0$), ježto přímka s trojbodovým dotykem ležela by na obou plochách kvadratických, takže by jejich průsek se rozpadl. Vzhledem k tomu určíme další charakteristická čísla uvažované kvartiky ze zjednodušených relací Cayleyových; spec. *třídu* ze čtvrté rovnice druhé skupiny

$$\nu = 12 - 6d - 8r,$$

1879); *R. Sturm*, Darstellung binärer Formen auf der kubischen Raumkurve, Journal r. a. Math. 86 (1878); *G. Pittarelli*, La cubica gobba e le forme binarie quadratiche e cubiche, Giornale mat. 17 (1879); *L. Berzolari*, Intorno alla rappresentazione delle forme binarie cubiche e biquadratiche sulla cubica gobba, Rendiconti Circolo mat. Palermo 5 (1891); *E. Waelsch*, Über Formen fünfter Ordnung auf der kubischen Raumkurve, Sitzungsberichte Akad. Wien 100 (1891); *J. Fairon*, Sur la représentation géométrique dans l'espace des formes quadratiques et cubiques binaires, Mémoires Soc. sc. Liège (3) 5 (1904).

[1]) Prostorová čára 4. stupně prvního druhu je také částečným průsekem plochy 2. stupně a plochy 3. stupně, jež mají společnou kuželosečku (pravou nebo zvrhlou).

Projektivní vytvoření prostorových kvartik obou druhů podává *G. Majcen*, Sulle generazioni proiettive di ambedue le specie di quartiche gobbe, Giornale mat. 52 (1914).

tedy pro uvedené tři typy $v = 12$, resp. 6, resp. 4. Ostatní čísla k, $\varkappa$, ϱ, χ plynou z rovnic

$$\begin{aligned} v &= m\,(m-1) - 2k - 3n, \\ n &= m\,(m-1) - 2\varkappa - 3v, \\ \varrho &= 3m\,(m-2) - 6k - 8n, \\ m &= v\,(v-1) - 2\chi - 3\varrho; \end{aligned}$$

tedy v témž pořadí $k = 16, 6, 2$; $\varkappa = 8, 4, 2$; $\varrho = 16, 4, 1$; $\chi = 38, 6, 2$.[2])

b) Kvartika 1. druhu je analyticky vyjádřena rovnicemi dvou ploch 2. stupně, jejichž je úplným průsekem; protože je spolu basí svazku ploch kvadratických, můžeme za plochy kvartiku určující zvoliti kterékoli dvě různé plochy svazku.

Kvartika *prvního typu* (bez bodu singulárního) vznikne, jestliže *obě plochy 2. stupně* $f \equiv \Sigma a_{hk} x_h x_k = 0$, $g \equiv \Sigma b_{hk} x_h x_k = 0$ *mají vzájemnou polohu obecnou*, t. j. jestliže determinant svazku ploch kvadratických $f - \lambda g = 0$, položen rovným nule, tedy rovnice $|a_{hk} - \lambda b_{hk}| = 0$ má čtyři kořeny λ_i různé. Kořeny λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) dávají (vloženy do rovnice svazku) čtyři různé kužele ve svazku obsažené; předpokládajíce, že tyto kořeny jsou reálné, takže vrcholy kuželů těch jsou reálné, zvolme je za vrcholy základního čtyrstěnu souřadnic.

Rovnice kvartiky bez bodu singulárního nabudou v tomto případě tvaru

$$\begin{aligned} a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 &= 0, \\ b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + b_4 x_4^2 &= 0, \end{aligned}$$

kde koeficienty a_k a b_k jsou reálné. Tyto dvě plochy 2. stupně, jež uvažovanou kvartiku určují, mají v základním čtyrstěnu souřadnic svůj (společný) čtyrstěn autopolární.

Kužele, jež kvartiku s uvedenými rovnicemi z jednotlivých vrcholů základního čtyrstěnu promítají, mají rovnice

$$\begin{aligned} (a_2 b_1)\, x_2^2 + (a_3 b_1)\, x_3^2 + (a_4 b_1)\, x_4^2 &= 0, \\ (a_1 b_2)\, x_1^2 + (a_3 b_2)\, x_3^2 + (a_4 b_2)\, x_4^2 &= 0, \\ (a_1 b_3)\, x_1^2 + (a_2 b_3)\, x_2^2 + (a_4 b_3)\, x_4^2 &= 0, \\ (a_1 b_4)\, x_1^2 + (a_2 b_4)\, x_2^2 + (a_3 b_4)\, x_3^2 &= 0, \end{aligned}$$

[2]) Přehled teorie prostorové čáry 4. stupně 1. druhu podává stručně *O. Staude* v Encyklopädie der math. Wiss. III. 2 (*C* 2, odd. XI, 1904) nebo v Encyclopédie des sc. math. III. 22 (1914) a v Pascalově Repertorium der höh. Math. II. 2 (kap. 29*B*, 1922). První vlastnosti její (souvislost s plochami kvadratickými, tři typy s charakteristickými čísly a pod.) uvedli J. V. Poncelet, M. Chasles, O. Hesse, G. Salmon, A. Cayley, A. Clebsch, Th. Reye, P. Serret, E. Laguerre. Pro synthetické úvahy viz také zejména spisek *H. Schröterův*, dříve uvedený; pro analytické *L. Painvin*, Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre, Nouv. Annales math. (2) 7 (1868) a 8 (1869); *R. Montessus de Ballore*, Les biquadratiques gauches, Bulletin sc. math. astron. (2) 44 (1920); *G. Loria*, Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti I (1925), p. 207 a n.; *E. Ciani*, Introduzione alla geometria algebrica (1931).

v nichž $(a_h b_k)$ značí determinant $a_h b_k - a_k b_h$; kužel s vrcholem O_k má trojhran základního čtyrstěnu s týmž vrcholem za trojhran autopolárný. Kterékoli dva z těchto kuželů 2. stupně mohou ovšem svými rovnicemi sloužiti k vyjádření uvažované kvartiky.

Jak bylo podotknuto, lze kvartiku prvního typu pokládati za průsek dvou kuželů obecně položených, na př. kuželů o rovnicích

$$A_1 x_1^2 + A_3 x_3^2 + A_4 x_4^2 = 0, \quad B_1 x_1^2 + B_2 x_2^2 + B_4 x_4^2 = 0$$

(druhý a třetí z hořejších). K parametrickému vyjádření zvolme

$$\frac{x_1}{x_4} = \alpha \operatorname{sn} u, \quad \frac{x_2}{x_4} = \beta \operatorname{cn} u, \quad \frac{x_3}{x_4} = \gamma \operatorname{dn} u.$$

Dosadíme-li tyto výrazy do rovnic obou kuželů, píšeme-li tam $\operatorname{cn}^2 u = 1 - \operatorname{sn}^2 u$, $\operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u$ a položíme-li koeficienty u $\operatorname{sn}^2 u$ i prosté členy rovny nule, dostaneme relace

$$A_1 \alpha^2 - A_3 \gamma^2 k^2 = 0, \quad A_3 \gamma^2 + A_4 = 0, \quad B_1 \alpha^2 - B_2 \beta^2 = 0, \quad B_2 \beta^2 + B_4 = 0,$$

z nichž nalezneme $k^2 = A_1 B_4 / A_4 B_1$.

Jestliže součinitelé A_1, A_4, B_1, B_4 v rovnicích kvartiky svými znaménky a velikostmi činí $0 < k^2 < 1$, jest zvolené vyjádření pro danou kvartiku možné; lze však zjistiti, že v ostatních případech se hodí jiné pořadí eliptických funkcí pro poměry souřadnic x_1, x_2, x_3, x_4. Kvartika prvého typu jest tedy parametricky vyjádřena některým ze způsobů

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \alpha \operatorname{sn} u : \beta \operatorname{cn} u : \gamma \operatorname{dn} u : 1.^{3)4)5)}$$

---

[3]) O parametrickém vyjádření prostorové kvartiky 1. druhu prvního typu funkcemi eliptickými (a jeho užití) pojednává na př. *A. Harnack*, Über die Darstellung der Raumcurven vierter Ordnung erster Species und ihres Secantensystems durch doppeltperiodische Functionen, Math. Annalen 12 (1877); *R. Montessus de Ballore*, Sur les quartiques gauches de première espèce, leurs représentations paramétriques et leur classification, Journal math. p. a. (7) 3 (1917); viz také *G. Loria*, Sull'applicazione delle funzioni Jacobiane allo studio delle linee sghembe di quarto ordine e prima specie, Rendiconti Acc. Lincei Roma (4) 6 (1890); *J. Thomae*, Parameterdarstellung der Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung, Berichte Ges. Wiss. Leipzig 56 (1904).

[4]) Obecná prostorová kvartika 1. druhu jest invariantní při 32 kolineacích; o této grupě kolineací (a vlastnostech čáry s ní souvisících) jednají zejména *E. Lange*, Die sechszehn Wendeberührungspunkte der Raumcurve vierter Ordnung erster Species, Zeitschrift Math. Phys. 28 (1883); *B. Bydžovský*, Grupa kollineací prostorové křivky bikvadratické prvého druhu, Rozpravy Čes. akad. 17 (1908); *C. Servais*, Sur les biquadratiques gauches de première espèce, Annaes Acad. polytechn. Porto 8 (1913).

[5]) Dotyčné body inflexních oskulačních rovin obecné prostorové kvartiky 1. druhu jsou (v počtu 16) průsečíky této křivky se stěnami čtyrstěnu, jehož vrcholy jsou ve vrcholech čtyř kvadratických kuželů křivkou procházejících; rovina jdoucí třemi z nich jde ještě čtvrtým bodem takovým. O nich hlavně *E. Lange*, Die sechszehn Wendeberührungspunkte der Raumcurve vierter Ordnung erster Species, Zeitschrift Math. Phys. 28 (1883); viz dále *J. C. Kluyver*, Over de buigraaklijnen eener ruimtekromme van den vierden graad en de eerste soort, Verslagen Akad. Amsterdam (3) 8 (1891); *H. Mohrmann*, Über die Wendepunktstangenten der Raumkurve vierter Ordnung erster Art, Math. Zeitschrift 5 (1919).

c) Kvartika *druhého typu* (s bodem dvojným v užším smyslu) jest basí svazku ploch 2. stupně, jehož determinant rovný nule má jeden kořen dvojnásobný a dva jednoduché; svazek tento obsahuje tři pravé kužele. Můžeme ji však (jednodušeji) definovati také jako *průsek dvou kuželů kvadratických, jež se dotýkají téže roviny* (tak, že dotyčná přímka žádného nejde vrcholem druhého).

Za kužele v definici uvedené zvolme jeden s vrcholem O_2, dotýkající se roviny $x_4 = 0$ podél O_2O_1, druhý s vrcholem O_3, dotýkající se opět roviny $x_4 = 0$ podél O_3O_1; pro zjednodušení rovnic budiž polárnou rovinou přímky O_2O_3 vzhledem k prvému kuželi rovina $x_3 = 0$ a polárnou rovinou přímky té O_3O_2 vzhledem k druhému kuželi rovina $x_2 = 0$. Rovnice určující uvažovanou kvartiku nabudou tím tvaru

$$A_3x_3^2 + A_4x_4^2 + 2A_{14}x_1x_4 = 0,$$
$$B_2x_2^2 + B_4x_4^2 + 2B_{14}x_1x_4 = 0;$$

tyto plochy určují vskutku svazek povahy nahoře uvedené.

Ze svazku kvadratických ploch můžeme ovšem k analytickému vyjádření kvartiky druhého typu zvoliti dvě libovolné plochy, třebas plochy o rovnicích

$$a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 + 2a_{14}x_1x_4 = 0,$$
$$b_2x_2^2 + b_3x_3^2 + b_4x_4^2 + 2b_{14}x_1x_4 = 0,$$

kde lze spec. klásti $a_{14} = 1$, $b_{14} = 1$; tyto dvě plochy mají v bodě O_1 společnou rovinu tečnou $x_4 = 0$. Svazek ploch 2. stupně se základními plochami právě uvedenými obsahuje mimo dva kužele, jejichž rovnice jsou hořejšího tvaru, ještě třetí kužel

$$(a_2 - b_2)\,x_2^2 + (a_3 - b_3)\,x_3^2 + (a_4 - b_4)\,x_4^2 = 0;$$

tento má vrchol v bodě O_1 (průseku dotyčných přímek oněch dvou) a trojhran základního čtyrstěnu souřadnic (s vrcholem O_1) za autopolárný. Vrcholy všech tří kuželů mají tytéž polárné roviny vzhledem k oběma (nekuželovým) daným plochám kvadratickým (O_1 v $x_4 = 0$, O_2 v $x_2 = 0$, O_3 v $x_3 = 0$).

Kvartika druhého typu má v bodě O_1 svůj bod dvojný. Neboť libovolná rovina bodem tím položená protíná obě (nekuželové) plochy kvartiku určující v kuželosečkách, jež se v O_1 sebe dotýkají (dosadíme-li totiž do rovnic daných ploch třebas $x_2 = \gamma x_3 + \delta x_4$, dostaneme rovnice dvou kuželů s vrcholem O_2, jež se roviny $x_4 = 0$ dotýkají podél hrany O_2O_1); má proto každá rovina bodem O_1 jdoucí s kvartikou společné dva body, v O_1 splývající.

Tečny kvartiky ve dvojném bodě O_1 jsou průsečnice třetího z uvedených kuželů se společnou tečnou rovinou ploch kvadratických; mají tedy rovnice $(a_2 - b_2)\,x_2^2 + (a_3 - b_3)\,x_3^2 = 0$, $x_4 = 0$. Tyto přímky dotčeného kužele mají totiž s kvartikou po třech splývajících bodech společných, jak zjistíme na kuželosečkách, v nichž libovolná rovina přímkou takovou položená protíná dané dvě plochy kvadratické.

Z rovnic tečen kvartiky ve dvojném bodě jejím jest patrno, že tečny ty jsou harmonicky spolu sdruženy vzhledem k hranám O_1O_2 a O_1O_3.

Chceme-li kvartiku 1. druhu druhého typu vyjádřiti parametricky, vyjděme od rovnice třetího kužele

$$(a_2 - b_2)\, x_2^2 + (a_3 - b_3)\, x_3^2 + (a_4 - b_4)\, x_4^2 = 0$$

čili

$$\frac{a_2 - b_2}{b_4 - a_4}\, x_2^2 + \frac{a_3 - b_3}{b_4 - a_4}\, x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

Zlomkové koeficienty v této rovnici jsou buď téhož znaménka (kladného) nebo různého znaménka (zvolme první kladný, druhý záporný). V prvním případě položme $\frac{b_4 - a_4}{a_2 - b_2} = p^2$, $\frac{b_4 - a_4}{a_3 - b_3} = q^2$ a hlavně $x_2 = px_4 \cos t$, $x_3 = qx_4 \sin t$; z první hořejší rovnice potom obdržíme $x_1 = -\frac{1}{2}(a_2p^2 \cos^2 t + a_3q^2 \sin^2 t + a_4)\, x_4 = (\alpha \sin^2 t + \alpha')\, x_4$. Tak nalézáme

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (\alpha \sin^2 t + \alpha') : p \cos t : q \sin t : 1.$$

V případě druhém budiž p^2 jako dříve, místo q^2 však $-q^2$ a zvolme $x_2 = px_4 \operatorname{ch} t$, $x_3 = qx_4 \operatorname{sh} t$; obdobně jako prve dostaneme zde $x_1 = -\frac{1}{2}(a_2p^2 \operatorname{ch}^2 t + a_3q^2 \operatorname{sh}^2 t + a_4)\, x_4 = (\alpha \operatorname{sh}^2 t + \alpha')\, x_4$. Platí tedy

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (\alpha \operatorname{sh}^2 t + \alpha') : p \operatorname{ch} t : q \operatorname{sh} t : 1.$$

d) Kvartika *třetího typu* (s hrotem) jest basí svazku ploch 2. stupně s determinantem, nule rovným, o jednom kořenu trojnásobném a jednom jednoduchém, jimž příslušejí dva pravé kužele. Lze ji však také definovati jako *průsek dvou kuželů kvadratických, jež se dotýkají téže roviny tak, že dotyčná přímka (jenom) jednoho prochází vrcholem druhého.*

Zvolme uvedené dva kužele tak, aby první měl vrchol v O_1 a dotýkal se roviny $x_4 = 0$ podél O_1O_2, druhý pak aby měl vrchol O_3 a dotýkal se opět roviny $x_4 = 0$ podél O_3O_1; pro zjednodušení rovnic dejme ještě onomu dotýkati se podél O_1O_4 roviny $x_2 = 0$, tomuto podél O_3O_4 roviny $x_1 = 0$. Rovnice takových kuželů jsou

$$a_3x_3^2 + 2a_{24}x_2x_4 = 0,$$
$$a_2x_2^2 + 2a_{14}x_1x_4 = 0;$$

jak se v krátkosti přesvědčíme, určují tyto plochy svazek typu nahoře charakterisovaného.

Za kvadratické plochy, stanovící uvažovanou kvartiku, můžeme ovšem vzíti také libovolné dvě plochy svazku, tedy třebas

$$a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_{14}x_1x_4 + 2x_2x_4 = 0,$$
$$a_2x_2^2 + ka_3x_3^2 + 2a_{14}x_1x_4 + 2kx_2x_4 = 0,$$

při čemž bylo spec. položeno $a_{24} = 1$.

Kvartika třetího typu má v bodě O_1 svůj hrot s tečnou v O_1O_2. Neboť (obdobně jako u typu druhého) zjistíme, že libovolná rovina položená bodem O_1 protíná obě uvedené (nekuželové) plochy v kuželosečkách, dotýkajících se navzájem v O_1; tečnami kvartiky v O_1 jsou

opět průsečnice prvního kužele s rovinou $x_4 = 0$, tedy dvě přímky, splývající v hranu O_1O_2. Že tato přímka je tečnou kvartiky v jejím hrotu O_1, poznáme také přímo z průseků libovolné roviny hranou O_1O_2 položené s danými (nekuželovými) plochami kvadratickými: jsou to kuželosečky s dotykem trojbodovým.

Abychom kvartiku 1. druhu třetího typu vyjádřili parametricky, vyjděme od rovnic obou hořejších kuželů, jejichž je kvartika ta průsekem. Položme $x_3 = tx_4$ a vložme takto zvolené x_3 do rovnice prvního kužele; dostaneme odtud $x_2 = -(a_3/2a_{24})\, t^2x_4 = \beta t^2x_4$; z rovnice druhého kužele pak plyne $x_1 = -(a_2a_3^2/8a_{14})\, t^4x_4 = \alpha t^4x_4$. Nalezli jsme tedy jako parametrické rovnice kvartiky s hrotem

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \alpha t^4 : \beta t^2 : t : 1.$$

Konstanty α, β můžeme specialisovati v 1; eliminací parametru t dostaneme v tom případě rovnice kuželů $x_3^2 - x_2x_4 = 0$, $x_2^2 - x_1x_4 = 0$.[6])[7])

e) *Kvartika 2. druhu*[8]) *má tři zdánlivé body dvojné*; neboť pokládáme-li průsek plochy 2. stupně a plochy 3. stupně za dvě čáry stupně 4. a 2.,

[6]) O prostorových křivkách 4. stupně s uzlem nebo hrotem viz *Em. Weyr* Über Raumcurven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte, Sitzungsberichte Akad. Wien 75 (1877), a dále Über die Abbildung einer mit einem Cuspidalpunkt versehenen Raumcurve vierter Ordnung (resp. einer Raumcurve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt) auf einen Kegelschnitt, Sitzungsberichte Akad. Wien 78 (1878); *A. Brambilla*, Sulla curva gobba del quarto ordine dotata di punto doppio, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 17 (1884); jakož i mnohá pojednání o racionálních křivkách 4. stupně vůbec (u kvartik 2. druhu, rovněž racionálních).

[7]) Na prostorové křivce 4. stupně 1. druhu existují trojice bodů té vlastnosti, že jejich rovina protíná křivku v bodě, v němž se protínají také oskulační roviny křivky v oněch bodech; a skupiny čtyř bodů, jež jsou dotyčnými body tečných rovin její bisekantou vedených. O nich pojednávají na př. *A. Harnack*, Über die Darstellung der Raumcurven vierter Ordnung erster Species und ihres Secantensystems durch doppeltperiodische Functionen, Math. Annalen 12 (1877); *A. Ameseder*, Über Configurationen auf der Raumcurve vierter Ordnung erster Species, Sitzungsberichte Akad. Wien 87 (1883); *C. Servais*, Sur les biquadratiques gauches de première espèce, Annaes Acad. polytechn. Porto 8 (1913).

[8]) Přehled vlastností prostorové čáry 4. stupně druhého druhu (nalezené G. Salmonem r. 1849) podává krátce *O. Staude* v Pascalově Repertorium der höh. Math. II. 2 (kap. 29 *C*, 1922), obšírně *L. Berzolari* v Encyklopädie der math. Wiss. III. 2 (*C* 9, odd. XI, 1926). Křivka tato byla vyšetřována v četných pracích, zejména: syntheticky *L. Cremona*, Intorno alla curva gobba del quart'ordine, per la quale passa una sola superficie di secondo grado, Annali mat. 4 (1861); *St. Jolles*, Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species synthetisch behandelt, 1883; *W. Stahl*, Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art und die desmische Fläche zwölfter Ordnung vierter Klasse, Journal r. a. Math. 101 (1887); *J. Grünwald*, Über die Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art und die zu ihnen perspectiven ebenen Curven, Sitzungsberichte Akad. Wien 108 (1899); *G. Marletta*, Studio geometrico della quartica gobba razionale, Annali mat. (3) 8 (1902); spec. pomocí zobrazení na kuželosečku *Em. Weyr*, Über die Abbildung einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung auf einen Kegelschnitt, Sitzungsberichte Akad. Wien 72 a 73 (1875 a 1876); *A. Adler*, Über Raumcurven

při čemž tato má jeden zdánlivý dvojný bod, vyplyne ze vzorce $h - h' = \frac{1}{2}(n - n')(n_1 - 1)(n_2 - 1)$ pro $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n = 4$, $n' = 2$, $h' = 1$ u čáry uvažované $h = 3$.[9])

Protože pravá kvartika rovinná, jež je průmětem prostorové čáry 4. stupně, nemůže míti více než tři dvojné body, nemůže prostorová kvartika 2. druhu vzhledem ke svým třem zdánlivým dvojným bodům míti skutečných bodů dvojných ($d = 0$, $r = 0$); jest racionální. Z druhé relace druhé skupiny rovnic Cayleyových vyplývá *řád* kvartiky 2. druhu $m = 6$. Totéž plyne ze vzorce $m - m' = (n - n')(n_1 + n_2 - 2)$, jako nahoře, protože $m' = 0$.

Kvartika 2. druhu může míti nejvýše dvě tečny inflexní; jest tedy rozeznávati takovou kvartiku bez inflexní tečny nebo s jednou nebo s dvěma inflexními tečnami ($i = 0, 1, 2$). Vzhledem k tomu, že tato kvartika nemůže míti dvojných rovin oskulačních ($\delta = 0$, takové jsou možny až u čar stupně 6. a vyšších) ani dvojných tečen ($t = 0$, nejsou u plochy 2. stupně), nalezneme ostatní charakteristická čísla její z rovnic Cayleyových: především ze čtvrté rovnice druhé skupiny *třídu*

$$\nu = 6 - i,$$

tedy pro kvartiky uvedeného pořadí 6, resp. 5, resp. 4; dále z první rovnice druhé skupiny

$$\varkappa = 4;$$

konečně z rovnic první skupiny

$$\varrho = 4 - 2i, \text{ tedy } 4, 2, 0;$$
$$k = 6 - i, \text{ tedy } 6, 5, 4;$$
$$\chi = (12 - 5i + i^2), \text{ tedy } 6, 4, 3.$$[10])[11])[12])[13])

---

vierter Ordnung zweiter Art, Sitzungsberichte Akad. Wien 86 (1882); analyticky *Em. Weyr*, Über rationale Raumcurve vierter Ordnung, Sitzungsberichte Akad. Wien 63 (1871); *E. Bertini*, Sulla curva gobba di 4o ordine e 2a specie, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 5 (1872); *R. A. Roberts*, On unicursal twisted quartics, Proceedings Math. soc. London 14 (1883); *W. Wirtinger*, Über rationale Raumkurven vierter Ordnung, Sitzungsberichte Akad. Wien 93 (1886); *A. R. Forsyth*, On twisted quartics of the second species, Quart. Journal math. 27 (1895), a j.; spec. pomocí teorie forem *A. Armemante* Sulle curve gobbe razionali del quarto ordine, Giornale mat. 11 a 12 (1873 a 1874); *L. Berzolari*, Sui combinanti dei sistemi di forme binarie annessi alle curve gobbe razionali del quart'ordine, Annali mat. (2) 20 (1892); monograficky *K. Rohn*, Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species, Berichte Ges. Wiss. Leipzig 42 a 43 (1890 a 1891); *H. W. Richmond*, Rational space-curves of the fourth order, Transactions Phil. soc. Cambridge 19 (1900); *D. J. E. Schrek*, Rationale ruimtekrommen van den vierden graad, Diss. Utrecht 1914; také *G. Loria*, Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti I (1925), p. 276 a n.; *E. Ciani*, Introduzione alla geometria algebrica (1931).

[9]) V protivě k prostorové kvartice 1. druhu prochází prostorovou kvartikou 2. druhu jediná plocha kvadratická, jejíž přímky v jedné řadě jsou trisekantami, v druhé řadě unisekantami křivky.

[10]) K vyšetřování prostorové kvartiky 2. druhu jest výhodné její jednoduché vyjádření parametrické $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \lambda^3 : \lambda^2 (\lambda^2 - a^2) : \lambda^2 - 1 : \lambda$ (E. Bertini) nebo $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (\lambda^4 + \alpha) : (\lambda^3 + \beta) : (\lambda^2 + \gamma) : (\lambda + \delta)$ (A. R. Forsyth); pro kvartiku s dvěma inflexními tečnami $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \lambda^4 : \lambda^3 : \lambda : 1$.

[11]) O kolineacích, při nichž je prostorová kvartika 2. druhu invariantní, pojednávají *A. del Re*, Omografie che mutano in sè stessa una certa curva gobba del 4° ordine e 2ª specie, e correlazioni che la mutano nella sviluppabile dei suoi piani osculatori, Atti Accad. Torino 22 (1887); *A. Brambilla*, Le omografie che mutano in sè stessa una curva gobba razionale del quarto ordine, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 20 (1887); *E. Ciani*, Sopra alcuni gruppi lineari quaternari dotati di quartica o di quintica gobba razionale invariante, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 37 (1904).

[12]) Přehled četných vyšetřování o prostorových čarách stupně 5. a 6. (i vyšších) podává *K. Rohn - L. Berzolari* v Encyklopädie math. Wiss. III. 2_2 (1926), p. 1387 a n.; viz také *G. Loria*, Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti I (1925), p. 319 a n., a pro literaturu téhož Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche (4. vyd. 1931), p. 123 a n., 343 a n.

[13]) O algebraických systémech (zejména dvojmocných kongruencích a trojmocných komplexech) prostorových čar algebraických viz *K. Rohn - L. Berzolari* v Encyklopädie math. Wiss. III. 2_2 (1926), p. 1336 a n., 1426 a n.

XII. ÚTVARY PŘÍMKOVÉ.

131. Souřadnice přímky v prostoru; přímkové útvary. *a*) Přímka jako prostorový prvek jest soběduální. K analytickému vyšetřování útvarů přímkou vytvořených zavádíme pro přímku souřadnice; elementárně můžeme tak učiniti, vycházejíce buď od bodů nebo od rovin s přímkou incidentních.

Dva různé body, na dané přímce ležící, o homogenních souřadnicích x_k a y_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ mají v rovinových souřadnicích u_k rovnice

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 = 0,$$
$$y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3 + y_4u_4 = 0;$$

za homogenní souřadnice přímky, body těmi určené, stanovíme šest determinantů 2. stupně z veličin x_k a y_k, a to (při koeficientu úměrnosti ϱ)

$$\varrho p_{hk} = x_hy_k - x_ky_h,$$

kde h, $k = 1, 2, 3, 4$, ale $h \neq k$, takže $p_{kh} = -p_{hk}$.

Vyloučíme-li totiž z uvedených dvou rovnic souřadnici u_1, resp. u_2, u_3, u_4, obdržíme čtyři rovnice

$$p_{12}u_2 + p_{13}u_3 + p_{14}u_4 = 0,$$
$$p_{21}u_1 + p_{23}u_3 + p_{24}u_4 = 0,$$
$$p_{31}u_1 + p_{32}u_2 + p_{34}u_4 = 0,$$
$$p_{41}u_1 + p_{42}u_2 + p_{43}u_3 = 0,$$

jež jsou rovnicemi průsečíků dané přímky se stěnami základního

Dvě různé roviny, danou přímkou položené, o homogenních souřadnicích u_k a v_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ mají v bodových souřadnicích x_k rovnice

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0,$$
$$v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4 = 0;$$

jako homogenní souřadnice přímky, rovinami těmi určené, volíme šest determinantů 2. stupně z veličin u_k a v_k, totiž (při koeficientu úměrnosti σ)

$$\sigma\pi_{hk} = u_hv_k - u_kv_h,$$

kde h, $k = 1, 2, 3, 4$, ale $h \neq k$, takže $\pi_{kh} = -\pi_{hk}$.

Vyloučíme-li totiž z uvedených dvou rovnic souřadnici x_1, resp. x_2, x_3, x_4, dostaneme čtyři rovnice

$$\pi_{12}x_2 + \pi_{13}x_3 + \pi_{14}x_4 = 0,$$
$$\pi_{21}x_1 + \pi_{23}x_3 + \pi_{24}x_4 = 0,$$
$$\pi_{31}x_1 + \pi_{32}x_2 + \pi_{34}x_4 = 0,$$
$$\pi_{41}x_1 + \pi_{42}x_2 + \pi_{43}x_3 = 0,$$

jež vyjadřují roviny položené danou přímkou a jednotlivými vrcho-

čtyrstěnu; souřadnice těchto průsečíků jsou $(0, p_{12}, p_{13}, p_{14})$, $(p_{21}, 0, p_{23}, p_{24})$, $(p_{31}, p_{32}, 0, p_{34})$, $(p_{41}, p_{42}, p_{43}, 0)$. Eliminací proměnných u_k z těchto čtyř rovnic (rozvedeme-li determinant 4. stupně z jejich koeficientů, nule rovný) nebo také rozvedením determinantu 4. stupně, jehož první dva řádky obsahují x_k, y_k a další dva tytéž zvolené souřadnice, rovného ovšem nule, dostaneme relaci

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Jsou tedy ze zavedených šesti homogenních souřadnic pro přímku pouze čtyři nezávislé. Zvolíme-li na dané přímce jiné dva body různé $(x_k + \lambda y_k)$ a $(x_k + \mu y_k)$, tedy při $\mu \neq \lambda$, dospějeme k témže poměrům souřadnic p_{hk} pro přímku danou.

Tak tedy přísluší ke každé přímce v prostoru jediná skupina uvedených šesti veličin p_{hk}. Obráceně zvolíme-li šest veličin p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23} (jež nejsou všechny rovny nule), vázaných relací $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$, vyjadřují hořejší čtyři rovnice s proměnnými u_k čtyři body, ležící na téže přímce (a na jednotlivých základních rovinách soustavy souřadnic); o tom se při platnosti vztahů $p_{kh} = -p_{hk}$ přesvědčíme pomocí relace právě uvedené. Lze tedy z rovnic těch omeziti se na kterékoli dvě; a snadno také zjistíme, že vůbec dva různé body (x_k), (y_k), na spojnici oněch dvou ležící, dávají ve výrazech $x_h y_k - x_k y_h$ veličiny úměrné zvoleným p_{hk}. Proto šesti zvoleným veličinám odpovídá jediná přímka v prostoru.

ly základního čtyrstěnu; souřadnice těchto rovin jsou $(0, \pi_{12}, \pi_{13}, \pi_{14})$, $(\pi_{21}, 0, \pi_{23}, \pi_{24})$, $(\pi_{31}, \pi_{32}, 0, \pi_{34})$, $(\pi_{41}, \pi_{42}, \pi_{43}, 0)$. Eliminujeme-li ze čtyř rovnic těch proměnné x_k (rozvedeme-li determinant 4. stupně z jejich koeficientů, rovný nule) nebo též rozvedeme-li determinant 4. stupně s dvěma řádky u_k, v_k a s dalšími dvěma řádky shodnými, nule rovný, obdržíme relaci

$$\pi_{12}\pi_{34} + \pi_{13}\pi_{42} + \pi_{14}\pi_{23} = 0.$$

Jsou tedy ze zvolených šesti homogenních souřadnic pro přímku pouze čtyři nezávislé. Při volbě jiných dvou různých rovin, položených danou přímkou, $(u_k + \lambda v_k)$ a $(u_k + \mu v_k)$, kde $\mu \neq \lambda$, dospějeme k témže poměrům souřadnic π_{hk} pro přímku danou.

Odpovídá tedy každé přímce v prostoru jediná skupina uvedených šesti veličin π_{hk}. Obráceně přísluší šesti veličinám $\pi_{12}, \pi_{13}, \pi_{14}, \pi_{34}, \pi_{42}, \pi_{23}$ (jež nejsou všechny nule rovny) tak zvoleným, aby splňovaly relaci $\pi_{12}\pi_{34} + \pi_{13}\pi_{42} + \pi_{14}\pi_{23} = 0$, jediná přímka v prostoru. Hořejší čtyři rovnice s proměnnými x_k vyjadřují totiž v tom případě čtyři roviny jdoucí touže přímkou (a jednotlivými vrcholy základního čtyrstěnu), jak se při platnosti vztahů $\pi_{kh} = -\pi_{hk}$ přesvědčíme na základě relace právě uvedené. Ze čtyř rovnic těch lze se tedy omeziti na kterékoli dvě; dále zjistíme, že vůbec dvě různé roviny (u_k), (v_k), jdoucí průsečnicí oněch dvou, určují výrazy složenými ze svých souřadnic $u_h v_k - u_k v_h$ veličiny úměrné zvoleným π_{hk}.

Jsme tedy oprávněni zavésti *šest veličin* $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}$, jež nejsou všechny nule rovny a *o kterých platí vztah* $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$, nebo duálně šest veličin $\pi_{12}, \pi_{13}, \pi_{14}, \pi_{34}, \pi_{42}, \pi_{23}$, jež nejsou všechny rovny nule a o nichž platí vztah $\pi_{12}\pi_{34} + \pi_{13}\pi_{42} + \pi_{14}\pi_{23} = 0$, *jako* (*Plückerovy* projektivní) *homogenní souřadnice přímky* (jež jejich poměry je určena).[1])[2])

b) Za souřadnice přímky můžeme podle předcházejícího zvoliti buď veličiny p_{hk}, zavedené (pro přímku jako osu řady bodové) relacemi $\varrho p_{hk} = x_h y_k - x_k y_h$ a vázané kvadratickou rovnicí $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$, nebo veličiny π_{hk}, zavedené (pro přímku jako osu svazku rovinového) vztahy $\sigma\pi_{hk} = u_h v_k - u_k v_h$ a vázané kvadratickou rovnicí $\pi_{12}\pi_{34} + \pi_{13}\pi_{42} + \pi_{14}\pi_{23} = 0$. Jsou to spolu s 0, jak jsme viděli, souřadnice průsečíků dané přímky se základními rovinami soustavy souřadnic, resp. souřadnice rovin položených danou přímkou a základními body soustavy.

Dvojí tato volba je v podstatě táž, protože *veličiny* p_{hk} *a* π_{hk} *jsou úměrné*. Abychom to poznali, napišme, že body (x_k) a (y_k), ležící na dané přímce, i roviny (u_k) a (v_k), položené danou přímkou, jsou incidentní; platí tu

$$\Sigma u_k x_k = 0, \quad \Sigma u_k y_k = 0, \quad \Sigma v_k x_k = 0, \quad \Sigma v_k y_k = 0.$$

Eliminací veličiny u_1 z prvních dvou rovnic a vyloučením v_1 z druhých dvou dostaneme

$$p_{12}u_2 + p_{13}u_3 + p_{14}u_4 = 0,$$
$$p_{12}v_2 + p_{13}v_3 + p_{14}v_4 = 0;$$

vyloučíme-li pak z těchto dvou rovnic p_{14} nebo p_{13}, obdržíme

$$p_{12} : p_{13} = \pi_{34} : \pi_{42},$$

resp.

$$p_{12} : p_{14} = \pi_{34} : \pi_{23}.$$

Obdobně obdržíme další úměry. Celkem pak nalezneme pro souřadnice přímky, navzájem duální, úměru

$$p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{34} : p_{42} : p_{23} = \pi_{34} : \pi_{42} : \pi_{23} : \pi_{12} : \pi_{13} : \pi_{14}.^{3})$$

[1]) Od projektivních souřadnic přejdeme k (Plückerovým) souřadnicím přímky v soustavě rovnoběžkové, píšeme-li místo x_1, x_2, x_3, x_4 pořadem $x, y, z, 1$ a místo y_1, y_2, y_3, y_4 obdobně $x', y', z', 1$: tak obdržíme $p_{12} = xy' - x'y$, $p_{23} = yz' - y'z$, $p_{31} = zx' - z'x$, $p_{14} = x - x'$, $p_{24} = y - y'$, $p_{34} = z - z'$. Lieovy souřadnice pro přímku jako spojnici dvou bodů nekonečně blízkých plynou odtud pro $x' = x + dx$, atd.: $p_{12} = x\,dy - y\,dx$, $p_{23} = y\,dz - z\,dy$, $p_{31} = z\,dx - x\,dz$, $p_{14} = -dx$, $p_{24} = -dy$, $p_{34} = -dz$. V pravoúhlé soustavě jsou pro sílu, působící v dané přímce, poslední tři souřadnice úměrny jejím složkám ve směru os, první tři pak úměrny momentům síly té vzhledem k osám souřadnic.

[2]) Čtyřmi čísly určitého významu (poměry pěti určitých souřadnic) jest přímka obecně určena; výjimkou je případ, kdy se nule rovná daná souřadnice, jež je v základní relaci faktorem neznámé souřadnice šesté, takže tuto nelze určiti; viz *M. Pasch*, Über quaternäre Linienkoordinaten, Journal r. a. Math. 148 (1918).

Jednotlivé přímky základního čtyrstěnu soustavy souřadnic mají souřadnice p_{hk} a π_{hk} nulové až na jednu souřadnici, jejíž indexy jsou tytéž jako indexy obou vrcholů resp. obou stěn, hranu tu určujících.

Podle provedené úvahy a vzhledem k nalezené relaci mezi p_{hk} a π_{hk} zavádíme tedy jako homogenní souřadnice přímky v prostoru šest veličin, vyhovujících hořejší jednoduché relaci kvadratické. Budeme je označovati p_{hk} a přímku (p_{hk}); někdy je píšeme stručněji p_k (pro k od 1 do 6), kladouce

$$p_{12} = p_1, \quad p_{13} = p_2, \quad p_{14} = p_3, \quad p_{34} = p_4, \quad p_{42} = p_5, \quad p_{23} = p_6;$$

příslušnou relaci základní lze pak psáti $\Sigma p_k p_{k+3} = 0$, kde se součet béře pro k od 1 do 3.

Při jiném základním čtyrstěnu soustavy souřadnic bude míti daná přímka souřadnice p'_{hk}, o kterých platí

$$\varrho p'_{hk} = x'_h y'_k - x'_k y'_h.$$

Protože bodové souřadnice x'_k, y'_k jsou lineární funkce původních souřadnic x_k resp. y_k, jsou, jak se snadno přesvědčíme, souřadnice přímkové p'_{hk} také lineárními funkcemi souřadnic původních p_{hk}. Koeficienty u p_{hk} v těchto transformačních rovnicích jsou úměrny souřadnicím hran původního čtyrstěnu základního vzhledem ke čtyrstěnu novému.

c) Jaká jest analytická podmínka toho, aby dvě přímky o souřadnicích p_{hk} resp. p'_{hk} se protínaly čili aby ležely v téže rovině? Dvě přímky, z nichž jedna obsahuje dva různé body o souřadnicích x_k a y_k, druhá pak dva body o souřadnicích x'_k a y'_k, protínají se tehdy a pouze tehdy, existuje-li rovina, obsahující uvedené čtyři body, t. j. platí-li současně

$$\Sigma u_k x_k = 0, \quad \Sigma u_k y_k = 0, \quad \Sigma u_k x'_k = 0, \quad \Sigma u_k y'_k = 0;$$

podmínkou toho jest

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 \end{vmatrix} = 0.$$

---

[3]) Pomocí souřadnic přímky můžeme počtem dokázati Staudtovu větu, že *dvojpoměr čtyř bodů, v nichž určitá přímka protíná stěny čtyrstěnu, rovná se dvojpoměru čtyř rovin, položených danou přímkou a vrcholy čtyrstěnu toho.* Zvolíme-li totiž za body základní na dané přímce její průsečíky s rovinami souřadnic ω_1 a ω_2, tedy body $(0, x_2, x_3, x_4)$ a $(y_1, 0, y_3, y_4)$, platí pro průsečíky přímky té s rovinami ω_3 a ω_4 jednak $z_3 = x_3 + \lambda y_3 = 0$, jednak $t_4 = x_4 + \mu y_4 = 0$; protože pak dvojpoměr těchto čtyř bodů (x_k), (y_k), (z_k), (t_k) jest $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{x_4 y_3}{x_3 y_4}$, obdržíme, užijeme-li souřadnic dané přímky $p_{13} = -x_3 y_1$, $p_{14} = -x_4 y_1$, $p_{42} = -x_2 y_4$, $p_{23} = x_2 y_3$, pro dvojpoměr bodů těch hodnotu $-\frac{p_{14} p_{23}}{p_{13} p_{42}}$. Duálně jest dvojpoměr uvedených čtyř rovin v témž pořádku $-\frac{\pi_{14} \pi_{23}}{\pi_{13} \pi_{42}}$; avšak podle úměry platné o souřadnicích p_{hk} a π_{hk} jest tento druhý výraz roven prvnímu.

Rozvedením tohoto determinantu obdržíme (kladouce ovšem $x_h y_k - x_k y_h \equiv \varrho p_{hk}$, $x'_h y'_k - x'_k y'_h \equiv \varrho p'_{hk}$)

$$p_{12}p'_{34} + p'_{12}p_{34} + p_{13}p'_{42} + p'_{13}p_{42} + p_{14}p'_{23} + p'_{14}p_{23} = 0.^4)$$

Tato podmínka průseku dvou přímek (p_{hk}) a (p'_{hk}) může se vzhledem k základní rovnici kvadratické, platné o souřadnicích p_{hk} (nebo také p'_{hk}), totiž

$$P \equiv p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0,$$

psáti ve tvaru

$$\Sigma p'_{hk} \frac{\partial P}{\partial p_{hk}} = 0 \qquad \left(\text{nebo } \Sigma p_{hk} \frac{\partial P'}{\partial p'_{hk}} = 0\right).$$

Pro $p'_{hk} = p_{hk}$ přechází rovnice tato v rovnici

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0,$$

tedy v základní podmínku, platnou o souřadnicích přímkových.

Základní podmínkou, kterou jsou souřadnice přímky p_{hk} vázány, jest nulová hodnota speciální kvadratické formy jejich $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23}$; podmínkou průseku dvou přímek (p_{hk}) a (p'_{hk}) pak jest, že musí býti nule rovna (bilineární) polární forma této formy kvadratické.[5])

d) Souřadnice přímky lze tím zobecniti, že místo nich zavedeme *lineární funkce jejich*; označme tyto *obecné souřadnice přímkové* x_k (kde $k = 1$ až 6). Klademe tedy

$$x_k = c_{k1}p_1 + c_{k2}p_2 + c_{k3}p_3 + c_{k4}p_4 + c_{k5}p_5 + c_{k6}p_6$$

a suponujeme, že determinant z koeficientů těchto rovnic není roven nule, takže i p_k jsou lineárními funkcemi nových souřadnic.

Kvadratická relace základní $P \equiv p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$ přejde opět v relaci kvadratickou, jejíž levá strana je však *obecná forma 2. stupně* $\omega(x_k)$.[6])[7])

Podmínka průseku dvou přímek (p_k) a (p'_k) přejde u přímek (x_k) a (x'_k) v polárnou formu obecné formy kvadratické $\omega(x_k)$; neboť do relace

$$\sum_k p'_k \frac{\partial P}{\partial p_k} = 0$$

---

[4]) Kratčeji můžeme psáti, užívajíce souřadnic psaných p_k a snižujíce u nich indexy podle modulu 6, uvedenou podmínku ve tvaru $\Sigma p_k p'_{k+3} = 0$, kde k v součtu jde od 1 do 6.

[5]) Pro imaginární přímku o souřadnicích $a_{hk} + ib_{hk}$ platí (podle základní relace hořejší $P = 0$) o reálných číslech a_{hk} a b_{hk} vztah $A = B$; přímka ta jest druhu prvního (obsahuje reálný bod a leží v reálné rovině) nebo druhého (neobsahuje reálného bodu a neleží v reálné rovině) podle toho, je-li resp. není-li A (a tedy i B) rovno nule.

[6]) Lineární transformace přímkových souřadnic p_k v obecné souřadnice přímkové x_k není však transformací k novému čtyrstěnu základnímu, leda v případě, že koeficienty c_{hk} substituce té splňují 20 určitých podmínek, jež snadno zjistíme.

[7]) Vzhledem k obvyklému tvaru obecné formy kvadratické $\omega(x_k)$ dává se někdy (všem) členům speciální formy P faktor 2.

jest na základě vztahu $P \equiv \omega(x_k)$ dosaditi

$$\frac{\partial P}{\partial p_k} = \sum_h \frac{\partial \omega}{\partial x_h} \cdot \frac{\partial x_h}{\partial p_k},$$

takže dostaneme

$$\sum_k p'_k \frac{\partial P}{\partial p_k} = \sum_k \left(p'_k \sum_h \frac{\partial \omega}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial p_k} \right) = \sum_h \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_h} \sum_k p'_k \frac{\partial x_h}{\partial p_k} \right) = \sum_h \frac{\partial \omega}{\partial x_h} x'_h$$

a proto relaci

$$\sum_1^6 \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_h} x'_h = 0, \quad \text{čili} \quad \omega(x_k, x'_k) = 0.$$

Zaveďme speciálně pro přímku *Kleinovy souřadnice* x_k ($k = 1$ až 6) volbou (při $i^2 = -1$)

$$\begin{aligned} x_1 &= p_{12} + p_{34}, \quad & x_3 &= p_{13} + p_{42}, \quad & x_5 &= p_{14} + p_{23}, \\ ix_2 &= p_{12} - p_{34}, \quad & ix_4 &= p_{13} - p_{42}, \quad & ix_6 &= p_{14} - p_{23}. \end{aligned}$$

Základní identita kvadratická $\omega(x_k) = 0$ nabude zde (po zkrácení konstantním faktorem) tvaru

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0,$$

což také píšeme stručně

$$(x^2) = 0;$$

podmínkou průseku dvou přímek (x_k) a (x'_k) jest pak

$$x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 + x_4x'_4 + x_5x'_5 + x_6x'_6 = 0,$$

symbolicky

$$(xx') = 0.$$

Zvolíme-li obráceně šest veličin x_k, vyhovujících podmínce $\Sigma x_k^2 = 0$, lze určiti veličiny p_{hk}, vyhovující základní relaci k nim příslušné, a tedy určitou přímku. Za souřadnice přímky jest tudíž možno samostatně zvoliti šest veličin x_k s podmínkou $\Sigma x_k^2 = 0$.[8])[9])

---

[8]) O souřadnicích přímky viz spec. *A. Cayley*, On the six coordinates of a line, Transactions Phil. soc. Cambridge 11 (1869) [Coll. math. papers VII (1894)]; *F. Klein*, Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Koordinaten auf eine kanonische Form, Diss. Bonn, 1868 [otištěno též v Math. Annalen 23 (1884) a v Ges. math. Abh. I (1921)]. Také na př. *E. Ciani*, Il metodo delle coordinate proiettive omogenee nello studio degli enti algebrici, 1915; *L. Heffter*, Lehrbuch der analytischen Geometrie II, 1923. Pro přehled a údaje literární *E. Müller*, Die verschiedenen Koordinatensysteme v Encyklopädie math. Wiss. III. 1 (*AB* 7, 1910), p. 722 a n.

[9]) Chceme-li při zavádění obecných souřadnic přímkových užíti *reálné* lineární transformace, tak aby základní forma kvadratická původních souřadnic přešla v algebraický součet čtverců souřadnic nových, lze dospěti jenom k formě obsahující tři členy kladné a tři záporné; spec. substitucí $z_1 = p_{12} + p_{34}$, $z_2 = p_{12} - p_{34}$, $z_3 = p_{13} + p_{42}$, $z_4 = p_{13} - p_{42}$, $z_5 = p_{14} + p_{23}$, $z_6 = p_{14} - p_{23}$ dojdeme základní relace $z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 + z_5^2 - z_6^2 = 0$. Viz na př. *F. Klein*, Vorlesungen über höhere Geometrie, 3. vyd. 1926, p. 96 a n.

e) Nejjednodušší útvary přímkové jsou soběduální svazek přímek v rovině a navzájem duální trs (prostorový svazek) přímek i pole (rovinná soustava) přímek.

Jednomocný svazek přímek (jdoucích bodem O a ležících v rovině ϱ), určený dvěma svými přímkami o souřadnicích a_k resp. b_k, *jest složen z přímek o souřadnicích*

$$x_k = a_k + \lambda b_k.$$

Neboť předně x_k jsou souřadnicemi přímky, protože platí $\omega(a_k + \lambda b_k) \equiv \equiv \omega(a_k) + 2\omega(a_k, b_k) \,.\, \lambda + \omega(b_k) \,.\, \lambda^2 = 0$; platí totiž $\omega(a_k) = 0$ a $\omega(b_k) = 0$, poněvadž a_k resp. b_k jsou souřadnice přímek, platí dále $\omega(a_k, b_k) = 0$, protože obě dané přímky se protínají. Dále každá přímka o souřadnicích x_k patří do svazku (O, ϱ); neboť přímky tyto protínají libovolnou přímku (c_k), protínající (a_k) i (b_k): podle předpokladu je totiž $\omega(a_k, c_k) = 0$, $\omega(b_k, c_k) = 0$, pročež $\omega(a_k + \lambda b_k, c_k) \equiv \omega(a_k, c_k) + \lambda\omega(b_k, c_k) = 0$; zvolíme-li (c_k) v ϱ mimo O, vyplývá odtud, že (x_k) leží v ϱ; zvolíme-li (c_k) jdoucí bodem O a neležící v ϱ, plyne odtud, že (x_k) prochází bodem O. Konečně každá přímka svazku, určeného přímkami (a_k) a (b_k), má souřadnice tvaru $a_k + \lambda b_k$; protože totiž přímku (d_k), v prostoru obecně položenou, protíná jediná přímka svazku uvažovaného, jest tato přímka svazku přímkou (d_k) jednoznačně určena; její konstantu λ pro souřadnice $a_k + \lambda b_k$ pak nalezneme vždy z rovnice $\omega(a_k + \lambda b_k, d_k) \equiv \omega(a_k, d_k) + + \lambda\omega(b_k, d_k) = 0$. Úhrnem tedy vidíme, že souřadnice $a_k + \lambda b_k$ vyjadřují vždy a jenom přímky svazku, určeného přímkami (a_k) a (b_k); mezi hodnotami parametru λ a přímkami svazku je korespondence obapolně jednoznačná.[10])[11])

Dvojmocný svazek přímek v prostoru a dvojmocná soustava přímek v rovině jsou jako útvary přímkové analyticky stejně vyjádřeny; oba jsou složeny z přímek, jež protínají tři dané přímky, po dvou se protínající, a jsou těmito určeny. *Dvojmocný systém přímek*, jež protínají tři dané přímky (a_k), (b_k) a (c_k), navzájem se protínající, *sestává* celý a výhradně *z přímek o souřadnicích*

$$x_k = a_k + \lambda b_k + \mu c_k.$$

Důkaz toho vede se obdobně jako prve u svazku jednomocného ve třech částech: x_k jsou souřadnicemi přímky, protože $\omega(a_k + \lambda b_k + \mu c_k) \equiv \equiv \omega(a_k) + \lambda^2\omega(b_k) + \mu^2\omega(c_k) + 2\lambda\omega(a_k, b_k) + 2\mu\omega(a_k, c_k) + 2\lambda\mu\omega(b_k, c_k) = = 0$; přímka (x_k) protíná přímky (a_k), (b_k) i (c_k) a patří proto do systému definovaného; každá přímka systému jest jednoznačně určena dvěma přímkami obecně položenými (d_k) a (e_k), jež protíná, její konstanty λ

[10]) Dvojpoměr čtyř přímek ve svazku o souřadnicích $a_k + \lambda_h b_k$ (pro $h = = 1, 2, 3, 4$) má, jako v obdobných případech, hodnotu $\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}$.

[11]) Tři přímky, dané svými souřadnicemi, jsou členy jednomocného svazku, jestliže všechny determinanty 3. stupně (nikoli nižšího), obsažené v matici ze souřadnic jejich, jsou rovny nule.

a μ v $(a_k + \lambda b_k + \mu c_k)$ lze pak vskutku jednoznačně určiti z podmínek $\omega(a_k + \lambda b_k + \mu c_k, d_k) = 0$ a $\omega(a_k + \lambda b_k + \mu c_k, e_k) = 0$.[12])

f) Přímek je v prostoru, symbolicky vyjádřeno, ∞^4. Přímky, které svými souřadnicemi vyhovují jedné rovnici, tvoří trojmocný systém, jenž sluje *komplex* přímek. Přímky, jejichž souřadnice jsou vázány dvěma rovnicemi nezávislými, tvoří systém dvojmocný, *kongruenci* přímek. Přímky vyhovující třem nezávislým rovnicím tvoří jednomocnou soustavu, t. zv. *řadu* přímek čili *osnovu* (čili obecně *plochu* přímkovou). Konečně přímek, jejichž souřadnice jsou vázány čtyřmi nezávislými rovnicemi, jest počet omezený (skupina konečného počtu přímek).[13])

Nejjednodušší řadou přímek jest jednomocný svazek přímek v rovině, nejjednodušší kongruencí přímek pak dvojmocný svazek prostorový a soustava rovinná.

Komplex přímek má s (jednomocným) svazkem přímek společnou skupinu n přímek (protože tyto společné elementy musí vyhověti jedné rovnici komplexu a třem rovnicím svazku); tento počet společných elementů sluje *stupněm* komplexu. S (dvojmocným) trsem přímek má komplex společnou řadu přímek, jdoucích vrcholem trsu, jež tvoří *komplexový kužel*; s (dvojmocným) polem přímek má komplex společnou

[12]) Jestliže u čtyř přímek, daných souřadnicemi, jsou všechny determinanty 4. stupně (nikoli všechny stupně nižšího), obsažené v matici ze souřadnic jejich, rovny nule, patří přímky ty témuž trsu nebo rovinnému poli, nebo téže dvojici jednomocných svazků s různými středy a různými rovinami o společné přímce, nebo téže kvadratické řadě zborcené (v posledním případě se říká, že přímky mají polohu *hyperboloidní*, také hyperbolickou). Dva čtyrstěny, jejichž sdružené vrcholy mají (čtyři) spojnice prvního nebo třetího nebo čtvrtého druhu (z uvedených), mají průsečnice sdružených stěn druhého resp. třetího resp. čtvrtého druhu; v prvním případě slují takové čtyrstěny, jak známo, homologické, v posledním hyperboloidní. Hyperboloidními jsou na př. dva čtyrstěny polárné; spojnice sdružených vrcholů i průsečnice sdružených stěn dvou čtyrstěnů patří téže řadě kvadratické jenom u dvojice čtyrstěnů Möbiových (ztotožňujíce se ve čtyři přímky). Viz o tom (analyticky) *J. Vályi*, Über das räumliche Analogon des Desargues'schen Satzes, Monatshefte Math. Phys. 4 (1893), a téhož Über die polarreciproken Tetraeder, tamtéž 6 (1895); *K. Doehlemann*, Ein Satz über hyperboloidisch gelegene Tetraeder, Zeitschrift Math. Phys. 45 (1900); *G. Gallucci*, Risoluzione del problema dei tetraedri iperboloidici, Rendiconti Accad. Napoli (3) 11 (1905); *A. Baruch*, Über vielfach hyperboloide Tetraeder, Rendiconti Circolo mat. Palermo 44 (1920).

[13]) Přímku za prvek prostorových útvarů zvolil po prvé *J. Plücker* (System der Geometrie des Raumes, 1846); on také zavedl pojem komplexu a kongruence přímek, jakož i jména jejich (1865), a vyšetřoval podrobně komplex lineární i kvadratický (1868—69). Jeho pokračovatelem byl *G. Battaglini*. Rozhodující vliv na vývoj nauky měl *F. Klein*, jenž zavedl soustavu souřadnic určenou šesti lineárními komplexy v involuci a pojem komplexů s touže plochou singulární; klasifikaci kvadratických komplexů, Kleinem navrženou, provedl *A. Weiler*. Kongruence přímek vyšetřovali zejména *E. Kummer* a *R. Sturm*. V souvislosti s aplikacemi a jinými předměty geometrickými jednali o této teorii hlavně *S. Lie*, *R. St. Ball*, *E. Study*.

řadu přímek, vytvořujících čáru (obalovou), t. zv. *komplexovou čáru* (rovinnou). Stupeň komplexového kužele a třída komplexové čáry rovinné jsou rovny stupni komplexu; neboť stupeň kužele (s vrcholem O) je dán počtem přímek jeho, které leží v libovolné rovině, procházející jeho vrcholem O, což je počet přímek komplexu, obsažených v jednomocném svazku (O, ϱ); duálně je odůvodněna druhá část věty.

Kongruence přímek má s trsem přímkovým společný konečný počet přímek, jenž sluje *stupněm* kongruence; duálně má kongruence přímek s polem přímkovým společnou skupinu přímek, udávající *třídu* kongruence.[14])[15])

132. Lineární komplex přímek. *a*) Lineární komplex přímek jest definován rovnicí 1. stupně pro souřadnice svých přímek. Zvolíme-li za přímkové souřadnice p_{hk}, jest tedy lineární komplex dán rovnicí

$$A_{12}p_{12} + A_{13}p_{13} + A_{14}p_{14} + A_{34}p_{34} + A_{42}p_{42} + A_{23}p_{23} = 0;$$

píšeme-li místo p_{hk} stručněji p_1 až p_6, má rovnice lineárního komplexu tvar

$$\sum_{1}^{6} A_k p_k = 0.$$

Libovolný svazek přímek v rovině má s tímto komplexem společnou *jednu přímku*; neboť dosadíme-li do rovnice komplexu $p_k = a_k + \lambda b_k$ za suposice, že přímky (a_k) a (b_k) nepatří obě do komplexu, dostaneme lineární rovnici pro λ, z níž jednoznačně vyplývá konstanta přímky svazku, v komplexu obsažené.[1])

[14]) O (projektivní) geometrii útvarů přímkových pojednávají soustavně zejména *J. Plücker*, Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, 2 díly, 1868—69; *G. Koenigs*, La géométrie réglée et ses applications, 1895; *C. M. Jessop*, A treatise on the line complex, 1903; krátce také na př. *G. Bouligand*, Notions sur la géométrie réglée (doplněk jeho Cours de géométrie analytique), 1929. Proti těmto spisům převážně analytickým obsahuje synthetickou teorii předmětu toho obšírná publikace *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung, 3 svazky, 1892—96. Se stanoviska převahou metrického a se zvláštním zřetelem k aplikacím v kinematice i mechanice jedná o geometrii přímkové *K. Zindler*, Liniengeometrie mit Anwendungen, 2 díly, 1902 a 1906. Přehled obsahu a literaturu podává v článcích Algebraische Liniengeometrie *K. Zindler* v Pascalově Repertorium höh. Math. II. 2, kap. 39 (1922), a v Encyklopädie math. Wiss. III. C8 (1921).

[15]) Vycházeje od přímky a průseku dvou přímek jako prvku resp. vztahu základního (nedefinovaného), uvedl soustavu postulátů pro geometrii přímkovou *M. Pieri*, Sui principi che reggono la geometria delle rette, Atti Accad. Torino 36 (1901); zjednodušili ji pak *E. R. Hedrick* a *L. Ingold*, A set of axioms for line geometry, Transactions Amer. math. soc. 15 (1914). Jinak *M. G. Gaba*, A set of axioms for line geometry, Bulletin Amer. math. soc. 29 (1923).

[1]) Obsahuje-li však lineární komplex dvě přímky lineárního svazku jednomocného, obsahuje jej celý. Obdobně lineární komplex má s libovolnou zborcenou řadou kvadratickou dvě přímky společné; obsahuje-li však tři přímky její, obsahuje ji celou.

Přímky komplexu, jdoucí libovolným bodem v prostoru, tvoří svazek přímek, *leží* tedy *v jedné rovině* (jež je tu komplexovým kuželem); rovina ta sluje *polárnou rovinou* onoho bodu.

Přímky komplexu, ležící v libovolné rovině, tvoří svazek přímek, *protínají se* tedy *v jednom bodě* (jenž je zde komplexovou čarou rovinnou); bod ten sluje *pólem* oné roviny.

Neboť dosadíme-li do rovnice lineárního komplexu $\varrho p_{hk} = x_h y_k - x_k y_h$ a zvolíme-li (y_k) za bod pevný, (x_k) pak za proměnný bod přímky, obdržíme jako rovnici útvaru, složeného z přímek komplexu, jdoucích bodem (y_k), rovnici (kde místo A_{kh} píšeme podle potřeby $-A_{hk}$)

$$(A_{12}y_2 + A_{13}y_3 + A_{14}y_4)\,x_1 + (A_{21}y_1 + A_{23}y_3 + A_{24}y_4)\,x_2 + \\ + (A_{31}y_1 + A_{32}y_2 + A_{34}y_4)\,x_3 + (A_{41}y_1 + A_{42}y_2 + A_{43}y_3)\,x_4 = 0;$$

tvoří tedy přímky komplexu, procházející bodem (y_k), rovinu (polárnou) o souřadnicích v rovnici uvedených. Obdobně dokážeme větu duální a spolu nalezneme souřadnice pólu dané roviny.

Odtud plyne, že průsečík dvou přímek komplexu a rovina jimi položená tvoří dvojici pólu a polárné roviny, jež k sobě při daném lineárním komplexu příslušejí.

Daný komplex lineární přiřaďuje, jak z uvedeného vysvítá, každému bodu v prostoru jedinou určitou rovinu s bodem tím incidentní a duálně i obráceně každé rovině jediný určitý bod s rovinou tou incidentní;[2]) jest tedy lineárním komplexem určena (speciální) korelace prostorová, známá jako korelace nulová.

Z komplexů hořejší obecnou rovnicí vyjádřených jsou zvlášť důležité lineární komplexy o rovnicích $p_{hk} = 0$. Komplex $p_{hk} = 0$ sestává z přímek, jež protínají hranu základního čtyrstěnu, protější k hraně $O_h O_k$ (hranu $\omega_h \omega_k$); polárná rovina každého bodu (y_k) prochází zde uvedenou hranou (majíc rovnici $y_k x_h - y_h x_k = 0$).

V souřadnicích Kleinových píšeme rovnici lineárního komplexu

[2]) Tento obapolně jednoznačný vztah mezi body a rovinami prostoru můžeme ještě potvrditi důkazem, že dvěma různým bodům příslušejí různé roviny polárné. Neboť kdyby roviny polárné, příslušné dvěma různým bodům (y_k) a (y'_k), byly totožné, platila by rovnice

$$(y_2 - \varrho y'_2)\,A_{12} + (y_3 - \varrho y'_3)\,A_{13} + (y_4 - \varrho y'_4)\,A_{14} = 0$$

a obdobné tři další; protože pak souřadnice y_k nejsou úměrny souřadnicím y'_k, musil by býti nule roven determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & 0 & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & 0 & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & 0 \end{vmatrix},$$

jehož hodnota, protože je polosouměrný, jest $(A_{12}A_{34} + A_{13}A_{42} + A_{14}A_{23})^2$; to však (obecně) ovšem neplatí.

$\sum_1^6 A_k x_k = 0$ také symbolicky $(Ax) = 0$; speciální rovnice $x_k = 0$ vyjadřují šest tak zvaných základních komplexů lineárních.

b) Z rovnice polárné roviny, příslušné k danému bodu, vyplývá, že bodům řady bodové (o souřadnicích $y_k + \lambda z_k$) příslušejí roviny tvořící svazek rovin (o souřadnicích $u_k + \lambda v_k$) a obráceně; osa řady bodové a osa svazku rovinového slují *sdruženými polárami* vzhledem k danému lineárnímu komplexu.

Dvě různé poláry, sdružené vzhledem ke komplexu, se neprotínají a nejsou přímkami komplexu. Neboť dvěma různým bodům jedné z obou polár příslušejí s nimi incidentní polárné roviny, procházející druhou polárou; kdyby se poláry protínaly, byly by tyto polárné roviny totožny, což odporuje jednoznačné korespondenci mezi póly a polárnými rovinami. Každá přímka patřící do komplexu leží v polárné rovině každého svého bodu a jest proto totožna se svou sdruženou polárou.

Každá přímka, protínající dvě poláry vzhledem ke komplexu sdružené, jest přímkou komplexu; obráceně *přímka komplexu, protínající jednu ze dvou sdružených polár, protíná i druhou.* Neboť rovina položená bodem jedné poláry a druhou polárou sdruženou jest polárnou rovinou bodu toho, obsahuje tedy svazek komplexových přímek se středem v onom bodě, čímž jsou přímky komplexu bodem tím jdoucí vyčerpány.

Jestliže jedna ze dvou přímek polárných z a z', sdružených vzhledem k lineárnímu komplexu $\Sigma A_k x_k = 0$, má Kleinovy souřadnice z_k, má druhá z nich souřadnice tvaru $z'_k = z_k + \lambda A_k$; neboť každá přímka (x_k) daného komplexu, protínající z, protíná vskutku také z', protože platí $(z', x) \equiv (z + \lambda A, x) \equiv (zx) + \lambda(Ax) = 0$ pro libovolné λ (jest totiž $(zx) = 0$, poněvadž x protíná z, dále $(Ax) = 0$, poněvadž x patří do komplexu). Musí ovšem z'_k býti souřadnicemi přímky, t. j. musí platit $\Sigma(z_k + \lambda A_k)^2 \equiv (z^2) + 2\lambda(zA) + \lambda^2(A^2) = 0$; protože $(z^2) = 0$, dostáváme $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2\dfrac{(zA)}{(A^2)}$. Sdružené poláry mají tedy Kleinovy souřadnice z_k a $z'_k = z_k - 2\dfrac{(Az)}{(A^2)} A_k$.

Zvolíme-li dvě protější hrany základního čtyrstěnu soustavy za sdružené poláry vzhledem k danému komplexu, musí ostatní hrany čtyrstěnu býti přímkami komplexovými, a rovnice komplexu se tím valně zjednodušší. Jsou-li na př. přímky O_1O_2 a O_3O_4 sdruženými polárami vzhledem k danému komplexu lineárnímu, patří do komplexu hrany $(0, p_{13}, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0, p_{42}, 0)$, $(0, 0, p_{14}, 0, 0, 0)$ a $(0, 0, 0, 0, 0, p_{23})$; rovnice komplexu se tu redukuje na tvar

$$A_{12}p_{12} + A_{34}p_{34} = 0.^{3})^{4})$$

[3]) Všeobecně má lineární komplex přímkový v soustavě, jejíž základní čtyrstěn má dvě protější hrany polárami vzhledem k němu sdruženými, rovnici $A_{hi}p_{hi} + A_{jk}p_{jk} = 0$, kde $hijk$ je libovolná permutace indexů 1234.

c) Přímky protínající pevnou přímku v prostoru tvoří, jak patrno, lineární komplex; tento sluje *speciálním* komplexem lineárním, pevná přímka pak jeho *přímkou řídicí* (čili osou).

Má-li pevná přímka r souřadnice r_k, vázané relací $\omega(r_k) = 0$, musí o souřadnicích p_k přímek ji protínajících platit

$$\omega(r_k, p_k) = 0 \text{ čili } \sum_1^6 \frac{\partial \omega(r)}{\partial r_k} p_k = 0.$$

Lineární komplex $\Sigma A_k p_k = 0$ jest tedy speciální tehdy a jen tehdy, platí-li

$$\varrho A_k = \frac{\partial \omega(r)}{\partial r_k}.$$

Vypočteme-li z těchto šesti rovnic r_k a vložíme-li je do základní formy 2. stupně $\omega(r_k)$, obdržíme kvadratickou formu $\Omega(A_k)$, jež sluje *formou přidruženou* k formě $\omega(r_k)$. Vzhledem k tomu tedy, že souřadnice přímky pevné r_k jsou vázány relací $\omega(r_k) = 0$, *musí o koeficientech rovnice speciálního komplexu lineárního platit*

$$\Omega(A_k) = 0.$$

Užíváme-li souřadnic Plückerových p_k, jest k základní formě pro souřadnice řídicí přímky $p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6$ přidružena forma

$$\Omega(A_k) = A_1 A_4 + A_2 A_5 + A_3 A_6.$$

Přímkové souřadnice Plückerovy, položeny rovnými nule, určují šest speciálních komplexů lineárních $p_{hk} = 0$; jsou to komplexy s řídicími přímkami v hranách základního čtyrstěnu (průsečnicích stěn ω_h a ω_k).

---

[4]) Přímka, jež je vzhledem k danému lineárnímu komplexu sdruženou polárou přímky nevlastní, sluje *průměrem* tohoto komplexu (jest geometrickým místem pólů soustavy rovnoběžných rovin, určené onou nevlastní přímkou, všechny průměry komplexu jsou rovnoběžné); (jediný) průměr, kolmý k soustavě rovnoběžných rovin, jejichž póly spojuje, (kolmý k své nevlastní poláře) sluje *osou* lineárního komplexu. Specialisujeme-li čtyrstěn soustavy souřadnic metricky tak, že stěnu $O_1O_2O_3$ učiníme rovinou nevlastní, hrany O_4O_1, O_4O_2, O_4O_3 pak osami x, y, z navzájem kolmými, a zvolíme-li O_1O_2, O_3O_4 za sdružené poláry lineárního komplexu, z nichž O_4O_3 je tedy osou komplexu toho, má lineární komplex rovnici

$$A_{12}(xy' - x'y) + A_{34}(z - z') = 0.$$

Odtud vyplývá $\frac{xy' - x'y}{z - z'} = -\frac{A_{34}}{A_{12}}$; a protože pro osu z a přímku obecně položenou (určenou body (x, y, z), (x', y', z')), jejichž vzdálenost je v a úhel φ, platí $\frac{xy' - x'y}{z - z'} = v.\operatorname{tg}\varphi$, shledáváme, že pro přímky uvažovaného komplexu jest $v \operatorname{tg}\varphi = -\frac{A_{34}}{A_{12}} (= -k)$ a tedy konstantní (k sluje parametrem komplexu). Při šroubovém pohybu prostoru tvoří normály drah všech bodů jeho lineární komplex s osou v ose pohybu a s parametrem, jenž je poměrem rychlosti translační k rotační rychlosti pohybu toho.

V případě souřadnic Kleinových x_k jest formou, přidruženou k základní formě Σx_k^2, opět

$$\Omega(A_k) = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + A_5^2 + A_6^2.$$

Spolu je patrno, že souřadnicemi řídicí přímky komplexu jsou tu A_k.

Z geometrického významu rovnice $\Omega(A_k) = 0$ vyplývá, že přidružená forma $\Omega(A_k)$ jest projektivní *invariant* lineárního komplexu. Lineární transformací souřadnic přejde totiž komplex speciální opět v speciální, funkce $\Omega(A_k)$ se tedy až na faktor, jenž je funkcí koeficientů transformačních rovnic, reprodukuje.[5])

d) V rovnici lineárního komplexu jest obsaženo šest koeficientů způsobem homogenním a lineárním; existuje tedy ∞^5 *lineárních komplexů*, a lineární komplex jest vždy a jednoznačně *určen pěti přímkami*, obecně položenými.

Výjimku činí totiž případ, kdy pět daných přímek (a_k), (b_k), (c_k), (d_k), (e_k) vyhovuje svými souřadnicemi šesti rovnicím

$$\alpha a_k + \beta b_k + \gamma c_k + \delta d_k + \varepsilon e_k = 0 \text{ (pro } k = 1, 2, 3, 4, 5, 6);$$

tehdy jsou souřadnice páté přímky lineárně závislé na souřadnicích ostatních čtyř přímek, a přímka ta proto nepřispívá k stanovení komplexu. V případě takovém existují dvě přímky, jež protínají všech pět přímek daných (jak tomu jest u čtyř daných přímek); neboť jsou-li uvedené přímky dány v souřadnicích Kleinových, platí na základě hořejších relací pro libovolnou přímku (x_k)

$$\alpha(ax) + \beta(bx) + \gamma(cx) + \delta(dx) + \varepsilon(ex) = 0;$$

je-li (x_k) jedna (nebo druhá) ze dvou přímek, jež protínají první čtyři přímky dané, jest $(ax) = 0$, $(bx) = 0$, $(cx) = 0$, $(dx) = 0$, takže vyplývá $(ex) = 0$, t. j. přímka (x_k) protíná i přímku pátou.[6])

Pět daných přímek nemůže patrně míti společné sečny, tvoří-li prostorový pětiúhelník; jest tedy lineární komplex jednoznačně určen pěti přímkami prostorového pětiúhelníku.

Lineární komplex jest také určen dvojicí sdružených polár a jednou svou přímkou (tyto neprotínající) nebo dvěma dvojicemi sdružených polár (v poloze hyperboloidní). Neboť v prvém případě jsou-li dány sdružené poláry p a p' a přímka komplexová k, stačí dvěma rovinami α, β, položenými přímkou p, protíti p' v bodech A, B a k v bodech C, D a na p zvoliti bod E, abychom v přímkách pětiúhelníku $ACDBE$ měli pět

[5]) Přímky lineárního komplexu lze zobraziti body v prostoru (třírozměrném) a pomocí toho jej vyšetřovati; příslušné práce uvádí *K. Zindler* v Encyklopädie math. Wiss. III. 2, p. 1003 a n.

[6]) Můžeme říci, že pět přímek určuje lineární komplex jen tehdy, jestliže matice složená z jejich souřadnic obsahuje determinanty 5. stupně, jež nejsou všechny rovny nule. Rovnici komplexu pěti přímkami určeného pak dostaneme, položíme-li nule rovným determinant 6. stupně, jehož pět řádků tvoří souřadnice přímek daných a jeden řádek proměnné souřadnice přímkové.

přímek komplexu, jej určujících. V druhém případě jsou-li dány sdružené poláry p, p' a q, q', nalezneme ke každé rovině, protínající přímky p, p' v bodech X, X' a přímky q, q' v bodech Y, Y', příslušný pól v průsečíku přímek XX' a YY'.

Jestliže z pěti daných přímek tři procházejí týmž bodem nebo leží v téže rovině, jest lineární komplex pěti takovými přímkami určený speciálním. Neboť jsou-li dány přímky a, b, c, d, e, z nichž první tři mají uvedenou vlastnost, platí pro každou přímku (x_k), jdoucí průsečíkem daných tří nebo ležící v rovině jimi položené

$$x_k = a_k + \lambda b_k + \mu c_k;$$

a protože platí $\Sigma A_k a_k = 0$, $\Sigma A_k b_k = 0$, $\Sigma A_k c_k = 0$, platí také $\Sigma A_k x_k = 0$, t. j. všechny přímky trsu s vrcholem abc nebo všechny přímky pole v rovině abc patří do komplexu. Tento má řídicí přímku v přímce jdoucí bodem abc nebo ležící v rovině abc a protínající přímky d, e.[7])[8])[9])

---

[7]) Mimo způsoby nahoře uvedené jest možno lineární komplex přímek určiti nebo vytvořiti ještě četnými jinými: lineární komplex vyplývá, jak bylo dříve dotčeno, z nulové korelace jako soustava přímek při ní invariantních; jest tedy také určen prostorovou čarou kubickou k nulové korelaci vedoucí; jest vytvořen přímkami, jež protínají dvojice sdružených přímek dvou projektivních svazků s různými středy i různými rovinami a se společným paprskem samodružným (vytvoření *Sylvestrovo*); lze jej dále vytvořiti přímkami, které protínají dvojice přímek, sdružených v involuční projektivnosti dvou soumístných zborcených řad kvadratických (vytv. *Chaslesovo*); nebo přímkami, jež jsou dvěma projektivními svazky rovin proťaty v bodových řadách involučně projektivních (nebo duálně); nebo přímkami, jež spojují každý bod prostoru s body průsečnice dvou rovin, odpovídajících jemu v neinvoluční korelaci a v korelaci inversní. Rozmanité způsoby stanovení a vytvoření lineárního komplexu (také metrické, z mechaniky a j.) sestavil *K. Zindler* v Encyklopädie math. Wiss. III. 2, p. 1016 a n.

[8]) Lineární komplex přímek (obecný) jest invariantní při kolineacích, jež v množství ∞^{10} tvoří spojitou grupu, a při témže počtu korelací; uvedené množství kolineací i korelací plyne na př. odtud, že každá kolineace resp. korelace jest určena pěti dvojicemi sdružených bodů resp. bodu a roviny, lineární komplex pak obsahuje ∞^{10} pětiúhelníků. Jest invariantní (spolu celý svazek lin. komplexů) při kolineacích typu I., jež převádějí plochu kvadratickou v ni samu a jejichž samodružný čtyrstěn má čtyři hrany tvořící prostorový čtyrúhelník v přímkách komplexu, zbývající pak dvě protější hrany sdruženými polárami jeho; jest dále invariantní při některých kolineacích typů II., III. a V. Jest invariantní při speciálních kolineacích osových (typu VI.), jejichž osy jsou sdruženými polárami vzhledem ke komplexu; kolineací tohoto typu, jež nemění lineárního komplexu, jest ∞^7, netvoří však grupu. Jest invariantní při kolineacích dvojosých (typu X.), jejichž osy jsou přímkami komplexu (těchto je rovněž ∞^7 a netvoří grupu), a při ∞^4 involučních kolineací dvojosých s osami ve sdružených polárách komplexu; jest dále invariantní při kolineacích typu XI. Konečně jest invariantní při elacích (kolineacích typu XIII.) v počtu ∞^4, jejichž samodružný střed a rovina sobě odpovídají v nulové korelaci ke komplexu příslušné, nikoli však při (obecné) homologii. Z korelací jest vytknouti ∞^6 korelací polárných a ∞^4 nulových, jež lineárního komplexu nemění; ony příslušejí ke kvadratickým zborceným řadám v komplexu obsaženým, tyto

133. Soustavy lineárních komplexů. *a*) Vezměme v úvahu dva lineární komplexy $\Sigma A_k x_k = 0$ a $\Sigma B_k x_k = 0$, jež krátce označíme A a B. Jednomocná soustava komplexů, dvěma danými (různými) komplexy určená, o rovnici

$$\Sigma(A_k + \lambda B_k)\, x_k = 0$$

sluje *svazkem lineárních komplexů*; hodnotami parametru λ jsou stanoveny jednotlivé komplexy svazku.

Lineární komplex ve svazku obsažený je speciální, platí-li o konstantě λ

$$\Omega(A_k + \lambda B_k) = 0$$

čili při souřadnicích Kleinových

$$\Omega(A) + 2\lambda\Omega(A, B) + \lambda^2\Omega(B) = 0,$$

kde $\Omega(A) = \Sigma A_k^2$, $\Omega(B) = \Sigma B_k^2$ a $\Omega(A, B) = \Sigma A_k B_k$. Obsahuje tedy svazek lineárních komplexů (obecně) *dva komplexy speciální*. Osy těchto speciálních komplexů d_1 a d_2 jsou přímky o souřadnicích $A_k + \lambda_{1,2} B_k$, kde λ_1 a λ_2 jsou kořeny uvedené právě rovnice kvadratické.

Osy d_1 a d_2 jsou sdruženými polárami vzhledem ke všem komplexům svazku. Neboť souřadnice přímky (x_k) obsažené v komplexu $\Sigma(A_k +$

---

jsou produktem nulové korelace komplexu s involučními kolineacemi dvojosými, prve uvedenými. Speciální komplex lineární jest invariantní při spojité grupě ∞^{11} kolineací. Kolineace a korelace s invariantním lineárním komplexem přímek vyšetřovali *E. Caporali* a *P. del Pezzo*, Introduzione alla teoria dello spazio rigato, Memorie di geometria di E. Caporali, 1888; *A. Clebsch* a *F. Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie II, 1891, p. 389 a n.; *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie I, 1892, p. 307 a n.; kontinuitní grupy takových kolineací určovali *S. Lie*, Theorie der Transformationsgruppen II, 1890; *E. P. Knothe*, Bestimmung aller Untergruppen der projectiven Gruppe des linearen Complexes, Diss. Leipzig 1892 (také Archiv Math. Naturv. 15, 1892); *J. Vojtěch*, Typy a kontinuitní grupy kolineací v S_3, Časopis math. fys. 38 (1909).

[9]) Prostorová čára, jejíž všechny tečny jsou přímkami lineárního komplexu, sluje čarou komplexu; má stupeň a třídu tytéž. Danému lin. komplexu patří ∞^7 prostorových čar kubických; o nich viz zejména *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage II; *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie I; *F. Aschieri*, Sulla costruzione delle cubiche gobbe direttrici di una data polarita nulla, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 35 (1902); *L. Schmidt*, Über die zu einem gegebenen linearen Komplex gehörigen kubischen Raumkurven, Diss. Strassburg 1913; *G. Tarnutzer*, Über die kubischen Nullkurven des linearen Komplexes, Diss. Zürich 1913. O prostorových čarách (racionálních) n-tého stupně v lineárním komplexu viz *P. Appell*, Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire, Nouv. Annales math. (3) 11 (1892); *V. Snyder*, Twisted curves whose tangents belong to a linear complex, Amer. Journal math. 29 (1907); spec. o čarách 4. stupně *Ch. Michel*, Sur une classe de quartiques unicursales, Revue math. spéc. 19 (1908). Přímková řada zborcená, jejíž přímky patří lineárnímu komplexu, sluje řadou komplexu. Danému lin. komplexu patří ∞^6 zborcených řad kvadratických. O zborcených řadách lineárního komplexu viz na př. *A. Voss*, Zur Theorie der windschiefen Flächen, Math. Annalen 8 (1875), a Über die Hauptangentenkurven der windschiefen Fläche, tamtéž 12 (1877).

$+ \lambda B_k) x_k = 0$, jež protíná d_1, t. j. patří do speciálního komplexu $\Sigma(A_k + + \lambda_1 B_k)\, x_k = 0$, vyhovují rovnicím $\Sigma A_k x_k = 0$ a $\Sigma B_k x_k = 0$; vyhovují tedy také rovnici $\Sigma(A_k + \lambda_2 B_k)\, x_k = 0$ čili patří do speciálního komplexu s touto rovnicí a protínají přímku d_2.

Všechny přímky, společné oběma speciálním komplexům daného svazku lineárních komplexů, a jenom takové přímky patří oběma komplexům základním A i B svazku toho a proto také všem komplexům svazku vůbec. Tyto přímky, protínající osy d_1 a d_2 obou speciálních komplexů svazku, tvoří *kongruenci přímek* o rovnicích $\Sigma A_k x_k = 0$, $\Sigma B_k x_k = 0$, jež jest *1. stupně a 1. třídy*. Neboť každým bodem prostoru prochází jedna přímka této kongruence (průsečnice polárných rovin bodu toho v obou základních komplexech svazku) a v každé rovině leží jedna přímka kongruence (spojnice pólů roviny té v obou dotčených komplexech). Tato kongruence nazývá se stručně *lineární*, a přímky d_1, d_2 slují jejími *přímkami řídicími* čili *osami*.[1])

Jestliže rovnice nahoře uvedená

$$\Omega(A) + 2\lambda\Omega(A, B) + \lambda^2\Omega(B) = 0$$

má speciálně dva kořeny splývající $\lambda_1 = \lambda_2$, což nastane v případě, že platí

$$\Omega(A) \,.\, \Omega(B) - \Omega^2(A, B) = 0,$$

splývají osy obou speciálních komplexů uvedených v jednu; lineární kongruence všem komplexům svazku společná sluje *speciální*, její osa pak má souřadnice $A_k + \lambda_1 B_k$. Osa speciální kongruence takového svazku komplexů jest přímkou všech komplexů ve svazku obsažených; neboť $\Sigma(A_k + \lambda B_k)\,(A_k + \lambda_1 B_k) \equiv \Omega(A) + \lambda_1\Omega(A, B) + \lambda[\Omega(A, B) + + \lambda_1\Omega(B)] = 0$, protože z předpokládané rovnice a relace plyne $\lambda_1 = = -\Omega(A)/\Omega(A, B) = -\Omega(A, B)/\Omega(B)$.

Jestliže konečně platí současně $\Omega(A) = 0$, $\Omega(B) = 0$ a $\Omega(A, B) = 0$, obsahuje svazek komplexů nekonečně mnoho komplexů speciálních, jsa složen výhradně z nich. Takový svazek komplexů lineárních se objeví, jestliže osy obou speciálních komplexů obecného případu se protínají; osy všech (speciálních) komplexů svazku tvoří tu jednomocný svazek přímek.[2])

Čtyři komplexy svazku $\Sigma(A_k + \lambda B_k)\, x_k = 0$, určené hodnotami λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 parametru λ, tvoří čtveřinu dvojpoměru $\mathrm{Dp}\,(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)$. Tento je konstantním dvojpoměrem čtyř rovin, polárných k libovolnému bodu ve čtyřech komplexech daných (jež se protínají v přímce společné

[1]) Čtyřmi danými přímkami, jež nepatří téže kvadratické řadě zborcené, jest určen svazek lineárních komplexů a tedy lineární kongruence všem komplexům tohoto svazku společná; jejími osami jsou dvě přímky protínající čtyři přímky dané.

[2]) Z metrického hlediska budiž poznamenáno, že osy lineárních komplexů obecného svazku tvoří (až na některé výjimky) zborcenou řadu kubickou, z jejíchž přímek řídicích jednoduchá je nevlastní a dvojná k ní kolmá (sluje cylindroid).

kongruence). Zvolíme-li speciálně za první dva komplexy takové čtveřiny základní komplexy A a B, jest dvojpoměrem komplexů A, B, $A + \lambda B$, $A + \mu B$ číslo λ/μ.

b) Protože $\Omega(A)$ a $\Omega(B)$ jsou invarianty komplexů $\Sigma A_k x_k = 0$ resp. $\Sigma B_k x_k = 0$, jest také $\Omega(A + \lambda B)$ invariantem komplexu $\Sigma(A_k + \lambda B_k)\, x_k = 0$, tudíž také $\Omega(A, B)$ (*simultánním*) *invariantem* dvojice komplexů A a B.

Platí-li $\Omega(A, B) = 0$, *odpovídají sobě svazek rovin, polárných k bodům libovolné přímky oběma komplexům* A *i* B *společné vzhledem k jednomu z komplexů těch, a svazek rovin k těmže bodům polárných vzhledem k druhému komplexu* (se společnou osou v uvedené přímce) *projektivností involuční.*

K důkazu zvolme dvě protější hrany základního čtyrstěnu, třebas O_1O_2 a O_3O_4, za společnou dvojici sdružených polár vzhledem k oběma komplexům; rovnice komplexů mají tu jednoduchý tvar

$$A_{12}p_{12} + A_{34}p_{34} = 0,$$
$$B_{12}p_{12} + B_{34}p_{34} = 0$$

a invariant jejich dvojice má tvar

$$A_{12}B_{34} + A_{34}B_{12}.$$

Rovina polárná k bodu (y_k) vzhledem k prvnímu komplexu má souřadnice $A_{12}y_2$, $-A_{12}y_1$, $A_{34}y_4$, $-A_{34}y_3$; k témuž bodu přísluší vzhledem k druhému komplexu rovina polárná o souřadnicích $B_{12}y_2$, $-B_{12}y_1$, $B_{34}y_4$, $-B_{34}y_3$. Protože však ze suposice $A_{12}B_{34} + A_{34}B_{12} = 0$ vyplývá úměra $B_{12} : B_{34} = A_{12} : -A_{34}$, má druhá rovina souřadnice úměrné výrazům $A_{12}y_2$, $-A_{12}y_1$, $-A_{34}y_4$, $A_{34}y_3$; odtud vidíme, že roviny obou svazků polárných rovin sobě odpovídají v involuční projektivnosti.

Duálně existuje involuční projektivnost mezi body na přímce společné komplexům A a B, jež jsou póly rovin přímkou tou procházejících jednak vzhledem k A, jednak vzhledem k B.

Samodružné prvky této rovinové resp. bodové involuce jsou roviny, jdoucí osou svazků rovin a jednou nebo druhou z obou společných polár sdružených, resp. průsečíky osy řad bodových a jedné nebo druhé poláry sdružené.

Takové dva komplexy lineární, o kterých platí $\Omega(A, B) = 0$, slují *involučními* (jsou v involuci).

Patří-li ze dvou polár, sdružených vzhledem k jednomu z dvojice involučních komplexů, jedna druhému komplexu dvojice té, patří mu i druhá. Neboť pro přímky o souřadnicích Kleinových (x_k) a (x'_k), polárné vzhledem ke komplexu $\Sigma A_k x_k = 0$, z nichž (x_k) patří do komplexu $\Sigma B_k x_k = 0$, platí $\Sigma B_k x_k = 0$, $x'_k = x_k + \lambda A_k$; a protože pro involuční dvojici komplexů A a B jest $\Sigma A_k B_k = 0$, platí také $\Sigma B_k x'_k = 0$. Obráceně komplex obsahující dvě přímky, jež jsou sdruženými polárami vzhledem k danému komplexu, jest s tímto komplexem v involuci.

Neboť z rovnic $\Sigma B_k x_k = 0$, $\Sigma B_k x'_k = 0$ a $x'_k = x_k + \lambda A_k$ vyplývá $\Sigma A_k B_k = 0$.[3])

c) *Tři lineární komplexy, po dvou involuční, třídí prvky prostoru ve skupiny po čtyřech bodech a čtyřech rovinách tak, že každý vrchol čtyrstěnu jimi tvořeného je pólem tří stěn jím procházejících a každá stěna polárnou rovinou tří vrcholů v ní ležících.*

Neboť dejme tomu, že bodem P procházejí roviny α, β, γ, polárné k němu vzhledem ke komplexu A, resp. B, resp. C (z nichž A a B, B a C, C a A jsou v involuci); na přímce $\alpha\beta$, jež patří do komplexů A a B, ať bodu P odpovídá v involuční projektivnosti, oběma těmito komplexy tam určené, bod P_3, obdobně na přímce $\beta\gamma$, patřící do komplexů B a C, ať bodu P odpovídá P_1, a na přímce $\gamma\alpha$, patřící do komplexů C a A, ať odpovídá bodu P bod P_2.

Rovina $\gamma \equiv PP_1P_2$ jest polárnou k bodu P v komplexu C (podle suposice) a k bodu P_1 v komplexu B (protože B, C jsou v involuci a P, P_1 sobě odpovídají); proto P_1P_2 je přímkou komplexu B (jdouc pólem P_1 v jeho rovině polárné). Dále rovina $\alpha \equiv PP_3P_2$ jest polárnou k bodu P v komplexu A a k bodu P_3 v komplexu B; proto P_3P_2 je přímkou komplexu B. Z obého vyplývá, že rovina $P_1P_2P_3$ jest rovinou polárnou k P_2 v komplexu B.

Obdobně zjistíme, že rovina $P_1P_2P_3$ jest polárnou k bodu P_1 v komplexu A a k bodu P_3 v komplexu C. Dále zjistíme, že PP_1P_2 jest polárnou rovinou ještě k bodu P_2 v komplexu A (protože je polárnou k P v komplexu C, a protože P, P_2 sobě odpovídají v involuční projektivnosti, involučními komplexy A, C indukované), PP_3P_2 jest polárnou rovinou ještě k bodu P_2 v komplexu C; konečně $\beta \equiv PP_1P_3$ jest polárnou rovinou k bodu P v komplexu B, k bodu P_1 v komplexu C a k bodu P_3 v komplexu A.

Přímkové souřadnice Kleinovy x_k, položeny rovnými nule, definují šest komplexů lineárních, jež nejsou speciální, protože tu přidružená forma Ω není rovna nule (rovná se 1); tyto komplexy slují, jak už uvedeno, *základními komplexy Kleinovy soustavy* souřadnic pro přímku. *Každá dvojice z těchto šesti základních komplexů jest involuční*; neboť je pro ně splněna podmínka $\Omega(A, B) = 0$.

Póly, jež k libovolné rovině příslušejí vzhledem k šesti základním komplexům, leží na kuželosečce. K důkazu toho označme přímku, spojující póly, příslušné k dané rovině v základním komplexu h-tém a k-tém, stručně r_{hk}. Přímka r_{13} má souřadnice $0 : a_2 : 0 : a_4 : a_5 : a_6$, přímka r_{14}

[3]) O dvou až šesti lineárních komplexech v involuci sdružených pojednává na př. *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie I, p. 235 a n. Tamtéž o grupě 32 kolineací a korelací, jež přísluší ke skupině šesti lin. komplexů v involuci; o této (Kummerově) grupě lin. transformací a o Kummerově konfiguraci 16_6 viz dále *Th. Reye*, Über die Kummer'sche Configuration von sechszehn Punkten und sechszehn Ebenen, Journal r. a. Math. 86 (1879); *V. Martinetti*, Alcune considerazioni sulla configurazione di Kummer, Rendiconti Circolo mat. Palermo 16 (1902).

souřadnice $0 : b_2 : b_3 : 0 : b_5 : b_6$; za souřadnice přímky r_{15} můžeme pak zvoliti $a_p + \lambda b_p$, za souřadnice přímky r_{16} obdobně $a_p + \mu b_p$; a protože r_{15} patří do 5., r_{16} do 6. komplexu, platí $a_5 + \lambda b_5 = 0$ čili $\lambda = -a_5/b_5$, resp. $a_6 + \mu b_6 = 0$ čili $\mu = -a_6/b_6$. Dvojpoměr přímek r_{13}, r_{14}, r_{15}, r_{16} jest $\lambda/\mu = a_5 b_6/a_6 b_5$. Obdobně nalezneme, že přímky r_{23} o souřadnicích a'_p (při čemž $a'_2 = 0, a'_3 = 0$), r_{24} o souřadnicích b'_p (z nichž $b'_2 = 0, b'_4 = 0$), r_{25} o souřadnicích $a'_p + \lambda' b'_p$ a r_{26} o souřadnicích $a'_p + \mu' b'_p$ tvoří čtveřinu s dvojpoměrem $\lambda'/\mu' = a'_5 b'_6/a'_6 b'_5$. Protože však přímky r_{13} a r_{24} se protínají, platí $0 \,.\, b'_1 + a_2 \,.\, 0 + 0 \,.\, b'_3 + a_4 \,.\, 0 + a_5 \,.\, b'_5 + a_6 \,.\, b'_6 = 0$, tedy $b'_6/b'_5 = -a_5/a_6$; obdobně protože r_{14} a r_{23} se protínají, jest $b_5 a'_5 + b_6 a'_6 = 0$, tedy $a'_5/a'_6 = -b_6/b_5$. Znásobením těchto rovnic dostaneme $a'_5 b'_6/a'_6 b'_5 = a_5 b_6/a_6 b_5$; z rovnosti dvojpoměrů pak plyne věta uvedená.

d) Tři lineární komplexy určují *dvojmocný svazek (lineární systém) lineárních komplexů* (nepatří-li ovšem třetí do jednomocného svazku, určeného prvním a druhým); mají-li dané komplexy A, B a C rovnice $\Sigma A_k x_k = 0$, $\Sigma B_k x_k = 0$, $\Sigma C_k x_k = 0$, jest rovnicí dvojmocného lineárního systému jimi definovaného

$$\Sigma (A_k + \lambda B_k + \mu C_k)\, x_k = 0.$$

Přímky, společné třem základním komplexům a tedy všem komplexům dvojmocného svazku, tvoří *zborcenou řadu druhého stupně*; neboť libovolnou přímku (p_k) protínají ty přímky uvažované soustavy, jež vedle hořejších tří rovnic splňují svými souřadnicemi (Kleinovými) rovnice $\Sigma p_k x_k = 0$ a $\Sigma x_k^2 = 0$, tedy dvě přímky.

Dvojmocný systém obsahuje nekonečně mnoho speciálních komplexů, totiž ty, jejichž parametry λ, μ vyhovují (při souřadnicích Kleinových) rovnici

$$\Omega(A + \lambda B + \mu C) \equiv \Omega(A) + 2\lambda\Omega(A, B) + \lambda^2\Omega(B) + 2\mu\Omega(A, C) + \\ + 2\lambda\mu\Omega(B, C) + \mu^2\Omega(C) = 0.$$

Osy těchto speciálních komplexů o souřadnicích $A_k + \lambda B_k + \mu C_k$ *tvoří* rovněž *kvadratickou řadu*; neboť libovolnou přímku (p_k) protínají dvě z nich, jejichž konstanty λ, μ (určující souřadnice jejich) vyhovují kvadratické rovnici právě uvedené a lineární rovnici $\Sigma p_k(A_k + \lambda B_k + \\ + \mu C_k) = 0$.

Každá přímka kvadratické řady, společné komplexům dvojmocného svazku, protíná každou přímku kvadratické řady, složené z os speciálních komplexů systému toho (protože jest obsažena ve všech a tedy i v speciálních komplexech systému); obě tyto řady leží tedy na přímkové ploše kvadratické (tvoříce obě její soustavy). Jako mohou tři speciální komplexy daného dvojmocného systému s osami ve třech přímkách (p_k), (q_k) a (r_k) druhé řady uvedené místo základních komplexů A, B a C sloužiti ke stanovení systému daného, tak také tři speciální komplexy s osami ve třech přímkách (a_k), (b_k) a (c_k) první řady, komplexům dané soustavy společné, určují *druhou dvojmocnou soustavu komplexů lineár-*

ních; komplexům této soustavy jsou společny přímky řady druhé. *Každý komplex jednoho z obou těchto systémů jest involuční ke každému komplexu systému druhého*; neboť platí $\Sigma(p_k + \lambda q_k + \mu r_k)(a_k + \lambda' b_k + \mu' c_k) = 0$, ježto přímky jedné řady protínají přímky řady druhé. Obráceně každá dvojice dvojmocných systémů s komplexy navzájem involučními má základem dvě přímkové řady zborcené plochy kvadratické.

e) Čtyři lineární komplexy (v obecné poloze) stanoví *trojmocný svazek* komplexů lineárních. Jsou-li základními komplexy $\Sigma A_k x_k = 0$, $\Sigma B_k x_k = 0$, $\Sigma C_k x_k = 0$ a $\Sigma D_k x_k = 0$, má systém jimi určený rovnici

$$\Sigma(A_k + \lambda B_k + \mu C_k + \nu D_k)\, x_k = 0.$$

Všem komplexům trojmocného svazku jsou společny dvě přímky (p_k) a (q_k), jejichž (Kleinovy) souřadnice vyhovují čtyřem lineárním rovnicím komplexů základních a rovnici $\Sigma x_k^2 = 0$. Speciální komplexy trojmocného systému komplexů tvoří systém dvojmocný, jejich osy tvoří lineární kongruenci přímek o souřadnicích $A_k + \lambda B_k + \mu C_k + \nu D_k$, kde konstanty λ, μ, ν jsou vázány relací $\Omega(A + \lambda B + \mu C + \nu D) = 0$.

Trojmocný systém komplexů $\Sigma(A_k + \lambda B_k + \mu C_k + \nu D_k)\, x_k = 0$ a jednomocný systém komplexů $\Sigma(p_k + \lambda' q_k)\, x_k = 0$ jsou tak sdruženy, že přímky společné jednomu z nich jsou osami speciálních komplexů druhého a osy speciálních komplexů jednoho protínají osy speciálních komplexů druhého systému; každý komplex jedné soustavy jest involuční s každým komplexem soustavy druhé.[4])[5])[6])

---

[4]) Všeobecně jsou-li $\Sigma A_k x_k = 0$, $\Sigma B_k x_k = 0, \ldots, \Sigma N_k x_k = 0$ rovnice n lineárních komplexů nezávislých (t. j. takových, že součinitelé jejich rovnic tvoří matici, jejíž všechny determinanty n-tého stupně nejsou rovny nule), definuje rovnice

$$\Sigma(\lambda_1 A_k + \lambda_2 B_k + \ldots + \lambda_n N_k)\, x_k = 0$$

s parametry $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (pro $n = 2$ až 6) (*n—1)-mocný lineární systém (svazek) lineárních komplexů*. Jednotlivý komplex v systému obsažený je určen skupinou hodnot parametrů λ_1 až λ_n (jež lze pokládati za homogenní souřadnice komplexu toho v uvažované soustavě); stejně jako komplexy původními stanoven je tento systém n libovolnými svými komplexy nezávislými.

Pro $n = 2, 3, 4$ dostaneme soustavy lineárních komplexů nahoře uvedené. Pro $n = 5$ obdržíme systém čtyrmocný, jenž obecně nemá společných prvků a jehož speciální komplexy tvoří systém trojmocný s osami, vyplňujícími lineární komplex; čtyrmocný systém lineárních komplexů lze definovati jako soustavu komplexů, involučních ke komplexu danému. Pro $n = 6$ dostáváme soubor všech lineárních komplexů prostoru.

[5]) O lineárních soustavách lineárních komplexů přímek pojednávají soustavně zejména *R. de Paolis*, Fondamenti di una teoria dello spazio generato dai complessi lineari, Memorie Accad. Lincei Roma (4) 1 (1885); *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie I (1892), p. 135 a n.; *G. Koenigs*, La géométrie réglée et ses applications (1895), p. 25 a n.; *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage II (5. vyd. 1923), p. 134 a n.; také (o některých) *D. Chelini*, Sulla nuova geometria dei complessi. Me-

134. Kvadratický komplex. *a*) Rovnice druhého stupně mezi proměnnými souřadnicemi přímkovými x_k definuje *komplex druhého stupně*

$$f(x_k) \equiv \Sigma a_{hk} x_h x_k = 0.$$

Libovolným bodem jdoucí přímky tohoto komplexu tvoří kuželovou plochu 2. stupně, v libovolné rovině ležící přímky jeho vytvořují čáru 2. třídy; neboť x_k jsou lineární funkce souřadnic bodu pevného i souřadnic proměnného bodu, rovněž lineární funkce souřadnic pevné roviny i souřadnic roviny proměnné. V libovolném svazku paprskovém má kvadratický komplex dvě přímky; v nich totiž protíná rovina svazku komplexový kužel s vrcholem ve středu svazku a je lze vésti ze středu svazku ke komplexové čáře ležící v rovině svazku. V libovolné zborcené řadě kvadratické má komplex druhého stupně čtyři přímky; neboť řada kvadratická určená lineárními komplexy $\Sigma a_k x_k = 0$, $\Sigma b_k x_k = 0$, $\Sigma c_k x_k = 0$, má s daným komplexem 2. stupně $f(x_k) = 0$ společny přímky, určené uvedenými čtyřmi rovnicemi a rovnicí 2. stupně $\omega(x_k) = 0$.

Obecná rovnice kvadratického komplexu (forma druhého stupně o šesti proměnných) obsahuje 21 konstant; protože však $f(x_k) = 0$ je funkcí homogenní a protože přistupuje základní kvadratická relace souřadnic přímkových $\omega(x_k) = 0$, pomocí které lze jednu konstantu odstraniti, zbývá *19 libovolných konstant.*[1])[2])

---

marie Accad. Bologna (3) 1 (1871); *P. H. Schoute*, Het lineare complex en de congruentie, Verslagen Akad. Amsterdam (3) 5 (1888); *St. Jolles*, Neue Beweise einiger Sätze aus der Theorie der linearen Komplexe, Journal r. a. Math. 130 (1905). Také *V. Simandl*, O zobecněném cylindroidu, Rozpravy Čes. akad. 33 (1914), a Příspěvek ku teorii lineárních systémů lineárních komplexů, tamtéž.

[6]) Dvě n-mocné lineární soustavy lineárních komplexů (nebo větší počet takových soustav) lze uvésti v korespondenci projektivní resp. kolineární; přímkami, společnými vždy dvěma (několika) tak sdruženým komplexům těchto systémů, lze pak vytvořiti útvary nové. Viz na př. *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie I, p. 211 a n.

[1]) Protože totiž o souřadnicích přímky platí kvadratická relace $\omega(x_k) = 0$, jest možno rovnici komplexu 2. stupně $f(x_k) = 0$ psáti také ve tvaru $f(x_k) + \lambda\omega(x_k) = 0$, kde λ je libovolná konstanta.

[2]) Obecnou teorii kvadratických komplexů přímkových po úvahách, jež o zvláštních případech jejich podali *G. Battaglini* (1866) a *Th. Reye* (1868), založili *J. Plücker*, Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement (1868—69), a *F. Klein*, Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Coordinaten auf eine canonische Form, Diss. Bonn 1868 (také Math. Annalen 23, 1884), jakož i Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades, Math. Annalen 2 (1870). Další významné práce o těchto komplexech jsou: *A. Voss*, Über Complexe und Congruenzen, Math. Annalen 9 (1875); *F. Schur*, Geometrische Untersuchungen über Strahlencomplexe ersten und zweiten Grades, Math. Annalen 15 (1879); *E. Bertini*, Sui complessi di secondo grado, Giornale mat. 17 (1879); *W. Stahl*, Zur synthetischen Construction der Complexe zweiten Grades, Journal r. a. Math. 93 (1882); *Th. Reye*, Über lineare und quadratische Strahlencomplexe und Complexengewebe, Journal r. a. Math. 95 (1883); *W. Stahl*,

Lineární komplexy svazku

$$\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + \lambda \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) y_k = 0$$

slují *polárnými komplexy lineárními*, jež příslušejí k přímce (x_k) libovolně položené vzhledem k danému komplexu kvadratickému $f(x_k) = 0$. Je-li spec. (x_k) přímkou komplexu daného, slují polárné komplexy *tečnými lineárními komplexy* daného komplexu kvadratického; neboť každý z nich obsahuje vedle přímky (x_k) komplexu daného také přímku k ní v komplexu tom nekonečně blízkou $(x_k + dx_k)$, protože podle věty o homogenních funkcích z $f(x_k) = 0$, $\omega(x_k) = 0$ plyne $\sum \frac{\partial f}{\partial x_k} x_k = 0$, $\sum \frac{\partial \omega}{\partial x_k} x_k = 0$, odtud pak a z $f(x_k + dx_k) = 0$, $\omega(x_k + dx_k) = 0$ plyne $\sum \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k = 0$, $\sum \frac{\partial \omega}{\partial x_k} dx_k = 0$. Při souřadnicích Kleinových má svazek tečných komplexů lineárních rovnici

$$\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + \lambda x_k \right) y_k = 0.^{3})$$

Každý z tečných komplexů lineárních kvadratického komplexu pro přímku jeho (x_k) určuje na této přímce projektivní příbuznost mezi řadou bodovou $[X]$ a svazkem rovin $[\xi]$, jež tvoří vždy střed a rovinu svazku přímek v lineárním komplexu tom; bod X je na (x_k) dotyčným bodem komplexové kuželosečky, ležící v korespondující rovině ξ, tato rovina ξ pak podél (x_k) tečnou rovinou komplexového kužele, majícího vrchol v bodě X.[4])[5])

Zur Polarentheorie der Complexe zweiten Grades, Journal r. a. Math. 94 (1883); *A. Weiler*, Einfache Erzeugung einiger Complexe zweiten Grades, tamtéž 95 (1883); *C. Segre*, Note sur les complexes quadratiques, dont la surface singulière est une surface du 2e degré double, Math. Annalen 23 (1884); *Th. Reye*, Über die Singularitätenflächen quadratischer Strahlencomplexe und ihre Haupttangentencurven, Journal r. a. Math. 97 (1884); *A. Weiler*, Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades aus linearen Congruenzen, Zeitschrift Math. Phys. 29 (1884); *Th. Reye*, Neue Eigenschaften des Strahlencomplexes zweiten Grades, Math. Annalen 49 (1897) nebo Verhandlungen 1. Math. Congr. 1897. Soustavně o nich pojednávají synthetický (velmi obšírně) *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie III, 1896; analyticky *C. M. Jessop*, A treatise on the line complex, 1903.

[3]) Odtud zjistíme (užívajíce za λ homogenních parametrů λ_1, λ_2), že dva speciální komplexy lineární, obsažené ve svazku tečných komplexů komplexu daného pro určitou přímku jeho (x_k), mají (obecně) své přímky řídicí v této přímce.

[4]) U kvadratického komplexu existuje šest lineárních komplexů po dvou involučních té charakteristické vlastnosti, že sdružené poláry každé přímky kvadratického komplexu vzhledem k nim jsou v tomto obsaženy (při nulových korelacích, jež k lineárním komplexům těm příslušejí, jest

b) Bod, který je vrcholem komplexového kužele 2. stupně, rozpadajícího se ve dvě roviny, sluje *singulárním bodem* v komplexu kvadratickém; přímky komplexu tvoří zde dva (jednomocné) svazky v uvedených rovinách se společným středem v bodě tom. Duálně rovina, jež obsahuje komplexovou čáru 2. třídy rozpadající se ve dva body, sluje *singulární rovinou* kvadratického komplexu; přímky jeho tvoří v této rovině dva (jednomocné) svazky se středy v uvedených bodech. Průsečnice oněch dvou rovin zvrhlého kužele komplexového, jakož i spojnice těchto dvou bodů zvrhlé čáry komplexové slují *singulárními přímkami* komplexu.

Jestliže obě roviny (oba svazky), v něž se kvadratický kužel komplexu v singulárním bodě rozpadá, splývají, nazýváme bod ten *dvojnásobným bodem* v komplexu; obdobně nazývá se *dvojnásobnou rovinou* komplexu singulární rovina jeho, jestliže splývají oba body (oba svazky), skládající kvadratickou čáru komplexu.

Na libovolné přímce kvadratického komplexu *leží čtyři body singulární.* Neboť na přímce (x_k) komplexu $f(x_k) = 0$ je bod její bodem singulárním, jestliže všechny přímky svazku se středem v bodě tom, určeného přímkami (x_k) a (a_k), kde (a_k) je přímka protínající přímku (x_k), jsou v komplexu obsaženy, t. j. platí-li $f(x_k + \lambda a_k) = 0$ pro každé λ; odtud plynou vedle $f(x_k) = 0$ rovnice

$$\sum a_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0, \quad f(a_k) = 0, \quad \sum a_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} = 0.$$

Přímky (a_k) uvedené vlastnosti, jež protínají zvolenou přímku (b_k), musí vyhověti ještě rovnici

$$\sum a_k \frac{\partial \omega}{\partial b_k} = 0.$$

Čtyři rovnice pro (a_k), takto získané, dávají přímky společné danému komplexu 2. stupně a přímkové řadě 2. stupně (stanovené třemi rovnicemi zbývajícími); tedy čtyři přímky, určující na (x_k) čtyři body singulární.

Protože každá ze čtyř rovin, jdoucích uvažovanou přímkou (x_k) a jednou z nalezených přímek (a_k), obsahuje svazek přímek komplexových, musí obsahovati ještě druhý svazek takový, t. j. komplexová kuželosečka se tu rozpadá ve dva body, takže každá tato rovina je singulární: *libovolnou přímkou* kvadratického komplexu *procházejí čtyři singulární roviny.*[6])

---

tedy kvadratický komplex invariantní); slují *základní* (*lineární*) *komplexy* komplexu daného. Ke komplexu s rovnicí $\Sigma\lambda_h x_h^2 = 0$ jsou základními komplexy $x_k = 0$ ($k = 1$ až 6).

[5]) Komplexové čáry 2. třídy, ležící v rovinách svazku s osou v přímce p vytvořují (a duálně komplexové kužele 2. stupně s vrcholy na přímce p obalují) soběduální plochu 4. stupně (s dvojnou přímkou p), jež sluje *komplexovou plochou*, v kvadratickém komplexu k přímce p příslušnou.

c) Singulární body kvadratického komplexu vytvořují plochu σ_1, která, majíc na libovolné přímce čtyři své body, je 4. stupně; duálně singulární roviny komplexu toho vytvořují plochu σ_2, která je 4. třídy, protože k ní jdou libovolnou přímkou čtyři roviny tečné. Plochy σ_1 a σ_2 jsou totožny.

Abychom to dokázali, mějme na zřeteli přímku p, která protíná plochu σ_1 v bodech A_1, A_2, A_3, A_4, a kterou procházejí k ploše σ_2 tečné roviny $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$; zjistíme, že dvojpoměr čtyř oněch bodů singulárních jest roven dvojpoměru těchto čtyř singulárních rovin. Dva středy svazků komplexových přímek v rovině β_k označme B_k, B'_k a dvě roviny svazků přímek komplexových se středem v A_k označme α_k, α'_k. Každá ze singulárních rovin α nebo α' protíná rovinu β v přímce jdoucí singulárním bodem B nebo B'; na př. α_1 protíná rovinu β_1 v přímce jdoucí bodem A_1, jež (náležejíc do komplexu) musí jíti bodem B_1 nebo B'_1, protože každá přímka komplexu v β_1 jde jedním z těchto dvou bodů. Odtud nalezneme, že každým z bodů B_k jdou čtyři roviny α a α', bodem B'_k pak ostatní čtyři; duálně v každé z rovin α_k leží čtyři body B a B', v rovině α'_k pak ostatní čtyři. Třemi dvojicemi rovin α_k a α'_k je určeno všech osm bodů B a B'; zbývá určiti skupiny čtyř bodů B a B', ležící ve zbývajících dvou rovinách. Tak dospějeme k uspořádání bodů B a B' v rovinách α a α' tohoto (nebo obdobného) způsobu: α_1 obsahuje B'_1, B_2, B_3, B_4, α'_1 obsahuje B_1, B'_2, B'_3, B'_4, α_2 obsahuje B_1, B'_2, B_3, B_4, α'_2 obsahuje B'_1, B_2, B'_3, B'_4, α_3 body B_1, B_2, B'_3, B_4, α'_3 body B'_1, B'_2, B_3, B'_4, α_4 body B_1, B_2, B_3, B'_4, α'_4 body B'_1, B'_2, B'_3, B_4. O čtyrstěnu $B_1B_2B'_3B'_4$

[6]) K libovolné přímce p přísluší vzhledem ke kvadratickému komplexu přímka p' (její *pólára*), na které leží póly přímky p vzhledem ke komplexovým kuželosečkám v rovinách přímkou p položených, a kterou duálně procházejí polárné roviny přímky p vzhledem ke komplexovým kuželům s vrcholy na přímce p položenými; pólára p' je mimoběžná k přímce p nebo s ní totožna podle toho, není-li resp. je-li p přímkou uvažovaného komplexu kvadratického. Abychom to zjistili, předpokládejme komplex 2. stupně v souřadnicích Kleinových s rovnicí $\Sigma\lambda_k x_k^2 = 0$ čili $(\lambda x^2) = 0$. K přímce p o souřadnicích z_k ať přísluší vzhledem ke dvěma přímkám komplexu, obsaženým ve svazku přímek na rovině ϱ přímkou p položené se středem P na ní ležícím, harmonicky sdružená přímka (u_k), takže ony dvě přímky mají souřadnice $z_k \pm \nu u_k$; protože patří do uvedeného komplexu, platí o jejich souřadnicích $(\lambda z^2) + \nu^2(\lambda u^2) = 0$, $(\lambda z u) = 0$. První rovnice určuje konstantu ν hořejších přímek komplexových, druhá svědčí, že (u_k) patří do lineárního komplexu $(\lambda z x) = 0$; a protože (u_k) protíná přímku p, musí protínat i poláru p', příslušnou k p vzhledem k tomuto komplexu, o souřadnicích $z'_k = z_k + \mu\lambda_k z_k$, kde $\mu = -2(\lambda z^2)/(\lambda^2 z^2)$ (viz čl. 132*b*). Přímka p' prochází pólem přímky p vzhledem ke kuželosečce kvadratického komplexu ve zvolené rovině ϱ, protože jím procházejí přímky (u_k) při všech polohách středu P dotčeného svazku, a pólem přímky p vzhledem ke komplexové kuželosečce v každé rovině přímkou p položené; rovněž duálně. Je-li p obyčejnou přímkou kvadratického komplexu, platí $(\lambda z^2) = 0$, takže jest $p' \equiv p$; je-li p singulární přímkou komplexu toho, platí také $(\lambda^2 z^2) = 0$, takže p' je neurčitá. Vztah mezi přímkami p a p' není obecně vzájemný.

za těchto okolností shledáváme: roviny, jimiž se z přímky p promítají jeho vrcholy, jsou β_1, β_2, β_3, β_4; body v nichž přímka p protíná jeho stěny, jsou A_2, A_1, A_4, A_3. A protože dvojpoměr čtyř rovin promítajících z přímky vrcholy čtyrstěnu rovná se dvojpoměru čtyř průsečíků přímky té se stěnami jeho, dostáváme výsledek, že $\mathrm{Dp}\,(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4) = \mathrm{Dp}\,(A_2A_1A_4A_3) = \mathrm{Dp}\,(A_1A_2A_3A_4)$.

Z tohoto důležitého vztahu mezi čtveřinami průsečíků přímky p s plochou σ_1 a tečných rovin plochy σ_2 přímkou p vychází: splynou-li z bodů A_k dva, splynou také korespondující dvě roviny β_k, takže dotýká-li se přímka p plochy σ_1, dotýká se také plochy σ_2 (a obráceně); proto plochy σ_1 a σ_2, majíce tytéž tečné přímky, jsou totožny.

Plocha vytvořená singulárními body i singulárními rovinami kvadratického komplexu přímek sluje *singulární plochou* komplexu; singulární plocha přímkového komplexu 2. stupně jest soběduální *plocha 4. stupně a 4. třídy*, zvaná *Kummerova*.[7])[8])[9])

d) Stanovení všech možných (projektivně různých) typů kvadratického komplexu přímek lze provésti tím, že se vezmou v úvahu obecná rovnice komplexu kvadratického a obecná základní relace pro souřadnice přímkové

$$f(x_k) \equiv \Sigma a_{hk}x_hx_k = 0, \quad \omega(x_k) = \Sigma a_{hk}x_hx_k = 0$$

[7]) Důkaz důležité věty o singulární (Kummerově) ploše obecného komplexu kvadratického, v hořejším obsažené, že totiž *dvojpoměr čtyř bodů, průsečíků libovolné přímky s plochou Kummerovou, a dvojpoměr čtyř tečných rovin, touže přímkou k ploše té jdoucích, jsou si rovny*, podal *F. Klein*, Über die Plücker'sche Complexfläche, Math. Annalen 7 (1874).

[8]) Přímka s kvadratického komplexu, z jejíchž čtyř singulárních bodů dva (A_1, A_2) splynou v bod A, jest (obyčejnou) singulární přímkou komplexu; dotýká se singulární plochy komplexu v bodě jejím A a je průsečnicí dvou tečných rovin plochy té (β_1, β_2), v jejichž svazky se komplexový kužel s vrcholem v A rozpadá; současně splynou ze čtyř singulárních rovin přímkou s jdoucích dvě (β_3, β_4) v tečnou rovinu β plochy singulární s dotyčným bodem A, jež má ve zbývající dvojici průsečíků přímky s se singulární plochou (A_3, A_4) středy obou svazků své zvrhlé kuželosečky komplexové. Splynou-li ze singulárních bodů přímky s tři nebo všechny čtyři, vznikne přímka singulární vyšší (řádu 2. resp. 3.; svazek se středem A v rovině β sestává z přímek komplexu obyčejných resp. singulárních). Singulární přímka komplexu $\Sigma\lambda_k x_k^2 = 0$ v souřadnicích Kleinových vyhovuje rovnici $\Sigma\lambda_k^2 x_k^2 = 0$ (je-li obyčejná) nebo ještě rovnici $\Sigma\lambda_k^3 x_k^2 = 0$ (je-li 2. řádu) nebo ještě rovnici $\Sigma\lambda_k^4 x_k^2 = 0$ (je-li 3. řádu). Singulární přímky kvadratického komplexu tvoří, jak z předešlého vysvítá, kongruenci 4. stupně a 4. třídy.

Přímka kvadratického komplexu, jejíž každý bod je singulární, sluje *dvojnou přímkou* komplexu; patří do neomezeného počtu svazků přímek komplexových a leží na singulární ploše komplexu, jsouc její přímkou dvojnou.

[9]) Kvadratické komplexy se společnou plochou singulární tvoří jednomocnou soustavu a slují *konsingulární*. Ke komplexu $\Sigma\lambda_h x_h^2 = 0$ přísluší soustava konsingulárních komplexů s rovnicí $\sum \frac{x_h^2}{\lambda_h - k} = 0$, kde k je parametr soustavy.

v kombinaci

$$f + \lambda\omega \equiv \Sigma(a_{hk} + \lambda a_{hk})\, x_h x_k = 0;$$

o povaze jednomocného lineárního systému kvadratických forem $f + \lambda\omega$ a tedy o povaze kvadratického komplexu $f(x_k) = 0$ rozhoduje rovnice (t. zv. charakteristická), jež vznikne, položíme-li nule rovným determinant 6. stupně z koeficientů $a_{hk} + \lambda a_{hk}$ rovnice hořejší, tedy rovnice

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{11}, & a_{12} + \lambda a_{12}, \ldots, & a_{16} + \lambda a_{16} \\ a_{21} + \lambda a_{21}, & a_{22} + \lambda a_{22}, \ldots, & a_{26} + \lambda a_{26} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{61} + \lambda a_{61}, & a_{62} + \lambda a_{62}, \ldots, & a_{66} + \lambda a_{66} \end{vmatrix} = 0.^{10})$$

V případě, že tato rovnice pro λ *má všechny kořeny různé* (λ_1 až λ_6), jest možno rovnici kvadratického komplexu převésti na tvar

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2 + \lambda_4 \xi_4^2 + \lambda_5 \xi_5^2 + \lambda_6 \xi_6^2 = 0$$

a spolu základní relaci na tvar $\Sigma \xi_k^2 = 0$, při čemž ξ_k jsou lineární funkce proměnných x_1 až x_6.

Neboť pro parciální derivace funkce

$$F(x_k) \equiv f(x_k) + \lambda\omega(x_k)$$

podle proměnných x_1 až x_6 platí

$$\tfrac{1}{2} F_h = \sum_k (a_{hk} + \lambda a_{hk})\, x_k,$$

a řešením podle x_k obdržíme

$$\Delta(\lambda) \,.\, x_h = \tfrac{1}{2} \sum_k A_{hk} F_k,$$

kde A_{hk} je minor, příslušný v determinantu $\Delta(\lambda)$ k prvku $a_{hk} + \lambda a_{hk}$; odtud dostaneme

$$\Delta(\lambda) \,.\, \tfrac{1}{2} \Sigma x_h F_h \equiv \Delta(\lambda) \,.\, F = \tfrac{1}{4} \Sigma A_{hk} F_h F_k,$$

takže

$$F = -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{11}, \ldots, & a_{16} + \lambda a_{16}, & \tfrac{1}{2} F_1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{61} + \lambda a_{61}, \ldots, & a_{66} + \lambda a_{66}, & \tfrac{1}{2} F_6 \\ \tfrac{1}{2} F_1, \quad \ldots, & \tfrac{1}{2} F_6, & 0 \end{vmatrix}.$$

Užijeme-li pak rozkladu v částečné zlomky, vyplyne

$$F = -\sum \frac{1}{\Delta'(\lambda_h)\,(\lambda - \lambda_h)} \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda_h a_{11}, \ldots, & a_{16} + \lambda_h a_{16}, & \tfrac{1}{2} F_1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{61} + \lambda_h a_{61}, \ldots, & a_{66} + \lambda_h a_{66}, & \tfrac{1}{2} F_6 \\ \tfrac{1}{2} F_1, \quad \ldots, & \tfrac{1}{2} F_6, & 0 \end{vmatrix}.$$

[10]) Po stránce algebraické (pro n proměnných) viz *K. Weierstrass*, Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen, Monatsberichte Akad. Berlin 1868; *G. Darboux*, Mémoire sur la théorie algébrique des formes quadratiques, Journal math. p. a. 19 (1874); *C. M. Jessop*, A treatise on the line complex (1903), p. 189 a n.

Avšak determinant zde uvedený jest (pro každé λ_h) úplným čtvercem; odečteme-li řádek 1. až 6., znásobený faktorem resp. x_1 až x_6, od sedmého, rovněž tak u sloupců, obdržíme v posledním řádku a v posledním sloupci prvky

$$\tfrac{1}{2}(\lambda - \lambda_h)\frac{\partial\omega}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{1}{2}(\lambda - \lambda_h)\frac{\partial\omega}{\partial x_6}$$

a sedmý prvek, k němuž příslušný subdeterminant je roven nule; má tedy uvažovaný determinant hodnotu

$$(\lambda - \lambda_h)^2 \varphi_h^2,$$

kde φ_h je lineární funkce proměnných x_1 až x_6 (neobsahující λ). Dostáváme tudíž

$$F \equiv f + \lambda\omega = \sum \frac{(\lambda - \lambda_h)\varphi_h^2}{\Delta'(\lambda_h)},$$

takže

$$f(x_k) = -\sum \lambda_h \frac{\varphi_h^2}{\Delta'(\lambda_h)} \quad \text{a} \quad \omega(x_k) = \sum \frac{\varphi_h^2}{\Delta'(\lambda_h)},$$

jak bylo tvrzeno.

Nalezená rovnice kvadratického komplexu ve tvaru

$$\Sigma\lambda_k x_k^2 = 0$$

při základní relaci $\Sigma x_k^2 = 0$ jest *kanonickou rovnicí I. typu* komplexu kvadratického. Tento I. typ kvadratického komplexu, protože příslušná rovnice charakteristická $\Delta(\lambda) = 0$ má šest jednoduchých kořenů, označuje se symbolem [111111].[11])

e) Ostatní typy kvadratického komplexu obdrží se v případech, že mezi kořeny rovnice $\Delta(\lambda) = 0$ jsou kořeny násobné, pro něž všechny minory determinantu $\Delta(\lambda)$ stupně pátého nebo čtvrtého nejsou nebo jsou rovny nule.[12])

[11]) Druhy kvadratického komplexu I. typu podle reálnosti prvků jeho vyšetřil *Th. Reye*, Über die Hauptarten der allgemeinen quadratischen Strahlencomplexe und Complexengewebe, Journal r. a. Math. 98 (1885); viz také *C. Arnoldt*, Einige Untersuchungen über quadratische Strahlencomplexe, Diss. Strassburg 1887; *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie III (1896), p. 282 a n.

[12]) Klasifikaci kvadratických komplexů přímkových naznačil na základě Weierstrassovy teorie elementárních dělitelů (z r. 1868) *F. Klein*, Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linienkoordinaten auf eine kanonische Form, Diss. Bonn 1868 (Math. Annalen 23, 1884), a vyšetřil případ typu I.; podrobně myšlenku tu s geometrickým rozborem všech typů provedl *A. Weiler*, Über die verschiedenen Gattungen der Complexe 2. Grades, Math. Annalen 7 (1874). Důkladné roztřídění pomocí geometrie polydimensionální (vyšetřením třírozměrného útvaru, společného svazku čtyřrozměrných útvarů 2. stupně v prostoru pětirozměrném) se zvláštním zřetelem k dvojným přímkám komplexu podal *C. Segre*, Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche, Memorie Accad. Torino (2) 36 (1884); syntheticky o něm obšírně pojednal *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie III (1896), p. 355 a n. Analytickou diskusi (s kanonickými rovnicemi typů) provádí *C. M. Jessop*, A treatise on the line complex (1903), p. 206 a n.; také *H. Tempel*, Die Einführung elliptischer Coordinaten bei den Spezial-

Rovnice $\Delta(\lambda) = 0$ může míti především kořeny násobné toho druhu, že pro žádný z nich nejsou nule rovny všechny subdeterminanty 5. stupně determinantu $\Delta(\lambda)$. Protože z kořenů rovnice šestého stupně může jeden býti dvojnásobný až šestinásobný, při jednom dvojnásobném pak druhý dvojnásobný až čtyrnásobný a konečně mohou býti dva trojnásobné nebo tři dvojnásobné, jest možno mimo uvedený I. typ se symbolem [111111] dalších deset typů, jež se podle kořenů rovnice $\Delta(\lambda) = 0$ označují symboly čili charakteristikami [21111], [3111], [411], [51], [6], [2211], [321], [33], [42], [222].

Rovnice $\Delta(\lambda) = 0$ může dále míti ν-násobný kořen takový, že jsou pro něj nule rovny všechny minory 5. stupně determinantu $\Delta(\lambda)$, nikoli však všechny minory 4. stupně tohoto determinantu; je-li tento kořen pro všechny rovnice, jejichž levé strany jsou minory 5. stupně uvažovaného determinantu, kořenem ν'-násobným nebo vícenásobným (aspoň pro jednu právě ν'-násobným), platí podle algebraické teorie elementárních dělitelů $\nu' < \nu$ a $\nu' \leqq \nu - \nu'$. Násobnost ν takového kořene nahradíme v symbolu příslušného typu skupinou $(\nu - \nu', \nu')$. Rovnice $\Delta(\lambda) = 0$ může míti konečně takový kořen ν-násobný, že se pro něj nule rovnají všechny minory 5. stupně i všechny minory 4. stupně, nikoli však všechny minory 3. stupně determinantu $\Delta(\lambda)$; je-li tento kořen jako prve ν'-násobným nebo vícenásobným pro rovnice z minorů 5. stupně a ν''-násobným (aspoň pro jednu) nebo vícenásobným kořenem pro všechny rovnice, jejichž levé strany jsou minory 4. stupně, platí obdobně jako dříve $\nu'' \leqq \nu' - \nu'' \leqq \nu - \nu'$. Číslo udávající násobnost takového kořene nahradíme v symbolu typu skupinou $(\nu - \nu', \nu' - \nu'', \nu'')$. Pro pravý (nerozpadající se) komplex kvadratický nemůže žádný násobný kořen rovnice $\Delta(\lambda) = 0$ činiti nule rovnými všechny minory nižšího než 4. stupně determinantu $\Delta(\lambda)$.

Charakteristiky všech možných typů (pravého) kvadratického komplexu obdržíme tedy tím, že každé číslo větší než 1 v symbolu typů hořejších rozložíme všemi možnými způsoby ve dva nebo ve tři sčítance, jež dáme do (oblých) závorek; na př. k typu se symbolem [42] připojíme typy symbolů [(31)2], [(22)2], [(211)2], [(31) (11)], [(22) (11)], [(211) (11)]. Nebo také obráceně uzavřeme-li závorkami na všechny možné způsoby dva nebo tři členy v symbolech typů hořejších; na př. ze symbolu [21111] odvodíme symboly [(11) 211], [(21) 111], [(11) (11) 2], [(21) (11) 1], [(111) 21], [(211) 11], [(111) (21)], [(211) (11)].

Tak dostaneme symboly 49 typů komplexu kvadratického.[13]) Vyšetření jednotlivých těchto typů kvadratického komplexu vyžadovalo by ovšem delší úvahy.[14])[15])

fällen der Komplexe zweiten Grades, Diss. München 1904. Tabulku všech typů (s udáním zejména dvojných přímek a singulárních ploch) podává *K. Zindler* v Pascalově Repertorium II. 2 (1922), p. 1020 (byla už v původním vydání, 1900), a v Encyklopädie III. 2 (1921), p. 1128 a n.

[13]) Mimo to existuje 8 typů kvadratických komplexů, jež se rozpadají ve dvojice komplexů lineárních; uvádí je zejména *C. Segre* ve své veliké

135. Některé jednoduché komplexy kvadratické. *a*) Z kvadratických komplexů je zvlášť jednoduchý komplex sestávající z tečných přímek plochy 2. stupně; sluje *speciální komplex kvadratický*.

Je-li dána kvadratická plocha s rovnicí

$$\Sigma a_{hk} x_h x_k = 0,$$

má polárná rovina bodu $X(x_k)$ vzhledem k ní souřadnice $u_h = \Sigma a_{hi} x_i$, obdobně polárná rovina bodu $Y(y_k)$ souřadnice $v_h = \Sigma a_{hi} y_i$; přímka XY o souřadnicích $p_{hk} \equiv x_h y_k - x_k y_h$ má sdruženou poláru vzhledem k dané ploše v přímce o souřadnicích

$$\pi'_{hk} \equiv u_h v_k - u_k v_h = \Sigma (a_{hi} a_{kj} - a_{hj} a_{ki}) p_{ij},$$

kde součet se týká šesti obvyklých kombinací indexů ij pro souřadnice přímky.

Jestliže se dvě sdružené poláry u plochy 2. stupně protínají, jsou obě tečnami plochy té; podmínkou toho jest

$$\Sigma p_{hk} \pi'_{hk} = 0$$

čili

$$\Sigma (a_{hh} a_{kk} - a_{hk}^2) p_{hk}^2 + 2\Sigma (a_{hi} a_{kj} - a_{hj} a_{ki}) p_{hk} p_{ij} = 0,$$

kde součty na levé straně obsahují šest resp. patnáct členů (zde pro $p_{hk} \neq p_{ij}$). Rovnice tato váže všechny a jenom tečné přímky plochy 2. stupně a vyjadřuje tedy komplex jimi tvořený, t. j. speciální komplex kvadratický.

Má-li plocha kvadratická (při základním čtyrstěnu soustavy souřadnic v autopolárném čtyrstěnu plochy) rovnici

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2 = 0,$$

práci o klasifikaci komplexů 2. stupně, také *K. Zindler* v Encyklopädie III. 2, p. 1133.

[14]) Kvadratické komplexy s různými symboly (charakteristikami) jsou projektivně různé; aby však ze dvou komplexů s touže charakteristikou bylo možno jeden projektivní transformací převésti v druhý, musí se komplexy, k nimž příslušná rovnice pro λ má více než dva kořeny různé, shodovati ještě ve svých absolutních invariantech počtem $r - 2$ při r různých kořenech dotčené rovnice.

[15]) Kvadratické komplexy všech typů lze vytvořiti dvěma korelativními dvojmocnými svazky komplexů lineárních; viz zejména *F. Schur*, Geometrische Untersuchungen über Strahlencomplexe ersten und zweiten Grades, Math. Annalen 15 (1879). Dvěma projektivními jednomocnými svazky lineárních komplexů (t. j. lineárními kongruencemi, společnými vždy dvěma sdruženým komplexům svazků těch) jest možno vytvořiti jenom typy, jejichž charakteristika obsahuje některou skupinu v oblých závorkách (tedy všechny až na 11 typů na počátku uvedených, k nimž příslušná rovnice $\Delta(\lambda) = 0$ nemá žádný kořen, činící nule rovnými všechny minory 5. stupně determinantu Δ); viz *A. Weiler*, Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades aus linearen Congruenzen, Zeitschrift Math. Phys. 29 (1884); *D. Montesano*, Sui complessi di rette di secondo grado generati da due fasci projettivi di complessi lineari, Diss. Roma 1886; také *R. Sturm* na uv. místě.

má příslušný speciální komplex kvadratický rovnici

$$\Sigma a_{hh} a_{kk} p_{hk}^2 = 0.$$

Nalezenou rovnici speciálního kvadratického komplexu lze pokládati za rovnici kvadratické plochy v přímkových souřadnicích Plückerových.

Přímkové řady kvadratické téže plochy 2. stupně jsou určeny dvěma involučními dvojmocnými systémy lineárních komplexů; zvolíme-li v prvním systému tři komplexy navzájem involuční, rovněž tak v druhém, obdržíme šest komplexů po dvou involučních, jež můžeme učiniti základem Kleinovy soustavy souřadnic přímkových. Jedna přímková řada kvadratická je pak vyjádřena rovnicemi $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, druhá rovnicemi $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$.

Plocha kvadratická, obsahující obě přímkové řady zde uvedené, bude analyticky v souřadnicích přímkových vyjádřena rovnicí, platnou o souřadnicích x_k přímek, jež tvoří svazek paprskový se středem v průsečíku libovolné přímky jedné řady a libovolné přímky řady druhé v rovině přímkami těmi položené. Přímka první řady má souřadnice $0, 0, 0, a_4, a_5, a_6$, přímka druhé řady souřadnice $b_1, b_2, b_3, 0, 0, 0$; přímky paprskového svazku, přímkami těmi určeného, mají souřadnice $x_1 = \lambda b_1$, $x_2 = \lambda b_2$, $x_3 = \lambda b_3$, $x_4 = a_4$, $x_5 = a_5$, $x_6 = a_6$. Protože o základních přímkách svazku platí $a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 0$, $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 0$, platí o proměnné přímce svazku $x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, kteréžto dvě rovnice jsou (vzhledem k relaci $\Sigma x_k^2 = 0$) ekvivalentní.

Jest tedy kvadratická plocha jako soubor tečných přímek svých ve zvolené soustavě vyjádřena rovnicí

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

(nebo rovnicí $x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0$).[1])

b) Důležitý je *komplex složený z přímek, jimiž se stěny pevného čtyrstěnu protínají ve čtveřinách bodů konstantního dvojpoměru a z nichž se* duálně *vrcholy jeho promítají čtveřinami rovin téhož dvojpoměru*; tento kvadratický komplex sluje *čtyrstěnový*.

Že souřadnice p_{hk} přímek uvedené vlastnosti jsou vázány rovnicí kvadratickou, poznáme třebas tím, že vypočteme dvojpoměr čtyř průsečíků přímky p se stěnami základního čtyrstěnu souřadnic $O_1O_2O_3O_4$: zvolíme-li na přímce p za body základní její průsečíky Q_1 a Q_2 se stěnami ω_1 a ω_2 o souřadnicích a_k resp. b_k, při čemž $a_1 = 0$, $b_2 = 0$, mají průsečíky přímky té Q_3 a Q_4 se stěnami ω_3 a ω_4 souřadnice $a_k + \lambda_{1,2} b_k$, při čemž $a_3 + \lambda_1 b_3 = 0$, $a_4 + \lambda_2 b_4 = 0$; dvojpoměr čtyř uvažovaných průsečíků v uvedeném pořádku jest

$$\mathrm{Dp}\,(Q_1Q_2Q_3Q_4) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{a_4 b_3}{a_3 b_4}.$$

[1]) Viz také *A. Voss*, Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades, Math. Annalen 10 (1876); *P. Gerlich*, Über den Tangentenkomplex der Fläche zweiten Grades, Diss. Breslau 1905.

Pro souřadnice přímky p jako spojnice prvních dvou průsečíků platí však $p_{13} = -a_3b_1$, $p_{14} = -a_4b_1$, $p_{42} = -a_2b_4$, $p_{23} = a_2b_3$; vložíme-li hodnoty pro a_3, a_4, b_3, b_4 odtud určené do výrazu pro dvojpoměr, obdržíme (jak už dříve bylo nalezeno)

$$\mathrm{Dp}\,(Q_1Q_2Q_3Q_4) = -\frac{p_{14}p_{23}}{p_{13}p_{42}}.$$

Dostáváme tedy pro přímky, jejichž průsečíky se stěnami čtyrstěnu $O_1O_2O_3O_4$ mají konstantní dvojpoměr k, rovnici

$$\frac{p_{14}p_{23}}{p_{13}p_{42}} = -k.$$

Pro čtveřinu rovin, jimiž se z přímky p promítají vrcholy základního čtyrstěnu, platí duálně, že dvojpoměr její je stejně vyjádřen souřadnicemi π_{hk}, tedy

$$-\frac{\pi_{14}\pi_{23}}{\pi_{13}\pi_{42}} \text{ čili } -\frac{p_{23}p_{14}}{p_{42}p_{13}}$$

podle úměry platné mezi souřadnicemi p_{hk} a π_{hk} téže přímky; jest tedy dvojpoměr čtveřiny rovin promítajících z dané přímky vrcholy pevného čtyrstěnu roven dvojpoměru čtveřiny průsečíků přímky té se stěnami jeho.

Nalezenou rovnici čtyrstěnového komplexu

$$p_{14}p_{23} + kp_{13}p_{42} = 0$$

můžeme vzhledem k relaci $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$ psáti ve tvaru souměrnějším

$$Ap_{12}p_{34} + Bp_{13}p_{42} + Cp_{14}p_{23} = 0.^2)$$

Čtyrstěnový komplex jest určen základním čtyrstěnem a hodnotou konstantního dvojpoměru uvedeného (nebo jednou ze svých přímek); jest tedy v prostoru ∞^{13} komplexů čtyrstěnových.

Do čtyrstěnového komplexu patří všechny přímky čtyř trsů se středy ve vrcholech základního čtyrstěnu a všechny přímky čtyř polí s rovinami ve stěnách čtyrstěnu toho; neboť v prvém případě splývají tři průsečíky přímky na stěnách čtyrstěnu s vrcholem jeho a čtvrtý průsečík má při dané hodnotě dvojpoměru polohu libovolnou, obdobně pro případ duální. Proto prochází komplexový kužel kvadratický s vrcholem v libovolném bodě všemi vrcholy základního čtyrstěnu a komplexová kuželosečka ležící v libovolné rovině dotýká se všech stěn čtyrstěnu toho.

Singulárními body čtyrstěnového komplexu jsou všechny body na stěnách základního čtyrstěnu; neboť komplexový kužel s vrcholem v takovém bodě rozpadá se ve svazek přímek, ležící ve stěně čtyrstěnu, a ve svazek, jehož rovina prochází protějším vrcholem čtyrstěnu. Singu-

---

[2]) Odtud vyplývá rovnice čtyrstěnového komplexu v souřadnicích Kleinových tvaru

$$A\,(x_1^2 + x_2^2) + B\,(x_3^2 + x_4^2) + C\,(x_5^2 + x_6^2) = 0.$$

lárními rovinami komplexu toho jsou všechny roviny jdoucí jednotlivými vrcholy čtyrstěnu; neboť komplexová čára v takové rovině se rozpadá ve svazek přímek se středem ve vrcholu čtyrstěnu a ve svazek s vrcholem v protější stěně čtyrstěnu.[3])

c) *Čtyrstěnový komplex jest složen z přímek, jež protínají dvojice sdružených paprsků dvou projektivních svazků paprskových.*

Neboť zvolíme-li za projektivní svazky paprskové svazek se středem O_1 v rovině ω_2 a svazek se středem O_2 v rovině ω_1, a protínají-li dva sdružené paprsky těchto svazků přímku $\omega_1\omega_2 = O_3O_4$, kde O_3 a O_4 jsou samodružné body projektivních řad, v nichž dané svazky průsečnici svých rovin protínají, v bodech X_1, X_2, platí o čtveřině rovin ξ_k, jimiž se z přímky, protínající přímky O_1X_1 a O_2X_2, promítají vrcholy čtyrstěnu $O_1O_2O_3O_4$,

$$\mathrm{Dp}\,(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4) = \mathrm{Dp}(X_1X_2O_3O_4);$$

obdobně platí pro čtveřinu rovin η_k jdoucích jinou přímkou, jež protíná dvojici sdružených přímek O_1Y_1 a O_2Y_2,

$$\mathrm{Dp}(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4) = \mathrm{Dp}(Y_1Y_2O_3O_4).$$

A protože X_1X_2 i Y_1Y_2 jsou dvojice bodů na $\omega_1\omega_2$ sdružených při samodružných bodech O_3, O_4, platí $\mathrm{Dp}\,(X_1X_2O_3O_4) = \mathrm{Dp}\,(Y_1Y_2O_3O_4)$; pročež

$$\mathrm{Dp}(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4) = \mathrm{Dp}(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4).$$

Abychom správnost věty zjistili analyticky, zvolme opět střed a rovinu projektivních svazků v O_1 a ω_2, resp. v O_2 a ω_1, samodružné body na průsečnici $\omega_1\omega_2$ v bodech O_3 a O_4; označíme-li souřadnice přímek O_1O_3 a O_1O_4 písmeny c_{hk} resp. d_{hk} (z nichž jsou nenulovými pouze $c_{12} = 1$ a $d_{14} = 1$), souřadnice přímek O_2O_3 a O_2O_4 pak c'_{hk} resp. d'_{hk} (jsou všechny rovny nule vyjma $c'_{23} = 1$ a $d'_{42} = 1$), mají přímky prvního svazku souřadnice $c_{hk} + \lambda d_{hk}$, přímky druhého svazku pak souřadnice $d'_{hk} + \lambda' c'_{hk}$ a jejich projektivnost jest vyjádřena rovnicí $\lambda\lambda' = a$ (na kterou se redukuje obecná rovnice projektivnosti s proměnnými λ a λ', protože sobě odpovídají $\lambda = 0$, $\lambda' = \infty$ a $\lambda = \infty$, $\lambda' = 0$). Přímka (p_{hk}) protínající přímku $(c_{hk} + \lambda d_{hk})$ vyhovuje svými souřadnicemi známé rovnici (čl. 131c), jež se vzhledem k hodnotám souřadnic c_{hk} a d_{hk} zjednodušuje na

$$p_{42} + \lambda p_{23} = 0,$$

protínajíc pak přímku $(d'_{hk} + \lambda' c_{hk})$ vyhovuje rovnici

$$p_{13} + \lambda' p_{14} = 0;$$

odtud plyne

$$p_{13}p_{42} = \lambda\lambda' p_{14}p_{23}$$

[3]) Singulární plocha komplexu čtyrstěnového rozpadá se tedy jako útvar bodový ve čtyři bodová pole ve stěnách základního čtyrstěnu, jako útvar rovinový pak ve čtyři rovinové trsy se středy ve vrcholech jeho. Kongruence singulárních přímek tohoto komplexu skládá se pak, jak uvedeno, ze čtyř přímkových polí ve stěnách čtyrstěnu základního a ze čtyř trsů přímkových se středy v jeho vrcholech. Hrany základního čtyrstěnu jsou dvojnými přímkami příslušného komplexu čtyrstěnového.

a vzhledem k rovnici projektivnosti

$$p_{13}p_{42} - ap_{14}p_{23} = 0.^{4})$$

Čtyrstěnový komplex jest vytvořen přímkami, jež spojují sdružené body dvou kolineárních prostorů soumístných; duálně přímkami, v nichž se protínají sdružené roviny těchto prostorů; konečně přímkami, jež zde protínají své přímky sdružené.[5])[6])

Neboť zvolíme-li čtyrstěn samodružných prvků dvou kolineárních prostorů za základní čtyrstěn soustavy souřadnic, jest kolineace jejich vyjádřena rovnicemi

$$x'_k = a_k x_k;$$

protože pak souřadnice p_{hk} přímky, spojující dva sdružené body (x_k) a (x'_k), jsou

$$p_{hk} \equiv x_h x'_k - x_k x'_h = (a_k - a_h)\, x_h x_k,$$

[4]) Nahoře jsme předpokládali dané dva projektivní svazky paprskové v poloze obecné (t. j. neperspektivní a takové, že středy jejich tvoří se samodružnými body projektivnosti na průsečnici jejich rovin prostorový čtyřroh). Při speciálních polohách projektivních svazků, jež jsou základem pro vytvoření čtyrstěnového komplexu, dostaneme ovšem zvláštní případy tohoto (jejichž rovnice obsahují souřadnice p_{hk} ve zvláštním seskupení); viz *C. M. Jessop*, A treatise on the line complex, 1903, p. 120 a n. S druhé strany, nahradíme-li při uvedeném vzniku komplexu čtyrstěnového dva projektivní svazky přímek dvěma přímkovými řadami kvadratickými, jest vytvořený komplex stupně vyššího (3. nebo 4.), jak ukazuje *F. Aschieri*, Rappresentazione sullo spazio punteggiato di alcune forme di 3ª specie composte di rette, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 13 (1880).

[5]) Čtyrstěnový komplex, definovaný způsobem posledně uvedeným, vyšetřoval po prvé *Th. Reye* ve své Geometrie der Lage II, 1. vyd. 1868, také v pojednání Collineare Grundgebilde und ihre Erzeugnisse, Journal r. a. Math. 74 (1871); sluje proto také *komplexem Reyeovým*. Přehled starších prací o tomto komplexu podává *S. Lie* a *G. Scheffers*, Geometrie der Berührungstransformationen, 1896, p. 320 a n. O vlastnostech jeho pojednávají zejména *F. Aschieri*, Sui complessi tetraedrali, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 12 (1879); *G. Loria*, Intorno alla geometria su un complesso tetraedrale, Atti Accad. Torino 19 (1884); *H. E. Timerding*, Some remarks on tetrahedral geometry, Bulletin Amer. math. soc. (2) 6 (1900); *F. Aschieri*, Sui complessi tetraedrali, Giornale mat. 41 (1903); *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage III (5. vyd. 1923), p. 1 a n., 205 a n.; *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie I, 1892, p. 333 a n.; téhož Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, 1909, p. 41 a n. Dále také *J. de Vries*, Een afbeelding van een tetraedralern complex op de puntenruimte, Verslag Akad. Amsterdam 32 (1923); *J. Sobotka*, O přímkách sdružených komplexu tetraedrálního, Rozpravy Čes. akad. 32 (1923).

[6]) Při vytvoření čtyrstěnového komplexu přímek na základě dvou kolineárních prostorů soumístných předpokládá se obyčejně, že kolineace tato jest typu I. (s invariantním čtyrstěnem). Přímkový komplex, vznikající tímto způsobem při libovolné kolineaci prostorové, sluje pak obecněji *kolineační*; nerozpadá se vždy a jenom tehdy, je-li kolineace typů I. až V. O těchto případech *G. Loria*, Sulle corrispondenze projettive fra due piani e fra due spazi, Giornale mat. 22 (1884). O stanovení čtyrstěnového komplexu i při imaginárních vrcholech základního čtyrstěnu viz *St. Jolles*, Invarianz und Umkehrung von Projektivitäten und Kollineationen, Journal r. a. Math. 149 (1919).

nalezneme

$$\frac{p_{12}p_{34}}{p_{13}p_{42}} = \frac{(a_2 - a_1)(a_4 - a_3)}{(a_3 - a_1)(a_2 - a_4)},$$

tedy

$$p_{12}p_{34} + cp_{13}p_{42} = 0,$$

kde $c = \dfrac{(a_1 - a_2)(a_3 - a_4)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_4)}$, což je rovnice komplexu čtyrstěnového.

Duálně obdržíme z rovnice téže kolineace

$$u'_k = \frac{1}{a_k} u_k$$

pro souřadnice π_{hk} přímky, průsečnice dvou sdružených rovin (u_k) a (u'_k), rovnici

$$\frac{\pi_{12}\pi_{34}}{\pi_{13}\pi_{42}} = \frac{(a_2 - a_1)(a_4 - a_3)}{(a_3 - a_1)(a_2 - a_4)},$$

tedy vzhledem k úměře mezi souřadnicemi π_{hk} a p_{hk} tutéž rovnici komplexu.

A jsou-li p_{hk} souřadnice přímky spojující dva libovolné body (x_k), (y_k), má přímka spojující body v téže kolineaci k nim sdružené (x'_k), (y'_k) souřadnice

$$p'_{hk} \equiv x'_h y'_k - x'_k y'_h = a_h a_k p_{hk};$$

přímka (p_{hk}), protínající sdruženou přímku (p'_{hk}), vyhovuje rovnici

$$(a_1a_2 + a_3a_4)\, p_{12}p_{34} + (a_1a_3 + a_4a_2)\, p_{13}p_{42} + (a_1a_4 + a_2a_3)\, p_{14}p_{23} = 0,$$

jež se použitím relace $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$ redukuje opět na rovnici dvakrát už nalezenou.[7][8][9][10])

---

[7]) Ostatně je přímo patrno: Odpovídá-li v dané kolineaci bodu P bod P', bodu P' bod P'', bodu P'' bod P''', a je-li komplex vytvořen spojnicemi PP' ($P'P''$, $P''P'''$) sdružených bodů, jest vytvořen také sdruženými přímkami se protínajícími PP' a $P'P''$ ($P'P''$ a $P''P'''$), jakož i průsečnicemi rovin sdružených ($PP'P''$, $P'P''P'''$).

Komplex tento je složen z lineárních kongruencí přímek, v nichž se protínají sdružené roviny kolineárních dvojic trsů se středy na samodružné přímce uvedené kolineace.

K danému čtyrstěnovému komplexu přímek nalezneme kolineaci jej uvedeným způsobem vytvořující, jestliže zvolíme na přímce jeho dva body za sdružené (nebo duálně dvě roviny přímkou jeho jdoucí za sdružené); přísluší tedy k danému komplexu čtyrstěnovému ∞^2 kolineací prostorových, pomocí nichž může býti vytvořen.

Čtyrstěnový komplex obsahuje ∞^4 zborcených řad kvadratických, jež jsou vytvořeny dvojicemi rovinových svazků, sdružených v příslušné kolineaci prostorové, a duálně (vedle ∞^3 kvadratických kuželů komplexových a duálně). A protože dvojice rovinových trsů v kolineaci sdružených vytvořuje soustavu bisekant prostorové čáry kubické v komplexu obsažených, slují i tyto kubiky čarami komplexu; čtyrstěnový komplex obsahuje ∞^3 prostorových čar kubických, z nichž každá prochází všemi vrcholy základního čtyrstěnu (a duálně). Tři přímky komplexu čtyrstěnového (jež nepatří téže kvadratické řadě v něm obsažené) určují kubickou čáru jeho; na každé kvadratické ploše komplexu leží ∞^1 těchto čar; kterékoli dvě kubické čáry komplexu mají společnou soustavu bisekant (tvořící kvadra-

d) Přímky, jež protínají dvě pevné plochy 2. stupně v harmonických čtveřinách bodů (tak totiž, že na každé přímce jsou dva její průsečíky s jednou plochou a dva průsečíky její s plochou druhou harmonicky sdruženy), *tvoří* kvadratický *komplex*, jenž sluje *harmonický*.[11])

tickou řadu zborcenou nebo plochu kuželovou, v komplexu obsaženou). Čtyrstěnový komplex přímek jest určen dvěma kubickými čarami prostorovými, jež mají kvadratickou řadu přímek za společné bisekanty. O těchto a jiných útvarech komplexu čtyrstěnového viz zejména *F. Machovec*, O přímkových plochách druhého řádu a o systémech paprskových v komplexu tetraedrálném, Rozpravy Čes. akad. I (1891); *St. Jolles*, Der Büschel kubischer Raumkurven und seine autokonjugierte Kurve, Math. Zeitschrift 2 (1918); dále *Th. Reye*, *R. Sturm*, *S. Lie-G. Scheffers* v uved. knihách.

[8]) Čtyrstěnový komplex jest, jak z hořejšího vytvoření jeho vysvítá, invariantní při spojité grupě ∞^3 kolineací s invariantními čtyřmi vrcholy základního čtyrstěnu jeho (skládá se z přímek, jež zvolené přímce odpovídají v uvedených kolineacích). O speciálních transformacích projektivních (involučních kolineacích a korelacích), při kterých je komplex ten invariantní, pojednávají *A. Ameseder*, Über die linearen Transformationen des tetreadralen Complexes in sich, Sitzungsberichte Akad. Wien 97 (1888); *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie I, 1892, p. 378 a n.; viz také *S. Lie* a *G. Scheffers*, Geometrie der Berührungstransformationen 1896, p. 311 a n.

[9]) Čtyrstěnový komplex přímek lze vytvořiti ještě jinými způsoby; na př. z rovinného pole bodového a trsu přímkového v kolineaci sdružených přímkami, jež spojují každý bod onoho s body korespondující přímky tohoto; nebo přímkami, jež spojují vždy dva body, odpovídající v dané korelaci prostorové a v korelaci k ní inversní téže rovině, duálně přímkami, v nichž se protínají vždy dvě roviny, odpovídající ve dvou navzájem inversních korelacích prostorových témuž bodu (nebo také přímkou, které v obou inversních korelacích odpovídají dvě přímky se protínající). Rozmanité způsoby vzniku komplexu čtyrstěnového sestavil *K. Zindler* v Encyklopädie math. Wiss. III. 2, p. 1150 a n.

[10]) Významný je také kvadratický komplex přímkový, vznikající při korelaci dvou polí v rovinách různých přímkou, jež spojuje bod jedné roviny se všemi body přímky, odpovídající mu v rovině druhé; sluje *Hirstův*. Komplexy tyto vyšetřoval totiž po prvé *T. A. Hirst*, Note on the complexes generated by two correlative planes, Proceedings Math. soc. London 20 (1879); viz také *F. Deruyts*, Construction d'un complexe de droites du second ordre et de la seconde classe, Bulletin Acad. Belgique (3) 24 (1892); *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie III, 1896, p. 427 i dále.

Ke dvěma známým základním čili incidenčním plochám kvadratickým prostorové korelace jest připojiti kvadratický komplex, vytvořený při dané korelaci dvou prostorů soumístných přímkou, jež protíná přímku sdruženou (*základní komplex prostorové korelace*); jeho singulární plocha se skládá z oněch dvou ploch kvadratických. O něm jedná na př. *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie III, 1896, p. 419 a n.; Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, 1909, p. 95 i dále.

[11]) Harmonický komplex lze vytvořiti také přímkami, jež protínají dvě a dvě přímky dvou kvadratických řad zborcených (nepatřících téže ploše 2. stupně) tak, že dvojpoměr čtyř těchto průsečíků jest roven dvojpoměru čtyř rovin přímky ty promítajících; viz *C. Segre*, Su una generazione dei complessi quadratici di rette del Battaglini, Rendiconti Circolo mat. Palermo 42 (1917).

Abychom nalezli rovnici harmonického komplexu přímek, předpokládejme nejprve, že základní plochy kvadratické, vztahovány ke společnému čtyrstěnu autopolárnému, mají rovnice

$$\varkappa_a \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0,$$
$$\varkappa_b \equiv b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 = 0.$$

Vezměme v úvahu svazek ploch kvadratických, danými plochami určený, s rovnicí $\varkappa_a + \lambda\varkappa_b = 0$. V přímkových souřadnicích Plückerových jsou rovnice daných dvou ploch

$$\Sigma a_{hh}a_{kk}p_{hk}^2 = 0, \quad \Sigma b_{hh}b_{kk}p_{hk}^2 = 0,$$

rovnice jejich svazku pak

$$\Sigma(a_{hh} + \lambda b_{hh})(a_{kk} + \lambda b_{kk})p_{hk}^2 = 0$$

čili

$$\Sigma a_{hh}a_{kk}p_{hk}^2 + \lambda\Sigma(a_{hh}b_{kk} + a_{kk}b_{hh})p_{hk}^2 + \lambda^2\Sigma b_{hh}b_{kk}p_{hk}^2 = 0.$$

Odtud je patrno, že z kvadratických ploch uvažovaného svazku dotýkají se libovolné přímky (o daných souřadnicích p_{hk}) dvě plochy, ty totiž, jejichž parametry λ ve svazku vyhovují uvedené rovnici; speciálně pak, že přímka, jejíž souřadnice činí v této rovnici koeficient u λ rovným nule, dotýkají se dvou ploch $\varkappa_a \pm \lambda\varkappa_b = 0$. Vidíme tudíž, že přímky komplexu

$$\Sigma(a_{hh}b_{kk} + a_{kk}b_{hh})p_{hk}^2 = 0$$

dotýkají se ze svazku ploch kvadratických vždy dvou ploch, určených parametry $\pm\lambda$ (a tedy v tomto svazku harmonicky sdružených vzhledem k plochám základním).

Zjistíme nyní, že každá z dotčených přímek protíná kvadratické plochy $\varkappa_a = 0$ a $\varkappa_b = 0$ v harmonické čtveřině bodů. Každá rovina totiž, vedená takovou přímkou, protíná dvě kvadratické plochy, kterých se dotýká, ve dvou kuželosečkách $k_a \pm \lambda k_b = 0$, jejichž je společnou tečnou, a základní plochy svazku v kuželosečkách $k_a = 0$, $k_b = 0$. Avšak společné tečny kuželoseček $k_a \pm \lambda k_b = 0$ protínají kuželosečky $k_a = 0$, $k_b = 0$ ve dvou dvojicích bodů harmonicky sdružených; neboť z rovnice svazku kuželoseček, určeného čarami $k_a = 0$ a $k_b = 0$, v souřadnicích přímkových shledáváme, že společné tečny dvojic $k_a \pm \lambda k_b = 0$ vytvořují kuželosečku, jejíž rovnice je zároveň podmínkou toho, aby průsečíky přímky s kuželosečkami $k_a = 0$, $k_b = 0$ tvořily harmonickou čtveřinu bodů.[12])

[12]) Rovnice kuželosečky (t. zv. Staudtovy), vytvořené přímkami, jež jsou společnými tečnami dvojic kuželoseček $k_a \pm \lambda k_b = 0$ ve svazku se základními kuželosečkami $k_a \equiv \Sigma a_{hk}x_hx_k = 0$, $k_b \equiv \Sigma b_{hk}x_hx_k = 0$, vyplývá obdobně jako nahoře u svazku ploch kvadratických z rovnice svazku $k_a + \lambda k_b = 0$ v souřadnicích přímkových (u_k). Vycházejíce od kvadratických rovnic (v souřadnicích přímkových) pro dva a dva průsečíky přímky (u_k) s kuželosečkami $k_a = 0$, $k_b = 0$, určíme podmínku toho, aby tyto dvě dvojice bodů tvořily harmonickou čtveřinu. V obou případech dospějeme

Protínají tedy přímky o souřadnicích p_{hk} vyhovujících rovnici

$$\Sigma(a_{hh}b_{kk} + a_{kk}b_{hh})\, p_{hk}^2 = 0$$

dvě pevné plochy 2. stupně o rovnicích $\Sigma a_{hh}x_h^2 = 0$, $\Sigma b_{hh}x_h^2 = 0$ ve čtveřinách bodů dvojpoměru -1, takže nalezená rovnice jest rovnicí harmonického komplexu přímek.[13])

Provedeme-li obdobný počet pro dvě dané plochy kvadratické s rovnicemi obecnými

$$\varkappa_a \equiv \Sigma a_{hk}x_h x_k = 0, \qquad \varkappa_b \equiv \Sigma b_{hk}x_h x_k = 0,$$

obdržíme pro harmonický komplex přímek k nim příslušný rovnici

$$\sum \frac{\partial F}{\partial a_{hk}}\, b_{hk} = 0,$$

kde

$$F \equiv \Sigma(a_{hh}a_{kk} - a_{hk}^2)\, p_{hk}^2 + 2\Sigma(a_{hi}a_{kj} - a_{hj}a_{ki})\, p_{hk}p_{ij} = 0$$

je rovnice plochy $\varkappa_a = 0$ v souřadnicích přímkových čili rovnice speciálního komplexu kvadratického, tvořeného tečnami této plochy.[14])[15])[16])

---

k rovnici

$$(a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22} - 2a_{23}b_{23})\, u_1^2 + (a_{11}b_{33} + a_{33}b_{11} - 2a_{13}b_{13})\, u_2^2 +$$
$$+ (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12})\, u_3^2 + 2(a_{12}b_{13} + a_{13}b_{12} - a_{11}b_{23} - a_{23}b_{11})\, u_2u_3 +$$
$$+ 2(a_{21}b_{23} + a_{23}b_{21} - a_{22}b_{13} - a_{13}b_{22})\, u_1u_3 +$$
$$+ 2(a_{31}b_{32} + a_{32}b_{31} - a_{33}b_{12} - a_{12}b_{33})\, u_1u_2 = 0;$$

tím je hořejší věta dokázána.

[13]) Kvadratický komplex harmonický má tedy v přímkových souřadnicích Plückerových rovnici, jež obsahuje jenom čtverce těchto souřadnic; vyšetřoval jej po prvé *G. Battaglini* (1866), viz jeho Intorno ai sistemi di rette di 2º grado, Giornale mat. 6 (1868) a 7 (1869), domnívaje se mylně, že lze rovnici každého komplexu 2. stupně uvésti na tvar zde nalezený; proto se tento komplex, zejména je-li (podle klasifikace komplexů kvadratických) typu prvního, nazývá *Battagliniův*. Další úvahy o tomto významném komplexu přímek podali zejména *F. Aschieri*, Sopra un complesso di 2º grado, Giornale mat. 8 (1870); *F. Schur*, Über einen das System zweier Flächen zweiten Grades betreffenden Satz und einen damit verbundenen Strahlencomplex zweiten Grades, Math. Annalen 21 (1883); *C. Ernst*, Über Complexe zweiten Grades, welche durch Flächenpaare zweiten Grades erzeugt werden, Preisschrift München 1885; *D. Montesano*, Su alcuni complessi di rette-Battaglini, Rendiconti Accad. Napoli 25 (1886); *F. Hoffmann*, Die synthetischen Grundlagen der Theorie des Tetraedroid-Complexes, Archiv Math. Phys. (2) 5 (1887); *W. Düker*, Über Beziehungen der Strahlenkomplexe zweiten Grades zu den Flächen zweiter Ordnung, Diss. Rostock 1910; také *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie III (1896), p. 328 a n.

[14]) Podle povahy a polohy daných ploch kvadratických dostaneme rozmanité druhy komplexu harmonického (v počtu 23, nečítáme-li případy komplexu rozpadajícího se ve dva lineární); o tom *C. Segre* a *G. Loria*, Sur les différentes espèces de complexes du 2e degré des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre, Math. Annalen 23 (1884).

[15]) Z vlastností harmonického komplexu budiž aspoň uvedeno, že singulární plocha jeho je plocha 4. stupně, jež sluje tetraedroid; singulární

136. Algebraický komplex *n*-tého stupně. *a*) Rovnice (homogenní) n-tého stupně v souřadnicích přímkových x_k

$$f(x_k) = 0,$$

kde tedy $f(x_k)$ jest racionální celistvá funkce homogenní o šesti proměnných x_k čili senární forma těchto veličin, definuje algebraický *přímkový komplex*, jenž sluje *stupně n-tého*.[1]) Protože souřadnice přímky jsou, jak byly zavedeny, lineárními funkcemi souřadnic každého bodu na přímce ležícího a souřadnic každé roviny přímkou položené, obdržíme z rovnice komplexu n-tého stupně při zvoleném bodě pevném nebo při pevné rovině zvolené rovnici n-tého stupně v souřadnicích bodových resp. rovinových, jež určuje kuželovou plochu n-tého stupně s vrcholem v pevném bodě resp. rovinnou čáru n-té třídy v pevné rovině: *přímky komplexu n-tého stupně vytvořují v každém bodě kužel n-tého stupně a v každé rovině čáru n-té třídy*.[2])

V každém svazku přímek jest obsaženo n přímek komplexu n-tého

---

přímky harmonického komplexu tvoří kongruenci, společnou tomuto a komplexu čtyrstěnovému, jehož přímky mají vzhledem k oběma základním plochám harmonického komplexu póly se protínající.

Metricky speciálním případem harmonického komplexu jest t. zv. komplex *Painvinův*, složený z přímek, jimiž jdou k dané ploše kvadratické (spec. k elipsoidu) tečné roviny k sobě kolmé (jeho singulární plochou je Fresnelova plocha vlnová). Viz *L. Painvin*, Étude d'un complexe du second ordre, Nouv. Annales math. (2) 11 (1872), a Étude d'un système de rayons, Journal math. p. a. (2) 19 (1874); *A. Demoulin*, Sur le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires, Bulletin Soc. math. France 20 (1892); *A. Myller*, Sur le complexe de Painvin, Nouv. Annales math. (4) 19 (1919).

[16]) Harmonickým (v širším smyslu) nazval *J. H. v. d. Harst*, Eenige entaardingen von den harmonischen complex, Diss. Leiden 1914, komplex přímek, jež protínají v harmonických čtveřinách plochu 4. stupně, a vyšetřil (analyticky) některé jeho případy při zvrhlé ploše základní. Komplexy příslušné ke dvěma plochám kvadratickým určil *G. Pick*, Über das System der covarianten Strahlencomplexe zweier Flächen zweiter Ordnung, Sitzungsberichte Akad. Wien 100 (1891).

[1]) Protože o přímkových souřadnicích x_k musí platit relace $\omega(x_k) = 0$, jest týž komplex vyjádřen také rovnicemi $f(x_k) + h(x_k) \cdot \omega(x_k) = 0$, kde $h(x_k)$ je libovolná forma $(n-2)$-ho stupně proměnných x_k.

[2]) Počet nezávislých konstant, obsažených (jako koeficienty) v rovnici obecného komplexu n-tého stupně, na nichž tedy tento závisí, je roven počtu členů ve formě n-tého stupně o šesti proměnných $f(x_k)$, zmenšenému o počet členů formy $(n-2)$-ho stupně o těchže proměnných $h(x_k)$ a o 1 (vzhledem k tomu, že rovnice je homogenní); protože první počet je dán počtem kombinací ze 6 prvků n-té třídy s opakováním, tedy $\binom{n+5}{n} = \binom{n+5}{5}$, druhý pak $\binom{n+3}{5}$, obsahuje rovnice komplexu n-tého stupně $\binom{n+5}{5} - \binom{n+3}{5} - 1 = \frac{(n+3)(n+2)^2(n+1)}{12} - 1$ konstant.

stupně; neboť vložíme-li do rovnice komplexu $f(x_k) = 0$ za x_k souřadnice $x_k + \lambda y_k$ přímek svazku paprskového, dostaneme

$$f(x_k) + \lambda \,.\, \Delta_y f(x_k) + \tfrac{1}{2}\lambda^2 \,.\, \Delta_y{}^2 f(x_k) + \ldots + \lambda^n f(y_k) = 0,$$

z kteréžto rovnice (při daných x_k a y_k, určujících svazek) vyplývá n hodnot parametru λ, tedy n přímek svazku.[3])

Symboly $\Delta_y{}^p f(x_k)$ mají význam v jiných případech opětovně uvedený; $\Delta_y f(x_k) \equiv \Sigma y_k \dfrac{\partial f}{\partial x_k}$, $\Delta_y{}^2 f(x_k) \equiv \Sigma y_h y_k \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k}$, atd.

Rovnice $\Delta_y f(x_k) = 0$ vyjadřuje při daných souřadnicích x_k přímky obecně položené a proměnných y_k lineární komplex, jenž sluje *polárným komplexem lineárním*, příslušným k přímce (x_k) vzhledem k danému komplexu (stupně $n > 1$). Jestliže spec. přímka (x_k) náleží danému komplexu n-tého stupně, sluje lineární komplex $\Delta_y f(x_k) = 0$ *tečným komplexem* komplexu daného podél dané přímky jeho, protože vedle (x_k) obsahuje přímku, této v daném komplexu nekonečně blízkou; neboť je-li $f(x_k) = 0$ a $f(x_k + dx_k) = 0$, platí jednak (podle věty o homogenních funkcích vzhledem k první podmínce) $\Sigma x_k \dfrac{\partial f}{\partial x_k} = 0$, jednak (podle předešlého a vzhledem k oběma podmínkám uvedeným) $\Sigma(x_k + dx_k) \dfrac{\partial f}{\partial x_k} = 0$.

Uvedený tečný komplex patří do jednomocné soustavy tečných komplexů lineárních

$$\Sigma y_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + \lambda \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) = 0,$$

kde $\omega(x_k) = 0$ je základní podmínka vížící souřadnice přímky; každý z těchto lineárních komplexů má vlastnost právě vytčenou.[4])

Mezi body na (obyčejné) přímce daného komplexu a polárnými rovinami, jež k nim v kterémkoli z tečných lineárních komplexů komplexu daného podél přímky té příslušejí, existuje korespondence projektivní; rovněž duálně.[5])[6])

---

[3]) Jestliže se v hořejší rovnici objeví první nenulový koeficient teprve u λ^m, obsahuje uvažovaný svazek m splývajících přímek komplexu, t. j. rovina svazku toho dotýká se komplexového kužele s vrcholem ve středu jeho v m přímkách splývajících, a duálně.

[4]) Rovnice $\Delta_y{}^p f(x_k) = 0$ (součinitel u λ^p v hořejší rovnici pro $f(x_k + \lambda y_k)$, položen rovným nule) vyjadřuje *polárný komplex p-tého stupně*, příslušný k přímce (x_k) vzhledem k danému komplexu $f(x_k) = 0$; protože $f(x_k)$ lze nahraditi formou $f(x_k) + h(x_k) \,.\, \omega(x_k)$, přísluší k dané přímce vzhledem ke komplexu danému nekonečné množství polárných komplexů každého stupně.

[5]) V uvedené projektivnosti odpovídá bodu X na zvolené přímce p komplexu daného tečná rovina ξ komplexového kužele s vrcholem v bodě X podél přímky p; obráceně rovině ξ jdoucí přímkou p odpovídá dotyčný bod X komplexové čáry v ní ležící na p. Bod komplexové čáry je tedy

b) Ty přímky daného komplexu $f(x_k) = 0$, jejichž tečné lineární komplexy jsou speciální, slují *singulární přímky komplexu*. Tečný komplex lineární je speciální, platí-li

$$\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = 0$$

čili, užíváme-li přímkových souřadnic Kleinových,

$$\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 = 0;$$

singulární přímky komplexu jsou tedy (v množství ∞^2) určeny rovnicemi

$$f(x_k) = 0 \quad \text{a} \quad \sum\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 = 0.^{7})$$

Je-li (x_k) singulární přímkou komplexu $f(x_k) = 0$, sestává svazek přímek $\left(x_k + \lambda\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ z os tečných lineárních komplexů, jež jsou speciální; všechny tyto osy speciálních tečných komplexů lineárních tvoří tedy u daného komplexu komplex, složený z ∞^2 svazků paprskových.

Středy uvedených svazků paprskových (singulární body) vytvořují *singulární plochu* daného komplexu; duálně roviny svazků těch (singulární roviny) vytvořují plochu singulární. *Obě tyto plochy jsou totožny.* Neboť jsou-li P a P' dva nekonečně blízké body prvního útvaru, totiž P jako průsečík přímky (x_k) a přímky o souřadnicích $\frac{\partial f}{\partial x_k} \equiv \xi_k$, P' jako průsečík přímek o souřadnicích $x'_k = x_k + dx_k$, $\xi'_k = \xi_k + d\xi_k$, o kterých tedy platí $\Sigma x_k\xi_k = 0$, $\Sigma x'_k\xi'_k = 0$, vyplývá z druhé rovnice, užijeme-li relace $\Sigma\xi_k dx_k = 0$, platné o tečných komplexech, a zanedbáme-li členy druhého řádu, nejprve $\Sigma x_k d\xi_k = 0$ a dále rovnice $\Sigma x_k\xi'_k = 0$ vedle $\Sigma x'_k\xi_k = 0$; protíná tedy nejen přímka (x'_k) přímku (ξ_k), nýbrž i přímka (ξ'_k) přímku (x_k), takže bod P' leží (nedbáme-li infinitesimálních členů řádu druhého) v rovině svazku se středem P.[8])

---

vrcholem komplexového kužele, jenž se roviny čáry té dotýká podél tečny její v uvedeném bodě; a duálně.

[6]) Pro teorii obecného algebraického komplexu přímek viz zejména *F. Klein*, Über gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen, Math. Annalen 5 (1872); *A. Voss*, Über Complexe und Congruenzen, Math. Annalen 9 (1876); *C. M. Jessop*, A treatise on the line complex, 1903, p. 307 a n.; *H. Mohrmann*, Beiträge zur Theorie der Singularitäten der algebraischen Liniencomplexe beliebigen Grades, Diss. München 1907. Také *A. Clebsch*, Über die Complexflächen und die Singularitätenflächen der Complexe, Math. Annalen 5 (1872).

[7]) Tvoří tudíž singulární přímky komplexu n-tého stupně (vyjímaje ovšem případ, kdy všechny přímky komplexu jsou singulární) kongruenci; tato *kongruence singulárních přímek* daného komplexu jest stupně a třídy $2n$ $(n - 1)$.

[8]) Viz *M. Pasch*, Über die Brennflächen der Strahlensysteme und die Singularitätenflächen der Complexe, Journal r. a. Math. 76 (1873).

Stupeň singulární plochy (jako útvaru bodového) *a její třída* (jako útvaru rovinového) jest $2n(n-1)^2$. Libovolná přímka (p_k) protíná totiž svazek přímek $\left(x_k + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ ve všech jeho přímkách (a prochází tedy singulárním bodem nebo leží v singulární rovině), platí-li $\Sigma p_k x_k = 0$, $\Sigma p_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$; k tomu přistupují hořejší dvě podmínky pro přímku singulární. Tyto čtyři rovnice (a rovnice $\Sigma x_k^2 = 0$) určují $4n(n-1)^2$ přímek singulárních; zvolená přímka musí však pro soběduálnost útvaru protínati z uvažovaných svazků polovici procházejíc středem, polovici ležíc v rovině jejich, takže se nalezené číslo rozdělí ve dvě polovice.[9])

Komplexové kužele komplexu $f(x_k) = 0$, jejichž vrcholy leží na singulární přímce jeho, dotýkají se singulární roviny podél této přímky. Výjimku činí kužel s vrcholem v bodě singulárním, pro nějž je singulární přímka přímkou dvojnásobnou; kužel kvadratického komplexu (polárného) $\Sigma y_h y_k f_{hk} = 0$ pro uvažovaný bod rozpadá se ve dvě tečné roviny kužele daného komplexu podél singulární přímky jeho.

Komplexové čáry komplexu $f(x_k) = 0$ v rovinách položených singulární přímkou jeho dotýkají se této přímky v bodě singulárním. Výjimku činí čára v rovině singulární, pro niž je singulární přímka dvojnásobnou tečnou; čára kvadratického komplexu (polárného) $\Sigma y_h y_k f_{hk} = 0$ v uvažované rovině rozpadá se ve dva body ležící na singulární přímce, v nichž se čára daného komplexu přímky té dotýká.

Neboť v tečných lineárních komplexech singulární přímky (x_k) je rovina svazku $\left(x_k + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ polárnou rovinou každého bodu na (x_k) ležícího, pročež každý komplexový kužel daného komplexu $f(x_k) = 0$ s vrcholem na (x_k) dotýká se této roviny podél (x_k). Je-li však (y_k) přímka jdoucí bodem singulárním na (x_k), platí $\Sigma y_k x_k = 0$, $\Sigma y_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$; protože tedy v rovnici $f(x_k + \lambda y_k) = 0$ odpadnou po rozvedení dva první členy, má komplexový kužel daného komplexu s vrcholem v singulárním bodě na (x_k) tuto přímku za dvojnásobnou. Jestliže pak přímka (y_k) jest přímkou kvadratického komplexu $\Sigma y_h y_k f_{hk} = 0$, odpadne ve zmíněné rovnici ještě člen třetí; svazek $(x_k + \lambda y_k)$ obsahuje tedy z přímek komplexových mimo (x_k) jenom $n-3$ přímky, pročež komplexový kužel kvadratického komplexu polárného s vrcholem v singulárním bodě se rozpadá ve dvě roviny, jež jsou tečnými rovinami podél singulární přímky ke kuželi daného komplexu s vrcholem v bodě singulárním. Duálně se dokáže věta duální.[10])

[9]) O singulární ploše algebraického komplexu pojednává zejména *A. Voss*, Über Complexe und Congruenzen, Math. Ann. 9 (1876); také *H. Mohrmann* na uv. místě.

c) Komplex tvořený tečnými přímkami libovolné plochy sluje *speciální.*

Svazek paprskový, určený přímkami se protínajícími o Kleinových souřadnicích x_k a y_k, a svazek určený přímkami nekonečně k nim blízkými o souřadnicích $x_k + dx_k$, $y_k + dy_k$ tvoří svými středy a svými rovinami dva nekonečně blízké elementy plochy, jestliže střed druhého svazku leží v rovině prvého nebo obráceně, jestliže tedy některá přímka druhého protíná všechny přímky prvého svazku, t. j. platí-li

$$\Sigma(x_k + \lambda y_k) \,.\, [(x_k + dx_k) + \mu(y_k + dy_k)] = 0$$

při libovolném λ; odtud vzhledem k relacím $\Sigma x_k^2 = 0$, $\Sigma y_k^2 = 0$, $\Sigma x_k y_k = 0$ vyplývá

$$\Sigma x_k dx_k + \mu \Sigma x_k dy_k = 0, \quad \Sigma y_k dx_k + \mu \Sigma y_k dy_k = 0.$$

Protože však $x_k + dx_k$, $y_k + dy_k$ jsou souřadnice přímek a protože tyto přímky se protínají, liší se se zřetelem opět k relacím hořejším výrazy $\Sigma x_k dx_k$, $\Sigma y_k dy_k$ a $\Sigma(x_k dy_k + y_k dx_k)$ od nuly jen o infinitesimální veličiny řádu druhého. Nalezené podmínky redukují se tím (nedbáme-li nekonečně malých veličin druhého řádu) na podmínku

$$\Sigma x_k dy_k = 0 \text{ nebo } \Sigma y_k dx_k = 0.$$

Přímka v daném komplexu $f(x_k) = 0$, jež je libovolné přímce jeho (x_k) nekonečně blízká, o souřadnicích $x_k + dx_k$ vyhovuje rovnici $f(x_k + dx_k) = 0$, z níž plyne $\sum \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k = 0$. Jsou-li $y_k \equiv \frac{\partial f}{\partial x_k}$ souřadnicemi přímky, t. j. platí-li $\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 = 0$, jest podmínka právě nalezená splněna.

Daný komplex, vyjádřený (v souřadnicích Kleinových) rovnicí $f(x_k) = 0$, *sestává* tedy *z přímek, jež jsou tečnými přímkami plochy*, čili komplex ten je speciální, *jestliže* o něm *platí*

$$\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 = 0.^{11)12)}$$

---

[10]) Vzhledem k tomu lze singulární bod u komplexu definovati jako bod, jehož komplexový kužel má mezi svými přímkami přímku dvojnásobnou (vícenásobnou); duálně singulární rovinu jako rovinu, jejíž komplexová čára má mezi svými tečnami tečnu násobnou.

[11]) V komplexu speciálním jsou tedy všechny přímky singulární (pročež sluje komplex takový také *singulárním*). Ještě speciálnější jest případ komplexu, který se skládá z přímek protínajících čáru prostorovou. Viz *A. Voss*, Über eine Fundamentalaufgabe der Plückerschen Geometrie, Göttinger Nachrichten 1875, a Über Raumcurven und Developpabele, Math. Annalen 13 (1878).

[12]) Komplexy algebraické (i transcendentní), jež jsou invariantní při spojité grupě kolineací s třemi a více parametry, určil *U. Amaldi*, Sui complessi di rette, che ammettono un gruppo continuo proiettivo, Rendiconti Circolo mat. Palermo 23 (1907).

d) Přímky společné dvěma komplexům $f(x_k) = 0$ a $g(x_k) = 0$ stupně n_1 resp. n_2 tvoří *kongruenci přímek stupně a třídy* $n_1 n_2$ (úplný průsek obou komplexů uvedených); každým bodem prochází totiž $n_1 n_2$ přímek této kongruence, v nichž se protínají kužele obou komplexů s vrcholem v bodě tom, a duálně v každé rovině leží $n_1 n_2$ přímek kongruence, jež jsou jako tečny společny čarám obou komplexů v rovině té ležícím.[13])

Na každé přímce kongruence, společné dvěma daným komplexům, existuje projektivní korespondence bodů (a rovin), v níž sobě odpovídají body, příslušné jako póly vždy téže rovině přímkou položené v tečných lineárních komplexech obou daných komplexů pro přímku uvažovanou (roviny polárné v tečných lineárních komplexech komplexů daných, příslušné témuž bodu). Samodružné prvky těchto korespondencí u jednotlivých přímek kongruence slují *fokální body* resp. *fokální roviny* kongruence; každý z obou fokálních bodů a příslušná rovina fokální jsou středem a rovinou paprskového svazku, společného tečným lineárním komplexům daných komplexů.

Fokální body a fokální roviny kongruence vytvořují tutéž plochu, *fokální plochu* kongruence; tato plocha je geometrickým místem bodů, jejichž kužele v obou komplexech se dotýkají, a obalovou plochou rovin, jejichž čáry v obou komplexech se dotýkají.

Neboť přímky uvažované kongruence, nekonečně blízké zvolené přímce její x se souřadnicemi x_k, určují lineární kongruenci o rovnicích

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_k} y_k = 0, \qquad \sum \frac{\partial g}{\partial x_k} y_k = 0;$$

osy této lineární kongruence mají souřadnice

$$z_k = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \lambda_1 \frac{\partial g}{\partial x_k}, \qquad z'_k = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \lambda_2 \frac{\partial g}{\partial x_k},$$

kde λ_1, λ_2 jsou kořeny rovnice $\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}\right) = 0$ čili rovnice

$$\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 + 2\lambda \sum \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial x_k} + \lambda^2 \sum \left(\frac{\partial g}{\partial x_k}\right)^2 = 0.$$

Jednomu fokálnímu bodu dané kongruence na x přísluší fokální rovina xz, druhému fokální rovina xz'. Uvažujíce o přímce x s jejím bodem i příslušnou rovinou fokální a spolu o přímce k této nekonečně blízké s bodem i fokální rovinou její, zjistíme, že (až na infinitesimální veličiny druhého řádu) leží fokální bod druhé ve fokální rovině prvé přímky; proto *fokální roviny obalují plochu vytvořenou fokálními body*. Vedle toho zjistíme, že fokální rovina, příslušná k jednomu bodu fokálnímu na přímce uvažované, je tečnou rovinou fokální plochy v druhém fokálním

[13]) O této kongruenci viz *A. Voss*, Über Complexe und Congruenzen, Math. Annalen 9 (1876), p. 81 a n.; *H. J. v. Veen*, Eigenschappen van stralencongruenties, Verslag Akad. Amsterdam 29 (1921).

bodě jejím; jsou tedy přímky kongruence dvojnými tečnami plochy fokální, při čemž každá z obou fokálních rovin přímkou jdoucích jest tečnou rovinou fokální plochy v druhém bodě fokálním na ní ležícím.

Protože fokální plocha dané kongruence je soběduální, jsou stupeň a třída její sobě rovny; *stupeň* a *třída fokální plochy kongruence*, společné dvěma komplexům $f(x_k) = 0$ a $g(x_k) = 0$ stupně n_1 a n_2, jest $2n_1n_2(n_1 + n_2 - 2)$.

Neboť stupeň fokální plochy jest dán počtem přímek (x_k) uvažované kongruence, z nichž každá protíná libovolnou přímku (a_k) v bodě společném s přímkou v kongruenci k ní nekonečně blízkou $(x_k + dx_k)$. O přímkách takových platí

$$\Sigma x_k dx_k = 0, \quad \Sigma dx_k^2 = 0, \quad \Sigma a_k x_k = 0, \quad \Sigma a_k dx_k = 0,$$

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k = 0, \qquad \sum \frac{\partial g}{\partial x_k} dx_k = 0.$$

Jsou tedy veličiny dx_k úměrny souřadnicím přímky, společné třem lineárním komplexům

$$\Sigma a_k y_k = 0, \qquad \sum \frac{\partial f}{\partial x_k} y_k = 0, \qquad \sum \frac{\partial g}{\partial x_k} y_k = 0,$$

t. j. přímky obsažené v kvadratické řadě, těmito rovnicemi určené; a protože tato přímka a přímka (x_k) téže řadě náležející se protínají (ježto $\Sigma x_k dx_k = 0$), rozpadá se řada ta ve dva svazky přímek. Podmínkou toho je nulová hodnota diskriminantu příslušné rovnice kvadratické; rovnice ta pak spolu s rovnicemi $f(x_k) = 0$, $g(x_k) = 0$, $\Sigma a_k x_k = 0$, $\Sigma x_k^2 = 0$ dávají $4n_1n_2(n_1 + n_2 - 2)$ přímek hledaných; a tento počet se rozděluje v polovici pro stupeň a v polovici pro třídu plochy fokální.[14])[15])[16])

[14]) Fokální plocha kongruence dvěma komplexům společné dotýká se singulární plochy jednoho i druhého komplexu toho podél čáry její. O této ploše viz *M. Pasch*, Über die Brennflächen der Strahlensysteme und die Singularitätenflächen der Complexe, Journal r. a. Math. 76 (1873); *A. Voss*, Zur Geometrie der Brennflächen von Congruenzen, Göttinger Nachrichten 1873.

[15]) O algebraických komplexech n-tého stupně s touže plochou singulární (jež proto slují *konsingulární*) pojednal obecně *H. Mohrmann*, Beiträge zur Theorie der Singularitäten der algebraischen Liniencomplexe beliebigen Grades, Diss. München 1907.

[16]) Některé vyšší komplexy (a kongruence), jednoduše vytvořené, uvádějí a vyšetřují na př. *G. Loria*, Sugli enti geometrici generati da forme fondamentali in corrispondenza algebrica, Giornale Soc. lett. convers. sc. Genova 1887; *J. de Vries*, Over een groep van stralencomplexen met rationale complexkegels, Verslag Akad. Amsterdam 13 (1905), a Een groep van algebraische stralencomplexen, tamtéž; *L. Godeaux*, Sur quelques complexes particuliers, Bulletin Acad. Belgique 1907; *F. Kliem*, Über Örter von Treffgeraden entsprechender Strahlen in eindeutig und linear verwandten Strahlengebilden erster bis vierter Stufe, Diss. Breslau 1909; *M. Stuyvaert*, Un complexe cubique de droites, Memorie Accad. Torino (2) 63 (1913); *A. Plamitzer*, Sätze über die Treffgeraden projektiver Strahleninvolutionen höheren Grades, deren Träger unikursale Gebilde sind, Sitzungsberichte Akad. Wien 126 (1917).

137. Algebraické kongruence. *a) Přímková kongruence algebraická* jest úplný nebo částečný průsek dvou algebraických komplexů přímkových; jest to tedy dvojmocná soustava přímek, jež samy nebo spolu s jinými jsou společny dvěma takovým komplexům.

Stupněm n algebraické kongruence přímek sluje, jak bylo uvedeno, počet přímek jejích, jež jdou obecným bodem v prostoru; její *třídou v* pak sluje počet přímek kongruence, jež leží v obecné rovině. K tomu jest připojiti jako *řád* kongruence *r* počet dvojic přímek v kongruenci se protínajících, jejichž společný bod a společná rovina jsou incidentní s obecnou přímkou v prostoru (ležící mimo kongruenci), tedy počet dvojic přímek v kongruenci, jež s obecnou přímkou prostoru patří do téhož svazku. Kongruence *n*-tého stupně *v*-té třídy (*r*-tého řádu) značí se často krátce (n, v) nebo (n, v, r).

Sledujme *průsečíky dvojic přímek* v kongruenci (n, v, r): tyto body X, patří-li rovina ξ přímek v nich se protínajících do svazku rovinového s osou v libovolné přímce l, vytvořují *čáru*, kterou označíme (l), jež má stupeň $\frac{1}{2}v(v-1)+r$ a přímku l protíná v r bodech; patří-li pak ξ do trsu rovinového se středem L, vytvořují body X plochu (L), jež má stupeň $\frac{1}{2}n(n-1)+r$ a v bodě L svůj bod $\frac{1}{2}n(n-1)$-násobný. Neboť v každé rovině svazku s osou l leží v přímek kongruence, které se po dvou protínají v $\frac{1}{2}v(v-1)$ bodech, k čemuž přistupuje r průsečíků dvojic přímek kongruence na l; jest tedy jednomocná soustava těchto skupin bodů X, čára (l), proťata rovinou obecně položenou (jdoucí obecnou přímkou l) v uvedeném počtu bodů, z nichž r je na l. Plocha (L) je pak vytvořena jednomocnou soustavou čar (l), jejichž základní přímka (přímka l) opisuje paprskový svazek se středem L: protože bodem L prochází n přímek kongruence a tedy $\frac{1}{2}n(n-1)$ jejich dvojic, jde $\frac{1}{2}n(n-1)$ dotčených čar bodem L, takže bod L má uvedenou násobnost na ploše, a obecná přímka jím procházející má uvedený počet bodů $\frac{1}{2}n(n-1)+r$ s plochou (L) společných. K oběma větám těm lze připojiti věty duální o rovinách ξ, obsahujících dvojice přímek dané kongruence: roviny ξ, opisuje-li bod X bodovou řadu na přímce l, vytvořují rozvinutelnou plochu třídy $\frac{1}{2}n(n-1)+r$ a jdou v počtu r přímkou l; opisuje-li pak bod X pole bodové na rovině λ, vytvořují roviny ξ plochu, jež má třídu $\frac{1}{2}v(v-1)+r$ a v rovině λ svou (tečnou) rovinu $\frac{1}{2}v(v-1)$-násobnou.

Vedle čáry (l) a plochy (L) i útvarů k nim duálních jest uvésti přímkovou plochu, vytvořenou přímkami kongruence, jež protínají zvolenou přímku l: tato *přímková plocha*, kterou označíme $[l]$, jest při uvažované kongruenci stupně $(n+v)$-tého; každým bodem přímky l prochází n přímek této plochy, každá rovina jdoucí přímkou l, obsahujíc v přímek plochy, dotýká se jí v v bodech.[1])

[1]) Teorii algebraických kongruencí přímek podali zejména *E. Kummer*, Über die algebraischen Strahlensysteme, insbesondere die der ersten und zweiten Ordnung, Abhandlungen Akad. Berlin 1866; *A. Voss*, Über

b) Pro kongruenci jsou důležité t. zv. fokální prvky jejích přímek a útvar z nich složený: Každá přímka p kongruence má s dvěma nekonečně blízkými přímkami jejími p_1 a p_2 po společném bodě $pp_1 = F_1$ resp. $pp_2 = F_2$, jež slují *fokálními body* přímky p; duálně dvě roviny, jdoucí přímkou p a nekonečně blízkou p_1 resp. p_2, slují *fokálními rovinami* $pp_1 = \varphi_1$ a $pp_2 = \varphi_2$ přímky p; bod F_1 a rovina φ_1, rovněž F_2 a φ_2 slují k sobě přidruženými. Geometrickým místem fokálních bodů na přímkách kongruence jest *fokální plocha*, jež je v obecném případě zároveň vytvořena fokálními rovinami těchto přímek; přímky kongruence jsou dvojnými tečnami plochy fokální.

Abychom totiž zjistili, že přímka p v kongruenci obsažená jest proťata dvěma sousedními přímkami kongruence, mějme na zřeteli vznik kongruence ze dvou komplexů; je-li p přímkou obou komplexů těch, jest možno mezi body ležícími na p a rovinami jdoucími přímkou p ustanoviti v jednom i druhém komplexu projektivnost tím, že přiřadíme každému bodu uvedené řady tečnou rovinu komplexového kužele s vrcholem v bodě tom, dotýkající se ho podél p, a každé rovině uvedeného svazku dotyčný bod komplexové čáry v rovině té, ležící na p; v jedné i druhé této projektivnosti odpovídají si tedy průsečík dvou nekonečně blízkých přímek komplexu a rovina takovými přímkami určená. V kongruenci oběma komplexům společné existuje pak ve dvou soumístných řadách bodů na p a ve dvou soumístných svazcích rovin s osou p projektivnost z uvedených vyplývající, a samodružné body i samodružné roviny její jsou fokálními body resp. fokálními rovinami této kongruence.

Fokální body na ∞^2 přímkách kongruence vytvořují bodovou plochu fokální, duálně fokální roviny přímek kongruence obalují fokální plochu rovinovou; předpokládejme, že různým přímkám kongruence patří různé body fokální (a duálně). Každá přímka kongruence dotýká se fokální plochy bodové ve dvou bodech; neboť má-li p fokální body $F_1 = pp_1$ a $F_2 = pp_2$, má sousední přímka p_1 fokální body F_{11}, nekonečně blízký k F_1, i F_{12}, nekonečně blízký k F_2, a jdouc dvěma sousedními body plochy (F_1 a F_{11}), dotýká se jí v F_{11}; obdobně se p dotýká plochy fokálních bodů v F_1 a ovšem také v F_2. A duálně jest p dvojnou tečnou fokální plochy rovinové v rovinách $\varphi_1 = pp_1$ a $\varphi_2 = pp_2$. Rovina φ_1, obsahujíc dvě tečné přímky p a F_2F_{12}, obě s dotyčným bodem F_2, jest tečnou rovinou fokální plochy bodové v F_2, rovněž φ_2 je tečnou rovinou její v F_1; jsou tedy fokální roviny tečnými rovinami fokální plochy bodové, při čemž každá ze dvou fokálních rovin přímky p má

Complexe und Congruenzen, Math. Annalen 9 (1876); *A. Weiler*, Eine elementare Betrachtung über Strahlencongruenzen, Zeitschrift Math. Phys. 31 (1886); *R. Schumacher*, Klassifikation der algebraischen Strahlensysteme, Math. Annalen 37 (1890); *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung II, 1893; viz také *C. M. Jessop*, A treatise on the line complex (1903), p. 258 a n.

svůj dotyčný bod v tom z obou fokálních bodů na p, jenž k ní není přidružen. A protože nejen každá rovina fokální plochy rovinové je tečnou rovinou fokální plochy bodové, nýbrž také obráceně, jak lze ukázati, každá tečná rovina fokální plochy bodové je rovinou fokální plochy rovinové, jsou obě tyto plochy totožny; fokální plochu dané kongruence označíme Φ.[2])

Stupeň a třídu fokální plochy Φ dané kongruence nalezneme z úvahy, že touto kongruencí lze ve svazku rovin, jdoucích libovolnou přímkou prostoru l, přiřaditi každé rovině $\nu(n-1)$ rovin, obsahujících přímku kongruence, jež přímku její ve zvolené rovině ležící protíná v bodě na l; v každé rovině přímkou l vedené leží totiž ν přímek kongruence a z průsečíku každé této přímky s l vychází mimo ni $n-1$ přímek kongruence, takže obdržíme $\nu(n-1)$ přímek a tolikéž rovin ke zvolené rovině příslušných. V této involuční korespondenci mezi rovinami, jdoucími přímkou l a vždy dvěma přímkami kongruence, jež se na l protínají, existuje $2\nu(n-1)$ rovin samodružných; jsou to roviny, obsahující dvojice nekonečně blízkých přímek kongruence na l se protínajících, také však roviny, určené vždy dvěma nesousedními přímkami kongruence, jež s přímkou l patří témuž svazku; protože pak takových dvojic přímek kongruence jest r a každá z obou přímek těch má v druhé přímku ji na l protínající, jest od hořejšího počtu odečísti $2r$. Leží tedy na libovolné přímce l jen $2\nu(n-1)-2r$ fokálních bodů dané kongruence, t. j. bodů fokální plochy její.

Proto má fokální plocha Φ kongruence stupně n-tého, třídy ν-té a řádu r-tého stupeň

$$n_f = 2\nu(n-1) - 2r,$$

a duálně třídu

$$\nu_f = 2n(\nu-1) - 2r;$$

odtud pak plyne vztah

$$n_f - \nu_f = 2(n-\nu).^3)$$

c) Jestliže v kongruenci n-tého stupně a ν-té třídy bodem prostoru prochází více než n přímek kongruence, prochází bodem tím neomezeně mnoho přímek jejích; duálně leží-li v rovině více než ν přímek kongruence, leží v ní neomezeně mnoho jejích přímek. Seznáme to pomocí korespondence mezi body ležícími na libovolné přímce l a rovinami touto přímkou jdoucími, v níž každému bodu na l odpovídá n rovin položených jednotlivými přímkami kongruence, jež bodem tím procházejí, a každé rovině přímkou l odpovídá ν bodů, v nichž přímky kongruence v rovině té ležící přímku l protínají; majíce zřetel k analytickému

[2]) Tvoří-li však (v případě, kdy každý fokální bod přímek kongruence je takovým pro ∞^1 přímek těch) fokální body čáru (tutéž nebo dvě různé), neplatí hořejší věta o totožnosti obou fokálních ploch.

[3]) Pro kongruenci stupně $n_1 n_2$, jež je úplným průsekem dvou komplexů stupně n_1 a n_2, vyplývá odtud a ze vzorce pro stupeň její plochy fokální (čl. 136*d*) řád této kongruence $r = n_1 n_2 (n_1 - 1)(n_2 - 1)$.

vyjádření této (ν, n)-značné korespondence, vidíme, že přísluší-li některému bodu na přímce l nebo některé rovině přímkou l více než uvedený počet rovin resp. bodů, přísluší takovému bodu nebo takové rovině nekonečně mnoho rovin resp. bodů.

Bod, kterým prochází ∞^1 přímek kongruence n-tého stupně (místo n přímek jejích), sluje *singulárním bodem* této kongruence; tvoří-li přímky kongruence, singulárním bodem jdoucí, kužel h-tého stupně, nazývá se bod ten singulárním *druhu h-tého* a značí se S_h, uvedený kužel pak (S_h). Rovina, která obsahuje ∞^1 přímek kongruence ν-té třídy (místo ν přímek jejích), sluje *singulární rovinou* kongruence té, a to *h-tého druhu*, jestliže přímky v ní ležící obalují čáru h-té třídy, a značí se σ_h, uvedená čára pak (σ_h).

Vyskytuje-li se speciálně u dané kongruence singulární bod S_1, jest (S_1) svazkem přímek se středem S_1, a rovina tohoto svazku jest singulární rovinou σ_1 kongruence té (svazek sám tedy (σ_1)); a obráceně.

Kongruence má buď *určitý* (konečný) *počet singulárních bodů* (a singulárních rovin) nebo má nekonečně mnoho bodů singulárních, jež vytvořují *singulární čáru* kongruence. Protože v tomto druhém případě je každý bod singulární čáry průsečíkem dvojic sousedních přímek kužele, který je přímkami kongruence bodem tím jdoucími vytvořen, je singulární čára složena z fokálních bodů přímek kongruence a bývá proto nazývána také *fokální čarou* takové kongruence. Množství singulárních bodů jest pro kongruenci zvlášť významné: podle toho rozeznávají se *kongruence bez singulárních čar a kongruence s čarami singulárními*.

Jestliže všechny přímky kongruence protínají pevnou čáru, jest tato singulární čarou kongruence, jsouc vytvořena body, z nichž každým jde ∞^1 přímek kongruence.

Má-li kongruence jednotlivý singulární bod S_h, splývají v něm jedny fokální body F_1 přímek kongruence, vytvořujících kužel (S_h), kdežto druhé fokální body F_2 těchto přímek tvoří čáru na fokální ploše kongruence. Fokální roviny φ_1 dotýkají se kužele (S_h) i fokální plochy, takže (S_h) je kuželem ploše té z S_h opsaným s uvedenou čarou dotyčnou; fokální roviny φ_2 jsou tečnými rovinami fokální plochy v bodě S_h a tvoří její tečný kužel v násobném bodě jejím S_h.[4])[5])[6])

[4]) Přímka kongruence n-tého stupně a ν-té třídy sluje *dvojnou* (m-násobnou), jestliže zastupuje pro každý ze svých bodů dvě (m) z n přímek kongruence jím jdoucích; v tom případě platí také za dvě (m) z ν přímek kongruence v každé rovině jí položené. Rod p přímkové plochy, v níž daná kongruence (n, ν, r), jež nemá nekonečně mnoho dvojných přímek, jest protata libovolným komplexem lineárním, sluje *rodem* kongruence; a platí $p = (n - 1)(\nu - 1) - r$.

[5]) Pro klasifikaci algebraických kongruencí viz zvl. *R. Schumacher*, Klassifikation der algebraischen Strahlensysteme, Math. Annalen 37 (1890) (pomocí geometrie vyššího prostoru); (bez uv. pomůcky) *G. Bordiga*, Sulla classificazione delle congruenze, Rendiconti Accad. Lincei Roma (5) 7_1 (1898).

d) Nejjednodušší jsou ovšem kongruence prvního stupně nulté třídy, totiž trs paprskový, a duální kongruence nultého stupně první třídy, totiž pole paprskové. Kongruence 1. stupně 1. třídy jest známá lineární kongruence s dvěma různými nebo splývajícími přímkami řídicími (singulárními), jež jsou osami řady singulárních bodů 1. druhu a svazku singulárních rovin 1. druhu; fokální plochy tato kongruence nemá.

Kongruence, jejíž stupeň (nebo třída) jest 1, má řád 0.

Obraťme se ke kongruencím *1. stupně v-té třídy* ($v > 0$).[7]) Z útvarů na počátku (v odst. *a*) uvedených vychází pro plochu (L) stupeň 0: plocha (L) neexistuje, t. j. průsečíky dvojic přímek kongruence, ležící v rovinách trsu se středem v libovolném bodě L, nevytvořují žádnou plochu. Průsečíky dvou a tedy (vzhledem ke stupni $n = 1$) neomezeného počtu přímek kongruence jsou singulárními body kongruence a vytvořují jednu nebo více čar: *každá kongruence 1. stupně* (třídy $v \leqq 1$) *má singulární čáru.* Rovněž neexistuje útvar, duální k čáře (l): libovolnou přímkou l nejdou roviny, jež by obsahovaly dvojice přímek kongruence, na l se protínajících.

Pro plochu k ploše (L) duální, vytvořenou rovinami, jež obsahují dvojice přímek kongruence na libovolné rovině λ se protínajících, objevuje se třída $\frac{1}{2}\nu(\nu - 1) \neq 0$ pro $\nu > 1$: rovina λ obsahuje singulární body, průsečíky se singulárními čarami kongruence, a dotčená plocha se rozpadá v trsy se středy v těchto bodech, při čemž každý trs se středem v S_h jest pokládati za $\frac{1}{2}h(h-1)$-násobný; označíme-li stupeň singulární čáry, složené ze singulárních bodů h-tého druhu, n_h, platí tedy

$$\Sigma n_h h(h-1) = \nu(\nu-1),$$

kde součet se týká singulárních čar kongruence. Čára (l) se skládá ze singulárních čar kongruence, a singulární čáru sestávající ze singulárních bodů h-tého druhu jest počítati jako $\frac{1}{2}h(h-1)$-násobnou.

Přímková plocha [l] jest zde stupně $(\nu+1)$-ho; dvě plochy [l] a [l'] mají mimo $\nu + 1$ svých přímek společnou čáru stupně $\nu(\nu+1)$-ho. Tato čára jest však souborem singulárních čar kongruence, protože každý její bod jako průsečík dvou různých přímek uvedených ploch jest singulárním bodem kongruence; a protože každým bodem singulární

[6]) Kongruence, obsahující nekonečně mnoho svazků paprskových nebo zborcených řad kvadratických (nebo kubických), soustavně vyšetřuje *R. Baldus*, Über Strahlensysteme, welche unendlich viele Regelflächen zweiten Grades enthalten, Diss. Erlangen 1910; Über die algebraischen Strahlensysteme, welche unendlich viele Strahlenbüschel enthalten, Math. Annalen 71 (1911); Über die Abbildung doppelt überdeckter Regelflächen auf einfach überdeckte, Math. Annalen 75 (1914).

[7]) O nich na př. *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie II, p. 23 a n.; také *G. Fouret*, Sur la génération des congruences de droites du premier ordre et de classe quelconque, Rendiconti Circolo mat. Palermo 6 (1892); *L. Godeaux*, Sur les congruences des droites, Enseignement math. 13 (1911).

čáry složené ze singulárních bodů h-tého druhu jde h přímek jedné a h přímek druhé plochy, platí

$$\Sigma n_h h^2 = \nu(\nu + 1).$$

Z obou nalezených rovnic vyplývá (po odečtení)

$$\Sigma n_h h = 2\nu.$$

Z nulové hodnoty pro stupeň fokální plochy vysvítá, že kongruence 1. stupně nemají fokální plochy bodové. Každý fokální bod přímek takové kongruence je singulárním bodem jejím, obráceně každý singulární bod jest jedním z obou fokálních bodů pro všechny přímky svého kužele.

Předpokládejme, že oba fokální body na přímkách kongruence 1. stupně jsou obecně různé. V tom případě vytvořují druhé fokální body všech přímek kužele (S_h) čáru, složenou z bodů singulárních: promítá tedy každý kužel tvořený přímkami kongruence, jež jdou singulárním bodem jejím, singulární čáru kongruence. A dále poznáváme, že kongruence s dvěma singulárními čarami sestává z přímek obě tyto čáry protínajících; neboť leží-li dva fokální a tedy singulární body libovolné přímky kongruence na dvou čarách, promítají přímky každého z obou kuželů k bodům těm příslušných druhou čáru singulární, což platí o všech bodech jedné i druhé singulární čáry; totéž může platit o jediné čáře singulární. Majíce pak zřetel k průseku libovolné roviny s kongruencí, vytvořenou přímkami, jež protínají dvě dané čáry, vidíme, že *kongruence 1. stupně mají nejvýše dvě čáry singulární* (jež zde bývají nazývány také čarami řídicími).

e) Podle předcházejícího obdržíme všechny kongruence 1. stupně, jejichž přímky mají různé body fokální, ze suposice, že taková kongruence má jednu nebo dvě čáry singulární.

Kongruence 1. stupně s jedinou čarou singulární jest složena z bisekant (pravé) *prostorové křivky 3. stupně a jest třídy 3.* Neboť jsou-li u kongruence s jednou singulární čarou body ji skládající singulárními h-tého druhu, jest čára ta stupně $(h + 1)$-ho, jsouc z každého bodu svého promítána kuželem h-tého stupně; z relací v předešlém odstavci uvedených nabývá tedy první a třetí tvaru

$$(h + 1)\, h\, (h - 1) = \nu(\nu - 1), \qquad (h + 1)\, h = 2\nu,$$

z nichž vyplývá (jako jediný případ zde přijatelný) $h = 2$, tedy pro singulární čáru stupeň 3. a $\nu = 3$.

Jak je z dřívějšího známo, vytvořují tuto kongruenci 1. stupně 3. třídy dva kolineární trsy (bez společné roviny sobě samé odpovídající) průsečnicemi sdružených rovin svých.[8])

Kongruence s dvěma různými čarami singulárními ať má čáry ty složeny ze singulárních bodů druhu h_1 a h_2; kužele promítající (přímkami

[8]) O kongruenci této a duální viz také *A. Emch*, On the congruences of rays (3, 1) and (1, 3), Annals math. 11 (1897).

kongruence) z bodů první nebo druhé čáry této druhou resp. prvou, mají stupeň h_1 resp. h_2, čáry samy pak mají stupeň h_2 resp. h_1. První a třetí relace předešlého odstavce dávají zde tedy

$$h_1 h_2 (h_1 + h_2 - 2) = \nu(\nu - 1), \qquad h_1 h_2 = \nu,$$

z nichž druhá je samozřejmá (libovolná rovina obsahuje $h_1 h_2$ přímek kongruence ν-té třídy, jež spojují po dvou h_1 průsečíků jedné a h_2 průsečíků druhé čáry singulární v této rovině); rovnice tyto se redukují na

$$h_1 + h_2 = \nu + 1, \qquad h_1 h_2 = \nu,$$

takže $h_1 = \nu$, $h_2 = 1$.

Jsou tedy singulárními čarami kongruence $(1, \nu)$ čára ν-tého stupně a přímka. Tato přímka musí čáru ν-tého stupně protínati v $\nu - 1$ bodech; neboť libovolným bodem v prostoru má procházeti jediná přímka kongruence (protínající obě singulární čáry v různých bodech), takže dva kužele, promítající z bodu toho jednu resp. druhou čáru singulární, musí míti mimo přímky jdoucí průsečíky obou těchto čar jen jednu přímku společnou. Dospěli jsme tím k výsledku:

Kongruence 1. stupně ν-té třídy s dvěma singulárními čarami jest složena z přímek, protínajících prostorovou čáru ν-tého stupně a přímku, jež mají $\nu - 1$ společných bodů; z bodů singulární přímky vycházejí kužele ν-tého stupně, z bodů singulární čáry svazky, sestávající z přímek kongruence.

Mimo lineární kongruenci jsou nejjednodušími případy této skupiny kongruence $(1, 2)$ a $(1, 3)$. První jest složena z přímek, jež v různých bodech protínají kuželosečku a přímku v jednom bodě ji sekoucí; z trsu se středem v průsečíku obou těchto singulárních čar patří do kongruence dva svazky (tvořící kužel 2. stupně), z nichž jeden leží v rovině kuželosečky a druhý v rovině určené tečnou kuželosečky v průsečíku tom a singulární přímkou; kongruenci tuto lze vytvořiti, jak známo, průsečnicemi sdružených rovin dvou kolineárních trsů, jež mají jednu společnou rovinu samodružnou. Druhá se skládá z přímek, které protínají prostorovou čáru 3. stupně a její pevnou bisekantu; z trsu se středem v průsečíku obou těchto čar patří do kongruence kužel 2. stupně promítající kubiku i svazek přímek v rovině jdoucí tečnou kubiky v bodě tom a singulární přímkou; tuto kongruenci lze vytvořiti zborcenými řadami ploch kvadratických, obsažených ve svazku s basí v čáře, sestávající z obou singulárních čar kongruence, jež singulární přímku protínají (doplňkové řady kvadratické na plochách těch vytvořují hořejší kongruenci $(1, 3)$, složenou z bisekant křivky kubické).[9])

[9]) K uvedeným dvěma typům přímkových kongruencí 1. stupně (s jednou nebo dvěma čarami singulárními) přistupuje ještě typ třetí, kongruence přímek, z nichž každá má oba fokální body své v jeden splývající. Taková kongruence $(1, \nu)$ má ovšem jedinou čáru singulární, a to přímku p; sestává z paprskových svazků o středech P v rovinách ϱ, s přímkou p incidentních, jež obdržíme, jestliže každému bodu na přímce p přiřadíme ν rovin

138. Kongruence druhého stupně. *a*) Kongruence 2. stupně ν-té třídy mají buď konečný počet singulárních bodů nebo singulární čáru; zajímavé jsou zejména kongruence bez čar singulárních.[1])

Kongruence 2. stupně ν-té třídy bez singulárních čar mají řád $r = \nu - 2$ *a fokální plochu stupně* $n_f = 4$, *třídy* $\nu_f = 2\nu$. Neboť obecná přímka této kongruence, dotýkajíc se plochy fokální ve dvou bodech, nemůže s ní míti (mimo uvedené čtyři) dalších bodů společných; takovým bodem by totiž procházely mimo dotčenou přímku dvě přímky kongruence k sobě nekonečně blízké, takže by bod ten byl singulárním bodem kongruence, ježto by jím šlo více než dvě přímky její. A protože o stupni fokální plochy platí $n_f = 2\nu(n-1) - 2r$, obdržíme zde rovnici $4 = 2\nu - 2r$ a z ní $r = \nu - 2$; z obecného vzorce pro třídu plochy fokální $\nu_f = 2n(\nu - 1) - 2r$ plyne pak $\nu_f = 2\nu$.

Ke každému bodu v prostoru jest kongruencí 2. stupně přiřaděna rovina, určená oběma přímkami kongruence z něho vycházejícími, jež byla nazvána *nulovou rovinou* bodu toho; obráceně ovšem přísluší v kongruenci ν-té třídy ke každé rovině $\frac{1}{2}\nu(\nu - 1)$ bodů, průsečíků přímek kongruence v ní ležících. Body příslušné k rovinám trsu se středem L vytvořují plochu (L) stupně $(r+1)$-ho, na níž je L bodem obyčejným. *Stupeň* této *plochy* (L) *jest* tedy podle hořejšího $\nu - 1$; toto číslo obdržíme však také přímo odtud, že na libovolné přímce kongruence p leží z bodů plochy (L) jen její průsečíky s ostatními $\nu - 1$ přímkami kongruence, v rovině Lp obsaženými (průsečík dvou jiných přímek kongruence tam neleží, protože by to byl bod singulární, jichž na obecné přímce kongruence p není). Ze stupně $\nu - 1$ plochy (L) tak nalezeného plyne pak opět $r = \nu - 2$ a dále $n_f = 4$, $\nu_f = 2\nu$.

U kongruence 2. stupně bez singulárních čar *nemůže se vyskytnouti singulární rovina druhu vyššího než prvního*; neboť kdyby v takové rovině σ_h přímky kongruence obalovaly čáru třídy $h > 1$, vycházely

přímkou p jdoucích a každé rovině ϱ jediný bod P. Jsou zvláštním případem (pro $n = 1$) kongruencí (n, ν), k nimž dospějeme od (n, ν)-značné korespondence mezi body a rovinami, s pevnou přímkou incidentními. Viz *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie II, p. 29.

[1]) O těchto a duálních kongruencích pojednávají zejména *E. Kummer*, Über die algebraischen Strahlensysteme, insbesondere die der ersten und zweiten Ordnung, Abhandlungen Akad. Berlin 1866; *Th. Reye*, Über Strahlensysteme zweiter Klasse und die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit 16 Doppelpunkten, Journal r. a. Math. 86 (1878), a Über das Strahlensystem zweiter Klasse sechster Ordnung von der ersten Art, Journal r. a. Math. 93 (1882); *T. A. Hirst*, On Cremonian congruences, Proceedings Math. soc. London 14 (1883); *W. Stahl*, Über Strahlensysteme zweiter Ordnung, Journal r. a. Math. 95 (1883), a Das Strahlensystem vierter Ordnung und zweiter Klasse, Journal r. a. Math. 97 (1884); *U. Masoni*, Sui connessi conici ed in particolare sui sistemi di rette del 2° ordine, Rendiconti Accad. Napoli 22 (1883); obšírně *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie II, p. 39—316; krátce *C. M. Jessop*, A treatise on the line complex, p. 276 a n.

by z průsečíku přímky kongruence s rovinou σ_h více než dvě přímky kongruence, takže by průsečíky ty byly singulárními body kongruence a tvořily by (jsouce v počtu aspoň ∞^1 na σ_h) singulární čáru proti předpokladu.

Přímka kongruence p, jdoucí singulárním bodem jejím S_h, protíná plochu (L) mimo S_h v $\nu - h$ bodech, totiž v průsečících svých s ostatními přímkami kongruence ν-té třídy, v rovině Lp ležícími, pokud tyto nepatří k přímkám kužele (S_h). Proto *jest singulární bod h-tého druhu* S_h *(*$h-1$*)-násobným bodem plochy* (L); z průsečíků přímky p s plochou $(\nu - 1)$-ho stupně (L) spadá totiž $\nu - 1 - (\nu - h) = h - 1$ do S_h. Speciálně tedy bodů S_1 plocha (L) neobsahuje.

Libovolná přímka l, položená singulárním bodem S_h a bodem L, protíná (L) v $\nu - h - 1$ dalších bodech, jejichž nulové roviny jdou bodem L; u přímky jdoucí singulárním bodem S_h vyskytuje se tedy v uvažované kongruenci $\nu - h - 1$ dvojic přímek kongruence, jejichž průsečíky a roviny jsou incidentní s touto přímkou. Přiřadíme-li ve svazku rovin s osou l navzájem roviny, jdoucí dvěma přímkami kongruence, jež se na l protínají, vylučujíce přímky kužele (S_h), vznikne tam involuční korespondence, v níž každé rovině odpovídá $\nu - h$ rovin; odečteme-li od $2(\nu - h)$ samodružných rovin této korespondence roviny jdoucí hořejšími dvojicemi přímek na l se protínajících, každou dvakrát, tedy $2(\nu - h - 1)$ rovin, zbudou 2 roviny určené vždy dvěma sousedními přímkami kongruence s fokálním bodem na l. Protože tedy libovolná přímka jdoucí bodem S_h protíná fokální plochu 4. stupně ve dvou bodech mimo S_h, *jest každý singulární bod kongruence dvojným bodem její plochy fokální.*

Kužel (S_h) *jest stupně nejvýše* $(\nu - 1)$*-ho*; neboť v rovině položené bodem S_h a přímkou kongruence, jež bodem tím neprochází, leží ν přímek jejích, z nichž tedy nemůže více než $\nu - 1$ jíti bodem S_h, takže $h \leqq \nu - 1$.

Přímky kužele (S_h) mají jeden svůj bod fokální ve vrcholu S_h, druhé fokální body jejich tvoří čáru k, podél níž se (S_h) dotýká fokální plochy uvažované kongruence. Čára k je stupně $2h$-tého; protože pak každá přímka kužele (S_h) má s čarou k mimo S_h jediný bod společný, a tedy rovina jdoucí bodem S_h má s ní mimo S_h společných h bodů, má čára k v S_h bod h-násobný. Přímky kužele (S_h) v počtu h, dotýkající se čáry k v S_h, mají tam oba své fokální body a proto s fokální plochou dotyk čtyrbodový; protože však ve dvojném bodě plochy má nejvýše šest přímek s plochou dotyk čtyrbodový, musí býti $h \leqq 6$. Tím jsme tedy nalezli, že *singulární bod* kongruence 2. stupně bez čar singulárních *může býti druhu nejvýše šestého*; a vzhledem k předcházejícímu platí $\nu \leqq 7$, t. j. *kongruence 2. stupně bez singulárních čar jest třídy nanejvýš* 7.

b) *Dvojnou přímkou* kongruence sluje přímka, jež pro každý svůj bod platí za dvě přímky kongruence; nulová rovina libovolného bodu

jejího je neurčitá. Dvojné přímky kongruence obdržíme jako součástky průsečné čáry dvou ploch (L) a (L'); čára, v níž se tyto plochy stupně $(\nu-1)$-ho protínají, má stupeň $(\nu-1)^2$ a musí obsahovati čáru (LL'), jejíž stupeň je $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)+\nu-2$. Tak nalézáme jako *počet dvojných přímek* kongruence $(2, \nu)$ rozdíl z uvedených dvou čísel

$$\tfrac{1}{2}(\nu-2)(\nu-3).$$

Kongruence třídy $\nu \leqq 3$ nemá tedy přímek dvojných.

Průsečík dvojné přímky kongruence 2. stupně s jinou přímkou její je zajisté singulárním bodem S_h, a dvojná přímka kongruence jej obsahující je také dvojnou přímkou kužele (S_h). Přímková plocha $[d]$, příslušná ke dvojné přímce kongruence d, rozpadá se ve dva kužele s vrcholy na d. Neboť předpokládáme-li, že na d leží m singulárních bodů kongruence S_{h_k} $(k = 1, 2, \ldots, m)$, protíná rovina přímkou d položená každý kužel (S_{h_k}) mimo d ještě v $h_k - 2$ přímkách, všechny tedy v $\Sigma h_k - 2m$ přímkách; protože však taková rovina obsahuje mimo d jen $\nu-2$ přímek kongruence ν-té třídy, platí $\Sigma h_k - 2m = \nu - 2$. S druhé strany, ježto stupeň plochy $[d]$ jest $\nu+2$, platí $\Sigma h_k = \nu + 2$; z obého tedy vyplývá $m = 2$. *Spojuje* tudíž *každá dvojná přímka* kongruence 2. stupně ν-té třídy *dva singulární body* její S_{h_1} a S_{h_2}, o nichž platí

$$h_1 + h_2 = \nu + 2.$$

A protože uvažovaná kongruence má singulární bod druhu nejvýše $(\nu-1)$-ho, jest singulární bod na dvojné přímce její druhu aspoň 3.

Můžeme zjistiti, že *dvojné přímky kongruence* $(2, \nu)$ *procházejí všechny jedním bodem vyjma u* (jedné) *kongruence třídy* $\nu = 6$ (a $\nu = 4$). Dejme tomu totiž, že přímky d a d' jsou mimoběžnými dvojnými přímkami kongruence; na d ať leží S_{h_1} a S_{h_2}, na d' pak S_{h_3} a S_{h_4}. Kužel (S_{h_1}), kde podle hořejšího $h_1 \geqq 3$, musí míti (mimo d) dvojnou přímku, jež protíná d' v S_{h_3} nebo S_{h_4}, protože by jinak kužel ten protínal d' ve více než dvou bodech, ovšem singulárních, což odporuje větě, že jsou jen dva takové body na dvojné přímce; podobně pro S_{h_2}. Tím přicházíme ke čtyřem přímkám dvojným v uvažované kongruenci; z výrazu pro počet dvojných přímek však vidíme, že kongruence mající více než 3 takové přímky má jich aspoň 6 a jest třídy aspoň 6. Z relace $h_1 + h_2 \geqq 8$ a odtud, že na d' mohou býti jen dva singulární body, plyne $h_1 = h_2 = 4$, obdobně pak $h_3 = h_4 = 4$; příslušná kongruence jest třídy 6. a dvojné přímky její jsou hranami čtyrstěnu s vrcholy v singulárních bodech 4. druhu. Kongruence $(2, 4)$ má jedinou dvojnou přímku, obsahující dva singulární body druhu 3. V ostatních případech $(\nu > 4)$ protínají se dvojné přímky kongruence v témž bodě, singulárním pro kongruenci (protože jím jdou aspoň 3 dvojné přímky).

Označme společný bod všech dvojných přímek kongruence S. Singulární bod uvažované kongruence, ležící na jediné dvojné přímce, jež prochází bodem S, jest podle hořejšího aspoň 3. druhu; jest právě

druhu 3., protože kdyby byl vyššího druhu, měl by příslušný kužel buď na jiné dvojné přímce mimo S více než jeden průsečík a tedy bod singulární nebo by měl ještě jinou dvojnou přímku, což obé jest vyloučeno. A odtud nazpět plyne, že S je druhu $(\nu - 1)$-ho.

Vedle singulárních bodů ležících na dvojných přímkách může kongruence $(2, \nu)$ míti body singulární mimo takové přímky (při $\nu \leqq 3$ ovšem jen tyto); singulární bod kongruence třídy $\nu > 3$, neležící na dvojné přímce, jest druhu 1. nebo 2., protože by jinak jeho kužel protínal dvojnou přímku kongruence ve více než dvou bodech (při $\nu \leqq 3$ plyne to z horní meze pro h u S_h).[2])

c) Přímková plocha $[l]$, vytvořená přímkami kongruence $(2, \nu)$, jež protínají přímku l, je stupně $(\nu + 2)$-ho; každý singulární bod kongruence S_h jest jejím bodem h-násobným. Tři různé plochy takové mají $(\nu + 2)^3$ společných bodů; jejich každý průsečík jest buď singulárním bodem kongruence, jestliže jím procházejí tři přímky, po jedné z každé plochy, nebo bodem, v němž přímka společná dvěma z ploch těch protíná plochu třetí. Má-li uvažovaná kongruence a_h singulárních bodů h-tého druhu, platí všechny singulární body její, protože S_h jest počítati podle jeho násobnosti jako h^3 průsečíků, za $\Sigma a_h h^3$ průsečíků uvedených tří ploch (kde součet se týká všech druhů bodů singulárních); ježto pak vždy dvě z ploch těch mají $\nu + 2$ společných přímek a každá přímka protíná třetí plochu v $\nu + 2$ bodech, jest průsečíků na druhém místě vytčených celkem $3(\nu + 2)^2$. Z tohoto rozboru plyne tedy rovnice

$$(\nu + 2)^3 = \Sigma a_h h^3 + 3(\nu + 2)^2$$

čili

$$\Sigma a_h h^3 = (\nu - 1)(\nu + 2)^2.$$

Vezměme dále v úvahu přímkovou plochu $[l]$ stupně $(\nu + 2)$-ho a čáru (l'), jež má stupeň $\frac{1}{2}\nu(\nu - 1) + \nu - 2$. Každý jejich průsečík jest buď singulárním bodem kongruence, jestliže jím procházejí dvě přímky kongruence na (l') se protínající a přímka plochy $[l]$, nebo bodem, v němž jedna z přímek kongruence jest proťata druhou, se kterou splynula přímka plochy $[l]$. Je-li průsečíkem první skupiny singulární bod S_h, platí za $\frac{1}{2}h^2(h - 1)$ průsečíků, protože je na $[l]$ bodem h-násobným a na (l') bodem $\frac{1}{2}h(h - 1)$-násobným; dávají tedy všechny singulární body uvažované kongruence $\Sigma a_h \cdot \frac{1}{2}h^2(h - 1)$ takových průsečíků. Průsečíků druhé skupiny jest $(\nu - 1)(\nu + 2)$, protože každá z $\nu + 2$ společných přímek ploch $[l]$ a $[l']$ jest v takových bodech proťata zbývajícími $\nu - 1$ přímkami, jež leží v rovině přímkou tou a přímkou l' položené. Shrneme-li vše, dostáváme rovnici

$$(\nu + 2)\left[\tfrac{1}{2}\nu(\nu - 1) + \nu - 2\right] = \Sigma a_h \cdot \tfrac{1}{2}h^2(h - 1) + (\nu - 1)(\nu + 2)$$

[2]) O poloze singulárních bodů lze dále zjistiti: Každá singulární rovina kongruence 2. stupně bez singulárních čar obsahuje 6 singulárních bodů, jež leží na kuželosečce; každý kužel (S_2) obsahuje 9 singulárních bodů, jež leží na prostorové křivce 4. stupně 1. druhu s dvojným bodem v S_2.

a odtud

$$\Sigma a_h h^2 (h - 1) = (\nu^2 - 4)(\nu + 1).$$

Spojíme-li tento výsledek s hořejším, obdržíme jednodušší rovnici

$$\Sigma a_h h^2 = 2\nu(\nu + 2).$$

d) Pomocí nalezených dvou rovnic $\Sigma a_h h^2 = 2\nu(\nu + 2)$ a $\Sigma a_h h^3 = (\nu - 1)(\nu + 2)^2$ i předcházejících výsledků, zejména o dvojných přímkách a jejich souvislosti s body singulárními, můžeme určiti druh a počet singulárních bodů u všech kongruencí 2. stupně.

Kongruence 2. stupně nejvyšší třídy $\nu = 7$ má jediný singulární bod S_6; jím procházejí všechny dvojné přímky její v počtu $\frac{1}{2}(\nu - 2)(\nu - 3) = 10$, z nichž každá obsahuje jeden singulární bod S_3. Jiných bodů singulárních tato kongruence nemá, jak plyne z první i druhé rovnice hořejší.

Kongruence 2. stupně třídy $\nu = 6$ jsou dvě. Jedna $(2, 6)_{\mathrm{I}}$ má singulární bod S_5, kterým jdou dvojné přímky její v počtu 6, každá obsahujíc jeden S_3. Singulárního bodu S_4 zde není, protože v kladném případě by přímková plocha $[S_4 S_5]$ byla stupně aspoň 9., ač má míti stupeň $\nu + 2$. Singulární body druhu 1. a 2. nalezneme z hořejších dvou rovnic $\alpha_1 + 4\alpha_2 = 17$, $\alpha_1 + 8\alpha_2 = 33$ v počtu $\alpha_2 = 4$, $\alpha_1 = 1$.

Druhá kongruence 6. třídy $(2, 6)_{\mathrm{II}}$ má podle dřívější úvahy 4 body S_4 a nemůže tedy z důvodu v předcházejícím uvedeného míti žádný S_5; z rovnic pro $\Sigma a_h h^2$ a $\Sigma a_h h^3$ pak vyplývá $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 8$, $\alpha_1 = 0$.

Kongruence (2, 5) má jeden S_4; na třech dvojných přímkách jím jdoucích leží po jednom S_3, takže $\alpha_3 = 3$; hořejší rovnice pak poskytují $\alpha_2 = 6$, $\alpha_1 = 3$.

Kongruence (2, 4) má dva singulární body 3. druhu na dvojné přímce a dále $\alpha_2 = 6$, $\alpha_1 = 6$.

Kongruence (2, 3) má singulární body jenom 2. a 1. druhu a to, jak řešením uvedených dvou rovnic plyne, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_1 = 10$.

Konečně kongruence (2, 2) může míti pouze singulární body 1. druhu; má jich $\alpha_1 = 16$.

Sečteme-li u každé kongruence $(2, \nu)$ bez singulárních čar stanovené body singulární, shledáme, že platí

$$\Sigma a_h = 18 - \nu.^{3})$$

Protože každý singulární bod kongruence je dvojným bodem fokální plochy její, má tedy fokální plocha kongruence 2. stupně ν-té třídy $18 - \nu$ bodů dvojných; a ježto plocha 4. stupně 2ν-té třídy nemůže míti více dvojných bodů, jest také obráceně každý dvojný bod fokální plochy singulárním bodem kongruence $(2, \nu)$, k níž plocha ta přísluší.

e) Z uvedených kongruencí jest nejjednodušší a byla nejvíce vyšetřována kongruence 2. stupně a 2. třídy bez singulárních čar čili

[3]) Vedle tří hořejších rovnic pro Σa_h, $\Sigma a_h h^2$, $\Sigma a_h h^3$ platí $\Sigma a_h h = 4(\nu + 2)$, jak po prvé nalezl *U. Masoni* v uv. pojednání.

kongruence *kvadratická* (bez čáry singulární). Tato soběduální kongruence se 16 singulárními body prvního druhu a 16 singulárními rovinami má fokální plochou Kummerovu soběduální plochu 4. stupně a 4. třídy s dvojnými body a dvojnými rovinami tečnými v uvedených singulárních prvcích kongruence (2, 2).

Kvadratická kongruence jest *úplným průsekem komplexů lineárního a kvadratického.* Lineární komplex danou kongruenci (2, 2) obsahující sestává z přímek, invariantních při nulové korelaci, v níž každému bodu odpovídá rovina, položená dvěma přímkami kongruence jím jdoucími, a každé rovině bod, společný dvěma přímkám kongruence v ní ležícím; takto je tedy určen jediný lineární komplex, mající v každém svazku svém dvě přímky kongruence dané. Protože singulární body a roviny kongruence (2, 2) jsou dvojnými body a tečnými rovinami plochy Kummerovy a protože u této plochy každému dvojnému bodu přísluší šest uvedených rovin v šesti lineárních komplexech po dvou involučních i duálně každé dvojné rovině tečné přísluší šest uvedených bodů v těchto komplexech, tvoří singulární prvky kongruence dotčenou konfiguraci; lineární komplex kongruenci (2, 2) obsahující jest jedním z těchto šesti komplexů. A dvojné tečny plochy Kummerovy, příslušné do kvadratického komplexu, jehož je plocha ta plochou singulární, tvoří šest kongruencí kvadratických, z nichž každá přísluší také do jednoho ze základních komplexů lineárních. Je tedy kongruence (2, 2) společná lineárnímu komplexu a komplexu kvadratickému;[4]) a spolu vidíme, že ke každé kongruenci (2, 2) přistupuje pět jiných s touže plochou fokální jako kongruence daná.[5])[6])[7])

[4]) Ze souvislosti mezi svazky paprskovými v singulárních bodech a rovinách kongruence (2, 2) vyplývá, že za kvadratický komplex danou kongruenci (2, 2) obsahující lze zvoliti komplex čtyrstěnový (ze 40 příslušných komplexů takových). A dále, že každou kongruenci kvadratickou lze vytvořiti přímkami, jež protínají sdružené přímky tří projektivních svazků paprskových, z nichž dva mají společný paprsek sobě samému odpovídající, nebo jež mají tři sdružené paprsky jdoucí týmž bodem a ležící v téže rovině. Jsou dvě skupiny kvadratických kongruencí podle toho, je-li lineární komplex kongruenci obsahující obecný nebo speciální; celkem existuje, jak nalezl *C. Segre*, 39 typů kongruencí kvadratických. O této kongruenci (mimo některé publikace, v pozn. [1]) uvedené: Kummer, Reye, Jessop; velmi obšírně Sturm, p. 117—228) pojednávají: *E. Caporali*, Sui complessi e sulle congruenze di 2º grado, Memorie Accad. Lincei Roma (3) 2 (1878) nebo Memorie di geometria (1888); *F. Schur*, Geometrische Untersuchungen über Strahlencomplexe ersten und zweiten Grades, Math. Annalen 15 (1879); *W. Stahl*, Über das Strahlensystem zweiter Ordnung und zweiter Klasse, Journal r. a. Math. 92 (1882); *C. Segre*, Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche, Memorie Accad. Torino (2) 36 (1884); *R. Sturm*, Über Strahlencongruenzen von gleichem Bündel- und Feldgrade, Journal r. a. Math. 101 (1887); *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage III (5. vyd. 1923), p. 159 a n. Speciálním případem se zabýval *V. Simandl*, O zvláštních v sobě duálních quadratických přímkových kongruencích, Časopis mat. fys. 48 (1919).

[5]) Kongruence 2. stupně se singulárními čarami nalezl většinou *E. Kum-*

139. Algebraické plochy zborcené. *a*) Jednomocná spojitá soustava přímek v prostoru tvoří přímkovou řadu čili osnovu, jež se obyčejně nazývá přímkovou plochou. Procházejí-li všechny přímky soustavy týmž bodem, je to plocha kuželová; jsou-li všechny tečnami prostorové čáry, je to plocha rozvinutelná;[1]) při obecné poloze jednotlivých přímek jednomocné soustavy vytvořuje tato přímkovou plochu *zborcenou*.[2])

mer; jeho výsledky doplnili *R. Sturm* a *R. Schumacher*. Patří k nim kongruence (2, 6, 2), složená z bisekant prostorové čáry 4. stupně prvního druhu, s touto čarou singulární; kongruence s dvěma singulárními čarami, buď (2, 4, 2), sestávající z přímek, jež protínají dvě pravé kuželosečky s dvěma body společnými, nebo (2, n, 0), tvořené přímkami, které protínají přímku a čáru n-tého stupně mající $n-2$ body na přímce té; a řada kongruencí s jednou singulární čarou, složených z unisekant čáry, spec. přímky (mezi nimi kongruence (2, 2), tvořená přímkami, jež protínají přímku a dotýkají se pravé plochy kvadratické ji neobsahující). O těchto kongruencích viz (mimo uv. pojednání Kummerovo z r. 1866) *R. Schumacher*, Einteilung der Strahlencongruenzen zweiter Ordnung mit Brenn- oder singulären Linien, Math. Annalen 38 (1891); *D. Montesano*, Su una congruenza di rette di 2° ordine e di 4ª classe, Atti Accad. Torino 27 (1892), a Su due congruenze di rette di secondo ordine e di sesta classe, Rendiconti Accad. Lincei Roma (5) 1 (1892); *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie II, p. 317 a n.

[6]) Přímkové kongruence 3. stupně (a vyšší) vyšetřovali zvl. *B. Irmer*, Über Strahlensystem dritter Ordnung mit Brenncurven, Diss. Halle 1870; *T. A. Hirst*, On congruences of the third order and class, Proceedings Math. soc. London 16 (1885), a On the Cremonian congruences which are contained in a linear complex, Proceedings Math. soc. London 17 (1886); *R. Sturm*, Über Strahlencongruenzen von gleichem Bündel- und Feldgrade, Journal r. a. Math. 101 (1887); *G. Fano*, Sulle congruenze di rette del terzo ordine prive di linea singolare, Atti Accad. Torino 29 (1894), a hlavně Nuove ricerche sulle congruenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare, Memorie Accad. Torino (2) 51 (1901), také Sopra alcune particolari congruenze di rette del terzo ordine, Atti Accad. Torino 36 (1901); *A. del Re*, Sopra una congruenza omaloide del 3° grado, Memorie Accad. Modena (3) 1 (1898); *V. Snyder*, Conjugate line congruences contained in a bundle of quadric surfaces, Transactions Amer. math. soc. 11 (1910); *M. Stuyvaert*, Sur la congruence de droites de troisième ordre et classe de genre deux, Rendiconti Circolo mat. Palermo 30 (1910).

[7]) O kongruencích spojnic sdružených bodů dvou rovin v korespondenci biracionální (Cremonově) viz *T. A. Hirst*, On Cremonian congruences, Proceedings Math. soc. London 14 (1883); *E. Schöner*, Untersuchungen über das durch zwei kubisch verwandte Ebenen erzeugte Strahlensystem, Diss. München 1887. Kongruence spojnic sdružených bodů dvou rovin v korespondenci (m, n)-značné studovali *I. Conti*, Sulle congruenze generate da una coppia di piani in corrispondenza doppia, Rendiconti Circolo mat. Palermo 1 (1887) a 2 (1888); *P. Visalli*, Sulle congruenze generate da due piani punteggiati in corrispondenza (1, ν), Rendiconti Ist. Lombardo (2) 28 (1895), a Su alcune congruenze della seconda classe, tamtéž; *R. Baldus*, Zur Theorie der gegenseitig mehrdeutigen algebraischen Ebenentransformationen, Math. Annalen 72 (1912).

[1]) Plochy kuželové se čítávají k rozvinutelným (jako jejich zvláštní případ).

[2]) O algebraických přímkových plochách zborcených pojednávají zejména *A. Voss*, Zur Theorie der windschiefen Flächen, Math. Annalen 8

Přímky plochy zborcené, jejichž soubor plochu představuje, slují určitěji také *přímkami vytvořujícími*. Tečné roviny zborcené plochy v bodech přímky vytvořující procházejí touto přímkou; obráceně rovina položená vytvořující přímkou plochy zborcené jest její tečnou rovinou v některém bodě této přímky. *Řada bodů na vytvořující přímce plochy zborcené jest projektivní ke svazku tečných rovin jejích v těchto bodech.* Neboť protneme-li tři vytvořující přímky zborcené plochy příčkami, shledáme, že řady průsečíků těchto příček na přímkách těch jsou projektivní, jakož i projektivní ke svazkům rovin jdoucích každou z oněch přímek a těmito příčkami; jsou-li pak zvolené přímky soumeznými, jsou roviny, určené jednou z nich a uvedenými příčkami, tečnými rovinami plochy v průsečících přímky té s příčkami. Vzhledem k tomu můžeme plochu zborcenou pokládati za vytvořenou přímkami jako osami řad jejích bodů nebo duálně jako osami svazků tečných rovin jejích.

Stupeň a třída zborcené plochy jsou si rovny (a rovny počtu přímek plochy libovolnou přímkou v prostoru proťatých). Neboť každému průsečíku libovolné přímky s plochou odpovídá tečná rovina její, určená touto přímkou a vytvořující přímkou plochy bodem tím jdoucí.[3])

Čára plochy (spec. přímka), kterou všechny vytvořující přímky plochy protínají, sluje *čarou řídicí* (zejména tehdy, je-li podkladem pro vytvoření plochy).

Vytvořující přímka plochy zborcené, která pro průsek plochy s každou rovinou jí položenou platí za m přímek (spec. *dvě* přímky), sluje *m-násobnou* (spec. *dvojnou*) vytvořující přímkou plochy. Čára (řídicí) na zborcené ploše, jejíž body jsou průsečíky vždy m (spec. *dvou*) přímek vytvořujících, sluje *m-násobnou* nebo *násobnou m-tého řádu* (spec. *dvojnou*) (řídicí) čarou plochy.[4])

(1875); *G. Salmon*, A treatise on the analytic geometry of three dimensions II (na př. 5. vyd. 1915, p. 80 a n.); *K. Zindler*, Liniengeometrie mit Anwendungen II; *A. B. Basset*, A treatise on the geometry of surfaces (1910), p. 225 a n.; *W. L. Edge*, The theory of ruled surfaces, 1931; *B. Gambier*, Surfaces réglées algébriques: singularités et classification, Annales Soc. polonaise math. 7 (1928), také Comptes r. Acad. Paris 186 (1928). Pro přehled viz Encyklopädie math. Wiss. III. 2 (*C* 8: *K. Zindler*, Algebraische Liniengeometrie, p. 1210 a n.); Pascal's Repertorium höh. Math. II. 2, p. 723 a n.

[3]) *Řádem* plochy zborcené sluje počet tečných přímek jejích, jež jsou obsaženy v libovolném (jednomocném lineárním) svazku paprskovém; je to stupeň rovnice plochy v souřadnicích přímkových. Řád zborcené plochy rovná se třídě průsečné čáry její s libovolnou rovinou a stupni kužele z libovolného bodu jí opsaného.

[4]) Jestliže projektivnost mezi řadou bodů na vytvořující přímce v plochy zborcené a svazkem tečných rovin plochy v těchto bodech (přímkou v procházejících) jest spec. zvrhlá, příslušejí jednomu bodu P na v všechny tečné roviny přímkou v jdoucí a jedné tečné rovině π jdoucí přímkou v všechny body na v: přímka v sluje v tomto případě *torsální přímkou* plochy (bod P *torsálním bodem* a rovina π *torsální rovinou* přímky v); rovina π je tečnou rovinou plochy ve všech bodech přímky v, bod P je dotyčným

Každá zborcená plocha n-tého stupně ($n > 2$) *obsahuje* (obecně) *dvojnou čáru, jež je každou vytvořující přímkou její proťata v* $n - 2$ *bodech.* Neboť rovina položená vytvořující přímkou l plochy n-tého stupně protíná tuto ještě v čáře $(n - 1)$-ho stupně, jež má s přímkou l tedy $n - 1$ bodů společných; protože však každým obyčejným bodem této průsečné čáry roviny s plochou prochází jen jedna vytvořující přímka plochy, leží na přímce l (mimo jeden bod, jemuž ona přísluší, dotyčný bod uvedené roviny tečné na ploše) $n - 2$ body, z nichž v každém jest přímka l proťata druhou vytvořující přímkou plochy. Tyto dvojné body skládají dvojnou čáru plochy zborcené.[5])[6])

b) Přímková plocha zborcená může býti vytvořena na základě tří čar řídicích přímkami, z nichž každá má s těmito čarami po jednom bodě společném. Neboť zvolíme-li třebas na první z čar těch bod P a promítneme-li z něho čáru druhou i třetí, mají tyto dvě promítající plochy kuželové konečný počet společných přímek, jež protínají tři čáry dané; jednomocné soustavě bodů P odpovídá jednomocná soustava těchto skupin přímek, takže útvar z nich složený je přímková plocha. Zborcenou plochu, vytvořenou tak pomocí tří řídicích čar stupně n_1, n_2 a n_3, můžeme označiti $z\,[n_1, n_2, n_3]$. Jestliže dvě z řídicích čar téhož stupně splynou, má plocha řídicí čáru dvojnásobnou; můžeme ji označiti, splynou-li na př. 1. a 2. čára řídicí, $z\,[(n_1, n_2), n_3]$. Místo tří čar řídicích mohou ke vzniku plochy přímkové sloužiti také dvě, z nichž jednu vytvořující přímka protíná ve dvou bodech (jsouc její bisekantou) a druhou v jednom bodě; nebo také jedna čára řídicí, s kterou mají vytvořující přímky po třech bodech společných (jsouce jejími trisekantami).[7])

Přímková plocha zborcená, jejíž tři řídicí čáry stupně n_1, n_2 a n_3 *se* (po dvou) *neprotínají, má stupeň* $2n_1n_2n_3$; *řídicí čáry její jsou tu čarami násobnými, první řádu* n_2n_3, *druhá řádu* n_3n_1 *a třetí řádu* n_1n_2.

Neboť stupeň n plochy $z\,[n_1, n_2, n_3]$ jest dán počtem průsečíků této plochy, tedy jejích přímek, s libovolnou přímkou l; máme-li vedle oné plochy na zřeteli plochu $z\,[1, n_2, n_3]$ stupně p-tého, u které pouze první řídicí čára plochy uvažované je nahrazena přímkou l, a protneme-li ji vyloučenou čarou stupně n_1, vidíme, že každá přímka uva-

---

bodem všech rovin přímkou v jdoucích, přímka v je proťata nekonečně blízkou přímkou vytvořující v bodě P a leží s ní v rovině π.

V každém bodě *dvojné* přímky vytvořující má zborcená plocha dvě tečné roviny; svazky těchto tečných rovin, jsouce projektivní k řadě bodů na přímce té, jsou spolu projektivní. Je-li uvedená projektivnost spec. identická, splývají obě tečné roviny plochy v každém bodě přímky dvojné, jež proto sluje *stacionární* přímkou vytvořující.

[5]) Duálně tvoří roviny, obsahující dvojice uvedených přímek vytvořujících, rozvinutelnou plochu, jež se plochy zborcené dvojnásob dotýká a má třídu, rovnou stupni hořejší čáry dvojné.

[6]) O dvojných čarách na ploše zborcené viz *A. Wiman*, Über die Doppelcurve auf den geradlinigen Flächen, Acta math. 19 (1895).

[7]) Takové plochy lze označiti, je-li na př. řídicí čára stupně n_1 protínána dvakrát nebo třikrát, $z\,[n_1^2, n_2]$, resp. $z\,[n_1^3]$.

žované plochy jdoucí takovým průsečíkem a jen tyto přímky její protínají zvolenou přímku l. Jest tedy $n = n_1 p$.

Obdobně je stupeň p plochy $z\,[1, n_2, n_3]$ roven součinu $n_2 q$ ze stupně n_2 druhé řídicí čáry a stupně q plochy $z\,[1, 1, n_3]$; dále stupeň q této plochy je roven součinu ze stupně n_3 třetí čáry řídicí a stupně plochy $z\,[1, 1, 1]$; avšak plocha $z\,[1, 1, 1]$, vytvořená přímkami, jež protínají tři přímky v prostoru obecně položené, jest stupně 2. Jest tedy $q = 2n_3$, $p = 2n_2 n_3$ a $n = 2n_1 n_2 n_3$.

Druhá část věty (o násobnosti čar řídicích) plyne z vytvoření plochy: dvě kuželové plochy s vrcholem P na první řídicí čáře, jež promítají ostatní dvě čáry řídicí, mají $n_2 n_3$ společných přímek, pročež je čára ta $n_2 n_3$-násobnou čarou plochy; a obdobně prochází bodem druhé nebo třetí řídicí čáry $n_1 n_3$ resp. $n_1 n_2$ vytvořujících přímek plochy.

Uvedená čísla se zmenší, *jestliže řídicí čáry zborcené plochy se protínají*: protínají-li se 2. a 3. řídicí čára (stupně n_2 a n_3) v p_1 bodech, 3. a 1. čára (stupně n_3 a n_1) v p_2 bodech, 1. a 2. čára (stupně n_1 a n_2) v p_3 bodech, má zborcená plocha s těmito třemi čárami řídicími stupeň

$$n = 2n_1 n_2 n_3 - n_1 p_1 - n_2 p_2 - n_3 p_3$$

a řídicí čáry plochy mají násobnost řádu $n_2 n_3 - p_1$, $n_3 n_1 - p_2$, $n_1 n_2 - p_3$.

Neboť každý společný bod řídicích čar 2. a 3. jest vrcholem kužele, promítajícího 1. čáru řídicí, tedy kužele stupně n_1, který se odloučí od zborcené plochy vytvořené; všemi p_1 společnými body obou čar 2. a 3. zmenší se proto stupeň zborcené plochy o $p_1 n_1$; a obdobně z ostatních průsečíků. Protože pak počet přímek zborcené plochy, jdoucích libovolným bodem P na 1. čáře řídicí se zmenší o ty přímky (kuželových ploch uvedených), jež jdou tímto bodem k jednotlivým průsečíkům 2. a 3. čáry řídicí, jest násobnost 1. řídicí čáry jen řádu $n_2 n_3 - p_1$; a obdobně v případech ostatních.[8])[9])

---

[8]) Protože zborcená plocha s řídicími čarami stupně n_1, n_2 a n_3 je stupně $2n_1 n_2 n_3$, leží na libovolné přímce její l podle hořejšího $2n_1 n_2 n_3 - 2$ bodů dvojných, v nichž je tedy l proťata stejným počtem jiných přímek plochy té; protože však bodem řídicí čáry stupně n_1 prochází $n_2 n_3$ přímek plochy, je zde uvažovaná přímka l proťata $n_2 n_3 - 1$ přímkami; obdobně prochází průsečíkem přímky l s řídicí čarou stupně n_2 a průsečíkem přímky l s řídicí čarou stupně n_3 přímek $n_3 n_1 - 1$, resp. $n_1 n_2 - 1$. Jest tudíž vytvořující přímka plochy zborcené mimo řídicí čáry proťata celkem

$$2n_1 n_2 n_3 - 2 - (n_2 n_3 - 1) - (n_3 n_1 - 1) - (n_1 n_2 - 1) = \\ = 2n_1 n_2 n_3 - n_1 n_2 - n_2 n_3 - n_3 n_1 + 1$$

jinými vytvořujícími přímkami plochy té.

[9]) Zborcené plochy vytvořené pomocí tří čar řídicích studovali *G. Salmon* (r. 1853), *A. Cayley* a *L. Cremona*. Viz na př. *G. Salmon*, A treatise on the analytic geometry of three dimensions II, p. 90 a n.; také na př. *Ch. Wiener*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie II (1887), p. 410 a n. Dále *O. Rupp*, Über die Abhängigkeit der Charaktere einer durch Leitcurven bestimmten Regelfläche von den Charakteren dieser Leitcurven, Math. Annalen 18 (1881).

c) Hledejme jednoduchou rovnici plochy zborcené, jejímiž *řídicími čarami jsou dvě různé přímky a křivka stupně m-tého*, tedy plochy $z\,[1, 1, m]$.

První řídicí přímkou budiž přímka O_1O_2 základního čtyrstěnu o rovnicích $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, druhou přímka jdoucí vrcholem O_3 v rovině $O_2O_3O_4$ o rovnicích $x_1 = 0$, $x_4 - bx_2 = 0$, třetí čára řídicí ať leží v rovině $O_1O_3O_4$ a má tedy rovnice $x_2 = 0$, $x_1^m v_0 + x_1^{m-1} v_1 + x_1^{m-2} v_2 + \ldots$ $\ldots + v_m = 0$, kde v_k jsou binární formy k-tého stupně proměnných x_3 a x_4.

Přímka jdoucí obecným bodem na první přímce řídicí $(\xi_1, \lambda\xi_1, 0, 0)$ a obecným bodem na třetí řídicí čáře $(\eta_1, 0, \eta_3, \eta_4)$ má parametrické rovnice $x_1 = \xi_1 (1 - t) + \eta_1 t$, $x_2 = \lambda\xi_1 (1 - t)$, $x_3 = \eta_3 t$, $x_4 = \eta_4 t$. Aby tato přímka protínala také druhou řídicí přímku, musí platit $\eta_1 t + \xi_1 (1 - t) = 0$, $\eta_4 t - b\lambda\xi_1 (1 - t) = 0$. Rovnici platnou o souřadnicích x_k bodů na všech vytvořujících přímkách uvažované plochy obdržíme eliminací veličin ξ_1, λ, η_1, η_2, η_3 a t z uvedených šesti rovnic a z hořejší rovnice pro řídicí čáru v rovině $x_2 = 0$: z posledních dvou rovnic dostaneme $\eta_4 + b\lambda\eta_1 = 0$, z této a z rovnic pro x_1, x_2, x_4 dostaneme $\eta_1 t = \dfrac{x_1 x_4}{x_4 - bx_2}$, konečně dosazením odtud plynoucího výrazu pro η_1 a výrazů pro η_3 i η_4 do rovnice řídicí čáry v rovině $x_2 = 0$, platící pro η_1, η_3 a η_4, nalezneme rovnici

$$(x_1x_4)^m v_0 + (x_1x_4)^{m-1} (x_4 - bx_2) v_1 + (x_1x_4)^{m-2} (x_4 - bx_2)^2 v_2 + \ldots$$
$$\ldots + (x_4 - bx_2)^m v_m = 0$$

jako rovnici zborcené plochy s uvedenými čarami řídicími ve zvolené poloze.

Podobným způsobem určíme rovnici zborcené plochy, jež má *přímku za dvojnásobnou čáru řídicí a křivku m-tého stupně jako řídicí čáru jednoduchou*, tedy plochy $z\,[(1, 1), m]$.

Dvojnásobnou přímkou řídicí budiž přímka O_1O_2 s rovnicemi $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, jednoduchá řídicí čára pak budiž opět v rovině $O_1O_3O_4$ s rovnicemi $x_2 = 0$, $x_1^m v_0 + x_1^{m-1} v_1 + x_1^{m-2} v_2 + \ldots + v_m = 0$.

Vytvořující přímka plochy musí míti s přímkou O_1O_2 dva splývající body společné a musí protínati čáru druhou; v obecné poloze své ať spojuje tedy bod $(\xi_1, \lambda\xi_1, 0, 0)$ na oné s bodem $(\eta_1, 0, \eta_3, \eta_4)$ na této. Aby společným bodem vytvořující přímky s hranou O_1O_2 byla dvojice bodů splývajících, zvolme za přímku tu tečnou přímku zborcené plochy kvadratické o jednoduché rovnici $x_1x_3 - x_2x_4 = 0$ (jež obsahuje přímku $x_3 = 0$, $x_4 = 0$); tečná rovina této plochy v bodě $(\xi_1, \lambda\xi_1, 0, 0)$ jest $x_3 - \lambda x_4 = 0$, tečná přímka pak v ní ležící a jdoucí bodem $(\eta_1, 0, \eta_3, \eta_4)$ má rovnice $x_1 = \eta_1 t + \xi_1 (1 - t)$, $x_2 = \lambda\xi_1 (1 - t)$, $x_3 = \eta_3 t$, $x_4 = \eta_4 t$, při čemž $\eta_3 = \lambda\eta_4$. Vyloučíme-li z rovnic pro x_1, x_2 a z rovnice tečné roviny veličiny ξ_1 a λ, obdržíme $\eta_1 t = \dfrac{x_1x_4 - x_2x_3}{x_4}$; dosazením pak za

η_1, η_3 a η_4 do rovnice řídicí čáry v rovině $x_2 = 0$ nalezneme

$$(x_1x_4 - x_2x_3)^m v_0 + (x_1x_4 - x_2x_3)^{m-1} x_4 v_1 + (x_1x_4 - x_2x_3)^{m-2} x_4^2 v_1 + \ldots$$
$$\ldots + x_4^m v_m = 0$$

jako rovnici uvažované plochy zborcené.[10])

d) Roviny protínají zborcenou plochu n-tého stupně v čarách n-tého stupně téhož rodu; neboť přímky plochy zprostředkují mezi body dvou takových čar průsečných korespondenci obapolně jednoznačnou. Tento společný rod průsečných čar plochy s rovinami sluje také *rodem* plochy zborcené.

Zborcené plochy rodu 0 nazývají se *racionální*; jejich rovinné řezy jsou čáry s maximálním počtem bodů násobných, tedy u plochy n-tého stupně s $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ body dvojnými. Protože vytvořující přímky racionální zborcené plochy n-tého stupně příslušejí obapolně jednoznačně bodům racionálního rovinného řezu plochy, jest možno *souřadnice x_k přímky vytvořující vyjádřiti jako racionální celistvé funkce proměnného parametru* (t); a protože libovolná přímka prostoru protíná n vytvořujících přímek takové plochy, jsou tyto funkce *stupně n-tého*. Lze tedy vytvořující přímky racionální zborcené plochy n-tého stupně vyjádřiti parametricky ve tvaru

$$\varrho x_k = \varphi_k(t),$$

kde $\varphi_k(t)$ jsou racionální celistvé funkce parametru t. Buďtež zde x_k Kleinovy souřadnice přímkové.

Zborcená plocha rodu 0 obsahuje dvojnou čáru stupně $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Neboť tečná přímka (y_k) zborcené plochy, protínající přímku její (x_k) a přímku k této nekonečně blízkou, musí souřadnicemi svými vyhověti dvěma rovnicím

$$\Sigma y_k \varphi_k = 0 \quad \text{a} \quad \sum y_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} = 0;$$

vyloučíme-li z těchto dvou rovnic parametr t, dostaneme rovnici $2(n-1)$-ho stupně v souřadnicích y_k. Předpokládáme-li, že přímky (y_k) procházejí pevným bodem P, jest nalezená rovnice rovnicí kužele z bodu P zborcené ploše opsaného; tento opsaný kužel jest tedy stupně $2(n-1)$-ho. Je-li d stupeň dvojné čáry na uvažované ploše zborcené, protíná rovina plochu tu v čáře n-tého stupně s d body dvojnými, tedy třídy $n(n-1) - 2d$; a protože rovina položená vrcholem P opsaného kužele protíná tento v $2(n-1)$ přímkách jeho, jež jsou tečnami řezu roviny s plochou, platí

$$n(n-1) - 2d = 2(n-1);$$

odtud určíme

$$d = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

[10]) Významné jsou metricky speciální plochy zborcené, nazvané *konoidy*; jsou to zborcené plochy, jež mají vedle křivky n-tého stupně dvě přímky řídicí, jednu v konečnu, druhou v nekonečnu.

Jestliže dvě vytvořující přímky (x_k) a (x'_k) zborcené plochy se protínají, platí o jejich souřadnicích vedle

$$\Sigma x_k^2 = 0, \quad \Sigma x'^2_k = 0 \quad \text{vztah} \quad \Sigma x_k x'_k = 0,$$

tedy také $\Sigma (x_k - x'_k)^2 = 0$. Užijeme-li pro přímku parametrického vyjádření $x_k = \varphi_k(t)$, resp. $x'_k = \varphi_k(t')$, platí tedy

$$\Sigma[\varphi_k(t) - \varphi_k(t')]^2 = 0;$$

tato rovnice redukuje se po vyloučení faktoru $(t - t')^2$ na rovnici

$$\psi(t, t') = 0.$$

Nalezená rovnice $\psi(t, t') = 0$ jest $(n-2)$-ho stupně v t a rovněž v t'; poskytuje při daném t parametry t' přímek na ploše, protínajících pevnou vytvořující přímku její (s parametrem t), jichž je tedy, jak už dříve bylo uvedeno, $n-2$; jsou to ovšem body dvojné čáry na ploše. Položíme-li v rovnici $\psi(t, t') = 0$ speciálně $t' = t$, dostaneme rovnici $2(n-2)$-ho stupně, jejíž kořeny udávají parametry přímek, z nichž každá je proťata čarou soumeznou; takových *singulárních* (t. zv. *torsálních*) přímek vytvořujících jest na uvažované ploše tedy $2(n-2)$.[11][12])

140. Zborcené plochy třetího a čtvrtého stupně. *a) Zborcená plocha 3. stupně obsahuje dvojnou přímku a jest racionální.* Neboť podle předcházející úvahy o dvojných bodech na vytvořujících přímkách zborcené plochy musí vytvořující přímky plochy 3. stupně míti po jednom bodě dvojném; tyto dvojné body musí ležeti na přímce, protože by jinak spojnice dvou takových bodů protínala plochu ve čtyřech bodech, což není možno. A podle úvahy o zborcených plochách racionálních obsahuje racionální plocha 3. stupně jako dvojnou čáru právě přímku.[1])

---

[11]) Zborcené plochy jako průsek tří komplexů vyšetřoval po prvé *J. Plücker* (1867); dále *J. Lüroth*, Zur Theorie der windschiefen Flächen, Journal r. a. Math. 67 (1867); *G. Battaglini*, Intorno ai sistemi di rette di grado qualunque, Giornale mat. 10 (1872); *A. Voss*, Zur Theorie der windschiefen Flächen, Math. Annalen 8 (1875).

[12]) Plochy zborcené lze vytvořiti přímkami, jež spojují body dvou čar (spec. přímek) v korespondenci (m, n)-značné. Viz *A. Cayley*, On certain skew surfaces otherwise scrolls, Transactions Phil. soc. Cambridge 11 (1869) (Coll. math. papers VII); *Em. Weyr*, Erzeugnisse mehrdeutiger Elementargebilde im Raume, Abhandlungen Böhm. Ges. Wiss. (6) 5 (1871); *A. Plamitzer*, Erzeugnisse projektiver Involutionen höheren Grades, deren Träger unikursale Gebilde sind, (3 poj.) Sitzungsberichte Akad. Wien 125 (1916) a 126 (1917).

[1]) O zborcených plochách 3. stupně viz (mimo publikace o plochách zborcených vůbec) zvl. *Em. Weyr*, Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung, 1870; *A. Hochheim*, Über die Polarflächen der windschiefen Flächen dritter Ordnung, Zeitschrift Math. Phys. 23 (1878) a 24 (1879); *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie I, p. 49 a n.; Pascal's Repertorium höh. Math. II. 2, p. 836 a n.

Zborcená plocha kubická má *dva typy*: u I. typu jest dvojná přímka plochy dvojnou řídicí čarou její, u typu II. splývají ve dvojnou přímku jednoduchá přímka řídicí a přímka vytvořující.

Typ I. má dvojnou řídicí přímku d a jednoduchou přímku řídicí e, jež jsou mimoběžné. Rovina položená libovolnou přímkou plochy p protíná plochu kubickou ještě v kuželosečce k; jeden z průsečíků čar p a k patří dvojné přímce d. Každým bodem X řídicí přímky d procházejí dvě vytvořující přímky plochy y a y', jež mají s čarou k po jednom bodě společném Y a Y'; roviny XYY' jdou všechny touže přímkou e. Neboť body Y a Y' vytvořují na kuželosečce k dvě involučně projektivní řady bodové, takže přímky YY' mají společný bod O, ležící na p; řez roviny XYY' s kubickou plochou skládá se z přímek y, y' a z třetí přímky e, jdoucí bodem O; tato přímka e musí býti společná všem rovinám XYY', protože kdyby bodem O procházely dvě takové přímky, měla by spojnice $XX'O$ s plochou kubickou čtyři společné body. Kdežto tedy každým bodem přímky d jdou dvě vytvořující přímky plochy uvažované, prochází body přímky e po jedné přímce plochy.[2])

Typ II. vznikne z prvního, splynou-li přímky d a e; tato zborcená plocha třetího stupně sluje *Cayleyova*.[3])

Užijeme-li parametrického vyjádření pro Kleinovy souřadnice vytvořující přímky (x_k) zborcené plochy 3. stupně, jsou přímky její dány rovnicemi

$$\sigma x_k = a_k + b_k t + c_k t^2 + d_k t^3.$$

Z obecné podmínky $\Sigma x_k^2 = 0$ čili $(x^2) = 0$ pro přímku x vyplývá zde (při jednotlivých mocninách parametru)

$$(a^2) = 0, \quad (ab) = 0, \quad (b^2) + 2(ac) = 0, \quad (ad) + (bc) = 0, \quad (c^2) + 2(bd) = 0,$$
$$(cd) = 0, \quad (d^2) = 0.$$

Rovnice pro parametry dvou přímek se protínajících $\psi(t, t') = 0$ jest (vzhledem k relacím právě uvedeným)

$$(b^2) + 2(bc)(t + t') + (c^2)\, tt' = 0.$$

Parametry dvou singulárních přímek jsou kořeny rovnice odtud plynoucí

$$(b^2) + 4(bc)\, t + (c^2)\, t^2 = 0;$$

[2]) Vedle vytvoření zborcené plochy kubické pomocí řady bodové na d a projektivní involuce dvojic bodových na e lze tuto plochu vytvořiti také spojnicemi projektivních řad bodových na přímce a kuželosečce (viz čl. 46*c*), nebo přímkami, jež protínají v různých bodech buď dvě přímky mimoběžné a kuželosečku jednu z nich sekoucí nebo dvě kuželosečky s jedním společným bodem a přímku obě sekoucí nebo dvě přímky mimoběžné a rovinnou křivku kubickou s bodem dvojným na jedné a obyčejným na druhé z nich (viz dále). Viz také *R. Deaux*, Sur les générations de la surface cubique réglée ayant deux directrices rectilignes, Mathesis 42 (1928).

[3]) Zborcené plochy kubické vyšetřoval (obecně) po prvé *L. Cremona* r. 1861, poněkud později (r. 1862—69) *A. Cayley*; na možnost splynutí obou přímek řídicích připadli (téhož roku) *A. Cayley* a *M. Chasles*. První typ se rozpadá ve dva (s reálnými nebo imaginárními čarami torsálními).

má-li tato rovnice dva kořeny různé, jest plocha I. typu, v případě dvou kořenů splývajících je typu II.

Zvolíme-li v 1. případě při $(b^2)\,(c^2) - 4(bc)^2 \neq 0$ nový parametr τ tak, aby singulárním přímkám příslušely hodnoty parametru 0 a ∞, obdržíme nové relace $(b^2) = 0$, $(c^2) = 0$; rovnice $\psi = 0$ redukuje se pak na $\tau + \tau' = 0$. Z relací $(a^2) = 0$, $(b^2) = 0$, $(c^2) = 0$, $(d^2) = 0$, $(ab) = 0$, $(ac) = 0$, $(bd) = 0$, $(cd) = 0$ vidíme, že přímky (a_k) a (d_k), (b_k) a (c_k) tvoří dvojice protějších hran čtyrstěnu. Protože $\varrho x_k = a_k + c_k t^2 + t\,(b_k + d_k t^2)$, jest patrno z relace $(ad) + (bc) = 0$, že přímky $(a_k + c_k t^2)$ a $(b_k + d_k t^2)$ se protínají; a dále, že vytvořující přímka x protíná průsečnici rovin ac a bd; protože pak parametr přímky x', protínající přímku x, liší se od parametru této jen znaménkem, protíná x' také uvedenou průsečnici. Jest proto přímka (ac, bd) dvojnou řídicí přímkou plochy; a jednoduchou přímkou řídicí jest přímka (ab, cd).

V 2. případě při $(b^2)\,(c^2) - 4(bc)^2 = 0$ splývají obě singulární přímky vytvořující; přisoudíme-li této přímce hodnotu parametru 0, vyplývá $(b^2) = 0$, $(bc) = 0$ a rovnice $\psi = 0$ se redukuje na $\tau\tau' = 0$: každá vytvořující přímka protíná přímku uvedenou.[4])

Postupem v předešlém článku vyloženým můžeme nalézti také rovnici zborcené plochy 3. stupně, pokládajíce ji za přímkovou plochu, vytvořenou pomocí tří čar řídicích, dvou různých nebo splývajících přímek a rovinné čáry stupně třetího; tato ať má na první přímce oné bod dvojný a na druhé bod obyčejný (protože totiž $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 3$ a $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 0$, bude vytvořená plocha 3. stupně); první přímka je tu dvojnou čarou plochy (protože $n_2 = 1$, $n_3 = 3$ a $p_1 = 1$).

Pro I. typ zborcené plochy kubické $z\,[1, 1, 3]$ zvolme řídicí čáry uvedené s rovnicemi první $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, druhou $x_1 = 0$, $x_4 - bx_2 = 0$, třetí $x_2 = 0$, $x_1 v_2 + x_4 v_2' = 0$, kde v_2 a v'_2 jsou různé binární formy 2. stupně proměnných x_3, x_4; rovnice zborcené plochy 3. stupně I. typu jest pak

$$x_1 v_2(x_3, x_4) + (x_4 - bx_2)\, v'_2(x_3, x_4) = 0.$$

Pro II. typ zborcené plochy kubické $z\,[(1, 1), 3]$ zvolme za řídicí přímku $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, za řídicí čáru kubickou $x_2 = 0$, $x_1 x_4 v_1 + v_3 = 0$, kde v_1, v_3 jsou binární formy 1. a 3. stupně proměnných x_3, x_4 (protože $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ musí býti tečnou čáry té v bodě (1, 0, 0, 0)); rovnice zborcené plochy 3. stupně II. typu jest potom

$$(x_1 x_4 - x_2 x_3)\, v_1(x_3, x_4) + v_3(x_3, x_4) = 0.^{5})^{6})$$

[4]) O parametrickém vyjádření kubické plochy zborcené pojednává také *G. Cotty*, Sur les surfaces réglées du troisième ordre, Revue math. spéc. 20 (1910).

[5]) Cayleyova zborcená plocha kubická jest invariantní při tříparametrové spojité grupě kolineací (kdežto obecná kubická plocha zborcená jen při dvouparametrové grupě takových transformací) a zaujímá tím (spolu s rovinou, kuželi, plochami kvadratickými a rozvinutelnou plochou tečen kubické čáry prostorové) významné místo.

b) *Zborcená plocha 4. stupně jest rodu 1 nebo 0*; neboť rovina položená vytvořující přímkou plochy protíná ji v čáře třetího stupně, jež může býti dvojího uvedeného rodu.[7])

Zborcená plocha 4. stupně *rodu 1* jest proťata rovinou obecně položenou v čáře čtvrtého stupně téhož rodu, tedy s dvěma dvojnými body; a protože na každé vytvořující přímce plochy jsou dva body dvojné, jest *dvojná čára* takové plochy *složena ze dvou přímek*, jež se neprotínají. Dvojné přímky plochy d_1, d_2 jsou jejími dvojnými přímkami řídicími: každým bodem jedné i druhé z nich procházejí dvě vytvořující přímky, jež protínají druhou resp. prvou. Jsou dva typy takových ploch, I. s mimoběžnými přímkami d_1 a d_2, II. s přímkami těmi splývajícími.

Zborcená plocha 4. stupně *rodu 0* má v rovinných řezech čáry čtvrtého stupně s třemi body dvojnými; jest tedy *dvojná čára* její *třetího stupně*, jež je buď pravá prostorová čára kubická nebo se rozpadá v kuželosečku a přímku nebo ve tři přímky.

Je-li dvojná čára plochy *pravá prostorová kubika c*, jdou každým bodem této čáry X dvě přímky plochy, jež čáru tu protínají v dalším bodě Y, resp. Z; rovina XYZ je dvojnou tečnou rovinou plochy, a každým bodem X na c procházejí tři takové roviny. Plocha toho druhu byla v obecném případě, kdy dvojné tečné roviny její obalují rozvinutelnou plochu 3. třídy, označena jako typ III., ve speciálním, kdy roviny ty (trojné) tvoří svazek s osou v řídicí přímce plochy, jako typ IV.

Je-li dvojná čára plochy složena *z kuželosečky k a přímky d*, musí d protínati k; neboť kdyby k a d neměly společného bodu, protínal by kužel promítající k z libovolného bodu plochy přímku d ve dvou bodech, takže by každým bodem plochy procházely dvě přímky mající s plochou po pěti společných bodech, tedy dvě přímky plochy, což není možno. Je-li přímka d dvojnou přímkou řídicí, je plocha typu V., je-li jednoduchou řídicí přímkou a přímkou vytvořující, je typu VI.

Jestliže kuželosečka k se rozpadá ve dvě přímky d' a e, z nichž e protíná přímku d, takže dvojná čára plochy je složena *ze tří přímek d*,

[6]) Klasifikaci zborcených ploch 3. stupně se stanoviska metrického (podle průseku s rovinou nevlastní v 19 typů) provádí *F. Severi*, Sulla forma delle rigate cubiche, Atti Ist. Veneto (8) 5 (1903).

[7]) Zborcené plochy 4. stupně a jejich typy vyšetřovali po prvé *M. Chasles* (r. 1861) a *A. Cayley* (r. 1864 a 1869); potom zejména *L. Cremona*, Sulle superficie gobbe di quarto grado, Memorie Accad. Bologna (2) 8 (1868), a *K. Rohn*, Die verschiedenen Arten der Regelflächen vierter Ordnung, Math. Annalen 28 (1886). Viz dále (vedle prací uv. v čl. 139) *J. Cardinaal*, Meetkundige theorie der scheeve oppervlakken van de vierde orde, Verslagen Akad. Amsterdam (3) 5 (1888); *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie I (1892), p. 52 a n.; *C. M. Jessop*, A treatise on the line complex (1903), p. 77 a n.; Pascal's Repertorium höh. Math. II. 2, p. 874 a n.; *Bing Chin Wong*, A study and classification of ruled quartic surfaces by means of a point-to-line transformation, Publications California univ. 1 (1923).

d' a e, jsou přímky d a d' dvojnými přímkami řídicími a e dvojnou přímkou vytvořující (protože e nemůže býti přímkou řídicí, aby se plocha zborcená nerozpadla); plocha je typu VII., jsou-li d a d' přímky různé, spec. typu VIII., jestliže d a d' splývají.

Dvojná čára zborcené plochy 4. stupně může se také skládati ze tří přímek splývajících, takže plocha má *trojnou přímku*. Je-li trojná přímka plochy d trojnou přímkou řídicí, prochází každým bodem jejím tři přímky vytvořující, tedy i tři dvojné roviny tečné; obalují-li tyto dvojné tečné roviny rozvinutelnou plochu 3. třídy, je zborcená plocha typu IX., kdežto jdou-li speciálně touže přímkou, je typu X. Je-li trojná přímka d dvojnou přímkou řídicí a jednoduchou přímkou vytvořující, je zborcená plocha typu XI.; je-li konečně d jednoduchou řídicí přímkou a dvojnou vytvořující, je plocha typu XII.[8])[9])

c) Racionální zborcené plochy 4. stupně jest možno vyjádřiti analyticky pomocí Kleinových souřadnic pro přímku rovnicemi

$$\varrho x_k = a_k + b_k t + c_k t^2 + d_k t^3 + e_k t^4.$$

Protože musí býti $(x^2) = 0$, platí o součinitelích těchto rovnic

$$(a^2) = 0, \quad (ab) = 0, \quad (b^2) + 2(ac) = 0, \quad (ad) + (bc) = 0,$$
$$(c^2) + 2(ac) + 2(bd) = 0, \quad (be) + (cd) = 0, \quad (d^2) + 2(ce) = 0,$$
$$(de) = 0, \quad (e^2) = 0.$$

V obecném případě patří přímky zborcené kvartiky jedinému lineárnímu komplexu $\Sigma A_k x_k = 0$, jehož rovnice má součinitele určené relacemi

$$(Aa) = 0, \quad (Ab) = 0, \quad (Ac) = 0, \quad (Ad) = 0, \quad (Ae) = 0.$$

---

[8]) Některých typů zborcených ploch 4. stupně se týkají pojednání: *A. Ameseder*, Über Regelflächen vierten Grades mit zwei Doppelgeraden, Archiv Math. Phys. 65 (1880), a Beitrag zur Theorie der Regelflächen vierten Grades mit Doppelkegelschnitt, Sitzungsberichte Akad. Wien 81 (1880); *K. Rohn*, Über die Flächen vierter Ordnung mit einem dreifachen Punkte, Math. Annalen 24 (1884); *H. Drasch*, Beitrag zur constructiven Theorie der windschiefen Flächen mit zwei Leitgeraden und einem Leitkegelschnitt, Sitzungsberichte Akad. Wien 101 (1892); *Th. F. Holgate*, On certain ruled surfaces of the fourth order, Amer. Journal math. 15 (1893), doplněk tamtéž 22 (1900); *D. Segen*, Über windschiefe Flächen vierten Grades mit drei Doppelgeraden, Journal r. a. Math. 112 (1893); *G. Bordiga*, Casi particolari di rigate razionali del 4° ordine, Atti Ist. Veneto (7) 8 (1897); *G. Fontené*, Sur les surfaces du quatrième ordre qui ont deux droites doubles, Nouv. Annales math. (3) 19 (1900); *V. Simandl*, O zobecněném cylindroidu, Rozpravy Čes. akad. 23 (1914), a Příspěvek ku přímkovým plochám 4. stupně stanoveným dvěma projektivními involucemi na dvou mimoběžných přímkách, tamtéž 24 (1915); *O. Mayer*, Sur les surfaces réglées du quatrième ordre à deux droites doubles, Comptes r. Acad. Paris 169 (1919); *H. Mohrmann*, Die Flächen vierter Ordnung mit gewundener Doppelkurve, Math. Annalen 89 (1923).

[9]) Modely jednotlivých typů zborcených ploch 3. a 4. stupně (racionálních) navrhl *K. Rohn* a vydal *Brill* (Darmstadt); viz *M. Schilling*, Katalog math. Modelle.

Parametry přímek plochy, jež se po dvou protínají, vyhovují rovnici, která po úpravě použitím uvedených relací nabude tvaru

$$(ac) + (ad)(t + t') + (ae)(t + t')^2 + (bd)\,tt' + (be)(t + t')\,tt' + (ce)\,t^2t'^2 = 0.$$

Pro $t' = t$ obdržíme odtud rovnici 4. stupně pro parametry čtyř singulárních přímek vytvořujících; změníme-li parametr tak, aby dvě z těchto přímek měly parametry 0 a ∞, dostaneme ještě $(ac) = 0$, $(ce) = 0$ a tedy z hořejších relací dále $(b^2) = 0$, $(d^2) = 0$. Je-li uvedený komplex $\Sigma A_k x_k = 0$ obecný, jest racionální plocha zborcená typu III.

Komplex $\Sigma A_k x_k = 0$, jemuž přímky plochy náležejí, je speciální, jestliže platí $(A^2) = 0$; tuto podmínku lze ve spojení s hořejšími relacemi pro A_k nahraditi rovnicí

$$\begin{vmatrix} (a^2) & (ab) & (ac) & (ad) & (ae) \\ (ab) & (b^2) & (bc) & (bd) & (be) \\ (ac) & (bc) & (c^2) & (cd) & (ce) \\ (ad) & (bd) & (cd) & (d^2) & (de) \\ (ae) & (be) & (ce) & (de) & (e^2) \end{vmatrix} = 0$$

(napíšeme totiž podmínku pro nenulové řešení šesti rovnic těch a utvoříme čtverec determinantu tak vznikajícího); rovnice tato se redukuje (vzhledem k nulovým hodnotám některých prvků a po uplatnění ostatních relací hořejších) na rovnici

$$(bd)\,[2(ad)(be) + (c^2)(ae)]\,[(ad)(be) - (ae)(bd)] = 0.$$

Je-li $(bd) = 0$, rozpadá se dvojná čára plochy v kuželosečku a osu speciálního komplexu lineárního, plocha je typu V.; rovněž tak pro $(ad)(be) - (ae)(bd) = 0$. Je-li však $2(ad)(be) + (c^2)(ae) = 0$, jest osa komplexu jednoduchou řídicí přímkou plochy a tato je typu IV., nebo je osa ta trojnou přímkou řídicí a plocha je typu IX. Je-li konečně osa komplexu speciálního také přímkou vytvořující na ploše, jest plocha typu VI. nebo XI.

Jestliže o součinitelích ve výrazech pro x_k platí šest relací

$$\alpha a_k + \beta b_k + \gamma c_k + \delta d_k + \varepsilon e_k = 0,$$

patří přímky zborcené plochy nekonečnému počtu lineárních komplexů. Plocha tu má dvě dvojné přímky řídicí, jejichž souřadnice A_k plynou z rovnic

$$(Aa) = 0, \quad (Ab) = 0, \quad (Ac) = 0, \quad (Ad) = 0, \quad (A^2) = 0;$$

má-li ještě dvojnou přímku vytvořující, jest typu VII. v případě, že ony dvě řídicí přímky jsou různé, typu VIII., jestliže splývají; jestliže pak dvojná vytvořující přímka splývá se splývajícími oběma přímkami řídicími, jest plocha typu XII. Konečně je-li z uvedených dvou přímek o souřadnicích A_k jedna trojnou a druhá jednoduchou přímkou řídicí, jest plocha typu X.[10])

---

[10]) Zborcenými plochami 5. a 6. stupně (a vyššími) se zabývali *H. A. Schwarz*, Über die geradlinigen Flächen fünften Grades, Journal r. a. Math.

67 (1866); *V. Snyder*, On the forms of quintic scrolls, Bulletin Amer. math. soc. (2) 8 (1902), a On the quintic scroll having three double curves, tamtéž (2) 9 (1903), doplněk tamtéž (2) 11 (1905); *G. Marletta*, Sulle curve razionali del quinto ordine, Rendiconti Circolo mat. Palermo 19 (1905); *B. Kalicun*, Beiträge zu den Regelflächen fünfter Ordnung, Sitzungsberichte Akad. Wien 120 (1911) a 121 (1912); *J. Bergstedt*, Om regelytor af sjette graden, Diss. Lund 1886; *K. Fink*, Über windschiefe Flächen im allgemeinen und insbesondere über solche des sechsten Grades, Diss. Tübingen 1887; *V. Snyder*, On the forms of unicursal sextic scrolls, Amer. Journal math. 25 (1903), tamtéž pro plochy rodu 1 a rodu > 1, a On the forms of sextic scrolls having a rectilinear directrix, Amer. Journal math. 27 (1905), tamtéž pro plochy bez přímky řídicí; *Ch. H. Sisam*, On septic scrolls having a rectilinear directrix, Amer. Journal math. 29 (1907); *Genty*, Mémoire sur les surfaces gauches rationnelles, Bulletin Soc. math. France 19 (1891); *C. V. Hanumanta Rao*, Some considerations on the general theory of ruled surfaces, Proceedings Math. soc. London (2) 19 (1921); *Th. Reye*, Die kubische Raumkurve als Leitkurve von Regelflächen dritten bis sechsten Grades, Journal r. a. Math. 152 (1923); *J. Klíma*, O zborcených plochách určených kuželosečkami protínajícími se ve dvou bodech, Rozpravy Čes. akad. 33 (1924); *B. Gambier*, Surfaces réglées algébriques; singularités, classification, Annales Soc. polonaise math. 7 (1928); *W. L. Edge*, The theory of ruled surfaces, 1931.

XIII. PROJEKTIVNOST A ÚTVARY PROSTORU r-ROZMĚRNÉHO.

141. Prostor r-rozměrný. *a*) Předcházející úvahy geometrické můžeme podstatným způsobem rozšířiti. Přijměme k tomu cíli opět za pojmy základní jednak prvky *bod* a *přímku*, jednak vztah *incidenci*; a předpokládejme hned z počátku, že *existuje neomezený počet bodů*, kterýž požadavek učiníme postupně určitějším.

Za první postulát o incidenci prvků béřeme opět větu (*postulát o přímce*):

Dva různé body určují (*vždy a jedinou*) *přímku je obsahující.*

Přímku si myslíme jako soustavu neomezeného počtu bodů; incidenci bodu a přímky vyjadřujeme jako dříve rozmanitým rčením (přímka obsahuje bod, prochází nebo jde bodem, bod náleží přímce, leží nebo je položen v přímce a pod.); o přímce určené dvěma body pravíme, že body ty spojuje (jest jejich spojnicí); jsou-li A a B body přímku určující, píšeme ji AB. Jako základní útvar jednorozměrný budeme přímku označovati symbolem S_1, t. j. (lineární) prostor o jednom rozměru.

Z uvedené věty základní vyplývá bezprostředně, že přímka je určena libovolnými dvěma různými body svými.

Předpokládejme (doplňujíce požadavek prve uvedený), že *mimo přímku* (AB) *existuje* ještě *bod* (C); potom *definujeme rovinu* jako soustavu všech bodů, jež leží na přímkách spojujících bod C se všemi jednotlivými body přímky AB (čítajíce každý bod jen jednou). Rovinu tak určenou můžeme značiti $C(AB)$; jako základní útvar dvourozměrný budeme ji označovati S_2, t. j. (lineární) prostor o dvou rozměrech.

Z uvedené definice roviny a z postulátu o přímce plyne, že při stanovení roviny $C(AB)$ lze body A, B nahraditi dvěma různými body A', B' přímky AB, čili že roviny $C(AB)$ a $C(A'B')$ jsou totožny.

Incidenci bodu a roviny vyjadřujeme týmiž způsoby jako u bodu s přímkou; přímku a rovinu jmenujeme incidentní, obsahuje-li tato všechny body oné, a vyjadřujeme tento vztah stejně jako v případě předešlém.

Vzhledem k postulátu o přímce je patrno, že dvě různé přímky nemohou míti více než jeden bod společný.

Tři body slují *nezávislými*, jestliže nenáležejí téže přímce.

Zvolíme-li v rovině $C(AB)$ místo bodů A, B dva libovolné body P_1, P_2 nebo obecněji místo bodů A, B, C tři libovolné body P_1, P_2, P_3, neplyne z předešlého, že rovina $C(P_1P_2)$ resp. rovina $P_3(P_1P_2)$ je totožna s rovinou $C(AB)$. Za druhý postulát o incidenci prvků béřeme větu (*postulát o rovině*):

Tři nezávislé body určují (vždy a jedinou) rovinu je obsahující.

Z uvedených dvou postulátů a z definice roviny vyplývá: Rovina obsahující dva body přímky obsahuje všechny její body. Přímka a bod mimo ni ležící určují rovinu je obsahující. Dvě různé přímky v rovině mají společný (jeden a jediný) bod (protínají se v bodě; jsou-li totiž dané přímky určeny body A a B, resp. C a D, musí na přímce AB ležeti bod přímky CD, protože by jinak CD nebyla obsažena v rovině $C(AB)$).

Rovinu určenou třemi body A, B a C značíme, je-li potřeba, ABC.[1])

b) Předpokládejme dále, že *mimo rovinu* (ABC) *existuje* ještě *bod* (D). *Prostor třírozměrný definujeme* pak jako soustavu všech bodů, jež leží na přímkách spojujících bod D se všemi jednotlivými body roviny ABC. Prostor takto určený lze označiti $D(ABC)$; je hned patrno, že jsou-li A', B' a C' tři nezávislé body roviny ABC, jsou prostory $D(ABC)$ a $D(A'B'C')$ totožny. Obecně budeme (lineární) prostor o třech rozměrech značiti symbolem S_3.

Čtyři body jmenujeme *nezávislé*, neleží-li v téže rovině; jsou-li takovými, jsou každé tři z nich rovněž nezávislé a tím spíše jsou kterékoli dva různé.

Na rozdíl od případu roviny můžeme pak, majíce na zřeteli definici prostoru třírozměrného, pomocí postulátu o rovině dokázati:

Prostor třírozměrný jest určen libovolnými čtyřmi nezávislými body svými.

Jsou-li totiž P_1, P_2, P_3 a P_4 čtyři nezávislé body prostoru $D(ABC)$, určuje rovina, stanovená třemi z bodů těch, a bod čtvrtý třírozměrný prostor, totožný s prostorem $D(ABC)$: Neboť každá přímka, mající v prostoru $D(ABC)$ dva různé body své, leží v něm celá (buď totiž patří mezi vytvořující přímky jeho nebo leží v rovině takovými přímkami vytvořené). Dále každá rovina, mající v prostoru $D(ABC)$ tři nezávislé body své, je v něm obsažena celá (je totiž vytvořena přímkami, o nichž platí věta předcházející). Jsou-li P_1, P_2 a P_3 tři nezávislé body prostoru

[1]) Postulátu o rovině můžeme dáti užší znění: Rovina $A(BC)$, obsahující dva různé body P_1 a P_2 tak, že přímka P_1P_2 neobsahuje bodu A, je totožná s rovinou $A(P_1P_2)$. Odtud lze pak odvoditi věty: Roviny $A(BC)$, $B(AC)$, $C(AB)$ jsou totožny (a lze je označiti prostě ABC). Rovina ABC je totožna s rovinou $P_1P_2P_3$, jsou-li P_1, P_2 a P_3 nezávislými body jejími. Viz *F. Amodeo*, Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria proiettiva di uno S_r, Atti Accad. Torino 26 (1891).

$D(ABC)$ tak položené, že rovina $P_1P_2P_3$ neprochází bodem D, je prostor $D(ABC)$ totožný s prostorem $D(P_1P_2P_3)$; neboť $D(ABC)$ obsahuje rovinu $P_1P_2P_3$ a obráceně $D(P_1P_2P_3)$ obsahuje rovinu ABC. Mimo to je prostor $D(ABC)$ totožný s prostorem $C(ABD)$, protože body na přímkách spojujících D s body roviny ABC a body na přímkách spojujících C s body roviny ABD tvoří tutéž soustavu, splývajíce se soustavou bodů na rovinách, určených přímkou DC a body přímky AB. Použitím obou posledních vět vyplývá, že prostor určený rovinou ABC a bodem D jest určen také (třebas) rovinou $P_1P_2P_4$ a bodem P_3 a vůbec rovinou stanovenou kterýmikoli třemi z bodů daných a čtvrtým daným bodem. Můžeme jej proto označiti $P_1P_2P_3P_4$.[2])

V S_3 mají rovina a přímka v ní neležící společný bod (jejž určují; plyne z vytvoření prostoru S_3 pomocí dané roviny a bodu na přímce dané). Dvě roviny prostoru S_3, jež nesplývají, mají společnou přímku (kterou určují). Tři různé roviny v S_3, jež nemají společnou přímku, určují bod (svůj společný).[3])

c) Předpokládejme nově, že *mimo prostor* S_3, určený čtyřmi nezávislými body P_1, P_2, P_3 a P_4, *existuje ještě bod* P_5. Na základě toho *definujeme* (lineární) *prostor čtyřrozměrný* S_4 jako soustavu bodů ležících na přímkách, jež spojují bod P_5 se všemi jednotlivými body prostoru $S_3 = P_1P_2P_3P_4$.

Tento S_4 obsahuje každou přímku, určenou dvěma různými body jeho (taková přímka buď jde bodem P_5 a patří svými body do S_4 jako přímka vytvořující nebo je obsažena v rovině jdoucí bodem P_5 a obsažené v S_4); obsahuje také každou rovinu, určenou třemi nezávislými body jeho, a každý prostor třírozměrný, určený čtyřmi nezávislými jeho body (jsou vytvořeny přímkami v S_4 obsaženými). Nazývajíce *nezávislými pět bodů*, jež neleží v témž prostoru S_3, obdržíme potom obdobně jako u S_3 větu: *Prostor* S_4 *jest určen libovolnými pěti svými nezávislými body.*

Pokračujeme-li takto dále, přijdeme za předpokladu, že *mimo prostor* S_4 *existuje ještě bod* P_6, k vytvoření a vlastnostem (lineárního) prostoru pětirozměrného S_5; za předpokladu, že *mimo* S_5 *existuje ještě bod* P_7, přijdeme k vytvoření (lineárního) prostoru S_6, atd.; až za předpokladu, že *mimo* S_{r-2} *existuje ještě bod* P_r, definujeme (lineární) prostor o $r - 1$ rozměrech S_{r-1}. Zejména nalezneme, že S_5 je určen šesti svými body nezávislými, t. j. body, jež nejsou obsaženy v témž S_4; S_6 je určen

[2]) Prostor S_3 lze určiti čtyřmi způsoby: čtyřmi nezávislými body jeho, nebo dvěma z bodů těch a přímkou spojující ostatní dva, nebo jedním z těchto bodů a rovinou stanovenou ostatními třemi, nebo dvěma přímkami, z nichž jedna je stanovena dvěma z bodů daných a druhá dvěma body zbývajícími.

[3]) Ze základních pojmů a vět (o incidenci prvků), přijatých v čl. 1., je zde pojem roviny nahrazen definicí a obdobně je definován prostor třírozměrný; vzhledem k tomu pak stačí z dřívějších postuláty 1*a*, 2*a*, kdežto postuláty ostatní (3*a*, 1*b*, 2*b*, 3*b*) se nahrazují větami odvozenými.

sedmi body nezávislými (neobsaženými v témž S_5), atd.; S_{r-1} je pak určen svými r body, jež nejsou incidentní s týmž S_{r-2}.

Konečně předpokládejme, že *mimo prostor* S_{r-1} *existuje ještě bod* P_{r+1}. A nazývejme obecně skupinu $k+1$ *bodů nezávislými* (pro $k \geqq 2$), nejsou-li obsaženy v témž prostoru o $k-1$ rozměrech S_{k-1}; takové body mohou ovšem tím méně býti obsaženy v prostoru o menším počtu rozměrů. Vzhledem k tomu můžeme svému předpokladu dáti tvar, že *existuje skupina* $r+1$ *bodů nezávislých*. Definujeme:

Prostor (*lineární*) *r-rozměrný* S_r *jest soustava všech bodů, jež leží na přímkách spojujících jeden ze skupiny* $r+1$ *nezávislých bodů daných se všemi jednotlivými body prostoru* S_{r-1}, *určeného ostatními r body skupiny* (při čemž každý bod počítáme jednou).[4])[5])

V této definici obsaženo je také vytvoření všech prostorů nižších až po rovinu, t. j. prostorů s menším počtem rozměrů $r-1$, $r-2, \ldots, 4$, 3 a 2, nahradíme-li číslo r čísly zde uvedenými; přímka S_1 je pojem základní, rovněž bod, který označujeme také stejnorodým symbolem S_0.

Dva prostory S_p, S_q nazýváme incidentními, jestliže všechny body jednoho z nich jsou body druhého; je-li třebas $p < q$, pravíme také, že prostor S_p náleží prostoru S_q nebo leží v S_q, nebo že prostor S_q obsahuje S_p nebo prochází prostorem S_p a pod.

Prostor S_r, vytvořený takto pomocí prostoru $S_{r-1} = P_1P_2P_3 \ldots P_r$ a bodu P_{r+1}, obsahuje podle definice všechny prostory $S_2, S_3, \ldots, S_{r-1}$, určené bodem P_{r+1} a některým z prostorů $S_1, S_2, \ldots, S_{r-2}$, obsažených v základním S_{r-1}; obráceně má každý prostor S_k (pro $k = 2, 3, \ldots, r-1$), jdoucí bodem P_{r+1}, se základním S_{r-1} společný pouze prostor S_{k-1} (a přímka S_1 bodem P_{r+1} jdoucí ovšem jen bod). Každá přímka, určená dvěma různými body prostoru S_r, je celá obsažena v S_r; neboť prochází-li bodem P_{r+1}, patří k přímkám S_r vytvořujícím, při jiné poloze je obsažena v rovině obsažené v S_r (protože spojnice bodu P_{r+1} s dvěma danými body přímky uvažované jsou zároveň spojnicemi bodu P_{r+1} s dvěma body základního prostoru S_{r-1}, jež spolu s P_{r+1} určují uvedenou rovinu). Každý prostor S_k, určený skupinou $k+1$ nezávislých bodů prostoru S_r (pro $k \leqq r-1$), leží v S_r; neboť to platí o všech přím-

[4]) Prostor k-rozměrný S_k značí se také $[k]$; sluje též *základním útvarem k-mocným* nebo *řádu k-tého*. Místo počtu rozměrů k je leckdy výhodnější uvádět číslo $k+1$. Prostor s menším počtem rozměrů nazýváme někdy *nižším*, prostor s větším počtem rozměrů *vyšším* vůči danému.

[5]) Jako v prostoru třírozměrném existují čáry a plochy (bodové útvary o jednom a dvou rozměrech), tak v r-rozměrném prostoru jsou z bodů vytvořeny útvary o k rozměrech pro $k = 1, 2, \ldots, r-1$, jež slují *variety* (prostory, zejména křivé) a značí se V_k. Je-li varieta V_k v S_r obecně položeným prostorem S_{r-k} proťata nejvýše v n bodech, sluje stupně n-tého; protože prostor S_k v S_r má s prostorem S_{r-k} obecně položeným jeden bod společný, sluje varietou prvního stupně čili *lineární*; pro lineární variety se ustálilo prosté pojmenování *prostor*.

kách tohoto S_k. Prostor S_r, vytvořený z prostoru $P_1P_2P_3 \ldots P_r$ a bodu P_{r+1}, je totožný s prostorem, vytvořeným z prostoru $Q_1Q_2Q_3 \ldots Q_r$ a bodu P_{r+1}, jestliže r bodů $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ určuje prostor S_{r-1}, neobsahující P_{r+1}; neboť vytvořující přímky každého z obou prostorů tak vznikajících jsou takovými i v druhém. Uvážíme-li vedle toho, že z $r+1$ daných bodů nezávislých vznikne týž prostor, ať kterýkoli z bodů těch zvolíme za společný bod přímek prostor S_r vytvořujících, shledáme, že *prostor r-rozměrný jest určen libovolnými* $r+1$ *svými body nezávislými.*[6])

Nakonec předpokládáme, že *mimo prostor* S_r *neexistuje už žádný bod*, takže řada vytvořených prostorů jest uzavřena.

d) Kterékoli body, vybrané z dané skupiny nezávislých bodů, tvoří opět skupinu bodů nezávislých; kdyby totiž z $k+1$ nezávislých bodů leželo $h+1$ v S_{h-1} (nebo v prostoru s menším počtem rozměrů), ležel by tento S_{h-1} spolu se zbývajícími $k-h$ body danými v prostoru S_{k-1} (nebo nižším) proti předpokladu.

Jestliže z $n+1$ nezávislých bodů, určujících prostor S_n, zvolíme $k+1$ bodů ke stanovení prostoru S_k, stanoví zbývajících $n-k$ bodů prostor S_{n-k-1}. Tyto dva prostory S_k a S_{n-k-1}, určené dvěma skupinami, jež jsou vzaty ze skupiny $n+1$ bodů nezávislých a ji vyčerpávají, nemají společného bodu. Kdyby totiž prostory ty měly společný bod A, určoval by bod A spolu s k nezávislými body prostoru S_k tento S_k, obdobně by A určoval s $n-k-1$ nezávislými body prostoru S_{n-k-1} tento prostor, všechny pak body zde uvedené v počtu $1+k+(n-k-1)=n$ určovaly by S_{n-1}, obsahující uvedené prostory S_k a S_{n-k-1}, a tedy i daných $n+1$ bodů proti předpokladu jejich nezávislosti. *Dva prostory bez společného bodu* nazýváme *nezávislé* (nebo obecně položené). A platí: Dva nezávislé prostory S_k a S_{n-k-1} určují prostor S_n. Lze totiž body určující prostor S_k i body určující prostor S_{n-k-1} zajisté tak zvoliti, aby tvořily skupinu $n+1$ bodů nezávislých. Jinak můžeme tedy říci:

Dva nezávislé prostory S_k *a* $S_{k'}$ *určují prostor* S_n je obsahující, *kde platí* $n=k+k'+1$ čili $k+k'=n-1$.

A obecně: Prostory v počtu h, po dvou nezávislé, o $k_1, k_2, \ldots, k_h$ rozměrech určují prostor S_n, platí-li $n=\sum_1^h k_i + h - 1$. Speciálně jest S_n určen nejen bodem a prostorem S_{n-1} mimo něj položeným, nýbrž také přímkou a prostorem S_{n-2}, rovinou a prostorem S_{n-3} atd. bez společného bodu.[7])

---

[6]) Systém všech S_k v S_r jest $(k+1)(r-k)$-mocný, jak lze zjistiti obvyklým způsobem (třebas tím, že S_k je určen $k+1$ body, z nichž každý patří do soustavy ∞^r bodů v S_r a do soustavy ∞^k bodů v S_k). Viz *P. H. Schoute*, Die Anzahl von Punkten, Geraden, Ebenen u. s. w. in den linearen Räumen höherer Ordnung, Mitteilungen Math. Ges. Hamburg 4 (1901).

Prostor nejmenšího počtu rozměrů, v němž dva dané prostory jsou obsaženy, sluje jejich prostorem spojujícím (jest jimi určen). Spojující prostor dvou nezávislých prostorů S_k a $S_{k'}$ jest tedy $S_{k+k'+1}$.

Prostor největšího počtu rozměrů, obsažený ve dvou daných prostorech, sluje jejich prostorem průsečným (jest jimi určen).

A nalezneme: *Mají-li dva prostory S_k a $S_{k'}$ průsečný prostor S_p o p rozměrech a spojující prostor S_s o s rozměrech, platí* $k + k' = s + p$. Neboť společný S_p je určen $p + 1$ svými body nezávislými, tyto body pak určují jednak s dalšími $k - p$ nezávislými body prostoru S_k, jednak s dalšími $k' - p$ nezávislými body prostoru $S_{k'}$ oba uvedené prostory S_k a $S_{k'}$; všechny body zde uvedené v počtu $(p + 1) + (k - p) + (k' - p)$ určují prostor S_s, takže $s + 1$ se rovná tomuto součtu; proto $s = k + k' - p$.

Pomocí důležité věty té můžeme při daných k a k' nalézti s, je-li známo p, nebo nalézti p, je-li známo s: Dva prostory o k a k' rozměrech, protínající se v prostoru o p rozměrech (nikoli však v prostoru vyšším), určují (jako spojující) prostor o $k + k' - p$ rozměrech. Dva prostory o k a k' rozměrech, obsažené v prostoru o s rozměrech (nikoli však v prostoru nižším), určují (jako průsečný) prostor o $k + k' - s$ rozměrech. Předcházející věta o dvou nezávislých prostorech je v uvažované větě zahrnuta pro $p = -1$.[8])

Zobecněním dostáváme větu: Prostory v počtu h o $k_1, k_2, \ldots, k_h$ rozměrech, obsažené v spojujícím prostoru o s rozměrech, mají, platí-li $\sum_1^h k_i \geqq (h-1)s$, průsečný prostor aspoň o $p = \sum_1^h k_i - (h-1)s$ rozměrech.

Pozoruhodné jsou zejména speciální případy: V prostoru S_r určují dva různé prostory S_{r-1} (průsečný) prostor S_{r-2}; prostor S_{r-1} a prostor S_{r-2} v něm neležící určují (průsečný) prostor S_{r-3}; tři různé prostory S_{r-1} bez společného S_{r-2} určují (průsečný) prostor S_{r-3}; h prostorů S_{r-1} (při $h < r$) mají společný aspoň S_{r-h}; r prostorů S_{r-1} mají společný aspoň bod.[9])[10])

[7]) Všechny možné způsoby stanovení prostoru S_r nezávislými prostory jeho nalezneme kombinováním jeho $r + 1$ bodů nezávislých; tak lze S_4 určiti šesti, S_5 deseti způsoby.

[8]) Pravíme, že prostory S_k a $S_{k'}$ v S_r mají polohu obecnou, jestliže při $k + k' \geqq r$ se protínají jen v $S_{k+k'-r}$ nebo při $k + k' < r$ nemají společného bodu; mají polohu zvláštní, protínají-li se v prostoru vyšším (v druhém případě aspoň v bodě).

[9]) O větším počtu prostorů platí na př.: Prostory téhož počtu h rozměrů, jež se po dvou protínají v prostorech S_{h-1}, procházejí buď všechny týmž S_{h-1} nebo náležejí všechny témuž S_{h+1}. Jestliže několik prostorů ve spojujícím S_r má společný S_h, protíná S_{r-h-1} na S_h nezávislý tyto prostory v prostorech, jejichž spojujícím prostorem jest tento S_{r-h-1}. Další věty o spojujícím prostoru více než dvou prostorů dokazuje *E. Bertini*, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, p. 15 a n.

e) V prostoru S_r, složeném z bodů S_0, jsou obsaženy přímky S_1, roviny S_2, atd., konečně $(r-1)$-rozměrné prostory S_{r-1}; tyto prostory o $r-1$ rozměrech slují *nadroviny*.[11])

Uvedené věty základní a některé věty odvozené můžeme takto sestaviti:

Dva různé body určují spojující S_1.

Tři body, neležící v témž S_1, určují spojující S_2.

Obecně k bodů $(k \leqq r)$, jež nejsou incidentní s týmž S_{k-2}, určují (spojující) prostor S_{k-1}, s nímž jsou incidentní. Každou skupinu h bodů $(h < k)$ je zde možno nahradit (spojujícím) prostorem S_{h-1}.

Dvě různé nadroviny určují průsečný S_{r-2}.

Tři nadroviny, neprotínající se v témž S_{r-2}, určují průsečný S_{r-3}.

Obecně k nadrovin $(k \leqq r)$, jež nejsou incidentní s týmž S_{r-k+1}, určují (průsečný) prostor S_{r-k}, s nímž jsou incidentní. Každou skupinu h nadrovin $(h < k)$ je zde možno nahradit (průsečným) prostorem S_{r-h}.

Vidíme tu, že si navzájem odpovídají věta o bodech a věta o nadrovinách v S_r, při čemž spojujícímu prostoru S_h odpovídá průsečný prostor S_{r-h-1} pro $h = 1, 2, \ldots, r-1$. Pokud tedy odvozujeme geometrické věty prostoru S_r z hořejších vět o incidenci prostorů S_k pro $0 \leqq k \leqq r-1$, platí o větách těch *zákon duálnosti v* S_r:

Každá věta o útvarech prostoru r-rozměrného zůstává v platnosti, jestliže v ní (po případě slohově upravené) *zaměníme prostory* S_k *a* S_{r-k-1} (pro k od 0 do $r-1$).

Prostory S_k a S_{r-k-1} slují v S_r *duální* (čili dva prostory S_k a $S_{k'}$ jsou v S_r duální, jestliže $k + k' = r - 1$); jsou tedy v S_r duálními

[10]) O přímkách a rovinách prostoru S_4 platí: Existuje jediná přímka, protínající tři dané přímky obecně položené; existuje jediná rovina, protínající tři dané roviny obecně položené v přímkách. Existuje pět ($\infty^1, \infty^2, \infty^3$) přímek, protínajících šest rovin (pět, čtyři, tři roviny) v obecné poloze. Podrobnosti o tom podává *C. Segre*, Alcune considerazioni elementari sull' incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni, Rendiconti Circolo mat. Palermo 2 (1888) (incidentními slují zde totiž dvě přímky se společným bodem, dvě roviny se společnou přímkou, přímka a rovina se společným bodem). Podobně pro S_5: *U. Perazzo*, Sulla incidenza di rette, piani e spazii ordinarii in uno spazio a cinque dimensioni . . ., Memorie Accad. Torino (2) 54 (1904). A dále pro S_r: *H. Schubert*, Anzahl-Bestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension, Acta math. 8 (1886); *G. Castelnuovo*, Numero degli spazi che segano più rette in uno spazio ad n dimensioni, Rendiconti Accad. Lincei Roma (4) 5_2 (1889); *G. Z. Giambelli*, Risoluzione del problema degli spazi secanti, Memorie Accad. Torino (2) 52 (1903). Aplikací příslušných úvah o přímkách a rovinách v S_4 na problém projektivnosti se zabývá *L. Hofmann*, Über den Zusammenhang des Problems der Projektivität mit den Beziehungen zwischen inzidenten Geraden und Ebenen im vierdimensionalen Raume, Sitzungsberichte Akad. Wien 138 (1929).

[11]) Pojmenování *nadrovina* (hyperrovina) pro S_{r-1} v S_r zavedl *C. Segre* (1891); říkalo se také rovina, což nyní ponecháno pro S_2.

bod S_0 a nadrovina S_{r-1}, přímka S_1 a prostor S_{r-2}, rovina S_2 a prostor S_{r-3}, atd. Je-li r číslo liché, vyskytuje se v S_r prostor soběduální o $\frac{1}{2}(r-1)$ rozměrech.

Jako je prostor S_k vytvořen body, tak lze duální prostor S_{r-k-1} duálně vytvořiti nadrovinami: Dvě různé nadroviny v S_r určují průsečný S_{r-2}; všechny nadroviny, jdoucí tímto S_{r-2}, tvoří jednomocnou soustavu nadrovin, kterou nazveme (jednomocný) *svazek nadrovin* v S_r a označíme Σ_1. Tři nadroviny v S_r, jež nepatří do téhož Σ_1, určují průsečný S_{r-3}; všechny nadroviny, jdoucí prostorem S_{r-3}, tvoří dvojmocnou soustavu, jež sluje *dvojmocný svazek nadrovin* v S_r (také trs nadrovin v S_r) a označuje se Σ_2. Obecně *všechny nadroviny v S_r, jež procházejí prostorem S_{r-k-1}, tvoří k-mocný svazek nadrovin*, jejž označíme Σ_k: tento svazek je určen $k+1$ nadrovinami, které neleží v témž Σ_{k-1} (neprocházejí týmž S_{r-k}); jest k-mocný, protože každý S_{k-1} obsažený v S_k, nezávislém v S_r vůči S_{r-k-1}, určuje spolu s prostorem S_{r-k-1} jednu nadrovinu svazku, takže tento svazek obsahuje ∞^k nadrovin (jako prostor S_k nadrovin a bodů). Společný prostor S_{r-k-1} všech nadrovin k-mocného svazku Σ_k sluje *base* (základ, nosič, střed, osa) svazku. A jako jsou v bodovém prostoru S_k obsaženy bodové prostory S_h pro $h < k$, jsou v nadrovinovém svazku Σ_k duálně obsaženy nadrovinové svazky Σ_h (jejichž base S_{r-h-1} pro $h = 1, 2, \ldots, k-1$ procházejí basí S_{r-k-1} svazku Σ_k).

Bodové prostory k-rozměrné S_k a nadrovinové svazky k-mocné Σ_k s basí S_{r-k-1} (kde $k = 1, 2, 3, \ldots, r-1$), navzájem duální, jsou *základní útvary prostoru S_r a duálního Σ_r*.

Jako v prostoru S_n, v S_r ležícím, béřeme často v úvahu vedle bodů také všechny prostory s nižším počtem rozměrů v něm obsažené, tak duálně v Σ_n s basí S_{r-n-1} uvažujeme vedle nadrovin S_{r-1} o prostorech $S_{r-2}, S_{r-3}, \ldots, S_{r-n+1}, S_{r-n}$ (jdoucích uvedenou basí); v tom případě lze k-mocný Σ_k nazvati *svazem* a pokládati za k-rozměrný prostor, jehož body a nadroviny (nebo obráceně) jsou S_{r-n} resp. S_{r-1}. Místo Σ_n uvádí se leckdy jen jeho base S_{r-n-1}.

Obdobně, jako se stalo pro S_r, lze zjistiti duálnost *pro každý prostor* S_n, kde $2 \leqq n < r$, jakož i *pro každý svaz* Σ_n, v S_r resp. Σ_r obsažené.

A v každém S_n jsou *základními útvary* vedle bodových prostorů S_k duální k nim k-mocné svazky prostorů S_{n-1} s basí S_{n-k-1} pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$.[12])

f) *Základní výkony* projektivní geometrie jsou *promítání* a *protínání*.

Prostor S_k *promítneme* z prostoru S_m, sestrojíme-li prostor oba tyto prostory spojující. Tento promítající prostor má, mají-li S_m a S_k průsečný prostor S_p, rozměrů $m + k - p$ (je-li toto číslo $< r$); jestliže

[12]) Složitější útvary základní uvádí *H. Schubert*, Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes, Math. Annalen 26 (1886).

zejména prostory S_m a S_k nemají společného bodu, jest promítající prostor S_{m+k+1} ($m + k + 1 \leqq r - 1$). Tak se z prostoru S_m promítá $S_0, S_1, \ldots, S_{r-m-2}$ ležící mimo něj, prostorem $S_{m+1}, S_{m+2}, \ldots, S_{r-1}$.

Prostor S_k *protneme* prostorem S_t, sestrojíme-li prostor oběma těmto prostorům společný. Tento průsečný prostor má, mají-li S_t a S_k spojující prostor S_s, rozměrů $t + k - s$ (je-li toto číslo > -1); jestliže zejména prostory S_t a S_k mají spojující prostor S_r, jest průsečný prostor S_{t+k-r} ($t + k - r \geqq 0$). Tak se prostorem S_t protíná $S_{r-1}, S_{r-2}, \ldots, S_{r-t}$, je-li spojujícím prostorem S_r, v prostoru $S_{t-1}, S_{t-2}, \ldots, S_0$.

Promítání a protínání jsou výkony duální: duální v S_r jest promítnutí prostoru S_k z bodu, z přímky, ..., z prostoru S_m a protnutí prostoru S_{r-k-1} nadrovinou S_{r-1}, prostorem S_{r-2}, ..., prostorem S_{r-m-1}.

Jestliže prostor S_k z prostoru S_m promítneme a promítající prostor prostorem S_t protneme, pravíme, že prostor S_k *promítáme z prostoru* S_m *do prostoru* S_t.

Nejdůležitější je promítání z bodu a duálně protínání nadrovinou v prostoru S_r (nebo nadrovinou v prostoru, jenž je v S_r obsažen). Promítání z prostoru S_m lze nahraditi postupným promítáním z $m + 1$ nezávislých bodů, jež S_m určují (nebo obecněji postupným promítáním z prostorů, S_m určujících).

g) Jednoduchým útvarem v S_r jest skupina konečného počtu $n \geqq r + 1$ různých bodů, jež nejsou obsaženy v prostoru s menším počtem rozměrů, se všemi prostory S_k pro $k = 1, 2, \ldots, r - 1$, které je po $k + 1$ členech spojují; takový útvar sluje *úplný r-rozměrný n-roh*. Útvarem k němu duálním jest *úplný r-rozměrný n-stěn*, složený z $n \geqq r + 1$ nadrovin, jejichž spojujícím prostorem jest S_r, a z průsečných prostorů S_{r-k-1} pro $k = 1, 2, \ldots, r - 1$, ve kterých se vždy $k + 1$ těchto nadrovin protíná.

V každém prostoru S_k úplného r-rozměrného n-rohu leží $\binom{k+1}{h+1}$ jeho prostorů h-rozměrných a každým jeho prostorem S_h prochází $\binom{n-h-1}{k-h}$ jeho prostorů k-rozměrných (při $h < k$).

Nejjednodušším n-rohem v S_r jest $(r + 1)$-roh, určený $r + 1$ body nezávislými; tento tedy není obsažen v prostoru s menším počtem rozměrů čili (jak pravíme) přísluší do S_r a sluje *normálním* n-rohem čili *jehlanem prostoru* S_r.[13]) Normální jehlan v S_r má mimo svých $r + 1$ vrcholů $\binom{r+1}{2}$ přímek, $\binom{r+1}{3}$ rovin, $\binom{r+1}{4}$ prostorů třírozměrných, ..., $\binom{r+1}{k+1}$ prostorů k-rozměrných, ..., konečně $\binom{r+1}{2}$ prostorů $(r - 2)$-rozměrných a $r + 1$ nadrovin, jež jeho vrcholy po

[13]) Normální jehlan čili $(r + 1)$-roh prostoru S_r byl nazván *P. H. Schoutem* krátce *simplex* (jako nejjednodušší n-roh v S_r).

$2, 3, 4, \ldots, k+1, \ldots, r-1, r$ jsou určeny. Každý prostor S_k (pro $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$), určený $k+1$ vrcholy normálního jehlanu, a prostor S_{r-k-1}, určený jeho $r-k$ vrcholy ostatními, slují protější; v obou těchto prostorech určují vrcholy normálního jehlanu opět jehlany normální.

Normální jehlan jest útvar soběduální (n-roh a n-stěn); neboť dospějeme k témuž útvaru, ať vyjdeme od $r+1$ bodů nebo od $r+1$ nadrovin obecně položených v S_r.

Normální n-roh a spolu n-stěn jest důležitý také proto, že *každý úplný n-roh v S_k* pro $1 < k < n-1$ *jest průmětem n-rohu normálního.* Jest totiž patrno, že průmět normálního jehlanu v S_{n-1} z prostoru $(n-k-2)$-rozměrného do nezávislého S_k jest úplným n-rohem tohoto; obráceně k úplnému n-rohu v S_k ($n > k+1$) nalezneme normální n-roh, jehož je průmětem, jestliže v prostoru S_{n-1}, prostor S_k obsahujícím, zvolíme prostor S_{n-k-2} na S_k nezávislý, spojíme s ním vrcholy daného n-rohu a zvolíme v každém tomto S_{n-k-1} jeden bod tak, aby všechny měly spojující prostor S_{n-1}. A duálně každý úplný n-stěn v S_k jest průsekem normálního n-stěnu (pro $1 < k < n-1$).[14])

h) Projektivní geometrie obyčejná (prostoru třírozměrného) byla založena na třech skupinách postulátů: o incidenci prvků, o uspořádání prvků v útvarech jednomocných a o spojitosti takových útvarů; vycházela od útvarů základních se zvláštním zřetelem k duálnosti a od promítání s protínáním.

Širší *projektivní geometrii prostoru r-rozměrného* (pro $r > 3$) čili

[14]) Dva homologické jehlany normální v S_r (t. j. normální $(r+1)$-rohy, jejichž sdružené vrcholy mají spojnice jdoucí týmž bodem a sdružené stěny protínají se v téže nadrovině) vyšetřoval *L. Berzolari*, Sulla omologia di due piramidi in un iperspazio, Rendiconti Accad. Lincei Roma 13_1 (1904) (mohou býti v obecném případě pro $r > 3$ homologické jenom jedním způsobem). O normálních jehlanech viz dále *L. Brusotti*, Teoremi sulle piramidi di $n+1$ vertici dello spazio ad n dimensioni, Rendiconti Circolo mat. Palermo 20 (1905); *L. Berzolari*, Sui sistemi di $n+1$ rette dello spazio ad n dimensioni, situate in posizione di Schläfli, tamtéž; téhož Sull' estensione del concetto di tetraedri di Möbius agli iperspazii, Rendiconti Circolo mat. Palermo 22 (1906); *A. Giusto*, Sulle coppie di piramidi, fondamentali di S_4, mutualmente iscritte, Giornale mat. 50 (1912). Pro odvození a vyšetřování konfigurací promítnutím a protnutím z prostorů vyšších viz *G. Veronese*, Behandlung der projektivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen . . ., Math. Annalen 19 (1882); *P. del Pezzo*, Appunti di geometria ad n dimensioni, Giornale mat. 31 (1893); *W. B. Carver*, On the Cayley-Veronese class of configurations, Transactions Amer. math. soc. 6 (1905). Spec. pro konfiguraci Pascalovu *H. W. Richmond*, The figure formed from six points in space of four dimensions, Math. Annalen 53 (1900); *E. Jouffret*, Mélanges de géométrie à quatre dimensions (1906). Také *G. Veronese*, Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de n lettres particulièrement pour $n = 3, 4, 5, 6$ en relation avec les groupes de l'hexagramme mystique (s dodatkem), Annali mat. (2) 11 (1883); dále *E. Ciani*, Una interpretazione geometrica del gruppo totale di sostituzioni sopra sei elementi, Annali mat. (3) 16 (1909).

projektivní geometrii polydimensionální zakládáme obdobně na uvedených zde postulátech o incidenci prvků (o přímce, o rovině, vedle postulátu o existenci neomezeného počtu bodů, spec. o existenci bodů mimo S_k pro $k \leqq r - 1$), dále na týchž postulátech skupin II. a III. jako v projektivní geometrii obyčejné, totiž na postulátech o uspořádání prvků v základních útvarech jednomocných[15]) a o spojitosti útvarů jednomocných; může postupovati opět od základních útvarů k-mocných pro $k = 1, 2, \ldots, r$ se zřetelem k duálnosti, pomocí základních výkonů promítání a protínání.[16])[17])[18])

[15]) Projektivní prostor r-rozměrný jest s hlediska topologického jednostranný nebo dvoustranný podle toho, je-li r sudé resp. liché. Viz *D. König*, Über Ein- und Zweiseitigkeit mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten, Archiv Math. Phys. (3) 19 (1912).

[16]) *Geometrie polydimensionální* (geometrie prostoru n-rozměrného, hypergeometrie a pod.) jest matematický obor poměrně nový. První podněty k ní vyšly z analyse a algebry na základě geometrie analytické (geometrické názvosloví v teorii funkcí, algebraických rovnic a forem s větším počtem proměnných); k tomu záhy přistoupilo jednoduché a více formální užití v rozmanitých otázkách geometrických. K prvním pěstitelům tohoto myšlení patří *A. Cayley* a *H. Grassmann* (1844 a později), potom *A. Cauchy*, *J. J. Sylvester*, *L. Schläfli*, *B. Riemann* a *G. Salmon*; pro geometrii projektivní jsou odtud nejdůležitější Cayleyovy úvahy o útvarech kvadratických a o některých konfiguracích. K tomu přistupují později (v letech 70.) hlavně *M. Noether*, *S. Lie* (volbou elementu prostorového), *F. Klein* (v systematice geometrie a v geometrii přímkové), *C. Jordan* (v elementární geometrii), *G. Halphen* a *W. K. Clifford*. Tehdy a v letech následujících rozšiřovány byly na prostor s libovolným počtem rozměrů (zejména na prostor čtyřrozměrný) rozmanité úvahy geometrické, hlavně geometrie elementární, diferenciální, analytická geometrie projektivní, geometrie biracionálních transformací, topologie, deskriptivní geometrie a kinematika.

Projektivní geometrii synthetickou soustavnými úvahami svými založil r. 1881 *G. Veronese* (Behandlung der projektivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip des Projizierens und Schneidens, Math. Annalen 19 (1882), a předběžně jinde). Z tohoto počinu vznikla zvláště v Italii dlouhá řada pojednání o mnohých otázkách geometrie projektivní a předmětech příbuzných metodou synthetickou i analytickou; uveřejnili je zejména *C. Segre*, *E. Bertini*, *P. del Pezzo*, *G. Loria*, *L. Berzolari*, *G. Castelnuovo*, *F. Enriques* a mnozí j.

[17]) Souborných spisů o projektivní geometrii prostoru r-rozměrného jest málo: začátky v několika směrech (základy, konfigurace, projektivnost a její výtvory, útvary kvadratické, čáry) podává *G. Veronese*, Behandlung der projektivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip des Projizierens und Schneidens, Math. Annalen 19 (1882); jednodušší věci (většinou z geometrie metrické) obsahuje *P. H. Schoute*, Mehrdimensionale Geometrie, I. díl (1902) [II. díl (1905) se týká jen geometrie elementární]; obdobně *D. M. Y. Sommerville*, An introduction to the geometry of n dimensions (1929); krátce *E. Bally*, Principes et premiers développements de géométrie générale synthétique moderne (1922); částečně také *H. F. Baker*, Principles of geometry (4. díl, 1925); *E. Čech*, Projektivní diferenciální geometrie (1. kap., 1926); *E. Ciani*, Introduzione alla geometria algebrica (10. kap. pro S_4, 1931); soustavná a bohatá jest kniha *E. Bertini*, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi (con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità (1907, 2. vyd.

142. Projektivnost dvou (různých) prostorů. *a) Projektivnost dvou r-rozměrných prostorů* ($r > 1$), *složených z bodů a nadrovin, jest příbuznost, v níž každému prvku jednoho i druhého prostoru odpovídá jediný prvek druhého resp. prvního tak, že dvěma incidentním prvkům odpovídají dva prvky incidentní.* Jsou-li prvky sobě odpovídající téhož druhu (bodu odpovídá bod, nadrovině nadrovina), sluje projektivnost *kolineací* (homografií); odpovídají-li sobě prvky různého druhu (bodu nadrovina a obráceně), sluje projektivnost *korelací* (reciprocitou).

V případě kolineace můžeme jednodušeji oba projektivní prostory mysliti si složeny z bodů, S_r a S'_r, a žádati vedle obapolně jednoznačné korespondence mezi jejich body, aby bodům vyplňujícím nadrovinu S_{r-1} v jednom příslušely body vyplňující nadrovinu S'_{r-1} v druhém; nebo můžeme duálně vzíti v úvahu dva prostory složené z nadrovin, Σ_r a Σ'_r, a mimo obapolně jednoznačnou příbuznost mezi jejich nadrovinami požadovati, aby nadrovinám $(r-1)$-rozměrného svazku v jednom příslušely nadroviny tvořící $(r-1)$-rozměrný svazek v prostoru druhém. V případě korelace lze obdobně uvažovati o prostoru bodovém S_r a prostoru nadrovinovém Σ_r, jejich projektivnost pak definovati jednojednoznačnou korespondencí prvků a zachováním incidence prvku s $(r-1)$-rozměrným základním útvarem jimi vytvořeným. Z uvedených případů stačí často vzhledem k duálnosti vyšetřovati pouze jeden, třebas kolineaci dvou prostorů bodových (což zatím pro zjednodušení a určitost učiníme).

V kolineaci dvou bodových prostorů S_r a S'_r odpovídá nejenom bodu v S_r bod v S'_r a bodům nadroviny v S_r body nadroviny v S'_r (i obráceně), nýbrž *odpovídají také* bodům přímky, roviny, . . ., obecně *bodům prostoru* S_k v S_r ležícího body přímky, resp. roviny, . . ., resp.

---

doplněné 1923, něm. překlad tohoto Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume, 1924). Přehled (o celé geometrii polydimensionální) podává přední pěstitel její *C. Segre* v Encyklopädie der math. Wissenschaften, III C 7 (Mehrdimensionale Räume, do r. 1912). O dějinách pojednává *V. Schlegel*, Sur le développement et l'état actuel de la géométrie à n dimensions, L'enseignement math. 11 (1900). Pro literaturu viz *G. Loria*, Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche (4. vyd. 1931), a *D. M. Y. Sommerville*, Bibliography of non-Euclidean geometry, including the theory of parallels, the foundations of geometry and space of n dimensions (1911).

[18]) O základech projektivní geometrie polydimensionální (metodou synthetickou) jednají hlavně *G. Veronese*, Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee (1891, něm. překlad 1894); *F. Amodeo*, Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria proiettiva di uno S_r, Atti Accad. Torino 26 (1891); *G. Fano*, Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni, Giornale mat. 30 (1892); *P. del Pezzo*, Appunti di geometria ad n dimensioni, Giornale mat. 31 (1893); *M. Pieri*, I principii della geometria di posizione composti in sistema logico-deduttivo, Memorie Accad. Torino 48 (1898). Viz také *O. Veblen - J. W. Young*, Projective geometry I, p. 29 a n.; *J. Rey Pastor*, Fundamentos de la geometría proyectiva superior (1916); *J. Vojtěch*, Projektivní prostor r-rozměrný, Časopis mat. fys. 58 (1928).

body prostoru S'_k v S'_r obsaženého (pro $k = 1, 2, \ldots, r-2$); neboť bodům prostoru S_k jako průseku $r-k$ nadrovin prostoru S_r musí odpovídati body společné $r-k$ nadrovinám prostoru S'_r, jež jsou k oněm sdruženy, tedy body jejich průseku S'_k.[1])

Prostory S_k *a* S'_k, *jež sobě v kolineaci daných dvou prostorů* S_r *a* S'_r *odpovídají, jsou kolineární* (pro $k = r-1, r-2, \ldots, 3, 2$; pro $k = 1$ projektivní). Neboť dvě nadroviny S_{r-1} a S'_{r-1}, jež jsou v dané kolineaci prostorů S_r a S'_r sdruženy, jsou kolineární, protože jejich body sobě odpovídají obapolně jednoznačně a protože bodům každého prostoru S_{r-2}, v nadrovině S_{r-1} ležícího, jako průseku této nadroviny s druhou nadrovinou prostoru S_r odpovídají body prostoru S'_{r-2} v nadrovině S'_{r-1} obsaženého, průseku nadroviny té s nadrovinou prostoru S'_r k oné druhé sdruženou. Obdobně shledáme dále, že prostory S_{r-2} a S'_{r-2}, v dané kolineaci prostorů S_r a S'_r sdružené, jsou kolineární, ježto vedle obapolně jednoznačné korespondence jejich bodů dvojici incidentního bodu a prostoru S_{r-3} v jednom odpovídá dvojice incidentního bodu a prostoru S'_{r-3} v druhém, kde S_{r-3} a S'_{r-3} jsou průseky uvažovaných prostorů S_{r-2} resp. S'_{r-2} s nadrovinami prostorů S_r resp. S'_r, v dané kolineaci sdruženými. Touto cestou dospějeme ke sdruženým rovinám, jež jsou kolineární, a konečně ke sdruženým přímkám, jejichž bodové řady jsou projektivní. Pravíme, že danou kolineací prostorů S_r a S'_r jest kolineace v nižších prostorech jejich S_k a S'_k *indukována* (jest oné podřaděna).

Obdobně při korelaci dvou daných prostorů S_r a Σ_r odpovídají sobě dva sdružené základní útvary, bodový prostor S_k a svazek nadrovinový Σ_k korelací indukovanou.

Dva r-rozměrné prostory, kolineární nebo korelativní k třetímu prostoru r-rozměrnému, jsou navzájem kolineární.

Kolineaci nebo korelaci dvou prostorů můžeme částečně vyšetřovati bez ohledu na to, zdali dané prostory nemají nebo mají společné prvky nebo dokonce splývají; jestliže však oba prostory jsou soumístné, vznikají odtud nové otázky.[2])

---

[1]) Kolineaci dvou bodových prostorů S_r a S'_r můžeme definovati jako obapolně jednoznačnou korespondenci mezi prostory $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{r-1}$ jednoho a prostory $S'_0, S'_1, S'_2, \ldots, S'_{r-1}$ druhého takovou, že incidentním prostorům S_h a S_k v jednom odpovídají incidentní prostory S'_h a S'_k v druhém; stačí však žádati jednojednoznačnou korespondenci a zachování incidence u prostorů dvojího druhu S_h, S_k a sdružených S'_h, S'_k při určitém h a k, kde $h \neq k$ (zvláště bodů a prostorů k-rozměrných při $0 < k < r$; spec. bodů a nadrovin, jak jsme učinili, nebo bodů a přímek).

[2]) Dvojpoměr čtyř prvků v útvaru jednorozměrném (v řadě bodové a ve svazku nadrovinovém) určuje se jako v prostorech nejnižších. Pro konstrukci jeho u čtyř bodů na přímce pomocí vyšších prostorů viz *E. Busche*, Über das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden, Math. Annalen 41 (1893); *S. Kantor*, I numeri razionali in geometria, Atti Accad. Torino 36 (1901). Zobecněním dvojpoměru pro S_r se zabývá *G. Kohn*, Über die Erwei-

b) Jako jest (podle základní věty o projektivnosti) projektivnost dvou soumístných základních útvarů jednomocných identickou, existují-li v ní tři různé prvky samodružné, tak platí všeobecně:

Kolineace dvou soumístných r-rozměrných prostorů bodových jest identická, jestliže v ní existuje $r + 2$ *samodružných bodů, z nichž každých* $r + 1$ *jest nezávislých.*

Předpokládejme, že věta platí o prostoru S_k; dokážeme ji pro prostor S_{k+1}. V kolineaci dvou soumístných prostorů $(k + 1)$-rozměrných buďtež samodružnými body $P_1, P_2, \ldots, P_{k+3}$, z nichž vždy $k + 2$ jsou nezávislé čili žádné $k + 2$ neleží v S_k. Nadrovina S_k určená samodružnými body P_1 až P_{k+1} odpovídá sobě samé, rovněž tak přímka S_1 určená body samodružnými P_{k+2} a P_{k+3}; proto je průsečík Q nadroviny S_k a přímky S_1 bodem samodružným. Body P_1 až P_{k+1} a Q jsou nezávislé; neboť body P_1 až P_{k+1} nemohou ležeti v S_{k-1}, protože by v kladném případě tyto body spolu s bodem P_{k+2} nebo P_{k+3} ležely v S_k proti suposici; ani však k z bodů těch, na př. P_1 až P_k, a bod Q nemohou ležeti v S_{k-1}, protože by v opačném případě body P_1 až P_k a body P_{k+2}, P_{k+3} ležely v S_k opět proti suposici. Ježto tedy $k + 2$ nezávislé body nadroviny S_k, položené body P_1 až P_{k+1}, jsou samodružné, jest podle předpokladu tato nadrovina složena z bodů samodružných; rovněž přímka S_1, položená body P_{k+2} a P_{k+3}, obsahujíc tři body samodružné, má všechny své body samodružné. Odtud plyne, že každá nadrovina prostoru S_{k+1}, nejdoucí bodem Q, jest samodružnou; neboť protíná nadrovinu $P_1P_2 \ldots P_{k+1}$ a přímku $P_{k+2}P_{k+3}$ v $(k-1)$-rozměrném prostoru resp. v bodě samodružných a jest jimi určena. Jest tudíž každý bod prostoru S_{k+1} jako průsečík samodružných nadrovin v kolineaci samodružný. A protože předpoklad, t. j. platnost uvažované věty pro S_k, je správný pro $k = 1$, platí věta ta obecně, tedy pro kolineaci dvou soumístných prostorů r-rozměrných.[3])

c) Prostor S_k v S_r ležící sluje *perspektivní* ke svazu, jehož basí je prostor na S_k nezávislý S_{r-k-1}, jestliže S_k je průsekem svazu toho a obráceně svaz průmětem prostoru S_k, t. j. přiřadíme-li každému prostoru S_h v S_k ležícímu prostor jej obsahující S_{r-k+h} svazu s basí S_{r-k-1}.

Dva prostory S_k a S'_k se společným S_p (pro $p \geqq 0$ nebo $p = -1$, t. j. bez společného bodu), tedy se spojujícím prostorem S_{2k-p}, *slují perspektivní*, jsou-li průseky téhož svazu v prostoru S_{2k-p} s basí na obou prostorech těch nezávislou S_{k-p-1}; přiřadíme-li tedy navzájem

terung eines Grundbegriffs der Geometrie der Lage, Math. Annalen 46 (1895), a Über eine Gruppe von Sätzen der projectiven Geometrie, Jahresbericht Deut. Math. Ver. 18 (1909); také (analyticky) *L. Weisner*, On m-dimensional cross-ratios, Annals math. (2) 29 (1928).

[3]) Pomocí této věty lze podobně dokázati (jak ve zvláštním případě při hořejším důkazu bylo uvedeno): *Kolineace dvou daných prostorů soumístných jest identická, existují-li v ní prostory složené z bodů samodružných, jež mají daný prostor prostorem spojujícím a aspoň jeden bod společný.*

jejich prostory S_h a S'_h, ležící v témž prostoru S_{k-p+h} svazu; nebo jsou-li průseky téhož svazu v prostoru uvažovaném S_r ($r > 2k - p$) s basí $S_{k-p-1+x}$, jež prostor S_{2k-p} protíná v uvedeném S_{k-p-1} (protože $S_{k-p+x-1}$ a S_{2k-p} mají průsečný prostor S_{k-p-1} a spojující S_r nebo nižší, platí $x \leqq r - 2k + p$).

Duálně slují dva svazy s basemi S_k a S'_k o spojujícím S_s a tedy průsečném S_{2k-s} perspektivní, jsou-li průměty téhož prostoru S_{r+k-s}, jenž S_{2k-s} obsahuje; přiřadíme-li tedy navzájem dva prostory obou svazů, jdoucí týmž prostorem v S_{r+k-s} ležícím a S_{2k-s} obsahujícím; nebo jsou-li průměty téhož prostoru $S_{r+k-s-x}$, jenž spolu s prostorem S_{2k-s} určuje S_{r+k-s} (při čemž platí $x \geqq 2k - s - 1$).

Dva perspektivní prostory jsou ovšem projektivní (ve zvláštní poloze vzájemné).

Dva kolineární nezávislé prostory S_k a S'_k *jsou vždy perspektivní.* Abychom to dokázali, zvolme v S_k $k + 2$ body $P_1, P_2, \ldots, P_{k+2}$ tak, aby každých $k + 1$ bylo nezávislých; totéž platí o sdružených k nim bodech $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{k+2}$ prostoru S'_k. Proto ze spojnic vždy dvou sdružených bodů těch určuje $k + 1$ přímek, třebas přímky $P_1P'_1$ až $P_{k+1}P'_{k+1}$, prostor S_{2k+1}, dané dva prostory spojující, takže tyto přímky jsou nezávislé; a každý bod zbývající spojnice $P_{k+2}P'_{k+2}$ leží mimo každý prostor S_{2k-1}, jenž obsahuje k z uvedených $k + 1$ spojnic (protože by jinak těchto k přímek a přímka $P_{k+2}P'_{k+2}$ měly spojující S_{2k}). Budiž P''_{k+2} libovolný bod přímky $P_{k+2}P'_{k+2}$; jím lze položiti vždy a jediný prostor S''_k, jenž každou z uvedených $k + 1$ přímek protíná v jednom bodě, totiž v bodech $P''_1, P''_2, \ldots, P''_{k+1}$.[4]) Promítneme-li z prostoru S''_k prostor S_k do prostoru S'_k, obdržíme zde kolineaci (dvou prostorů soumístných), v níž každému bodu X', sdruženému danou kolineací

[4]) Existenci prostoru S''_k a jeho průsečíky P''_i s přímkami $P_iP'_i$ (pro $i = 1, 2, \ldots, k + 1$) zjistíme takto: Bodem P''_{k+2} a uvedenými přímkami vždy v počtu k položme spojující prostor $S^{(h)}_{2k}$ (jenž neobsahuje zbývající přímku $P_hP'_h$) a hledejme průsečný prostor těchto $k + 1$ prostorů (pro h od 1 do $k+1$). Prostory $S^{(k+1)}_{2k}$ a $S^{(k)}_{2k}$, obsahujíce všechny uvažované přímky, mají spojující prostor S_{2k+1} a tedy průsečný prostor $(2k - 1)$-rozměrný, jenž obsahuje ony přímky až na dvě poslední; tento S_{2k-1} a prostor $S^{(k-1)}_{2k}$, obsahujíce všechny přímky uvažované, mají opět spojující prostor S_{2k+1} a tedy průsečný prostor $(2k - 2)$-rozměrný, jenž obsahuje přímky ony až na tři poslední; tak pokračujíce dojdeme k prostoru $(k + 1)$-rozměrnému, jenž obsahuje z uvedených přímek jen první $P_1P'_1$; tento S_{k+1} a prostor $S^{(1)}_{2k}$, obsahujíce zase všechny přímky $P_iP'_i$, mají spojující S_{2k+1} a tedy průsečný prostor k-rozměrný. Tak získaný prostor k-rozměrný jest hledaným S''_k; a protože je spolu s přímkou $P_1P'_1$ obsažen v S_{k+1}, protíná přímku tu v jediném bodě P''_1. Spojujeme-li hořejší prostory $S^{(h)}_{2k}$ obdobně tak, abychom skončili i-tým z nich, dostaneme vždy týž S''_k a ostatní body P''_i pro $i = 2, 3, \ldots, k + 1$.

k bodu X prostoru S_k, odpovídá průmět tohoto X z prostoru S''_k; protože pak tato kolineace má $k+2$ body samodružné $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{k+2}$, jest identická. Jsou tudíž prostory S_k a S'_k perspektivní z prostoru S''_k, jdouce průseky téhož svazu s basí S''_k v prostoru S_{2k+1}.[5])[6])

Jestliže dva perspektivní prostory S_k a S'_k se protínají v prostoru S_h, sestává tento průsečný S_h z bodů samodružných; platí však i obráceně: *Dva kolineární prostory S_k a S'_k, jejichž průsečný prostor S_h $(0 \leqq h \leqq k-1)$ je složen z bodů samodružných, jsou perspektivní.* Abychom větu dokázali, předpokládejme nejprve, že $h = k-1$. Přímka S_1 prostoru S_k, v průsečném S_{k-1} neležící, má s tímto prostorem společný bod samodružný, v němž ji protíná přímka S'_1 prostoru S'_k, danou kolineací k ní sdružená; přímky S_1 a S'_1 jsou proto perspektivní z bodu O (jenž leží mimo S_k i S'_k, ježto by jinak S_1 i S'_1 splývaly, t. j. ležely v S_{k-1} proti suposici). Promítneme-li S_k z O do S'_k, objeví se zde kolineace dvou soumístných prostorů, při níž prostory S_{k-1} a S'_1 jsou složeny z bodů samodružných, takže tato kolineace (ježto S_{k-1} a S'_1 prostor S'_k určují) jest identická; proto jest daná kolineace uvedenou perspektivností z bodu O. Při obecném h veďme v S_k prostorem S_h $k-h$ prostorů $S^{(i)}_{h+1}$, jež prostor S_k určují; jim odpovídají danou kolineací v S'_k prostory $S'^{(i)}_{h+1}$, jdoucí rovněž prostorem S_h a určující S'_k. Podle předcházejícího jsou $S^{(i)}_{h+1}$ a $S'^{(i)}_{h+1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, k-h$ perspektivní z bodu O_i; tyto body O_i určují prostor S_{k-h-1}, nezávislý na S_k i S'_k (nikoli snad prostor s menším počtem rozměrů, ježto by tento, spojen s prostorem S_k, dával prostor obsahující také S'_k, avšak s počtem rozměrů menším než $2k-h$ proti předpokladu, že S_k a S'_k mají průsečný S_h a určují tedy S_{2k-h}). Promítneme-li z prostoru S_{k-h-1} prostor S_k na S'_k, obdržíme zde kolineaci identickou, takže opět uvedená perspektivnost jest totožna s kolineací danou. Jsou tudíž

[5]) Prostor S''_k má po jednom společném bodě se všemi ∞^k spojnicemi vždy dvou sdružených bodů prostorů S_k a S'_k; každým z ∞^1 bodů kterékoli z uvedených přímek prochází jeden takový prostor k-rozměrný (k nimž patří také S_k a S'_k). Všechny tyto prostory tvoří soustavu ∞^1 prostorů k-rozměrných takovou, že ∞^k oněch přímek protíná kterékoli dva z nich v kolineárních soustavách bodů. Navzájem také ∞^k uvedených spojnic tvoří soustavu přímek, z níž kterékoli dvě jsou hořejší soustavou ∞^1 prostorů k-rozměrných proťaty v projektivních řadách.

[6]) *Nejsou-li dva kolineární prostory S_k a S'_k nezávislé, lze jejich kolineaci pokládati za produkt dvou perspektivností* v případě, že leží v prostoru S_{2k+1}. Jestliže totiž prostory S_k a S'_k se protínají v S_h $(h \geqq 0)$, zvolme v S'_k prostor S_{k-h-1}, na S_h nezávislý, a položme jím prostor S''_k na S_k nezávislý (což je možno v prostoru S_{2k+1}). Spojujícím prostorem prostorů S'_k a S''_k, jež mají S_{k-h-1} společný, jest S_{k+h+1}; v tomto zvolme S'''_h, na S'_k i S''_k nezávislý, a učiňme jej basí svazu, jehož průseky jsou S'_k a S''_k, takže tyto dva prostory jsou perspektivní z prostoru S'''_h. A protože S_k a S'_k jsou kolineární, S'_k a S''_k pak podle předcházejícího perspektivní, jsou také prostory S_k a S''_k kolineární a, jsouce nezávislé, jsou perspektivní.

dva kolineární prostory S_k a S'_k s průsečným prostorem S_h bodů samodružných perspektivní z prostoru S_{k-h-1} na obou nezávislého.[7])

Nakonec budiž vytčeno, že *kolineaci dvou nesoumístných prostorů k-rozměrných lze nahraditi nejvýše* $k + 1$ *perspektivnostmi z bodů.* Jsou-li totiž dané kolineární prostory S_k a S'_k nezávislé, zvolme na přímce spojující libovolný bod S_0 prvého s korespondujícím bodem S'_0 druhého bod O (mimo S_k i S'_k) a promítněme z bodu toho S'_k do prostoru S''_k různého od S_k, ležícího ve spojujícím prostoru bodu O s prostorem S'_k a majícího s S_k bod S_0 společný; protože S_k a S'_k jsou kolineární, S'_k a S''_k pak perspektivní, jsou S''_k a S_k kolineární se společným bodem S_0 samodružným. Veďme dále v S_k bodem S_0 obecně položenou přímku S_1; tato přímka S_1 a k ní v S''_k sdružená přímka S''_1, majíce společný S_0 samodružný, jsou perspektivní z bodu O' (mimo S_k i S''_k ležícího); promítneme-li S''_k z O' do prostoru S'''_k různého od S_k, ležícího ve spojujícím prostoru bodu O' s prostorem S''_k a majícího s S_k přímku S_1 společnou, jsou opět S'''_k a S_k kolineární se společnou přímkou S_1 bodů samodružných. Takto pokračujíce sestrojíme dále prostory $S_k^{(4)}$, $S_k^{(5)}$, ..., $S_k^{(k+1)}$ takové, že kolineární prostory $S_k^{(i)}$ a S_k mají společný prostor S_{i-2}, složený z bodů samodružných, tedy kolineární prostory $S_k^{(k+1)}$ a S_k mají průsečný S_{k-1} bodů samodružných; tyto jsou proto perspektivní z bodu. Tím jsme obdrželi řadu prostorů S'_k, S''_k, S'''_k, ..., $S_k^{(k+1)}$, S_k, z nichž vždy dva sousední jsou perspektivní z bodu, takže celkem lze S'_k převésti v S_k perspektivními transformacemi v počtu $k + 1$. Jestliže dané prostory S_k a S'_k mají společný prostor S_h, složený z bodů samodružných, zmenší se uvedený počet perspektivností na $k - h$.[8])

d) Kolineace dvou prostorů r-rozměrných S_r *a* S'_r *jest určena, jsou-li dány dvě dvojice kolineárních svazů se středy* A *a* A', B *a* B' *tak, že společné svazy jejich s osami* AB *a* $A'B'$ *si odpovídají v téže kolineaci indukované.*

Správnost této věty poznáme z konstrukce uvedené kolineace mezi S_r a S'_r: Bodu X prostoru S_r (mimo AB ležícímu) přiřadíme bod X' prostoru S'_r, v němž se protínají přímky, odpovídající ve svazu se středem A' a ve svazu se středem B' danými kolineacemi přímce AX,

[7]) Duálně platí: *Dva kolineární svazky nadrovinové, jež mají všechny společné nadroviny samodružné, jsou perspektivní.*

[8]) Je-li prostor S_h, složený z bodů samodružných, průsečným prostorem kolineárních S_k a S'_k, lze uvedených $k - h$ perspektivností z bodů nahraditi perspektivností z prostoru S_{k-h-1} jimi určeného (nikoli však v případě, kdy průsečný prostor daných S_k a S'_k má více rozměrů než prostor bodů samodružných). Jsou-li dané kolineární prostory S_k a S'_k soumístné, stačí jeden z nich S'_k promítnouti z bodu O do jiného prostoru S''_k (ležícího v prostoru určeném bodem O a oním S'_k), takže počet perspektivností z bodů, S_k v S'_k převádějících, se zvětší na počet nejvýše $k + 2$. Viz také *J. Vojtěch*, O vytvoření kolineace projekcemi nebo homologiemi, Časopis mat. fys. 42 (1913).

resp. přímce BX; přímky ty se jistě protínají (v bodě mimo $A'B'$ ležícím), protože leží v rovině, jež ve svazu s osou $A'B'$ odpovídá rovině ABX kolineací mezi svazy s osami AB a $A'B'$ (při $r > 2$). Nadrovině svazu A nebo B odpovídá nadrovina svazu A' resp. B' jednou resp. druhou z daných kolineací k oné sdružená. Nadrovině S_{r-1}, jež neprochází bodem A ani B, přiřadíme nadrovinu prostoru S'_r, vytvořenou body, sdruženými k bodům S_{r-1} vytvořujícím; body nadroviny S_{r-1} promítají se totiž dvěma perspektivními svazy o středech A a B, těmto svazům odpovídají danými kolineacemi dva svazy se středy A' a B' navzájem kolineární, jež, obsahujíce svazek samodružných nadrovin se společnou přímkou $A'B'$, jsou rovněž perspektivní a vytvořují tedy nadrovinu S'_{r-1}. Konečně bodu X na AB přiřadíme bod X' přímky $A'B'$, společný všem nadrovinám prostoru S'_r, jež odpovídají nadrovinám prostoru S_r, jdoucím bodem X. Rovněž tak lze sestrojiti korespondenci obrácenou. Spolu pak vidíme, že kolineace takto sestrojená jest jediná.

Pomocí uvedené věty lze odůvodniti důležité stanovení kolineace: *Kolineace dvou prostorů S_r a S'_r jest určena $r+2$ dvojicemi sdružených bodů tak zvolených, že žádná skupina $r+1$ bodů v S_r ani $r+1$ bodů v S'_r neleží v téže nadrovině.* Zvolíme-li totiž v S_r body P_k a v S'_r body P'_k (za uvedeného předpokladu), z nichž vždy dva body se stejným indexem prohlásíme za sdružené (pro $k = 1, 2, 3, \ldots, r+2$), stačí vybrati z bodů těch dvě dvojice bodů sdružených, třebas P_1 a P'_1, P_2 a P'_2, spojiti je s ostatními body příslušného prostoru S_r resp. S'_r, a získáme tak dvě dvojice svazů, jejichž kolineace jest za suposice, že uvažovaná věta platí pro $r-1$, určena jednak $r+1$ dvojicemi přímek P_1P_k a $P'_1P'_k$ pro $k = 2, 3, 4, \ldots, r+2$, jednak $r+1$ dvojicemi P_2P_k a $P'_2P'_k$ pro $k = 1, 3, 4, \ldots, r+2$, při čemž indukovaná kolineace ve svazech s osami P_1P_2 a $P'_1P'_2$ je táž (stanovena r dvojicemi rovin $P_1P_2P_k$ a $P'_1P'_2P'_k$ pro $k = 3, 4, \ldots, r+2$). A protože věta tato platí pro nejmenší r, platí všeobecně.

První způsob, kterým kolineace byla určena, jest možno zobecniti: *Kolineace dvou prostorů S_r a S'_r jest určena dvěma dvojicemi kolineárních svazů s basemi S_{h-1} a S'_{h-1}, S_{k-1} a S'_{k-1}, jsou-li prostory S_{h-1} a S_{k-1} nezávislé v S_r, rovněž prostory S'_{h-1} a S'_{k-1} nezávislé v S'_r, a jestliže svazy, jejichž base S_{h+k-1} a S'_{h+k-1} jsou spojujícími prostory oněch basí, jsou sdruženy v téže kolineaci podřaděné* (při čemž $h \leqq r-1$, $k \leqq r-1$, $h+k \leqq r$). Neboť za uvedených předpokladů lze k bodu X prostoru S_r (mimo S_{h-1} i S_{k-1} ležícímu) nalézti korespondující bod X' prostoru S'_r tím, že spojíme X s prostory S_{h-1} a S_{k-1}, čímž dostaneme S_h a S_k ležící v S_{h+k}, který je spojujícím prostorem bodu toho s uvedeným S_{h+k-1}, a sestrojíme prostory S'_h a S'_k onomu S_h resp. S_k v daných kolineacích odpovídající, jež leží v S'_{h+k} k onomu S_{h+k} sdruženém, nikoli však v S'_{h+k-1}; průsečík těchto S'_h a S'_k jest bod X'. Leží-li bod X v S_{h-1}, jest korespondující bod X' průsečíkem prostoru S'_{h-1} s prostorem S'_k svazu s basí S'_{k-1}, jenž odpovídá prostoru S_k, spojujícímu X s S_{k-1}

(obdobně leží-li X v S_{k-1}). A zvolíme-li v S_{h-1} h nezávislých bodů, v S_{k-1} k nezávislých bodů a mimo oba tyto prostory v S_r $r+2-h-k$ bodů takových, že každých $r+1$ ze všech těchto bodů jest nezávislých, můžeme podle předešlého sestrojiti k nim stejný počet sdružených bodů v S'_r téže vlastnosti, čímž jest kolineace jednoznačně stanovena.

Mimo uvedené způsoby lze kolineaci dvou prostorů stanoviti i větším počtem kolineací mezi útvary v nich obsaženými: *Kolineace dvou S_r a S'_r jest určena, jsou-li dány kolineace mezi dvojicemi svazů v počtu $h+1$, jejichž base $S^{(i)}_{h-1}$* (pro $i=1,2,\ldots,h+1$) *v S_r jsou určeny vždy h body, zvolenými z $h+1$ bodů stanovících určitý S_h, a obdobně base $S'^{(i)}_{h+1}$ jsou určeny v S'_r, s podmínkou, že kolineace těmto ve svazech s basemi S_h a S'_h podřaděná je táž.* Neboť k libovolnému bodu X prostoru S_r přísluší bod X' prostoru S'_r, průsečík $h+1$ prostorů h-rozměrných, jež danými kolineacemi odpovídají prostorům svazů s basemi $S^{(i)}_{h-1}$, promítajícím bod X; tento průsečík X' existuje, protože všechny prostory bod X z prostorů $S^{(i)}_{h-1}$ promítající leží v prostoru S_{h+1}, promítajícím X z prostoru S_h je spojujícího; pročež prostory jim ve svazech s basemi $S'^{(i)}_{h+1}$ odpovídající leží v S'_{h+1}, jenž odpovídá prostoru S_{h+1} v podřaděné kolineaci svazů s basemi S_h a S'_h, a protínají se v bodě X'. Je-li X jedním z bodů stanovících S_h, jest X' v bodě s tímto v S'_h sdruženém. Kolineace prostorů S_r a S'_r jest pak stanovena $h+1$ dvojicemi bodů, jež určují S_h resp. S'_h, a $r+2-h$ dvojicemi bodů, z nichž body v S_r tak zvolíme, aby spolu s oněmi $h+1$ body v S_h tvořily $r+2$ bodů po $r+1$ nezávislých, takže totéž platí o přiřaděných k nim bodech prostoru S'_r.

Uvedené úvahy a věty lze doplniti duálními. Obdobné pak věty platí pro korelaci dvou prostorů r-rozměrných.[9])[10])

---

[9]) O metricky speciálních projektivnostech prostorů r-rozměrných viz na př. *P. H. Schoute*, Mehrdimensionale Geometrie I; pro S_4 také *J. Vojtěch*, Otočení a souměrnost prostoru čtyřrozměrného, Rozpravy Čes. akad. 30 (1921).

[10]) Kolineace mezi dvěma prostory S_r a S'_r, při níž každému bodu nižšího prostoru S_{h-1} v S_r odpovídají všechny body v S'_r a obráceně každému bodu prostoru S'_{r-h} v S'_r odpovídají všechny body určitého prostoru h-rozměrného, jdoucího oním S_{h-1} (prostoru S_h totiž, jenž bodu uvažovanému odpovídá v kolineaci mezi prostorem S'_{r-h} a $(r-h)$-mocným svazkem h-rozměrných prostorů s basí S_{h-1}) i duálně, ač jinak korespondence mezi danými prostory je obapolně jednoznačná, sluje *zvrhlá* (1. stupně) *druhu h-tého*; prostory S_{h-1} a S'_{r-h} slují *singulárními* prostory této kolineace (S_{h-1} jako prostor bodů, S'_{r-h} jako base svazku nadrovin, k nimž sdružené prvky jsou neurčité). Obdobně pro korelaci. O těchto kolineacích a složitějších (zvrhlých vyššího stupně, s řadou prostorů singulárních v S_r, z nichž každý leží v následujícím prostoru řady té, a s tolikéž prostory v S'_r, z nichž každý obsahuje prostor následující) pojednává syntheticky *G. del Prete*, Le corrispondence projettive degeneri, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 30 (1897) (v 1. článku).

143. Souřadnice v S_r; rovnice prostorů nižších, rovnice projektivnosti. *a*) Abychom mohli v prostoru r-rozměrném zavésti soustavu souřadnic, zvolme tam $r+1$ nezávislých bodů za vrcholy *základního útvaru* (normálního jehlanu) $O_1, O_2, \ldots, O_{r+1}$; vždy dva z těchto bodů určují $\frac{1}{2}r(r+1)$ jeho přímek, vždy tři určují $\frac{1}{6}(r-1)r(r+1)$ jeho rovin, ..., vždy r z nich určují $r+1$ jeho nadrovin, prostorů $(r-1)$-rozměrných, jež nazveme stěnami útvaru základního; každý vrchol O_k a stěna ω_k, jež nejsou incidentní, slují protějšími; obecně každý prostor určený několika vrcholy základního útvaru a prostor určený vrcholy zbývajícími jsou protější. Mimo to zvolme v prostoru S_r *bod jednotkový* J, neležící v žádné stěně útvaru základního.

Je-li dán v prostoru S_r libovolný bod P, promítněme tento bod i bod jednotkový z průsečného prostoru (protějších) nadrovin ω_k a ω_{r+1} na přímku O_kO_{r+1} do bodů P_k, resp. J_k, při čemž $k = 1, 2, \ldots, r$; souřadnici bodu P_k v bodové řadě na přímce O_kO_{r+1} při základních bodech O_{r+1}, O_k a jednotkovém bodě J_k označme x_k/x_{r+1}, takže

$$\mathrm{Dp}(O_{r+1}O_kJ_kP_k) = \frac{x_k}{x_{r+1}}.$$

Těmito r dvojpoměry jsou určeny dvojpoměry všech ostatních čtveřin bodových, tvořených na přímkách O_iO_j (pro $i, j = 1, 2, \ldots, r+1$; $i \neq j$) těmito vrcholy základního útvaru a průměty bodu J i daného bodu P z průsečného prostoru $\omega_i\omega_j$; neboť přímka JP je třemi čtveřinami nadrovin $\omega_i\omega_{r+1}$ $(O_{r+1}O_iJP)$, $\omega_j\omega_{r+1}$ $(O_{r+1}O_jJP)$ a $\omega_i\omega_j(O_jO_iJP)$, proťata ve třech čtveřinách bodů $Q_iQ_{r+1}JP$, $Q_jQ_{r+1}JP$ a Q_iQ_jJP, o nichž platí

$$\mathrm{Dp}(Q_iQ_jJP) = \frac{\mathrm{Dp}(Q_iQ_{r+1}JP)}{\mathrm{Dp}(Q_jQ_{r+1}JP)} = \frac{x_j}{x_i}.$$

K danému bodu P prostoru S_r přísluší tak jediná skupina r nezávislých poměrů $r+1$ čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r, x_{r+1}$, obráceně k daným r nezávislým poměrům $r+1$ čísel přísluší při uvedeném uspořádání r nezávislých nadrovin, jež se protínají v jediném bodě. Jsme tudíž oprávněni zavésti $r+1$ čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r, x_{r+1}$, jež nejsou všechna rovna nule, za *homogenní souřadnice bodu v* S_r, při čemž čísla ϱx_k (při libovolném nenulovém ϱ) určují týž bod; píšeme $P(x_1, x_2, \ldots, x_{r+1})$.

Speciálně padne-li bod P do bodu J, objeví se všechny souřadnice x_k sobě rovny a lze za ně zvoliti vesměs 1, takže $J(1, 1, \ldots, 1)$. Vrchol O_k základního útvaru má všechny souřadnice rovny nule vyjma souřadnici k-tou, za kterou béřeme 1. Všechny body nadroviny ω_k, stěny základního útvaru protější k vrcholu O_k, mají souřadnici x_k rovnu nule. Přímka spojující vrchol O_k s bodem $P(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{r+1})$ jest v $(r-1)$-mocném svazku přímek se středem O_k určena souřadnicemi $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{r+1}$ a protíná protější stěnu ω_k v bodě, jenž má v této nadrovině tytéž souřadnice.[1])

b) Při uvedené volbě soustavy souřadnic platí pro souřadnice všech a jenom bodů nadroviny S_{r-1} v prostoru S_r rovnice

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_{r+1}x_{r+1} = 0,$$

jež je tedy *rovnicí nadroviny v* S_r.

Předpokládejme totiž, že nadrovina S_{p-2} prostoru $(p-1)$-rozměrného jest v soustavě souřadnic uvedeného druhu vyjádřena rovnicí $\Sigma a_k x_k = 0$ (kde součet se vztahuje na k od 1 do p) a že projektivnost dvou prostorů $(p-1)$-rozměrných se vyjadřuje soustavou rovnic $\varrho x'_h = \Sigma a_{hk} x_k$ pro $h = 1, 2, \ldots, p$ (kde součet se týká indexů od 1 do p); dokážeme, že nadrovina S_{p-1} v prostoru p-rozměrném má rovnici $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{p+1}x_{p+1} = 0$. Přiřadíme-li každé přímce svazku se středem O_1 přímku svazku se středem O_2, jež promítá průsečík oné s nadrovinou S_{p-1}, obdržíme dva svazky perspektivní; zvolíme-li pak v jednom i druhém svazku za prvky základní a za prvek jednotkový ty přímky, jež promítají ostatní vrcholy základního útvaru souřadnic a jednotkový bod soustavy, mají přímky svazku O_1 souřadnice $x_2, x_3, \ldots, x_{p+1}$, přímky svazku O_2 souřadnice $x_1, x_3, \ldots, x_{p+1}$, a uvedená kolineace obou $(p-1)$-rozměrných svazků jest podle předpokladu vyjádřena rovnicemi

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1,p+1}x_{p+1},\\
\varrho x_3 &= a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3,p+1}x_{p+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varrho x_{p+1} &= a_{p+1,2}x_2 + a_{p+1,3}x_3 + \ldots + a_{p+1,p+1}x_{p+1}.
\end{aligned}$$

Avšak přímce O_1O_2 v prvém svazku odpovídá přímka O_2O_1 svazku druhého, t. j. pro $x_2 = 1$, $x_k = 0$ $(k = 3, \ldots, p+1)$ platí $x_1 = 1$, $x_k = 0$ $(k = 3, \ldots, p+1)$; odtud plyne $a_{32} = 0, a_{42} = 0, \ldots, a_{p+1,2} = 0$. A protože také všechny nadroviny základního útvaru souřadnic, přímkou O_1O_2 jdoucí, jsou samodružné, vyplývá z rovnic těch $a_{hk} = 0$ pro $h \neq k$, $h, k = 3, 4, \ldots, p+1$. Rovnice uvažované kolineace perspektivní nabudou tedy tvaru

$$\varrho x_1 = a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1,p+1}x_{p+1}, \quad \varrho x_h = a_{hh}x_h \text{ pro } h = 3, 4, \ldots, p+1;$$

pročež pro souřadnice každého bodu nadroviny S_{p-1} platí rovnice tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{p+1}x_{p+1} = 0.$$

Obráceně každá lineární homogenní rovnice, platná o souřadnicích $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ bodu v S_p, stanoví mezi $(p-1)$-mocnými svazky se středy O_1, O_2 kolineaci s rovnicemi

$$a_1x_1 = -(a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_{p+1}x_{p+1}), \quad a_1x_h = a_1x_h \text{ pro } h = 3, 4, \ldots, p+1,$$

t. j. perspektivnost, takže body svými souřadnicemi oné rovnici vyhovující náležejí útvaru, vytvořenému průsečíky sdružených přímek svazků těch, tedy nadrovině S_{p-1}.

[1]) Pro souřadnice bodu (a označení prvků) v S_r volí se (místo indexů od 1 do $r+1$) také indexy $0, 1, 2, \ldots, r-1, r$ (což je typograficky vhodnější); zde zvoleny značky souhlasné s dřívějšími.

Protože hořejší předpoklad platí pro S_1 v S_2, platí uvažovaná věta pro S_2 v S_3, atd.; platí tudíž také pro nadrovinu S_{r-1} v prostoru S_r.

c) Jako pro body v prostoru r-rozměrném můžeme duálně zavésti souřadnice pro nadroviny prostoru toho; lze tak učiniti přímo nebo pomocí předcházejícího.

Za *homogenní souřadnice nadroviny*, jejíž rovnice v S_r při základním útvaru $O_1O_2 \ldots O_{r+1}$ a jednotkovém bodě J jest

$$u_1x_1 + u_2x_2 + \ldots + u_{r+1}x_{r+1} = 0,$$

zvolíme součinitele u_k ($k = 1, 2, \ldots, r+1$) její rovnice. Nadrovina ω_k, která je stěnou základního útvaru protější k vrcholu O_k, má všechny souřadnice rovny nule vyjma u_k, kterou položíme rovnu 1; neboť její rovnice v bodových souřadnicích jest $x_k = 0$. Jednotková nadrovina ι o souřadnicích sobě rovných, tedy rovných 1, protíná přímku O_kO_{r+1} ($k = 1, 2, \ldots, r$) v bodě J'_k, harmonicky sdruženém vzhledem k bodům O_k a O_{r+1} s bodem J_k, jenž je průmětem bodu jednotkového J z prostoru $\omega_k\omega_{r+1}$; neboť všechny souřadnice bodu J'_k jsou rovny nule vyjma x_k a x_{r+1}, o nichž tedy platí $x_k + x_{r+1} = 0$, takže $x_k = -x_{r+1}$.

Tímto doplněním dřívějšího docílíme soběduální soustavy souřadnic pro body i nadroviny prostoru r-rozměrného, jejímž základním útvarem jest tedy skupina $r+1$ nezávislých bodů $O_1, O_2, \ldots, O_{r+1}$ a $r+1$ nezávislých nadrovin $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r+1}$, z nichž každá ω_k je spojujícím prostorem r bodů $O_1, O_2, \ldots, O_{k-1}, O_{k+1}, \ldots, O_{r+1}$ a každý O_k je průsečíkem r nadrovin $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{k-1}, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_{r+1}$, a jejíž jednotkový bod J i jednotková nadrovina ι mají tu polohu vzájemnou, že čtveřina bodů tvořená na každé přímce základního útvaru dvěma vrcholy jeho, průmětem bodu J z protějšího prostoru $(r-2)$-rozměrného a průsečíkem nadroviny ι, jakož i duální čtveřina nadrovin s basí v $(r-2)$-rozměrné součásti útvaru základního jsou harmonické.

Duálně k hořejší rovnici nadroviny má bod jako průsečík všech a jenom nadrovin se souřadnicemi u_k rovnici

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_{r+1}u_{r+1} = 0$$

a souřadnice a_k.

Důležitá rovnice nadroviny (u_k) v souřadnicích bodových a bodu (x_k) v souřadnicích nadrovinových při uvedeném základním útvaru a prvcích jednotkových

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + \ldots + u_rx_r + u_{r+1}x_{r+1} = 0$$

má tedy ten smysl soběduální, že *jest nutnou a dostačující podmínkou incidence bodu* (x_k) *a nadroviny* (u_k).

d) Nadrovina v S_r jest určena r body nezávislými; jsou-li souřadnice těchto bodů $x_k^{(h)}$ ($h = 1, 2, \ldots, r$), musí tedy býti možno koeficienty a_k v rovnici nadroviny

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{r+1}x_{r+1} = 0$$

vypočísti (až na společný faktor) z r rovnic

$$\sum_{k=1}^{r+1} a_k x_k^{(h)} = 0 \quad \text{pro } h = 1, 2, \ldots, r,$$

což lze učiniti vždy a jen tehdy, nejsou-li nule rovny všechny determinanty r-tého stupně v matici, složené z čísel $x_k^{(h)}$, čili je-li tato matice řádu r-tého. Taková je tedy nutná i dostačující podmínka toho, aby daných r bodů $(x_k^{(h)})$ tvořilo skupinu bodů nezávislých.

Nadrovina určená r nezávislými body $(x_k^{(h)})$ má pak rovnici

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{r+1} \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots & x_{r+1}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(r)} & x_2^{(r)} & \ldots & x_{r+1}^{(r)} \end{vmatrix} = 0.$$

Odtud poznáváme, že daných $r + 1$ bodů leží v nadrovině prostoru S_r čili jsou závislé tehdy a jen tehdy, je-li determinant z jejich koeficientů roven nule.

A obecně *tvoří daných $p + 1$ bodů skupinu bodů nezávislých nebo závislých* (t. j. majících spojující prostor o p rozměrech resp. o menším počtu rozměrů) *podle toho, je-li matice z jejich souřadnic složená řádu $(p + 1)$-ho nebo nižšího* (t. j. je-li nejvyšším stupněm determinantů téhož stupně v ní obsažených, jež nejsou všechny rovny nule, stupeň $(p + 1)$-ní nebo nižší). Neboť v případě $p > r$ je věc zřejmá, v případě $p = r$ a $p = r - 1$ byla zjištěna a v případě $p < r - 1$ vyplývá pomocí průmětů z prostorů, tvořených $r - p - 1$ vrcholy základního jehlanu soustavy souřadnic, do protějšího $(p + 1)$-rozměrného prostoru jeho.

Duální věty platí o rovnici bodu určeného r nezávislými nadrovinami s danými souřadnicemi a o skupině nadrovin daných souřadnicemi u_k.

Protože dvě různé nadroviny v S_r určují průsečný prostor S_{r-2} a každý S_{r-2} lze tak určiti, jest $(r - 2)$-rozměrný prostor vyjádřen v bodových souřadnicích rovnicemi dvou různých nadrovin jej obsahujících

$$\Sigma a_k x_k = 0, \quad \Sigma b_k x_k = 0.$$

Obecně *jest p-rozměrný prostor bodový S_p v S_r vyjádřen analyticky soustavou rovnic $r - p$ nezávislých nadrovin*

$$a_1 x_1^{(h)} + a_2 x_2^{(h)} + \ldots + a_{r+1}^{(h)} x_{r+1} = 0 \quad \text{pro } h = 1, 2, \ldots, r - p,$$

t. j. takovou soustavou, že matiče složená z koeficientů těchto rovnic je řádu $(r - p)$-ho.

Obdobně jest možno p-mocný svazek nadrovinový Σ_p v Σ_r vyjádřiti soustavou rovnic $r - p$ nezávislých bodů $\sum_{k=1}^{r+1} a_k^{(h)} u_k = 0$ pro $h = 1, 2, \ldots, r - p$.

Zvolme v r-rozměrném prostoru $r+1$ nezávislých bodů o souřadnicích $x_k^{(h)}$ $(h = 1, 2, \ldots, r+1)$ a utvořme z jejich souřadnic téhož indexu lineární kombinace pomocí $r+1$ parametrů $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r+1}$

$$x_k = \lambda_1 x_k^{(1)} + \lambda_2 x_k^{(2)} + \ldots + \lambda_{r+1} x_k^{(r+1)} \quad (k = 1, 2, \ldots, r+1);$$

protože determinant $(r+1)$-ho stupně ze souřadnic $x_k^{(h)}$ jest pro nezávislost bodů zvolených různý od nuly, lze těchto $r+1$ rovnic řešiti podle λ_k a vyjádřiti tak λ_k jako lineární homogenní funkce veličin x_k. Lze tedy pro každý bod v uvažovaném S_r o souřadnicích x_k nalézti skupinu čísel λ_k téže vlastnosti jako x_k a obráceně; mohou proto λ_k platiti za nové souřadnice bodu v S_r, a hořejší rovnice představují tedy *transformaci souřadnic* x_k v λ_k nebo obrácenou. Vrcholy základního útvaru nové soustavy souřadnic λ_k, majíce vždy všechny souřadnice až na jednu rovny nule, jsou podle uvedených rovnic právě ve zvolených $r+1$ bodech $(x_k^{(h)})$; za jednotkový bod nové soustavy lze pak zvoliti libovolný bod o souřadnicích j_k, protože místo $x_k^{(h)}$ lze v transformačních rovnicích psáti $\varrho_h x_k^{(h)}$ a faktory ϱ_h určiti z rovnic $\varrho_1 x_k^{(1)} + \varrho_2 x_k^{(2)} + \ldots + \varrho_{r+1} x_k^{(r+1)} = j_k$ $(k = 1, 2, \ldots, r+1)$.

Bodový *prostor p-rozměrný* S_p, určený v S_r nezávislými $p+1$ body o souřadnicích $x_k^{(h)}$ $(h = 1, 2, \ldots, p+1)$, *jest parametricky vyjádřen soustavou rovnic*

$$x_k = \lambda_1 x_k^{(1)} + \lambda_2 x_k^{(2)} + \ldots + \lambda_{p+1} x_k^{(p+1)} \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots, r+1,$$

jež souřadnice libovolného bodu tohoto prostoru podávají na základě souřadnic $p+1$ bodů prostor určujících pomocí $p+1$ proměnných parametrů. Body, jejichž souřadnice obdržíme z uvedených výrazů při rozmanitých hodnotách parametrů $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1}$, tvoří vskutku soustavu ∞^p prvků; neboť dvě skupiny hodnot těchto parametrů, jež vedou k témuž bodu (x_k), liší se jenom faktorem úměrnosti (jsou-li totiž λ_h a λ'_h takové dvě skupiny, platí $\sum_h \lambda_h x_k^{(h)} = \varrho \sum_h \lambda'_h x_k^{(h)}$ pro pro $k = 1, 2, \ldots, r+1$ čili $\sum_h (\lambda_h - \varrho\lambda'_h)\, x_k^{(h)} = 0$, a těmto $r+1$ rovnicím lze pro nezávislost daných $p+1$ bodů vyhověti pouze hodnotami $\lambda_h - \varrho\lambda'_h = 0$). Vložíme-li hořejší výrazy pro souřadnice bodu x_k do determinantů tvaru

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{r+1} \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots & x_{r+1}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(p+1)} & x_2^{(p+1)} & \ldots & x_{r+1}^{(p+1)} \\ x_1^{(p+2)} & x_2^{(p+2)} & \ldots & x_{r+1}^{(p+2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(r)} & x_2^{(r)} & \ldots & x_{r+1}^{(r)} \end{vmatrix} = 0,$$

kde $x_k^{(h)}$ jsou pro h od 1 do $p+1$ souřadnice $p+1$ bodů daných a pro h od $p+2$ do r souřadnice libovolných bodů, jež s danými tvoří vždy sku-

pinu r bodů nezávislých, poznáváme, že tyto determinanty jsou všechny rovny nule (jsouce rovny součtu determinantů s dvěma řádky stejných prvků); leží tedy body uvažované soustavy p-mocné ve všech nadrovinách, jež obsahují daných $p+1$ bodů nezávislých, a tvoří p-rozměrný prostor, touto skupinou bodů určený.

Obdobně lze p-mocný svazek nadrovinový Σ_p, určený v Σ_r $p+1$ nadrovinami $(u_k^{(h)})$ $(h = 1, 2, \ldots, p+1)$ vyjádřiti parametricky soustavou rovnic $u_k = \sum_{h=1}^{p+1} \lambda_h u_k^{(h)}$ pro $k = 1, 2, \ldots, r+1$.[2])[3])

e) Kolineace, převádějící prostor S_r s body o souřadnicích x_h v prostor S'_r, jehož body mají souřadnice x'_h, *jest analyticky vyjádřena soustavou* $r+1$ *rovnic*

$$\begin{aligned}
\varrho x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,r+1}x_{r+1},\\
\varrho x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2,r+1}x_{r+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varrho x'_{r+1} &= a_{r+1,1}x_1 + a_{r+1,2}x_2 + \ldots + a_{r+1,r+1}x_{r+1},
\end{aligned}$$

[2]) Za (homogenní) souřadnice prostoru S_k, určeného v S_r $k+1$ body nezávislými (pro $0 < k < r-1$) lze zvoliti $\binom{r+1}{k+1}$ determinantů $(k+1)$-ho stupně z matice, složené ze souřadnic bodů těch; souřadnice tyto slují (někdy) *Grassmannovy*, protože je po prvé uvádí *H. Grassmann*, Die Ausdehnungslehre (1862). Souřadnice k nim duální, sestavené obdobně ze souřadnic $r-k$ nadrovin, prostor S_k určujících, jsou jim úměrny. Mezi souřadnicemi prostoru S_k platí rozmanité vztahy. Viz *E. Bertini*, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, p. 40 a n.; *F. Severi*, Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare, Annali mat. (3) 24 (1915); také *G. B. Antonelli*, Nota sulle relazioni indipendenti tra le coordinate di una forma fondamentale, Annali Scuola norm. Pisa 6 (1883).

[3]) Polydimensionální geometrii projektivní lze založiti také *ryze analyticky*, definujeme-li prostor r-rozměrný S_r jako soubor, tvořený všemi skupinami reálných nebo imaginárních hodnot poměrů $r+1$ proměnných (konečných, ne všech nulových), při čemž každá taková skupina hodnot sluje bodem prostoru S_r a $r+1$ uvedených proměnných jeho homogenními souřadnicemi; prostor S_k v S_r obsažený (pro $0 < k < r$) se pak stanoví pomocí lineárních homogenních funkcí $k+1$ parametrů pro souřadnice jeho bodu při zvolených $k+1$ nezávislých bodech v S_r. Připustíme-li takto imaginární body od počátku, jest nutno v definici projektivnosti dvou prostorů r-rozměrných připojiti požadavek, aby řady bodové na sdružených přímkách (aspoň dvou speciálních) byly projektivní. Toto obvyklé východisko přijímá a odtud celou nauku systematicky buduje *E. Bertini*, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi; jen začátky podává *F. Aschieri*, Fondamenti di geometria analitica, Memorie Accad. Modena (2) 11 (1895). Viz také *E. Čech*, Projektivní diferenciální geometrie, 1926 (1. kap.). Projektivní geometrii komplexních prvků založiti syntheticky jest úkol obtížný; viz hlavně *M. Pieri*, Nuovi principii di geometria projettiva complessa, Memorie Accad. Torino (2) 55 (1905, doplněk v Atti Accad. Torino 41, 1906).

s podmínkou, že determinant z jejich koeficientů $A \equiv |a_{hk}|$ jest různý od nuly.

Můžeme to dokázati buď tím, že základní jehlany a body jednotkové v prostorech S_r a S'_r položíme do $r+2$ dvojic bodů v dané kolineaci (při stejném označení) sdružených, takže budou sobě v kolineaci té odpovídati body o stejných souřadnicích $x'_h = x_h$, a transformací souřadnic v jednom z obou prostorů uvažovaných dojdeme rovnic uvedeného tvaru; nebo přímo vyšetřením transformace rovnicemi těmi definované. Z daných rovnic

$$\varrho x'_h = \sum_{k=1}^{r+1} a_{hk} x_k \text{ pro } h = 1, 2, \ldots, r+1$$

totiž vyplývá, že každému bodu (x_h) v S_r odpovídá jediný bod (x'_h) v S'_r; obráceně každému bodu (x'_h) v S'_r odpovídá jediný bod (x_h) v S_r, jehož souřadnice nalezneme řešením hořejší soustavy rovnic ve tvaru

$$\sigma x_h = \sum_{k=1}^{r+1} A_{kh} x'_k \text{ pro } h = 1, 2, \ldots, r+1,$$

kde součinitel A_{kh} jest subdeterminant příslušný v determinantu A k prvku a_{kh}, kteréžto řešení při suposici $|a_{hk}| \neq 0$ existuje. Máme-li pak na zřeteli podmínku incidence bodu (x_h) a nadroviny (u_h), totiž rovnici $\Sigma u_h x_h = 0$, a dosadíme-li sem za x_h výrazy právě nalezené, seznáme, že bodům nadroviny (u_h) prostoru S_r odpovídají v S'_r body útvaru, vyjádřeného rovnicí

$$u_1 \Sigma A_{k1} x'_k + u_2 \Sigma A_{k2} x'_k + \ldots + u_{r+1} \Sigma A_{k,r+1} x'_k = 0$$

čili rovnicí

$$\Sigma A_{1k} u_k \cdot x'_1 + \Sigma A_{2k} u_k \cdot x'_2 + \ldots + \Sigma A_{r+1,k} u_k \cdot x'_{r+1} = 0,$$

tedy body nadroviny o souřadnicích

$$\mu u'_h = \sum_{k=1}^{r+1} A_{hk} u_k \quad (h = 1, 2, \ldots, r+1);$$

a obráceně zjistíme (touže cestou z podmínky $\Sigma u'_h x'_h = 0$ a první soustavy rovnic hořejších nebo řešením poslední soustavy, kde $|A_{hk}| \neq 0$, protože $|a_{hk}| \neq 0$), že bodům nadroviny (u'_h) v S'_r odpovídají v S_r body nadroviny o souřadnicích

$$\nu u_h = \sum_{k=1}^{r+1} a_{kh} u'_k \quad (h = 1, 2, \ldots, r+1).$$

Mimo to lze zjistiti, že korespondence tak vyjádřená jest jedinou, jež sdružuje $r+2$ daných dvojic bodů; stačí za skupinu $r+2$ bodů v S_r zvoliti vrcholy základního jehlanu a bod jednotkový, za korespondující body v S'_r pak $r+2$ bodů se souřadnicemi libovolnými.

Spolu jsme nalezli rovnice pro kolineaci inversní, jež body prostoru S'_r převádí v body prostoru S_r, jakož i transformační rovnice pro nadroviny v kolineaci dané a inversní.

Z rovnic pro kolineaci obdržíme *rovnice pro korelaci* mezi prostory S_r a S'_r, jestliže v 1. a 2. skupině rovnic hořejších nahradíme souřadnice bodové x'_h souřadnicemi nadrovinovými u'_h: vzniknou tak rovnice převádějící body prostoru S_r v nadroviny prostoru S'_r a obráceně, totiž

$$\varrho u'_h = \Sigma a_{hk} x_k \text{ a } \sigma x_h = \Sigma A_{kh} u'_k \text{ pro } h = 1, 2, \ldots, r+1;$$

dále jestliže v 3. a 4. skupině hořejších rovnic místo u'_h dáme x'_h: dostaneme tím rovnice převádějící nadroviny prostoru S_r v body prostoru S'_r a obráceně, totiž

$$\mu x'_h = \Sigma A_{hk} u_k \text{ a } \nu u_h = \Sigma a_{kh} x'_k \text{ pro } h = 1, 2, \ldots, r+1.$$

Jestliže u dvou kolineárních prostorů S_r a S'_r zvolíme základní útvary soustav souřadnicových v $r+2$ dvojicích bodů sdružených (při stejném významu bodů sobě odpovídajících), má kolineace tato rovnice tvaru nejjednoduššího

$$x'_h = x_h \ (h = 1, 2, \ldots, r+1).$$

A učiníme-li tak u jiné kolineace mezi prostory S^*_r a $S^{*\prime}_r$, jež má tedy rovnice $x^{*\prime}_h = x^*_h$ $(h = 1, 2, \ldots, r+1)$, vidíme, že prvou kolineaci lze převésti v druhou opět kolineární transformací prostorů S_r a S'_r v S^*_r resp. $S^{*\prime}_r$ o rovnicích $x^*_h = x_h$ resp. $x^{*\prime}_h = x'_h$. *Jsou* tedy *všechny kolineace dvou různých prostorů r-rozměrných projektivně identické*; totéž platí o všech korelacích dvou různých prostorů téhož počtu rozměrů.[4])

f) Kolineace a korelace, daná rovnicemi $\varrho x'_i = \sum_k a_{ik} x_k$ resp. $\varrho u'_i = \Sigma a_{ik} x_k$ $(i = 1, 2, \ldots, r+1)$, jejichž koeficienty skládají determinant $|a_{ik}|$ rovný nule, sluje *zvrhlá* (degenerovaná, singulární); je-li determinant $|a_{ik}|$ řádu $(r+1-h)$-ho, sluje projektivnost zvrhlá *druhu h-tého*.

Při zvrhlé kolineaci druhu h-tého mezi prostory S_r a S'_r existuje v S_r singulární prostor S_{h-1}, jehož každému bodu odpovídají totiž *všechny body prostoru S'_r*. Neboť protože řád matice z koeficientů $|a_{ik}|$ uvažované transformace jest $r-h+1$, t. j. aspoň jeden determinant v ní obsažený stupně $(r-h+1)$-ho, ne však stupně vyššího, jest od nuly různý,

[4]) V obecnějším tvaru jest možno kolineaci dvou prostorů r-rozměrných vyjádřiti rovnicemi (leckdy výhodnými)

$$\sum_{k=1}^{r+1} a_{hk} x_k = \sum_{k=1}^{r+1} a'_{hk} x'_k \quad \text{pro } h = 1, 2, \ldots, r+1$$

s podmínkami $|a_{hk}| \neq 0$, $|a'_{hk}| \neq 0$ pro kolineaci nezvrhlou; obdobně ovšem také korelaci. Rovnice pro kolineaci danou $r+2$ dvojicemi sdružených bodů uvádí *W. Burnside*, On the general projective transformation, Messenger math. (2) 30 (1901).

jest z lineárních forem $\sum_k a_{ik}x_k$ $(i = 1, 2, \ldots, r+1)$ jen $r - h + 1$ nezávislých; buďtež to třebas prvních $r - h + 1$, jež pro zjednodušení označíme v_j $(j = 1, 2, \ldots, r - h + 1)$, takže $v_j = \sum_k a_{ik}x_k$. Pravé strany transformačních rovnic lze proto lineárně vyjádřiti těmito v_j (prvních $r - h + 1$ z rovnic těch jest $\varrho x'_i = v_i$, v ostatních h jsou $\varrho x'_i$ rovny lineárním funkcím těchto v_i). Pro souřadnice libovolného bodu v prostoru S_{h-1} o rovnicích $v_1 = 0$, $v_2 = 0, \ldots, v_{r-h+1} = 0$ jsou nule rovny všechny pravé strany rovnic transformačních, tedy také $\varrho x'_i = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, r + 1$, takže $\varrho = 0$ a bod (x'_i) je neurčitý.

Je-li však (x_i) bod ležící mimo uvedený singulární prostor S_{h-1}, nejsou pro jeho souřadnice výrazy v_j všechny rovny nule; z transformačních rovnic pak poznáváme, že bod (x'_i), odpovídající v S'_r onomu bodu (x_i), leží v určitém prostoru S'_{r-h}. Tento bod (x'_i) v S'_{r-h} ležící odpovídá však všem bodům prostoru S_h, jenž prochází singulárním prostorem S_{h-1} a onen bod (x_i) obsahuje, totiž všem bodům v S_r, jejichž souřadnice vyhovují $r - h$ rovnicím $\frac{v_1}{x'_1} = \frac{v_2}{x'_2} = \ldots = \frac{v_{r-h+1}}{x'_{r-h+1}}$, tedy bodům h-rozměrného prostoru uvedeného. *Existuje* tudíž *při zvrhlé kolineaci h-tého druhu také v S'_r singulární prostor S'_{r-h}, jehož každému bodu odpovídají všechny body prostoru S_h jdoucího singulárním S_{h-1} v S_r.* Mezi body tohoto prostoru S'_{r-h} a prostory S_h $(r - h)$-mocného svazu s basí v singulárním S_{h-1} existuje kolineace nezvrhlá.

A duálně platí: V degenerované kolineaci druhu h-tého mezi S_r a S'_r existují dva singulární svazky nadrovinové Σ'_{h-1} a Σ_{r-h} takové, že každé nadrovině v Σ'_{h-1} odpovídají všechny nadroviny prvého prostoru a každé nadrovině v Σ_{r-h} odpovídají v druhém prostoru všechny nadroviny svazku Σ'_h onen Σ'_{h-1} obsahujícího, při čemž kolineace mezi nadrovinami v Σ_{r-h} a svazky Σ'_h se společným Σ'_{h-1} jest nezvrhlá. Navzájem pak jest basí svazku Σ_{r-h} singulární S_{h-1} a basí svazku Σ'_{h-1} singulární S'_{r-h} a obě uvedené kolineace nezvrhlé jsou identické.[5])

Obdobně obsahuje *zvrhlá korelace h-tého druhu* mezi dvěma různými prstory S_r a S'_r singulární prostor S_{h-1} v jednom a singulární S'_{h-1} v druhém takové, že každému bodu v S_{h-1} odpovídají všechny nadroviny v S'_r a obráceně každému bodu v S'_{h-1} všechny nadroviny v S_r; každému bodu v S_r (S'_r) mimo $S_{h-1}(S'_{h-1})$ ležícímu odpovídá jediná nadrovina jdoucí prostorem $S'_{h-1}(S_{h-1})$, jež však odpovídá všem bodům prostoru S_h (S'_h), spojujícího onen bod s $S_{h-1}(S'_{h-1})$, při čemž nadroviny, jdoucí prostorem singulárním, a h-rozměrné prostory, jdoucí druhým singulárním prostorem, jsou sdruženy v korelaci nezvrhlé.[6])

---

[5]) Lze zjistiti, že zvrhlé kolineace téhož druhu (nikoli ovšem různého druhu) mezi dvěma různými prostory r-rozměrnými jsou projektivně totožny; jest tedy uvažovaných kolineací degenerovaných mezi S_r a S'_r možno r (druhu 1. až r-tého).

144. Kolineace prostoru S_r. *a*) Kolineace dvou soumístných prostorů S_r a S'_r čili kolineární transformace prostoru r-rozměrného v něj sama, jež není zvrhlá, jest vyjádřena rovnicemi

$$\varrho x'_h = \sum_k a_{hk} x_k \quad \text{pro } h = 1, 2, \ldots, r+1,$$

kde determinant $|a_{hk}| \neq 0$; souřadnice x_h a x'_h dvou bodů sobě odpovídajících jsou ovšem vztahovány k témuž útvaru základnímu.

Samodružné body dané kolineace (x_h) nalezneme řešením soustavy $r+1$ lineárních homogenních rovnic $\varrho x_h = \Sigma a_{hk} x_k$; aby soustava tato měla kořeny, jež nejsou všechny nule rovny, musí býti

$$A(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & \cdots & a_{1,r+1} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & \cdots & a_{2,r+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,r+1} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Dejme tomu, že tato rovnice $A(\varrho) = 0$ má m *různých* kořenů $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ (kde $0 < m \leq r+1$), z nichž ovšem žádný nemůže býti roven nule (protože $|a_{hk}| \neq 0$); a dejme tomu, že determinant $A(\varrho_k)$, kde $k = 1, 2, \ldots, m$, jest řádu $(r+1-s_k)$-ho (při čemž $0 < s_k \leq r$), t. j. že determinant $A(\varrho)$ má pro $\varrho = \varrho_k$ nule rovny všechny své minory stupně $(r - s_k + 2)$-ho a tedy i stupňů vyšších, nikoli však všechny stupně $(r - s_k + 1)$-ho. Soustava rovnic $\varrho x_h = \Sigma a_{hk} x_k$ redukuje se proto na $r + 1 - s_k$ rovnic nezávislých, jimž tedy vyhovují souřadnice všech bodů prostoru $(s_k - 1)$-rozměrného. Kořeny $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ rovnice $A(\varrho) = 0$ dávají tudíž prostory samodružných bodů o $s_1 - 1, s_2 - 1, \ldots, s_m - 1$ rozměrech, jež krátce nazýváme *hlavními prostory* kolineace $S_{s_1-1}, S_{s_2-1}, \ldots, S_{s_m-1}$. Ze suponovaného $(r+1-s_k)$-ho řádu determinantu $A(\varrho_k)$ plyne dále, protože derivace minoru libovolného stupně uvažovaného determinantu $A(\varrho)$ jest rovna lineární kombinaci minorů stupně nejblíže nižšího, že ϱ_h je aspoň s_k-násobným kořenem rovnice $A(\varrho) = 0$; proto platí

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_m \leq r + 1.$$

Je-li prostor S_q (kde $q \leq r$) spojujícím prostorem hlavních prostorů $S_{s_1-1}, S_{s_2-1}, \ldots, S_{s_m-1}$, transformuje se danou kolineací v sebe sama,

[6]) O kolineacích, spec. zvrhlých, pojednává analyticky *C. Segre*, Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, Memorie Accad. Lincei (3) 19 (1884); podrobně vyšetřuje zvrhlé kolineace *G. del Prete*, Le corrispondence projettive degeneri, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 30 (1897) (v 2. článku analyticky). Viz také *F. Deruyts*, Sur la correspondance homographique entre les éléments de deux espaces linéaires quelconques, Mémoires sav. étrang. Acad. Belgique 52 (1893); *P. Visalli*, Sulle collinearità e correlazioni ordinarie ed eccezionali in due spazi a quattro dimensioni, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 29 (1896).

při čemž tyto prostory jsou také jeho prostory hlavními; podle hořejšího tedy platí

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_m \leqq q + 1.$$

Protože však prostor, spojující m prostorů o $s_k - 1$ rozměrech, má rozměrů počet $\leqq \Sigma (s_k - 1) + m - 1$, platí také

$$s_1 + s_2 + \ldots s_m \geqq q + 1.$$

Z přirovnání obou relací vidíme, že musí býti

$$\Sigma s_k = q + 1,$$

což značí, že *hlavní prostory* dané *kolineace jsou nezávislé.*

Jestliže platí $\Sigma s_k = r + 1$, jest $q = r$, t. j. hlavní prostory kolineace mají spojujícím prostorem vyšetřovaný S_r, a kolineace sluje *regulární* (obecná); je-li však $\Sigma s_k < r + 1$, jest $q < r$, t. j. hlavní prostory kolineace náležejí prostoru méněrozměrnému (v S_r obsaženému), a kolineace sluje *partikulární* (zvláštní).

Hledáme-li duálně samodružné nadroviny dané kolineace, můžeme vyjíti od rovnic kolineace inversní

$$vu_h = \sum_k a_{kh} u'_k \quad \text{pro } h = 1, 2, \ldots, r + 1;$$

pro souřadnice samodružných nadrovin (u_h) platí $vu_h = \Sigma a_{kh} u_k$. Jak je patrno, obdržíme pro v tutéž rovnici $A(v) = 0$ jako dříve pro ϱ se všemi důsledky. Má tedy daná kolineace prostoru S_r zároveň m svazků samodružných nadrovin $\Sigma_{s_1 - 1}, \Sigma_{s_2 - 1}, \ldots, \Sigma_{s_m - 1}$, jež nazýváme krátce *hlavními svazy* kolineace; jejich base $S_{r-s_1}, S_{r-s_2}, \ldots, S_{r-s_m}$ jsou rovněž v dané kolineaci samodružnými. Tyto $(s_k - 1)$-mocné svazky samodružných nadrovin jsou také nezávislé.

Prostor samodružných bodů $S_{s_k - 1}$ a base S_{r-s_k} $(s_k - 1)$-mocného svazku samodružných nadrovin, jež přísluší k témuž kořenu ϱ_k (resp. $v_k = \varrho_k$) rovnice $A(\varrho) = 0$, slují k sobě *přidruženými.*

b) O vztahu mezi hlavním prostorem $S_{s_k - 1}$ a basí S_{r-s_k} k němu přidruženého svazu $\Sigma_{s_k - 1}$ platí: *Dva prostory* S_{s_k} *a* S'_{s_k} *jdoucí hlavním prostorem* $S_{s_k - 1}$, *jež sobě v dané kolineaci odpovídají, jsou perspektivní z bodu, ležícího v basi* S_{r-s_k} *přidruženého svazu hlavního* $\Sigma_{s_k - 1}$; mezi body této base a prostory S_{s_k} nebo S'_{s_k} existuje projektivnost. Neboť vezmeme-li v úvahu bod (y_h), ležící na spojnici bodu (x_h) a k němu v dané kolineaci sdruženého bodu (x'_h), o souřadnicích

$$y_h = x'_h - \varrho_k x_h,$$

vidíme, že příbuznost mezi body (x_h) a (y_h) je singulární kolineace druhu s_k-tého, protože determinant této transformace

$$y_h = \sum_i a_{hi} x_i - \varrho_k x_h \quad (h = 1, 2, \ldots, r + 1)$$

je $A(\varrho_k)$ a tedy řádu $(r + 1 - s_k)$-ho; singulárními prostory této kolineace jsou S_{s_k-1} a S_{r-s_k}. Je-li tedy bod (x_h) mimo S_{s_k-1}, leží bod (y_h) jemu v uvedené singulární kolineaci odpovídající v S_{r-s_k}, a to podle volby na přímce, jež spojuje (x_h) s bodem k němu v dané kolineaci sdruženým; podle vlastnosti singulární kolineace zůstává bod (y_h) beze změny pro každou dvojici sobě odpovídajících bodů v S_{s_k} a S'_{s_k}, jdoucích prostorem S_{s_k-1} a spolu v dané kolineaci sdružených.

Prostor S_{r-s_k} obsahuje všechny hlavní prostory kolineace mimo snad prostor S_{s_k-1}. Neboť prostor S_{s_k}, jenž spojuje S_{s_k-1} s bodem P jiného hlavního prostoru kolineace S_{s_h-1} (ležícím tedy mimo S_{s_k-1}), jest při dané kolineaci samodružný, a podle předcházející věty leží všechny dvojice jeho bodů v kolineaci sdružených na přímkách (samodružných), jdoucích bodem (y_h) prostoru S_{r-s_k}; protože však v S_{s_k} také bod P je středem svazku přímek samodružných, musí býti bod (y_h) totožný s bodem P (jinak by totiž každý bod v S_{s_k} byl samodružným). Proto leží body prostoru S_{s_h-1} v prostoru S_{r-s_k}.[1])

Bod na přímce, spojující dva body (x_h) a (x'_h) v dané kolineaci sdružené, o souřadnicích $x'_h - \varrho_k x_h$ leží, jak jsme poznali, pro každé ϱ_k v prostoru S_{r-s_k} (pro $k = 1, 2, \ldots, m$); duálně nadroviny svazku, určeného dvěma nadrovinami (u'_h) a (u_h), sdruženými v kolineaci inversní, o souřadnicích $u_h - \varrho_k u'_h$ procházejí jednotlivě prostory S_{s_k-1}. Odtud vyplývá: *Skupiny bodů, sestávající vždy ze dvou bodů v dané kolineaci sdružených a z m průsečíků jejich spojnice s basemi hlavních svazů kolineace té, jsou projektivní; a jsou projektivní ke skupinám nadrovin, tvořeným vždy dvěma nadrovinami sdruženými v kolineaci inversní a m nadrovinami, jež z průsečíku oněch dvou promítají přidružené* (v témž pořádku) *hlavní prostory kolineace.*

Podle toho, protože body a nadroviny v kolineaci sdružené, jakož i body a nadroviny samodružné i jejich prostory a svazky přecházejí projektivní transformací v útvary téhož druhu, jsou poměry kořenů ϱ_k *absolutními invarianty* dané kolineace, z nichž ovšem jen $m - 1$ jest nezávislých. Za takové můžeme zvoliti třebas $\varrho_1/\varrho_m, \varrho_2/\varrho_m, \ldots, \varrho_{m-1}/\varrho_m$; lze je pokládati za dvojpoměry vždy dvou bodů v dané kolineaci sdružených a dvou průsečíků jejich spojnice s basemi hlavních svazů S_{r-s_k} pro $k = 1, 2, \ldots, m - 1$ a S_{r-s_m}.[2])

[1]) Jestliže žádný S_{r-s_k} není proťat přidruženým S_{s_k-1} nebo jej neobsahuje, jest kolineace regulární; jinak partikulární.

[2]) Hlavní vlastnosti kolineace v prostoru r-rozměrném nalezl a klasifikaci kolineací těch pomocí Weierstrassovy teorie elementárních dělitelů forem bilineárních provedl *C. Segre*, Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, Memorie Accad. Lincei Roma (3) 19 (1884), a Sugli spazi fondamentali di un' omografia, Rendiconti Accad. Lincei Roma (4) 2 (1886); jeho klasifi-

c) *Regulární kolineace* prostoru S_r jest, jak bylo uvedeno, taková kolineace, jejíž hlavní prostory určují prostor S_r. Jest odtud patrno, že všechny hlavní prostory regulární kolineace mimo jeden z nich určují basi hlavního svazu, přidruženého ke zbývajícímu prostoru hlavnímu.

Dejme tomu, že regulární kolineace má m hlavních prostorů o $s_1 - 1$, $s_2 - 1, \ldots, s_m - 1$ rozměrech, takže $s_1 + s_2 + \ldots + s_m = r + 1$. Základní jehlan soustavy souřadnic zvolme tak, aby prvních s_1 jeho vrcholů leželo v prvém, dalších s_2 v druhém, . . ., konečně posledních s_m v m-tém hlavním prostoru kolineace. Rovnice regulární kolineace objeví se tu v jednoduchém tvaru

$$\varrho x'_h = a_{hh} x_h \quad \text{pro } h = 1, 2, \ldots, r + 1;$$

a napíšeme-li pro tuto soustavu rovnic $A(\varrho) = 0$, nalezneme vzhledem k předpokládanému pořadí a rozměrům hlavních prostorů pro prvních s_1 koeficientů a_{hh} hodnotu ϱ_1, pro dalších s_2 hodnotu $\varrho_2, \ldots$, pro posledních s_m koeficientů a_{hh} hodnotu ϱ_m. Regulární kolineace má tedy při uvedené volbě rovnice

$$\begin{aligned} \varrho x'_1 = \varrho_1 x_1,\ \varrho x'_2 = \varrho_1 x_2, \ldots, \varrho x'_{s_1} = \varrho_1 x_{s_1}, \\ \varrho x'_{s_1+1} = \varrho_2 x_{s_1+1},\ \varrho x'_{s_1+2} = \varrho_2 x_{s_1+2}, \ldots, \varrho x'_{s_1+s_2} = \varrho_2 x_{s_1+s_2}, \\ \varrho x'_{s_1+s_2+1} = \varrho_3 x_{s_1+s_2+1}, \ldots, \varrho x'_{r+1} = \varrho_m x_{r+1}. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že *regulární kolineace prostoru S_r jest určena počtem m i rozměry svých hlavních prostorů* (nezávislých, se součtem rozměrů vždy o jednotku zvětšených rovným $r + 1$) *a $m - 1$ svými absolutními invarianty* (dvojicím oněch přiřaděnými); nebo duálně. Nebo také hlavními prostory (hlavními svazy) a dvojicí sdružených bodů (nadrovin).

Z rovnic těch také lze zjistiti, že dvě regulární kolineace jsou tehdy a jen tehdy projektivní, shodují-li se v počtu a rozměrech svých hlavních prostorů a ve svých absolutních invariantech.

Má-li regulární kolineace hlavní prostory o rozměrech $s_1 - 1$, $s_2 - 1, \ldots, s_m - 1$, označuje se souborem těchto čísel

$$[s_1 - 1,\ s_2 - 1, \ldots, s_m - 1],$$

jenž sluje její *charakteristikou*.

Konstrukce regulární kolineace v S_r nepůsobí obtíží: Abychom nejprve v regulární kolineaci, jejímiž hlavními prostory jsou jen body

---

kaci v podstatě vykládá také *P. Muth*, Theorie und Anwendung der Elementarteiler (1899). V geometrickém pojetí odvozuje vlastnosti a stanovení typů kolineací těch *P. Predella*, Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni, Annali mat. (2) 17 (1889), a Sulla teoria generale delle omografie, Atti Accad. Torino 27 (1892). Viz také *G. Bordiga*, L'omografia nello spazio a n dimensioni, Atti Ist. Veneto (7) 8 (1897); dále *S. Medici*, Sulle omografie e correlazioni non singolari in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni, Giornale mat. 44 (1906); souborně a obšírně *E. Bertini*, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, p. 75 a n.; krátce také *J. Vojtěch*, Typy a kontinuitní grupy kolineací v S_3, Časopis mat. a fys. 38 (1908) (části histor. odst. 35).

($s_1 = s_2 = \ldots = s_m = 1$, $m = r + 1$), totiž $O_1, O_2, \ldots, O_{r+1}$, a jejíž absolutní invarianty jsou poměry čísel $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{r+1}$, sestrojili k libovolnému (nesamodružnému) bodu P sdružený bod P', promítněme třebas samodružné body O_{r+1}, O_r a bod P z prostoru S_{r-2}, určeného body $O_1, O_2, \ldots$ $\ldots, O_{r-1}$, a sestrojme nadrovinu, jež s těmito třemi tvoří čtveřinu o dvojpoměru ϱ_r/ϱ_{r+1}; tato obsahuje hledaný bod P'. Sestrojme dále obdobně nadroviny tvořící vždy s třemi nadrovinami, jež promítají dva samodružné body O_{r+1}, O_k a bod P z prostoru $O_1O_2 \ldots O_{k-1}O_{k+1} \ldots$ $\ldots O_{r-1}$, čtveřinu dvojpoměru ϱ_k/ϱ_{r+1} pro $k = r - 1, r - 2, \ldots, 2, 1$; tak obdržíme celkem r nezávislých nadrovin, z nichž každá obsahuje bod P', takže tento bod jest jejich průsečíkem.

U regulární kolineace prostoru S_r, jejíž hlavní prostory S_{s_1-1}, $S_{s_2-1}, \ldots, S_{s_m-1}$ nejsou jen body, a jež má absolutními invarianty poměry čísel $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$, sestrojíme bodem P napřed prostor S_{m-1}, jenž každý z hlavních prostorů těch protíná v bodě.[3]) Protože tyto průsečíky jsou nezávislými body samodružnými, jest uvedený S_{m-1} při uvažované kolineaci invariantní; regulární kolineace, danou kolineací v prostoru S_{m-1} indukovaná, má samodružné prostory své v uvedených průsečících a absolutní invarianty tytéž jako kolineace daná (jak poznáváme z věty o projektivnosti nadrovinových skupin, jež se skládají vždy ze dvou nadrovin v dané kolineaci sdružených a nadrovin, promítajících z jejich průseku hlavní prostory kolineace). Sestrojíme-li tedy způsobem prve uvedeným bod, sdružený k bodu P v této indukované kolineaci prostoru S_{m-1}, nalezneme tím hledaný bod P'.

Zvlášť jednoduché jsou regulární kolineace (jen) *s dvěma hlavními prostory*: protože zde $s_1 + s_2 = r + 1$, označíme jeden z nich S_{s-1}, druhý S_{r-s}; tyto jsou nejen prostory samodružných bodů dané kolineace, nýbrž i basemi svazků samodružných nadrovin jejích. Každá přímka jdoucí dvěma body P a P' v takové kolineaci sdruženými jest samodružná, protínajíc S_{s-1} i S_{r-s} v samodružných bodech; tyto dva průsečíky a dvojice bodů P, P' tvoří čtveřinu, jejíž dvojpoměr je jediným absolutním invariantem kolineace uvažované (a duálně). Kolineace ta je určena hlavními prostory S_{s-1}, S_{r-s} a absolutním invariantem (nebo dvojicí bodů sdružených).

Je-li speciálně jedním z obou hlavních prostorů takové kolineace bod ($s = 1$), jest kolineace obecnou (regulární) *homologií* se samodružným bodem S_0 (středem) a nadrovinou samodružných bodů S_{r-1} (osou, jež neobsahuje středu S_0). Každá spojnice dvou sdružených bodů

[3]) Platí totiž obecná věta: Zvolíme-li v prostoru řadu nezávislých prostorů, lze libovolným bodem prostoru všechny spojujícího, jenž však leží mimo každý prostor, spojující dané prostory až na jeden, položiti vždy a jediný prostor, který každý prostor dané řady protíná v určitém bodě. Konstrukce tohoto prostoru a jeho průsečíků s danými prostory (spolu důkaz jejich existence) je obdobná jako u prostoru S''_k v čl. 142*c*, pozn. [4]). Viz také *E. Bertini*, Costruzione delle omografie di uno spazio lineare qualunque, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 20 (1887).

prochází středem homologie, každá dvojice sdružených nadrovin protíná se na ose její. Kolineace prostoru S_r, jež má $(r-1)$-mocnou soustavu samodružných bodů ležících v nadrovině S_{r-1}, má také $(r-1)$-mocný svazek samodružných nadrovin jdoucích bodem S_0, a obráceně (duálně); jest tedy homologií. Kolineace s dvěma hlavními prostory S_{s-1} a S_{r-s} indukuje v každém prostoru, spojujícím bod jednoho z hlavních prostorů těch s prostorem druhým, obecnou homologii, jež má středem onen bod a osou tento druhý prostor.[4])

d) Partikulární kolineace jsou povahy složitější než kolineace regulární. Jsou to kolineace, jejichž hlavní prostory neurčují S_r, kde tedy $s_1 + s_2 + \ldots + s_m < r + 1$.

Dejme tomu, že hlavní prostor S_{s_1-1} protíná basi přidruženého hlavního svazu S_{r-s_1} v prostoru $(s'_1 - 1)$-rozměrném, kde $s'_1 \leqq s_1$; v prostoru S_{r-s_1} existuje indukovaná kolineace s hlavními prostory $S_{s'_1-1}, S_{s_2-1}, \ldots, S_{s_m-1}$. Hlavní prostor $S_{s'_1-1}$ ať protíná basi $S_{r-s_1-s'_1}$ hlavního svazu k němu v dotčené kolineaci přidruženého v prostoru $(s''_1 - 1)$-rozměrném, kde $s''_1 \leqq s'_1$, jenž je opět hlavním prostorem indukované kolineace v $S_{r-s_1-s'_1}$ vedle hlavních prostorů $S_{s_2-1}, \ldots, S_{s_m-1}$. Takto pokračujíce musíme dojíti konce, protože base přidružených hlavních svazů mají počet rozměrů postupně menší, jenž však nemůže býti menší než $s_2 + s_3 + \ldots + s_m - 1$. Dejme tomu pro jednoduchost, že prostor $S_{s''_1-1}$ protíná basi přidruženého hlavního svazu $S_{r-s_1-s'_1-s''_1}$ v prostoru $(s'''_1 - 1)$-rozměrném, kde $s'''_1 \leqq s''_1$, tento však že už neprotíná base $S_{r-s_1-s'_1-s''_1-s'''_1}$.

V prostoru $S_{r-s_1-s'_1-s''_1-s'''_1}$, který jsme tak obdrželi, existuje indukovaná kolineace s hlavními prostory $S_{s_2-1}, S_{s_3-1}, \ldots, S_{s_m-1}$. Zde můžeme vzhledem k prostoru S_{s_2-1} opakovati týž postup jako nahoře a zjistiti tak v hlavním prostoru S_{s_2-1} třebas jen prostory o $s'_2 - 1$ a $s''_2 - 1$ rozměrech, kde $s''_2 \leqq s'_2 \leqq s_2$, z nichž $S_{s'_2-1}$ je obsažen v S_{s_2-1} a $S_{s''_2-1}$ v $S_{s'_2-1}$. Totéž lze opakovati vzhledem k ostatním hlavním prostorům dané kolineace; pro jednoduchost však dejme tomu, že v prostoru dosavadním postupem získaném o $r-s_1-s'_1-s''_1-s'''_1-s_2-s'_2-s''_2$ rozměrech, jenž obsahuje hlavní prostory $S_{s_2-1}, \ldots, S_{s_m-1}$, není base žádného hlavního svazu, k prostoru S_{s_k-1} pro $k = 3, 4, \ldots, m$ v indukované kolineaci přidruženého, proťata už tímto S_{s_k-1}. Kolineace tohoto

[4]) Obecná homologie je pro svou jednoduchost zvlášť významná; a platí: Kolineaci dvou soumístných prostorů r-rozměrných lze vytvořiti jako produkt nejvýše $r + 1$ homologií regulárních. Viz *F. Aschieri*, Sulla trasformazione omografica generale di uno spazio lineare di specie qualunque, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 18 (1885); *A. del Re*, Sulla decomposizione delle omografie in omologie, Rendiconti Accad. Napoli (3) 13 (1907); *J. Vojtěch*, O vytvoření kolineace projekcemi nebo homologiemi, Časopis mat. a fys. 42 (1913), a Typy a kontinuitní grupy kolineací v S_3, Časopis mat. a fys. 38 (1908).

prostoru jest tedy regulární, pročež platí

$$s_3 + s_4 + \ldots + s_m = r - s_1 - s'_1 - s''_1 - s'''_1 - s_2 - s'_2 - s''_2 + 1$$

čili

$$(s_1 + s'_1 + s''_1 + s'''_1) + (s_2 + s'_2 + s''_2) + s_3 + s_4 + \ldots + s_m = r + 1.$$

Řada čísel $s_1 - 1$, $s'_1 - 1$, $s''_1 - 1$, $s'''_1 - 1$ sluje *charakteristickou skupinou* hlavního prostoru S_{s_1-1}, obdobně řada $s_2 - 1$, $s'_2 - 1$, $s''_2 - 1$ pro S_{s_2-1} (a obdobně v obecném případě u ostatních prostorů hlavních); *charakteristikou* partikulární kolineace nazývá se pak (podobně jako u kolineace regulární) soubor charakteristických skupin, příslušných k jednotlivým hlavním prostorům S_{s_k-1} pro $k = 1, 2, \ldots, m$ a udávajících rozměry hlavních prostorů v S_{s_k-1} postupně obsažených, tedy v jednoduchém případě, na který jsme se omezili,

$$[(s_1 - 1, s'_1 - 1, s''_1 - 1, s'''_1 - 1), (s_2 - 1, s'_2 - 1, s''_2 - 1), s_3 - 1, s_4 - 1, \ldots, s_m - 1].$$

Součet všech členů, uvedených v charakteristice kolineace partikulární, vždy o 1 zvětšených, musí býti roven $r + 1$.

V analytickém rozboru značí $s_1 + s'_1 + s''_1 + s'''_1$ stupeň násobnosti kořene ϱ_1 v rovnici $A(\varrho) = 0$, $s_2 + s'_2 + s''_2$ stupeň násobnosti kořene ϱ_2 (a obdobně v obecném případě u ostatních kořenů).

Lze pak ukázati, že partikulární kolineace může býti pokládána za mezní případ kolineace regulární, jejíž hlavní prostory v určitém množství a s určitým počtem rozměrů se staly incidentními (při čemž ovšem příslušné absolutní invarianty pozbyly svého významu, stavše se rovnými 1); z charakteristiky partikulární kolineace dostaneme charakteristiku kolineace regulární, jejímž je ona partikulární případem mezním, vynecháme-li oblé závorky tam se vyskytující.[5])

Všechny možné typy regulárních kolineací v S_r udáme jejich charakteristikami, jestliže $r + 1$ bodů prostoru rozvrhneme všemi možnými způsoby na hlavní prostory ve skupiny je určující; nejobecnější jest kolineace o $r + 1$ nezávislých bodech samodružných s charakteristikou $[0, 0, \ldots, 0]$, obsahující $r + 1$ nul, nejjednodušší pak homologie $[r - 1, 0]$. Všechny typy partikulárních kolineací v S_r pak obdržíme, uzavřeme-li v charakteristikách jednotlivých kolineací regulárních oblými závorkami rozmanité řady čísel, v nichž každé následující je menší než předcházející nebo mu rovno; nejspeciálnější jsou kolineace s jediným bodem samodružným ($r + 1$ splývajícími) o charakteristice $[(0, 0, \ldots, 0)]$ s $r + 1$ nulami a elace (homologie se středem a osou incidentními $[(r - 1, 0)]$.[6])

---

[5]) Také partikulární kolineace s touže charakteristikou a týmiž absolutními invarianty jsou projektivně totožny; k jejich určení však tyto údaje nestačí. O stanovení, rovnicích a konstrukci těchto (pomocí t. zv. charakteristických dvojic bodů) viz práce *P. Predellovy*, dříve uvedené; nebo spis *Bertiniův*.

e) Kolineace prostoru S_r, jejíž n-tá mocnina ($n \geqq 2$) jest transformací identickou, sluje *periodická* řádu n-tého (periody n). *Každá periodická kolineace jest regulární*; neboť v partikulární kolineaci existují vždy přímky, na nichž kolineace prostoru indukuje projektivnost s dvěma splývajícími body samodružnými, jež proto nemůže býti periodická. Kdežto totiž v regulární kolineaci hlavní prostor S_{s_k-1} a base S_{r-s_k} přidruženého hlavního svazu se nikdy neprotínají, mají tyto prostory v partikulární kolineaci (odpovídá-li S_{s_k-1} kořenu ϱ_k rovnice $A(\varrho) = 0$ s násobností větší než s_k) aspoň jeden bod společný; budiž takovým bodem R. Tento bod je středem perspektivnosti dvou sobě odpovídajících prostorů S_{s_k} a S'_{s_k}, jež procházejí prostorem S_{s_k-1}; protože tedy oba procházejí také bodem R a obsahují každou přímku, jež spojuje R s dvěma sdruženými body jejich, jsou totožny. V S_{s_k} existuje tedy partikulární homologie s nadrovinou samodružných bodů S_{s_k-1}, v níž sdružené body leží na přímkách jdoucích bodem R této nadroviny; na těchto přímkách existuje projektivnost s dvěma splývajícími body samodružnými.

Předpokládáme-li v souhlasu s tím pro periodickou kolineaci analytické vyjádření, uvedené dříve pro kolineaci regulární, shledáváme, že konstanty $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ a tedy i jejich poměry, t. j. *absolutní invarianty kolineace musí býti n-tými kořeny z* 1; obráceně při takových invariantech jest kolineace periodickou.

Jest jasné, že periodická kolineace řádu n-tého (jsouc regulární) musí míti aspoň dva hlavní prostory; z předcházejícího pak vysvítá, že má nejvýše n hlavních prostorů.

Při periodické kolineaci n-tého řádu $\mathbf{K}$ tvoří každý bod prostoru, jenž není samodružný, se všemi body, ve které kolineacemi $\mathbf{K}^k$ pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$ přechází, skupinu o n členech (cyklus této kolineace), invariantní při cyklické grupě kolineací, jež obsahuje uvedené mocniny kolineace $\mathbf{K}$ a kolineaci identickou. Existuje-li při kolineaci s m hlavními prostory jediný cyklus n bodů ($n \geqq m$), jest kolineace ta periodická řádu n-tého.[7])

---

[6]) Typy kolineací v S_4 jsou: [00000], [(00) 000], [(00) (00) 0], [(000) 00], [(000) (00)], [(0000) 0], [(00000)]; [1000], [10 (00)], [(10) 00], [(10) (00)], [1 (000)], [(100) 0], [(1000)]; [110], [1 (10)], [(11) 0], [(110)]; [200], [2 (00)], [(20) 0], [(200)]; [21], [(21)]; [30], [(30)]; celkem tedy 26, (nečítaje identickou), z nichž 6 regulárních a 20 partikulárních. V S_5 existuje 57 typů kolineací (z nich 10 regulárních), v S_6 celkem 110 typů. Počet typů kolineací v S_r až do $r = 11$ udává *E. B. Wilson*, The number of types of collineations, Jahresbericht Deut. Math. Ver. 17 (1908) (před ním do $r = 10$ *A. Cayley*), příslušný vzorec sestrojil *P. Wernicke*, Die Zahl der ordinären Kollineationstypen, Jahresbericht Deut. Math. Ver. 18 (1909).

[7]) O periodických kolineacích pojednává *F. Enriques*, Le omografie cicliche negli spazi ad n dimensioni, Giornale mat. 30 (1892). Obecněji řadu bodů, vznikající z bodu zvoleného opakováním dané kolineace, vyšetřoval *G. Veronese*, Interprétations géométriques de la théorie des substi-

Periodická kolineace $\mathbf{K}$ s periodou 2 sluje *involuční*; v takové kolineaci odpovídají sobě všechny dvojice sdružených bodů obapolně, každému (nesamodružnému) bodu P odpovídá v kolineaci $\mathbf{K}$ i v kolineaci inversní $\mathbf{K}^{-1}$ týž bod P'. Involuční kolineace má dva hlavní prostory S_{s-1} a S_{r-s} a jeden absolutní invariant hodnoty -1; jest svými hlavními prostory určena.

Položíme-li do hlavních prostorů involuční kolineace dvě protější části základního jehlanu soustavy souřadnic, má tato kolineace rovnice

$$\varrho x'_h = -x_h \quad \text{pro } h = 1, 2, \ldots, s,$$
$$\varrho x'_k = x_k \quad \text{pro } k = s+1, s+2, \ldots, r+1.$$

Analyticky jeví se tedy involuční kolineace změnou znaménka v opačné u s (nebo u $r+1-s$) souřadnic. Odtud plyne, že počet různých involučních kolineací prostoru S_r jest $\frac{1}{2}r$ při sudém r, $\frac{1}{2}(r+1)$ při r lichém.

Nejjednodušší involuční kolineace jest *involuční* čili harmonická *homologie* (homologie s dvojpoměrem -1). *Involuční kolineaci s hlavními prostory* S_{s-1} a S_{r-s} *lze uskutečniti jako produkt* s (nebo $r+1-s$) *involučních homologií*. Neboť z analytického vyjádření involuční kolineace jest viděti, že transformace té lze dosáhnouti postupným provedením s involučních homologií s rovnicemi

$$\varrho x'_h = -x_h, \quad \varrho x'_k = x_k,$$

kde $h = 1$, nebo 2, nebo 3, ..., nebo s a vždy $k = 1, 2, \ldots, h-1$, $h+1, \ldots, r+1$. Středem každé z těchto homologií jest vždy jeden z $s+1$ nezávislých bodů prostoru S_{s-1} a osou vždy nadrovina spojující nezávislý S_{r-s} s ostatními body těmi v S_{s-1}.

Zvolme v prostoru S_r $r+1$ nezávislých bodů; učiníme-li vždy jeden z nich středem involuční homologie a prostor zbývajících r bodů spojující její osou, dále přímku spojující vždy dva z nich a prostor zbývajících $r-1$ bodů spojující hlavními prostory involuční kolineace, atd., obecně učiníme-li hlavními prostory S_{k-1} a S_{r-k} vždy prostory spojující k a zbývajících $r+1-k$ bodů zvolených při $1 \leqq k \leqq r$, dostaneme skupinu involučních kolineací, v níž se totožné kolineace vyskytují po dvou, takže různých jest pouze

$$\tfrac{1}{2}\left[\binom{r+1}{1} + \binom{r+1}{2} + \ldots + \binom{r+1}{r}\right] = \tfrac{1}{2}(2^{r+1} - 2).$$

Vzhledem k tomu, že každou z těchto kolineací lze pokládati za produkt involučních homologií ve skupině té obsažených a že produkt libovolného počtu těchto jest opět kolineace uvažované skupiny, *tvoří všechny uvedené involuční kolineace spolu s kolineací identickou grupu s* 2^r *členy*.[8])[9])[10])

---

tutions des n lettres ..., Annali mat. (2) 11 (1882), a *S. Kantor*, Sur les transformations linéaires dans le même espace a n dimensions, Bulletin Soc. math. France 8 (1880). Uvedené řady bodů, odvozené z bodu danou kolineací, a řady bodů z kolineace inversní užívá k větě, jež je rozšířením věty Londonovy pro rovinu na S_r, *L. Berzolari*, Sopra un teorema relativo alle collineazioni, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 36 (1903).

145. Korelace prostoru S_r. *a*) Korelace dvou soumístných prostorů S_r a S'_r, jež není zvrhlá, jest vyjádřena rovnicemi

$$\varrho u'_h = \sum_k a_{hk} x_k \text{ pro } h = 1, 2, \ldots, r+1,$$

kde determinant $|a_{hk}| \neq 0$, při čemž bod (x_h) v S_r a jemu odpovídající nadrovina (u'_h) v S'_r jsou vztahovány k témuž útvaru základnímu. Korelace k uvedené korelaci inversní jest pak vyjádřena rovnicemi

$$\nu u_h = \sum_k a_{kh} x'_k \quad (h = 1, 2, \ldots, r+1).$$

Máme-li na zřeteli podmínku incidence pro bod (x_h) a nadrovinu (u_h), totiž relaci $\sum_h x_h u_h = 0$ (nebo relaci $\sum_h x'_h u'_h = 0$ pro (x'_h) a (u'_h)), vidíme, že danou korelaci, jež bodu (x_h) prostoru S_r přiřaďuje nadrovinu prostoru S'_r, vyplněnou body (x'_h), a bodu (x'_h) nadrovinu bodů (x_h), lze

[8]) Důležitá je také věta: Kolineace v prostoru r-rozměrném, při které existuje r dvojic bodů obapolně si odpovídajících, jejichž spojnice mají obecnou polohu, jest involuční. Viz *E. Bertini*, Le omografie involutorie in uno spazio lineare a qualsivoglia numero di dimensioni, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 19 (1886). Rozklad kolineace v involuční homologie vyšetřuje analyticky *M. W. Haskell*, The resolution of any collineation into perspective reflections, Transactions Amer. math. soc. 7 (1906).

[9]) Kolineace a korelace záměnné studoval *G. del Prete*, Le omografie e correlazioni permutabili fra di loro in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni, Giornale mat. 37 (1899) a 38 (1900).

[10]) Grupy kolineací v S_r byly porůznu vyšetřovány, často z podnětů algebraických nebo analytických. Z konečných grup kolineací jsou nejjednodušší cyklické grupy kolineací dané periody; nahoře byla uvedena grupa 2^r involučních kolineací, příslušná ke skupině $r+1$ nezávislých bodů; jednoduchá jest také grupa kolineací s invariantní skupinou $r+2$ nezávislých bodů v prostoru S_r, kterou v případě $r = 4$ studoval *E. Ciani*, Una interpretazione geometrica del gruppo totale di sostituzioni sopra sei elementi, Annali mat. (3) 16 (1909). Ze spojitých grup kolineací je nejširší grupa všech kolineací v S_r s $r(r+2)$ parametry; snadno lze sestrojiti grupy příslušné k invariantním útvarům jednotlivých typů. K řešení otázky spojitých grup kolineací v S_r metodou analytickou položil základy *S. Lie - F. Engel*, Theorie der Transformationsgruppen I (1888) a III (1893); dále budiž uvedeno: *J. M. Page*, On the primitive groups of transformations in space of four dimensions, Amer. Journal math. 10 (1888), a doplněk v Annals math. 9 (1894); *G. Kowalewski*, Über eine Kategorie von Transformationsgruppen einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit, Berichte Ges. Wiss. Leipzig 50 (1898), a Die primitiven Transformationsgruppen in fünf Veränderlichen, tamtéž 51 (1899); *F. Marotte*, Sur la classification des groupes projectifs de l'espace a n dimensions, Comptes r. Acad. Paris 129 (1899). Grupy (konečné a smíšené) kolineací identických a involučních (reálných i komplexních) vyšetřoval *E. Study*, Gruppen zweiseitiger Kollineationen, Göttinger Nachrichten 1912. Jednoparametrové grupy kolineací sestrojuje a k další klasifikaci kolineací jich používá *E. B. van Vleck*, One-parameter projective groups and the classification of collineations, Transactions Amer. math. soc. 13 (1912).

vyjádřiti také bilineární rovnicí, kterou obdržíme dosazením hořejších výrazů do vytčené relace, totiž rovnicí

$$\sum_{h,k} a_{hk} x_h x'_k = 0.$$

Bod prostoru S_r, jenž leží v nadrovině prostoru S'_r k němu sdružené (nebo bod prostoru S'_r ležící ve sdružené nadrovině prostoru S_r), musí svými souřadnicemi vyhověti rovnici, jež z předcházející rovnice plyne pro $x'_k = x_k$, tedy rovnici

$$\sum_{h,k} a_{hk} x_h x_k = 0,$$

kde součet se týká indexů h a k od 1 do $r + 1$.

Rovnice tato vyjadřuje za předpokladu, že není splněna identicky, (t. j. že $a_{hk} + a_{kh} \neq 0$), $(r - 1)$-rozměrnou varietu bodovou čili nadplochu 2. stupně; *jest* tedy *geometrickým místem bodů prostoru* S_r (nebo S'_r), *jež jsou incidentní s nadrovinami jim v korelaci odpovídajícími, nadplocha 2. stupně* o rovnici $\Sigma a_{hk} x_h x_k = 0$.

Duálně zjistíme, že *nadroviny prostoru* S_r (nebo S'_r), *jež jsou incidentní s body k nim v uvažované korelaci sdruženými, vytvořují* $(r - 1)$-rozměrnou varietu, složenou z nadrovin, čili *nadplochu 2. třídy* o rovnici $\Sigma A_{hk} u_h u_k = 0$, kde A_{hk} jsou minory determinantu $|a_{hk}|$, příslušné k prvkům jeho a_{hk}. Obě kvadratické variety zde nalezené slují u vyšetřované korelace *incidenčními* (základními) *nadplochami* 2. stupně resp. 2. třídy.

Ke každé korelaci $\mathbf{K}$ lze *přidružiti kolineaci*, v níž sobě odpovídají dva body, sdružené k téže nadrovině v korelaci dané a v korelaci k ní inversní, jakož i dvě nadroviny takové, že prvá přechází danou korelací v bod a tento touže korelací v nadrovinu druhou; jest tedy kolineace, ke korelaci $\mathbf{K}$ přidružená, transformací $\mathbf{K}^2$. Samodružné body a samodružné nadroviny kolineace $\mathbf{K}^2$ jsou body a nadroviny, jimž v dané korelaci i v korelaci inversní odpovídá táž nadrovina resp. týž bod; obráceně body a nadroviny, jež sobě v korelaci $\mathbf{K}$ odpovídají obapolně (involučně), jsou samodružnými prvky přidružené kolineace $\mathbf{K}^2$.

Bod, jemuž v korelaci $\mathbf{K}$ i v korelaci $\mathbf{K}^{-1}$ odpovídá táž nadrovina, musí svými souřadnicemi vyhověti rovnicím

$$\sum_k a_{hk} x_k = \varrho \sum_k a_{kh} x_k$$

čili rovnicím

$$\sum_k (a_{hk} - \varrho a_{kh})\, x_k = 0 \quad \text{pro } h = 1, 2, \ldots, r + 1;$$

se zřetelem také k duálnímu případu, pokud tyto rovnice nejsou splněny identicky, platí tedy: *Dvojice bodu a nadroviny, jež sobě v dané korelaci odpovídají involučně* (t. j. samodružné prvky přidružené kolineace) *leží v prostorech resp. svazcích, jež příslušejí kořenům rovnice* $A(\varrho) \equiv |a_{hk} - \varrho a_{kh}| = 0$. Tyto prostory bodů a svazky nadrovin v korelaci

involučně si odpovídajících (hlavní prostory a svazky kolineace přidružené) slují také hlavními prostory resp. hlavními svazky uvažované korelace.[1])

Korelace, v níž hořejší rovnice platí identicky, t. j. pro každý bod (x_k), takže všechny body prostoru a nadroviny k nim sdružené si odpovídají involučně, sluje *involuční*; kolineace k ní přidružená jest identická.

b) Korelace (neinvoluční a nezvrhlé) lze vyšetřovati pomocí kolineací k nim přidružených. Všimněme si za tím účelem nejprve, že kolineace k dané korelaci $\mathbf{K}$ přidružená, kterou označíme na chvíli $\mathbf{L}$ $(= \mathbf{K}^2)$, jest s touto korelací záměnná $(\mathbf{LK} = \mathbf{KL})$, čili že korelace $\mathbf{K}$ transformuje kolineaci $\mathbf{L}$ v ni samu $(\mathbf{KLK}^{-1} = \mathbf{L})$, rovněž ovšem $\mathbf{L}^{-1}$. Protože pak každou kolineaci lze neomezeným počtem korelací, z nichž jednu označíme $\mathbf{R}$, převésti v kolineaci inversní, jest možno kolineací $\mathbf{KR}$, jež je produktem korelace zvolené a dané, transformovati kolineaci $\mathbf{L}$ v inversní kolineaci $\mathbf{L}^{-1}$.

Dejme tomu, že kolineace $\mathbf{K}^2$ má hlavní prostory $S_{s_1-1}, S_{s_2-1}, \ldots$ $\ldots, S_{s_m-1}$ a k nim přidružené hlavní svazy s basemi $S_{r-s_1}, S_{r-s_2}, \ldots, S_{r-s_m}$. Jsou-li X, X' dva různé body v této kolineaci sdružené, protíná přímka je spojující base S_{r-s_k} v bodech, jež spolu s body X a X' tvoří určitou skupinu; transformujeme-li kolineaci $\mathbf{K}^2$ uvedeným způsobem v kolineaci inversní (jež má ovšem tytéž hlavní prostory a base hlavních svazů jako kolineace uvažovaná), obdržíme na přímce XX' skupinu projektivní se skupinou hořejší, při čemž bodu X a X' odpovídá bod X' resp. X. Jsou tedy na spojnici dvou bodů v kolineaci $\mathbf{K}^2$ sobě odpovídajících její průsečíky s basemi hlavních svazů kolineace po dvou involučně sdruženy, až snad na jeden nebo dva body samodružné. Důsledky toho jsou: Uvedená transformace kolineace $\mathbf{K}^2$ v inversní (kolineací $\mathbf{KR}$) zaměňuje navzájem vždy dvě base hlavních svazů (totiž ty, jež jsou přímkou XX' proťaty v bodech involučně sdružených), rovněž přidružené dva hlavní prostory této kolineace, vyjma base a prostory samodružné; oba prostory každé dvojice takové musí tedy

---

[1]) Každý hlavní prostor bodů, odpovídajících v dané korelaci sdruženým nadrovinám involučně, leží na incidenční nadploše 2. stupně, pokud nepřísluší ke kořenu $\varrho = 1$ rovnice $A(\varrho) = 0$; duálně a při stejné suposici každý hlavní svazek nadrovin, involučně odpovídajících bodům v korelaci sdruženým, patří incidenční nadploše 2. třídy korelace dané. Neboť z hořejších rovnic

$$\sum_k (a_{hk} - \varrho a_{kh})\, x_k = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, r+1),$$

jestliže je znásobíme postupně faktorem x_h a sečteme, vyplývá

$$(1 - \varrho) \sum_{h,k} a_{hk} x_h x_k = 0,$$

takže při $\varrho \neq 1$ musí souřadnice uvažovaných bodů vyhovovati rovnici

$$\Sigma a_{hk} x_h x_k = 0.$$

míti stejný počet rozměrů a u partikulární kolineace stejnou charakteristickou skupinu. Dva kořeny ϱ_k rovnice vedoucí k hlavním prostorům kolineace, jež příslušejí ke dvojici prostorů zaměňovaných, jsou navzájem převratné (protože kořen ϱ_k má význam souřadnice průsečíku přímky XX' s prostorem S_{r-s_k} při základních bodech X a X').

Všimněme si blíže jedné takové dvojice hlavních prostorů S_{s_1-1} a S_{s_2-1}, k nimž příslušejí kořeny ϱ_1 a $\varrho_2 = \frac{1}{\varrho_1}$, takže $s_2 = s_1$ (ponechejme však na rozlišenou označení původní): korelace $\mathbf{R}$ převádí S_{s_1-1} a S_{s_2-1} v Σ_{s_1-1} resp. Σ_{s_2-1}, kolineace $\mathbf{KR}$ převádí podle hořejšího S_{s_1-1} v S_{s_2-1} a S_{s_2-1} v S_{s_1-1}; převádí tedy korelace $\mathbf{K}$ svaz Σ_{s_1-1} v prostor S_{s_2-1} a svaz Σ_{s_2-1} v prostor S_{s_1-1} i obráceně.

Můžeme tudíž neinvoluční nezvrhlou korelaci $\mathbf{K}$ pomocí přidružené kolineace takto popsati: Hlavní prostory kolineace $\mathbf{K}^2$ lze po dvou S_{s_1-1} a S_{s_2-1}, S_{s_3-1} a S_{s_4-1}, ... tak sdružiti, že oba prostory každé dvojice mají stejný počet rozměrů ($s_2 = s_1$, $s_4 = s_3$, ...), resp. stejnou charakteristickou skupinu, a převratné hodnoty příslušných kořenů ϱ_1 a $\varrho_2 = \frac{1}{\varrho_1}$, ϱ_3 a $\varrho_4 = \frac{1}{\varrho_3}$, ... rovnice $A(\varrho) = 0$ (i duálně); mimo to mohou se vyskytovati jeden nebo dva hlavní prostory osamocené. V dané korelaci $\mathbf{K}$ odpovídají bodům každého hlavního prostoru uvedených dvojic obapolně nadroviny hlavního svazu, přidruženého k druhému prostoru téže dvojice, a procházejí tímto prostorem; v hlavních prostorech mimo tyto dvojice stojících, nejsou-li proťaty basemi přidružených hlavních svazů, vyskytují se korelace involuční.[2]) Jest patrno, že jako kolineace tak i korelace dvou soumístných prostorů dlužno rozlišovati regulární a partikulární.[3])[4])

c) Obraťme se ke *korelacím involučním*, v nichž totiž všechny prvky odpovídají svým prvkům sdruženým obapolně.

Aby $r + 1$ rovnic pro souřadnice bodu, který odpovídá nadrovině sdružené k němu v korelaci dané i inversní, totiž rovnice

$$\sum_k (a_{hk} - \varrho a_{kh})\, x_k = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, r + 1)$$

---

[2]) Hlavní prostory, jež nepatří ke dvojicím převratných hodnot kořenů ϱ_k, příslušejí ke kořenům $+1$ a -1, a involuční korelace v nich se vyskytující jest, jak poznáme, polární resp. nulová (tato jen při lichém počtu rozměrů takového prostoru).

[3]) Kolineace ke korelaci přidružená jest také tím důležitá, že nutnou a dostačující podmínkou toho, aby dvě korelace byly projektivně identické, jest projektivní totožnost přidružených kolineací jejich.

[4]) Partikulární korelace lze jen zčásti obdržeti jako mezní případy korelací regulárních.

O korelacích prostoru r-rozměrného obšírně pojednávají *C. Segre*, Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni..., Memorie Accad. Torino (2) 37 (1885); *S. Medici*, Sulle omografie e correlazioni non singolari in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni, Giornale mat. 44 (1906).

byly splněny identicky, musí býti

$$a_{hk} - \varrho a_{kh} = 0 \quad \text{pro } h, k = 1, 2, \ldots, r+1.$$

Jestliže aspoň jeden z koeficientů a_{hh} jest různý od nuly, dostáváme z příslušné rovnice $a_{hh}(1 - \varrho) = 0$ důsledek $\varrho = 1$. Jsou-li však všechny koeficienty se stejnými oběma indexy rovny nule, musí aspoň jeden z koeficientů a_{hk} při $h \neq k$ býti od nuly různý (protože $|a_{hk}| \neq 0$); z rovnice pro tento koeficient $a_{hk} = \varrho a_{kh}$ plyne, že také $\varrho \neq 0$, $a_{kh} \neq 0$; znásobením pak rovnice té obdobnou $a_{kh} = \varrho a_{hk}$ vyplývá $\varrho^2 = 1$ čili $\varrho = \pm 1$.

Jsou tedy dvě možnosti: Je-li $\varrho = 1$, dostáváme z hořejších $(r+1)^2$ rovnic vztahy

$$a_{hk} = a_{kh} \quad \text{pro } h, k = 1, 2, \ldots, r+1;$$

je-li $\varrho = -1$, dostáváme relace

$$a_{hk} = -a_{kh} \quad \text{pro } h, k = 1, 2, \ldots, r+1$$

(při čemž ovšem $a_{hh} = 0$). Jsou tedy možny *dva druhy involučních korelací*: involuční korelace, jejíž determinant $A \equiv |a_{hk}|$ jest souměrný, sluje *polárná* (polárnost); korelace involuční, jejíž determinant A je polosouměrný, sluje *nulová*.

Dvojice bodu a nadroviny v involuční korelaci polárné sdružených slují *pólem a polárnou nadrovinou*; také v nulové korelaci se těchto názvů užívá. Bod a každý bod ležící ve sdružené k němu nadrovině, duálně nadrovina a každá nadrovina jdoucí sdruženým k ní bodem slují *konjugovanými* (sdruženými).

Základní vlastnost korelace, že incidentním prvkům odpovídají prvky incidentní, vyslovuje se pro involuční korelace větou: *Leží-li jeden ze dvou bodů v polárné nadrovině druhého, leží druhý v polárné nadrovině prvého* (nebo prochází polárná nadrovina prvého bodem druhým).

Odtud také vyplývá, protože nadroviny sdružené v (nezvrhlé) korelaci k bodům prostoru S_h (v S_r obsaženého) tvoří svazek Σ_h s basí S_{r-h-1}, že obráceně nadroviny sdružené k bodům prostoru tohoto S_{r-h-1} procházejí prostorem S_h; prostory S_h a S_{r-h-1} slují rovněž v involuční korelaci konjugovanými (sdruženými, polárnými).

Budiž ještě vytčeno, že (podle bilineární rovnice pro korelaci vůbec) platí pro dva body v involuční korelaci konjugované (x_h) a (x'_h) rovnice

$$\sum_{h,k} a_{hk} x_h x'_k = 0,$$

kde při polárné korelaci jest $a_{kh} = a_{hk}$, při korelaci nulové $a_{kh} = -a_{hk}$.

d) Zabývejme se nejprve involuční korelací polárnou. *V polárné korelaci nezvrhlé*, jež je definována rovnicí platnou pro souřadnice dvou konjugovaných bodů $\Sigma a_{hk} x_h x'_k = 0$, kde $|a_{hk}| \neq 0$, s podmínkou $a_{kh} =$

$= a_{hk}$, *vyplňují body, ležící v nadrovinách k nim sdružených, nadplochu 2. stupně s rovnicí*

$$\Sigma a_{hk} x_h x_k = 0,$$

kde $a_{kh} = a_{hk}$. Obráceně každá $(r-1)$-rozměrná varieta prostoru S_r, daná rovnicí 2. stupně v souřadnicích bodových, čili *každá nadplocha 2. stupně*, protože její rovnici jest možno upraviti na tvar právě uvedený, *může býti pokládána za geometrické místo bodů, jež jsou incidentní s nadrovinami, sdruženými k nim v určité korelaci polárné*, totiž v polárnosti s hořejší rovnicí. Pomocí této kvadratické nadplochy, kterou označíme V^2_{r-1}, lze polárnost nejkratčeji vyšetřiti.

Jsou-li (x_h) a (x'_h) dva různé body prostoru S_r, má libovolný bod na jejich spojnici souřadnice $x_h + \lambda x'_h$; aby takový bod ležel na kvadratické nadploše $\Sigma a_{hk} x_h x_k = 0$ $(a_{kh} = a_{hk})$, musí jeho parametr λ vyhověti rovnici

$$\lambda^2 . \Sigma a_{hk} x'_h x'_k + 2\lambda . \Sigma a_{hk} x_h x'_k + \Sigma a_{hk} x_h x_k = 0;$$

rovnice tato, není-li splněna identicky, poskytuje dvě hodnoty pro parametr dvou průsečíků uvažované přímky s danou nadplochou. Jsou-li (x_h) a (x'_h) body konjugované, takže $\Sigma a_{hk} x_h x'_k = 0$, platí o kořenech uvedené rovnice $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$; obráceně tato relace mezi kořeny hořejší rovnice vede k tomu, že body (x_h) a (x'_h) jsou konjugovány. *Jsou* tedy *dva body v polárnosti konjugované harmonicky sdruženy vzhledem k oběma průsečíkům své spojnice s incidenční nadplochou této polárnosti* V^2_{r-1}; obráceně *dva body, harmonicky sdružené vzhledem k průsečíkům své spojnice s nadplochou 2. stupně, jsou konjugovány v polárnosti nadplochou určené*. Je-li bod (x_h) pevný, vyplňují ovšem body k němu v dané polárnosti konjugované polárnou nadrovinu k němu příslušnou o souřadnicích $\Sigma a_{hk} x_k$, jež je tedy geometrickým místem bodů harmonicky sdružených k bodu (x_h) vzhledem k dvojicím průsečíků každé přímky bodem tím vedené s nadplochou V^2_{r-1}.

Jestliže jeden ze dvou konjugovaných bodů (x_h) jest bodem nadplochy V^2_{r-1} a druhý (x'_h) leží mimo ni, má hořejší rovnice kořeny $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, t. j. přímka takové dva body spojující má s nadplochou společné dva body v (x_h) splývající; obráceně má-li přímka, spojující bod (x_h) nadplochy V^2_{r-1} s bodem (x'_h) mimo ni ležícím, s nadplochou tou dva splývající body společné, jsou body (x_h) a (x'_h) konjugovány. Nazveme-li přímku, jež má s nadplochou V^2_{r-1} společné dva body v (x_h) splývající, tečnou této nadplochy s dotyčným bodem (x_h), vidíme, že polárná nadrovina, příslušná k bodu (x_h) nadplochy V^2_{r-1}, je vytvořena tečnami této nadplochy v bodě (x_h); sluje tečnou nadrovinou nadplochy V^2_{r-1} s dotyčným bodem (x_h).

Leží-li oba konjugované body (x_h) a (x'_h) na V^2_{r-1}, jest hořejší rovnice pro λ splněna identicky, a přímka tyto body spojující patří celá nadploše V^2_{r-1}; obráceně jsou dva libovolné body přímky na V^2_{r-1} ležící (t. j. přímky takové, že rovnice pro parametry jejích průsečíků s nadplochou 2. stupně je splněna identicky) konjugovanými.

Polárnost prostoru S_r indukuje v každém nižším prostoru S_p, v S_r ležícím, jenž nepatří incidenční nadploše její V^2_{r-1}, *opět polárnost*, jejíž incidenční nadplochou V^2_{p-1} je průsek tohoto prostoru s incidenční nadplochou polárnosti dané. Vidíme to bezprostředně na prostoru, jenž je součástí základního jehlanu soustavy souřadnic. Každému bodu v S_r odpovídá v této indukované polárnosti nadrovina, v níž prostor S_p protíná nadrovinu, k bodu tomu v S_r sdruženou.

Pro souřadnice u_h polárné nadroviny, příslušné k bodu (x_h), platí

$$\varrho u_h = \Sigma a_{hk} x_k;$$

patří-li bod (x_h) incidenční nadploše polárnosti V^2_{r-1} a jenom tehdy, prochází jím polárná nadrovina k němu sdružená, jsouc tečnou nadrovinou této nadplochy, takže platí

$$\Sigma x_k u_k = 0.$$

Vyloučíme-li z těchto rovnic x_k, obdržíme rovnici útvaru, složeného z tečných nadrovin nadplochy V^2_{r-1}, ve tvaru

$$\Sigma A_{hk} u_h u_k = 0;$$

vytvořují tedy tečné nadroviny nadplochy 2. stupně nadplochu 2. třídy (a duálně). Obě incidenční nadplochy obecné korelace tvoří v polárnosti týž útvar, jednak bodový, jednak nadrovinový.

V polárnosti prostoru S_r existují $(r+1)$-rohy (jehlany), tvořené $r+1$ nezávislými body a prostory je spojujícími, jejichž každý vrchol je sdružen s nadrovinou, určenou ostatními r body jeho; takový normální $(r+1)$-roh sluje *autopolárným* v dané polárnosti. Abychom autopolárný jehlan normální sestrojili, stačí zvoliti body $P_1, P_2, \ldots, P_{r+1}$ mimo incidenční nadplochu V^2_{r-1} ležící a jejich polárné nadroviny $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{r+1}$ tak, aby P_1 ležel kdekoli v S_r, P_2 v nadrovině π_1, P_3 v průsečném prostoru nadrovin π_1 a π_2, P_4 v průsečném prostoru $\pi_1\pi_2\pi_3$ atd., konečně P_{r+1} v průsečíku r nadrovin π_1 až π_r (body P_k jsou nezávislé: P_3 leží mimo P_1P_2, protože by jinak ležel ve své nadrovině polárné, jež prochází body P_1 a P_2; atd.). Autopolárných $(r+1)$-rohů normálních je možno v polárnosti prostoru S_r sestrojiti ∞^s, kde $s = \frac{1}{2}r(r+1)$.

Učiníme-li autopolárný normální $(r+1)$-roh základním jehlanem soustavy souřadnic, nabudou rovnice polárnosti jednoduchého tvaru

$$\varrho u_h = a_h x_h \quad \text{pro } h = 1, 2, \ldots, r+1;$$

rovnice incidenční nadplochy 2. stupně má zde tvar $\Sigma a_k x_k^2 = 0$.[5])

Polárnost v S_r, jejíž rovnice $\Sigma a_{ik} x_i x'_k = 0$ má determinant $|a_{ik}| = 0$, sluje *zvrhlou* čili singulární, a to druhu h-tého (pro h od 1 do r), je-li $|a_{ik}|$ řádu $(r+1-h)$-tého. V takové polárnosti existuje (protože je involuční) jediný singulární prostor S_{h-1} s rovnicemi $\Sigma a_{ik} x_k = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r+1)$, jež se redukují na $r+1-h$ nezávislých. V polárnosti

[5]) Jednoduché vlastnosti polárnosti v S_r uvádí *G. A. Bordiga*, Corrispondenza di polarità negli spazi superiori, Atti Ist. Veneto (6) 3 (1885).

zvrhlé h-tého druhu odpovídá libovolnému bodu singulárního prostoru S_{h-1} každá nadrovina v S_r, bodu však ležícímu mimo S_{h-1} odpovídá určitá nadrovina, jdoucí prostorem S_{h-1} (táž všem bodům obsaženým v prostoru S_h, jenž onen bod spojuje se singulárním S_{h-1}). Autopolárný jehlan normální sestrojíme ve zvrhlé polárnosti obdobně jako v polárnosti nezvrhlé, volíce vrcholy P_1 až P_{r-h+1} jako tam, ostatní pak P_{r-h+2} až P_{r+1} libovolně v singulárním prostoru S_{h-1}, jímž právě polárné nadroviny k oněm prvním $r - h + 1$ vrcholům sdružené procházejí.[6]) Zvolíme-li autopolárný normální $(r + 1)$-roh za jehlan základní, dostanou rovnice zvrhlé polárnosti opět jednoduchý tvar $\varrho u_i = a_i x_i$, kde h z koeficientů a_i je nulových (a to posledních h, je-li singulárním prostorem S_{h-1} právě prostor, určený posledními h vrcholy základního jehlanu). Rovnice incidenční nadplochy V^2_{r-1} jest u zvrhlé polárnosti při základním jehlanu v autopolárném jehlanu jejím zase $\Sigma a_k x_k^2 = 0$, kde o koeficientech a_k platí, co bylo právě uvedeno.[7])[8])

e) V nulové korelaci leží každý bod v nadrovině k němu sdružené; a obráceně. Neboť u korelace $\varrho u'_h = \Sigma a_{hk} x_k$ jest podmínka incidence $\Sigma x_h u'_h = 0$ čili $\Sigma a_{hk} x_h x_k = 0$ při $a_{hk} = -a_{kh}$ (a $a_{hh} = 0$) splněna identicky; je-li obráceně při korelaci každý bod incidentní se sdruženou nadrovinou, platí $\Sigma a_{hk} x_h x_k = 0$ identicky a proto $a_{hk} + a_{kh} = 0$.

Protože determinant korelace nulové $|a_{hk}|$ jest polosouměrný, jest při lichém $r + 1$, t. j. při sudém r roven nule (jsa obecně řádu r-tého): *Nulová korelace v prostoru o sudém počtu rozměrů jest zvrhlá* čili singulární (obecně druhu prvního); nulová korelace v prostoru s lichým počtem rozměrů jest buď nezvrhlá nebo zvrhlá.

Nulová korelace prostoru S_r indukuje v každém prostoru S_p (v S_r obsaženém) opět nulovou korelaci: bodu tohoto S_p odpovídá nadrovina jeho S_{p-1}, průsek nadroviny k bodu tomu v dané korelaci sdružené s prostorem S_p. Je-li p číslo sudé, jest tato indukovaná korelace zvrhlá obecně druhu 1., takže uvedené S_{p-1} procházejí jedním bodem, jenž tedy je průsečíkem prostoru S_p s prostorem k němu v dané korelaci nulové sdruženým S_{r-p-1}; je-li p číslo liché, nemají sdružené prostory S_p a S_{r-p-1} obecně společného bodu.

Obráceně je-li nulová korelace prostoru S_r nezvrhlá, musí býti r liché. Je-li nulová korelace v S_r zvrhlá druhu h-tého, musí býti $r - h$

---

[6]) Autopolárných jehlanů existuje ve zvrhlé polárnosti h-tého druhu prostoru S_r počet ∞^s, kde $s = \frac{1}{2}[r(r + 1) + h(h - 1)]$.

[7]) Z rovnic pro incidenční nadplochy polárnosti vyplývá, ovšem jen tehdy, připustíme-li projektivnosti a nadplochy o rovnicích s koeficienty reálnými i imaginárními, že všechny nezvrhlé polárnosti v S_r jsou projektivně totožny, rovněž všechny zvrhlé polárnosti téhož druhu.

[8]) O polárných jehlanech normálních jednají zejména *L. Berzolari*, Sui sistemi di $n + 1$ rette dello spazio ad n dimensioni, situate in posizione di Schläfli, Rendiconti Circolo mat. Palermo 20 (1905); *L. Brusotti*, Teoremi sulle piramidi di $n + 1$ vertici dello spazio ad n dimensioni, tamtéž.

číslo liché; neboť taková korelace, mající determinant řádu $(r + 1 - h)$-tého a jsouc involuční, má jediný singulární prostor S_{h-1}, jehož bodům odpovídají všechny nadroviny prostoru S_r, kdežto ve svazu s basí S_{h-1} existuje nezvrhlá korelace nulová (prostoru S_h odpovídá zde nadrovina, jež v uvažované korelaci je sdružena ke všem bodům tohoto S_h); a protože svaz ten je prostorem $(r - h)$-rozměrným, jest $r - h$ číslo liché.

Abychom nalezli jednoduché rovnice nulové korelace nezvrhlé v S_r, tedy jen pro $r = 2n + 1$, zvolme základní bod O_1 se sdruženou nadrovinou α_1 kdekoli, základní bod O_2 položme do α_1, takže jeho sdružená nadrovina α_2 jde přímkou O_1O_2, dále zvolme základní bod O_3 v průseku nadrovin α_1, α_2 nezávislý na O_1, O_2, takže nadrovina k němu sdružená α_3 prochází rovinou $O_1O_2O_3$, atd., až bod O_{n+1} dáme do průseku $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ nezávisle na bodech předcházejících, takže sdružená nadrovina jeho α_{n+1} obsahuje body O_1 až O_{n+1}; prostor S_n, určený zvolenými body O_1 až O_{n+1}, jest spolu průsekem jejich nadrovin α_1 až α_{n+1}. Další základní body a nadroviny k nim sdružené zvolme takto: O_{n+2} položme do prostoru $S_{n+1} = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ (jenž obsahuje uvedený S_n a tedy body O_1 až O_{n+1}) nezávisle na bodech O_1 až O_{n+1}, ležící tedy mimo S_n a proto mimo α_{n+1}; sdružená nadrovina jeho α_{n+2}, jdoucí ovšem bodem O_{n+2}, prochází také body O_1 až O_n (α_{n+1} body O_1 až O_{n+1}, α_1 až α_n body O_1 až O_{n+2}). Bod O_{n+3} zvolme v prostoru $S_{n+2} = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ (jenž obsahuje S_{n+1} a tedy body O_1 až O_{n+2}) nezávisle na S_{n+1}, tedy mimo α_n, ležící však v průseku nadrovin α_{n+1} a α_{n+2} (což je možno, protože $\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}$ protíná S_{n+2} v prostoru S_n, jenž není obsažen v S_{n+1}, ježto by jinak nadroviny α_1 až α_{n+2} procházely týmž S_n a nebyly nezávislé proti volbě, podle níž O_1 až O_{n+1} jsou nezávislé); sdružená nadrovina α_{n+3}, vedená bodem O_{n+3}, jde body O_1 až O_{n-1} a body O_{n+1}, O_{n+2} (α_{n+2} body O_1 až O_n a O_{n+2}, O_{n+3}, α_{n+1} body O_1 až O_{n+1} a O_{n+3}, α_n body O_1 až O_{n+2}, α_1 až α_{n-1} body O_1 až O_{n+3}). Bod O_{n+4} zvolme v prostoru $S_{n+3} = \alpha_1\alpha_2 \ldots \ldots \alpha_{n-2}$ (jenž obsahuje S_{n+2} a tedy body O_1 až O_{n+3}) nezávisle na S_{n+2}, tedy mimo α_{n-1}, avšak v průseku nadrovin α_n, α_{n+1}, α_{n+2} a α_{n+3} (je to možno, protože tento prostor $\alpha_n \ldots \alpha_{n+3}$ protíná S_{n+3} v prostoru S_{n-1}, jenž není obsažen v S_{n+2}, ježto by jinak nadroviny α_1 až α_{n+3} procházely týmž S_{n-1} a nebyly nezávislé, ač O_1 až O_{n+3} byly jako nezávislé zvoleny); sdružená nadrovina α_{n+4}, jdoucí ovšem bodem O_{n+4}, prochází body O_1 až O_{n-2} a body O_n až O_{n+3} (α_{n+3} body O_1 až O_{n-1} a O_{n+1} až O_{n+4}, α_{n+2} body O_1 až O_n a O_{n+2} až O_{n+4}, α_{n+1} body O_1 až O_{n+1} a O_{n+3}, O_{n+4}, α_n body O_1 až O_{n+2} a O_{n+4}, α_{n-1} body O_1 až O_{n+3}, α_1 až α_{n-2} body O_1 až O_{n+4}). Tímto postupem dojdeme konečně k nadrovině α_{2n+2}, sdružené k bodu O_{2n+2} (zvolenému na $S_1 = \alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_{2n+1}$), jež prochází všemi body O_k vyjma O_1, při čemž α_{2n+1} prochází všemi body O_k vyjma O_2, α_{2n} všemi body O_k vyjma O_3 atd.

Takto zvolený základní útvar $O_1O_2 \ldots O_{2n+2}$ soustavy souřadnic má stěny, jež jsou nadrovinami sdruženými k jeho vrcholům tak, že $\omega_k = \alpha_{2n+3-k}$; v této soustavě má nulová korelace rovnice tvaru

$$\varrho u_1 = a_1 x_{2n+2},\ \varrho u_2 = a_2 x_{2n+1},\ \ldots,\ \varrho u_{n+1} = a_{n+1} x_{n+2},$$
$$\varrho u_{n+2} = -a_{n+1} x_{n+1},\ \ldots,\ \varrho u_{2n+1} = -a_2 x_2,\ \varrho u_{2n+2} = -a_1 x_1.$$

Pro případ, že nulová korelace v S_r je zvrhlá druhu h-tého, můžeme (vzhledem k hořejšímu) položiti $r - h = 2n + 1$. Je-li S_{h-1} singulární prostor této korelace, existuje ve svazu s basí S_{h-1} nulová korelace nezvrhlá; nezvrhlá jest tedy také nulová korelace, indukovaná v prostoru S_{r-h}, na tomto S_{h-1} nezávislém, při níž si odpovídají průseky S_0 a S_{r-h-1} prostoru S_{r-h} s prostory S_h a S_{r-1} onoho svazu, v jeho korelaci sdruženými. Zvolíme-li v uvedeném S_{r-h} vrcholy O_1 až O_{2n+2} základního útvaru způsobem prve vylíčeným a v S_{h-1} ostatní vrcholy, dostaneme rovnice uvažované korelace nulové ve tvaru

$$\varrho u_1 = a_1 x_{2n+2},\ \varrho u_2 = a_2 x_{2n+1},\ \ldots,\ \varrho u_{2n+1} = -a_2 x_2,\ \varrho u_{2n+2} = -a_1 x_1,$$
$$\varrho u_{2n+3} = 0,\ \ldots,\ \varrho u_{r+1} = 0.$$

Konstanty (jejich poměry v počtu n) v rovnicích nezvrhlé nebo zvrhlé korelace nulové lze volbou jednotkového bodu nahraditi libovolnými čísly (spec. číslem 1).

Protože základní útvary souřadnic (vrcholy a jednotkový bod) při analytickém vyjádření dvou nulových korelací, obou nezvrhlých nebo obou zvrhlých téhož druhu, lze učiniti korespondujícími v kolineaci nebo v korelaci prostoru S_r, jsou všechny nezvrhlé korelace nulové, rovněž tak všechny zvrhlé téhož druhu projektivně totožny.[9])[10])

f) Přímky v prostoru S_r, spojující libovolný bod jeho (x_k) s kterýmkoli bodem (x'_k) nadroviny, sdružené k bodu tomu v dané korelaci nulové, tvoří soustavu, jež sluje *lineární komplex přímek* v S_r; soustava těchto přímek jest totiž $(2r-3)$-mocná (proti ∞^{2r-2} všech přímek v S_r), a přímky systému, jdoucí libovolným bodem, vyplňují lineární prostor S_{r-1}. Lineární komplex, příslušný k dané korelaci nulové, jest ovšem útvarem při ní invariantním.

Abychom nalezli pro lineární komplex, vytvořený přímkami, jež spojují body konjugované v dané nulové korelaci, vyjádření analy-

[9]) Ze dvou daných nezvrhlých korelací nulových lze jednu v druhou převésti ∞^q kolineacemi a tolikéž korelacemi, kde $q = \frac{1}{2}(r+1)(r+2)$. Neboť za předpokladu, že jedna ze dvou korelací těch je dána hořejší soustavou rovnic, můžeme druhou vyjádřiti týmiž rovnicemi uvedeným počtem voleb základního útvaru soustavy souřadnic: vrcholy $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}, O_{n+2}, \ldots, O_{2n+2}$ lze zvoliti kdekoli v prostoru o $2n+1$, $2n, \ldots, n+1$, $n+1, \ldots, 1$ rozměrech, jednotkový bod pak kdekoli v prostoru S_{2n+1}; proti tomu však stojí n daných poměrů konstant $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$.

[10]) Čtyrčlenné grupy involučních kolineací a korelací (4 případy) vyšetřil *A. del Re*, Sui gruppi completi di tre trasformazioni lineari involutorie negli spazî ad n dimensioni, Rendiconti Accad. Lincei Roma (4) 6_1 (1890).

tické, zvolme pro přímku spojující body (x_k) a (x'_k) homogenní souřadnice

$$p_{hk} = x_h x'_k - x_k x'_h;^{11})$$

protože pro body v nulové korelaci konjugované platí rovnice

$$\sum_{h,k} a_{hk} x_h x'_k = 0, \quad \text{kde } a_{kh} = -a_{hk},$$

dostáváme pro spojnici takových bodů rovnici

$$\sum_{h,k} a_{hk} p_{hk} = 0,$$

jež je tedy rovnicí lineárního komplexu, příslušného k dané korelaci nulové; obráceně lze ke každému komplexu nalézti nulovou korelaci, jejíž konjugované body komplex ten svými spojnicemi vytvořují.

Z počtu členů nalezené rovnice vysvítá, že lineární komplex je (obecně) určen

$$\binom{r+1}{2} - 1 = \frac{(r-1)(r+2)}{2}$$

svými přímkami.

V prostoru S_r o lichém počtu rozměrů, jehož nulová korelace je nezvrhlá, jest příslušný k ní lineární komplex obecný: s každým bodem prostoru S_r jsou incidentní jeho přímky, vyplňující prostor S_{r-1}. V prostoru S_r o sudém počtu rozměrů s nulovou korelací zvrhlou druhu 1. jest také příslušný lineární komplex zvrhlý (singulární, speciální): protože zde existuje singulární bod S_0, konjugovaný ke všem bodům prostoru S_r, patří všechny přímky prostoru S_r tímto bodem jdoucí lineárnímu komplexu. Přímky komplexu jdoucí jiným bodem X uvažovaného prostoru leží v prostoru S_{r-1}, jenž prochází oním bodem singulárním S_0; v témž S_{r-1} leží dále všechny přímky komplexu jdoucí libovolným bodem spojnice XS_0. Protože tedy každá přímka komplexu se z tohoto bodu S_0 promítá rovinou vyplněnou přímkami komplexu, vidíme, že se daný komplex ze singulárního bodu S_0 do nadroviny S_{r-1}, jím neprocházející, promítá v obecný komplex lineární, příslušný k nulové korelaci, indukované danou korelací v tomto S_{r-1}.[12])[13])

---

[11]) Počet těchto homogenních souřadnic přímky v S_r jest $\frac{1}{2}r(r+1)$, platí však o nich $\frac{1}{2}r(r+1) - 2(r-1) - 1 = \frac{1}{2}(r-1)(r-2)$ kvadratických relací.

[12]) Je-li nulová korelace prostoru S_r zvrhlá druhu h-tého (při r lichém nebo sudém) tak, že $r - h$ je číslo liché, existuje při ní singulární prostor S_{h-1} té vlastnosti, že všechny přímky prostoru S_r jej protínající patří do lineárního komplexu uvedené korelace. Je-li spec. tento singulární prostor $(r-2)$-rozměrný, vyčerpávají přímky jej protínající lineární komplex ke korelaci příslušný.

[13]) O lineárních komplexech přímek v S_r a jejich lineárních systémech pojednávají *G. A. Bordiga*, Complessi e sistemi lineari di raggi negli spazi superiori, Atti Ist. Veneto (6) 4 (1886); *G. Castelnuovo*, Ricerche di geometria

146. Nadplochy kvadratické a jejich svazky. *a) Nadplocha 2. stupně v S_r jest*, jak už bylo uvedeno, $(r-1)$-mocná *soustava bodů* (reálných nebo imaginárních), *jejichž souřadnice x_h vyhovují rovnici 2. stupně*, kterou lze psáti ve tvaru

$$\Sigma a_{hk} x_h x_k = 0,$$

kde $a_{kh} = a_{hk}$ a indexy h, k nabývají v součtu hodnot od 1 do $r+1$; jako bodová varieta $(r-1)$-rozměrná 2. stupně značí se krátce V^2_{r-1}. Nadplochu 2. stupně lze definovati také charakteristickou vlastností, že libovolná přímka má s ní dva body společné, nemá-li na ní všechny své body; přímka totiž, spojující dva body (x_h) a (x'_h) v S_r, má svůj bod o souřadnicích $x_h + \lambda x'_h$ s parametrem λ na uvažované nadploše vždy a jenom tehdy, vyhovuje-li λ rovnici

$$\lambda^2 . \Sigma a_{hk} x'_h x'_k + 2\lambda . \Sigma a_{hk} x'_h x_k + \Sigma a_{hk} x_h x_k = 0,$$

jež buď dává svými kořeny dva průsečíky přímky té s nadplochou nebo (má-li více než dva kořeny) svědčí, že uvedená přímka leží celá na V^2_{r-1}.

Duálně se definuje nadplocha 2. třídy v S_r jako $(r-1)$-mocná soustava nadrovin (u_h) s rovnicí $\Sigma a_{hk} u_h u_k = 0$ (kde opět $a_{kh} = a_{hk}$ a h, k se mění od 1 do $r+1$); libovolným prostorem S_{r-2} procházejí dvě nadroviny této nadplochy nebo patří nadploše všechny nadroviny jednomocného svazku s basí S_{r-2}.

Rovnice nadplochy 2. stupně má $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$ členů a tedy koeficientů a_{hk} obecně různých; protože tyto koeficienty jsou v rovnici obsaženy způsobem lineárním a homogenním, tvoří všechny nadplochy 2. stupně v S_r lineární systém o $\frac{1}{2}(r+1)(r+2) - 1 = \frac{1}{2}r(r+3)$ rozměrech. *Jest* tedy *nadplocha 2. stupně v S_r určena* $\frac{1}{2}r(r+3)$ závislými podmínkami lineárními, zejména $\frac{1}{2}r(r+3)$ *body obecně položenými*.

Nadplocha 2. stupně V^2_{r-1} *jest prostorem S_p*, jenž nepatří nadploše, *proťata* opět *v nadploše 2. stupně V^2_{p-1}*; neboť to platí o prostoru, určeném $p+1$ vrcholy základního jehlanu souřadnic (třebas o prostoru $O_1 O_2 \ldots O_{p+1}$ s rovnicemi $x_{p+2} = 0,\ x_{p+3} = 0, \ldots, x_{r+1} = 0$).

Nadplocha 2. stupně sluje *pravá* (nezvrhlá), jestliže determinant ze součinitelů a_{hk} její rovnice jest různý od nuly; sluje *zvrhlá*, je-li $|a_{hk}| = 0$, určitěji zvrhlá *h-tého druhu* (h-násobně, v h-tém stupni, pro h od 1 do r), je-li determinant $|a_{hk}|$ řádu $(r+1-h)$-tého.

Nadplocha 2. stupně V^2_{r-1} *určuje polárnost* prostoru S_r, nezvrhlou nebo zvrhlou h-tého druhu podle toho, je-li takovou V^2_{r-1}; a obráceně

---

della retta nello spazio a quattro dimensioni, Atti Ist. Veneto (7) 2 (1891); *S. Kantor*, Theorie der linearen Strahlencomplexe im Raume von r Dimensionen, Journal r. a. Math. 118 (1897); *F. Palatini*, Sui complessi lineari di rette negli iperspazi, Giornale mat. 41 (1903); *S. Kantor*, Die linearen Systeme linearer Strahlencomplexe im R_r, Sitzungsberichte Akad. Wien 112 (1903).

polárnost v S_r určuje nadplochu V^2_{r-1}. Hlavní polárné vlastnosti nadplochy V^2_{r-1} byly už uvedeny při úvaze o involuční korelaci polárné; budiž jen vytčeno, že v polárnosti, nadplochou $\Sigma a_{hk}x_hx_k = 0$ stanovené, přísluší k bodu (x_h), svému *pólu*, *polárná nadrovina* o souřadnicích $u_h = \Sigma a_{hk}x_k$ (jež jsou polovicemi parciálních derivací levé strany rovnice pro nadplochu V^2_{r-1} podle x_h).

Je-li V^2_{r-1} pravá, přísluší ke každému bodu jejímu (x_h) (jako polárná nadrovina) *nadrovina tečná*, vytvořená přímkami, jež mají s nadplochou v tomto bodě po dvou společných bodech splývajících (tečny nadplochy v bodě tom) nebo leží celé na této nadploše; tečná nadrovina nadplochy V^2_{r-1} v bodě (x_h) obsahuje tedy všechny prostory ležící na V^2_{r-1} a bodem tím jdoucí. Tečná nadrovina nadplochy $\Sigma a_{hk}x_hx_k = 0$ v dotyčném bodě (x_h) má rovnici (v souřadnicích ξ_h) $\Sigma a_{hk}x_h\xi_k = 0$.

Z věty o vzájemné poloze dvou bodů a jejich polárných nadrovin plyne, že tečné nadroviny nadplochy V^2_{r-1}, jež procházejí bodem v S_r, (a tedy tečny z bodu toho k V^2_{r-1} vedené) mají své dotyčné body v polárné nadrovině tohoto bodu, vyplňujíce nadplochu V^2_{r-2}, průsek oné nadroviny S_{r-1} s danou V^2_{r-1}.

Jak bylo u polárnosti zjištěno, tvoří tečné nadroviny nadplochy 2. stupně (polárné nadroviny jejích bodů) nadplochu 2. třídy; duálně dotyčné body nadrovin nadplochy 2. třídy (póly těchto nadrovin) tvoří nadplochu 2. stupně; lze tedy nadplochu 2. stupně a 2. třídy (stručně kvadratickou nadplochu) pokládati za útvar soběduální.

Nadplocha 2. stupně V^2_{r-1}, h-násobně zvrhlá, o rovnici $\Sigma a_{ik}x_ix_k = 0$, jejíž determinant je tedy řádu $(r + 1 - h)$-tého, má singulární prostor S_{h-1} s rovnicemi $\Sigma a_{ik}x_k = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r + 1)$, jež se redukují na $r + 1 - h$ nezávislých; každá přímka totiž, jdoucí libovolným bodem (x_i) tohoto prostoru a bodem (x'_i) mimo něj zvoleným, má tam s nadplochou V^2_{r-1} dva splývající body společné nebo leží celá na V^2_{r-1} podle toho, je-li (x'_i) mimo V^2_{r-1} nebo na ní (jak vyplývá z hořejší rovnice pro λ). Sluje proto prostor ten S_{h-1} také *dvojným prostorem* nadplochy V^2_{r-1} a zvrhlá V^2_{r-1} *kvadratickým kuželem druhu h-tého*. Z uvedeného plyne, že každý prostor S_h, spojující bod kvadratického kužele V^2_{r-1} s dvojným prostorem jeho S_{h-1}, leží celý na této nadploše; ve všech bodech takového S_h má kužel V^2_{r-1} tutéž nadrovinu tečnou, jež prostor S_h obsahuje.[1])

[1]) Nadploch kvadratických dotýkají se více méně už nejstarší práce z geometrie polydimensionální. Soustavně a obšírně je vyšetřuje *C. Segre*, Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, Memorie Accad. Torino (2) 36 (1884); také *E. Bertini*, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, p. 136 a n. O nadploše V_3^2 v S_4 pojednává *M. H. Sznyter*, The hypersurface of the second degree in fourdimensional space, Publications univ. California 2 (1924); její konstrukci podává *V. Hlavatý*, Sestrojení kvadratické variety ze 14 bodů ve čtyřrozměrném prostoru, Rozpravy Čes. akad. 31 (1922).

b) Nadplocha 2. stupně V^2_{r-1} má v soustavě souřadnic, jejímž základním jehlanem jest jehlan vůči ní autopolárný, rovnici (tvaru *kanonického*)

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{r+1} x_{r+1}^2 = 0;$$

je-li V^2_{r-1} zvrhlá v h-tém stupni, jest h ze součinitelů a_k rovno nule.

Vyšetřme, kolik různých typů má V^2_{r-1} s reálnými koeficienty. K tomu cíli vezměme v úvahu dvě nadplochy 2. stupně, pravé nebo zvrhlé v témž stupni, jejichž rovnice vztahované k reálným útvarům základním, rozlišíme-li členy kladné a záporné, mají tvar

$$\begin{aligned} a_1 x_1^2 + \ldots + a_{p+1} x_{p+1}^2 - a'_{p+2} x_{p+2}^2 - \ldots - a'_{r+1} x_{r+1}^2 &= 0, \\ b_1 y_1^2 + \ldots + b_{q+1} y_{q+1}^2 - b'_{q+2} y_{q+2}^2 - \ldots - b'_{r+1} y_{r+1}^2 &= 0, \end{aligned}$$

kde koeficienty a_k, a'_k, b_k, b'_k jsou reálná čísla kladná a buď všechna od nuly různá (jsou-li nadplochy pravé) nebo $r + 1 - h$ nenulových (jsou-li nadplochy h-násobně zvrhlé). Podle důležité věty algebraické platí, že lze-li (reálnou) transformací od jedné z uvedených dvou rovnic přejíti k druhé, musí počet kladných členů v obou rovnicích a rovněž počet záporných členů býti týž; musí tedy býti $q = p$ a ovšem $r - q = r - p$. Neboť napíšeme-li, že levé strany obou rovnic těch jsou identicky sobě rovny a dáme-li záporné členy druhé i prvé rovnice ke kladným členům prvé resp. druhé, měli bychom při $q \neq p$ na jedné straně méně než $r + 1$ členů; existoval by tedy reálný bod, pro jehož souřadnice by výraz na této straně byl roven nule, rovněž tedy výraz na straně druhé, takže by bod ten (při kladných členech) musel míti všechny souřadnice nulové. Je-li tedy možno od jedné ze dvou nadploch 2. stupně přejíti reálnou projektivností ke druhé, mají jejich kanonické rovnice s reálnými součiniteli týž počet kladných členů a týž počet členů záporných; věta tato platí ovšem také pro dvě rovnice, vyjadřující tutéž nadplochu V^2_{r-1}. Obráceně při stejném počtu součinitelů téhož znaménka v kanonických rovnicích dvou nadploch 2. stupně (pravých nebo zvrhlých, s reálnými koeficienty) nebo ve dvou kanonických rovnicích téže nadplochy V^2_{r-1} lze reálnou projektivností přejíti od jedné ke druhé.

Protože z $r + 1$ členů v rovnici pravé nadplochy V^2_{r-1} může býti kladných jeden až $\frac{1}{2}r$ při r sudém, jeden až $\frac{1}{2}(r+1)$ při r lichém a ostatní členy záporné, kdežto vyšší počet členů kladných se změnou znamének v celé rovnici převádí na některý z uvedených, vyskytuje se $\frac{1}{2}r$ resp. $\frac{1}{2}(r+1)$ různých V^2_{r-1} reálných; k tomu přistupuje V^2_{r-1} jejíž rovnice má všechny koeficienty téhož znaménka, mající však všechny body (po dvou konjugovaně) imaginární. *Existuje* tedy *v* S_r *při r sudém* $\frac{1}{2}r + 1$, *při r lichém* $\frac{1}{2}(r+1) + 1$ *pravých nadploch kvadratických* s rovnicemi o koeficientech reálných, *jež jsou projektivně různé* (t. j. jichž nelze ztotožniti reálnou projektivností).

Abychom poznali geometrický význam hořejší věty o možnosti transformace jedné ze dvou kvadratických nadploch v druhou, všimněme

si průsečíků pravé nadplochy V_{r-1}^2, dané rovnicí

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{p+1} x_{p+1}^2 - a'_{p+2} x_{p+2}^2 - \ldots - a'_r x_r^2 - a'_{r+1} x_{r+1}^2 = 0,$$

kde $p + 1 \leq r - p$, s nezávislými spojnicemi vrcholů základního jehlanu, třebas s přímkami $O_1 O_{p+2}$, $O_2 O_{p+3}, \ldots, O_{p+1} O_{2p+2}$. Tyto dvojice průsečíků jsou všechny reálné; dáme-li z každé dvojice po jednom bodě do skupiny $p + 1$ bodů, obdržíme body nezávislé a po dvou vzhledem k nadploše V_{r-1}^2 (v její polárnosti) konjugované. Taková skupina $p + 1$ bodů určuje prostor S_p na V_{r-1}^2 ležící; neboť leží-li dva body, konjugované v polárnosti nadplochy V_{r-1}^2, na této nadploše, leží na ní celá přímka body ty spojující; také rovina položená třemi body po dvou vzhledem k V_{r-1}^2 konjugovanými leží na V_{r-1}^2, protože to platí o každé přímce této roviny, obsahující totiž tři body nadplochy V_{r-1}^2; atd. Na V_{r-1}^2 nemůže však ležeti reálný prostor o větším počtu než p rozměrů; neboť takový S_{p+1} protínal by prostor S_{r-p-1}, určený body O_{p+2} až O_{r+1} v reálném bodě, jehož tam však V_{r-1}^2 nemá (její průsek s uvedeným prostorem základního jehlanu je totiž $a'_{p+2} x_{p+2}^2 + \ldots + a'_{r+1} x_{r+1}^2 = 0$).

Obsahuje tedy *pravá* reálná *nadplocha* V_{r-1}^2, *jejíž kanonická rovnice má* $p + 1$ *členů téhož znaménka*, kde $p + 1$ je menší z obou čísel udávajících počet členů kladných a počet záporných v této rovnici nebo (při jich rovnosti) jedno z nich, *nejvyšší prostory* (s největším počtem rozměrů) *o* p *rozměrech*. A vzhledem k podmínce pro převod kvadratické nadplochy v jinou platí: *Ze dvou* reálných *pravých nadploch kvadratických lze reálnou projektivností převésti jednu v druhou tehdy a jen tehdy, obsahují-li obě nejvyšší prostory o témž počtu rozměrů.*

Zvrhlé nadplochy 2. stupně v S_r lze posuzovati podle pravých kvadratických nadploch v prostorech nižších. Zvolíme-li základní jehlan soustavy souřadnic v autopolárném jehlanu této V_{r-1}^2, má její rovnice tvar (kanonický) s $r + 1 - h$ členy

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{r-h+1} x_{r-h+1}^2 = 0,$$

při čemž dvojným prostorem jejím jest prostor určený posledními h vrcholy O_{r-h+2} až O_{r+1} základního jehlanu. Odtud vysvítá, že *kvadratický kužel druhu* h*-tého jest průmětem pravé nadplochy 2. stupně* V_{r-h-1}^2 *v prostoru* $(r - h)$*-rozměrném obsažené z prostoru* $(h - 1)$*-rozměrného*, na onom S_{r-h} nezávislého.[2]) Reálný kvadratický kužel h-tého druhu má

[2]) Totéž plyne z polárnosti, určené v S_r h-násobně zvrhlou nadplochou 2. stupně V_{r-1}^2 se singulárním prostorem S_{h-1}: podle vlastnosti zvrhlé korelace je polárnost ve svazu s basí S_{h-1} nezvrhlá, takže jest nezvrhlá také polárnost v prostoru S_{r-h}, jenž, jsa na onom S_{h-1} nezávislý, svaz ten protíná; incidenční nadplochou této polárnosti v S_{r-h} jest tedy pravá V_{r-h-1}^2, jež je průsekem zvrhlé V_{r-1}^2 s prostorem S_{r-h} (v polárnosti prostoru S_{r-h} odpovídá totiž každému bodu průsek S_{r-h-1} prostoru S_{r-h} s polárnou nadrovinou, k němu ve zvrhlé polárnosti nadplochy V_{r-1}^2 sdruženou).

nejvyšší (reálné) prostory o $h + p$ rozměrech, je-li $p + 1$ menší z čísel, udávajících v kanonické rovnici kužele počet členů téhož znaménka.[3])

c) Je-li dána pravá nadplocha 2. stupně V^2_{r-1} v S_r, slují, jak už bylo uvedeno u involuční korelace vůbec, dva prostory S_p a S_{r-p-1} *polárné* (konjugované) vzhledem k V^2_{r-1}, jestliže jeden a tedy také druhý je basí svazku polárných nadrovin, příslušných vzhledem k V^2_{r-1} k bodům druhého, resp. prvého; jest tedy každý bod jednoho i druhého ze dvou polárných prostorů (každá nadrovina jdoucí jedním nebo druhým) konjugován ke každému bodu druhého resp. prvního (konjugována ke každé nadrovině jdoucí druhým resp. prvním). Je patrno, že obsahuje-li prostor S_p jiný prostor S_q, jest prostor k prvému polárný S_{r-p-1} obsažen v prostoru polárném k druhému S_{r-q-1}.

Protože přímka, protínající dva prostory vzhledem k V^2_{r-1} polárné (v bodech konjugovaných), protíná nadplochu V^2_{r-1} ve dvou bodech, které s oněmi dvěma průsečíky tvoří harmonickou čtveřinu, *jest nadplocha* V^2_{r-1} *invariantní při každé involuční kolineaci, jež má své hlavní prostory ve dvou prostorech vzhledem k ní polárných.*

Libovolný prostor S_k protíná nadplochu V^2_{r-1} v nadploše V^2_{k-1} tak, že tečné nadroviny nadplochy dané V^2_{r-1} v bodech průsečné V^2_{k-1} procházejí prostorem S_{r-k-1}, k onomu S_k vzhledem k V^2_{r-1} polárným (a obráceně); poznáváme to odtud, že tečná nadrovina kvadratické nadplochy jest polárnou nadrovinou svého bodu dotyčného, máme-li zřetel ke vzájemnosti mezi prostory polárnými.

Jestliže dva prostory S_p a S_{r-p-1}, vzhledem k V^2_{r-1} polárné, se protínají v prostoru S_m, leží S_m na V^2_{r-1} a jest dvojným prostorem průsečné nadplochy V^2_{p-1} a V^2_{r-p-2} nadplochy dané s jedním resp. druhým oním prostorem; obráceně je-li S_m dvojným prostorem průsečné nadplochy V^2_{p-1} dané V^2_{r-1} s prostorem S_p, leží v prostoru S_{r-p-1} k tomuto polárném. Neboť v prvním případě je každý bod průsečného prostoru S_m k době samému konjugován a leží proto na V^2_{r-1}; jest však také konjugován ke každému bodu jednoho i druhého z daných dvou prostorů polárných vzhledem k V^2_{r-1}, tedy i vzhledem k nadploše průsečné, takže je dvojným prostorem této nadplochy; tyto úsudky lze obrátiti.

Prostor S_p, jenž danou nadplochu V^2_{r-1} protíná v nadploše V^2_{p-1} s dvojným prostorem S_m nebo S_m obsahujícím, sluje *tečným prostorem dané nadplochy v dotyčném* S_m; prostor S_m jest totiž podle předešlého průsekem prostoru S_p s polárným prostorem jeho S_{r-p-1} nebo v průseku jejich obsažen, a každá přímka prostoru S_p, jdoucí bodem prostoru S_m, buď se v bodě tom nadplochy dané dotýká nebo v ní leží (protože leží v tečné nadrovině onoho bodu). O počtu rozměrů tohoto S_m platí

[3]) Vlastnosti a klasifikaci nadploch 2. stupně se stanoviska metrického podává *W. A. Wythoff*, The classification of quadrics in n-dimensional space, Nieuw Archief (2) 4 (1899); podle toho také *E. Jouffret*, Mélanges de géométrie à quatre dimensions (1906).

nutně jak $m \leqq p$, tak $m \leqq r - p - 1$ (na př. S_{r-1} může se nadplochy V_{r-1}^2 dotýkati nejvýš v bodě, S_{r-2} nejvýše v přímce atd.). Protože tečné nadroviny všech bodů prostoru S_m na V_{r-1}^2 ležícího obsahují všechny prostory nadplochy V_{r-1}^2, jež prostorem S_m procházejí, obsahuje tyto prostory také polárný (tečný) prostor S_{r-m-1} prostoru S_m. *Prostor S_p jest tečným prostorem nadplochy V_{r-1}^2 v* (dotyčném) *prostoru S_m tehdy a jen tehdy, jestliže prostorem S_m prochází a v polárném prostoru jeho S_{r-m-1} jest obsažen.* Neboť splňuje-li S_p tyto podmínky, leží jeho polárný prostor S_{r-p-1} v S_{r-m-1} a prochází prostorem S_m; a procházejí-li S_p, S_{r-p-1} prostorem S_m, leží polárné prostory jejich S_{r-p-1}, S_p v prostoru S_{r-m-1}.

Abychom vyšetřili počet rozměrů prostorů S_m na V_{r-1}^2 ležících, všimněme si, že každý takový S_m musí býti obsažen ve svém polárném prostoru S_{r-m-1}, takže jest $m \leqq r - m - 1$ a proto $m \leqq \frac{1}{2}r - 1$ při r sudém a $m \leqq \frac{1}{2}(r-1)$ při r lichém. Zjistíme, že uvedené horní meze v obou případech lze dosíci: Zvolme na V_{r-1}^2 bod X_1; jeho polárná nadrovina S_{r-1} (tečná nadrovina nadplochy V_{r-1}^2 v X_1) prochází tímto bodem a protíná V_{r-1}^2 v nadploše V_{r-2}^2 s dvojným bodem X_1. Zvolme dále na V_{r-2}^2 bod X_2, od X_1 různý; přímka X_1X_2 leží na V_{r-1}^2 a je dvojnou přímkou nadplochy V_{r-3}^2, v níž polárný prostor S_{r-2} přímky té danou nadplochu protíná. Zvolme dále na V_{r-3}^2 bod X_3, na X_1 a X_2 nezávislý; rovina $X_1X_2X_3$ leží na V_{r-1}^2 a je dvojnou rovinou nadplochy V_{r-4}^2, ve které polárný prostor S_{r-3} roviny té nadplochu V_{r-1}^2 protíná. Atd. Je-li $r = 2q$, lze tak pokračovati až k bodu q-tému, takže obdržíme *prostor $(q-1)$-rozměrný* na V_{r-1}^2 ležící, jehož polárný prostor S_q protíná V_{r-1}^2 v nadploše V_{q-1}^2, sestávající z dvojnásobného S_{q-1}; dalšího bodu na V_{q-1}^2 na předešlých nezávislého není. Je-li $r = 2q + 1$ a jestliže jsme dospěli k prostoru S_{q-1} na V_{r-1}^2 ležícímu, protíná jeho polárný prostor S_{q+1} danou V_{r-1}^2 v nadploše $V_q{}^2$ s oním S_{q-1} jako dvojným, takže se tato $V_q{}^2$ skládá ze dvou prostorů S_q se společným S_{q-1}; zde lze ještě v jednom S_q zvoliti bod $(q+1)$-ní na předešlých nezávislý, jenž s body dříve zvolenými *určuje prostor q-rozměrný* na V_{r-1}^2 ležící. Tento S_q je autopolárný.[4])[5])

[4]) O soustavách prostorů s největším počtem rozměrů na V_{r-1}^2 platí zejména: Prostory největšího počtu rozměrů S_{q-1} na V_{2q-1}^3 v S_{2q} tvoří jediný systém o $\frac{1}{2}q(q+1)$ rozměrech, kdežto prostory ty S_q na V_{2q}^3 v S_{2q+1} tvoří dva různé systémy $\frac{1}{2}q(q+1)$-mocné. V tomto druhém případě dva obecně položené S_q se protínají v jednom bodě (po případě v prostoru o sudém počtu rozměrů), patří-li téže soustavě při q sudém nebo různým soustavám při q lichém, neprotínají se však (po případě se protínají v prostoru o lichém počtu rozměrů), patří-li různým soustavám při q sudém nebo téže soustavě při q lichém. Viz *E. Bertini*, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, p. 154 a n.

[5]) Počet kvadratických nadploch, jež vyhovují daným podmínkám dotyku s prostory (lineárními), určoval zejména *H. Schubert*, Allgemeine Anzahlfunctionen für Kegelschnitte, Flächen und Räumen zweiten Grades in n Dimensionen, Math. Annalen 45 (1894).

d) Nadplocha 2. stupně vytvoří se průseky korespondujících prostorů ve dvou korelativních svazech prostoru S_r. Dejme tomu totiž, že v určité korelaci dvou svazů s basemi S_p a S'_p odpovídá $(p+1)$-rozměrnému prostoru jednoho $(r-1)$-rozměrná nadrovina v druhém; vyšetříme, jaký útvar vznikne z průsečných p-rozměrných prostorů těchto sdružených dvojic.

Jsou-li $\varrho_h = 0$ pro $h = 1, 2, \ldots, r-p$ rovnice $r-p$ nezávislých nadrovin prostoru S_r ve svazu s basí S_p (jejichž průsekem je právě tento prostor) a obdobně $\sigma_h = 0$ rovnice téhož počtu nezávislých nadrovin ve svazu s basí S'_p, jsou všechny nadroviny prvého resp. druhého svazu vyjádřeny rovnicemi

$$\lambda_1\varrho_1 + \lambda_2\varrho_2 + \ldots + \lambda_{r-p}\varrho_{r-p} = 0,$$
$$\nu_1\sigma_1 + \nu_2\sigma_2 + \ldots + \nu_{r-p}\sigma_{r-p} = 0,$$

při čemž každou skupinou hodnot $r-p$ homogenních parametrů λ_h resp. ν_h jest určena nadrovina $(r-p-1)$-rozměrného svazu S_p resp. S'_p.

Korelace těchto svazů jest dána bilineární rovnicí mezi parametry λ_h a ν_h, totiž

$$\Sigma a_{hk}\lambda_h\nu_k = 0,$$

kde h, k se v součtu mění od 1 do $r-p$. Leží-li bod (x_i) v průsečném prostoru dvou prostorů v uvedené korelaci sdružených, odpovídá prostoru S_{p+1}, jenž tento bod spojuje s basí S_p, ve svazu S'_p nadrovina S'_{r-1}, jdoucí rovněž bodem (x_i); vložme souřadnice x_i bodu toho do výrazů ϱ_h a σ_h hořejších rovnic, takže parametry λ_h a ν_h jsou těmito rovnicemi vázány. Má-li zmíněná nadrovina S'_{r-1} parametry ν_h, vyhovující tedy rovnici $\Sigma\nu_h\sigma_h = 0$ po uvedené substituci, mají všechny nadroviny, jež procházejí prostorem S_{p+1} k nadrovině té sdruženým, parametry λ_h, splňující jednak rovnici $\Sigma\lambda_h\varrho_h = 0$, jednak rovnici $\Sigma a_{hk}\lambda_h\nu_k = 0$ tak, že tyto obě rovnice jsou vzhledem k proměnným λ_h totožny. Odtud plyne

$$\mu\varrho_h = \Sigma a_{hk}\nu_k \quad (h = 1, 2, \ldots, r-p).$$

Vyloučíme-li veličiny $\mu, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{r-p}$ z rovnice $\Sigma\sigma_h\nu_h = 0$ a z $r-p$ rovnic právě získaných, obdržíme rovnici pro souřadnice všech bodů, ležících v průsečných prostorech prostorů v uvažované korelaci sdružených, ve tvaru

$$\begin{vmatrix} 0 & \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_{r-p} \\ \varrho_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,r-p} \\ \varrho_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,r-p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varrho_{r-p} & a_{r-p,1} & a_{r-p,2} & \ldots & a_{r-p,r-p} \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$\sum_{h,k} A_{hk}\varrho_h\sigma_k = 0,$$

kde A_{hk} je minor determinantu $|a_{hk}|$, příslušný k prvku jeho a_{hk}. Obráceně plyne, že všechny body, nalezené rovnici vyhovující, leží v uve-

dených prostorech průsečných. Protože formy ϱ_h a σ_h jsou lineární, vytvořují tedy průsečné prostory sdružených S_{p+1} a S'_{r-1} v korelativních svazech S_p resp. S'_p nadplochu 2. stupně; táž nadplocha je ovšem geometrickým místem průseku sdružených prostorů S_{r-1} v S_p a S'_{p+1} v S'_p. Base vytvořujících svazů S_p a S'_p patří nadploše tak vznikající.

Nadplocha V^2_{r-1} korelativními svazy vytvořená je pravá, jestliže base S_p a S'_p se neprotínají, což může nastati, je-li $2p - r < 0$ čili $p < \frac{1}{2}r$; jest (obecně) h-násobně zvrhlá, protínají-li se S_p a S'_p v S_{h-1}.[6])[7])

e) *Dvě* (různé) *nadplochy 2. stupně v S_r protínají se v $(r-2)$-rozměrné varietě 4. stupně*; neboť souřadnice bodů, společných dvěma kvadratickými nadplochám, musí vyhověti dvěma homogenním rovnicím 2. stupně o $r+1$ proměnných, a rovina obecně položená protíná dané nadplochy 2. stupně ve dvou kuželosečkách, jejichž čtyři společné body jsou průsečíky útvaru oběma nadplochám společného s onou rovinou. Tato průsečná varieta dvou kvadratických nadploch označuje se tedy V^4_{r-2}.

Všechny nadplochy 2. stupně, obsahující varietu V^4_{r-2}, ve které se dvě nadplochy o rovnicích

$$\sum_{h,k} a_{hk} x_h x_k = 0 \quad \text{a} \quad \sum_{h,k} b_{hk} x_h x_k = 0$$

protínají, tvoří *svazek nadploch 2. stupně* s rovnicí

$$\sum_{h,k} (a_{hk} + \lambda b_{hk})\, x_h x_k = 0,$$

jehož basí jest V^4_{r-2}. Každé hodnotě parametru λ přísluší jediná nadplocha svazku; tento svazek jest určen kterýmikoli dvěma svými (různými) členy.

---

[6]) O vytvoření (pravé nebo zvrhlé) nadplochy 2. stupně korelativními svazy pojednává syntheticky *A. da Porto*, Sulla generazione, per stelle reciproche, delle quadriche ad un numero qualunque di dimensioni, Giornale mat. 37 (1899).

[7]) Kvadratická nadplocha V^2_{r-1} v S_r je invariantní při s-mocné soustavě kolineací (t. zv. Hermiteových), kde $s = \frac{1}{2}r(r+1)$; je-li zvrhlá h-tého druhu, zvětšuje se toto číslo o $\frac{1}{2}h(h-1)$. Při r lichém převádějí kolineace tyto každý z obou systémů s největším počtem rozměrů na V^2_{r-1} buď v něj sama nebo v druhý systém. Kolineaci s invariantní nadplochou V^2_{r-1} lze rozložiti v r (nebo méně) involučních homologií (v případě však lichého r a kolineace 1. druhu obecně v $r+1$ takových homologií). O těchto kolineacích pojednávají zvl. *C. Segre*, Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale e particolarmente su quelle dello spazio ordinario considerate nella geometria della retta, Memorie Accad. Torino (2) 37 (1885); *E. Bertini*, Sulla scomposizione di certe omografie in omologie, Atti Accad. Torino 22 (1887); viz také (po stránce algebraické) *P. F. Smith*, On the linear transformations of a quadratic form into itself, Transactions Amer. Math. soc. 6 (1905).

O kvadratických nadplochách autopolárných pojednává krátce *P. del Pezzo*, Sulle quadriche ad $n-1$ dimensioni polari reciproche di sè stesse rispetto ad un' altra, Rendiconti Accad. Napoli 24 (1885).

Duálním útvarem ke svazku nadploch 2. stupně jest *řada nadploch 2. třídy;* její vlastnosti plynou ovšem duálností z vlastností svazku.

Předpokládejme nejprve, že svazek nadploch kvadratických není složen z nadploch zvrhlých.

Polárnosti dvou nadploch 2. stupně mají produktem kolineaci, jež rozhoduje o povaze svazku nadplochami těmi určeného.[8]) Protože determinant kolineace té jest totožný s determinantem obecné nadplochy uvažovaného svazku (až snad na znaménko parametru) a protože kořeny onoho určují hlavní prostory kolineace, kdežto kořeny tohoto stanoví dvojné prostory zvrhlých nadploch 2. stupně ve svazku obsažených, *jsou hlavní prostory kolineace*, produktu polárností obou nadploch svazek určujících, *dvojnými prostory zvrhlých nadploch svazku.* A dále jsou absolutní invarianty této kolineace dvojpoměry, jež ve svazku nadploch 2. stupně jsou určeny dvěma základními nadplochami a zvrhlými nadplochami svazku.

Z rovnice polárné nadroviny, příslušné k bodu (z_h) vzhledem k nadploše svazku, totiž z rovnice

$$\Sigma(a_{hk} + \lambda b_{hk})\, z_h x_k = 0$$

plyne, že polárné nadroviny libovolného bodu vzhledem k nadplochám svazku (nesplývají-li) tvoří svazek, projektivní se svazkem daným; jeho base S_{r-2} sluje polárným prostorem onoho bodu vzhledem k svazku nebo vzhledem k basi V^4_{r-2}. Jsou tedy svazky polárných nadrovin, příslušné k rozmanitým bodům prostoru, také navzájem projektivní. Dvojné body zvrhlých nadploch 2. stupně ve svazku obsažených (samodružné body kolineace, jež je produktem polárností dvou základních nadploch, a jenom tyto) mají vzhledem ke všem nadplochám svazku tutéž nadrovinu polárnou.

K libovolnému prostoru S_p přísluší vzhledem ke svazku nadploch 2. stupně jednomocná soustava polárných prostorů S_{r-p-1}, jež vytvořují $(r - p)$-rozměrnou varietu. Rovnice této variety V_{r-p} obdržíme, napíšeme-li rovnice polárných nadrovin, příslušných vzhledem k obecné nadploše uvažovaného svazku ke skupině $p + 1$ nezávislých bodů prostoru S_p, a vyloučíme-li z těchto rovnic parametr λ: Označíme-li levou stranu rovnice polárné nadroviny, příslušné k j-tému ze zmíněných

[8]) Z Weierstrassovy věty totiž, že nutnou a dostačující podmínkou toho, aby dvojici kvadratických forem $\Sigma a_{hk}x_h x_k$ a $\Sigma b_{hk}x_h x_k$ bylo lze lineární transformací s nenulovým determinantem převésti ve dvojici $\Sigma a'_{hk}x'_h x'_k$ a $\Sigma b'_{hk}x'_h x'_k$, jest rovnost elementárních dělitelů obou determinantů $|a_{hk} - \varrho b_{hk}|$ a $|a'_{hk} - \varrho b'_{hk}|$, vyplývá, že podmínkou možnosti projektivní transformace dvojice kvadratických nadploch v jinou dvojici takovou jest totožnost kolineace, jež je produktem polárností oněch dvou nadploch, s kolineací, resultující z polárností těchto. Viz *S. Medici*, Sulle omografie e correlazioni non singolari in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni, Giornale mat. 44 (1906).

bodů $(x_i^{(j)})$ vzhledem k nadploše $\Sigma a_{hk}x_hx_k=0$ a vzhledem k nadploše $\Sigma b_{hk}x_hx_k=0$ krátce $\alpha_j \equiv \Sigma a_{hk}x_h^{(j)}x_k$ resp. $\beta_j \equiv \Sigma b_{hk}x_h^{(j)}x_k$, mají uvedené nadroviny rovnice

$$\alpha_1 + \lambda\beta_1 = 0, \quad \alpha_2 + \lambda\beta_2 = 0, \ldots, \alpha_{p+1} + \lambda\beta_{p+1} = 0;$$

eliminací parametru λ dostaneme tedy p nezávislých rovnic obsažených v anulované matici

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_{p+1} \\ \beta_1 & \beta_2 \ldots \beta_{p+1} \end{matrix} \right\| = 0,$$

jež vyjadřují varietu V_{r-p}.

Majíce dále na zřeteli dvě rovnice

$$\varrho_1\alpha_1 + \varrho_2\alpha_2 + \ldots + \varrho_{p+1}\alpha_{p+1} = 0,$$
$$\varrho_1\beta_1 + \varrho_2\beta_2 + \ldots + \varrho_{p+1}\beta_{p+1} = 0,$$

jež při $p+1$ parametrech ϱ_j vyjadřují dva p-mocné svazky polárných nadrovin, příslušných k bodům prostoru S_p jednak vzhledem k první, jednak vzhledem k druhé základní nadploše uvažovaného svazku, s basí S'_{r-p-1} resp. S''_{r-p-1} (kteréžto base jsou polárné prostory prostoru S_p vzhledem k nadplochám těm), vidíme, že tyto dva svazky nadrovin jsou kolineární, pokládáme-li za sdružené dvě nadroviny jejich, příslušné k témuž bodu prostoru S_p; podle hořejších rovnic pro V_{r-p} pak poznáváme, že varieta V_{r-p} jest vytvořena také průseky dvojic prostorů $(r-p)$-rozměrných, sdružených v kolineárních svazech S'_{r-p-1} a S''_{r-p-1}.

Protneme-li uvedené oba svazy S'_{r-p-1} a S''_{r-p-1} prostorem S_p, na jejich basích nezávislým, vzniká v tomto S_p z uvedené kolineace svazů těch kolineace, jejíž samodružné body jsou průsečíky zvoleného S_p s varietou V_{r-p}. A protože těchto bodů samodružných jest (v obecném případě) $p+1$, jest varieta V_{r-p} proťata obecně položeným S_p v $p+1$ bodech čili jest stupně $(p+1)$-ho a může se označiti V_{r-p}^{p+1}.[9])[10])

[9]) Tato varieta tvořená polárnými prostory, jež příslušejí vzhledem ke svazku nadploch 2. stupně k pevnému S_p, jest spec. pro $p = r-1$, tedy při zvoleném S_{r-1} t. zv. racionální normální křivka V_1^r prostoru S_r.

[10]) Svazky kvadratických nadploch v S_r vyšetřovali zejména *C. Segre*, Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, Memorie Accad. Torino (2) 36 (1884); *C. Segre*, Sur les invariants simultanés de deux formes quadratiques, Math. Annalen 24 (1884); *C. Rosati*, Sugli spazi lineari di dimensione massima contenuti in una quartica base di un fascio di quadriche in uno spazio a dimensioni pari, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 32 (1899); *L. Brusotti*, Ricerche sui fasci di quadriche in uno spazio ad n dimensioni, Rendiconti Circolo mat. Palermo 23 (1907); *P. Predella*, Ricerche sulle coppie di quadriche di uno spazio ad n dimensioni, Atti Accad. Torino 42 (1907); *K. Rohn*, Der Büschel von Flächen zweiten Grades im Raume S_n und ein $(n+1)$-Flach in besonderer Beziehung zu ihm, Abhandlungen Ges. Wiss. Leipzig 31 (1909); *E. G. Togliatti*, Questioni di forma e di realità relative a fasci di quadriche in uno spazio ad N dimensioni, Annali mat. (3) 30 (1921); viz také *E. Bertini*, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, p. 167 a n.

f) Všimněme si ještě svazku kvadratických kuželů, tedy nadploch 2. stupně h-násobně zvrhlých v S_r.

Můžeme se omeziti na případ, kdy kterékoli dva kužele svazku mají své dvojné prostory nezávislé. Neboť jestliže dvojné prostory $(h-1)$-rozměrné dvou kuželů h-tého druhu ve svazku se protínají v prostoru S_{g-1} (v němž se tedy protínají dvojné prostory všech kuželů svazku), stačí protíti je prostorem S_{r-g} na onom S_{g-1} nezávislým: obdržíme svazek, jehož nadplochy jsou obecně jen $(h-g)$-násobně zvrhlé a mají své dvojné prostory bez společných bodů.

Dejme tomu tedy, že obecnou nadplochou uvažovaného svazku jest kužel, jehož dvojný prostor S_{h-1} není proťat dvojným prostorem jiného kužele svazku. Dvojné prostory všech kuželů svazku vytvořují h-rozměrnou varietu V_h; prostor nejmenšího počtu rozměrů, v němž je tato V_h obsažena, budiž S_p. K bodu variety V_h přísluší vzhledem ke všem kuželům svazku táž polární nadrovina, jež prochází všemi dvojnými prostory jejich, takže obsahuje varietu V_h a tedy také prostor S_p. Protože pak S_p má vzhledem ke každému kuželi svazku týž polární prostor $S_{r+h-p-1}$, obsahující S_p, leží tento S_p na všech kuželech svazku; a uvedený $S_{r+h-p-1}$ je tečným prostorem všech kuželů svazku ve společném S_p. *Skládá se* tedy *svazek kuželů h-tého druhu z kuželů, jež mají společný prostor* S_p *jdoucí dvojnými prostory jejich a v něm společný prostor tečný* $S_{r+h-p-1}$.

Poznali jsme, že nutnou podmínkou toho, aby dvě nadplochy 2. stupně h-násobně zvrhlé určovaly svazek složený z takových kuželů, jest existence společného prostoru S_p (jdoucího jejich prostory dvojnými) a v něm společného tečného prostoru $S_{r+h-p-1}$; tato podmínka je také dostačující. Neboť vyskytují-li se takové dva prostory u dvou kuželů daných, mají všechny kvadratické nadplochy svazku jimi určeného společný tento S_p a tečný $S_{r+h-p-1}$ podél něho, takže jsou zvrhlé druhu (aspoň) h-tého.[11])[12])

147. Algebraické nadplochy. *a*) *Nadplochou* (algebraickou) *n-tého stupně v* S_r *sluje* $(r-1)$*-mocná soustava* (reálných a imaginárních) *bodů, jejichž homogenní souřadnice* $x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}$ *vyhovují algebraické rovnici n-tého stupně*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}) = 0, \quad \text{stručně } f(x_k) = 0.$$

[11]) Lze nalézti, že nahoře uvedená varieta V_h tvořená dvojnými prostory kuželů h-tého druhu uvažovaného svazku, obsažená v S_p, jest stupně $(p-h+1)$-ho, tedy V_h^{p-h+1}; a spec. u svazku kuželů 1. druhu (s dvojným bodem) t. zv. normální křivka V_1^p v S_p.

[12]) O svazcích kvadratických kuželů pojednává (syntheticky i analyticky) *C. Segre*, Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque, Atti Accad. Torino 19 (1884); také *E. Bertini*, Sui fasci di quadriche in uno spazio ad n dimensioni, Rendiconti Accad. Lincei Roma (4) 2_2 (1886).

Funkce $f(x_k)$ jest racionální celistvá a homogenní funkce čili forma o $r+1$ proměnných, jejíž součinitele předpokládáme reálné. Nadplochu n-tého stupně v S_r označujeme V^n_{r-1}. Protože se stupeň funkce $f(x_k)$ lineární transformací nemění, jest stupeň nadplochy jejím projektivním invariantem.

Ježto funkce $f(x_k)$ je součtem součinů $x_\alpha x_\beta \ldots x_\nu$ s konstantními koeficienty, kde $\alpha\beta \ldots \nu$ jsou všechny možné kombinace čísel $1, 2, \ldots, r+1$ po n členech (čili n-té třídy) s opakováním, má rovnice nadplochy n-tého stupně

$$\binom{r+1+n-1}{n} = \binom{r+n}{n} = \binom{n+r}{r}$$

členů a tedy koeficientů.

Všechny nadplochy n-tého stupně tvoří lineární systém $N(n)$-mocný, t. j. symbolicky s $\infty^{N(n)}$ členy, kde $N(n) = \binom{n+r}{r} - 1$. Nadplochy n-tého stupně, jež mají vyhověti podmínkám, které lze vyjádřiti p nezávislými rovnicemi, lineárními v koeficientech rovnice nadplochy, tvoří *lineární systém* $[N(n) - p]$-*mocný*. Je-li speciálně $p = N(n)$, existuje jediná nadplocha podmínkám vyhovující; takový případ nastane, je-li dáno $N(n)$ bodů obecně položených, jež má nadplocha obsahovati: *Skupinou* $N(n)$ *v obecné poloze zvolených bodů prostoru* S_r *prochází jediná nadplocha n-tého stupně*; jest tedy tímto počtem bodů nadplocha V^n_{r-1} jednoznačně určena.[1])[2])

Je-li možno formu $f(x_k)$ rozložiti v součin dvou nebo několika různých nebo stejných forem (s reálnými koeficienty), pravíme, že nadplocha *se rozpadá* ve dvě resp. několik nadploch, jejichž rovnice plynou z těchto faktorů, položených rovnými nule (nadplocha je zvrhlá, složená); spec. je daná nadplocha m-násobná, je-li $f(x_k)$ m-tou mocninou formy (stupně n/m-tého). Nelze-li formu uvedeným způsobem rozložiti, sluje nadplocha *pravou* (jednoduchou).

Prostor S_q protíná nadplochu V^n_{r-1} ve varietě V^n_{q-1}, tedy v nadploše prostoru S_q; neboť položíme-li prostor S_q do základního prostoru soustavy souřadnic $O_1O_2 \ldots O_{q+1}$, obdržíme rovnici průseku tím, že do transformované rovnice nadplochy dané vložíme $x_{q+2} = 0$, $x_{q+3} = 0, \ldots, x_{r+1} = 0$, čímž obdržíme rovnici n-tého stupně proměnných

[1]) Viz *L. Berzolari*, Sulla determinazione d'una curva o d'una superficie algebrica e su alcune questioni di postulazione, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 47 (1914).

[2]) Nadplochy n-tého stupně, mající vyhověti podmínkám, jež lze vyjádřiti p nezávislými rovnicemi, algebraickými v koeficientech rovnice nadplochy, tvoří *algebraický systém* $[N(n) - p]$-mocný. Obecně položenými $N(n) - p$ body prostoru S_r prochází konečný počet nadploch tohoto systému; tento počet nadploch sluje *indexem* systému. Je-li spec. $p = N(n)$, tvoří nadplochy podmínkám vyhovující skupinu s konečným počtem členů.

$x_1, x_2, \ldots, x_{q+1}$. Speciálně protínná přímka S_1 obecně položená nadplochu n-tého stupně v n bodech (jejichž souřadnice lze nalézti pomocí rovnice n-tého stupně, vznikající vyloučením $r - 1$ souřadnic z rovnice dané nadplochy a $r - 1$ lineárních rovnic pro přímku); v tom jest geometrický význam stupně nadplochy. Přímka S_1 mající s nadplochou n-tého stupně $n + 1$ společných bodů, leží v ní celá (protože zmíněná rovnice n-tého stupně, má-li $n + 1$ kořenů, musí býti splněna identicky). Prostor S_q, jenž má s danou nadplochou V^n_{r-1} nadplochu V^n_{q-1} a mimo ni ještě bod P společný, leží celý v nadploše dané; neboť každá přímka jdoucí oním bodem P má s V^n_{r-1} společných $n + 1$ bodů (n bodů nadplochy V^n_{q-1} a bod P).

Nadplochy prostoru S_r v počtu p stupně $n_1, n_2, \ldots, n_p$ mají při $p < r$ společný útvar, jenž má s $r - p$ nadrovinami obecně položenými, tedy s obecným prostorem S_p v S_r obsaženým, obecně $n_1 n_2 \ldots n_p$ společných bodů; útvar ten jest proto $(r - p)$-rozměrnou varietou stupně $n_1 n_2 \ldots n_p$.[3]) Nadplochy v prostoru S_r v počtu r stupně $n_1, n_2, \ldots, n_r$ mají obecně $n_1 n_2 \ldots n_r$ průsečíků; mají-li $n_1 n_2 \ldots n_r + 1$ společných bodů, mají jich nekonečně mnoho společných, jež tvoří varietu o jednom nebo více rozměrech (nebo několik variet, z nichž aspoň jedna má uvedenou vlastnost).

Mající zřetel k tomu, že $q + 1$ nadploch téhož n-tého stupně obecně položených určuje q-mocný systém nadploch tohoto stupně, a k společné varietě jejich (existuje-li), poznáváme: Nadplochy n-tého stupně v S_r, jež procházejí $N(n) - q$ body obecně položenými, tvoří lineární systém q-mocný (protože mají vyhověti $N(n) - q$ nezávislým podmínkám lineárním) a mají (podle předcházejícího), je-li $q < r - 1$, společnou varietu $(r - q - 1)$-rozměrnou stupně n^{q+1}, uvedenými body určenou, je-li pak $q = r - 1$, mají společných $n^{q+1} = n^r$ bodů; tato společná varieta nebo skupina bodů systému sluje *base* (základní útvar) systému toho.

Bod nadplochy V^n_{r-1} sluje *m-násobný*, jestliže přímka jím procházející, ale jinak obecně položená, má tam s nadplochou m splývajících bodů společných; prostor nebo obecněji varieta, jsou-li složeny z m-násobných bodů nadplochy, sluje m-násobným prostorem resp. m-násobnou varietou nadplochy.

Nadplocha V^n_{r-1}, jež má n-násobný prostor S_v $(0 \leqq v \leqq r - 1)$, skládá se z prostorů S_{v+1}, jdoucích tímto S_v; neboť každá přímka spojující některý bod dané nadplochy s libovolným bodem prostoru S_v náleží celá této nadploše. Taková nadplocha sluje *kužel* a n-násobný

[3]) Mají-li však dané nadplochy s $r - p$ obecnými nadrovinami $n_1 n_2 \ldots n_p + 1$ společných bodů, mají s nimi nekonečně mnoho bodů společných; daných p nadploch protíná se ve varietě rozměru $> r - p$ (nebo, rozpadá-li se tento průsek, protínají se dané nadplochy v několika varietách rozměrů $\geqq r - p$, z nichž aspoň jedna má rozměr $> r - p$).

prostor S_v jeho *prostorem vrcholovým* (vrcholem); pro $v = r - 2$ zvrhne se kužel v n nadrovin svazku, pro $v = r - 1$ v n-násobnou nadrovinu.[4])

Nadplocha V^n_{r-1}, jež má $(n-1)$-násobný prostor S_t $(0 \leq t \leq r-1)$, sluje *monoid*. Je-li $t = r - 1$, rozpadá se monoid v $(n-1)$-násobný prostor S_{r-1} a v další prostor S'_{r-1}. Je-li $0 < t < r - 1$, skládá se monoid z prostorů S'_t, jež protínají $(n-1)$-násobný S_t v prostorech S_{t-1}; neboť prostor S_{t+1}, položený oním S_t, protíná monoid v nadploše V^n_t (v něm ležící), pro kterou je S_t prostorem $(n-1)$-násobným a jež se tedy podle uvedeného rozpadá v S_t a v další S'_t, protínající S_t v S_{t-1}.[5])

b) Přímka spojující dva body (x_k) a (y_k) prostoru S_r má s nadplochou V^n_{r-1} společné body o souřadnicích $x_k + \lambda y_k$, jejichž parametry λ vyhovují rovnici $f(x_k + \lambda y_k) = 0$ čili rovnici

$$f(x_k) + \lambda \Delta_y f(x_k) + \tfrac{1}{2}\lambda^2 \Delta_y{}^2 f(x_k) + \ldots + \frac{1}{n!}\lambda^n \Delta_y{}^n f(x_k) = 0.$$

Protože rovnice tato má (není-li splněna identicky) n kořenů, vidíme odtud opět, že obecně položená přímka protíná nadplochu n-tého stupně v n bodech.

Forma

$$\Delta_y{}^p f(x_k) \equiv \Sigma y_\alpha y_\beta \ldots y_\pi \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \ldots \partial x_\pi},$$

kde se součet vztahuje na všechny možné variace indexů $\alpha\beta \ldots \pi$ z čísel $1, 2, \ldots, r+1$ po p číslech čili p-té třídy s opakováním (takže jejich počet je $(r+1)^p$, při čemž vždy členy obsahující různé permutace téže kombinace čísel jsou si rovny), sluje p-tou polárnou formou formy dané $f(x_k)$ vzhledem k (y_k). Rovnice

$$\Delta_y{}^p f(x_k) = 0$$

definuje nadplochu $(n-p)$-tého stupně, jež sluje *p-tou polárnou nadplochou* (krátce *p-tou polárou*) bodu (y_k) vzhledem k dané nadploše V^n_{r-1}. Zvláště jsou důležité *první polárná nadplocha* $\Delta_y f(x_k) = 0$ stupně $(n-1)$-ho a $(n-1)$-ní polára čili *polárná nadrovina*, také $(n-2)$-há polára čili polárná nadplocha kvadratická (kvadratická polára); protože platí

$$\frac{1}{p!}\Delta_y{}^p f(x_k) = \frac{1}{(n-p)!}\Delta_x^{n-p} f(y_k),$$

---

[4]) Nadplocha n-tého stupně, jež má $v+1$ nezávislých bodů n-násobných, má celý prostor S_v, body těmi určený, za prostor n-násobný (a jest tedy kuželem s vrcholovým S_v). Neboť má-li nadplocha V^n_{r-1} na př. dva body n-násobné, má s ní každá rovina body těmi položená společných n přímek, splývajících v přímku tyto body spojující.

[5]) Každou nadplochu V^n_{r-1} v S_r lze vytvořiti dvěma korelativními $(r-1)$-mocnými lineárními svazky nadrovin a nadploch stupně $(n-1)$-tého; obsahuje-li V^n_{r-1} prostor S_{r-p}, vytvoří se dvěma takovými svazky $(p-1)$-mocnými, jež jdou tímto S_{r-p}. Viz na př. *E. Bertini*, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, p. 219 a n.

má polárná nadrovina bodu (y_k) vzhledem k dané nadploše $f(x_k) = 0$ rovnici

$$\Delta_x f(y_k) \equiv x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \ldots + x_{r+1} \frac{\partial f}{\partial y_{r+1}} = 0,$$

kde ovšem daná funkce f má proměnné y_k; kvadratická polára bodu (y_k) vzhledem k dané nadploše má pak rovnici $\Delta_x^2 f(y_k) = 0$.

Ze vztahu právě uvedeného vyplývá věta o vzájemnosti mezi polárami p-tou a $(n - p)$-tou téže nadplochy n-tého stupně: Obsahuje-li p-tá polára bodu (y_k) vzhledem k nadploše V_{r-1}^n bod (x_k), obsahuje $(n - p)$-tá polára bodu (x_k) vzhledem k téže nadploše bod (y_k).

A protože platí $\Delta_y^p \Delta_y^q f(x_k) = \Delta_y^{p+q} f(x_k)$, mohou polárné nadplochy zvoleného bodu vzniknouti postupně: Polára p-tá bodu (y_k) vzhledem ke q-té poláře téhož bodu vzhledem k dané nadploše V_{r-1}^n jest $(p + q)$-tou polárou bodu (y_k) vzhledem k nadploše V_{r-1}^n.

Protože zvolená lineární transformace uvažovaného prostoru převádí polárnou formu dané formy vzhledem k danému bodu v polárnou formu formy transformované vzhledem k bodu transformací tou vzniklému, jsou vztahy mezi nadplochou a jejími polárnými nadplochami projektivní.

Nadrovina S_{r-1}, položená bodem (y_k), protíná nadplochu V_{r-1}^n a p-tou polárnou nadplochu bodu toho vzhledem k V_{r-1}^n ve své nadploše V_{r-2}^n a v nadploše své, jež jest opět p-tou polárou bodu (y_k) vzhledem k V_{r-2}^n. Neboť zvolíme-li za bod (y_k) vrchol základního útvaru, třebas $O_1\,(1, 0, 0, \ldots, 0)$, a za S_{r-1} základní nadrovinu jím jdoucí, třebas $x_2 = 0$, jest průsekem dané nadplochy $f(x_k) = 0$ s tímto S_{r-1} nadplocha v něm obsažená o rovnici $f(x_1, 0, x_3, \ldots, x_{r+1}) = 0$ a první polárou bodu O vzhledem k této nadploše V_{r-2}^n nadplocha o rovnici $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, 0, x_3 \ldots$ $\ldots, x_{r+1}) = 0$; protože však substituce $x_2 = 0$ do rovnice první poláry $\frac{\partial f(x_k)}{\partial x_1} = 0$ bodu O_1 vzhledem k dané $f(x_k) = 0$ vede k téže rovnici, jest ona první polára průsekem této s nadrovinou $x_2 = 0$. A protože druhá polára jest první polárou první poláry atd., platí důkaz pro polára p-tou. Použijeme-li pak věty této pro průsek uvedeného průseku s další nadrovinou a postupně dále, dojdeme věty obecnější: *Prostor S_q, jdoucí bodem (y_k), protíná nadplochu V_{r-1}^n a p-tou polárnou nadplochu bodu (y_k) vzhledem k V_{r-1}^n v nadplochách svých V_{q-1}^n a p-té poláře bodu (y_k) vzhledem k V_{q-1}^n.*[6])

[6]) Pro $q = 2$ dostáváme ovšem jako průseky čáru n-tého stupně a její p-tou čáru polárnou, pro $q = 1$ skupinu n bodů a její p-tou polárnou skupinu.

Vezměme znova v úvahu u dané nadplochy V_{r-1}^n s rovnicí $f(x_k) = 0$ přímku jdoucí body (x_k) a (y_k) a rovnici pro parametr λ jejího bodu $(x_k + \lambda y_k)$ na V_{r-1}^n

$$f(x_k) + \lambda \Delta_y f(x_k) + \tfrac{1}{2}\lambda^2 \Delta_y{}^2 f(x_k) + \ldots = 0.$$

Leží-li bod (x_k) na uvažované nadploše, platí pro něj $f(x_k) = 0$ a $\lambda_1 = 0$; aby přímka jdoucí bodem (y_k) měla s nadplochou dva společné body v (x_k) splývající, musí rovnice pro λ míti ještě druhý kořen $\lambda_2 = 0$: všechny a pouze body (y_k), jejichž spojnice s bodem (x_k) nadplochy mají tam s touto nadplochou (aspoň) dva splývající body společné, vyhovují svými souřadnicemi rovnici

$$\Delta_y f(x_k) = 0.$$

Přímka mající s V_{r-1}^n dva splývající body společné sluje její *tečnou* v tomto bodě (dotyčném); jak vidíme, vyplňují tečny nadplochy V_{r-1}^n v (obyčejném) bodě jejím (x_k) nadrovinu $\Delta_y f(x_k) = 0$ (s proměnnými souřadnicemi y_k), jež proto sluje *tečnou nadrovinou* nadplochy V_{r-1}^n v bodě (x_k). A z předcházejícího poznáváme, že tečná nadrovina nadplochy V_{r-1}^n v bodě (x_k) jest zároveň polárnou nadrovinou dotyčného bodu svého (x_k) na V_{r-1}^n vzhledem k této nadploše; obráceně leží-li bod ve své polárné nadrovině vzhledem k dané nadploše, jest bodem této nadplochy (podle věty o funkcích homogenních) a jeho polárná nadrovina nadrovinou tečnou.

Protože polárná nadrovina bodu vzhledem k V_{r-1}^n jest spolu polárnou nadrovinou bodu toho vzhledem k libovolné polárné nadploše jeho vzhledem k V_{r-1}^n (podle věty o postupném vzniku polár), platí: *Všechny polárné nadplochy* (obyčejného) *bodu nadplochy* V_{r-1}^n *vzhledem k této procházejí bodem tím a mají v něm společnou nadrovinu tečnou, takže se tam dané nadplochy dotýkají.*[7])

c) Platí-li rovnice $\Delta_y f(x_k) = 0$ identicky, t. j. při libovolných hodnotách y_k, jsou všechny první parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ rovny nule, a spolu (podle věty o homogenních funkcích) je $f(x_k) = 0$; tehdy a jen tehdy má rovnice pro λ (aspoň) dva kořeny nulové při libovolném (y_k) čili libovolná přímka, bodem (x_k) nadplochy jdoucí, má tam s nadplochou dva splývající body společné: takový bod $P(x_k)$ jest *dvojným bodem* nadplochy. *Nutnou a dostačující podmínkou toho, aby bod* (x_k) *byl dvojným bodem nadplochy, jest* tedy, *by jeho polárná (tečná) nadrovina byla neurčitá* čili *aby platilo* $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$.

[7]) Polárné nadplochy dané V_{r-1}^n vyšetřoval syntheticky *C. Rodenberg*, Ableitung der Polareigenschaften algebraischer Mannigfaltigkeiten auf darstellend-geometrischem Wege, Math. Annalen 26 (1886); viz také *A. Brambilla*, Un teorema nella teoria delle polari, Atti Accad. Torino 22 (1887).

Vzhledem k postupnému tvoření polár *jest dvojný bod nadplochy také dvojným bodem každé polárné nadplochy* (stupně > 1) *bodu toho vzhledem k dané nadploše.* Spec. jest kvadratická polára dvojného bodu $P(x_k)$ nadplochy $f(x_k) = 0$ o rovnici $\Delta_y^2 f(x_k) = 0$ kuželovou nadplochou s vrcholem P; protože tento kužel, jak z rovnice pro λ vidíme, je vytvořen body, jejichž spojnice s dvojným bodem P dané nadplochy mají tam s touto (aspoň) tři splývající body společné, sluje *tečným kuželem* nadplochy V_{r-1}^n v bodě P. Jest kvadratickou polárou každé polárné nadplochy (stupně > 2) bodu P vzhledem k dané V_{r-1}^n, jež tedy mají v bodě P společný tečný kužel s nadplochou V_{r-1}^n.[8])

Obdobně nalezneme: *Je-li P m-násobným bodem nadplochy V_{r-1}^n, jsou polárné nadplochy jeho stupně* 1. *až* $(m-1)$*-ho vzhledem k* V_{r-1}^n *neurčité, kdežto polárou m-tého stupně jest (tečný) kužel s vrcholem P, sestávající z přímek, jež mají v P s danou nadplochou $m+1$ splývajících bodů společných; polárné nadplochy vyššího stupně mají v P rovněž m-násobné body a týž tečný kužel jako* V_{r-1}^n.

Aby určitý bod nadplochy $f(x_k) = 0$ byl jejím bodem m-násobným, musí býti nule rovny všechny parciální derivace funkce $f(x_k)$ řádu 1. až $(m-1)$-ho (nikoli však všechny řádu m-tého); avšak vymizení všech derivací nejvyššího řádu $(m-1)$-ho k uvedenému účelu stačí (protože podle věty o homogenních funkcích vyplývá odtud vymizení všech derivací nižších i funkce f), takže daný bod je m-násobným na V_{r-1}^n, je-li splněno $\binom{r+1+m-1-1}{m-1} = \binom{r+m-1}{r}$ lineárních podmínek. A aby daná nadplocha měla vůbec nějaký bod m-násobný, musí býti splněno $\binom{r+m-1}{r} - r$ (nelineárních) podmínek (plynoucích z oněch po eliminaci souřadnic takového bodu). Odtud vidíme, že obecná V_{r-1}^n nemá násobného bodu (protože uvedené číslo je větší než nula).[9])

---

[8]) První polárná nadplocha $(n-2)$-násobného bodu P dané nadplochy n-tého stupně V_{r-1}^n jest geometrickým místem bodů, jež jsou k bodu P harmonicky sdruženy vzhledem k oběma průsečíkům každé přímky, bodem P jdoucí, s nadplochou V_{r-1}^n. Jestliže tečný kužel nadplochy V_{r-1}^n v jejím $(n-2)$-násobném bodě P je vytvořen přímkami, jež tam s nadplochou danou mají n splývajících bodů společných, rozpadá se první polára uvedená v tento tečný kužel $(n-2)$-ho stupně a v nadrovinu, nejdoucí bodem P (harmonickou nadrovinu bodu P).

[9]) Společný bod r nadploch, který je m_1-násobným bodem jedné z nich, m_2-násobným druhé, . . ., m_r-násobným r-té z nich, *platí za $m_1 m_2 \ldots m_r$ společných bodů jejich*, jestliže tam nadplochy ty nemají společných tečen (mají-li tam takové tečny, platí uvažovaný bod za více průsečíků). Průsečná varieta k $(< r)$ nadploch, jež mají v jejím bodě P svůj bod m_1-násobný, resp. m_2-násobný, . . ., resp. m_k-násobný, má tento bod *za* svůj

d) Kvadratická polára bodu (y_k) v prostoru S_r vzhledem k nadploše jeho V_{r-1}^n o rovnici $f(x_k) = 0$ má rovnici

$$\Delta_x{}^2 f(y_k) \equiv \Sigma \frac{\partial^2 f}{\partial y_h \partial y_k} x_h x_k = 0,$$

kde $h, k = 1, 2, \ldots, r+1$; jest kuželovou nadplochou čili má bod dvojný (z_k), jsou-li všechny parciální derivace funkce $\Delta_x{}^2 f(y_k)$ podle x_k pro $x_k = z_k$ rovny nule, t. j. platí-li soustava rovnic

$$\sum_k \frac{\partial^2 f}{\partial y_h \partial y_k} z_k = 0 \text{ pro } h = 1, 2, \ldots, r+1.$$

Podmínkou tedy toho, aby kvadratická polára bodu (y_k) vzhledem k V_{r-1}^n byla kuželem, jest platnost rovnice

$$H \equiv \begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, \ldots, f_{1,r+1} \\ f_{21}, & f_{22}, \ldots, f_{2,r+2} \\ \cdot & \cdot \quad \ldots \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \ldots \cdot \\ f_{r+1,1} & f_{r+1,2} \quad f_{r+1,r+1} \end{vmatrix} = 0,$$

kde f_{hk} pro $h, k = 1, 2, \ldots, r+1$ značí parciální derivace 2. řádu funkce $f(y_k)$ podle y_k.

Forma H, vyjádřená determinantem $(r+1)$-ho stupně, k němuž jsme zde dospěli, sluje Hesseovou formou dané formy f, a rovnice $H = 0$ jest rovnicí *Hesseovy nadplochy*, příslušné k dané nadploše V_{r-1}^n; její stupeň jest $(r+1)(n-2)$. Jest podle předcházející úvahy *geometrickým místem bodů* (y_k), *jejichž kvadratické poláry vzhledem k dané nadploše* V_{r-1}^n *mají dvojný bod* (jsou kuželové).

Uvedeme-li si však na pamět rovnici první polárné nadplochy bodu (z_k) vzhledem k V_{r-1}^n, totiž

$$\Delta_z f(x_k) \equiv \sum_k z_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0,$$

a podmínky toho, aby tato polára měla bod dvojný (y_k), totiž rovnice

$$\sum_k z_k \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_h} = 0 \text{ pro } h = 1, 2, \ldots, r+1,$$

vidíme ze shody rovnic hořejších a těchto, že *má-li kvadratická polára bodu* (y_k) *dvojný bod* (z_k), *má první polára bodu* (z_k) *dvojný bod* (y_k) *i obrá-*

---

bod aspoň $m_1 m_2 \ldots m_k$*-násobný* (má jej za bod právě této násobnosti, jestliže tečné kužele ploch daných v bodě P nemají společný kužel $(r-k+1)$-rozměrný); neboť z průsečíků uvedené variety s obecně položeným S_k, jenž jde bodem P (čili s $r-k$ obecně položenými nadrovinami, bodem P vedenými), jest aspoň $m_1 m_2 \ldots m_k$ zabráno bodem P.

ceně, a že hořejší rovnice $H = 0$ *vyjadřuje* také *geometrické místo dvojných bodů prvních polárných nadploch dané* V^n_{r-1}.

Geometrické místo dvojných bodů (z_k) kvadratických polár vzhledem k dané V^n_{r-1} a spolu geometrické místo bodů, jejichž první poláry mají bod dvojný, sluje *nadplochou Steinerovou*. Vztah mezi danou nadplochou a jejími nadplochami Hesseovou a Steinerovou jest projektivní.[10])

Přímky, jež mají s danou nadplochou V^n_{r-1} ve zvoleném obyčejném bodě jejím tři splývající body společné, vyplňují nadplochu V^2_{r-2}, která je průsekem kvadratické poláry bodu toho vzhledem k V^n_{r-1} a tečné nadroviny dané nadplochy v bodě tom; tato V^2_{r-2} má tam podle svého vytvoření bod dvojný. Všimněme si nyní bodů variety, v níž daná V^n_{r-1} jest proťata svou nadplochou Hesseovou: tato průsečná varieta $(r-2)$-rozměrná stupně $n(n-2)(r+1)$ obsahuje patrně všechny dvojné body dané V^n_{r-1}, protože každý dvojný bod nadplochy dané je také dvojným bodem její první polárné nadplochy a leží tedy na Hesseově nadploše její. Je-li (y_k) bodem uvažované variety průsečné, jenž není dvojným na V^n_{r-1}, dotýká se jeho kvadratická polára V^2_{r-1} vzhledem k V^n_{r-1} této V^n_{r-1} v bodě (y_k) a má, protože (y_k) je bodem nadplochy Hesseovy, dvojný bod, různý však od (y_k) (protože by jinak (y_k) byl dvojným na V^n_{r-1}); proto je průsekem polárné nadplochy V^2_{r-1} s tečnou nadrovinou dané V^n_{r-1} v (y_k) *varieta* V^2_{r-2} *s dvojnou přímkou*; obráceně taková V^2_{r-2} s dvojnou přímkou existuje jen v bodech průsečné variety dané V^n_{r-1} s její Hesseovou nadplochou, které nejsou dvojnými body dané nadplochy. *V každém obyčejném bodě dané nadplochy* V^n_{r-1}, *jejž má tato společný se svou nadplochou Hesseovou, tvoří* tedy *přímky protínající tam nadplochu danou ve třech splývajících bodech, varietu* V^2_{r-2} *s dvojnou přímkou*; takové body slují *parabolickými* body dané nadplochy.

e) Budiž bod P m-násobným bodem nadplochy V^n_{r-1}; jeho $(n-m)$-tá polárná nadplocha stupně m-tého vzhledem k V^n_{r-1} jest kužel s vrcholem P a polárná nadplocha stupně $(m+1)$-ho jest monoid s m-násobným bodem v P, jenž má s danou V^n_{r-1} onen kužel za společný kužel tečný.

Přímky, jež mají s nadplochou V^n_{r-1} *v m-násobném bodě jejím P vždy* $m+2$ *splývající body společné, vytvořují varietu* $V^{m(m+1)}_{r-2}$, *jež je průsekem polár m-tého a* $(m+1)$*-ho stupně bodu P vzhledem k dané* V^n_{r-1}; *tyto přímky mají tam* $m+2$ *splývající body společné také s každou polárou bodu P vzhledem k* V^n_{r-1}, *jež je stupně vyššího než* $(m+1)$*-ho*. Neboť přímka spojující bod P s některým bodem průsečné variety polárných

[10]) Pro $n = 3$ jsou Hesseova a Steinerova nadplocha dané nadplochy V^n_{r-1} totožny.

nadploch V_{r-1}^m a V_{r-1}^{m+1}, nahoře uvedených (kužele a monoidu), patří celá této varietě (protože má s monoidem V_{r-1}^{m+1} v P $m+1$ splývajících bodů společných a další zvolený) a má s danou V_{r-1}^n společných $m+2$ bodů v P splývajících, jak poznáme z rovnice pro λ opětovně uvedené (protože pro bod P vedle $f(x_k)=0$ platí $\Delta_y^k f(x_k)=0$ pro $k=1, 2, \ldots, m$, $m+1$). Druhá část věty plyne pak odtud, že uvažované nadplochy polárné jsou polárami bodu P také vzhledem ke všem polárným nadplochám bodu toho vzhledem k V_{r-1}^n stupně $> m+1$.

Postupujíce pak od variety $V_{r-2}^{m(m+1)}$ k jejímu průseku s polárou $(m+2)$-ho stupně bodu P vzhledem k V_{r-1}^n a odtud dále, můžeme od věty právě dokázané dospěti k obecnější: *Přímky, jež mají s nadplochou V_{r-1}^n v m-násobném bodě jejím P vždy $m+q$ splývajících bodů společných, vytvořují $(r-q)$-rozměrnou varietu stupně $m(m+1)\ldots(m+q-1)$, jež je průsekem polárných nadploch m-tého až $(m+q-1)$-ho stupně bodu P vzhledem k V_{r-1}^n*; tyto přímky mají stejný počet společných bodů splývajících také s každou polárnou nadplochou stupně vyššího než $(m+q-1)$-ho bodu P vzhledem k V_{r-1}^n. Musí patrně býti $q \leqq r-1$. Uvažovaná přímka patří dané nadploše V_{r-1}^n, je-li $m+q=n+1$ (což je možno, je-li $r \geqq n-m+2$); *tvoří* tedy *přímky, jdoucí m-násobným bodem nadplochy V_{r-1}^n a jí náležející, $(r+m-n-1)$-rozměrnou varietu stupně $m(m+1)\ldots(n-1)\,n$, jež je průsekem všech polárných nadploch bodu toho vzhledem k V_{r-1}^n stupně m-tého a stupňů vyšších.*

Tyto věty platí také pro obyčejný bod nadplochy V_{r-1}^n (při $m=1$); je-li $r > n+1$, tvoří přímky nadplochy V_{r-1}^n, jdoucí obyčejným bodem jejím, $(r-n)$-rozměrnou varietu stupně $1.2\ldots(n-1)\,n$-tého; je-li $r=n+1$, prochází obyčejným bodem nadplochy V_{r-1}^n $n!$ přímek jejích.

Mějme na zřeteli obecně položený bod O prostoru S_r a přímky jím jdoucí, jež mají s danou nadplochou V_{r-1}^n vždy $q+1$ splývajících bodů společných (přímky se dotýkají nadplochy dané $(q+1)$-bodově v bodech P). Takové body P leží *v průseku 1. až q-té polárné nadplochy bodu O vzhledem k V_{r-1}^n s touto nadplochou a tvoří* tedy *$(r-q-1)$-rozměrnou varietu stupně $n(n-1)\ldots(n-q)$-tého.* Neboť podle předcházejícího leží bod O v průseku $(n-1)$-ní až $(n-q)$-té polárné nadplochy dotyčného bodu P vzhledem k V_{r-1}^n.[11]) Leží-li bod O na V_{r-1}^n, má v něm uvedená varieta bod násobný.

Speciálně při $q=1$ jest geometrickým místem dotyčných bodů tečných přímek z bodu O k nadploše V_{r-1}^n jdoucích její průsek s první polárnou nadplochou bodu O vzhledem k ní, tedy (obecně) $V_{r-2}^{n(n-1)}$.

[11]) Má-li daná nadplocha V_{r-1}^n variety m-násobné při $m \geqq q-1$, odpadají ovšem od uvedené variety bodů dotyčných.

Tato varieta je spolu geometrickým místem dotyčných bodů tečných nadrovin, položených bodem O k nadploše V^n_{r-1}. Promítajícím útvarem variety $V^{n(n-1)}_{r-2}$ z bodu O jest kužel (obecně) stupně $n\,(n-1)$-ho, jenž sluje dané nadploše z bodu O opsaný.

f) Počet tečných nadrovin dané nadplochy V^n_{r-1}, jež procházejí obecně položeným prostorem S_{r-2}, sluje *třídou* její; třída nadplochy je zajisté duální k jejímu stupni.

Abychom určili třídu nadplochy V^n_{r-1} bez bodů násobných, zvolme v prostoru S_{r-2} obecně položeném $r-1$ nezávislých bodů jej určujících; protože geometrickým místem dotyčných bodů tečných nadrovin, jdoucích zvoleným bodem k nadploše V^n_{r-1}, jest podle předešlého $V^{n(n-1)}_{r-2}$, průsek dané nadplochy s první polárou bodu toho vzhledem k ní, jest geometrickým místem dotyčných bodů tečných nadrovin, položených $r-1$ body zvolenými čili prostorem S_{r-2}, průsek nadplochy V^n_{r-1} se všemi $r-1$ prvními polárami bodů těch vzhledem k V^n_{r-1}. Jest tudíž *třída nadplochy n-tého stupně bez bodů násobných* $n\,(n-1)^{r-1}$.

Má-li daná nadplocha body násobné, zmenšuje se tím ovšem její třída.[12])[13])[14])

---

[12]) V m-násobném bodě nadplochy (pro $m > 1$) jest totiž každá nadrovina bodem tím položená vlastně tečnou nadrovinou její (ježto přímky takové nadroviny bodem tím jdoucí mají s danou nadplochou aspoň dva společné body tam splývající); obyčejně se však za tečné nadroviny nadplochy v m-násobném bodě jejím béřou jen takové, jež se tam dotýkají tečného kužele nadplochy. Jestliže m-násobný bod dané nadplochy nemá násobných přímek vytvořujících, *zmenšuje se třída* nadplochy n-tého stupně vlivem m-násobného bodu jejího o $m(m-1)^{r-1}$ *jednotek*. Neboť první polára obecně položeného bodu vzhledem k V^n_{r-1} s bodem m-násobným má tam svůj bod $(m-1)$-násobný, takže daná nadplocha má se všemi prvními polárami v počtu $r-1$ nahoře uvažovanými v m-násobném bodě svém průsečík, jenž absorbuje $m\,(m-1)^{r-1}$ průsečíků těchto nadploch. Viz také *C. Segre*, Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario, Memorie Accad. Torino (2) 39 (1888).

[13]) Hojně byly vyšetřovány nadplochy 3. stupně v S_4; přehled o těchto pracích podává *C. Segre* v Encyklopädie math. Wiss. III. *C* 7, p. 946 a n. Zajímavá je zvl. *nadplocha* V_3^3 *s 10 dvojnými body* (tím charakterisovaná); obsahuje 15 rovin (každým bodem dvojným 6) a šest dvojmocných soustav přímek, protínajících vždy skupinu pěti z těchto rovin (jsouc vytvořena přímkami, jež protínají čtyři roviny v S_4, mající po dvou šest bodů společných, z nichž žádné tři neleží v přímce); lze ji vytvořiti třemi kolineárními dvojmocnými svazky nadrovin, jež ze tří přímek jednoho systému uvedeného promítají přímky druhého; je invariantní při grupě 6! kolineací; průsekem kužele, této V_3^3 z jejího obyčejného bodu jí opsaného, s prostorem S_3 jest Kummerova plocha 4. stupně a 4. třídy. O této pozoruhodné nadploše kubické v S_4 jednají zejména *C. Segre*, Sulla varietà cubica con dieci punti doppii dello spazio a quattro dimensioni, Atti Accad. Torino 22 (1887), a Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni . . ., Memorie Accad. Torino (2) 39 (1888); *G. Castelnuovo*, Sopra una congruenza

148. Čáry, hlavně racionální. *a) Algebraickou čarou n-tého stupně* C^n v prostoru S_r rozumíme jednomocnou soustavu bodů, jež má s každou nadrovinou S_{r-1} společných n bodů (reálných nebo imaginárních).

Jestliže čára C^n se skládá z částí (jejichž stupně mají součet n), sluje zvrhlá (složená); v opačném případě sluje pravá (jednoduchá).

Bod čáry C^n sluje s-násobný ($2 \leqq s \leqq n$), má-li každá nadrovina jím procházející s bodů v něm splývajících s čarou společných; není-li tomu tak, sluje bod obyčejný.

U dané čáry jest možno definovati řadu prostorů čáry se dotýkajících: přímka S_1, jež má s čarou v obyčejném bodě jejím dva soumezné (nekonečně blízké) body společné, sluje tečnou (oskulační přímkou) čáry v tomto bodě; rovina, mající s čarou v takovém bodě tři soumezné body společné, sluje oskulační rovinou její v bodě tom; obecně prostor S_k ($1 \leqq k \leqq r-1$), jenž má s danou čarou v jejím obyčejném bodě společných $k+1$ bodů soumezných (nekonečně blízkých) (pokud je to možno, aniž by celou čáru obsahoval), sluje *oskulačním k-rozměrným prostorem* jejím v tomto bodě (také $(k+1)$-tečným S_k nebo S_k s dotykem $(k+1)$-bodovým). Prostor S_k, mající s čarou v některém obyčejném bodě jejím $k+2$ soumezných bodů společných, sluje prostorem *hyperoskulačním* (stacionárním, $(k+2)$-tečným S_k) čáry v takovém bodě.

Vedle čáry C^n jako soustavy bodů můžeme vzíti v úvahu soustavu jejích tečen, soustavu oskulačních rovin, . . ., obecně soustavu oskulačních prostorů k-rozměrných čáry dané; slují 1., 2., . . ., obecně *k-tou rozvinutelnou varietou* dané C^n (k-tá rozvinutelná varieta je jako útvar bodový $(k+1)$-rozměrná). Stupněm k-té rozvinutelné variety u C^n sluje počet bodů, jež má tato varieta společné s obecně položeným prostorem S_{r-k-1}; stupeň k-té rozvinutelné variety u C^n nazývá se k-tým *řádem* n_k čáry dané. Zejména sluje stupeň rozvinutelné variety, složené z oskulačních nadrovin čáry C^n, čili poslední řád n_{r-1} čáry této její *třídou* (ν); je to počet oskulačních nadrovin čáry, jdoucích bodem v S_r obecně položeným.

Dejme tomu, že daná čára C^n v S_r má stupeň n_0 $(= n)$ a řády $n_1, n_2, \ldots, n_{r-2}, n_{r-1}$ $(=$ třídě $\nu)$; n_k jest pro $k = 1$ až $r-2$ podle hořejšího stupeň průsečné čáry C_k k-té rozvinutelné variety dané čáry s prostorem S_{r-k} (je to počet oskulačních S_k čáry C^n, jež protínají

---

del 3º ordine e 6ª classe . . ., Atti Ist. Veneto (6) 5 (1888), a Sulle congruenze del 3º ordine dello spazio a quattro dimensioni, Atti Ist. Veneto (6) 6 (1888); *P. H. Schoute*, Beschouwingen naar anleiding van een configuratie van Segre, Verslag Akad. Amsterdam 10 (1901); *A. Dragoni*, Sulla varietà cubica di S_4 dotata di dieci punti doppi, Giornale mat. 40 (1902); *L. Berzolari*, Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni . . ., Rendiconti Accad. Lincei Roma (5) 25 (1917); také *E. Bertini*, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, p. 206 a n.

[14]) O lineárních soustavách nadploch pojednává obšírně *E. Bertini*, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, p. 255 a n. Viz také referát *C. Segreův* v Encyklopädie math. Wiss. III. *C* 7, p. 939 a n.

obecně položený S_{r-k-1}). Dále ať mají C^n a $C_1, C_2, \ldots, C_{r-2}$ pořadem $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{r-2}$ zdánlivých bodů dvojných a $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_{r-1}$ zdánlivých dvojných tečen; do oněch i těchto buďtež zahrnuty také skutečné body resp. tečny dvojné (do d_0 tedy dvojné body s různými tečnami, do d_k a δ_k oskulační S_k čáry dané s dvěma dotyčnými body). Konečně ať má C^n ϱ_0 hrotů (stacionárních bodů), $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{r-1}$ hyperoskulačních (stacionárních) přímek, rovin, ..., nadrovin. Z charakteristických těchto čísel u čáry C^n jsou v S_r duálními: n_k a n_{r-1-k}, ϱ_k a ϱ_{r-1-k}, d_k a δ_{r-1-k} (pro $k = 0, 1, 2, \ldots$).

Použijeme-li tří Plückerových rovnic, platících pro rovinnou čáru, jejíž stupeň jest n, třída ν, počet dvojných bodů, dvojných tečen, hrotů a inflexních tečen pořadem d, δ, r, ϱ, totiž rovnic

$$\nu = n(n-1) - 2d - 3r, \qquad n = \nu(\nu-1) - 2\delta - 3\varrho, \qquad 3(n-\nu) = r - \varrho$$

na rovinné průměty čar C^n a C_k i na rovinné řezy rozvinutelné variety k C^n duální, obdržíme $r-1$ skupin po třech rovnicích

$$n_1 = n(n-1) - 2d_0 - 3\varrho_0, \ldots \text{ až } \nu = n_{r-2}(n_{r-2}-1) - 2d_{r-2} - 3(\varrho_{r-2} + n_{r-3}),$$
$$n = n_1(n_1-1) - 2\delta_1 - 3(\varrho_1 + n_2), \ldots \text{ až } n_{r-2} = \nu(\nu-1) - 2\delta_{r-1} - 3\varrho_{r-1},$$
$$3(n-n_1) = \varrho_0 - (\varrho_1 + n_2), \ldots \text{ až } 3(n_{r-2} - \nu) = (\varrho_{r-2} + n_{r-3}) - \varrho_{r-1},$$

obecně

$$n_{k+1} = n_k(n_k - 1) - 2d_k - 3(\varrho_k + n_{k-1}),$$
$$n_k = n_{k+1}(n_{k+1} - 1) - 2\delta_{k+1} - 3(\varrho_{k+1} + n_{k+2}),$$
$$3(n_k - n_{k+1}) = (\varrho_k + n_{k-1}) - (\varrho_{k+1} + n_{k+2}),$$

kde $k = 0, 1, 2, \ldots, r-2$ (při tom $n_{-1} = 0$, $n_r = 0$). Rovnice tyto pro C^n v S_r slují *Veroneseovy*; dovolují z uvedených tam $4r-2$ čísel při vhodných $r+1$ daných vypočísti ostatních $3r-3$.[1])

b) Velmi důležitým charakteristickým číslem algebraické čáry jest její rod. *Rodem* pravé, do prostoru S_r (a žádného nižšího) příslušné čáry algebraické sluje rod jejího průmětu z libovolného, obecně položeného prostoru S_{r-3} do roviny. Algebraická čára prostoru S_r a její průmět v rovině odpovídají sobě obapolně jednoznačně, rovněž tedy jsou v takové korespondenci různé průměty téže čáry v S_r (z různých S_{r-3} obecně položených) na rovině; a protože se, jak víme, rod algebraické čáry rovinné transformací biracionální nemění, jest podle uvedené definice rod čáry v S_r určen (rodem jejího průmětu v rovině) jednoznačně.

---

[1]) *G. Veronese*, Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen . . ., Math. Annalen 19 (1882). Soustavné vyšetření algebraické čáry v okolí bodu jejího (také odvození uvedených vzorců) podává *E. Bertini*, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi (appendice), p. 439 a n. O dalších vztazích, jež se týkají prostorů křivku v několika bodech protínajících nebo se jí dotýkajících (nalezli je zvl. G. Castelnuovo, F. Severi, A. Tanturri, G. Z. Giambelli a j.), referuje *C. Segre* v Encyklopädie math. Wiss. III *C* 7, p. 885 a n.

Rovinná čára n-tého stupně jest rodu $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - D$, kde D je počet dvojných bodů jejích, při čemž každý s_k-násobný bod čáry s různými tečnami se nahrazuje $\frac{1}{2}s_k(s_k-1)$ body dvojnými. Každý násobný bod s různými tečnami na algebraické čáře v S_r promítá se z obecného S_{r-3} do roviny v násobný bod téže násobnosti a s tečnami různými. Jestliže tedy daná algebraická C^n v S_r má s_k-násobné body jen s různými tečnami, má její průmět z obecného S_{r-3} v rovině rovněž s_k-násobné body téhož druhu; k tomu však přistupují u průmětu dvojné body vzniklé projekcí, totiž průměty dvojic bodů na C^n v S_r, jež leží v témž promítajícím prostoru S_{r-2} (zdánlivé dvojné body čáry dané). Má tudíž čára C^n v S_r, obsahující násobné body pouze o různých tečnách, rod

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - D,$$

kde do D jest zahrnouti počet skutečných bodů dvojných, body s_k-násobné součtem $\frac{1}{2}\Sigma s_k(s_k-1)$ a počet zdánlivých bodů dvojných. Rod p čáry C^n v S_r (jako u čáry rovinné) nemůže býti záporný.

Má-li prostor S_{r-3}, z něhož se čára C^n v S_r do roviny promítá, s čarou tou společných (jenom) m bodů, jest průmětem čára stupně $(n-m)$-tého. Jestliže uvedený S_{r-3} má s danou čarou C^n v S_r společných $r-2$ bodů nezávislých (t. j. největší možný počet takových bodů), jest rovinný průmět čáry C^n čára $(n-r+2)$-ho stupně; a nemá-li daná C^n bodů dvojných (násobných, skutečných ani zdánlivých), nemá jich ani její průmět. Z obého plyne horní mez pro rod pravé, do S_r příslušné čáry n-tého stupně

$$p \leqq \tfrac{1}{2}(n-r+1)(n-r).$$

Čáry rodu 0 slují *racionální*, protože bodům takové čáry jest možno obapolně jednoznačně přiřaditi hodnoty proměnného parametru (a tedy body přímky). Vyjádříme-li totiž souřadnice x_k bodů na čáře C^n tohoto druhu v S_r rovnicemi

$$x_k = f_k(\lambda) \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots, r+1,$$

kde f_k jsou racionální celistvé a nesoudělné funkce parametru λ, přísluší každé hodnotě λ jediný bod čáry; přísluší-li obráceně témuž bodu na dané čáře $h > 1$ hodnot parametru λ, lze transformací parametru λ v nový μ pomocí rovnice $\varphi(\lambda) - \mu\psi(\lambda) = 0$, kde φ a ψ jsou racionální celistvé funkce h-tého stupně v λ, toho dosáhnouti, aby korespondence i v tomto druhém smyslu byla jednoznačná.

Dejme tomu, že funkce $f_k(\lambda)$ jsou už takové, že body na čáře C^n v S_r a hodnoty parametru λ sobě odpovídají obapolně jednoznačně. Z funkcí $f_k(\lambda)$ musí *aspoň jedna býti stupně n-tého* (a žádná vyššího); neboť dosadíme-li funkce ty za x_k do rovnice obecné nadroviny, musí se objeviti rovnice stupně n-tého v λ, aby nadrovina měla s danou čarou n společných bodů, jak žádá stupeň této C^n.

c) Z racionálních čar v prostoru S_r jest nejdůležitější pravá čára r-tého stupně C^r, t. zv. *normální*; je to křivka nejnižšího stupně, obsažená

v prostoru r-rozměrném a žádném nižším.[2]) Že křivka C^r v S_r je racionální, poznáváme odtud, že lze skupinou $r - 1$ nezávislých bodů jejích položiti S_{r-2} a nadrovinám jednomocného svazku s basí v tomto S_{r-2} přiřaditi obapolně jednoznačně body křivky C^r.

Racionální normální křivka C^r v S_r *nemá bodů singulárních*. Neboť kdyby C^r měla na př. bod dvojný, určoval by tento bod s dalšími $r - 1$ body křivky nadrovinu S_{r-1}, jež by s křivkou r-tého stupně měla $r + 1$ bodů společných, takže by obsahovala celou C^r proti předpokladu, že S_r je nejnižší prostor křivku tu obsahující.

Racionální křivku r-tého stupně v S_r lze parametricky vyjádřiti rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\lambda^r + a_{12}\lambda^{r-1} + \ldots + a_{1,r}\lambda + a_{1,r+1} \\ x_2 &= a_{21}\lambda^r + a_{22}\lambda^{r-1} + \ldots + a_{2,r}\lambda + a_{2,r+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{r+1} &= a_{r+1,1}\lambda^r + a_{r+1,2}\lambda^{r-1} + \ldots + a_{r+1,r}\lambda + a_{r+1,r+1}, \end{aligned}$$

jejichž koeficienty tvoří determinant $|a_{hk}|$ různý od nuly, protože by jinak křivka C^r byla obsažena v prostoru nižším; existovala by totiž mezi x_1 až x_{r+1} při každém λ aspoň jedna lineární relace. Provedeme-li transformaci souřadnic

$$x_h = \sum_{k=1}^{r+1} a_{hk} x'_k \quad (h = 1, 2, \ldots, r + 1)$$

a označíme-li nové souřadnice x'_h opět jednoduše x_h, dostáváme *velmi jednoduché parametrické vyjádření racionální normální křivky v* S_r

$$x_1 = \lambda^r, \quad x_2 = \lambda^{r-1}, \ldots, x_r = \lambda, \quad x_{r+1} = 1;$$

místo parametru λ můžeme zvoliti dva parametry λ, μ a tedy vyjádření homogenní

$$x_h = \lambda^{r+1-h}\mu^{h-1}.$$

Protože rovnice každé C^r v S_r lze převésti na tento tvar, jsou všechny racionální normální křivky prostoru r-rozměrného projektivně totožny.[3])[4])

---

[2]) Kdyby existovala pravá čára $(r - 1)$-ho stupně v prostoru S_r a žádném nižším, bylo by možno na ní zvoliti $r + 1$ bodů nezávislých a nadrovina S_{r-1}, položená r takovými body, měla by s ní více bodů společných než připouští její stupeň.

[3]) Při těchto parametrických rovnicích racionální normální křivky v S_r patří dva její body (pro $\lambda = 0, \infty$) a všechny oskulační prostory její v bodech těch základnímu jehlanu soustavy souřadnic. Někdy je výhodné parametrické vyjádření pro C^r v S_r rovnicemi $x_h = 1/(\lambda - a_h)$, kde $h = 1, 2, \ldots, r + 1$ (při němž všechny vrcholy základního jehlanu leží na křivce).

[4]) Vyvodíme-li z nalezených rovnic křivky C^r eliminací parametru důsledek

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \ldots = \frac{x_r}{x_{r+1}},$$

Abychom nalezli souřadnice *oskulační nadroviny* křivky C^r v S_r (při uvedeném vyjádření souřadnic jejího bodu), vložme do rovnice vyjadřující incidenci bodu (x_h) a nadroviny (u_h), totiž do rovnice $\Sigma u_h x_h = 0$ souřadnice $x_h = \lambda^{r+1-h}$; obdržíme rovnici

$$u_1\lambda^r + u_2\lambda^{r-1} + \ldots + u_r\lambda + u_{r+1} = 0,$$

jejíž kořeny λ_k poskytují parametry r průsečíků dané nadroviny (u_h) s křivkou C^r. Tato nadrovina (u_h) se stane oskulační nadrovinou křivky C^r (v bodě s parametrem λ_1), má-li uvedená rovnice r kořenů splývajících, takže se redukuje na $u_1(\lambda - \lambda_1)^r = 0$; přirovnáním k hořejší rovnici plynou souřadnice oskulační nadroviny v bodě λ ve tvaru

$$u_1 = 1, \quad u_2 = -\binom{r}{1}\lambda, \quad u_2 = \binom{r}{2}\lambda^2, \ldots, u_{r+1} = (-1)^r\lambda^r.$$

Odtud vidíme, že jednomocná soustava oskulačních nadrovin křivky C^r v S_r jest útvar rovněž racionální a téhož stupně r-tého; jest tedy racionální normální křivka C^r *třídy r-té*. Soustava bodů a oskulačních nadrovin racionální normální křivky v S_r jest soběduální.

d) Racionální normální křivku C^r prostoru S_r *lze vytvořiti průsečíky vždy r nadrovin, sdružených v r projektivních svazcích s basemi v* $(r-2)$*-rozměrných prostorech, z nichž každý má s křivkou* $r-1$ *bodů společných.* Neboť zvolíme-li na C^r r skupin po $r-1$ nezávislých bodech, jež určují r prostorů $(r-2)$-rozměrných, a promítneme-li z nich jednotlivé body křivky C^r, dostaneme r projektivních svazků nadrovin. Mají-li nadroviny těchto svazků, promítající dva určité body křivky C^r, rovnice $\alpha_k = 0$, resp. $\beta_k = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, r$, jsou uvažované svazky vyjádřeny rovnicemi

$$\alpha_1 + \lambda\beta_1 = 0, \quad \alpha_2 + \lambda\beta_2 = 0, \ldots, \alpha_r + \lambda\beta_r = 0,$$

při čemž sobě v projektivnostech jejich odpovídají nadroviny, příslušné k téže hodnotě parametru λ a promítající týž bod křivky C^r. Protože každý a jenom bod křivky C^r vyhovuje svými souřadnicemi uvedeným rovnicím při všech možných hodnotách parametru λ, obdržíme vyloučením tohoto parametru rovnice křivky C^r; tyto rovnice plynou z matice

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 & \beta_2 \ldots \beta_r \end{matrix} \right\|,$$

položíme-li nule rovnými determinanty 2. stupně v ní obsažené.

Vezmeme-li však v úvahu rovnice

$$\varrho_1\alpha_1 + \varrho_2\alpha_2 + \ldots + \varrho_r\alpha_r = 0,$$
$$\varrho_1\beta_1 + \varrho_2\beta_2 + \ldots + \varrho_r\beta_r = 0,$$

---

dostaneme, spojujíce vždy dva zlomky uvedené, rovnice kvadratických nadploch křivkou procházejících; z nich je $\frac{1}{2}r(r-1)$ nezávislých, takže určují lineární systém o $\frac{1}{2}r(r-1) - 1$ rozměrech, složený z nadploch 2. stupně, jdoucích racionální normální křivkou v S_r.

vyjadřující dva $(r-1)$-rozměrné svazky nadrovin se středy ve dvou bodech křivky C^r, vidíme, že dvě nadroviny těchto svazků, určené týmiž poměry parametrů ϱ_k, sobě odpovídají v kolineaci jejich, a že každý bod křivky C^r jest průsečíkem dvou přímek, v této kolineaci sdružených (a se protínajících). *Lze* tedy *racionální normální křivku* C^r *vytvořiti* také *průsečíky vždy dvou přímek, sdružených ve dvou kolineárních* $(r-1)$*-mocných svazech se středy ve dvou bodech křivky* (pokud tyto dvojice mají bod společný).

Obráceně vyjdeme-li od r projektivních svazků nadrovin s basemi v r obecně položených prostorech $(r-2)$-rozměrných nebo od dvou kolineárních $(r-1)$-rozměrných svazů přímek se středy ve dvou libovolných bodech prostoru S_r, obdržíme (v soustavě průsečíků sdružených prvků jejich) jimi vytvořenou křivku C^r.[5]) Zejména je patrno, že obecně položená nadrovina v S_r protíná útvar druhým způsobem vytvořený v r bodech, samodružných bodech kolineace, jež kolineací daných svazů v této nadrovině vzniká.

Dvě nadroviny odpovídající sobě v kolineaci daných dvou svazů, C^r vytvořujících, protínají se v prostoru $(r-2)$-rozměrném, jenž má s vytvořenou C^r společných $r-1$ bodů; neboť danou kolineací vzniká v uvedeném S_{r-2} kolineace, jež má (obecně) $r-1$ bodů samodružných, ležících ovšem na C^r; a obráceně prostor S_{r-2}, mající s C^r $r-1$ bodů společných, jest průsekem dvou sdružených nadrovin oněch svazů. Jsou tedy všechny prostory $(r-2)$-rozměrné, jež protínají křivku C^r vždy v $r-1$ bodech (*sečné prostory* její o $r-2$ rozměrech) průsečnými prostory sdružených nadrovin ve dvou kolineárních svazech křivku vytvořujících.

Z uvedeného vytvoření poznáváme také, že racionální normální C^r v S_r *jest určena* $r+3$ *body prostoru*, z nichž žádných $r+1$ neleží v téže nadrovině. Neboť zvolíme-li dva z daných bodů za středy dvou svazů a jejich spojnice s ostatními $r+1$ body za sdružené přímky svazů těch, jest těmito $r+1$ dvojicemi stanovena kolineace $(r-1)$-rozměrných svazů a tím podle hořejšího křivka C^r. Existuje tedy v S_r $\infty^{(r-1)(r+3)}$ křivek C^r.

e) Soustava všech kolineací v S_r jest $r(r+2)$-mocná, kdežto všechny racionální normální křivky v S_r tvoří systém $(r-1)(r+3)$-mocný; protože $r(r+2)-(r-1)(r+3)=3$, existuje ∞^3 kolineací prostoru S_r, jež danou racionální normální křivku jeho převádějí v jinou. Speciálně jest každá C^r v S_r *invariantní při* ∞^3 *kolineacích*, jež ovšem tvoří spojitou grupu.

Kolineace prostoru S_r, která křivku C^r transformuje v ni samu, indukuje v bodové řadě této křivky projektivnost. Obráceně projektivnost dvou soumístných řad bodových na racionální normální křivce C^r určuje kolineaci prostoru S_r, do něhož křivka přísluší. Neboť označíme-li

[5]) Dvě uvedená vytvoření křivky C^r spadají pro $r=2$ v jedno vytvoření kuželosečky.

parametr bodu v jedné řadě na C^r písmenem λ, v druhé řadě pak λ', jest projektivní transformace těchto řad dána bilineární rovnicí $\alpha\lambda\lambda' + \beta\lambda + \gamma\lambda' + \delta = 0$. Máme-li na zřeteli parametrické vyjádření bodu na C^r, totiž $x_h = \lambda^{r+1-h}$, resp. $x'_h = \lambda'^{r+1-h}$ a dosadíme-li výraz pro λ, z uvedené rovnice projektivnosti určený, do souřadnic x_h, nahradíme-li pak mocniny parametru λ', zde se objevující, souřadnicemi x'_h, obdržíme lineární rovnice pro transformaci bodů křivky C^r; a pokládáme-li x_h i x'_h za souřadnice obecného bodu v jednom resp. druhém z obou soumístných prostorů r-rozměrných, jež C^r obsahují, vyjadřují rovnice ty kolineaci v S_r.

Spojíme-li souřadnice bodu na C^r

$$x_1 = \lambda^r, \quad x_2 = \lambda^{r-1}, \ldots, x_r = \lambda, \quad x_{r+1} = 1$$

a souřadnice oskulační nadroviny v bodě tom

$$u_1 = 1, \quad u_2 = -\binom{r}{1}\lambda, \ldots, u_r = (-1)^{r-1}\binom{r}{1}\lambda^{r-1}, \quad u_{r+1} = (-1)^r\lambda^r,$$

pomocí parametru λ v rovnice

$$u_1 = x_{r+1}, \quad u_2 = -\binom{r}{1}x_r, \ldots, u_r = (-1)^{r-1}\binom{r}{1}x_2, \quad u_{r+1} = (-1)^r x_1,$$

vidíme, že *soustava bodů racionální normální křivky C^r v S_r přechází v soustavu jejích oskulačních nadrovin involuční korelací, jež při sudém r je polárnou, při lichém r nulovou, při čemž každému bodu odpovídá oskulační nadrovina křivky v bodě tom.*[6])

Při r sudém leží křivka C^r na incidenční nadploše 2. stupně uvedené korelace polárné, a její oskulační nadroviny jsou tečnými nadrovinami této nadplochy. Při r lichém určují oskulační nadroviny křivky C^r, jdoucí libovolným bodem prostoru, svými dotyčnými body na křivce nadrovinu, příslušnou v nulové korelaci uvedené k onomu bodu a jím tedy procházející.

Vzhledem k hořejšímu existuje ∞^3 korelací, jež jednu z daných dvou racionálních normálních křivek C^r v S_r převádějí v soustavu oskulačních nadrovin křivky druhé; rovněž ∞^3 korelací, jež každou C^r v S_r převádějí v soustavu jejích nadrovin oskulačních (k těmto patří involuční korelace, právě uvedená). A obdobně jako při kolineaci korelace prostoru S_r, při níž křivka C^r spolu se soustavou svých oskulačních nadrovin jest invariantní, a projektivnost v její řadě bodové i v jednomocné soustavě oskulačních nadrovin jejích určují se navzájem.[7])[8])

---

[6]) Věta tato byla nazvána *Cliffordovou*: *W. K. Clifford*, On the classification of loci, Phil. Transactions Soc. London 169 (1878) nebo Math. papers (1882).

[7]) Vlastnosti racionální normální křivky C^r v S_r nebo spec. C^4 v S_4 podávají zejména: *G. A. Bordiga*, Studio generale della quartica normale, Atti Ist. Veneto (6) 4 (1886); *G. Loria*, Sulla curve razionali normali in uno spazio a n dimensioni, Giornale mat. 26 (1888); *L. Berzolari*, Sulle

f) Promítáním lze z racionální normální křivky prostoru r-rozměrného obdržeti rozmanité křivky racionální v prostorech nižších: *Každá racionální křivka n-tého stupně* C^n, *příslušná do q-rozměrného prostoru* S_q, *kde* $n \gtreqless r$ *a* $q < r$, *může vzniknouti jako průmět racionální normální křivky* C^r *v* S_r. Tato C^n jest, je-li $n = q$, opět racionální normální v S_q, je-li však $n > q$, jest jinou racionální v S_q.

Dejme tomu totiž, že C^n v S_q jest dána rovnicemi

$$x_h = f_h(\lambda) \quad \text{pro } h = 1, 2, \ldots, q + 1,$$

kde $f_h(\lambda)$ jsou racionální celistvé a nesoudělné funkce parametru λ, z nichž aspoň jedna je stupně n-tého a ostatní stupně téhož nebo nižšího (aby daná čára byla vskutku uvedeného stupně) a jež jsou nezávislé, t. j. jejichž koeficienty (u mocnin λ^k) tvoří determinant nenulový (aby daná čára nebyla obsažena v prostoru nižším). Prostorem S_q, danou C^n obsahujícím, položme prostor S_r a v něm zvolme $r - q$ bodů, nezávislých navzájem a na $q + 1$ vrcholech základního jehlanu souřadnic v S_q, vzhledem k němuž má C^n uvedené rovnice. K těmto rovnicím lze připojiti dalších $r - q$ rovnic

$$x_h = f_h(\lambda) \quad \text{pro } h = q + 2, q + 3, \ldots, r + 1,$$

kde $f_h(\lambda)$ jsou opět funkce racionální celistvé a navzájem i s hořejšími nesoudělné, avšak stupně r-tého (aspoň jedna) nebo nižšího a zase takové, že determinant z koeficientů všech $r + 1$ rovnic není roven nule. Soustava $r + 1$ oněch a těchto rovnic vyjadřuje při vytčeném základním jehlanu soustavy souřadnic křivku r-tého stupně, příslušnou do prostoru S_r, tedy racionální normální křivku tohoto prostoru. Průmětem této křivky C^r v S_r z prostoru S_{r-q-1}, určeného zvolenými $r - q$ vrcholy základního jehlanu v S_r, do daného S_q jest křivka daná C^n. Prostor S_{r-q-1}

curve di ordine n dello spazio ad n dimensioni, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 36 (1903); *J. F. de Vries*, Analytische behandeling van de rationale krommen van den vierden graad in een vierdimensionale ruimte, Diss. Leiden 1922; *A. Comessatti*, La curva razionale normale ed i suoi gruppi proiettivi, Math. Annalen 89 (1923); viz také *G. Kowalewski*, Über die projektive Gruppe der Normkurve und eine charakteristische Eigenschaft des R_6, Jahresbericht Deut. Math. Ver. 12 (1903); *G. Kohn*, Über kontrajektive Figuren, Sitzungsberichte Akad. Wien 125 (1916) a 127 (1918).

[8]) Racionální normální křivka a racionální křivky v S_r vůbec jsou výhodnou pomůckou pro teorii binárních forem a vyšších involucí (i obráceně). Viz v tom ohledu zvl. *W. F. Meyer*, Apolarität und rationale Curven, 1883; *G. Castelnuovo*, Studio dell' involuzione generale sulle curve razionali mediante la loro curva normale, Atti Ist. Veneto (6) 4 (1886); *F. Deruyts*, Mémoire sur la théorie de l'involution et d'homographie unicursale, Mémoires Soc. sc. Liège (2) 17 (1892); *L. Berzolari*, Sulle curve razionali di uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, Annali mat. (2) 21 (1893); *E. Waelsch*, Über binäre Formen und die Correlationen mehrdimensionaler Räume, Monatshefte Math. Phys. 6 (1895); *L. Brusotti*, Sulla curva razionale normale dello spazio a quattro dimensioni, Annali mat. (3) 9 (1904); *A. Comessatti*, La curva razionale normale ed i suoi gruppi proiettivi, Math. Annalen 89 (1923).

a křivka C^r v S_r musí ovšem míti společných $r - n$ bodů (spec. žádný, je-li daná křivka stupně r-tého); každá nadrovina S_{r-1} v S_r, jdoucí prostorem S_{r-q-1}, má totiž s danou C^n n společných bodů (svého průsečného prostoru S_{q-1} s prostorem S_q), proto s křivkou C^r n společných bodů mimo S_{r-q-1} a $r - n$ v tomto prostoru.

Pomocí uvedené projekce jest možno z vlastností racionální normální křivky odvoditi jak další vlastnosti této, tak zejména vlastnosti jiných křivek racionálních.

Zvolíme-li na křivce C^r v S_r $r - q$ bodů nezávislých a promítneme-li z prostoru S_{r-q-1}, body těmi určeného, křivku C^r do prostoru S_q, na onom nezávislého, obdržíme v S_q racionální normální křivku C^q; protože v prostoru S_q lze z libovolného bodu jeho P', jak jsme dříve poznali, vésti k C^q q oskulačních nadrovin, jejichž dotyčné body určují nadrovinu, příslušnou v polárné nebo nulové korelaci k bodu P', vyplývá odtud pro C^r v S_r: Libovolným bodem P v S_r a $r - q$ body křivky C^r prochází q nadrovin, z nichž každá má s C^r ještě q splývajících bodů společných; nadrovina určená dotyčnými body těchto q nadrovin a prostorem S_{r-q-1}, stanoveným oněmi $r - q$ body, odpovídá bodu P ve zvrhlé korelaci polárné (je-li q sudé) nebo nulové (je-li q liché) se singulárním prostorem S_{r-q-1}, při čemž v druhém případě tato nadrovina jde bodem P (i prostorem P a S_{r-q-1} spojujícím).[9])

Promítneme-li C^r v S_r z bodu, zvoleného mimo ni, do prostoru S_{r-1}, obdržíme zde racionální křivku C^r. Z věty právě odvozené, je-li bod P středem promítání a redukuje-li se S_{r-q-1} na bod ($q = r - 1$), plyne: U racionální křivky C^r v S_{r-1} jde z bodu jejího $r - 1$ oskulačních nadrovin (S_{r-2} s dotykem $(r - 1)$-bodovým), jejichž dotyčné body určují nadrovinu, jdoucí při r sudém oním bodem. Odtud pak, že z libovolného bodu P v S_r jde k C^r r oskulačních nadrovin, jejichž dotyčné body určují při r lichém nadrovinu, jdoucí bodem P, plyne při středu promítání P: Racionální křivka C^r v S_{r-1} má r hyperoskulačních nadrovin (S_{r-2} s dotykem r-bodovým); při r lichém leží dotyčné body těchto r nadrovin v jedné nadrovině. Při speciální poloze středu promítání získáme touto cestou speciální křivky racionální C^r v S_{r-1}.[10])[11])[12])

---

[9]) *A. Brambilla*, Intorno alle curve razionali in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 19 (1886).

[10]) *G. Veronese*, Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen . . ., Math. Annalen 19 (1882); *G. Zecca*, Sopra una classe di curve razionali, Giornale mat. 25 (1887); *G. Loria*, Intorno alle curve razionali d'ordine n dello spazio a $n - 1$ dimensioni, Rendiconti Circolo mat. Palermo 2 (1888); *P. del Pezzo*, Intorno ai punti singolari delle curve algebriche, Rendiconto Accad. Napoli (2) 7 (1893); *G. Marletta*, Studio geometrico della quartica gobba razionale, Annali mat. (3) 8 (1903); *J. R. Conner*, The rational plane quartic as derived from the norm-curve in four dimensions by projection and section, Amer. Journal math. 33 (1911); *G. Marletta*, Sulle curve razionali del quinto ordine, Rendiconti Circolo mat. Palermo 19 (1905), a Alcuni teoremi sulle

149. Plochy, zejména racionální přímkové. *a) Algebraickou plochou n-tého stupně* v prostoru S_r jmenujeme dvojmocnou soustavu bodů, jež má s každou nadrovinou S_{r-1} společnou čáru algebraickou n-tého stupně a tedy s každým prostorem S_{r-2} společných n bodů (reálných nebo imaginárních); značíme ji V_2^n.

Obdobně jako čáry rozeznáváme i plochy pravé (jednoduché) a zvrhlé (složené ze dvou nebo více částí, jejichž stupně mají součet n). Obyčejným bodem plochy sluje bod její, v němž průsečná čára plochy s obecnou nadrovinou, bodem tím položenou, má bod obyčejný.

Vyšetřme u dané plochy V_2^n, obsažené v prostoru S_r a žádném nižším, v obyčejném bodě jejím P prostory, plochy se dotýkající. Nadroviny, jdoucí bodem P (tvořící $(r-1)$-mocný svazek), protínají plochu v soustavě ∞^{r-1} čar, z nichž každá má v P jedinou tečnu; protože však takovou tečnou přímkou prochází $(r-2)$-mocný svazek nadrovin, jejichž všechny průsečné čáry na ploše se této přímky dotýkají, tvoří tečny všech uvedených čar a tedy i dané plochy v bodě P soustavu jednomocnou. Tato jednomocná soustava tečen v P vytvořuje rovinu; neboť libovolným prostorem S_{r-2} a bodem P je určena nadrovina, jejíž průsečná čára s plochou má v P tečnu, S_{r-2} protínající; proto má každý S_{r-2} s dvojmocnou varietou bodovou, tečnami v P vytvořenou, jediný bod společný. *Tvoří* tedy *tečny plochy* V_2^n *v bodě jejím P rovinu* T_2, *jež sluje tečnou rovinou plochy* V_2^n *v bodě P.*

---

curve razionali degli iperspazi, tamtéž 25 (1908); *W. Müller*, Die rationale Kurve fünfter Ordnung im fünf-, vier-, drei- und zweidimensionalen Raum (Dissertation Leipzig 1910), a téhož Die rationale Quintik der Ebene vom 5-dimensionalen Raume aus gesehen, Giornale mat. 60 (1922); *A. L. Hjelmman*, Sur les courbes gauches rationnelles du cinquième ordre, Acta Soc. sc. Fennicae 3 (1913); *J. Vojtěch*, O racionálních křivkách šestého stupně, Časopis mat. a fys. 43 (1914).

[11]) Racionálním křivkám se speciálními vlastnostmi věnovali pozornost na př. *G. Marletta*, Contributo alla teoria delle curve razionali, Rendiconti Circolo mat. Palermo 21 (1906); *L. Berzolari*, Alcuni teoremi sulle curve razionali di uno spazio ad r dimensioni dotate di $r+1$ punti d'iperosculazione, Rendiconti Circolo mat. Palermo 22 (1906), a Sulle curve gobbe razionali dotate di piani stazionari singolari, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 39 (1906). Algebraické (racionální) křivky, vytvořené bodem v S_r při jednoparametrové spojité grupě kolineací, vyšetřil *H. Mohrmann*, Über die algebraischen W-Kurven im r-dimensionalen Raum, Rendiconti Circolo mat. Palermo 47 (1923), a Bestimmung aller algebraischen W-Kurven, Math. Annalen 89 (1923).

[12]) Křivky C^n rodu 1 čili eliptické v S_r mají třídu nr; z nich je opět nejdůležitější *eliptická normální* křivka stupně $(r+1)$-ho, příslušná do S_r. Viz *G. Castelnuovo*, Ricerche di geometria sulle curve algebriche, Atti Accad. Torino 24 (1889); *C. Segre*, Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche, tamtéž; *F. Amodeo*, Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche di ordine n normali di uno S_{n-1}, a Corrispondenze univoche singolari delle curve ellittiche armoniche ed equianarmoniche, Annali mat. (2) 19 (1891); *S. Kantor*, Les correspondences dans les courbes elliptiques déduites géométriquement, Atti Accad. Torino 29 (1893).

Všechny prostory, jdoucí tečnou rovinou T_2 plochy V_2^n v bodě P, nazýváme *tečnými prostory* plochy té v uvedeném bodě. *Každá a jenom tečná nadrovina S_{r-1} plochy V_2^n v bodě P protíná danou plochu v čáře s dvojným bodem P.* Neboť nadrovina, položená tečnou rovinou uvažované plochy v P, protíná plochu v čáře, jež má s každou tečnou plochy v P dva splývající body společné; obráceně každá nadrovina, obsahující čáru na ploše s dvojným bodem v P, obsahuje dvě její tečny v P a proto tečnou rovinu plochy té v P.

Předpokládejme v dalším, že daná plocha není přímková a že $r > 3$.[1]) Dvě tečné nadroviny, jdoucí tečnou rovinou plochy V_2^n v P, protínají se *v tečném prostoru S_{r-2}* plochy v bodě tom, jenž má s plochou v P čtyři splývající body společné (průsečíky dvou čar, společných ploše a uvedeným nadrovinám, s dvojnými body v P); *každý tečný prostor S_{r-2} plochy V_2^n v bodě P protíná* tedy *plochu mimo P jenom v $n-4$ bodech.*

Oskulační rovinou průsečné čáry, jdoucí na ploše V_2^n bodem P, prochází $(r-3)$-mocný svazek nadrovin, jejichž průsečné čáry s plochou mají tutéž uvedenou rovinu oskulační; tvoří tedy oskulační roviny všech průsečných čar na V_2^n v P soustavu dvojmocnou. Roviny této soustavy, protínajíce tečnou rovinu T_2 uvažovaného bodu plochy v tečnách jejích, určují s rovinou tou jednomocnou soustavu prostorů S_3, jež vytvořují čtyřrozměrný kužel 2. stupně s dvojnou rovinou v tečné rovině T_2 bodu P. Neboť protíná-li takový S_3 libovolný prostor S_{r-4}, leží v nadrovině, určené tímto S_{r-4} a tečnou rovinou T_2 v P; obráceně nadrovina, jdoucí tečnou rovinou T_2 plochy v P, určuje na ploše čáru s dvojným bodem, tedy dvě oskulační roviny a obsahuje dva z uvedených S_3. Podle toho lze říci, že *prostory S_3, jež promítají z tečné roviny T_2 plochy V_2^n v bodě P body tomuto P na dané ploše nekonečně blízké, vytvořují čtyřrozměrný kužel 2. stupně K_4^2, příslušný do prostoru T_5.*

Prostor T_5 a všechny prostory jím procházející nazýváme *oskulačními* (3-tečnými) *prostory plochy V_2^n* v bodě P. Obdobně jako prve nalezneme: *Každá a jenom oskulační nadrovina S_{r-1} plochy V_2^n v bodě P protíná danou plochu v čáře s trojnásobným bodem P, jejíž tečny v bodě tom leží v tečné rovině T_2 a oskulační roviny v oskulačním prostoru T_5 bodu P*; každý oskulační prostor S_{r-2} plochy V_2^n v bodě P protíná tam plochu v 9 bodech a tedy mimo P jenom v $n-9$ bodech.[2])[3])

---

[1]) Vylučujeme totiž plochy, jež každá tečná rovina jejich protíná v čáře, což jsou plochy přímkové a plochy obsažené v S_3.

[2]) Podobně lze dále dokázati: Plocha V_2^n v S_r má v obyčejném bodě svém P prostor s-tečný T_t o $t = \frac{1}{2}(s-1)(s+2)$ rozměrech (je-li $t < r$) té vlastnosti, že průsečná čára nadroviny S_{r-1} bodem P procházející s plochou má tam bod s-násobný, a prostor S_{r-2} bodem P jdoucí protíná tam plochu v s^2 bodech splývajících (tedy mimo P v $n-s^2$ bodech); prostory, jež z tohoto T_t promítají body, bodu P na V_2^n nekonečně blízké,

b) *Racionální* sluje plocha v S_r, je-li možno bodům jejím přiřaditi obapolně jednoznačně body roviny.

Dejme tomu, že pro souřadnice x_h bodu na dané ploše, do S_r příslušné, lze nalézti vyjádření

$$x_h = f_h(y_1, y_2, y_3) \quad \text{pro } h = 1, 2, \ldots, r+1,$$

kde f_h jsou racionální celistvé, nesoudělné a lineárně nezávislé funkce homogenních souřadnic y_k bodů v rovině; pravíme, že těmito rovnicemi jest daná plocha racionálně zobrazena na rovině. Jestliže také obráceně lze odtud souřadnice y_k vyjádřiti racionálními funkcemi souřadnic x_k, jest zobrazení plochy biracionální (obapolně jednoznačné) a daná plocha jest racionální.[4]) V tom případě odpovídá nejen každému bodu roviny jediný bod dané plochy, nýbrž i obráceně každému bodu plochy dané jediný bod roviny.

Při zobrazení dané plochy na rovinu, stanoveném hořejšími rovnicemi, odpovídají průsečným čarám dané plochy se soustavou všech ∞^r nadrovin v S_r o rovnicích

$$\Sigma \lambda_k x_k = 0$$

čáry lineárního systému r-mocného

$$\Sigma \lambda_k f_k(y_1, y_2, y_3) = 0;$$

mezi nadrovinami prostoru S_r a čarami tohoto systému existuje projektivnost, v níž sobě odpovídají útvary, určené touže skupinou hodnot parametrů λ_k.

Vyjdeme-li obráceně od daného r-mocného systému čar v rovině $\Sigma \lambda_k f_k(y_1, y_2, y_3) = 0$ a ustanovíme-li mezi čarami jeho a nadrovinami soustavy $\Sigma \lambda_k x_k = 0$ korespondenci projektivní, v níž sdružíme čáru a nadrovinu, stanovené týmiž hodnotami parametrů, odpovídá každému bodu roviny jediný bod určité plochy; neboť dosadíme-li souřadnice bodu y_k do rovnice daného systému čar, určují parametry λ_k rovnici té vyhovující $(r-1)$-mocnou soustavu nadrovin, jejíž společný prů-

tvoří kužel $(t+2)$-rozměrný stupně s-tého, příslušný do prostoru $\frac{1}{2}s(s+3)$-rozměrného. Odvodil syntheticky *P. del Pezzo*, Sugli spazii tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni, Rendiconto Accad. Napoli 25 (1886). Totéž a další vyšetřil analyticky *C. Segre*, Su una classe di superficie degl' iperspazi, legata colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2. ordine, Atti Accad. Torino 42 (1907).

[3]) O násobných bodech plochy v S_r, o charakteristických číslech jejích a pod. je dosud málo známo. Viz *F. Severi*, Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni e a'suoi punti tripli apparenti, Rendiconti Circolo mat. Palermo 15 (1901); *G. Marletta*, Le superficie generali dell' S_4 dotate di due punti tripli apparenti, Rendiconti Circolo mat. Palermo 34 (1912).

[4]) Lze však zjistiti, že k tomu, aby plocha byla racionální, stačí podmínka první (aby totiž souřadnice bodu na ploše byly vyjádřeny racionálními funkcemi souřadnic bodu v rovině); viz *G. Castelnuovo*, Sulla razionalità delle involuzioni piane, Math. Annalen 44 (1894).

sečík jest bod (x_k), zvolenému (y_k) odpovídající. Rovnice plochy pak dostaneme eliminací souřadnic y_k z rovnic $x_h = f_h(y_1, y_2, y_3)$.

Přísluší tedy dané racionální ploše v S_r lineární r-mocný systém čar v rovině a obráceně r-mocnému lineárnímu systému čar rovinných racionální plocha prostoru S_r; každý z obou těchto útvarů sluje zde obrazem druhého. Jak vidíme, *jest počet rozměrů lineárního systému čar v rovině roven počtu rozměrů prostoru, do něhož plocha přísluší. Stupeň plochy jest* pak *roven počtu proměnných průsečíků dvou obecných čar systému*; neboť prostorem S_{r-2}, společným dvěma nadrovinám v S_r, jest plocha n-tého stupně proťata v n bodech, jimž odpovídá týž počet průsečíků dvou čar systému zobrazujícího.[5])

Jednoduchý jest případ systému všech čar určitého stupně m-tého v rovině $(m > 1)$; jest to lineární systém o $\frac{1}{2}m(m+3)$ rozměrech, jehož dvě obecné čáry mají m^2 proměnných průsečíků. Podle hořejšího jest tedy obrazem jeho plocha v prostoru $\frac{1}{2}m(m+3)$-rozměrném stupně m^2; plocha tato má rovnice, jež vyjadřují souřadnice x_h jako veličiny, úměrné všem možným součinům m-tého stupně tří proměnných y_k.

Zvlášť pozoruhodný jest systém všech kuželoseček v rovině a plocha jej zobrazující s rovnicemi

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = y_1^2 : y_2^2 : y_3^2 : y_1y_2 : y_1y_3 : y_2y_3;$$

tato plocha 4. stupně do prostoru S_5 příslušná sluje *Veroneseova*. Přímkám v rovině odpovídá ∞^2 kuželoseček plochy Veroneseovy, z nichž každá je určena dvěma body plochy a kterékoli dvě se protínají v jednom bodě.[6])

c) Nejnižším stupněm plochy pravé a do prostoru S_r příslušné je $n = r - 1$; neboť obecně položený prostor S_{r-2} protíná plochu V_2^n

[5]) Snadno nahlédneme, že každá biracionální transformace roviny s daným lineárním systémem čar jest ekvivalentní projektivní transformaci plochy systém zobrazující a obráceně; jest tedy možno geometrii biracionálních transformací roviny převésti v projektivní geometrii prostoru S_r a obráceně.

[6]) Plocha Veroneseova je velmi důležitá. Jest charakterisována tím, že přísluší do S_5 a obsahuje ∞^2 kuželoseček. Mimo jiné také tím, že jest jedinou pravou nekuželovou plochou v prostoru vyšším než čtyřrozměrném, jejíž tečné roviny se po dvou (v bodech) protínají. Studoval ji po prvé *G. Veronese*, La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario, Memorie Accad. Lincei (3) 19 (1884); potom *C. Segre*, Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano e alla sua rappresentazione sulla geometria dei complessi lineari di rette, Atti Accad. Torino 20 (1885); viz také *C. Rosati*, Sulle superficie di Veronese e di Steiner, Atti Accad. Torino 35 (1899). Obšírně o ní pojednává *E. Bertini*, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, p. 406 a n.

Průmětem Veroneseovy plochy z přímky do S_3 jsou plocha 4. stupně Steinerova nebo přímková plocha 3. stupně nebo plocha stupně 2. podle toho, jestliže uvedená přímka nemá společného bodu s plochou, resp. má jediný bod společný, resp. má dva společné body.

v n bodech, takže musí býti $n \geqq r-1$; jsou tedy plochy V_2^{r-1} *normálními plochami* prostoru S_r.

Obraťme se k normálním plochám přímkovým v S_r. *Přímkové plochy* V_2^{r-1}, pravé a do S_r příslušné, jsou racionální jako útvary bodové i jako útvary přímkové; v prvém ohledu proto, že se taková plocha z prostoru S_{r-3}, jdoucího $r-2$ body jejími obecně položenými, obapolně jednoznačně promítá na rovinu, v druhém proto, že obecná nadrovina S_{r-1} protíná jednomocnou soustavu přímek plochy té v pravé čáře $(r-1)$-ho stupně, příslušné do tohoto S_{r-1}, tedy v křivce racionální normální. Protože tato průsečná křivka nemá, jak víme, bodů singulárních, nemá plocha přímková V_2^{r-1} singulárních přímek.

Význam normálních přímkových ploch V_2^{r-1} v S_r vysvítá z věty: *Každá racionální přímková plocha* $(r-1)$*-ho stupně, příslušná do prostoru* S_q, *kde* $q < r$, *může vzniknouti jako průmět racionální normální plochy přímkové* V_2^{r-1} *prostoru* S_r.

Abychom to dokázali, protněme danou racionální přímkovou plochu $P_2{}^{r-1}$ v S_q obecně položenou nadrovinou S_{q-1} v křivce K^{r-1}, jež je ovšem racionální. Tuto K^{r-1} lze pokládati za průmět racionální normální křivky C^{r-1} prostoru S_{r-1} z prostoru S_{r-q-1}, jež obdržíme tím, že daným prostorem S_q položíme prostor S_r, v něm zvolíme prostor S_{r-q-1} na S_q nezávislý a tento S_{r-q-1} spojíme s S_{q-1} v S_{r-1}. Prostor S_{r-2}, položený v tomto S_{r-1} uvedeným S_{r-q-1}, protíná křivku C^{r-1} v $r-1$ nezávislých bodech, jež se z S_{r-q-1} promítají do $r-1$ bodů, ležících na K^{r-1} a obsažených v prostoru S_{q-2}, průseku onoho S_{r-2} a prostoru S_{q-1}. Tímto S_{q-2} veďme v S_q druhý prostor S'_{q-1}, protínající P_2^{r-1} v druhé racionální křivce K'^{r-1}, která rovněž obsahuje uvedených $r-1$ bodů křivky K^{r-1} a z prostoru S_{r-q-1} se promítá kuželem stupně $(r-1)$-ho. Křivka jdoucí nahoře uvedenými $r-1$ body křivky C^{r-1} a dalším r-tým obecně položeným bodem na tomto kuželi je racionální normální C'^{r-1} (protože příslušná do $(r-1)$-rozměrného prostoru, určeného r body uvedenými), jejímž průmětem z S_{r-q-1} je průsečná K'^{r-1}. Tak jsme získali dvě racionální normální křivky C^{r-1} a C'^{r-1}, jejichž řady bodové jsou projektivně sdruženy, protože to platí o řadách na K^{r-1} a K'^{r-1}, pokládáme-li za sdružené dva body jejich, ležící na téže přímce plochy P_2^{r-1}; každý ze společných $r-1$ bodů těchto křivek odpovídá sobě samému. Přímky spojující sdružené body obou křivek C^{r-1} a C'^{r-1} vytvořují plochu, do S_r příslušnou, jejímž průmětem je daná P_2^{r-1}. Že plocha tak vytvořená je stupně $(r-1)$-ho, plyne odtud, že libovolný S_{r-2} v S_r protíná $r-1$ jejích přímek; neboť dva svazky nadrovin s basí S_{r-2}, promítajících sdružené body křivek C^{r-1} a C'^{r-1}, jsou v korespondenci $(r-1, r-1)$-značné, mají tedy $2(r-1)$ nadrovin samodružných, z nichž $r-1$ jde uvedenými prve $r-1$ body sobě samým odpovídajícími a zbývajících $r-1$ obsahuje vytvořující přímky plochy (jež protínají S_{r-2}).[7])

[7]) Přímková plocha, racionální jako útvar přímkový, od níž jsme

d) Protože vzhledem k předcházejícímu z racionálních ploch přímkových jsou nejdůležitější (racionální normální) přímkové plochy V_2^{r-1}, příslušné do S_r, všimněme si blíže těchto ploch, pokud se nerozpadají a nejsou kuželové.[8])

Přímková V_2^{r-1}, pravá a do S_r příslušná, jest proťata každou nadrovinou S_{r-1} v čáře $(r-1)$-ho stupně, jež je buď racionální normální v tomto S_{r-1} nebo se rozpadá v jedinou pravou čáru nižšího stupně m-tého a v $r-1-m$ přímek vytvořujících; *uvedená čára m-tého stupně C^m jest racionální normální křivkou prostoru S_m.* Neboť kdyby se průsečná čára dané plochy s prostorem S_{r-1} rozpadala ve dvě nebo více čar pravých (ne přímek), musila by se daná V_2^{r-1} rozpadnouti v tolikéž částí, jejichž vytvořující přímky by protínaly vždy jednu z těchto čar; a kdyby C^m (při $m > 1$) patřila do prostoru S_μ, kde $\mu < m$, bylo by možno touto čarou, kterou všechny vytvořující přímky plochy protínají, a $r-1-\mu$ body na ploše mimo ni na různých přímkách ležícími položiti nadrovinu S_{r-1}, jež by vedle C^m obsahovala $r-1-\mu$ vytvořujících přímek body těmi jdoucích, takže by danou plochu protínala ve zvrhlé čáře stupně $m+r-1-\mu > r-1$, což není možno. Každá pravá C^m (kde $1 < m \leqq r-1$) na V_2^{r-1} protíná každou vytvořující přímku plochy v jediném bodě a sluje *řídicí křivkou* plochy; neboť žádná vytvořující přímka nemůže ležeti v S_m, do něhož C^m přísluší. Stejně plyne z hořejšího, že čára m-tého stupně $(m \leqq r-1)$ na V_2^{r-1}, složená z čáry řídicí (stupně $\geqq 1$) a z přímek vytvořujících, nemůže ležeti v prostoru nižším než S_m.

Obsahuje-li přímková V_2^{r-1} v S_r dvě pravé čáry řídicí C^m a $C^{m'}$, musí součet jejich stupňů býti $m+m' \geqq r-1$. Neboť protože každá vytvořující přímka plochy protíná C^m i $C^{m'}$, musí V_2^{r-1} ležeti v prostoru, spojujícím prostory S_m a $S_{m'}$, do nichž čáry ty příslušejí; tento spojující prostor má však nejvýše $m+m'+1$ rozměrů, takže kdyby bylo $m+m' < r-1$, ležela by V_2^{r-1} v prostoru nižším než r-rozměrném proti předpokladu.

Nadrovinu S_{r-1} můžeme položiti určitým počtem vytvořujících přímek dané přímkové plochy V_2^{r-1}; protože nadrovina S_{r-1} musí obsahovati dva body přímky, aby přímkou tou procházela, a protože obsahuje jen r bodů obecně položených, jest dotčený počet vytvořujících přímek $\frac{1}{2}r$ při r sudém, $\frac{1}{2}(r-1)$ při r lichém. Zbytek průsečné čáry nadroviny takto položené s danou V_2^{r-1} jest tedy stupně $\frac{1}{2}r-1$ při

---

vyšli, je také racionální jako útvar bodový, protože je podle hořejší věty průmětem racionální normální plochy V_2^{r-1} v S_r, jež je racionální v obojím smyslu. A obráceně plocha přímková, racionální jako útvar bodový, je racionální jako útvar přímkový, jak plyne z obapolně jednoznačného zobrazení jejího na rovinu.

[8]) Kuželem jest každá přímková V_2^{r-1} v S_r, jakmile obsahuje dvojný bod; bodem tím prochází totiž aspoň jedna vytvořující přímka dané plochy v každé nadrovině jím položené.

r sudém, $\frac{1}{2}(r-1)$ při r lichém; tato čára jest obecně pravou řídicí čarou uvažované plochy, ve zvláštních případech se však rozpadá v řídicí čáru stupně nižšího a v přímky vytvořující. Plocha V_2^{r-1} nemůže míti vedle uvedené řídicí čáry stupně $m \leqq \frac{1}{2}r - 1$ při r sudém druhou řídicí čáru stupně nižšího ani téhož (protože by součet jejich stupňů byl $< r-1$ proti hořejší větě) a nemůže vedle řídicí čáry stupně $m \leqq \frac{1}{2}(r-1)$ při r lichém míti druhou řídicí čáru stupně nižšího (téhož stupně však lze připustiti vzhledem k dotčené větě). *Řídicí čára nejnižšího stupně u přímkové plochy* V_2^{r-1} *v* S_r *jest* tedy *při* r *sudém stupně* $m \leqq \frac{1}{2}r - 1$, *při* r *lichém stupně* $m \leqq \frac{1}{2}(r-1)$; *jest jediná vyjma případ* $m = \frac{1}{2}(r-1)$ *při lichém* r. Řídicí čáru nejnižšího stupně na ploše V_2^{r-1} lze nazvati stručně minimální čarou řídicí.

Vezměme v úvahu přímkovou V_2^{r-1} v S_r s řídicí čarou C^m nejnižšího stupně m-tého. Proměnná nadrovina S_{r-1}, položená vytvořujícími přímkami plochy té v počtu $k \leqq m$, jež leží, jsouce nezávislé,[9]) ve spojujícím prostoru S_{2k-1}, nemůže obsahovati další pevnou přímku vytvořující ani pevnou čáru řídicí; neboť v prvním případě leželo by v uvedeném S_{2k-1} $k+1$ přímek vytvořujících, což odporuje větě, že vytvořující přímky v počtu $m+1$ nebo menším jsou nezávislé, v případě druhém leželo by v prostoru S_{2k}, položeném oním S_{2k-1} a bodem na V_2^{r-1} mimo něj zvoleným, opět $k+1$ vytvořujících přímek (tedy nezávislých, jež mají spojující S_{2k+1}). Proto protínají dotčené nadroviny plochu V_2^{r-1} (mimo uvedených k přímek) v různých čarách $(r-1-k)$-tého stupně; tyto C^{r-k-1} jsou pravé, protože by jinak nadroviny ty měly společnou řídicí čáru proti hořejšímu zjištění. Obráceně pravá C^{r-k-1} na V_2^{r-1} a k vytvořujících přímek této plochy leží vždy v S_{r-1}. Obdržíme tedy *všechny* (*řídicí*) *čáry* $(r-k-1)$*-ho stupně na ploše* V_2^{r-1} *s minimální čarou řídicí* C^m *pro* $k \leqq m$ *jako průseky plochy té s nadrovinami, položenými kterýmikoli* k *vytvořujícími přímkami jejími*; *pravých těchto čar jest na ploše* ∞^{r-2k} (každá je určena $r-2k$ libovolnými body plochy, jež spolu s k přímkami určují S_{r-1}). Kterékoli dvě z čar těch protínají se v $r-1-2k$ bodech; neboť nadrovina, vedená jednou z nich, obsahuje k přímek plochy a protíná druhou v $r-1-k$ bodech, z nichž k leží na oněch přímkách a ostatních $r-1-2k$ na čáře druhé.

[9]) To plyne z věty, že k vytvořujících přímek přímkové plochy V_2^{r-1} v S_r s minimální řídicí čarou C^m jest vždy nezávislých, jestliže $k \leqq m+1$. Správnost její pro $k = m+1$ (tedy i pro $k < m+1$) poznáme takto: Je-li spojujícím prostorem $m+1$ přímek vytvořujících prostor S_p, jest $p \leqq 2m+1 \leqq r-1$ nebo r při r sudém resp. lichém. Pro $p = r$ jest $p = 2m+1$ a uvažované přímky jsou proto nezávislé; pro $p < r$ obsahuje S_p přece C^m (protože obsahuje $m+1$ bodů jejích), a položíme-li prostorem S_p i $r-1-p$ body dané plochy, ležícími na dalších vytvořujících přímkách jejích, nadrovinu S_{r-1}, má tato s plochou mimo C^m společných $m+1+r-1-p$ přímek, tedy celkem složenou čáru stupně $r+2m-p$, což musí býti $r-1$, takže opět $p = 2m+1$ a uvažované přímky jsou také zde nezávislé.

e) Nalezli jsme, že v prostoru S_r může existovati při r sudém $\frac{1}{2}r - 1$, při r lichém $\frac{1}{2}(r-1)$ různých přímkových (nekuželových) ploch V_2^{r-1}, charakterisovaných minimální čarou řídicí stupně m-tého, kde $m = 1$ až $\frac{1}{2}r - 1$, resp. 1 až $\frac{1}{2}(r-1)$.

Abychom zjistili existenci uvedených typů přímkové plochy V_2^{r-1} v S_r, všimněme si ještě dvou jejích vlastností: Minimální řídicí čára C^m takové plochy přímkové a jedna z čar C^{r-m-1}, jež plocha podle věty předcházejícího odstavce obsahuje a jež jsou podle dřívější věty normálními čarami prostoru S_m resp. S_{r-m-1}, leží v prostorech nezávislých a body jejich řad jsou projektivní, pokládáme-li za sdružené dva body na téže vytvořující přímce uvažované plochy. Neboť kdyby S_m a S_{r-m-1} nebyly nezávislé, měl by prostor je spojující méně než r rozměrů a obsahoval by plochu V_2^{r-1} proti předpokladu, že tato přísluší do S_r. Bodové řady na C^m a C^{r-m-1} jsou pak projektivní vzhledem k tomu, že každým bodem jedné i druhé prochází jediná přímka vytvořující a že každá vytvořující přímka protíná jednu i druhou čáru jen v jednom bodě.

Můžeme tedy v prostoru S_r při dané pravé C^m jako minimální čáře řídicí (tedy stupně $m \leqq \frac{1}{2}r - 1$ resp. $m \leqq \frac{1}{2}(r-1)$) sestrojiti přímkovou V_2^{r-1} tím, že k čáře té připojíme pravou čáru C^{r-m-1} prostoru S_{r-m-1}, nezávislého na prostoru S_m čáry dané, a mezi bodovými řadami těchto čar zvolíme korespondenci projektivní: spojnice sdružených bodů obou projektivních řad vytvoří plochu přímkovou, jež je stupně $(r-1)$-ho a má C^m za minimální čáru řídicí. Že vytvořená plocha je $(r-1)$-ho stupně, prokážeme takto: V S_r obdržíme mezi dvěma svazky nadrovin s basí S_{r-2} korespondenci $(m, r-1-m)$-značnou, jestliže k nadrovině jednoho svazku, jdoucí bodem na C^m, přiřadíme nadroviny druhého svazku, jdoucí jednotlivými průsečíky oné nadroviny s C^{r-m-1} a k nadrovině svazku druhého, jdoucí bodem na C^{r-m-1}, přiřadíme nadroviny prvého svazku, jdoucí vždy jedním průsečíkem uvedené nadroviny s C^m; v korespondenci takových dvou svazků jest $r-1$ nadrovin samodružných, z nichž každá obsahuje jednu a jedinou přímku plochy vytvořené, takže prostor S_{r-2} protíná $r-1$ vytvořujících přímek plochy té. Že pak vytvořená V_2^{r-1} nemá řídicí čáry stupně nižšího než m-tého, plyne z relace $m \leqq r-1-m$, jež platí podle suposice o stupni m zvolené C^m.

V každém z uvedených typů má přímková plocha jen jednu minimální čáru řídicí m-tého stupně až na případ $m = \frac{1}{2}(r-1)$ při r lichém. Tento typ přímkové plochy má (podle věty z konce předešlého odstavce) ∞^1 minimálních čar řídicích stupně $\frac{1}{2}(r-1)$; každým bodem plochy prochází jediná čára taková, libovolné dvě nemají společného bodu; všechny tyto čáry lze obdržeti jako průseky plochy se svazkem nadrovin, jehož basí je S_{r-2}, položený $\frac{1}{2}(r-1)$ libovolnými přímkami vytvořujícími na této ploše.

Podle uvedené konstrukce přímkových ploch V_2^{r-1} v S_r můžeme nalézti rovnice těchto ploch. Pro přímkovou V_2^{r-1} v S_r s minimální

čarou řídicí C^m buďtež základem tato C^m o rovnicích

$$x_1 = \lambda^m,\ x_2 = \lambda^{m-1}, \ldots, x_m = \lambda,\ x_{m+1} = 1,$$
$$x_{m+2} = 0,\quad x_{m+3} = 0, \ldots, x_r = 0,\quad x_{r+1} = 0,$$

a C^{r-m-1} o rovnicích

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots, x_m = 0,\ x_{m+1} = 0,$$
$$x_{m+2} = \lambda^{r-m-1},\ x_{m+3} = \lambda^{r-m-2}, \ldots, x_r = \lambda,\ x_{r+1} = 1;$$

projektivnost mezi body těchto řídicích čar můžeme zvoliti tak, aby body sdružené měly na obou čarách tutéž hodnotu parametru λ. Každý bod vytvořené plochy přímkové bude míti souřadnice

$$x_1 = \lambda^m,\ x_2 = \lambda^{m-1}, \ldots, x_m = \lambda,\quad x_{m+1} = 1,$$
$$x_{m+2} = \mu\lambda^{r-m-1},\ x_{m+3} = \mu\lambda^{r-m-2}, \ldots, x_r = \mu\lambda,\ x_{r+1} = \mu;$$

při konstantním λ a proměnném μ jsou to body na jedné přímce vytvořující, při proměnných λ i μ jsou to všechny body plochy V_2^{r-1}. Rovnice plochy V_2^{r-1} obdržíme pak eliminací parametrů λ a μ třebas ve tvaru

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \ldots = \frac{x_m}{x_{m+1}} = \frac{x_{m+2}}{x_{m+3}} = \frac{x_{m+3}}{x_{m+4}} = \ldots = \frac{x_r}{x_{r+1}}$$

nebo

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 \ldots x_m & x_{m+2} & x_{m+3} \ldots x_r \\ x_2 & x_3 \ldots x_{m+1} & x_{m+3} & x_{m+4} \ldots x_{r+1} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Tyto rovnice odůvodňují dvojí vytvoření přímkové plochy V_2^{r-1} v S_r s minimální řídicí čarou C^m: jednak průsečnými přímkami sdružených nadrovin v $r-1$ projektivních svazcích nadrovinových s rovnicemi

$$x_1 - \lambda x_2 = 0, \ldots, x_m - \lambda x_{m+1} = 0,\ x_{m+2} - \lambda x_{m+3} = 0, \ldots, x_r - \lambda x_{r+1} = 0,$$

jednak průsečíky sdružených rovin (pokud se protínají) ve dvou kolineárních svazech (s basemi v přímkách) o rovnicích

$$v_1 x_1 + \ldots + v_m x_m + v_{m+1} x_{m+2} + \ldots + v_{r-1} x_r = 0,$$
$$v_1 x_2 + \ldots + v_m x_{m+1} + v_{m+1} x_{m+3} + \ldots + v_{r-1} x_{r+1} = 0.$$

Z nalezených rovnic přímkové V_2^{r-1} v S_r vyplývá také, že *dvě přímkové plochy* $(r-1)$*-ho stupně v* S_r*, jež mají minimální čáry řídicí téhož stupně, jsou projektivně totožny*; že to platí jen o takových plochách přímkových V_2^{r-1} v S_r, plyne z obdobné vlastnosti racionálních čar normálních.[10])[11])

[10]) Uvedené a další vlastnosti přímkových ploch $V_2{}^{r-1}$ v S_r podává *C. Segre*, Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque, Atti Accad. Torino 19 (1884). Pro $r = 4$ také *V. Hlavatý*, O určité ploše třetího řádu ve čtyřrozměrném prostoru, Rozpravy Čes. akad. 31 (1922).

[11]) Normální racionální plocha přímková $V_2{}^{r-1}$ v S_r s minimální řídicí čarou m-tého stupně je invariantní při spojité grupě kolineací s $r - 2m + 4$

f) Plochy V_2^{r-1} v S_r jsou všechny přímkové až na plochu Veroneseovu: *Pravé a do prostoru S_r příslušné plochy V_2^{r-1} jsou* (nehledíme-li ke kuželům) *přímkové plochy* (*racionální normální*) *a plocha Veroneseova* (v S_5).[12])

Důkaz této věty lze provésti postupně (pro $r = 4, 5, 6, \ldots$). Průmětem plochy V_2^3 v S_4, jež není kuželová, z obecně položeného bodu jejího O do S_3 jest nekuželová (přímková) V_2^2.[13]) Body na V_2^3, nekonečně blízké k bodu O, promítají se na plochu V_2^2 do bodů přímky p, v níž tečná rovina dané plochy v O protíná prostor S_3. Přímky na V_2^2, náležející do téže řady jako p, jsou průměty přímek na V_2^3, ležících mimo O, kdežto přímky druhé řady na V_2^2 jsou průměty kuželoseček na V_2^3, jdoucích bodem O a protínajících vytvořující přímky této plochy. Jest tedy každá plocha V_2^3, do prostoru S_4 příslušná, přímková s jedinou přímkou řídicí; neboť do přímky na V_2^2, jež uvedenou přímku p protíná v průsečíku jejím s vytvořující přímkou na V_2^3 bodem O jdoucí, promítá se kuželosečka na V_2^3, která se rozpadá v tuto přímku vytvořující a v přímku, proťatou všemi vytvořujícími plochy V_2^3; a protože V_2^3 může míti jen jednu přímku řídicí, jsou tím plochy V_2^3 v S_4 vyčerpány.

Vezměme dále v úvahu plochu V_2^4 v S_5, jež není kuželovou, a promítněme ji z obecného bodu jejího O do S_4; průmětem plochy té je nekuželová plocha přímková V_2^3, prve uvedená. Body sousední k O promítají se opět do bodů přímky p (průseku tečné roviny plochy V_2^4 v O s prostorem S_4); tato však může býti přímkou vytvořující nebo řídicí.

---

parametry (při $m < \frac{1}{2}(r-1)$, avšak s 6 parametry při $m = \frac{1}{2}(r-1)$). Viz *H. Mohrmann*, Bestimmung aller Normalflächen mit transitiven automorphen Gruppen von projektiven Transformationen, Rendiconti Circolo mat. Palermo 32 (1911), a Normalflächen und projektive Gruppen, Habilitationsschrift Karlsruhe 1911.

[12]) Věta tato byla nazvána *Pezzovou*: *P. del Pezzo*, Sulle superficie di ordine n immerse nello spazio di $n+1$ dimensioni, Rendiconto Accad. Napoli 24 (1885), a Sulle projezioni di una superficie e di una varietà dello spazio ad n dimensioni, tamtéž 25 (1886).

[13]) Lze totiž zjistiti, že plocha V_2^{r-1} v S_r, jejímž průmětem z obecně položeného bodu jejího O do S_{r-1} jest kužel (při $r > 3$), jest také kuželová. Neboť dejme tomu, že průmětem plochy V_2^{r-1} z bodu O jest kužel K s vrcholem R; v promítající nadrovině S_{r-1}, bodem R vedené, leží prostor S_{r-2} obsahující $r-2$ vytvořujících přímek kužele K, z nichž aspoň jedna je průmětem přímky na V_2^{r-1} mimo O ležící (protože všechny nemohou býti průměty kuželoseček jdoucích na V_2^{r-1} bodem O vzhledem k tomu, že průsečná čára nadroviny s danou plochou je pouze $(r-1)$-ho stupně). Odtud soudíme, že každá vytvořující přímka na K je průmětem přímky na V_2^{r-1} ležící, takže V_2^{r-1} je přímková; uvážíme-li pak, že přímka OR musí všechny vytvořující přímky plochy V_2^{r-1} protínati (protínajíc všechny jejich průměty v bodě R), a to v témž bodě (jinak by byla řídicí přímkou plochy té, a V_2^{r-1} by pro obecnou polohu bodu O měla ∞^1 přímek řídicích, což při $r > 3$ není možno), shledáváme, že V_2^{r-1} jest kuželem.

V prvém případě jsou ostatní vytvořující přímky plochy V_2^3 průměty vytvořujících přímek plochy dané, jež je tedy přímková; V_2^4 má jedinou přímku řídicí nebo ∞^1 řídicích kuželoseček podle toho, je-li řídicí přímka na uvažované V_2^3 průmětem přímky nebo kuželosečky jdoucí bodem O (t. j. protíná-li vytvořující přímka plochy V_2^4 jdoucí bodem O přímku p v témž bodě jako řídicí přímka plochy V_2^3 nebo ne). Je-li však v druhém případě přímka p, v níž tečná rovina v O protíná S_4, přímkou řídicí na V_2^3, jsou vytvořující přímky na V_2^3 průměty ∞^1 kuželoseček plochy V_2^4, jdoucích bodem O: plocha V_2^4 není přímková, nýbrž, obsahujíc ∞^2 kuželoseček, je Veroneseova.

Promítneme-li dále nekuželovou V_2^5 v S_6 z obecného bodu jejího O do S_5, promítnou se body k O sousední do bodů přímky na ploše V_2^4, jež je tedy vzhledem k předcházejícímu přímkovou plochou nekuželovou. Kdyby plocha V_2^5 nebyla přímková, musila by dotčená přímka býti řídicí přímkou plochy V_2^4 a její body, jsouce průměty bodů sousedních k bodu O, byly by průměty bodů kuželoseček bodem O na V_2^5 jdoucích. Obsahovala by tudíž V_2^5 celkem ∞^2 kuželoseček, což však není možno, protože tuto vlastnost má jenom plocha Veroneseova (a její průměty). Tak můžeme pokračovati i dále, čímž jest tedy věta dokázána.[14])[15])[16])

150. Algebraické variety bodové. *a) Algebraická varieta (bodová)* prostoru S_r definuje se jako soustava bodů, jež svými souřadnicemi $x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}$ vyhovují skupině rovnic, kterou lze upraviti na tvar

$$f_h(x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots) = 0$$

[14]) Eliptické plochy přímkové v S_r (spec. normální V_2^{r+1}) vyšetřoval zejména *C. Segre*; viz *C. Segre*, Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine, Atti Accad. Torino 21 (1886), a Alcune considerazioni elementari sull'incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni, Rendiconti Circolo mat. Palermo 2 (1888); *U. Perazzo*, Sulla incidenza di rette, piani e spazii ordinarii in uno spazio a cinque dimensioni . . ., Memorie Accad. Torino (2) 54 (1904).

[15]) Byly dále studovány plochy v S_r z hlediska svých průsečných čar s nadrovinami. A nalezeno: Plocha n-tého stupně, jejíž průsečné čáry s nadrovinami jsou racionální, jest racionální: jsou to V_2^n, příslušné do S_{n+1}, a jejich průměty, tedy buď racionální plochy přímkové nebo plocha Veroneseova V_2^4 v S_5 nebo projekce této z bodů mimo ni ležících. Dále pak: Plochy n-tého stupně, jejichž nadrovinné řezy jsou čáry eliptické, jsou přímkové nebo V_2^n, příslušné do S_n, a jejich průměty.

[16]) O některých významnějších plochách speciálních pojednávají na př. *C. Segre*, Étude des différentes surfaces du quatrième ordre à conique double ou cuspidale considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions, Math. Annalen 24 (1884); *G. Bordiga*, La surface du sixième ordre avec six droites, a Nouveaux groupes de surfaces à deux dimensions dans les espaces à n dimensions, Comptes r. Acad. Paris 102 (1886); a téhož Dei alcune superficie del 5° e del 6° ordine che si deducono dello spazio a sei dimensioni, Atti Ist. Veneto (6) 4 (1886); *P. del Pezzo*, Sulle superficie del n^{mo} ordine immerse nello spazio di n dimensioni, Rendiconti Circolo mat. Palermo 1 (1887).

pro $h = 1, 2, \ldots$, kde f_h jsou racionální celistvé a homogenní funkce proměnných souřadnic $x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}$ a racionální celistvé (homogenní) funkce parametrů $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$.[1])

Soustava bodů, společných dvěma algebraickým varietám, čili jejich *průsek* jest také algebraická varieta, určená souborem obou skupin rovnic, dané dvě variety vyjadřujících. Rovněž *průmět* algebraické variety z prostoru S_p (v S_r ležícího) jest algebraická varieta prostoru S_r; neboť je-li S_p spojujícím prostorem vrcholů $O_1, O_2, \ldots, O_{p+1}$ základního útvaru souřadnic, jsou rovnicemi uvedeného průmětu rovnice dané variety, v nichž $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ nabudou významu parametrů.

Body algebraické variety, hořejším způsobem definované, závisí na určitém počtu proměnných veličin volitelných, který předpokládáme pro všechny její body týž a nazýváme *počtem rozměrů* (rozměrem) dané variety; je-li tímto počtem číslo k, označujeme algebraickou varietu V_k. Lze dokázati, že uvedenou skupinu rovnic varietu určujících jest možno nahraditi systémem, jenž obsahuje jen souřadnice bodů variety; zejména že pro $k = r - 1$ lze algebraickou varietu vyjádřiti jedinou rovnicí pro souřadnice jejích bodů, že tedy V_{r-1} je nadplochou prostoru S_r.[2]) Pro $k = 2$ máme ovšem plochu, pro $k = 1$ čáru, pro $k = 0$ jen konečný počet bodů.

Jestliže se daná V_k rozkládá v několik soustav bodových (různých nebo splývajících) téhož počtu k rozměrů, sluje *složená* (zvrhlá); spec. sluje m-násobná, sestává-li z m variet v jednu splývajících; není-li varieta složená, sluje *pravá* (jednoduchá).

Nahradíme-li skupinu rovnic varietu V_k definujících rovnicemi, jež obsahují jenom souřadnice, z nichž tedy k je nezávisle proměnných, jest patrno, že tyto rovnice spolu s k připojenými lineárními rovnicemi obecně položeného prostoru S_{r-k} tvoří soustavu rovnic, ze které vyloučením všech proměnných mimo jednu vyplývá rovnice určitého stupně n-tého, poskytující (spolu s ostatními) souřadnice bodů, společných varietě V_k a prostoru S_{r-k}: *počet n bodů, jež má obecně položený* S_{r-k} *společný s varietou* V_k, *sluje stupněm této variety*, ta pak se určitěji označuje V_k^n. Jestliže prostor S_{r-k} má s varietou V_k^n $n + 1$ společných bodů, má s ní společných nekonečně mnoho bodů, t. j. protíná ji ve varietě aspoň jednorozměrné (a po případě ještě v jiných bodech); neboť uvedená rovnice n-tého stupně, mající $n + 1$ kořenů, je splněna identicky.

---

[1]) Viz *C. Segre*, Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito, Annali mat. (2) 22 (1894); *E. Bertini*, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, p. 222 a n.

[2]) Viz na př. *J. König*, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen (1903). Vzhledem k hořejšímu předpokladu lze uvésti, že daná soustava bodů, není-li počet proměnných veličin pro všechny její body stejný, rozpadá se v několik soustav suponované vlastnosti.

A obecně platí: *Obecně položený q-rozměrný prostor* S_q (při $q \gtreqless r-k$), *v* S_r *ležící, protíná varietu* V_k^n *prostoru* S_r *ve varietě* V_{k+q-r}^n; má-li S_q s varietou V_k^n společnými varietu V_{k+q-r}^n a bod, protíná ji ve varietě o $k+q-r+1$ rozměrech nebo o větším počtu rozměrů (nebo v několika varietách, z nichž aspoň jedna má tento počet rozměrů). Neboť prostor S_{r-k} v S_q (a tedy v S_r) obecně zvolený protíná danou varietu v n bodech, tudíž její průsek s prostorem S_q rovněž v n (těchže) bodech; existuje-li však mimo V_{k+q-r} ještě společný bod variety dané a prostoru S_q, protíná prostor S_{r-k} tímto bodem položený podle předešlého danou varietu ve varietě aspoň jednorozměrné, pročež průseky ∞^{q-r+k} prostorů S_{r-k} bodem tím v S_q položených (jdoucích obecným S_{r-k-1}, bod ten obsahujícím) a variety dané tvoří varietu aspoň o $q-r+k+1$ rozměrech.

Bod variety V_k^n sluje *m-násobný*, jestliže obecný S_{r-k} bodem tím jdoucí má tam s danou varietou *m* splývajících bodů společných (má-li totiž příslušná rovnice n-tého stupně pro určitou souřadnici průsečíků variety V_k^n a prostoru S_{r-k} souřadnici bodu toho za kořen m-násobný).

Varieta V_k^n s n-násobným bodem S_0 sestává z ∞^{k-1} přímek S_1 bodem tím jdoucích; obecně V_k^n, obsahující prostor S_v bodů n-násobných ($v < k-1$), sestává z ∞^{k-v-1} prostorů S_{v+1} prostorem S_v jdoucích a sluje *kužel* s vrcholem S_v. Neboť v případě n-násobného bodu S_0 má každý S_{r-k}, položený tímto bodem a dalším bodem variety V_k^n, s touto $n+1$ společných bodů, tedy společnou aspoň varietu jednorozměrnou, kterou je právě přímka oběma těmi body určená; z toho pak plyne věta obecná. Pozoruhodný je zvláště případ, kdy $v = k-2$, tedy kužel s vrcholem S_v, tvořený ∞^1 prostory S_{v+1}.[3])[4])

b) Prostor S_r sluje *příslušným prostorem* variety V_k^n (varieta V_k^n přísluší do S_r nebo náleží prostoru S_r), je-li to prostor o nejmenším počtu rozměrů, v němž leží všechny body variety V_k^n.

Je-li příslušným prostorem variety V_k^n *prostor* S_r, *jest možno nekonečně mnohými způsoby zvoliti* $h \geqq 0$ *nezávislých bodů mimo danou varietu a* $r+1-h$ *nezávislých bodů na ní tak, že body ty tvoří dohromady*

---

[3]) Varieta V_k^n obsahující S_{k-1} bodů n-násobných skládá se z n prostorů S_k, oním S_{k-1} jdoucích; obsahuje-li S_k n-násobných bodů, je to n-násobný S_k.

[4]) Mimo stupeň zavedl pro V_k další charakteristická čísla *F. Severi*, Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità projettive, Memorie Accad. Torino (2) 52 (1903). Pojem rodu rozšířil na V_k *M. Nöther*, Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen, Math. Annalen 2 (1869); viz také *C. Segre*, Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche, Atti Accad. Torino 31 (1896).

K pojmům algebraické variety se týkajícím viz dále *P. Finsler*, Algebraische Gebilde, Math. Annalen 101 (1929).

$r+1$ *nezávislých bodů prostoru* S_r; je-li V_k^n pravá, lze za $r+1-h$ uvedených bodů zvoliti kterékoli obecně položené body její. Neboť kdyby při h bodech mimo V_k^n zvolených nebylo možno na V_k^n vybrati více než $s \leqq r-h$ bodů nezávislých, ležela by varieta V_k^n v prostoru o $h+s-1$ rozměrech, tedy v prostoru s menším počtem než r rozměrů.

Pravá varieta V_k^n (nebo i složená, avšak bez násobné části) *jest obecně položeným prostorem* S_{r-k} *proťata v* n *bodech různých.* Neboť kdyby z n průsečíků uvedených dvou útvarů bylo různých jen $\alpha+\beta<n$ na př. tak, že by vedle α jednoduchých každý z ostatních $\beta\,(>0)$ obsahoval dva průsečíky splývající, měla by rovnice n-tého stupně, k průsečíkům těm vedoucí, α kořenů jednoduchých a β dvojnásobných, a bylo by možno nahraditi ji dvěma rovnicemi, z nichž jedna a druhá spolu s ostatními rovnicemi obou útvarů určovala by jednoduchou resp. dvojnásobnou součástku variety V_k^n proti předpokladu.

Pravá V_k^n *jest obecně položeným* S_{r-k+p} *proťata v pravé* V_p^n (při $p \geqq 0$); spec. (mimo případ hořejší) jest pravá V_k^n proťata obecným S_{r-k+1} v pravé V_1^n. Neboť kdyby v případě průsečné variety V_1^n (při protínajícím S_{r-k+1}) existovaly na př. dvě její součásti o stupních α resp. β, vytvořily by tyto čáry při proměnném S_{r-k+1} s pevným prostorem S_{r-k}, jenž by protínal jednu v α a druhou v β různých bodech, dvě různé variety k-rozměrné a daná V_k^n by tedy byla složená; neboť protože z α pevných bodů na jedné z nich (v S_{r-k} ležících) každý je různý od každého z β pevných bodů na druhé, nemůže první čára jíti žádným z β uvedených bodů na druhé a nemohou proto variety jimi vytvořené splývati. Odtud pak plyne věta obecná.

Poslední větu můžeme doplniti zřetelem k prostorům příslušným: *Je-li varieta* V_k^n *pravá a náleží-li prostoru* S_r, *náleží její průsek s obecně položeným* S_{r-k+p} (při $p \geqq 0$), *pravá varieta* V_p^n, *tomuto prostoru* S_{r-k+p}. Neboť náleží-li pravá varieta V_k^n prostoru S_r, náleží její průsek V_{k-1}^n s obecným S_{r-1} protínajícímu S_{r-1}; kdyby totiž průsek ten ležel v prostoru S_{r-2}, bylo by možno na V_k^n mimo tento S_{r-2} zvoliti bod, určující spolu s prostorem tím prostor S_{r-1}, jenž by obsahoval buď celou varietu V_k^n nebo její část; první však odporuje předpokladu o příslušném S_r, druhé předpokladu o pravé V_k^n. Protože průsečná varieta V_{k-1}^n je podle dřívější věty pravá a podle předcházejícího přísluší do S_{r-1}, nalezneme stejně jako prve, že její průsek V_{k-2}^n s obecným S_{r-2} je pravá varieta V_{k-2}^n příslušná do S_{r-2}, atd.

Odtud plyne důležitá věta: *Je-li varieta* V_k^n *pravá a přísluší-li do prostoru r-rozměrného, musí býti* $r \geqq k+n-1$. Podle věty právě dokázané jest totiž průsekem pravé variety V_k^n s obecně položeným S_{r-k} skupina n různých bodů, jež určují prostor S_{r-k}, takže musí platit $n \geqq r-k+1$ čili $r \leqq k+n-1$.[5])

c) Promítejme v prostoru S_r pravou varietu V_k^n z prostoru S_{p-1} do nezávislého vůči němu prostoru S_{r-p} za suposice, že $p < r - k$.

Je-li napřed *prostor* S_{p-1} *určen p body mimo* V_k^n *obecně položenými, promítá se pravá* V_k^n *z prostoru toho* S_{p-1} *do nezávislého prostoru* S_{r-p} *v pravou varietu* V'^n_k *téhož počtu rozměrů, téhož stupně a takovou, že mezi* V'_k *a* V_k *existuje korespondence obapolně jednoznačná; a je-li* S_r *příslušným prostorem variety* V_k, *přísluší také* V'_k *do prostoru* S_{r-k}. Má-li totiž prostor S_p, jdoucí pevným S_{p-1}, s varietou V_k^n společné body v počtu konečném nebo nekonečně velikém, má všech ∞^{r-p} prostorů S_p, oním S_{p-1} jdoucích, s varietou V_k^n aspoň ∞^{r-p} bodů společných, takže musí býti $k \geq r - p$; je-li však $k < r - p$, jak jsme suponovali, nemá obecně položený S_p uvažovaného svazku s danou varietou žádného společného bodu. Vedeme-li tedy jednotlivými body variety V_k^n prostory S_p, jdoucí pevným S_{p-1}, nemají tyto prostory za suposice $p < r - k$ s danou varietou dalších bodů společných a protínají prostor S_{r-p} (na S_{p-1} nezávislý) v jednotlivých bodech tak, že mezi těmito a oněmi vznikne korespondence obapolně jednoznačná; soustava těchto průsečíků tvoří pak varietu V'_k téhož počtu rozměrů jako daná V_k. Stupeň průmětu V'_k je týž jako stupeň variety V_k, protože obecný prostor S_{r-p-k} v prostoru S_{r-p} ležící protíná varietu V'_k v tolika bodech, v kolika protíná varietu V_k prostor S_{r-k}, spojující S_{r-p-k} s pevným S_{p-1}. Kdyby průmět V'_k byl složen z několika částí, musilo by to platit i o dané V_k, což odporuje předpokladu. Kdyby konečně V'_k příslušela do prostoru S_{r-p-1}, musila by V_k náležeti prostoru, spojujícímu S_{r-p-1} s pevným S_{p-1}, tedy prostoru S_{r-1} proti předpokladu. Při zvláštní poloze prostoru S_{p-1}, středu promítání, nemusí ovšem korespondence mezi danou varietou a jejím průmětem býti obapolně jednoznačná. Je-li speciálně $p = r - k - 1$, promítá se daná V_k z obecně položeného S_{r-k-2} ve varietu V'_k prostoru S_{k+1}, tedy v nadplochu tohoto prostoru.

Abychom vyšetřili u průmětu V'^n_k variety, složené z bodů násobných, vezměme v úvahu prostory S_q, určené vždy $q + 1$ obecně položenými body pravé variety V_k^n do S_r příslušné. Jest možno dokázati, že při $q < r - k$ nemá takový S_q s danou varietou dalších bodů společných.[6]) Zvolíme-li tedy na V_k^n uvedený počet $q + 1$ bodů všemi

[5]) Dvě algebraické variety $V_k{}^n$ a $V_{k'}{}^{n'}$ protínají se, je-li $k + k' > r$, v $(k + k' - r)$-rozměrné varietě stupně nn' (nemají-li společnou varietu vícerozměrnou); při $k + k' = r$ mají (obecně) nn' společných bodů. Viz *M. Nöther*, Zur Eliminationstheorie, Math. Annalen 11 (1877); *M. Pieri*, Sopra un teorema di geometria a n dimensioni, Giornale mat. 26 (1888); dále pojednání *F. Severiho*, cit. v pozn. [4]).

[6]) Neboť dejme tomu nejprve, že (při $q = 1$) existují na V_k, jejíž $k < r - 1$, dva body obecně položené, jejichž spojnice protíná V_k ještě

možnými způsoby, dostaneme $\infty^{k(q+1)}$ prostorů S_q. Aby takový prostor S_q ležel v prostoru S_p $(p \geqq q)$, jenž prochází obecně položeným S_{p-1}, musí se prostory S_q a S_{p-1} protínati v prostoru o $q-1$ rozměrech, k čemuž musí býti splněno $q(r-p)$ podmínek. Protože každý S_p, jdoucí pevným S_{p-1} a obsahující uvažovaný S_q, protíná danou varietu v $q+1$ bodech, existuje vzhledem k obému $[k(q+1)-q(r-p)]$-mocná soustava prostorů S_p, jež procházejí obecně položeným S_{p-1} a danou varietu V_k vždy v $q+1$ bodech protínají (při čemž předpokládáme $q \leqq p < r-k$). Takovým prostorem promítá se však jeho $q+1$ průsečíků s varietou V_k do jediného, tudíž $(q+1)$-násobného bodu variety V'_k na S_{r-p}. Tím dospíváme k poznatku, že *průmět V'_k dané variety V_k z obecně položeného S_{p-1} do S_{r-p} obsahuje* $[k-q(r-k-p)]$-*rozměrnou varietu bodů* $(q+1)$-*násobných* (je-li ovšem $k(q+1)-q(r-p) \geqq 0$). Je-li spec. $p=r-k-1$, má průmět V'_k v S_{k+1} $(k-q)$-rozměrnou varietu bodů $(q+1)$-násobných $(q=1, 2, \ldots, k)$.

Pravá V_k^n do S_r příslušná promítá se dále, *je-li prostor S_{p-1} určen p body na ní obecně zvolenými, do nezávislého S_{r-p} ve varietu V'^{n-p}_k* stupně $(n-p)$-tého, avšak *opět tak, že korespondence mezi oběma je obapolně jednoznačná.* Uvedená korespondence mezi V'_k a V_k vyplývá z hořejší věty, že při $p < r-k$ má S_p s danou varietou mimo pevných p bodů jen jeden bod společný. Nižší stupeň průmětu V'_k plyne pak odtud, že body každému z p zvolených bodů variety V_k nekonečně blízké promítají se vždy do prostoru o $k-1$ rozměrech; obecně položený S_{r-p-k} v prostoru S_{r-p} protíná proto varietu V'_k jenom v $n-p$ bodech, totiž v průmětech průsečíků variety V_k s prostorem S_{r-k}, spojujícím S_{r-p-k} a S_{p-1}, různých od oněch p bodů pevných.

Obě věty (případy, kdy body S_{p-1} určující byly zvoleny mimo V_k^n a na ní) lze spojiti ve větu je zahrnující: *Průmět pravé variety V_k^n do S_r příslušné z prostoru S_{p-1}, určeného p_1 body mimo V_k^n a p_2 body na V_k^n obecně položenými* (kde $p_1 + p_2 = p$), *do nezávislého prostoru S_{r-p} jest*

v dalších bodech; potom obsahuje také čára, v níž obecný S_{r-k+1} danou V_k protíná (protože je pravá a do S_{r-k+1} příslušná), dva obecně položené body se spojnicí, mající na této čáře další své body; totéž platí (je-li $r-k+1>3$) z týchž důvodů o průmětu čáry té z obecného S_{r-k-3} do S_3. V S_3 však nemůže existovati čára (prostorová), kterou obecná sečna protíná ve třech nebo více bodech. Dejme tomu dále, že hořejší věta neplatí pro určité $q > 1$, platí však pro hodnoty menší; má-li tedy S_q, jdoucí $q+1$ body variety V_k obecně položenými, aspoň jeden další bod s V_k společný, všimněme si průmětu dané variety z prostoru S_{q-2}, určeného $q-1$ obecnými body této variety, do prostoru S_{r-q+1}; vztah mezi danou V_k a jejím průmětem V'_k v prostoru S_{r-q+1} je obapolně jednoznačný a V'_k má sečny aspoň s třemi průsečíky, což však při $k < (r-q+1)-1$ není podle uvedeného možno.

za suposice $p < r - k$ *v příbuznosti obapolně jednoznačné k dané varietě a má stupeň* $n - p_2$.

Varieta V_k, jejíž příslušný prostor jest S_r, sluje jeho varietou *normální*, nemůže-li vzniknouti promítnutím ze žádné variety *téhož stupně* do vyššího prostoru příslušné; také prostor S_r, příslušný normální varietě, jejímž průmětem je varieta uvažovaná, může býti nazýván normálním prostorem této. Vzhledem k větě na konci předešlého odstavce uvedené (protože neexistují pravé variety k-rozměrné stupně $(r - k + 1)$-ho, příslušné do prostoru vyššího než r-rozměrného) *jsou pravé a do prostoru* S_r *příslušné variety* V_k^{r-k+1} *normálními varietami tohoto prostoru.*[7])

d) Vezměme v úvahu *obyčejný bod* P variety V_k a body této variety, k němu nekonečně blízké.

Přímka spojující bod P s bodem variety, k němu bez omezení se blížícím, sluje *tečnou* variety V_k v bodě P. Všechny *tečny variety* V_k *v obyčejném bodě jejím* P *vytvořují prostor* S_k, jenž sluje *tečným prostorem* variety V_k v P. Neboť libovolný S_{r-k+1}, jdoucí tečnou variety V_k v P, protíná tuto v čáře, jež se uvedené tečny v P dotýká; obráceně čára, v níž varietu V_k protíná S_{r-k+1} bodem P položený, má v bodě tom tečnu, jež je tečnou také variety V_k. Protože tedy útvar uvažovanými tečnami vytvořený má s každým S_{r-k+1} bod P obsahujícím jedinou přímku společnou a tudíž s obecně položeným S_{r-k} prostoru S_r jediný bod společný, jest to varieta 1. stupně a tedy prostor S_k. Průmět variety V_k z bodu jejího P do nadroviny S_{r-1} obsahuje průsek S_{k-1} tečného prostoru S_k této variety v bodě P s nadrovinou tou.

Nadrovina, jdoucí tečným prostorem S_k variety V_k v bodě jejím P, protíná tuto varietu ve varietě V_{k-1} s dvojným bodem v P; obráceně nadrovina, jež protíná varietu V_k ve varietě V_{k-1} s dvojným bodem v obyčejném bodě P variety V_k, obsahuje tečný prostor S_k variety V_k v P. Neboť v prvém případě protíná prostor S_{r-k} nadroviny, bodem P položený, tečný prostor S_k v tečné přímce variety V_k v P a má tedy v P dva splývající průsečíky na V_{k-1}. V druhém případě má prostor S_{r-k} nadroviny, bodem P položený, v tomto bodě dva splývající průsečíky na V_{k-1}, tedy i na V_k, takže obsahuje tečnu variety V_k v P; jest tudíž soustava všech tečen v nadrovině ležících obecným S_{r-k-1} nadroviny té proťata v jednom bodě, pročež je prostorem S_k. Nadrovina, která varietu V_k protíná ve varietě V_{k-1} s dvojnásobným bodem v obyčejném bodě P dané variety, sluje její *tečnou nadrovinou v* P; podle předcházející dvojí věty jest (každá a jenom) *nadrovina jdoucí tečným prostorem* S_k *variety* V_k *tečnou nadrovinou této variety.*

[7]) Viz *C. Segre*, Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinite di spazii, Rendiconti Accad. Lincei Roma (4) 3_2 (1887), a Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques II, Math. Annalen 34 (1889).

Vedle tečné přímky S_1, tečného prostoru S_k a tečné nadroviny S_{r-1} variety V_k prostoru S_r v obyčejném bodě jejím P nazývají se tečnými prostory variety V_k v P také prostory S_p, jež procházejí bodem P a leží v tečném prostoru S_k ($1 < p < k$) nebo jej obsahují ($k < p < r - 1$).[8])

Je-li bod P m-násobným bodem variety V_k ($k > 1$), tvoří přímky spojující jej s nekonečně blízkými body variety čili tečny variety v bodě P kužel m-tého stupně, jenž sluje *tečným kuželem* variety V_k v m-násobném bodě jejím.[9])

e) Na počátku byla algebraická varieta definována rovnicemi, v nichž vedle souřadnic byly také proměnné parametry. Danou varietu V_k prostoru S_r můžeme však vyjádřiti skupinou rovnic, jež obsahují jenom souřadnice, na základě věty: *Každá varieta V_k prostoru S_r* (při $k < r - 1$) *může býti pokládána za průsek nejvýše $r + 1$ nadploch a může tedy býti vyjádřena nanejvýš $r + 1$ rovnicemi, obsahujícími jen souřadnice.*

Dokážeme, že varieta V_k jest úplným průsekem $r + 1$ kuželů, jež ji promítají z prostorů S_{r-k-2} obecně položených. Předpokládejme, že p kuželů, promítajících danou V_k z p obecných S_{r-k-2}, mají mimo V_k společnou varietu V_{r-p}; zjistíme, že další ($p + 1$)-ní kužel, promítající V_k z obecného S_{r-k-2}, protíná oněch p kuželů mimo V_k ve varietě V_{r-p-1}. Je-li totiž pravá varieta U_{r-p} součástkou uvedené variety V_{r-p} a Q její bod mimo V_k, neprotíná obecný S_{r-k-1} bodem tím položený varietu V_k; kužel promítající V_k z obecného S_{r-k-2} v S_{r-k-1} obsaženého neobsahuje tedy bodu Q a protíná proto U_{r-p} ve varietě U_{r-p-1}; stejná úvaha platí pro každou součástku variety V_{r-p}, takže ($p + 1$)-ní kužel, V_k z obecného S_{r-k-2} promítající, protíná V_{r-p} ve varietě V_k a jen V_{r-p-1}. A protože předpoklad nahoře učiněný platí pro $p = 1$ (kužel promítající V_k z obecného S_{r-k-2} je nadplochou V_{r-1}), platí věta pro každé p až do r; $r + 1$ kuželů, promítajících danou V_k z obecně položených S_{r-k-2}, mají jenom V_k společnou, takže tato varieta je úplným průsekem jejich.[10])[11])[12])

---

[8]) O varietě V_k (při $k \leqq r - 1$) a nadploše V_{r-1} prostoru S_r pravíme, že se v bodě P navzájem dotýkají, jestliže tečná nadrovina S_{r-1} variety V_{r-1} v P obsahuje tečný prostor S_k variety V_k v bodě tom. Aby varieta V_k a nadrovina V_{r-1} ji neobsahující se ve společném obyčejném bodě svém dotýkaly, k tomu je nutno a stačí, by bod ten byl (aspoň) dvojným bodem jejich průseku V_{k-1}.

[9]) Viz *P. del Pezzo*, Sugli spazii tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni, Rendiconto Accad. Napoli 25 (1886); dále *C. Segre*, Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi, Rendiconti Circolo mat. Palermo 30 (1910).

[10]) O vytvoření a vyjádření algebraických variet v S_r viz *K. Th. Vahlen*, Über den Grad der Eliminationsresultante eines Gleichungssystems, Journal r. a. Math. 113 (1894); *M. Pieri*, Sull'ordine della varietà generata

da più sistemi lineari omografici, Rendiconti Circolo mat. Palermo 11 (1897); *P. Lorenzola*, Sul luogo di un punto base comune a $k + 1$ sistemi lineari di forme di dimensione $h + 1$ corrispondenti in altrettanti sistemi lineari omografici di specie $k + h + 1$, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 36 (1903); *G. Z. Giambelli*, Ordine della varietà rappresentata coll'annullare tutti i minori di dato ordine estratti da una data matrice di forme, Rendiconti Accad. Lincei Roma (5) 12 (1903) a Memorie Ist. Lombardo (3) 19 (1904), a Le varietà rappresentate per mezzo di una matrice generica di forme e le varietà generate da sistemi lineari projettivi di forme, Rendiconti Accad. Lincei Roma (5) 14 (1905).

Variety invariantní při spojitých grupách kolineací vyšetřoval *G. Fano*, Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive in sè, Rendiconti Circolo mat. Palermo 10 (1896); dále Sulle varietà algebriche dello spazio a quattro dimensioni con uno gruppo integrabile di trasformazioni projettive in sè, Atti Ist. Veneto (7) 7 (1896), a Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni projettive in sè, Memorie Accad. Torino (2) 46 (1896).

[11]) O *útvarech přímkových* v S_r mimo úvahy o přímkových plochách (čl. 149) a o lineárních komplexech přímek (citované v pozn. [13]) čl. 145) pojednávají zejména: *G. Bordiga*, Dei complessi in generale nello spazio a quattro dimensioni ed in particolare di alcuni di primo ordine . . ., Atti Ist. Veneto (6) 6 (1888), a Congruenza del 4^0 ordine e della 2^a classe nello spazio a quattro dimensioni, Atti Ist. Veneto (7) 5 (1894); *G. Marletta*, Sui complessi di rette del primo ordine dello spazio a quattro dimensioni, Rendiconti Circolo mat. Palermo 28 (1909), a Sui complessi di rette d'ordine due e della prima specie dell' S_4, Giornale mat. 50 (1912); *B. Segre*, Sui complessi algebrici di rette di S_n, Rendiconti Accad. Lincei Roma (5) 33_1 (1924); *C. G. F. James*, Some results for the geometry of line systems in space of four dimensions, Proceedings Math. soc. London (2) 28 (1928).

[12]) *Algebraické útvary složené z* ∞^p *prostorů* S_k ($k > 1$, $p \geqq 1$) vyšetřovali zvl. *C. Segre*, Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani, Atti Accad. Torino 21 (1885), a Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazii, Rendiconti Accad. Lincei Roma (4) 3_2 (1887); *S. Kantor*, Theorie der linearen Strahlencomplexe im Raume von r Dimensionen, Journal r. a. Math. 118 (1897); *A. Bellatalla*, Sulle varietà razionali normali composte di ∞^1 spazi lineari, Atti Accad. Torino 36 (1901); *H. C. Moreno*, On ruled loci in n-fold space, Proceedings Amer. acad. Boston 37 (1901); *C. Pagliano*, Sulle varietà algebriche a tre dimensioni costituite da una semplice infinità di piani, Annali mat. (3) 5 (1901), a Sulle varietà algebriche formate da una ∞^1 di spazi, Cuneo 1908; *W. Reichel*, Über trilineare alternierende Formen in sechs und sieben Veränderlichen und die durch sie definierten geometrischen Gebilde, Diss. Greisswald 1907; *C. Segre*, Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi, Rendiconti Circolo mat. Palermo 30 (1910, s doplňkem).

SEZNAM VĚCNÝ.

Čísla udávají stránky hlavního textu nebo poznámek (větších, i literárních).

Afinita 230, 526; — ekvivalentní 230, 526; — homologická 268, 531
antikolineace nebo antikorelace 256, 518, 586
antiprojektivnost 109, 226
apolárnost u čáry rovinné 377
asymptota kuželosečky 164
axiom viz postulát

Base (základní útvar) polárnosti 310, 601
— svazku čar rovinných 362; — kuželoseček 348; — kvadrik 462, 631; — dvojmocného kvadrik 468; — nadploch 828; — k-mocného nadrovin 775; — ploch 641
biplanára čáry prostorové 3. třídy 441
bisekanta čáry prostorové 3. stupně 212, 440, 442, 688; — 4. stupně 465
bitangenta viz tečna dvojná
bod autokonjugovaný v polárnosti 302, 600
— asociovaný k 7 bodům 470, 471
— bifleknodální 422, 429
— biplanární 643
— Brianchonův 179
— dotyčný tečné přímky na křivce 2. třídy 158, 322; — na křivce v-té třídy 366; — tečné roviny na ploše 2. stupně 174, 451, 616; — na ploše n-tého stupně 642
— dvojnásobný (dvojný) čáry rovinné 366, 368, 370; — čáry rov. 3. stupně 209, 396, 411, 413; — čáry prostorové 679; — komplexu kvadratického 720; — nadplochy 831; — obyčejný 367; — plochy 643; — plochy 2. stupně 460; — plochy 3. stupně 491, 654
— dvojný dotykový 423; — oskulační 423
bod dvojný zdánlivý čáry prostorové 678, 680, 682
— eliptický vzhledem ke kuželosečce 331; — na ploše 642; — na ploše kvadratické 459, 621
— fleknodální 422, 428
— fokální u kongruence 740, 743
— hyperbolický vzhledem ke kuželoseče 331; — na ploše 642; — na ploše kvadratické 458, 459, 621
— inflexní u čáry rovinné 378, 379, 385; — u kubiky rov. 399, 400
— isolovaný čáry rovinné 210, 367, 411
— jednoduchý čáry rovinné 367
— jednotkový soustavy souřadnic 241, 503
— konický 643
— kuspidální 367
— limitní (mezní) v projektivnosti řad bodových 85, 109
— mezní u torsy 676
— násobný (m-násobný) čáry rovinné 368, 369, 374, 377, 380; — čáry v S_r 837; — nadplochy 828, 832; — plochy 644, 647, 649; — variety bodové v S_r 858
— nevlastní 5, 32
— obyčejný čáry rovinné 367
— osknodální 423
— parabolický nadplochy 834; — plochy 642; — plochy kvadratické 459, 621
— podílový 74
— přidružený k 7 bodům 470, 471
— jeho rovnice v rovině 245; — jako průsečíku dvou přímek 246; — parametrické 247; — v prostoru 509; — jako průsečíku tří rovin 511; — parametrické 513
— rozdílový 73

bod sextaktický 403
— singulární u čáry rovinné 369, 370; — u kolineace nebo korelace zvrhlé 231, 500, 582; — komplexu 737, 739; — komplexu kvadratického 720; — u kongruence 433, 745; — u kuželosečky 322; — u plochy 643; — u plochy kvadratické 460, 617; — svazku kuželoseček 355
— součinový 73
— součtový 72
— jeho souřadnice na přímce 75, 76; — v rovině 237, 242; — v prostoru 500, 504, 513; — v S_r 787
— taknodální 423
— tečnový (tangenciální) kubiky rov. 395, 414
— torsální 756
— trojnásobný 423, 424, 430
— undulační 424
— uniplanární 643
— vnější n. vnitřní vzhledem ke kuželosečce 176, 331, 337; — vzhledem ke kvadrice 461
— jako základní prvek 15, 768
body asociované (průsečíky tří ploch kvadratických) 467, 470, 471, 472
— čtyři v rovině 511
— harmonicky sdružené vzhledem ke dvěma bodům 55
— imaginární 246, 514
— inflexní u kubiky rov. 400, 402
— konjugované vzhledem k čáře rovinné 381; — v korelaci 293, 581; — vzhledem ke kubice rovinné 407, 408; — vzhledem ke kubice prostorové 448; — vzhledem ke kuželosečce 334; — vzhledem ke kvadrice 626; — vzhledem k ploše kubické 655; — v polárnosti 181, 302, 596; — vzhledem ke svazku kuželoseček 354
— kruhové (cyklické) v rovině 117
— nezávislé 769, 770, 771, 790
— sdružené v korespondenci 2 (viz také konjugované)
— společné dvou čar rovinných 361; — dvou kuželoseček 201
— Steinerovy 179
— tři na přímce 246
— určující čáru rovinnou 360, 363
— základní u soustavy souřadnic na přímce 72; — svazku čar rovinných 362; — svazku kuželoseček 348, 355; — svazku dvojmocného kvadrik 468
Cyklida 671
cyklus kolineace periodické 277, 547, 548
— projektivnosti periodické 125, 126, 127
cylindroid 713

Čára apolárná ke kubice rovinné 410
— autokonjugovaná vzhledem ke kubice prostorové 449
— autopolárná 387
— bicirkulární 4. stupně 431
— bikvadratická viz rovinná n. prostorová 4. stupně
— bitangenciální 382
— Cayleyova u čáry rovinné 381; — u kubiky rovinné 409; — u sítě čar rov. 393
— cirkulární 3. stupně 416
— dvojnásobná (dvojná) u plochy 644
— eliptická 387, 396, 425; — normální v S_r 846
— Hesseova u čáry rovinné 377, 380, 381; — u kubiky rovinné 400, 405, 406, 407
— invariantní při spojité grupě kolineací 289, 387, 415
— Jacobiova sítě čar rov. 391; — sítě polárných kuželoseček kubiky rov. 408; — svazku dvojmocného kvadrik 638; — svazku dvojmocného ploch 653; — tří čar rov. 390; — tří ploch 653
— komplexová 706, 735, 738
— komplexu lineárního 712
— konická 677
— kovariantní u čáry rovinné 378; — u kubiky rov. 405
— kubická viz rovinná n. prostorová 3. stupně
— kuspidální u torsy 676
— kuželová 677
— kvadratická 156, 162, 164, 165, 172, 174, 248, 288, 320, 327, 332, 340, 341, 342, 358, 451, 615; — spec. viz kuželosečka; — zvrhlá 164, 324, 330
— násobná (m-násobná) na ploše 644
— parabolická na ploše 642, 652
— polární p-tá bodu vzhledem k čáře rov. 371
— pravá 164, 212, 360, 675, 837
— prostorová 3. stupně 211, 213, 215, 219, 439, 441, 443, 444, 445, 464, 480, 685, 687; — 4. stupně 222, 462, 465, 631, 690; — 5. a 6. stupně

481, 497; — n-tého stupně n. v-té třídy 549, 674, 678, 682
čára prostoru r-rozměrného 837
— racionální rovinná 2. stupně 343; — 3. stupně 209, 213, 411, 414; — 4. stupně 220, 425, 431 (trikuspidální 430, trinodální 425, s třemi body bifleknodálními 429); — n-tého stupně 221, 383, 385, 387; — prostorová 684; — v S_r 839, 844; — normální v S_r 825, 839, 841, 843
— rovinná 2. stupně viz kvadratická a kuželosečka; — 3. stupně 394, 396, 411, 482 (ekvianharmonická, harmonická 398, 405); — 4. stupně 416, 417 (Caporaliova, Clebschova, desmická, Dyckova, Humbertova, Kleinova, Lürothova 424); — 5. a 6. stupně 431; — n-tého stupně n. v-té třídy 232, 358, 393; — její reálnost 394
— řídicí u kongruence 1. stupně 3. třídy 441; — u plochy zborcené 756; — u plochy přímkové (racionální normální) v S_r 851
— satelitní bodu vzhledem k čáře rov. 382
— singulární u kongruence 745
— společná dvěma plochám 640, 682
— Steinerova u čáry rovinné 381; — u kubiky rovinné 407; — u sítě čar rov. 393
— unikursální 387
— úvratu u torsy 676
— základní svazku kvadrik 462; — svazku ploch 641
— zvrhlá 360
čísla charakteristická u čáry rovinné 383; — u čáry prostorové 679, 681; — u čáry v S_r 837; — u variety v S_r 858
čtveřina ekvianharmonická 108, 145, 146
— harmonická 55, 58, 93, 133, 145
čtyrhran 25, 51, 60
čtyrstěn 24
— autopolárný vzhledem ke kvadrice n. v involuční korelaci 457, 594, 600, 629
— hran dotýkajících se kvadriky 630
— oskulační u kubiky prostorové 446, 687
— středový 25, 51, 60
— základní v soustavě souřadnic 503
čtyrstěny azygetické u plochy Kummerovy 666
— desmické 36, 664
— homologické 35
— v hyperboloidní poloze 599, 705
— Möbiovy 53, 218, 595
— polárné 599
— syzygetické u plochy Kummerovy 666
čtyrstran 25, 51, 60, 111
— kuželosečce opsaný 181, 185
— oskulační u kubiky prostorové 554
čtyrúhelník konjugovaný vzhledem ke kubice rov. 399
— kuželosečce opsaný n. vepsaný 180
čtyřroh 24
— rovinný 25, 35, 51, 60, 111; — konstruktivní u harmonické skupiny 58; — kuželosečce vepsaný 181, 185

Dějiny projektivní geometrie 9, 11
dělicí poměr 77
determinant funkcionální 139; — Hesseův 139, 378; — Jacobiův 139, 390; — polárnosti 302; — projektivnosti 83
diskriminant binární formy kvadratické 131, 142; — n-tého stupně 136, 147
— ternární formy kvadratické 321
— kvaternární formy kvadratické 614
dotyk kuželoseček 189, 355
— tečny p-bodový na ploše 642
— variety a nadplochy v S_r 863
duálnost v poli rovinném 23, 295
— v prostoru 22, 582
— v prostoru r-rozměrném 774
— v trsu 24, 295, 312
dvojice harmonicky se oddělující 55, 133, 143
— pravoúhlá ve svazku paprskovém 116
— prvků se oddělující n. neoddělující 38
— přímek kolmých 117
— společná dvěma involucím 206
dvojpoměr čtyř průsečíků přímky s kvartikou rov. trinodální 428
— čtyř prvků 78, 86, 87, 91, 108; — harmonické skupiny 93; — jako absolutní invariant 90, 143; — jeho vlastnosti 89, 91; — pomocí vyšších prostorů 780
— čtyř tečen z bodu kubiky rov. 396, 401, 402

dvojpoměr charakteristický u projektivnosti 103, 109, 149, 153
— homologie 267, 530
— kolineace dvojosé 534
— jako souřadnice 88
— jeho výraz pro dvě dvojice prvků 133, 143
dvojpoměry různých skupin prvků 95
dvojšesteřice přímek na ploše kubické 488

Elace prostorová 523, 530; — afinní 531
— rovinná 266, 270
element viz prvek
elipsa 164; — prostorová 445
elipsoid 461

Forma adjungovaná 329, 618
— bilineární s proměnnými kogredientními n. kontragredientními 586
— binární lineární 130; — kvadratická 131; — u kubiky prostorové 689; — n-tého stupně 134, 140
— kvadratická u souřadnic přímkových 702; — přidružená 709
— kvaternární kvadratická 613; — n-tého stupně 639
— polární u binární formy kvadratické 131, 148; — p-tá u binární formy n-tého stupně 137; — u ternární formy kvadratické 320
— ternární kvadratická 320, 323; — n-tého stupně 359

Geometrie 1
— abstraktní 1
— afinní 8, 16
— algebraická 394
— ekviformní 8, 16
— elementární 8
— Eukleidova 8, 16
— incidencí 8
— konečného počtu bodů 16, 66
— Lobačevského-Bolyaiova 315
— metrická 8
— nearchimedská 66
— nedesargská 31
— neeukleidské 17, 315, 625
— nepaskalská 72
— nestaudtská 66
— novější 7
— obyčejná 8, 16; — zařaděná do projektivní 277, 625
— podobnostní 8
geometrie polohy 7
— projektivní 6, 12, 41; — diferenciální 395, 685; — komplexní 107; — polydimensionální 777, 778
— Riemannova 315
— synthetická 8
— útvarů přímkových 698, 706
— vyšší 7
grupa kolineací rovinných cyklická 283; — Hesseova 287, 403, 406; — ikosaedrická 287; — s invariantní kubikou 285, 404; — Kleinova 286; — oktaedrická 286; — tetraedrická 285; — Valentinerova 287
— kolineací prostorových 500; — imprimitivní 565; — intransitivní 565; — primitivní 567; — složená z 15 kolineací dvojosých (a identity) 566; — transitivní 565
— konečná 4 (oprava: počet členů sluje řádem grupy)
— obecná projektivní útvaru jednomocného 152; — v rovině 299; v prostoru 7, 582
— projektivností cyklická 151; — diedrická 151 (s invariantní čtveřinou prvků, složená z 3 involucí a identity 124, 151, s invariantní trojicí n. harmonickou čtveřinou 151); — ikosaedrická 152; — oktaedrická 152; — tetraedrická 152
— spojitá 5
— substitucí pro dvojpoměry čtyř prvků 93, 151
— širší 287, 569
— transformací 4
— transformovaná 150
— užší 287, 572
grupy kolineací rovinných konečné 283, 286; — spojité 287, 291
— kolineací prostorových konečné 564, 567 (s invariantní kvadrikou 566); — spojité 568, 574 (s invariantní kubikou prostorovou 575, s invariantní kvadrikou 576)
— kolineací v S_r 805
— kolineací a korelací 298, 611
— projektivností zákl. útvaru jednomocného 148; — konečné 150, 152; — konjugované 150; — projektivní 150; — spojité 152, 155
— transformací lineárních binárních konečné 150
— základní typů kolineací 288, 568

Hessian formy binární 139; — jako kovariant 147
— formy ternární 378
homografie viz kolineace
homologie prostorová 520, 529, 530, 531; — afinní 531; — harmonická 544; — involuční 544; — podobnostní 531; — speciální (limitní) viz elace
— prostoru r-rozměrného 800; — involuční 804
— rovinná 258, 264, 270; — afinní 268; — harmonická 274; — involuční 274, 275, 283; — podobnostní 268; — speciální (limitní) viz elace
homothetie 268, 531
hrany n-hranu 25; — n-rohu 24; — n-stěnu 24; — n-stěnu středového 25
hrot čáry rovinné 210, 367, 368, 384; — dotykový 423; — druhého druhu 423; — čáry prostorové 679
hyperbola 164; — parabolická 445; — prostorová 445
hyperboloid eliptický 461; — zborcený 177

Charakteristika kolineace v S_r 799, 802

Incidence bodu a přímky v rovině analyticky 240, 244, 245
— bodu a roviny analyticky 503, 508; — bodu n. roviny a přímky 510, 513; — bodu a nadroviny v S_r 789
— prvků geometrických 7, 15
inflexe u kubiky rovinné 402
involuce absolutní v rovině 117, 317
— adjungovaná k projektivnosti 117, 119, 121
— dvojic prvků 110, 134
— eliptické význam pro imaginární prvky 114
— harmonická 123; — k projektivnosti 124
— indukované kuželosečkou 181, 334; — kvadrikou 626
— n-tého stupně k-té mocnosti 135
— průsečíků svazku kuželoseček na přímce (a duální) 357; — svazku kvadrik na přímce (a duální) 463, 638
— přidružená k projektivnosti 117, 119, 121
— jako složka projektivnosti 122
— stanovená kuželosečkou 185; — svazkem n. řadou kuželoseček 187, 356
involuce útvarů jednomocných základních 110, 112, 115, 116, 336, 354; — kvadratických 119, 346
invariant absolutní 141
— homologie rovinné 267; — prostorové 530
— kubiky rovinné 397
— simultánní 141
invarianty forem binárních 140, 141, 146, 148 (dvou lineárních 142, dvou kvadratických 143, tří kvadratických 143, formy kubické 148, formy bikvadratické 145, 148); — ternárních 371, 405
— kolineace rovinné 272; — prostorové 539; — prostoru r-rozměrného 798
— kuželoseček dvou nebo tří 357
— projektivnosti útvaru jednomocného 149
Jakobian dvou forem binárních 139; — jako kovariant 147
— tří forem ternárních 390
jehlan normální v S_r 776, 777

Klasifikace čar kvadratických 324, 327; — kubických v rovině 406; — bikvadratických v rovině 421
— kolineací rovinných 260, 261, 262, 263, 274; — prostorových 519, 521, 523, 526; — v S_r 796, 802
— komplexů kvadratických 722, 724
— korelací rovinných 296, 298
— nadploch kvadratických 818
— ploch kvadratických 458, 602, 620, 624; — kubických 490, 493
— svazků kuželoseček 348; — kvadrik 631
kolineace analyticky definovaná n. vyjádřená 250, 253, 514, 517, 518
— centrální 258, 520
— dvojosá 521, 532; — eliptická 535, 545; — hyperbolická 532, 536; — involuční 544; — parabolická 532, 537; — jako produkt korelací nulových 610
— Hermiteova 282, 556, 823
— homologická 258, 264, 520, 529, 800
— identická 260
— involuční 274, 542, 544, 804
— komplexní 253, 518
— kvaternární 514
— limitní 274, 522
— osová 521, 537
— partikulární 274, 522, 797, 801

kolineace periodické 277, 279, 547, 803.
— perspektivní 235, 258, 520
— polohomologická 546
— jako produkt homologií 266, 529; — involučních kolineací 276, 546, 560; — perspektivností 236, 783; — polárností 306, 599
— prostorová 519, 521, 523, 526; — s invariantním čtyrstěnem 531, 538; — s invar. komplexem lineárním 711; — s invar. kubikou prostorovou 560, 564; — s invar. kvadrikou 554, 560; — kladná n. záporná 517; — s korespondujícími kubikami prost. 553; — s koresp. kvadrikami 550
— prostoru S_r 796; — s invariantní nadplochou kvadratickou 823
— přidružená ke korelaci 296, 588, 806
— reálná 253, 518
— regulární 797, 799
— rovinná 257, 260; — s invariantním trojúhelníkem 270; — s invar. kuželosečkou 279, 344, 346; — jako transformace bodová s koresp. přímkami 253; — určená projektivností kuželoseček 234
— sféroidální 526
— středová 258, 520
— svazku dvojmocného kvadrik a trsu rovin 470
— ternární 250
— útvarů zákl. dvojmocných 224, 226, 227, 229; — trojmocných 495, 497; — r-mocných 779, 781, 784, 792
— záměnné 307, 546, 610
— zvrhlé 231, 499, 517, 786, 794
kompatibilnost postulátů 1, 6, 41, 107
komplex přímek 705
— čtyrstěnový 172, 539, 589, 727, 729, 730
— harmonický 732, 734, 735
— Hirstův 732
— kolineační 730
— kvadratický 172, 539, 718, 722, 724; — speciální 726
— lineární 172, 589, 605, 606, 607, 608, 609, 706, 710, 711; — polárný u komplexu kvadratického 719; — polárný u komplexu n-tého stupně 736; — prostoru r-rozměrného 814; — speciální 611, 709; — tečný 719, 736
komplex n-tého stupně 735, 741; — speciální (singulární) 739
— Painvinův 735
— Reyeův (tetraedrální) viz čtyrstěnový
— základní u korelace prostorové 172, 729
komplexy konsigulární 722, 741
— lineární involuční 610, 714, 715
— (lineární) základní u komplexu kvadratického 719; — u soustavy souřadnic 715
konfigurace 24, 26, 27, 36
— bitangent kvartiky rovinné 419, 421
— Cayleyovy 36
— čtyřrohu a čtyrstranu se spol. trojúhelníkem úhlopříčným 61, 182, 316
— Desargova 31, 53
— Hesseova 403
— Kummerova 665
— Möbiových čtyrstěnů 53
— Pappova čili Pascalova 71
— polyedrální 36
— přímek na ploše kubické 485, 491
— trojrohu a trojstranu polárných 307
kongruence přímek 705, 742; — 1. stupně nebo 1. třídy 433, 437, 439; — 1. stupně v-té třídy 746, 747; — 2. stupně v-té třídy 466, 749, 753, 754; — 3. stupně a vyšší 755
— bisekant kubiky prostorové 439, 470, 747
— kvadratická 754
— lineární 434, 436, 437, 532, 608, 713
— jako průsek úplný dvou komplexů 740
— singulárních přímek komplexu n-tého stupně 737
— spojnic sdružených bodů dvou rovin v korespondenci 755
konoidy 760
konstanta charakteristická u parabolické projektivnosti 104, 153
konstrukce 18, 32; — 1. stupně 203; — 2. stupně 202; — n-tého stupně 207
— čáry prostorové kubické 447; — bikvadratické 467, 468
— duální 23
— harmonické čtveřiny 58
— kolineace nebo korelace 229

konstrukce kuželosečky 159, 183, 186, 187, 204, 205, 316, 317
— n-úhelníku vepsaného dané kuželoseče n. danému n-úhelníku a opsaného danému n-úhelníku 206
— plochy kvadratické z devíti bodů 472
— projektivnosti útvarů jednomocných 66, 111
— průsečíků přímky s kuželosečkou 204
— prvků samodružných v projektivnosti 99, 202
— prvků určených imaginárními prvky 124
kontravariant formy ternární 371
korelace analyticky vyjádřená 254, 584
— involuční 299, 592, 808
— nulová 303, 592, 594, 605, 707, 809, 812
— parabolická 605
— periodická 596, 605
— polárná 299, 592, 593, 809
— prostorová 586; — s incidentními body a rovinami 596; — s invariantní kubikou prost. n. kvadrikou 591
— prostoru S_r 805
— rovinná 291, 295, 296
— útvarů zákl. dvojmocných 225; — trojmocných 495, 578, 579; — r-mocných 779, 794
— zvrhlé 230, 500, 582, 795
korespondence 2
— identická 3
— kvadratická mezi body v rov. korelaci obapolně konjugovanými 294
— (m, n)-značná 2, 129
— projektivní 7
— mezi prvky útvaru jednomocného a čísly 76, 107, 201
— transformovaná 3
— trilineární 128
— uspořádaná 40
kovariant 141; — dvou forem binárních kvadratických 144; — formy ternární 371
kriteria involuční projektivnosti 110; — involuční kolineace 276, 544, 546; — polárné korelace 299, 302, 593
křivka 2. stupně a 2. třídy (útvar soběduální) 175, 182, 328, 329; — 3. stupně a 3. třídy prostorová (útvar soběduální) 218, 444, 564, 689
— jinak viz čára
kubika viz čára rovinná nebo prostorová nebo plocha 3. stupně
kvadrika viz plocha kvadratická
kvartika viz čára rovinná nebo prostorová nebo plocha 4. stupně
kvintika v. čára nebo plocha 5. stupně
kužel 2. stupně a 2. třídy viz kvadratický; — 3. stupně 210, 482; — 4. stupně 220; — n-tého stupně n. ν-té třídy 232, 644
— komplexový 705, 735, 738
— Kummerův 670
— kvadratický 164, 167, 172, 174, 176, 451, 615; — imaginární 311; — přímkový n. rovinový 191; — ve svazku ploch kvadratických 465; — v S_r druhu h-tého 817, 819
— opsaný ploše 616, 648
— promítající u čáry prostorové 677
— v S_r s vrcholem S_v 828
— tečný nadplochy 832; — plochy 643, 644; — variety v S_r 863
kuželosečka 176; — obecně viz čára kvadratická
— autokolineární 282
— autopolárná 319, 359
— jako base (čára incidenční, základní) polárnosti rovinné 307, 311, 312, 314, 317
— bodová 191, 329
— harmonická dvou kuželoseček 358, 733
— imaginární 310, 311
— pólová přímky vzhledem ke svazku kuželoseček 357
— přímková 191, 329
— Staudtova 358, 733
kuželosečky dvě se spol. bodem v rovině 201; — se spol. bodem a tečnou v různých rovinách 195, 268
— homologické 268
— incidenční v korelaci rovinné 292
— polárné 319
— projektivní 194
— přidružené ke kvartice rov. trinodální 426, 428
— samodružné v korelaci rovinné 295
— sdružené v kolineaci dvou rovin 233
— základní v korelaci rovinné 292

Metoda analytická 4; — projektivně založená 76
— reciprokých polár 317
— synthetická 4
mocnost involuce 135

mocnost projektivnosti 86
— svazku čar 359, 393
— útvarů základních 20
modul čáry rov. kubické 397, 404; — projektivní transformace 83, 251, 516
monoid 644, 671, 677, 829
mnohostěny vepsané a opsané kvadrikám 630
mnohoúhelníky Ponceletovy 206, 317, 340
— Poncelet-Zeuthenovy 630
— Steinerovy u kubiky rov. 411
— vepsané n. opsané kvadrice 630

Nadplocha 2. stupně a 2. třídy viz kvadratická; — 3. stupně 836; — n-tého stupně 826
— Hesseova u nadplochy 833
— kvadratická 806, 810, 816, 817, 822; — autopolární 823; — zvrhlá h-tého druhu (h-násobně) 816, 817
— polární p-tá bodu vzhledem k nadploše 829, 831
— pravá n. zvrhlá 827
— Steinerova u nadplochy 834
nadrovina 774, 788, 789
— oskulační u čáry v S_r 841; — u plochy v S_r 847
— polární bodu v involuční korelaci 809; — vzhledem k nadploše 817, 829
— tečná nadplochy kvadratické 817; — nadplochy n-tého stupně 831; — variety bodové 862
nezávislost postulátů 2
n-hran 25; — jednoduchý 26
n-roh 24, 27; — jednoduchý 26; — rovinný 25, 27, 34; — v S_r 776
n-stěn 24, 27; — středový 25; — v S_r 776
n-stran 25, 27, 34
n-úhelník (rovinný n. prostorový) 26
nosič soustavy geom. prvků 19

Ohnisko kuželosečky 182, 311
osa homologie rovinné 258
— involuce paprskových svazků kvadratických 199, 346
— kolineace 521
— komplexu lineárního 611, 709; — lineárního speciálního 709
— kongruence lineární 437, 713
— kuželosečky 182, 311
— perspektivnosti 45
— plochy kvadratické 456
osa projektivnosti 70; — bodových řad na kuželosečce 198, 345
— souřadnic 237, 500
osnova viz řada přímková

Parabola 164; — hyperbolická 445; — prostorová 445
paraboloid eliptický 461; — zborcený 177
paradoxon Cramerovo 363; — Ponceletovo 376
parametr komplexu lineárního 612, 709
— prvku v jednomocném útvaru základním 130, 247; — ve svazku čar 347, 362
— spojité grupy 4
perspektivnost útvarů jednomocných 44, 45; — dvojmocných 235
pětistěn Sylvestrův u plochy kubické 658
pětiúhelník vepsaný n. opsaný kuželosečce 180, 184
plocha 2. stupně a 2. třídy (útvar soběduální) 457, 617, jinak viz kvadratická; — 3. stupně 470, 479, 480, 491, 493, 653, 658 (Cayleyova 762, 763, zborcená 211, 494, 761); — 4. stupně 659 (desmická 664, s dvojnými body 660, s dvojnou kuželosečkou 669, s dvojnou přímkou 667, Fresnelova 667, Kummerova 664, 722, 754, Plückerova 669, racionální 674, římská 672, Steinerova 672, s trojnásobným bodem 671, Weddleova 661, zborcená 764); — n-tého stupně n. v-té třídy 549, 638; — v S_r 846
— autokonjugovaná vzhledem ke kubice prostorové 449
— eliptická přímková v S_r 856
— fokální u kongruence 740, 743
— Hesseova u plochy 651; — u plochy kubické 655, 656
— invariantní při spojité grupě kolineací 574
— Jacobiova čtyř ploch 653; — svazku trojmocného ploch 638, 653
— komplexová přímky v komplexu kvadratickém 720
— kvadratická 164, 168, 449, 513, 600, 613, 614; — autopolární 604; — jako base polárnosti 600; — eliptická 619; — imaginární 620; — kuželová 164, 459; — pravá 617, 620; — přímková 164, 168,

459; — v přímkových souřadnicích 726; — zborcená 168, 170, 177, 459, 619; — zvrhlá 461, 617, 620
plocha normální v S_r 850, 855
— polární p-tá bodu vzhledem k ploše 644; — u plochy kubické 485, 486
— přímková 583, 674, 755; — v S_r 850, 856
— racionální v S_r 848; — přímková v S_r 850 (normální 851, 853)
— rozvinutelná 583, 674, 676
— singulární komplexu 721, 737
— Steinerova u plochy 652; — u plochy kubické 655
— Veroneseova 849, 855
— zborcená 755
plochy kvadratické apolární 632; — harmonicky sdružené 553; — incidenční (základní) v korelaci prostorové 587; — sdružené při kolineaci prost. 550, 552
počet geometrický 5, 79
podobnost 86, 105, 230, 260, 276, 526; — homologická 268, 531
pojmy základní 1
pól nadroviny v involuční korelaci v S_r 809; — vzhledem ke kvadratické nadploše 817
— přímky vzhledem ke dvojici bodů n. přímek 60, 71; — u čáry rovinné 373; — v involuční korelaci rovinné 299; — vzhledem ke kuželosečce 181, 200, 335, 337; — vzhledem k trojúhelníku 61, 244
— roviny vzhledem ke dvojici bodů 60; — vzhledem ke čtyrstěnu 61, 506; — v komplexu lineárním 707; — v involuční korelaci prostorové 593; — vzhledem ke kvadrice 454, 602, 626
polára bodu vzhledem ke dvojici bodů n. přímek 60, 71; — v involuční korelaci rovinné 299; — vzhledem ke kuželosečce 181, 200, 335, 337; — vzhledem k trojúhelníku 61, 244
— harmonická inflexního bodu u kubiky rovinné 399; — u kvartiky rov. 423
— konická u čáry rovinné 372, 375, 381; — u kubiky rov. 398
— kubická bodu u plochy kubické 486
— kvadratická bodu u nadplochy 829; — u plochy 645; — u plochy kubické 486
polára lineární u čáry rovinné 372; — u plochy 645
— p-tá bodu vzhledem k čáře rovinné 371, 373, 375; — vzhledem k nadploše 829; — vzhledem k ploše 644
— první bodu u čáry rovinné 372, 374; — bodu u nadplochy 829; — bodu u plochy 645; — přímky u plochy 645
— přímá u čáry rovinné 372
— přímky v komplexu kvadratickém 721; — v involuční korelaci prostorové 593; — vzhledem ke kvadrice 455
— roviny vzhledem ke dvojici přímek 60; — v trsu 299
— smíšená dvou bodů vzhledem ke kubice rovinné 398; — bodů vzhledem k ploše 646
poláry sdružené vzhledem ke komplexu lineárnímu 708; — v involuční korelaci 593; — vzhledem ke kvadrice 455, 602, 627
polárnost absolutní 526
— prostorová jako involuční korelace 593, 596, 600; — určená kvadrikou 456, 602, 627
— prostoru r-rozměrného 809; — určená kvadratickou nadplochou 816; — zvrhlá 811, 816
— rovinná eliptická n. hyperbolická 336; — jako involuční korelace 299, 301, 302, 304; — ze dvou korelací 301; — určená kuželosečkou 181, 315, 317, 336; — nestejnorodá 309; — orthogonální 311; — parabolická 336; — stejnorodá 309
— trsu 299, 302, 312
— útvaru jednomocného zákl. 132; — dvojmocného indukovaná prostorovou 597
pole 19; — bodové 19; — bodové n-tého stupně 549; — paprskové 19
poloha hyperboloidní dvou čtyrstěnů 599, 705
— perspektivní dvou kolineárních rovin 237
pólokonika přímky vzhledem ke kubice rov. 407
póly sdružené viz body konjugované
polygon viz mnohoúhelník
postulát Archimedův 65; — Dedekindův 39; — Eukleidův 6; — Fanův 57; — Weierstrassův 39
postuláty projektivní geometrie I. (o incidenci prvků) 15, 16, 17, 20;

— II. (o uspořádání prvků) 36, 38; — III. (o spojitosti) 39
postuláty proj. geometrie rovinné 41; — polydimensionální 768
princip duálnosti 22, 774
— Chaslesův korespondenční 129
— Laméův 362
problém projektivnosti 195, 468, 474
produkt dvou involucí 122; — projektivností 150; — transformací 2
projektivnost binární 83
— cyklická 125
— její definice analytická 84; — Poncelet-Cremonova 45, 65; — Staudtova 65, 93; — Steinerovy 91
— degenerovaná 84
— eliptická 98, 101, 108, 114
— harmonických skupin 59
— hyperbolická 98, 101, 102
— indukovaná kolineací n. korelací 225, 497, 579
— involuční 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 144, 149; — její konstrukce 123; — indukovaná polárností 302, 596; — útvarů kvadratických 199, 346
— její konstrukce 67, 69, 101
— komplexní 107
— limitní 108
— parabolická 98, 101, 102, 108, 149
— periodická 125, 127, 128
— jako produkt perspektivností 48, 50; — projektivností involučních 122, 201
— reálná 82, 107
— její rovnice 77, 83, 84, 104
— řad bodových 50; — 2. stupně 194, 345; — 3. stupně 210, 216
— svazku kuželoseček 190; — kvadrik 464
— útvarů jednomocných základních 44, 45, 63; — zákl. soumístných 97, 108, 515; — kvadratických 194, 196; — dvojmocných 224, 227, 228; — trojmocných 495; — r-mocných 779
— vytvořená kolineací nebo korelací 225, 497, 579
— zvrhlá 84, 149, 230, 232
projektivnosti harmonické 124
— konjugované 149
— projektivní 149
— záměnné 119, 307
promítání 20, 775
prostor bodový 19, 769
prostor dotyčný tečného prostoru nadplochy 820
— dvojný nadplochy kvadratické 817
— hyperoskulační u čáry v S_r 837
— násobný (m-násobný) nadplochy 828
— nejvyšší (největšího počtu rozměrů) obsažený v nadploše kvadratické 819, 821
— normální u variety bodové 862
— oskulační u čáry v S_r 837; — u plochy v S_r 847
— projektivní 8, 31, 41; viz také r-rozměrný
— průsečný dvou prostorů 773
— příslušný variety 858
— rovinový 19
— r-rozměrný 768, 771, 790, 791
— sečný čáry v S_r 842
— singulární ve zvrhlé kolineaci nebo korelaci 786, 794
— spojující dva prostory 773
— stacionární u čáry v S_r 837
— tečný nadplochy 820; — plochy v S_r 847; — variety v S_r 862
— topologicky 38, 778
— vrcholový kužele v S_r 829
prostory duální 774
— hlavní u kolineace v S_r 797
— nezávislé 772
— perspektivní 781
— polárné vzhledem k nadploše kvadr. 820
protínání 20, 776
průměr komplexu lineárního 611, 709; — kuželosečky 182, 311; — kvadriky 456
průmět 22; — variety v S_r z S_{p-1} do nezávislého S_{r-p} 857, 860
průsečíky dvou čar rovinných 361, 363, 369
— dvou kuželoseček 205
— kuželosečky a přímky 204, 331
— kvadriky a přímky 615
— tří ploch 640
průsek variety v S_r a prostoru S_q 858, 859
— dvou nadploch kvadratických 823; — variet 857
— několika nadploch 828, 832
prvek invariantní 2
— jednotkový v soustavě souřadnic 76
— samodružný 2; — jeho existence 40
— singulární ve zvrhlé projektivnosti 84

prvek vytvořující 19
prvky autokonjugované v polárnosti 302, 596
— harmonicky sdružené 55, 130
— imaginární 106, 108, 114, 121, 122, 128, 246, 514
— incidentní 15
— invariantní 4, 97, 257, 520
— komplexní 106
— konjugované v korelaci 293, 581; — v polárnosti 302, 596
— nevlastní 5, 6, 32
— polárné 60, 71, 181, 299, 334, 453
— protější 26
— samodružné v involuci 114; — v kolineaci 257, 520; — v projektivnosti 97, 99, 100, 101, 129, 199, 202
— sdružené 2
— základní v projektivní geometrii 15; — v soustavě souřadnic 76, 237, 500
přímka dvojná komplexu kvadratického 722; — kongruence 745, 750; — kužele 649; — plochy zborcené 756
— eliptická nebo hyperbolická vzhledem ke kuželosečce 331
— jednotková soustavy souřadnic 241, 244
— kuspidální u plochy kuželové 649
— limitní (mezní) v kolineaci 230
— Mac Laurinova u kubiky rovinné 400
— mezní v kolineaci 230
— násobná (m-násobná) kongruence 745, 750; — plochy zborcené 756
— nevlastní 5, 32
— Pascalova 179
— plochy kvadratické 460
— jako prvek 15, 698, 705
— její rovnice v rovině 245, 246; — v prostoru 510, 512
— řídicí u komplexu lineárního spec. 709; — u kongruence lineární 437, 713; — u kuželosečky 311
— satelitní u kubiky rovinné 395, 415
— sečná kuželosečky 331, 337
— singulární u čáry 2. třídy 322; — u čáry rovinné 369; — komplexu kvadratického 720, 722; — komplexu n-tého stupně 737; — svazku kuželoseček 355; — ve zvrhlé kolineaci nebo korelaci 231, 500, 582
— její souřadnice 698, 702, 703
— stacionární u plochy zborcené 757
přímka torsální u plochy zborcené 756
— torsy 675
— vytvořující u plochy zborcené 170, 756
přímky imaginární 107, 202, 246, 515, 545, 702
— incidentní 17
— isotropní 117
— konjugované v korelaci rovinné 293; — vzhledem ke kuželosečce 335; — v polárnosti rov. 181, 302
— mimoběžné 17
— plochy kubické 485, 488, 654; — plochy n-tého stupně 640
— v poloze hyperboloidní 705
— protínající se v prostoru 701
— řídicí na ploše kvadratické zborcené 170
— tečné u plochy 642
pseudotransformace projektivní 84

Reciprocita viz korelace
regulus 171
resultant dvou forem binárních 135
rod čáry rovinné 370, 371, 383; — prostorové 681, 682; — v S_r 838
— kongruence 745
rotace 282; — kolem osy 538, 558
rovina v S_r 768
— dvojná komplexu kvadratického 720
— fokální u kongruence 740, 743
— hlavní u plochy kvadratické 456
— homologie 520
— inflexní u čáry prostorové 679
— jednotková soustavy souřadnic 503
— limitní (mezní) u kolineace 526
— nevlastní 6, 32
— nulová bodu v kongruenci 2. stupně 749
— oskulační u čáry prostorové 3. stupně 217, 218, 440; — 4. stupně 466; — n-tého stupně 549, 676
— oskulační dvojná u čáry prostorové 679; — zdánlivá 680
— perspektivnosti 45
— polárná bodu vzhledem ke dvojici rovin 60; — vzhledem ke čtyrstěnu 61, 506; — v involuční korelaci 593; — v komplexu lineárním 707; — vzhledem ke kvadrice 454, 602, 626; — vzhledem k ploše kubické 486; — vzhledem k ploše n-tého stupně 645; — přímky v trsu 299
— průměrová kvadriky 456

rovina jako prvek základní 15
— singulární u kongruence 433, 745; — u plochy 2. třídy 617; — ve zvrhlé kolineaci n. korelaci 500, 582
— souměrnosti plochy kvadratické 456
— tečná plochy 2. stupně 174, 451, 616; — 3. stupně 484; — n-tého stupně 642, 646; — plochy n-tého stupně v S_r 846; — dvojnásobná 643; — trojnásobná 654
— topologicky 38
— torsální u plochy zborcené 756
— úběžná 526
roviny imaginární 514
— kolineární v poloze perspektivní 235, 237
— konjugované vzhledem ke kvadrice 626
— korelativní v poloze polárné 301
rovnice bilineární pro souřadnice prvků projektivně sdružených 84, 253, 517
— bodu 245, 246, 247, 509, 511, 513
— čáry 2. stupně 248, 320, 340, 341, 344; — 3. stupně rovinné 394, 400 (Hesseova 401, racionální 411, 413); — 3. stupně prostorové 685, 687; — 4. stupně rovinné 416 (racionální 425); — 4. stupně prostorové 691, 692, 693, 694, 695; — n-tého stupně rovinné 358, 366, 383; — n-tého stupně prostorové 675, 678; — racionální normální v S_r 840
— homologie 270, 275, 531, 544
— charakteristická formy ternární kvadratické 325; — projektivnosti 105; — svazku kuželoseček 348; — svazku kvadrik 632
— pro charakteristická čísla čáry v rovině Plückerovy 582; — v prostoru Cayleyovy 681; — v S_r Veroneseovy 838
— komplexu lineárního 706; — kvadratického 718; — n-tého stupně 735
— kolineace 250, 253, 270, 272, 273, 274, 514, 517, 518, 531, 538, 540, 541, 542, 792, 796, 799, 804; — dvojosé 537, 545; — osové 538
— korelace 254, 256, 298, 584, 585, 586, 794, 805; — nulové 592, 809, 814; — polárné 301, 592, 809
— nadplochy 2. stupně 816, 818
rovnice nadroviny 788, 789
— plochy 2. stupně 514, 613, 619; — 3. stupně 653 (Sylvestrova 657, zborcené 762); — 4. stupně 659 (zborcené 765); — n-tého stupně 638, 642 (zborcené 759); — přímkové racionální normální v S_r 854
— projektivnosti 77, 81, 83, 84, 104; — involuční 113
— prostoru S_p v S_r 790
— přímky 245, 246, 247, 510, 512
— roviny 509, 511
— svazku čar 2. stupně 347, 359, 393; — čar n-tého stupně 362; — komplexů lineárních 712; — ploch kvadratických 630, 638
— variety v S_r 863

Řád čáry prostorové 549, 677; — v S_r k-tý 837
— grupy konečné (spec. cyklické) 151, 283, 564
— kongruence 742
— periodické projektivnosti nebo kolineace 125, 277
— plochy zborcené 756
— torsy 549, 677
— útvarů základních 20
řada bodová přímá 19; — kvadratická 191; — kubická v rovině 209; — kubická v prostoru 216, 688; — bikvadratická v rovině 220; — n-tého stupně v rovině 232; — n-tého stupně v prostoru 549
— čar ν-té třídy v rovině 362; — Cayleyových u syzygetického svazku kubik rov. 410
— kuželoseček 187, 188, 347, 358
— nadploch 2. třídy 823
— ploch 2. třídy 463, 630; — dvojmocná 469; — ν-té třídy 641
— přímková zborcená 705; — kvadratická 168, 170, 191, 219 (doplňková 170); — kubická 210; — bikvadratická 220

Sedmiúhelník vepsaný čáře kubické prost. 448
sestrojení viz konstrukce
sextika viz čára nebo plocha 6. stupně
shodnost 87, 106, 230, 260, 276, 526
simplex v S_r 776
síť čar kubických na ploše kubické 481, 482, 492; — n-tého stupně v rovině 391
— kuželoseček 190, 359

síť racionální (Möbiova) 62, 245, 508
skupina asociovaných 8 bodů v prostoru 467, 470, 471, 472
— čtyřrohová 6 prvků 51, 53, 54, 55, 112
— dvojitá po 6 přímkách na ploše kubické 487
— ekvianharmonická 4 prvků 108, 128
— harmonická 4 prvků 55, 58, 59, 66, 93, 94, 108
— Jacobiova u 2 ploch 653; — u svazku čar rov. 388; — u svazku ploch 653
— nezávislých bodů v S_r 771, 790
— polární p-tá vzhledem ke skupině prvků v útvaru jednomocném 138
— n prvků v útvaru jednomocném 134
— Steinerova 6 dvojic bitangent kvartiky rov. 418
skupiny 5 bodů sdružené v rovinách kolineárních 228; — 6 bodů sdružené v prostorech kolineárních 499; — proměnných kogredientní n. kontragredientní 252
smysl jednomocného útvaru zákl. 37; — v prostoru 517
souměrnost 106, 116, 275, 544, 545
souřadnice bodu na přímce 72, 75, 76, 88, 247; — v rovině 237, 238, 240, 247 (rovnoběžkové č. Descartovy 239); — v prostoru 500, 503, 505, 513 (rovnoběžkové č. Descartovy 509); — v S_r 787
— prostoru S_k v S_r 792
— prvku v jednomocném útvaru zákl. 88, 130
— přímky ve svazku paprskovém 247; — v rovině 237, 238, 240, 247 (Plückerovy 239); — v prostoru 698 (Kleinovy 703, obecné 702, Plückerovy 703, rovnoběžkové 700)
— roviny 500, 503, 505 (Plückerovy 509)
soustava bitangent kvartiky rovinné 419
— dvojic prvků v útvaru jednomocném 110
— čar rovinných algebraická 393; — lineární 362, 387, 393; — rovinných kubických 416; — prostorových kubických 215, 449; — prvních polárných u čáry rov. 393
— komplexů lineárních 712
soustava kuželoseček 358; — kvadratická u kvartiky rov. 421
— lineární viz svazek
— nadploch 827
— nulová 596, 612; — vyšší 596
— ploch kvadratických 462, 638
— polárná rovinná 299
— prostorová 19
— přímek doplňková na ploše kvadr. zborcené 170
— racionální prvků v útvaru jednomocném 62, 74, 94; — v rovině 244; — v prostoru 508
— rovinná 19
— souřadnic 75, 76, 238, 501, 787
— spojitá prvků v útvaru jednomocném 40
— uspořádaná prvků v útvaru jednomocném 37
spojitost zákl. útvarů jednomocných 40
stěny n-hranu 25; — n-stěnu 24, 25
strany n-rohu rovinného 25; — n-stranu 25; — úhlopříčné v n-stranu 25
střed homologie 258, 520
— involuce bodových řad na přímce 116; — kvadratických 199, 346
— kuželosečky 311
— perspektivnosti 45
— projektivnosti 70; — soumístných paprskových svazků kvadratických 198, 346
— souřadnic 237
stupeň čáry rovinné 232; — prostorové 549, 675
— dotyku dvou čar rovinných 189
— involuce 135
— komplexu přímek 705
— kongruence přímek 433, 706, 742
— konstruktivní úlohy 207
— kužele 232
— nadplochy 827, 828
— plochy 638
— torsy 676
— variety bodové v S_r 857
stupnice harmonická 75; — racionální 74
subgrupa invariantní (soběkonjugovaná) 150; — transformací 4
subgrupy konjugované 150
substituce orthogonální 324, 622
svaz prostorů 775
svazek čar rovinných n-tého stupně 362, 388; — k-mocný 393; — prostorových 4. stupně 469

svazek forem binárních kvadratických 134; — n-tého stupně 135
— komplexů lineárních 712; — dvojmocný 716; — trojmocný 717; — k-mocný 717
— kuželoseček 187, 188, 347, 348, 358 (obecný 349, jako průsek svazku kvadrik 463, 637, speciální 350, zvrhlý 349, 353); — dvojmocný — 359; — k-mocný 359
— kuželů kvadratických h-tého druhu v S_r 826
— nadploch 2. stupně 823, 825
— nadrovin k-mocný 775
— ploch kvadratických 462, 630 (kuželových 636, zvrhlý 635); — dvojmocný 468, 469; — trojmocný 472; — k-mocný 638
— paprskový 19, 704; — kvadratický v rovině n. v trsu 191; — kubický v rovině 209; — bikvadratický v rov. 220; — v-té třídy (rovinný) 232; — n-tého stupně (středový) 232
— ploch n-tého stupně 641
— polárností 319, 603
— projektivností 121
— prostorový 19
— rovinový 19; — kvadratický 191; — 3. třídy 689; — v-té třídy středový 232; — v-té třídy v prostoru 549
— skupin po n prvcích 135
— syzygetický čar kubických rov. 405, 406
svazek-řada kuželoseček 189, 190, 294
symbol perspektivnosti a projektivnosti 45
symetroid (Cayleyův) 663
systém viz soustava

Šest prvků v involuci 53, 112, 144
šestiskupina dvojitá přímek na ploše kubické 487, 488, 490
šestiúhelník vepsaný kubice prostorové 447; — (jednoduchý šestiroh n. šestistran) vepsaný resp. opsaný kuželosečce (Pascalův resp. Brianchonův) 71, 177, 184

Tečna čáry rovinné 365; — 2. stupně 158, 162, 322; — prostorové 3. stupně 212, 217, 218, 440; — 4. stupně 466; — n-tého stupně 549, 675
tečna dvojnásobná (dvojná) čáry rovinné 368; — čáry prostorové 679; — plochy 649
— hlavní u plochy 642
— inflexní u čáry rovinné 368, 378; — u čáry prostorové 679; — u plochy 642
— nadplochy 831
— násobná (m-násobná) čáry rovinné 369, 377
— singulární u čáry rov. 369
— undulační 424
— variety v S_r 862
tečny čáry kvadratické z bodu 330; — rovinné z bodu 375, 377; — kvartiky rov. trinodální 426
— dvojné u kvartiky rov. 419, 421 (azygetické n. syzygetické 421)
tetraedroid 666
torsa 674, 683, 689
tranformace 2
— afinní 8
— biracionální (Cremonovy) 256, 394, 519, 849
— ekviformní 8
— identická 3
— inversní 3
— komutativní 3
— lineární 82, 83, 224, 250, 254, 515, 584
— orthogonální 324, 622
— podobnostní 8
— projektivní 7; — infinitesimální 109, 264; — inversní 83
— singulární 264
— souřadnic 89, 254, 519, 791
— transponovaná 252, 517
— záměnné 3
translace 268, 531
trojhrany perspektivní 29
trojstěny Steinerovy u plochy kubické 490
trojstrany na ploše kubické 489, 490
trojúhelník autopolárný 300, 303, 339, 356
— konjugovaný vzhledem ke kubice rov. 398
— kuželosečce opsaný n. vepsaný 186, 339
— úhlopříčný u rov. čtyřrohu a čtyrstranu 25
— základní soustavy souřadnic 241
trojúhelníky homologické 30, 307, 338; — n-násobně 35
— kuželosečce opsané a vepsané 176, 183

trojúhelníky perspektivní 29
— polárné 306, 337
trs 19; — paprskový n. rovinový 19; — rovinový r-té třídy 549
třída čáry rovinné 232, 376; — prostorové 549, 675; — v S_r 837
— kongruence 433, 706, 742
— kužele 232
— nadplochy 836
— plochy 639, 648, 649
— torsy 675

Úběžnice 230
úběžník 85
unisekanta čáry kubické prost. 214
uspořádání prvků v jednomocném útvaru zákl. 36
útvar absolutní 277, 315
— direkční u polárnosti viz base n. základní
— geometrický 18
— invariantní při transformaci 4
— promítající 21
— protější 25
— průsečný 21
— samodružný kolineace rovinné 258, 259, 261; — prostorové 520, 521, 523, 525
— soběduální 23
— uspořádaný 37
— základní v polárnosti 310, 600; — u soustavy souřadnic 243, 625, 787
útvary afinní 230
— duální 23
— elementrání 191
— homografické viz projektivní
— Jacobiovy 653
— kolineární 224
— kolokální 20
— korelativní 225
— kvadratické jednomocné 191
— lineární jednomocné 191
— nesouhlasné 37, 98
— odvozené z projektivních útvarů jednomocných 156, 167; — dvojmocných 433
— perspektivní 22, 44, 64, 66, 191, 193, 194, 235, 248
— polárné 181
— projektivní 45, 191, 224
— přímkové 698, 704; — v S_r 864
— racionální 209
— sdružené 2; — v kolineaci n. v korelaci 232
— složené z p-mocné soustavy prostorů S_r 864
útvary souhlasné 37, 98
— soumístné 20, 97
— úplné 24
— vytvořené proj. jednomocnými útvary lineárním a kvadratickým 207, 209; — dvěma kvadratickými 219
— základní 18; — metricky speciální 20; — v S_r 771, 775
uzel čáry rovinné 210, 367

Válec kvadratický 167
varieta v S_r 771
— bodová 856
— lineární 771
— násobná (m-násobná) nadplochy 828
— normální prostoru S_r 862
— pravá n. zvrhlá 857
— jako průsek nadploch 863
— rozvinutelná k-tá u čáry v S_r 837
— tečná variety v S_r 862
— vytvořená tečnými přímkami v násobném bodě nadplochy 835
věda geometrická 1
věta Bézoutova 361
— Brianchonova 177
— Cevova 96
— Cliffordova 843
— Desargova o čtyřrohu 111; — o kuželosečkách 185, 187 (speciální 186, rozšířená č. Weyrova 201); — o trojúhelnících 27, 31, 32 (rozšířená 34, 52)
— Hesseova 305, 350, 472
— Chaslesova 182, 193
— Menelaova 96
— Pezzova 855
— Pappova 71, 74
— Pascalova 177, 333, 353, 396 (speciální 71, 179, 182, zobecněná 199, 363)
— Reyeova 472
— Salmonova 396, 398
— Staudtova o dvojpoměru u přímky se čtyrstěnem 701, 728; — o kuželosečce 312; — o projektivnosti 64, 65, 66
— Steinerova 86
— Steiner-Chaslesova 161, 162
— Sturmova 187
— Sylvestrova 323
— Weddleova 472
— základní o projektivnosti 63, 74
větev čáry rovinné 394, 406, 421

věty duální 23; — odvozené 17; — základní 1
vlastnosti invariantní při transformacích biracionálních 394; — projektivních (lineárních) 7, 299
— metrické 8
— ohniskové u kuželosečky 182
— osové u kuželosečky 182
— polárné u kuželosečky 181, 334, 456, 625
— projektivní 7, 299
— průměrové u kuželosečky 182, 456
vrchol kužele 165
vrcholy n-rohu 24, 25; — n-stěnu 24; — n-stranu 25; — úhlopříčné u rov. n-rohu 25
výkony duální 23; — základní 20, 775
vytvoření čáry 2. stupně a 2. třídy 161, 164, 196, 201, 208; — rovinné 3. stupně n. 3. třídy 209, 221, 222, 357, 415; — 4. stupně n. 4. třídy 220, 221, 222, 358, 417, 418; — n-tého stupně n. ν-té třídy 221, 222, 393; — prostorové 3. stupně a 3. třídy 211, 441; — 4. stupně 222; — racionální normální v S_r 841
vytvoření komplexu lineárního 606, 608; — kvadratického 726, 732
— kongruence 433; — lineární 434
— kužele 2. stupně a 2. třídy 164
— nadplochy 829; — kvadratické 822
— plochy 2. stupně a 2. třídy 164, 168, 208, 513; — 3. stupně 479, 485, 491, 493 (zborcené 222, 762); — n-tého stupně 640; — zborcené 757, 758, 761; — přímkové racionální normální v S_r 853
— variety bodové v S_r 863
vývoj projektivní geometrie 9, 778
vzdálenost projektivní 75
vzorec Laguerreův pro úhel dvou přímek 117

Základy projektivní geometrie 15, 42, 706, 779, 792
zbytek skupiny bodů na čáře rovinné 364

J. VOJTĚCH

GEOMETRIE PROJEKTIVNÍ

JČ MF

1932