

Ca 8800

ŘEŠENÉ ÚLOHY

z vyšší matematiky

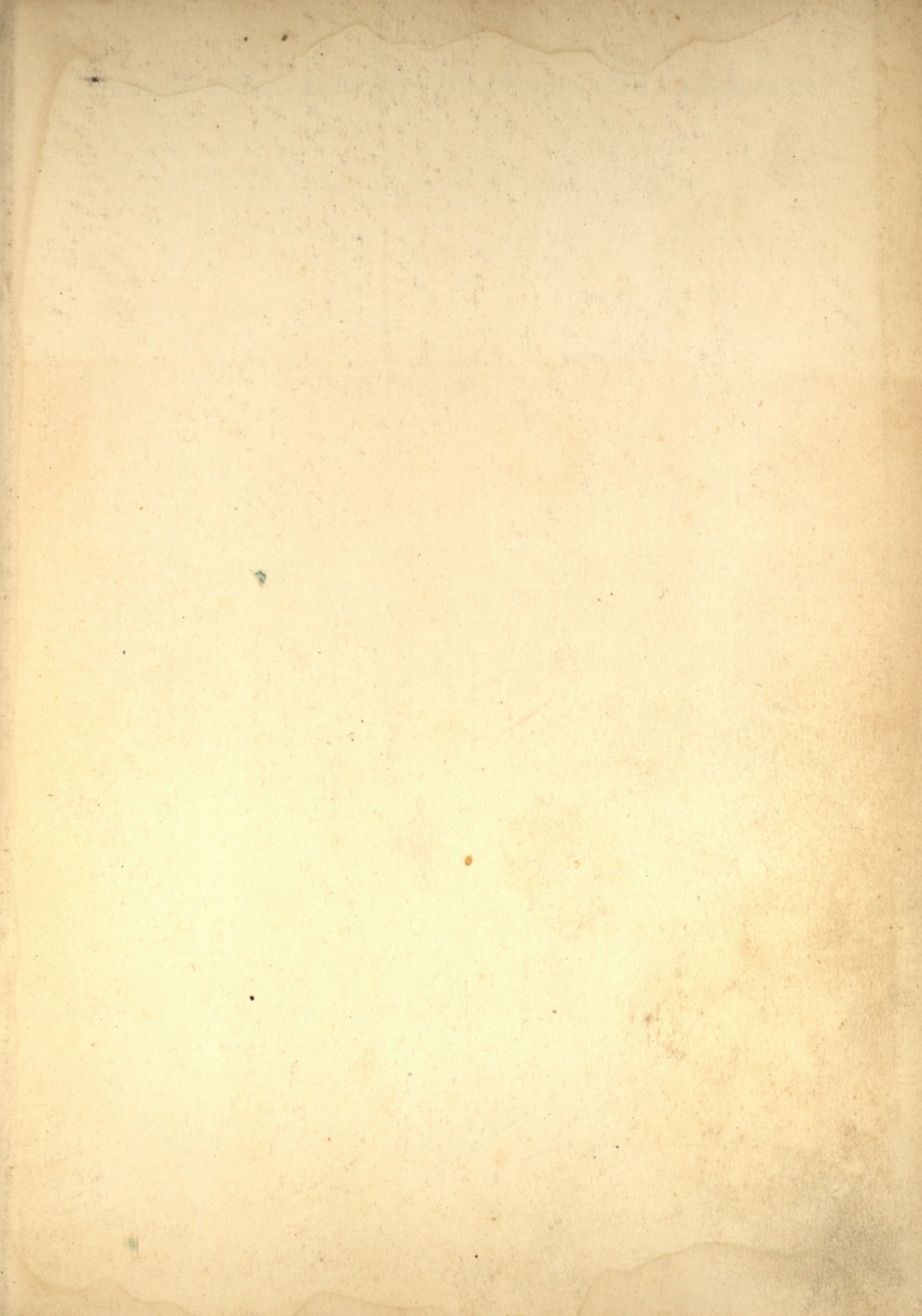
Dr Vladimír Ryšavý

DÍL DRUHÝ





Ca 8800



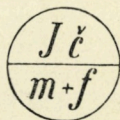
DR VLAD. RYŠAVÝ: ŘEŠENÉ ÚLOHY Z VYŠŠÍ MATEMATIKY

27

DR VLADIMÍR RYŠAVÝ

ŘEŠENÉ ÚLOHY Z VYŠŠÍ MATEMATIKY

DÍL DRUHÝ



JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ



2613/52

Panu

Ph. dru MILOSLAVU VALOUCHOVI,

odborovému přednostovi ministerstva školství, věd a umění v. v.,
čestnému členu a řediteli Jednoty československých matematiků a fysiků atd.

za dlouholetou podporu v práci věnuje v hluboké úctě a vděčnosti

VL. RYŠAVÝ

PŘEDMLUVA



Tento druhý díl obsahuje v podstatě zbývající úlohy původního vydání knihy „Řešené úlohy z vyšší matematiky“ (Praha 1939, Unie), která jest již dlouho rozebrána. Praktická potřeba si vyžádala, že byly přidány funkce hyperbolické a hyperbolometrické s užitím, rozvoj funkcí v řadu Taylorovu a Fourierovu, v dodatku pak Fourierovy řady s proměnnou komplexní. Počet 746 příkladů ve vydání z r. 1939 vzrostl tak i s úlohami dílu I (Počátků) na 1156, tedy o 410.

Prvý díl (Počátky, 1945) obsahuje nyní většinu látky první matematiky na technice, díl druhý zbytek a úlohy z matematiky druhé (bez analytické a diferenciální geometrie čar a ploch).

Úlohy byly voleny takové, které se vyskytují ve většině učebnic vyšší analýsy, při čemž byl brán zřetel hlavně na jejich vhodnost a užitečnost. Kromě příkladů původních jsem čerpal hlavně z těchto knih:

K. Petr, Počet diferenciální, Praha 1923.

K. Petr, Počet integrální, Praha 1915.

K. Petr, O rovnicích diferenciálních, litogr., Praha 1911.

E. Weyr, Počet diferenciální, Praha 1902.

J. Vojtěch, Základy matematiky, Praha, I. 1928, II. 1923.

E. Cesàro, El. Lehrbuch d. alg. Analysis und d. Infinitesimalrechg, Lipsko 1904.

Ed. Goursat, Cours d'analyse, t. 1, 2, Paris 1902, 1905.

Serret-Harnack, Lehrbuch d. Dif. u. Integralrechnung, B. 2, 3, Lipsko 1899, 1904.

W. F. Osgood, Lehrb. der Funktionentheorie, Lipsko 1920.

Schlömilch, Übungsbuch zum Studium d. höh. Analysis, Lipsko 1900.

Forsyth, Treatise on differential equations, Cambridge 1889.

Whittaker-Watson, A course of modern analysis, 1920.

Předpokládá se ovšem znalost dílu I a současné studium na př. II. dílu Vojtěchových Základů.

Panu prof. dru Vyčichlovi děkuji za velmi pečlivé přečtení a úpravu rukopisu i za odstranění zbývajících nedopatření.

V Praze r. 1947.

Autor.

POČET DIFERENCIÁLNÍ

Funkce hyperbolické a hyperbolometrické

Funkce hyperbolické znázorňujeme hyperbolou $\xi^2 - \eta^2 = 1$ analogicky jako funkce goniometrické v kružnici $\xi^2 + \eta^2 = 1$. Na obr. 1 jest $\overline{OA} = 1$ a dále x obsah výseče $OMAM_1$. Pak

$$\overline{MC} = \sinh x, \quad \overline{OC} = \cosh x, \quad \overline{AT} = \operatorname{tgh} x, \quad \overline{BD} = \operatorname{cotgh} x.$$

Hodnoty funkcí hyperbolických jsou definovány analyticky vztahy:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{\cos \varphi},$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \sin \varphi,$$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{1}{\operatorname{tgh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Lze je tedy počítati jako goniometrické funkce úhlu

$\varphi = \operatorname{amp} x = 2 \operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2}\pi$
nebo přímo vyčísti ze zvláštních tabulek (Techn. průvodce, tab. 7).

Základní vzorce:

$$\sinh x + \cosh x = e^x,$$

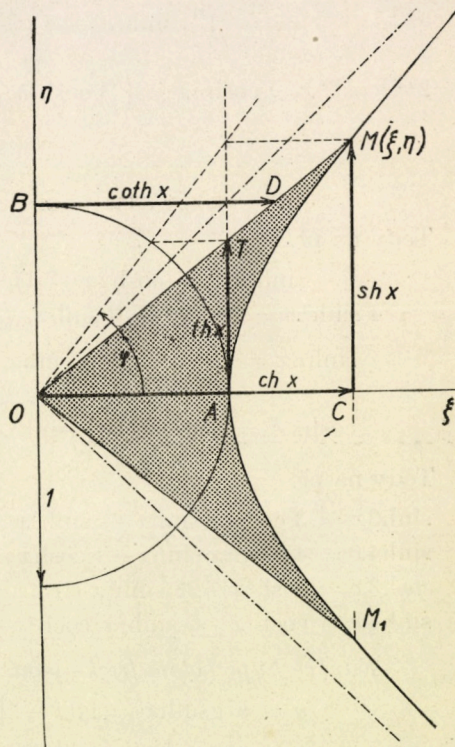
$$\cosh x - \sinh x = e^{-x},$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x, \quad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x,$$



Obr. 1.

$$\operatorname{tgh}(x+y) = \frac{\operatorname{tgh}x + \operatorname{tgh}y}{1 + \operatorname{tgh}x \operatorname{tgh}y}, \quad \operatorname{tgh}2x = \frac{2 \operatorname{tgh}x}{1 + \operatorname{tgh}^2x},$$

$$\cosh nx + \sinh nx = e^{nx} = (\cosh x + \sinh x)^n,$$

$$\begin{aligned} 2^{n-1} \sinh^n x &= \cosh nx - \binom{n}{1} \cosh(n-2)x + \\ &\quad + \binom{n}{2} \cosh(n-4)x - \dots \pm \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{1}{2}n} \quad (n \text{ sudé}) \\ &= \sinh nx - \binom{n}{1} \sinh(n-2)x + \\ &\quad + \binom{n}{2} \sinh(n-4)x - \dots \pm \binom{n}{\frac{1}{2}(n-1)} \sinh x \quad (n \text{ liché}) \\ 2^{n-1} \cosh^n x &= \cosh nx + \binom{n}{1} \cosh(n-2)x + \dots + \binom{n}{\frac{1}{2}n} \quad (n \text{ sudé}) \\ &= \dots + \binom{n}{\frac{1}{2}(n-1)} \cosh x \quad (n \text{ liché}) \end{aligned}$$

Tedy na př.:

$$\begin{aligned} \sinh^2 x &= \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1), \\ 4 \sinh^3 x &= \sinh 3x - 3 \sinh x, \quad 4 \cosh^3 x = \cosh 3x + 3 \cosh x. \\ \sinh nx &= \binom{n}{1} \cosh^{n-1} x \sinh x + \binom{n}{3} \cosh^{n-3} x \sinh^3 x + \dots \\ \cosh nx &= \cosh^n x + \binom{n}{2} \sinh^2 x \cosh^{n-2} x + \dots \end{aligned}$$

Tedy na př.

$$\begin{aligned} \sinh 3x &= 3 \cosh^2 x \sinh x + \sinh^3 x = 4 \sinh^3 x + 3 \sinh x, \\ \sinh 4x &= 4 \cosh^3 x \sinh x + 4 \cosh x \sinh^3 x = 4 \sinh x \cosh x (2 \sinh^2 x + 1), \\ \cosh 3x &= \cosh^3 x + 3 \sinh^2 x \cosh x = 4 \cosh^3 x - 3 \cosh x, \\ \sinh 4x &= \cosh^4 x + 6 \sinh^2 x \cosh^2 x + \sinh^4 x = 1 + 8 \sinh^2 x + 8 \sinh^4 x. \end{aligned}$$

Funkce hyperbolometrické jsou inverzní k hyperbolickým.

$$y = \operatorname{argsinh} x = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x = \sinh y;$$

$$y = \operatorname{argcosh} x = \pm \lg(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x = \cosh y;$$

$$y = \operatorname{argtgh} x = \lg \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad x = \operatorname{tgh} y;$$

$$y = \operatorname{argcotgh} x = \lg \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \quad x = \operatorname{cotgh} y.$$

Jejich hodnoty lze určit z tabulek nebo z uvedených vzorců. Na př. máme určit x ze $\sinh x = 6,050$. Tabulky dávají $x = 2,50$. Výpočet $x = \operatorname{argsinh} 6,05 = \lg(6,05 + \sqrt{37,602}) = \lg 12,18 = 2,500$. Podobně $x = \operatorname{argtgh} 0,9562 = \lg \sqrt{\frac{1,956}{0,044}} = \lg \sqrt{44,4} = \lg 6,66 = 1,896$.

Derivace:

$$16. \operatorname{Dsinh} x = \cosh x, \quad \operatorname{Dcosh} x = \sinh x.$$

$$17. \operatorname{Dtgh} x = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad \operatorname{Dcotgh} x = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

$$18. \operatorname{Dargsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad \operatorname{Dargcosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$19. \operatorname{Dargtgh} x = \frac{1}{1 - x^2}, \quad \operatorname{Dargcotgh} x = \frac{-1}{x^2 - 1}.$$

Příklady viz v dalších odstavcích.

Věta Taylorova

Podle této věty lze vyjádřit spojitou funkci $f(x)$, která má v bodě $x_0 = a$ všechny derivace do $(n + 1)$ -ní určité a konečné, výrazem

$$f(a + x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} x + \frac{f''(a)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n + Z_{n+1}. \quad (\text{I})$$

T. zv. zbytek řady Z_{n+1} udal Lagrange ve tvaru

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \vartheta x), \quad \text{Cauchy ve tvaru } \frac{x^{n+1}}{n!} (1 - \vartheta)^n f^{(n+1)}(a + \vartheta x),$$

pro ϑ hověcí podmínce $0 \leq \vartheta \leq 1$. Je-li pak $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_{n+1} = 0$ a má-li $f(x)$ v $(a, a + x)$ všechny derivace, je možno vyjádřit $f(a + x)$ nekonečnou konvergentní řadou Taylorovou. Pro $a = 0$ slove řada Mac Laurinovou. Protože jsou mocninové řady stejnoměrně konvergentní pro $|x| < \varrho$ (poloměr konvergence), lze je též integrovati (derivovati) člen za členem, takže dostaneme řady Taylorovy pro integrál (derivaci) původní funkce. Těchto řad se užívá k přibližnému výpočtu hodnot funkce $f(a + x)$ hlavně pro malá x , takže postačí několik prvních členů.
— Píšeme-li v horní řadě $x - a$ místo x , nabývá tvaru

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots \quad (\text{II})$$

Je to rozvoj funkce $f(x)$ v okolí bodu a .

Podarí-li se $f(x)$ nebo $f(a + x)$ rozvinouti v mocninovou řadu podle $x - a$ resp. podle x třeba jiným způsobem, na př. derivováním nebo integrováním jiné známé řady, násobením řad nebo jejich dělením, umocněním, odmocněním řad mocninových a pod., dostáváme rozvoj totožný s Taylorovou řadou. Pro tutéž funkci nemohou totiž v okolí téhož bodu a existovati dvě různé mocninové řady.

Tyto poznámky často velmi usnadňují rozvoj složitějších funkcí!

Příklady

Jest rozvinouti v Taylorovu řadu funkce:

681. $f(x) = e^x$ v okolí bodu $a = 0$. Všechny derivace $f^{(n)}(x) = e^x$ mají pro $x = a = 0$ hodnotu 1, takže platí rozvoj (I)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \text{ konvergující pro každé } x.$$

682. $f(x) = xe^x$ rozvineme v okolí $a = 0$ pohodlněji tak, že dosadíme za e^x řadu právě odvozenou:

$$xe^x = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots \text{ pro každé } x.$$

683. $f(x) = \sin x$ má $f^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \frac{1}{2}\pi)$, tedy $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ a řada zní

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \text{ též pro každé } x.$$

684. $f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ pro každé x .

Funkci $\lg x$ nelze rozvinouti v Taylorovu řadu v okolí bodu 0, neboť funkce i její všechny derivace tu nejsou spojité. Lze ji však rozvinouti v okolí bodu $a = 1$:

$$\lg(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \text{ pro } -1 < x \leq 1.$$

$$685. f(x) = \operatorname{tg} x. \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} = 2ff', \quad f''' = 2ff'' + 2f'^2, \text{ atd., takže } f'(0) = 1, f''(0) = 0, f^{(3)}(0) = 2, f^{(5)}(0) = 16, \\ \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{315}x^7 + \frac{2}{2835}x^9 + \dots \quad (\text{Pro } |x| < 1.)$$

Také je možné dělití řadu pro $\sin x$ řadou pro $\cos x$ metodou neurčitých činitelů. Užijeme-li jen prvních tří členů, vzniká chyba $\delta < x^7(1 + x^2 + x^4 + \dots) = \frac{x^7}{1 - x^2}$.

$$686. f(x) = \operatorname{arctg} x \text{ v okolí bodu } a = 0.$$

1. Prvý nejjednodušší postup jest integrovati řadu pro derivaci $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \\ f(x) = \int \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + c.$$

Protože $\operatorname{arctg}(0) = 0$, jest integrační konstanta $c = 0$.

2. Druhý postup spočívá v tom, že si pro hodnoty $f^{(k)}(0)$ odvodíme rekurentní vzorec, protože přímé počítání derivací $f^{(k)}(x)$ činí potíže. Derivujeme $(1 + x^2)f'(x) = 1$ podle formule Leibnizovy (P. př. 216*) $(n + 1)$ -krát a položíme $x = 0$:

$$D^{(n+1)}[(1 + x^2)f'(x)] = f^{(n+2)}(x)(1 + x^2) + \\ + \left(n + \frac{1}{1}\right)f^{(n+1)}(x) \cdot 2x + \left(n + \frac{1}{2}\right)f^{(n)}(x) \cdot 2 = 0.$$

Dosazením $x = 0$ máme hned

$$0 = f^{(n+2)}(0) + \frac{n(n+1)}{2}f^{(n)}(0) \cdot 2 \text{ neboli } f^{(n+2)}(0) = \\ = -n(n+1)f^{(n)}(0). \text{ Odtud } f'(0) = 1, f''(0) = 0 \text{ a dále všechny} \\ \text{sudé derivace vymizí; } f'''(0) = -2!, f^{(8)}(0) = -4!, \text{ atd. Pro liché} \\ k \text{ je } f^{(k)}(0) = -(k-1)! \text{ a}$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \text{ jako nahoře.}$$

*) P. značí Počátky vyšší matematiky, JČMF, 1945. Druhé vydání vyjde 1950 pod názvem Řešené úlohy z vyšší matematiky, díl I.

3. Třetí postup spočívá v přímém počítání derivací $\arctg x = y$ jako funkcí y ($x = \operatorname{tg} y$)

$$D(\arctg x) = y' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \cos^2 y.$$

$$y'' = -2 \cos y \cdot \sin y \cdot y' = -\cos^2 y \cdot \sin 2y = \cos^2 y \sin 2(y + \tfrac{1}{2}\pi),$$

$$\begin{aligned} y''' &= 2 \cos^4 y \cos 2(y + \tfrac{1}{2}\pi) - 2 \cos^3 y \sin y \sin 2(y + \tfrac{1}{2}\pi) = \\ &= 2 \cos^3 y [\sin(y + \tfrac{1}{2}\pi) \cos 2(y + \tfrac{1}{2}\pi) + \\ &+ \cos(y + \tfrac{1}{2}\pi) \sin 2(y + \tfrac{1}{2}\pi)] = 2 \cos^3 y \sin 3(y + \tfrac{1}{2}\pi). \end{aligned}$$

Takže dostáváme zjevně $y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \sin n(y + \tfrac{1}{2}\pi)$, což lze dokázat úplnou indukcí, derivujeme-li tuto rovnici ještě jednou. Pro $x = 0$ jest $y_0 = \arctg 0 = 0$, $\sin 2k(0 + \tfrac{1}{2}\pi) = \sin k\pi = 0$, takže všechny sudé derivace $f^{(2k)}(0) = 0$ a liché derivace jsou střídavě $+1$ a -1 .

687. Řadu pro $y = \arctg(x^2)$ dostaneme, když položíme $x^2 = z$ do řady

$$\arctg z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots,$$

takže hned

$$\arctg(x^2) = \frac{x^2}{1} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} - \frac{x^{14}}{7} + \dots$$

688. $f(x) = \arcsin x$ rozvineme analogicky podle příkladu s $\arctg x$ z 1 nebo 2.

1. $f'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}x^6 + \dots$,
a integrací

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots$$

2. Derivujeme podle Leibnizova pravidla $(1-x^2)f'(x) = 1$ $(n+1)$ -krát a dosadíme tam $x = 0$. Vyjde nejprve $2f'f''(1-x^2) \cdot 2xf'^2 = 0$ neboli $f''(1-x^2) = xf'$ a nyní

$$f^{(n+2)}(1-x^2) - nf^{(n+1)}2x - \binom{n}{-}f^{(n)}2 = f^{(n+1)} \cdot x + nf^{(n)};$$

pro $x = 0$

$$f^{(n+2)}(0) = (n^2 - n)f^{(n)}(0) + nf^{(n)}(0) = n^2 f^{(n)}(0).$$

$$f'(0) = 1, f'''(0) = 1, f^{(5)}(0) = 9, f^{(7)}(0) = 25 \cdot 9, \dots$$

a dostaneme tutéž řadu jako shora.

689. Taylorovou řadu pro $y = \lg \cos x$ lze obdržeti přímo integrováním řady pro $\operatorname{tg} x$, neboť $\lg \cos x = - \int \operatorname{tg} x \, dx$. Dostaneme

$$\lg \cos x = - \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{45} x^6 + \dots \right).$$

$$690. \quad y = \frac{x}{\sin x} = x : \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \right) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \dots$$

$$\pm x \mp \frac{x^3}{6} \pm \frac{x^5}{120} \mp \dots$$

$$\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \dots$$

$$\pm \frac{x^3}{6} \mp \frac{x^5}{36} \pm \dots$$

$$\frac{7x^5}{360} + \dots$$

691. Podobně

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} = 1 : \left(1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6 + \dots \right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 + \frac{61}{720} x^6 + \frac{17}{8064} x^8 + \dots$$

692. Pro $y = \varphi(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ dostaneme mocninovou řadu buď podle

Taylora, nebo vypočteme-li $\varphi^{(k)}(0) = f^{(k+1)}(0)$, podle př. 686,2 pro $f(x) = \operatorname{tg} x$. Dostaneme:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + x^2 + \frac{2}{3} x^4 + \frac{17}{45} x^6 + \dots$$

Tutéž řadu dostaneme však derivací řady pro $\operatorname{tg} x$ nebo umocněním řady pro $\sec x$ na druhou.

693. $y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Řadu dostaneme jako Taylorovu, v níž

$$f(0) = 1, \quad f'(x) = \sinh x, \quad f''(x) = \cosh x, \quad f^{(2k+1)}(0) = 0,$$

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = 1, \quad f^{(2K)}(0) = 1,$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Tutéž řadu dostaneme jako poloviční součet řad pro e^x a e^{-x} .

Derivací řady $\cosh x$ dostáváme hned

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

694. $y = e^{ax} \sin bx = f(x)$. Pomocí Leibnizovy věty máme

$$f^{(n)}(x) = a^n e^{ax} \sin bx + \binom{n}{1} a^{n-1} b e^{ax} \cos bx - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 e^{ax} \sin bx - \\ - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 e^{ax} \cos bx + \dots,$$

$$f(0) = 0, f'(0) = b, f''(0) = 2ab, f'''(0) = 3a^2b - b^3, f^{(4)}(0) = 4(a^3b - ab^3) \text{ atd.}$$

$$y = bx + abx^2 + \frac{1}{6}(3a^2 - b^2)bx^3 + \frac{1}{6}ab(a^2 - b^2)x^4 + \dots$$

Též násobením řad pro e^{ax} , $\sin bx$.

695. Rozvedte podle mocnin $(x-2)$ mnohočlen $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3$.

Užijeme Taylorova rozvoje ve tvaru

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3.$$

$$f(2) = 13, f'(2) = 20, f''(2) = 16, f'''(2) = 6,$$

takže

$$f(x) = 13 + 20(x-2) + 8(x-2)^2 + (x-2)^3.$$

696. $y = \frac{1}{x}$ rozvésti podle mocnin $x - a$.

$$f' = -\frac{1}{x^2}, f'' = \frac{2}{x^3}, f''' = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} \text{ atd.}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} - \frac{x-a}{a^2} + \frac{(x-a)^2}{a^3} - \dots$$

Totéž bychom dostali úpravou

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a + x - a} = \frac{1}{a} \frac{1}{1 + \frac{x-a}{a}} = \\ = \frac{1}{a} \left[1 - \frac{x-a}{a} + \left(\frac{x-a}{a} \right)^2 - \dots \right].$$

Řada konverguje, když kvocient < 1 , tedy $x < 2a$.

697. Nalézti Mac Laurinovu řadu pro $f(x) = e^{x \sin x}$. Pišme

$$z = x \sin x, \quad e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

a do této řady dosadíme za

$$z = x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} - \frac{x^8}{5040} + \dots$$

Dostaneme postupně

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}z^2 = & \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{48}x^8 + \dots & \\ \frac{1}{6}z^3 = & \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{12}x^8 + \dots & \\ \frac{1}{24}z^4 = & \frac{1}{24}x^8 + \dots & \\ \hline e^{x \sin x} = 1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{120}x^6 - \frac{1}{5040}x^8 + \dots \end{array}$$

698. Podobně najdeme řadu pro $f(x) = (1+x)^x = e^{x \lg(1+x)}$.

$$x \lg(1+x) = z; \quad e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

sem dosadíme

$$z = \frac{x^2}{1} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + \frac{x^6}{5} - \dots \quad \text{pro } |x| < 1$$

a máme

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}z^2 = & \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{3}x^6 + \dots & \\ \frac{1}{6}z^3 = & \frac{1}{6}x^6 + \dots & \\ \hline (1+x)^x = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{6}x^4 - \frac{3}{4}x^5 + \frac{3}{40}x^6 + \dots \end{array}$$

Numerické řešení rovnic methodami přibližnými

Přibližné hodnoty kořenů se najdou z tabulek nebo graficky průsekem křivek nebo nomogramem. Na př. rovnici $2x = \operatorname{tg} x$ řešíme průsekem čar $y = 2x$, $y = \operatorname{tg} x$. Grafy (tabulky) dávají kořen $x_1 = 1,16\dots$. Tato hodnota se pak zlepšuje metodou iterační, regula falsi, metodou Newtonovou a pod.

I. *Metoda iterační*: Danou rovnici $F(x) = 0$ převedeme na takový tvar $f(x) = \varphi(x)$, aby v okolí kořene bylo $|\varphi'| < |f'|$. Je-li pak x_1 první přibližná hodnota kořene, vypočte se x_2 (druhá přibližná hodnota) ze zjednodušené rovnice $f(x_2) = \varphi(x_1)$, další přiblížení x_3 z rovnice $f(x_3) =$

$= \varphi(x_2)$ atd. Leckdy lze užítí tvaru $f(x) = x$ a řešiti $x = \varphi(x)$. Pak ovšem $|\varphi'| < 1$ v okolí kořene.

II. *Regula falsi*. Leží-li kořen rovnice $f(x) = 0$ mezi čísly a, b , jest další přiblížení $x_1 = a - f(a) \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$. $f(a), f(b)$ musí mít různá znaménka. x_1 je bod, v němž seče osu x sečna vedená body $[a; f(a)], [b; f(b)]$.

III. *Metoda Newtonova*. Mají-li $f(x_1)$ a $f''(x_1)$ stejné znaménko, je další přiblížení

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Metody lze užítí, i když znaménka $f(x_i)$ a $f''(x_i)$ jsou různá, ale je-li $\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ malé vzhledem k x_i a $|f''(x_i)|$ malé vzhledem k $f'(x_i)$.

Metody se nejčastěji kombinují.

Příklady

699. Řešiti $x^3 + 10x - 1 = 0$. Pišme $x = 0,1 - 0,1x^3$. Hodnota jednoho kořene je tedy přibližně $0,1 = x_1$. $x_2 = 0,1 - 0,1^4 = 0,0999$; $x_3 = \varphi(x_2) = 0,099903$ atd.

700. Řešiti $xe^x = 0,1$. Vyjádříme-li e^x známou řadou, bude

$$xe^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots$$

Nyní lze psáti buď

a) $x = 0,1 - x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \dots$ a položití $x_1 = 0,1$; $x_2 = \varphi(x_1) = 0,1 - 0,01 - 0,0005 - \dots \doteq 0,09$; $x_3 = \varphi(x_2) \doteq 0,1 - 0,0081 = 0,0919$; atd., nebo rychleji

b) $x^2 + x - (0,1 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \dots) = 0$ a řešili jako kvadratickou $x = -0,5 + \sqrt{0,25 + 0,1 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \dots}$.
 $x_1 = 0,1$; $x_2 = -0,5 + \sqrt{0,3495} = 0,091$; $x_3 = 0,09128$; $x_4 = 0,091277$.

701. Řešiti rovnici $10^x = x^{10}$. Logaritmováním dostaneme

$$f(x) = x - 10 \log x = 0.$$

Odtud z tabulek zkusmo

$$x_1 = 1,371, f(x_1) = 0,0006,$$

$$x_2 = 1,372, f(x_2) = -0,0025.$$

Regula falsi dává

$$x_3 = 1,371 + \frac{0,001 \cdot 0,0006}{0,0031} = 1,3712.$$

Pravidlo Newtonovo:

$$f'(x) = 1 - \frac{10 \log e}{x} = 1 - \frac{4,3429}{x}, \quad f''(x) = \frac{4,34}{x^2} > 0.$$

Nutno tedy pravidla užití pro bod $x_1 = 1,371$, kde $f(x_1)$ a $f''(x_1)$ mají totéž znamení.

$$x_3' = 1,371 + \frac{0,0006}{2,170^3} = 1,3713 \text{ shodně s } x_3.$$

Skutečně podle pětimístných logaritmů

$$f(x_3') = 1,3713 - 1,3713 = 0.$$

702. Řešiti $2x^3 + 1,5x^2 - x - 0,5 = 0$. Kořen menší než 1 jest mezi $x_1 = 0,6$ a $x_2 = 0,7$, neboť $f(x_1) = -0,128$; $f(x_2) = 0,221$.

Regula falsi dává

$$x_3 = 0,6 + 0,128 \frac{0,1}{0,349} = 0,64.$$

Metoda Newtonova:

$$f' = 6x^2 + 3x - 1, \quad f'' = 12x + 3.$$

Musíme jí užití pro $x_3 = 0,64$.

$$f(x_3) = 0,524 + 0,613 - 0,64 - 0,5 = -0,003,$$

$$f'(x_3) = 2,454 + 0,92 = 3,374,$$

$$x_4 = 0,64 + \frac{0,003}{3,374} = 0,641 \text{ atd.}$$

703. Řešiti rovnici $\frac{xe^x}{e^x - 1} = 5$. Vypočteme $x = 5 - 5e^{-x}$ s při-

bližnou hodnotou $x_1 = 5$. Pak iterací $x_2 = 5 - 5e^{-5} =$
 $= 5 - 5 \cdot 0,000674 = 4,9663$, $x_3 = 5 - 5e^{-4,96} = 4,9649$ atd.

704. Řešiti rovnici $\sinh x = 3x$. Možno psáti $e^x - e^{-x} = 6x$, $e^x =$
 $= 6x + e^{-x}$. Z tabulek pro e^x najdeme $x_1 = 3$. Pak dosazením



$e^x = 18 + 0,0498 = 18,0498$ a odtud z tabulky nebo logarit-
micky $x_2 = 2,89$. Podobně dále

$$e^x = 17,34 + 0,0556 = 17,3956; x_3 = 2,85,$$

$$e^x = 17,10 + 0,0578 = 17,1578; x_4 = 2,84$$

atd. až $x = 2,8387 \dots$

- 705.** Řešiti $f(x) = x - \cos x = 0$. Prvou přibližnou hodnotu $x_1 < 1$ odhadneme buď z diagramu, nebo užitím dvou členů Taylorovy řady pro $\cos x$:

$$x - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \dots = 0; x^2 + 2x - 2 = 0$$

dává $x_1 = -1 + \sqrt{3} = 0,732 \dots$

Abychom mohli užítí metody Newtonovy, vezmeme $x_1 = 0,74$, neboť

$$f(x_1) = 0,74 - 0,73847 = 0,00153 > 0,$$

$$f'(x_1) = 1 + 0,67429 = 1,67429,$$

$$f''(x_1) = \cos x_1 = 0,73847 > 0.$$

$$x_2 = 0,74 - \frac{0,00153}{1,67429} = 0,74 - 0,0009 = 0,7391.$$

Další krok metodou Newtonovou pro $x_2 = 0,7392$ (aby $f > 0$)
dává již 0,73908.

- 706.** Řešiti $f(x) = x^2 - \cos x = 0$. Jako dříve najdeme x_1 z rovnice

$$x^2 - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 = 0, x^4 - 36x^2 + 24 = 0$$

dává $x^2 = 18 \pm \sqrt{300} = 18 - 17,3205 = 0,6795,$

$$x_1 = 0,8243, f(x_1) = 0,6795 - 0,6791 = 0,0004,$$

$$f'(x_1) = 2x_1 + \sin x_1 = 1,993, f''(x_1) = 2 + \cos x > 0,$$

$$x_2 = 0,8243 - \frac{0,0004}{1,993} = 0,8241,$$

$$f(x_2) = -0,00008.$$

Regula falsi dává nyní

$$x_3 = 0,8241 + 0,00008 \frac{0,0002}{0,0004} = 0,82414.$$

- 707.** Řešiti $\log \operatorname{tg} x - \cos x = f(x) = 0$. Z příslušných tabulek najde-
me pro

$$\begin{aligned}x_1 &= 1,18682 \text{ (68}^\circ\text{)}, & f(x_1) &= 0,39359 - 0,37461 = 0,01898, \\x_2 &= 1,16937 \text{ (67}^\circ\text{)}, & f(x_2) &= 0,37215 - 0,39073 = -0,01858, \\x_3 &= 1,17810 \text{ (67}\frac{1}{2}\text{)}^\circ, & f(x_3) &= 0,38278 - 0,38268 = 0,00010.\end{aligned}$$

Regula falsi mezi x_2 a x_3 dává

$$x_4 = 1,16937 + 0,01858 \frac{0,00873}{0,01868} = 1,17805,$$

$$f(x_4) = 0,00000.$$

Metoda Newtonova se tu příliš nehodí pro nepohodlný tvar $f'(x)$ a $f''(x)$.

708. a) Řešiti rovnici $f(x) = \operatorname{tg} x - x = 0$. Diagram funkcí $y = x$ a $y = \operatorname{tg} x$ ukazuje, že kořeny leží mezi $n\pi$ a $(n + \frac{1}{2})\pi$. Hledejme na př. kořen menší než $\frac{3}{2}\pi = 4,7124$ (270°). Za x_1 položíme tedy (260°) 4,53786.

$$f(x_1) = 5,67128 - 4,53786 = 1,13342 > 0,$$

$$f'(x) = \operatorname{tg}^2 x, \quad f''(x) = 2 \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} > 0.$$

Užijeme metody Newtonovy.

$$x_2 = x_1 - \frac{\operatorname{tg} x_1 - x_1}{\operatorname{tg}^2 x_1} = 4,53786 - \frac{1,133}{32,14} \doteq 4,50.$$

$$x_3 = 4,50 - \frac{0,137}{20,61} = 4,50 - 0,0066 = 4,4934$$

atd.. Vícemístnými tabulkami dostaneme $x \doteq 4,49340946$.

b) Řešiti rovnici $x = \frac{1}{2} \lg \frac{x+1}{x-1} = \operatorname{argcotgh} x$. Lze psáti

$$f(x) = x - \operatorname{cotgh} x = 0, \quad f'(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} \quad \text{a zřejmě } x > 1. \quad \text{Pro}$$

$x_1 = 1,1$ má $f(x)$ hodnotu $-0,15$; pro $x_2 = 1,2$, $f(x_2) = 0,001$.

Pravidlo Newtonovo dává pro $a = 1,2$

$$x_3 = 1,2 - \frac{0,001}{3,27} = 1,19969.$$

Přesnější hodnota kořene je $x \doteq 1,199678$.

709. Dluh D má se umořiti anuitou $\alpha = \frac{D}{k}$ a to $n - 1$ splátkami za-
čátkem roku. Jaké musí být úrokovací procento dekursivní?

$$D = \alpha \frac{1 - r^{-n+1}}{r - 1}, \text{ neboli } k(r - 1) = 1 - r^{-n+1}.$$

$$\text{Odtud } r = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k} r^{-n+1}.$$

Pro $k = 20, n = 100$ jest řešiti rovnici

$$r = 1,05 - 0,05r^{-99}.$$

Budeme počítat metodou iterační:

$$r_1 = 1,05, \quad 0,05r^{-99} = 0,000399,$$

$$r_2 = 1,049601, \quad 0,000414,$$

$$r_3 = 1,049586, \quad 0,000415,$$

$$r = 1,049585, \quad p = 4,9585.$$

710. Střádáním částky α koncem roku po n roků se má nastřádati ka-
pítal $k\alpha$. Jaké musí býti dekursivní úrokovací procento?

$$k\alpha = \alpha \frac{r^n - 1}{r - 1}, \text{ neboli } r^n - kr + k - 1 = 0.$$

Protože $r > 1$, nutno počítati

$$r = \sqrt[n]{kr - k + 1} = y.$$

Aby iterace postupovala dosti rychle, musí derivace pravé strany
být malá.

$$y' = \frac{1}{n} \frac{k}{\sqrt[n]{(kr - k + 1)^{n-1}}} = \frac{1}{n} \frac{kr}{kr - k + 1} = \frac{kr}{nk(r - 1) + n},$$

neboť r je blízké 1. Musí tedy být $n(r - 1)$ mnohem větší nežli 1.

Budiž na př. $n = 100, k = 200$.

Nyní povede iterace k cíli.

$$\log r = 0,01 \log[1 + 200(r - 1)].$$

Volme za první přiblížení $r = 1,02$:

r	$\log r$	$0,01 \log[...]$
1,02	0,00860	0,00690

Rozdíl logaritmů je dosti velký, proto hned přejdeme k číslům

1,013	0,00565	0,00556
1,0129	0,00557	0,00554
1,0128	0,00552	0,00551
1,0127	0,00548	0,00549

Dál budeme postupovati interpolací:

$$f(x) = \log x - 0,01 \log[1 + 200(x - 1)]$$

r	$f(r)$
1,0128	0,00001
1,0127	-0,00001

Správné r bude tedy aritmetický střed

$$r = 1,012750 \text{ a } p = 1,2750.$$

Jinak lze p počítati ovšem pomocí tabulek Achardových a jiných metod finanční aritmetiky.

711. Řešte $f(x) = x + x^4 + x^9 + \dots - 0,2 = 0$. $0,2 = b < 1$.

Metoda iterační dává $x_1 = b - b^4$. Druhé přiblížení najdeme postupem Newtonovým:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= -b^4 + (b^4 - 4b^7 + 6b^{10} - \dots) + b^9 + \dots = \\ &= -4b^7 + b^9 + 6b^{10} + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= 1 + 4x_1^3 + 9x_1^8 + \dots = \\ &= 1 + 4(b^3 - 3b^6 + 3b^9) + 9b^8 + \dots, \end{aligned}$$

$$-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \doteq \frac{4b^7 - b^9 - 6b^{10}}{1 + 4b^3} \doteq 4b^7 - b^9 - 22b^{10} + \dots$$

$$x_2 = b - b^4 + 4b^7 - b^9 - 22b^{10} + \dots = 0,198451.$$

$$f''(x_1) = 12x_1^2 + \dots > 0, \quad f(x_1) < 0,$$

avšak přes to lze Newtonovy metody použití podle poznámky pod III.

Funkce složené o více proměnných. Vyšší derivace implicitně určené funkce více proměnných

Složená funkce $u = u(x_1, x_2, x_3)$, kde $x_i = x_i(y_1, y_2)$ jsou funkce nezávisle proměnných y_1, y_2 má parciální derivace prvního řádu

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial y_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial y_2},$$

a totální diferenciál $du = \frac{\partial u}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial u}{\partial y_2} dy_2$ jest

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} dx_3,$$

jakoby x_i byly nezávisle proměnné a nikoli funkce y_i .

Ovšem $dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_i}{\partial y_2} dy_2$ jsou nyní diferenciály totální.

Vyšší derivace se tvoří užitím horních vzorců na derivace první. Tedy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\partial u}{\partial y_1} \right) \text{ nebo } \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\partial u}{\partial y_2} \right)$$

a podobně. Pro druhý totální diferenciál máme

$$d^2u = d(du) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} dx_3 \right)^{(2)} u + \frac{\partial u}{\partial x_1} d^2x_1 + \\ + \frac{\partial u}{\partial x_2} d^2x_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} d^2x_3.$$

Jsou-li x_i proměnné nezávislé, poslední 3 členy zmizí (viz P. str. 57).

Příklady

712. $u = x^2 + y^2$; budtež však $x = \rho \cos \omega$, $y = \rho \sin \omega$. Jest vyjádřiti derivace

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial u}{\partial \omega} \text{ a též derivace druhé } \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \omega}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2}.$$

Jest předně $\frac{\partial x}{\partial \varrho} = \cos \omega, \quad \frac{\partial x}{\partial \omega} = -\varrho \sin \omega,$

$$\frac{\partial y}{\partial \varrho} = \sin \omega, \quad \frac{\partial y}{\partial \omega} = \varrho \cos \omega.$$

A tedy $\frac{\partial u}{\partial \varrho} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varrho} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varrho} = 2x \cos \omega + 2y \sin \omega =$
 $= 2\varrho \cos^2 \omega + 2\varrho \sin^2 \omega = 2\varrho,$

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \omega} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \omega} = -2x\varrho \sin \omega + 2y\varrho \cos \omega =$$

 $= -2\varrho^2 \cos \omega \sin \omega + 2\varrho^2 \sin \omega \cos \omega = 0.$

Musí tak býti, neboť $u = \varrho^2$.

Zřejmě $\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho \partial \omega} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} = 0$ a tedy $d^2 u = 2d\varrho^2,$

což by vyplynulo i z výpočtu:

$$du = 2x dx + 2y dy,$$

$$d^2 u = 2dx^2 + 2dy^2 + 2(x d^2 x + y d^2 y),$$

kdybychom dosadili

$$dx = \cos \omega d\varrho - \varrho \sin \omega d\omega,$$

$$dy = \sin \omega d\varrho + \varrho \cos \omega d\omega,$$

$$d^2 x = -2 \sin \omega d\varrho d\omega - \varrho \cos \omega d\omega^2,$$

$$d^2 y = 2 \cos \omega d\varrho d\omega - \varrho \sin \omega d\omega^2.$$

713. Dokázati, že pro $z = \varphi(x + iy) + \psi(x - iy)$ platí rovnice

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$z = \varphi(u) + \psi(v); \quad u = x + iy, \quad v = x - iy.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = i \frac{\partial \varphi}{\partial u} - i \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = i = -\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial z_x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z_x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial z_y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z_y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} i^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} i^2.$$

Vskutku $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

- 714.** Funkce $z = f(x, y)$ budiž definována rovnicí $F(x, y, z) = 0$. Parciální derivace z dostaneme, derivujeme-li F jako funkci složenou, neboť $z = f(x, y)$. Derivujeme tedy podle x , máme:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \text{ podle } y: \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (\text{a})$$

Odtud dále $\frac{\partial z}{\partial x} = -F_x : F_z, \frac{\partial z}{\partial y} = -F_y : F_z$.

Druhé derivace obdržíme další derivací rovnic (a); na př.:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

odkud lze vypočísti $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ atd. podobně ostatní derivace.

- 715.** Je-li na př. $x^2 + y^2 + z^2 - a = 0$, obdržíme derivacemi

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

prvé derivace $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$

Dalším derivováním

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \text{ tedy } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -(1 + z^2) : z$$

nebo $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -(z^2 + x^2) : z^3.$

Podobně dostaneme derivací $x + z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ podle y

vztah $\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -xy : z^3.$

Totéž plyne přímou derivací $\frac{\partial z}{\partial y}$ podle x : $+\frac{y}{z^2} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{xy}{z^3}.$

716. Určiti prvé a druhé parciální derivace funkce z definované rovnici $y - x \operatorname{tg} \frac{z}{am} = 0$ (plocha šroubová).

Označujme podle Eulera

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Derivujeme podle x :

$$- \operatorname{tg} \frac{z}{am} - x \frac{1}{\cos^2 \frac{z}{am}} \frac{1}{am} p = 0.$$

Protože

$$\operatorname{tg} \frac{z}{am} = \frac{y}{x}, \text{ máme } \cos^2 \frac{z}{am} = 1 : \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$\text{tedy} \quad \frac{y}{x} + \frac{x(x^2 + y^2)}{x^2 am} p = 0, \quad p = \frac{-amy}{x^2 + y^2}.$$

$$\text{Podobně bude } q = \frac{amx}{x^2 + y^2}.$$

Druhé derivace obdržíme z p a q přímo operacemi $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = r = \frac{2amxy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad s = \frac{am(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad t = \frac{-2amxy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Zavádění nových proměnných

Ve funkci $z(x, y)$ zavést nové nezávislé proměnné u, v substitucí $x = x(u, v), y = y(u, v)$. Jest vyjádřiti

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots \text{ pomocí } \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \dots$$

Pak jest z složená funkce u, v a podle toho ji derivujeme jako složenou funkci více proměnných (viz str. 24):

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned}$$

Odtud lze pak zase vypočísti $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ pomocí $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Jest však možno jako druhý způsob vyjádřiti $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ a psáti přímo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Vložíme-li pak do těchto rovnic za z , $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, dostaneme derivace

$$\text{druhé} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ atd.}$$

Příklady

717. Vyjádřiti $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2$ v souřadnicích polárních: $x = u \cos v$,

$y = u \sin v$, nebo naopak $u^2 = x^2 + y^2$, $v = \arctg(y : x)$. Stanovíme podle druhého způsobu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{u} = \cos v, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin v,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-\sin v}{u}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos v}{u}$$

a hned

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cos v - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\sin v}{u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \sin v + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\cos v}{u}.$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2.$$

718. Vyjádřiti $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ v souřadnicích polárních. — Z rovnic předešlého příkladu vyplývá, nahradíme-li z derivací $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \cos v \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{\sin v}{u} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \\ &= \cos^2 v \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\sin^2 v}{u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{2 \sin v^2 \cos v}{u} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \\ &+ \frac{2 \sin v \cos v}{u^2} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\sin^2 v}{u} \frac{\partial z}{\partial u}. \end{aligned}$$

Podobně

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \sin v + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\cos v}{u} = \\ &= \sin^2 v \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\cos^2 v}{u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2 \sin v \cos v}{u} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \\ &- \frac{2 \sin v \cos v}{u^2} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\cos^2 v}{u} \frac{\partial z}{\partial u},\end{aligned}$$

takže
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial z}{\partial u}.$$

719. Jest vyjádřiti v prostorových polárních souřadnicích výraz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \text{ pro funkci } u(x, y, z).$$

$x = r \sin \gamma \cos \varphi$, $y = r \sin \gamma \sin \varphi$, $z = r \cos \gamma$ dá se nahraditi dvěma substitucemi jednoduššími, je-li $\varrho = r \sin \gamma$ (obr. 2.):

I. $x = \varrho \cos \varphi$,

$y = \varrho \sin \varphi$, $z = z$;

II. $z = r \cos \gamma$,

$\varrho = r \sin \gamma$, $\varphi = \varphi$.

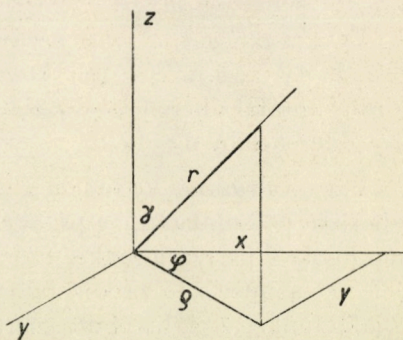
Podle výsledku předešlé úlohy dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \\ &+ \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\end{aligned}$$

a po substituci II jest obdobně

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, \\ \frac{\partial u}{\partial \varrho} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \varrho} + \frac{\partial u}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \varrho},\end{aligned}$$

kde vyjádříme ještě $\frac{\partial r}{\partial \varrho}$ a $\frac{\partial \gamma}{\partial \varrho}$ podle úlohy 717, když tam



Obr. 2.

místo z, x, y, u, v píšeme naše u, z, ϱ, r, γ , takže jest místo

$$\frac{\partial z}{\partial y} \text{ psáti } \frac{\partial u}{\partial \varrho} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \gamma + \frac{\partial u}{\partial \gamma} \frac{\cos \gamma}{r}$$

a dále

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial \gamma} \frac{\cot \gamma}{r^2}.$$

Celkem je tedy

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \\ & = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \gamma}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \gamma}. \end{aligned}$$

Extrémy funkcí více proměnných

Funkce $f(x, y)$ dvou nezávisle proměnných, která má všude derivace, má extrémy v těch bodech (x, y) , pro které $f_x = 0, f_y = 0$ a současně $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$. Maximum pak nastává při $f_{xx} < 0$ (nebo $f_{yy} < 0$), minimum při $f_{xx} > 0$ (resp. $f_{yy} > 0$).

Funkce $f(x, y, z, \dots)$ více nezávisle proměnných má extrém jen pro ty hodnoty $x, y, z, \dots$, pro které prvý totální diferenciál $df = 0$ a druhý totální diferenciál d^2f má stálé znaménko pro libovolné hodnoty diferenciálů $dx, dy, dz, \dots$.

Extrémy vázané. Ve funkci $u = f(x, y, z, t)$ jsou proměnné vázány vedlejšími podmínkami, na př. $\varphi(x, y, z, t) = 0, \psi(x, y, z, t) = 0$. Položíme rovny 0 derivace funkce $v = u + \lambda \varphi + \mu \psi$ podle všech proměnných, považující λ, μ za konstanty. Z těchto rovnic vypočteme x, y, z, t jako funkce λ, μ , které dosazený do $\varphi = 0, \psi = 0$ dají hodnoty pro λ, μ a tím i pro hledaná x, y, z, t .

Příklady

720. Dané číslo a rozdělití na 3 sčítance tak, aby jejich součin $u = xyz$ byl co největší.

$$x + y + z = a, \quad u = xy(a - x - y) = axy - x^2y - xy^2.$$

$$u_x = ay - 2xy - y^2 = 0, \quad u_y = ax - x^2 - 2xy = 0$$

mají kořeny $x = y = \frac{1}{3}a = z$. Druhé derivace $u_{xx} = -2y$,

$u_{xy} = a - 2x - 2y$, $u_{yy} = -2x$ dávají výraz $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 4xy - (a - 2x - 2y)^2 = \frac{1}{3}a^2 > 0$, $u_{11} = -\frac{2}{3}a < 0$. Nastává maximum pro u .

721. Vyšetřiti extrém funkce $x^3 + y^3 - 3axy = u$. $u_x = 3x^2 - 3ay$, $u_y = 3y^2 - 3ax$ položeny $= 0$ mají kořeny $x = y = a$, $u = -a^3$. $u_{xx} = 6x$, $u_{xy} = -3a$, $u_{yy} = 6y$ dávají $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 36xy - 9a^2 = 27a^2 > 0$, $u_{xx} = 6a > 0$ a funkce má minimum.

722. Totéž pro funkci $u = x^3y^2(1 - x - y)$. Logaritmický diferenciál dává jednoduše

$$\begin{aligned} \frac{du}{u} &= \frac{3}{x} dx + \frac{2}{y} dy - \frac{dx + dy}{1 - x - y} = \\ &= dx \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{1 - x - y} \right) + dy \left(\frac{2}{y} - \frac{1}{1 - x - y} \right) = 0, \end{aligned}$$

tudíž

$$u_x = \frac{3}{x} - \frac{1}{1 - x - y} = 0, \quad u_y = \frac{2}{y} - \frac{1}{1 - x - y} = 0.$$

Kořeny jsou $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{1 - x - y}{1} = \frac{1}{6},$

tedy $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}.$

Druhý diferenciál

$$\frac{d^2u}{u} - \left(\frac{du}{u} \right)^2 = -3 \left(\frac{dx}{x} \right)^2 - 2 \left(\frac{dy}{y} \right)^2 - \left(\frac{dx + dy}{1 - x - y} \right)^2 = A$$

a dále $d^2u = uA < 0$ a u jest maximum.

723. Určete rozměry kváдру největšího objemu, který je vepsán kouli poloměru r .

$V = xyz$, $z = \sqrt{4r^2 - x^2 - y^2}$. Když V je extrémní, má

$V^2 = x^2y^2(4r^2 - x^2 - y^2)$ také extrém.

$V^2 = 4r^2x^2y^2 - x^4y^2 - x^2y^4$ má derivace

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (V^2) &= 2xy^2(4r^2 - 2x^2 - y^2) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} (V^2) &= 2yx^2(4r^2 - x^2 - 2y^2) = 0 \end{aligned} \right\} x = y = \frac{2r}{\sqrt{3}} = z.$$

Hledaný kvádr je krychle, zřejmě maximální.

724. Do trojosého elipsoidu $x^2 : a^2 + y^2 : b^2 + z^2 : c^2 = 1$ vepsati kvádr největšího objemu V .

$$V = 2x \cdot 2y \cdot 2z = 8xyz, \varphi = x^2 : a^2 + y^2 : b^2 + z^2 : c^2 - 1 = 0.$$

Utvoříme $v = 8xyz - \lambda \varphi$ a derivujeme

$$v_x = 8yz - \lambda \frac{2x}{a^2} = 0,$$

$$v_y = 8xz - \frac{2\lambda y}{b^2} = 0,$$

$$v_z = 8xy - \frac{2\lambda z}{c^2} = 0,$$

$$4xyz = \frac{x^2 \lambda}{a^2} = \frac{y^2 \lambda}{b^2} = \frac{z^2 \lambda}{c^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

dává dosazeno do rovnice elipsoidu hned

$$\frac{3x^2}{a^2} = 1; \quad x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Z povahy věci plyne, že objem je pro tyto hodnoty maximální.

725. Naléztí nejmenší vzdálenost bodu $B(-2; 3)$ od paraboly $y^2 = 8x$.

a) Nejbližší bod paraboly k B je průsečík normály z bodu B na parabolu. Směrnice tečny je tu $y' = \frac{4}{y}$, tedy rovnice normály $y - 3 = -\frac{1}{4}y(x + 2)$. Odtud plyne pro bod $(x; y)$ na parabole podmínka

$$4y - 12 = -xy - 2y \text{ neboli } xy = 12 - 6y, \quad x = \frac{12 - 6y}{y}.$$

Dosazením do $y^2 = 8x$ dostaneme

$$y^2 = \frac{96 - 48y}{y}, \text{ nebo } f(y) = y^3 + 48y - 96 = 0,$$

$$f'(y) = 3y^2 + 48.$$

Pro $y_1 = 2$ je $f(y_1) = 18$, pro $y_2 = 1,8$ je $f(y_1) = -3,77$ a pro $y_3 = 1,9$ je $f(y_3) = 2,06$. Regula falsi dává

$$y_4 = 1,8 + 3,77 \frac{0,1}{5,83} = 1,86, \quad f(y_4) = -0,285. \quad f'(y_4) = 58,38,$$

takže pravidlo Newtonovo dává

$$y_5 = 1,86 + \frac{0,285}{58,38} = 1,864$$

s dostatečnou přesností na 4 cifry. Potom $x = 0,432$.

b) Úlohu je možno řešiti též tak, že hledáme minimum funkce $d^2 = (x + 2)^2 + (y - 3)^2$ s vedlejší podmínkou $\varphi(x) \equiv y^2 - 8x = 0$. Podle návodu položíme rovnými nule parciální derivace funkce

$$z = (x + 2)^2 + (y - 3)^2 + \lambda(y^2 - 8x).$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x + 2) - 8\lambda = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2(y - 3) + 2\lambda y = 0.$$

$$\text{Odtud } \lambda = \frac{x + 2}{4} = \frac{3 - y}{y}. \quad \text{Odtud } x = \frac{12 - 6y}{y}$$

jako shora i s důsledky.

c) Konečně lze do $z = (x + 2)^2 + (y - 3)^2$ dosaditi $x = \frac{1}{8}y^2$, $z = (\frac{1}{8}y^2 + 2)^2 + (y - 3)^2$ a pro extrém jest

$$\frac{dz}{dy} = 2(\frac{1}{8}y^2 + 2) \frac{1}{4}y + 2(y - 3) = 0,$$

odkud opět plyne rovnice $y^3 + 48y - 96 = 0$ s horním řešením.

726. Najděte na křivce $y = e^x$ bod nejbližší k počátku.

a) Normála z počátku má rovnici $y = -xe^{-x}$. Její průsečík s křivkou se najde z rovnice $e^x = -xe^{-x}$ neboli $x + e^{2x} = 0$. Podle grafu kořen je asi $-0,4 = x_1$. $f'(x) = 1 + 2e^{2x}$, $f''(x) = 4e^{2x}$. Dál postupujeme metodou Newtonovou.

$$f(x_1) = -0,4 + 0,44933 = 0,04933,$$

$$x_2 = -0,4 - \frac{0,0493}{1,89} \doteq -0,42,$$

$$f(x_2) = -0,42 + 0,43171 = 0,0117,$$

$$x_3 = -0,42 - \frac{0,0117}{1,86} \doteq -0,426 \quad (\text{na tři cifry správné}).$$

b) Uvažujme minimum funkce $z = x^2 + y^2 + \lambda(y - e^x)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - \lambda e^x = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \lambda = 0, \quad \lambda = -2y,$$

$2x + 2ye^x = 0 = 2x + 2e^{2x}$, tedy opět $x + e^{2x} = 0$ s příslušným kořenem shora uvedeným.

c) Do čtverce vzdálenosti $z = x^2 + y^2$ dosadíme za $y = e^x$.

$$z = x^2 + e^{2x}, \quad \frac{dz}{dx} = 2x + 2e^{2x} = 0$$

dává opět tutéž rovnici jako shora.

727. Úsečkou u minimální délky jest odtíti z daného trojúhelníku jeho n -tinu. Strany a, b svírají úhel γ a úsečka u na nich vytíná

části x , resp. y . Žádá se, aby $xy \sin \gamma = \frac{1}{n} ab \sin \gamma$, tedy

$$\varphi = xy - \frac{ab}{n} = 0. \text{ Potom}$$

$$u^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma,$$

$$v = x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma - \lambda \left(xy - \frac{ab}{n} \right),$$

$$v_x = 2x - 2y \cos \gamma - \lambda y = 0 = 2x - y(2 \cos \gamma + \lambda),$$

$$v_y = 2y - 2x \cos \gamma - \lambda x = 0 = 2y - x(2 \cos \gamma + \lambda).$$

Z obou rovnic plyne řešením $x = y$, což dosazeno do $\varphi = 0$ dává $x = \sqrt{ab : n} = y$.

728. Určete délky poloos elipsy $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$ se středem v počátku. Hledáme vlastně extrémy pro vzdálenost $u^2 = x^2 + y^2$ bodu na elipse od počátku.

$$v = x^2 + y^2 - \lambda(5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8),$$

$$\left. \begin{aligned} v_x &= 2x - \lambda(10x + 6y) = 0 \\ v_y &= 2y - \lambda(6x + 10y) = 0 \end{aligned} \right\} \frac{x}{y} = \frac{5x + 3y}{3x + 5y}.$$

Odtud vyplývá $3x^2 = 3y^2$, nebo $x_{1,2} = \pm y$. Dosadíme-li tyto kořeny do rovnice elipsy $\varphi = 0$, jest

$$\text{I. } 16x^2 = 8$$

$$\text{II. } 4x^2 = 8$$

$$x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$$

$$x^2 = y^2 = 2$$

$$u^2 = x^2 + y^2 = 1 = b^2.$$

$$u^2 = 4 = a^2.$$

729. Určiti nejkratší vzdálenost daného bodu $(x_0; y_0; z_0)$ od přímky

$$x = az + p, \quad y = bz + q.$$

$$u = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

$$\begin{aligned}
 v &= u + \lambda\varphi + \mu\psi, & \varphi &\equiv x - az - p = 0, \\
 v_x &= 2(x - x_0) + y = 0, & \psi &\equiv y - bz - q = 0, \\
 v_y &= 2(y - y_0) + \mu = 0, \\
 v_z &= 2(z - z_0) - \lambda a - \mu b = 0.
 \end{aligned}$$

Odtud: $x = -\frac{1}{2}\lambda + x_0$, $y = -\frac{1}{2}\mu + y_0$, $z = \frac{1}{2}\lambda a + \frac{1}{2}\mu b + z_0$,
a dosazeno do φ, ψ dává:

$$\begin{aligned}
 \lambda(1 + a^2) + \mu ab &= 2(x_0 - az_0 + p), \\
 \lambda ab + \mu(1 + b^2) &= 2(y_0 - bz_0 + q).
 \end{aligned}$$

Řešením

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{2(1 + b^2)(x_0 - az_0 - p) - 2ab(y_0 - bz_0 - q)}{1 + a^2 + b^2}, \\
 \mu &= \frac{2(1 - a^2)(y_0 - bz_0 - q) - 2ab(x_0 - az_0 - p)}{1 + a^2 + b^2}.
 \end{aligned}$$

Odtud dosazením do v_x, v_y, v_z dostaneme $x - x_0$ atd. a tím pak u . Pišeme-li pro stručnost $A = x_0 - az_0 - p$,

$B = y_0 - bz_0 - q$, jest celkem

$$u = \left(\frac{A(1 + b^2) - Bab}{1 + a^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{B(1 + a^2) - Aab}{1 + a^2 + b^2} \right)^2 + \frac{C}{D},$$

kde $C = [A(1 + b^2) - Bab]^2 + [(1 + a^2)B - Aab]^2$ a $D = (1 + a^2 + b^2)^2$.
Výrazy v čitatelích dávají $A^2(1 + b^2)^2 - 2ABab(1 + b^2) + B^2a^2b^2 + A^2a^2b^2 - 2ABab(1 + a^2) + B^2(1 + a^2)^2 + A^2a^2 + 2ABab + B^2b^2$, t. j. $A^2(1 + b^2)(1 + a^2 + b^2) - 2ABab(1 + a^2 + b^2) + B^2(1 + a^2)(1 + a^2 + b^2)$. Krátíme zlomek u výrazem $(1 + a^2 + b^2)$ dostaneme po malé úpravě

$$u = \frac{A^2 + B^2 + [Ab - Ba]^2}{1 + a^2 + b^2},$$

nebo konečně

$$u = \frac{(x_0 - az_0 - p)^2 + (y_0 - bz_0 - q)^2 + (bx_0 - ay_0 + aq - bp)^2}{1 + a^2 + b^2}.$$

Další užití derivací v geometrii

Příklady

730. *Evoluta* je geometrické místo středů kružnic křivosti. Pro střed křivosti (X, Y) bodu (x, y) křivky $y = f(x)$ platí

$$X = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad Y - y = \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Pro parabolu

$$(1) \quad y^2 = 2px \quad \text{je} \quad y' = \frac{p}{y}, \quad y'' = -\frac{p^2}{y^3},$$

$$(2) \quad X = 3x + p,$$

$$(3) \quad Y = -\frac{y^3}{p^2}.$$

Eliminací x, y z rovnic (1), (2), (3) plyne rovnice evoluty

$$(-p^2 Y)^{\frac{2}{3}} = 2p \frac{X - p}{3}, \quad Y^2 = \frac{8}{27p} (X - p)^3.$$

731. Pro elipsu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{je} \quad y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

a tedy

$$X = \frac{e^2 x^3}{a^4}, \quad Y = -\frac{e^2 y^3}{b^4}; \quad e^2 = a^2 - b^2.$$

Odtud

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{aX}{e^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{y}{b} = \left(\frac{bY}{e^2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Dosazením do rovnice elipsy plyne rovnice evoluty

$$\left(\frac{aX}{e^2} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{bY}{e^2} \right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

732. Pro cykloidu

$$x = a\vartheta - a \sin \vartheta,$$

$$y = a - a \cos \vartheta,$$

dostaneme

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin \vartheta}{1 - \cos \vartheta}, \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{a(1 - \cos \vartheta)^2},$$

$$X = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} = a\vartheta + a \sin \vartheta,$$

$$Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = -(a - a \cos \vartheta).$$

Evoluta cykloidy je opět cykloida.

733. T. zv. totální křivost plochy $z = f(x, y)$ je dána výrazem

$$T = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.$$

Určete ji pro plochu $z = f(x^2 + y^2)$. Píšeme-li $x^2 + y^2 = u$, je

$$f_x = 2xf'_u, f_y = 2yf'_u \text{ (dále index } u \text{ vynecháme),}$$

$$f_{xx} = 4x^2f'' + 2f', f_{xy} = f'' \cdot 4xy, f_{yy} = 4y^2f'' + 2f'.$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{16x^2y^2f''^2 + 8f'f''(x^2 + y^2) + 4f'^2 - 16x^2y^2f''^2}{1 + 4(x^2 + y^2)f'^2} = \\ &= \frac{4f'(f' + 2uf'')}{(1 + 4uf'^2)^2}. \end{aligned}$$

734. Totéž pro plochu, která vznikne rotací křivky $z = \varphi(x)$ kolem osy z . Rovnice této plochy je $z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$.

$$z_x = \varphi' \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\varphi'x}{v}, \quad z_y = \frac{\varphi'y}{v},$$

$$z_{xx} = \varphi'' \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \varphi' \frac{v - x \frac{x}{v}}{x^2 + y^2} = \frac{\varphi''x^2v + \varphi'y^2}{v^3},$$

$$z_{yy} = \frac{\varphi''y^2v + \varphi'x^2}{v^3}, \quad z_{xy} = \frac{\varphi''xyv - \varphi'xy}{v^3}.$$

$$\begin{aligned} v^6(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2) &= \varphi''^2x^2y^2v^2 + \varphi'\varphi''y^4v + \varphi'\varphi''x^4v + \varphi'^2x^2y^2 - \\ &\quad - \varphi''^2x^2y^2v^2 + 2\varphi'\varphi''v x^2y^2 - \varphi'^2x^2y^2, \end{aligned}$$

$$v^6(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2) = \varphi'\varphi''v(x^2 + y^2)^2 = \varphi'\varphi''v^5;$$

$$v^2(1 + z_x^2 + z_y^2) = v^2 + \varphi'^2(x^2 + y^2) = v^2(1 + \varphi'^2).$$

$$T = \frac{\varphi'\varphi''}{v(1 + \varphi'^2)^2} = \frac{z'z''}{\sqrt{x^2 + y^2}(1 + z'^2)^2}.$$

Na rovnoběžce opisované bodem úsečky x ($y = 0$) je křivost zřejmě všude stejná a místo $\sqrt{x^2 + y^2}$ bude pouze x .

735. Určiti asymptotické čáry šroubové plochy $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Čáry asymptotické jsou ty, které mají křivost nulovou; jejich pravoúhlé průměty do roviny (x, y) mají rovnici

$$r \, dx^2 + 2s \, dx \, dy + t \, dy^2 = 0 \text{ (viz př. 716).}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-ay}{x^2 + y^2}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ax}{x^2 + y^2},$$

a dalším derivováním $r : s : t = -2xy : (x^2 - y^2) : 2xy$.

Rovnice průmětů asymptotických čar tedy je $-xy dx^2 + (x^2 - y^2) dx dy + xy dy^2 = (x dx + y dy)(x dy - y dx) = 0$. Odtud $x dx + y dy = 0$ vznikne derivací z $x^2 + y^2 = c$. Tyto čáry s průmětem kruhovým do xy jsou šroubovice. Nebo $x dy - y dx = 0$ dává $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, která vznikne derivací z $\lg y = \lg x + \lg k$ nebo $y = kx$. Jsou to přímky kolmé k ose z (vytvěřující přímky).

POČET INTEGRÁLNÍ

Integrály funkcí racionálních lomených

Příklady

Metodu výpočtu viz v Počátcích, str. 76—82.

$$\begin{aligned} 736. J &= \int \frac{dx}{x^5 - x^2} = \\ &= \int \left[\frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B}{x-1} + k_1 \frac{2x+1}{j} + k_2 \frac{1}{j} \right] dx, \end{aligned}$$

kde $j = x^2 + x + 1$. Vynásobením zlomků $x^2(x^3 - 1)$ plyne $1 = A_1(x^3 - 1) + A_2(x^3 - 1)x + Bx^2j + k_1(2x+1)(x^3 - x^2) + k_2(x^3 - x^2)$. Dosazením $x = 0$ plyne $A_1 = -1$; $x = 1$ dává $3B = 1$, $B = \frac{1}{3}$. Srovnání koeficientů u x^4 dává $A_2 + B + 2k_1 = 0$, u členu x^3 dostaneme $A_1 + B + k_1 + k_2 = 0$, u členu x^2 bude $B - k_1 - k_2 = 0$, u členu x je $A_2 = 0$. Z toho $k_1 = -\frac{1}{6}$, $k_2 = \frac{1}{2}$. Daný integrál jest

$$J = \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \lg(x-1) - \frac{1}{6} \lg(x^2 + x + 1) + \frac{1}{2} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{3}.$$

$$\begin{aligned} 737. \int \frac{2x^2 - 3}{x^2(x^2 - 4)} dx &= \int \left[\frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} \right] dx. \\ 2x^2 - 3 &= A_1(x^2 - 4) + A_2x(x^2 - 4) + Bx^2(x+2) + Cx^2(x-2). \end{aligned}$$

Pro $x = 0$ plyne $A_1 = \frac{3}{4}$; $x = 2$ dává $B = \frac{5}{16}$, $x = -2$ pak $C = -\frac{5}{16}$, koeficient u členu x dává $A_2 = 0$. Celkem

$$J = -\frac{3}{4x} + \frac{5}{16} \lg \frac{x-2}{x+2}.$$

$$738. \int \frac{dx}{x^4 + 1} = \int \frac{dx}{(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)}.$$

Provedeme rozklad

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{M_1x + N_1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{M_2x + N_2}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}.$$

Změníme-li x v $(-x)$, levá strana se nemění, zlomky napravo se jen vymění, proto musí $M_2x + N_2 = -M_1x + N_1$ a dále

$$1 = (M_1x + N_1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1) - (M_1x - N_1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1) = \\ = 2(N_1 - M_1\sqrt{2})x^2 + 2N_1; \quad N_1 = \frac{1}{2} = M_1\sqrt{2}.$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{(x + \sqrt{2}) dx}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{(x - \sqrt{2}) dx}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}.$$

$$I_1 = \int \frac{(x + p) dx}{x^2 + px + 1} = \\ = k_1 \int \frac{(2x + p) dx}{x^2 + px + 1} + k_2 \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2}p)^2 + 1 - \frac{1}{4}p^2}.$$

$$k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = \frac{1}{2}p; \quad p = \pm\sqrt{2}.$$

$$I_1 = \lg|x^2 + px + 1| + \frac{p}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2} + \frac{p}{\sqrt{2}}\right),$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(\operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1)) + \right. \\ \left. + \lg \sqrt{\frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}} \right] = \\ = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\lg \sqrt{\frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}} - \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1} \right].$$

$$\text{Jest totiž} \quad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = x\sqrt{2} + 1, \quad \operatorname{tg}\beta = x\sqrt{2} - 1.$$

$$739. \int \frac{x^2 + 2}{(x + 2)^3} dx = \int \left[\frac{A}{(x + 2)^3} + \frac{B}{(x + 2)^2} + \frac{C}{x + 2} \right] dx.$$

$$x^2 + 2 = A + B(x + 2) + C(x + 2)^2, \quad A = 6,$$

$$2x = B + 2C(x + 2), \quad B = -4,$$

$$2 = 2C. \quad C = 1.$$

$$I = \lg(x + 2) + \frac{4}{x + 2} - \frac{3}{(x + 2)^2} = \lg(x + 2) + \frac{4x + 5}{(x + 2)^2}.$$

$$740. \int \frac{dx}{(a - x)^2(b - x)} = \int \left[\frac{A}{(a - x)^2} + \frac{B}{a - x} + \frac{C}{b - x} \right] dx.$$

$$1 = A(b - x) + B(a - x)(b - x) + C(a - x)^2,$$

$$x = a \text{ dá } A = 1 : (b - a), \quad x = b \dots C = 1 : (a - b)^2,$$

$$\text{derivace } 0 = A - B(a - x) - B(b - x) - 2C(a - x) \dots$$

$$B = -1 : (b - a)^2.$$

$$I = \frac{-1}{b - a} \frac{1}{a - x} - \frac{1}{(b - a)^2} \lg(a - x) + \frac{1}{(b - a)^2} \lg(b - x) =$$

$$= \frac{1}{(b - a)^2} \left[\frac{a - b}{a - x} + \lg \frac{b - x}{a - x} \right].$$

$$741. \int \frac{x^3 + 3x + 2}{x^2(x - 1)^3} dx = I.$$

$$\frac{x^3 + 3x + 2}{x^2(x - 1)^3} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{A_3}{(x - 1)^3} + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2},$$

$$x^3 + 3x + 2 = x^2[A_3 + A_2(x - 1) + A_1(x - 1)^2] +$$

$$+ (B_1x + B_2)(x - 1)^3.$$

$$r(1) = 6 = A_3, \quad r'(1) = 6 = 2A_3 + A_2,$$

$$r''(1) = 6 = 2A_3 + 4A_2 + 2A_1. \quad A_2 = -6, \quad A_1 = 9.$$

$$r(0) = 2 = -B_2, \quad r'(0) = 3 = 3B_2 - B_1, \quad B = -9.$$

$$I = \int \frac{9 dx}{x - 1} - \int \frac{6 dx}{(x - 1)^2} + \int \frac{6 dx}{(x - 1)^3} - \int \frac{9 dx}{x} - \int \frac{2 dx}{x^2} =$$

$$= 9 \lg(x - 1) + \frac{6}{x - 1} - \frac{3}{(x - 1)^2} - 9 \lg x + \frac{2}{x}.$$

$$742. \int \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} - \int \frac{2x dx}{(x^2 + x + 1)^2},$$

neboť čitatel $x^2 - x + 1 = x^2 + x + 1 - 2x$.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x \, dx}{(x^2 + x + 1)^2} &= \int \frac{(2x + 1) \, dx}{(x^2 + x + 1)^2} - \int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} = \\ &= \frac{-1}{x^2 + x + 1} - I_3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1 &= \int \frac{dx}{x^2 + x + q} = \int \frac{dx}{x + (x + \frac{1}{2})^2 + q - \frac{1}{4}} \dots x + \frac{1}{2} = \\ &= z\sqrt{q - \frac{1}{4}} = z\sqrt{d},\end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{1}{4}}} \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{d}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{2\sqrt{d}}. \quad [q - \frac{1}{4} = d],$$

$$\begin{aligned}I_3 &= -\frac{\partial I_1}{\partial q} = \frac{1}{2d\sqrt{d}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{2\sqrt{d}} + \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{d}{x^2 + x + q} \frac{2x + 1}{4d\sqrt{d}}; \\ (d &= \frac{3}{4}),\end{aligned}$$

$$I_3 = \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

$$\begin{aligned}I &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{x^2 + x + 1} + I_3 = \\ &= \frac{2(x + 2)}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{10}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}743. \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1} \text{ (viz př. 738).}\end{aligned}$$

$$744. \int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx = I. \quad \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x + 1} + \frac{x + 1}{x^2 - x + 1} \right).$$

Dosadíme-li x^2 za x , dostaneme po úpravě

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{3})^2 = (x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1)$$

$$\frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} = \frac{2}{3(x^2 + 1)} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x^2 + x\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} \right).$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 + px + 1} &= \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2}p)^2 + 1 - \frac{1}{4}p^2} = 2 \operatorname{arctg}(2x + p). \\ [p &= \pm \sqrt{3}].\end{aligned}$$

$$I = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(2x + \sqrt{3}) + \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(2x - \sqrt{3}) = \\ = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{3x(x^2 - 1)}{x^4 - 4x^2 + 1}.$$

Jednoduché integrály funkcí iracionálních

Viz Počátky, str. 83, 84.

$$\begin{aligned} 745. \quad & \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(a-x)^2(b-x)}} \text{ po substituci } \frac{a-x}{b-x} = t^3 \text{ přechází v} \\ & 3 \int \frac{dt}{t^3 - 1} = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{t+2}{t^2+t+1} \right) dt = \\ & = \lg|t-1| - \frac{1}{2} \lg(t^2+t+1) - \sqrt[3]{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt[3]{3}} = \\ & = \frac{2}{3} \lg|\sqrt[3]{x-a} - \sqrt[3]{x-b}| - \sqrt[3]{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{a-x} + \sqrt[3]{b-x}}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{b-x}}. \end{aligned}$$

746. Dokázati, že

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \frac{(1-\alpha x)(1-\beta x) dx}{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\pi \frac{2-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}. \\ \frac{2(\alpha x-1)}{2\alpha x-1+\alpha^2} &= 1 - \frac{1-\alpha^2}{2\alpha x-1-\alpha^2}, \quad 1-\alpha^2=c_1, \quad 1-\beta^2=c_2. \\ 4f(x) &= \left[1 - \frac{c_1}{2\alpha \left(x - \frac{1+\alpha^2}{2\alpha} \right)} \right] \left[1 - \frac{c_2}{2\beta \left(x - \frac{1+\beta^2}{2\beta} \right)} \right] = \\ &= 1 - \frac{c_1}{2\alpha(x-a)} - \frac{c_2}{2\beta(x-b)} + \frac{c_1 c_2}{4\alpha\beta(x-a)(x-b)} = \\ &= \dots + \frac{c_1 c_2}{4\alpha\beta(a-b)} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right), \\ a &= \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}, \quad b = \frac{1+\beta^2}{2\beta}, \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{b-x^2}} = \frac{-2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-b}{a+b} \frac{b+x}{b-x}},$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2}{\sqrt{a^2-1}} \frac{1}{2}\pi = \frac{-\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

$$\sqrt{a^2-1} = \frac{1-\alpha^2}{2\alpha} = \frac{c_1}{2\alpha}, \quad a-b = \frac{(\beta-\alpha)(1-\alpha\beta)}{2\alpha\beta},$$

$$m = \frac{(\beta-\alpha)(1+\alpha\beta)}{c_1 c_2} = \left(\frac{2\beta}{1-\beta^2} - \frac{2\alpha}{1-\alpha^2} \right).$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4}\pi \left\{ 1+1+1 + \frac{c_1 c_2 \cdot 2\alpha\beta}{4\alpha\beta(\beta-\alpha)(1-\alpha\beta)} \left(\frac{2\beta}{1-\beta^2} - \frac{2\alpha}{1-\alpha^2} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{4}\pi \left[3 + \frac{c c_1 \cdot 4\alpha\beta}{4\alpha\beta(\beta-\alpha)(1-\alpha\beta)} \frac{(\beta-\alpha)(1+\alpha\beta)}{c_1 c_2} \right] = \\ &= \frac{1}{4}\pi \left(3 + \frac{1+\alpha\beta}{1-\alpha\beta} \right) = \frac{1}{4}\pi \frac{4-2\alpha\beta}{1-\alpha\beta} = \frac{1}{2}\pi \frac{2-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}. \end{aligned}$$

747. Dokázati

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x + \alpha^2} \sqrt{1-2\beta x + \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \lg \frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}, \quad \alpha\beta > 0.$$

Podle př. P. 518 jest neurčitý integrál

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{(a-x)(b-x)}} \quad \text{pro } a = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}, \quad b = \frac{1+\beta^2}{2\beta} \text{ roven}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \lg |a+b-2x-2\sqrt{(a-x)(b-x)}|. \quad \text{Položme}$$

$$V = a+b-2x-2\sqrt{(a-x)(b-x)}.$$

$$V(1) = a-1+b-1-2\sqrt{(a-1)(b-1)} =$$

$$= (\sqrt{a-b} - \sqrt{b-1})^2.$$

$$V(-1) = (\sqrt{a+1} - \sqrt{b+1})^2. \quad \text{Hledaný integrál je}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \lg \left| \frac{\sqrt{a-1} - \sqrt{b-1}}{\sqrt{a+1} - \sqrt{b+1}} \right|.$$

$$a-1 = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha} - 1 = \frac{(1-\alpha)^2}{2\alpha},$$

$a + 1 = \frac{(1 + \alpha)^2}{2\alpha}$, podobně $b \pm 1$. Zlomek za lg má tedy čitatele (jmenovatele) $\frac{1 - \alpha}{\sqrt{2\alpha}} \mp \frac{1 - \beta}{\sqrt{2\beta}}$.

Zjednodušením složeného zlomku se dostane:

$$\frac{\sqrt{\beta} - \alpha\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta} + \alpha\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} - \beta\sqrt{\alpha}} = \frac{(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})(1 + \sqrt{\alpha\beta})}{(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})(1 - \sqrt{\alpha\beta})} =$$

$$= \frac{1 + \sqrt{\alpha\beta}}{1 - \sqrt{\alpha\beta}} \quad \text{a} \quad I = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \frac{1 + \sqrt{\alpha\beta}}{1 - \sqrt{\alpha\beta}}.$$

Integrály binomické

$\int x^m(a + bx^n)^p dx$ lze vyjádřiti algebraicky a jednoduchými funkcemi transcendentními ve třech případech:

a) je-li p celistvé kladné, provedením mocniny, je-li p celistvé záporné, substitucí $x = t^k$, kde k je nejmenší spol. násobek jmenovatelů v m a n ;

b) není-li p celistvé, substitucí $a + bx^n = t$, je-li $\frac{m+1}{n}$ celistvé;

c) nebo se provede nejprve úprava $x^{m+np}(b + ax^{-n})^p$ a pak lze integrovati jako v b), je-li $\frac{m+1}{n} + p$ celistvé.

Příklady

$$748. \int \frac{(1 + \sqrt[6]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}} (1 + 2x^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{3}}) dx =$$

$$= \int (x^{-\frac{2}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}}) dx = 3x^{\frac{1}{3}} + 4x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}.$$

$$749. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[4]{x})^2} = \int x^{-\frac{1}{2}} (1 + x^{\frac{1}{4}})^{-2} dx; \quad x = t^4, \quad dx = 4t^3 dt;$$

$$I = \int 4t(1+t)^{-2} dt = 4 \int \frac{t dt}{(1+t)^2} = 4 \left[\int \frac{dt}{1+t} - \int \frac{dt}{(1+t)^2} \right] =$$

$$= 4 \left[\lg(1 + \sqrt[4]{x}) + \frac{1}{1 + \sqrt[4]{x}} \right].$$

750. $\int x^3(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$; $1+x^2=t$, $x=(t-1)^{\frac{1}{2}}$, $x dx = \frac{1}{2} dt$;

$$I = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}}(t-1) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} \right) = t^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} t - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{1+x^2}(x^2-2).$$

751. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}} = \int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \int x^{-5}(x^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}} dx$;

$$x^{-2}+1=t, \quad x=(t-1)^{-\frac{1}{2}}, \quad dx = \frac{-dt}{2(t-1)^{\frac{3}{2}}};$$

$$I = - \int (t-1)^{\frac{5}{2}} t^{-\frac{3}{2}} \frac{dt}{2(t-1)^{\frac{3}{2}}} = - \int \frac{1}{2} (t-1) t^{-\frac{3}{2}} dt =$$

$$= - \int \frac{1}{2} (t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{3}{2}}) dt = - t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= - (x^{-2}+1)^{\frac{1}{2}} - (x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}} = - \frac{x^{-2}+1+1}{(x^{-2}+1)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= - \frac{1+2x^2}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

752. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} dx$; $1+x^{\frac{1}{4}}=t$,

$$x=(t-1)^4, \quad dx=4(t-1)^3 dt,$$

$$I = 4 \int (t-1)^{-2} t^{\frac{1}{3}}(t-1)^3 dt = 4 \int (t-1) t^{\frac{1}{3}} dt =$$

$$= \frac{1}{2} t^{\frac{7}{3}} - 3t^{\frac{4}{3}} = \frac{2}{7} t^{\frac{1}{3}}(4t^2-7t) = \frac{2}{7} \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3).$$

753. $\int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx = \int x^2(1+x)^{-\frac{1}{3}} dx + \int (1+x)^{\frac{1}{6}} dx$.

Pro první integrál na pravé straně I_1 položíme $1+x=t$,
 $x=t-1$, $dx=dt$ a dostaneme

$$I_1 = \int (t-1)^2 t^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{3}{8} t^{\frac{8}{3}} - \frac{6}{5} t^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2} t^{\frac{2}{3}}.$$

V druhém integrálu I_2 se položí $1 + x = t$, $dx = dt$,

$$I_2 = \int t^{\frac{1}{6}} dt = \frac{6}{7} t^{\frac{7}{6}}.$$

$$I = 3(1+x)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{8}(1+x)^2 - \frac{2}{5}(1+x) + \frac{1}{2} + \frac{3}{7}(1+x)^{\frac{1}{2}} \right].$$

$$754. \int x^{\frac{3}{5}} (1+x^{-\frac{2}{3}})^{\frac{2}{5}} dx = \int x^{\frac{1}{3}} (1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{5}} dx; \quad 1+x^{\frac{2}{3}} = t,$$

$$x = (t-1)^{\frac{3}{2}}, \quad dx = \frac{3}{2}(t-1)^{\frac{1}{2}} dt.$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{2} \int (t-1)^{\frac{3}{2}} t^{\frac{2}{5}} (t-1)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{3}{2} \int (t-1)^2 t^{\frac{2}{5}} dt = \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{5}{17} t^{\frac{17}{5}} - \frac{5}{6} t^{\frac{12}{5}} + \frac{5}{7} t^{\frac{7}{5}} \right] = \frac{15}{2} t^{\frac{7}{5}} \left(\frac{1}{17} t^2 - \frac{1}{6} t + \frac{5}{7} \right) = \\ &= \frac{15}{2} (1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{7}{5}} \left[\frac{1}{17} (1+x^{\frac{2}{3}})^2 - \frac{1}{6} (1+x^{\frac{2}{3}}) + \frac{5}{7} \right]. \end{aligned}$$

$$755. \int \frac{dx}{(x^3 - x^2)^{\frac{2}{3}}} = \int (x^3 - x^2)^{-\frac{2}{3}} dx = \int x^{-2} (1 - x^{-1})^{-\frac{2}{3}} dx;$$

$$1 - x^{-1} = t, \quad x = \frac{1}{1+t}, \quad dx = (1+t)^{-2} dt;$$

$$I = \int (1+t)^2 t^{-\frac{2}{3}} (1+t)^{-2} dt = \int t^{-\frac{2}{3}} dt = 3t^{\frac{1}{3}} = 3 \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}.$$

$$756. \int \sqrt[3]{\frac{x}{a^3 - x^3}} dx = \int x^{\frac{1}{3}} (a^3 - x^3)^{-\frac{1}{2}} dx = \int x^{-1} (a^3 x^{-3} - 1)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

$$a^3 x^{-3} - 1 = t, \quad x = \left(\frac{1+t}{a^3} \right)^{-\frac{1}{3}}, \quad dx = -\frac{a \cdot (1+t)^{-\frac{4}{3}}}{3} dt,$$

$$I = -\frac{1}{3} a \int \frac{1}{a} (1+t)^{\frac{1}{3}} t^{-\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{4}{3}} dt = -\frac{1}{3} \int t^{-\frac{1}{2}} (1+t)^{-1} dt;$$

$$t^{-\frac{1}{2}} = u, \quad t = u^{-2}, \quad dt = -2u^{-3} du;$$

$$I = \frac{2}{3} \int u(1+u^{-2})^{-1} u^{-3} du = \frac{2}{3} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{3} \operatorname{arctgu} =$$

$$= \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \sqrt[3]{t} = \frac{2}{3} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+t}} = \frac{2}{3} \arcsin \sqrt[3]{\frac{x^3}{a^3}}.$$

$$\left[\text{Je-li totiž } \operatorname{tg} \alpha = m, \text{ je } \sin \alpha = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \text{ a z toho} \right.$$

$$\left. \alpha = \operatorname{arctg} m = \arcsin \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \right].$$

Integrály funkcí hyperbolických

Obrácením pravidel derivačních na str. 11 dostáváme přímo ne-určité integrály základní:

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x, \quad \int \cosh x \, dx = \sinh x,$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x, \quad \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cotgh} x,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{argsinh} x = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{argcosh} x = \lg(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \operatorname{argtgh} x \quad (\text{pro } x < 1),$$

$$= \operatorname{argcotgh} x \quad (\text{pro } x > 1).$$

Dále pak analogicky s integrály goniometrických funkcí:

$$\int \frac{dx}{\sinh x} = \operatorname{lg} \operatorname{tgh} \frac{1}{2} x = \lg \frac{\sinh x}{1 + \cosh x},$$

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = 2 \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = 2 \int \frac{dz}{1 + z^2} = 2 \operatorname{arctg} e^x.$$

Příklady

$$\begin{aligned} 757. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \int \frac{dx}{a \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}} = \operatorname{argsinh} \frac{x}{a} = \\ &= \lg(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + c. \end{aligned}$$

$$758. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{argcosh} \frac{x}{a} = \lg(x + \sqrt{x^2 - a^2}).$$

$$\begin{aligned} 759. \quad I &= \int \sqrt{x^2 + 1} \, dx. \quad x = \sinh y, \quad dx = \cosh y \, dy, \\ \cosh^2 y &= \frac{1}{2}(1 + \cosh 2y), \quad y = \operatorname{argsinh} x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \cosh^2 y \, dy = \frac{1}{2} y + \frac{1}{4} \sinh 2y = \frac{1}{2} (y + \sinh y \cosh y) = \\ &= \frac{1}{2} [x \sqrt{x^2 + 1} + \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})]. \quad \text{Viz P. 476 a 534.} \end{aligned}$$

760. $I = \int \sqrt{x^2 - 1} \, dx$, $x = \cosh y$, $dx = \sinh y \, dy$,
 $\sinh^2 y = \frac{1}{2}(\cosh 2y - 1)$, $y = \lg(x + \sqrt{x^2 - 1})$,
 $I = \int \sinh^2 y \, dy = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{4} \sinh 2y = \frac{1}{2}(\sinh y \cosh y - y) =$
 $= \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2 - 1} - \lg(x + \sqrt{x^2 - 1})].$
761. $I = \int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx$. $x = a \sinh z$, $dx = a \cosh z \, dz$.
 $I = a^2 \int \cosh^2 z \, dz = \frac{1}{2}a^2(z + \sinh z \cosh z) =$
 $= \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \lg(x + \sqrt{x^2 + a^2})] + c.$
762. $\int \sqrt{bx^2 + a} \, dx = \sqrt{a} \int \sqrt{\frac{b}{a}x^2 + 1} \, dx$.
 $\sqrt{\frac{b}{a}}x = y$, $dx = \sqrt{\frac{a}{b}} \, dy$,
 $I = \frac{a}{\sqrt{b}} \int \sqrt{y^2 + 1} \, dy = \frac{a}{2\sqrt{b}}[y\sqrt{y^2 + 1} + \lg(y + \sqrt{y^2 + 1})] =$
 $= \frac{a}{2\sqrt{b}} \left[\sqrt{\frac{b}{a}}x \sqrt{\frac{bx^2 + a}{a}} + \lg \frac{\sqrt{bx} + \sqrt{bx^2 + a}}{\sqrt{a}} \right] =$
 $= \frac{1}{2}x\sqrt{bx^2 + a} + \frac{a}{2\sqrt{b}} \lg(bx + \sqrt{b}\sqrt{bx^2 + a}) + c. \text{ (Viz P. 529.)}$
763. $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = I$. $x = \sinh y$, $dx = \cosh y \, dy$.
 $I = \int \frac{\sinh^2 y}{\cosh y} \cosh y \, dy = \int \sinh^2 y \, dy = \frac{1}{2} \int (\cosh 2y - 1) \, dy =$
 $= \frac{1}{4} \sinh 2y - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2 + 1} - \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})].$
(Viz P. 524.)
764. $\int x^2 \sqrt{x^2 + 1} \, dx = I$. $x = \sinh y$, $dx = \cosh y \, dy$.
 $I = \int \sinh^2 y \cdot \cosh^2 y \, dy = \frac{1}{4} \int \sinh^2 2y \, dy =$
 $= \frac{1}{8} \int (\cosh 4y - 1) \, dy = \frac{1}{8}(\frac{1}{4} \sinh 4y - y).$
 Avšak
 $\sinh 4y = 4 \sinh y \cosh y (2 \sinh^2 y + 1) = 4x\sqrt{x^2 + 1}(2x^2 + 1),$
 takže $I = \frac{1}{8}[x\sqrt{x^2 + 1}(2x^2 + 1) - \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})].$
- Integrály $\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $\int x^3 \sqrt{x^2 + 1} \, dx$
 přejdou hned v jednoduché po substituci $x^2 + 1 = z!$

$$765. \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx = I. \quad x = \sinh y, \quad dx = \cosh y \, dy.$$

$$I = \int \frac{\cosh^2 y}{\sinh^2 y} dy = \int \frac{\sinh^2 y + 1}{\sinh^2 y} dy = y - \frac{\cosh y}{\sinh y} = \\ = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + 1}.$$

Naproti tomu
$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = I$$

počítáme substitucí $x = \sin y$, $dx = \cos y \, dy$.

$$I = \int \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y} dy = \int \left(\frac{1}{\sin^2 y} - 1 \right) dy = -\cotgy - y = \\ = -\arcsin x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

$$766. \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int \operatorname{tgh} x \, dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx = \lg \cosh x = \\ = \lg(e^x + e^{-x}) + c.$$

$$767. \int e^{\operatorname{argtgh} x} dy = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}.$$

$$768. \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+x^2}}{x} + \arcsin x + \lg(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right].$$

Viz též 765. Jinak též:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} - \\ - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

V prvním a druhém integrálu zavedeme substitucí $x = 1/t$. Tím přejdou

$$v \int \frac{-t \, dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\sqrt{t^2+1} \text{ a druhý v } \int \frac{-t \, dt}{\sqrt{t^2-1}} = -\sqrt{t^2-1},$$

takže celkem jest

$$I = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \lg(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{2} \arcsin x.$$

Po usměrnění zlomku dostaneme týž výsledek jako shora.

Přímé metody pro základní integrály obsahující $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

$$769. \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}, \text{ kde } p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}.$$

$$\text{Polož: } x^2 + px + q = (x + \frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{1}{4}p^2 = z^2 + r,$$

$$\text{pak } I = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + r}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg(z + \sqrt{z^2 + r}) \text{ podle př. P. 521.}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg[2ax + b + 2\sqrt{a(a^2 + bx + c)}] + k.$$

(Viz př. P. 208.)

$$770. \int \frac{dx}{\sqrt{-ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + px + q}}.$$

Položí se opět

$$-x^2 + px + q = -(x - \frac{1}{2}p)^2 + (q + \frac{1}{4}p^2) = r - z^2,$$

$$\text{takže } I = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dz}{\sqrt{r - z^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax - b}{\sqrt{b^2 + 4ac}} + k.$$

$$771. \int \sqrt{\pm ax^2 + bx + c} dx = \sqrt{a} \int \sqrt{\pm x^2 + px + q} dx.$$

Označme $W = \pm x^2 + px + q$. Druhý integrál dává po integraci per partes $(x \pm \frac{1}{2}p) \sqrt{W} \mp \int (x \pm \frac{1}{2}p)^2 : \sqrt{W} dx$.

$$\text{Nyní jest } \pm (x \pm \frac{1}{2}p)^2 = \pm x^2 + px + q - (q \mp \frac{1}{4}p^2),$$

takže se dostane

$$(x \pm \frac{1}{2}p) \sqrt{W} - \int \sqrt{W} dx + \int [(q \mp \frac{1}{4}p^2) : \sqrt{W}] dx$$

$$\text{a tedy } I = \frac{1}{2} [(x \pm \frac{1}{2}p) \sqrt{W} + (q \mp \frac{1}{4}p^2) \int (1 : \sqrt{W}) dx].$$

$$\text{Z toho } \int \sqrt{x^2 + px + q} dx = \frac{1}{2} (x + \frac{1}{2}p) \sqrt{x^2 + px + q} + \\ + \frac{1}{2} (q - \frac{1}{4}p^2) \lg|x + \frac{1}{2}p + \sqrt{x^2 + px + q}|.$$

$$\int \sqrt{-x^2 + px + q} \, dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}p) \sqrt{-x^2 + px + q} + \frac{1}{2}(q + \frac{1}{4}p^2) \arcsin \frac{x - \frac{1}{2}p}{\sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}}.$$

$$772. \int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac - b^2}{8a\sqrt{a}} \lg|2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}|.$$

$$773. \int \sqrt{-ax^2 + bx + c} \, dx = \frac{2ax - b}{4a} \sqrt{-ax^2 + bx + c} + \frac{4ac + b^2}{8a\sqrt{a}} \arcsin \frac{2ax - b}{\sqrt{b^2 + 4ac}}.$$

Při řešení příkladů se ovšem varujeme pouhého dosazování do výsledných vzorců, nýbrž provádějme celý postup; teprve jako zkoušku můžeme nakonec dosaditi do horních vzorců a srovnati se svým výsledkem.

$$774. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}};$$

$$x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3 = z^2 - 3, \quad dx = dz,$$

$$I = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 3}} = \lg(z + \sqrt{z^2 - 3}) = \lg[x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 1}] + k.$$

$$775. \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + x + 1}}; \quad -x^2 + x + 1 = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4} = \frac{5}{4} - z^2,$$

$$z = u\sqrt{\frac{5}{4}}, \quad I = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u = \arcsin \frac{2x - 1}{\sqrt{5}}.$$

$$776. \int \sqrt{1 + 3x - 4x^2} \, dx = 2 \int \sqrt{\frac{25}{64} - (x - \frac{3}{8})^2} \, dx = 2 \int \sqrt{r - z^2} \, dz.$$

$$I_1 = \int \sqrt{r - z^2} \, dz = z\sqrt{r - z^2} + \int \frac{z^2 \, dz}{\sqrt{r - z^2}} =$$

$$= z\sqrt{r - z^2} + r \int \frac{dz}{\sqrt{r - z^2}} - \int \frac{r - z^2}{\sqrt{r - z^2}} \, dz;$$

$$2I_1 = z\sqrt{r - z^2} + r \arcsin \frac{z}{\sqrt{r}}.$$

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2}(x - \frac{3}{8})\sqrt{1 + 3x - 4x^2} + \frac{25}{64} \arcsin \frac{x - \frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \\
 &= \frac{1}{16}[(8x - 3)\sqrt{1 + 3x - 4x^2} + \frac{25}{4} \arcsin \frac{1}{5}(8x - 3)].
 \end{aligned}$$

Zkoušku derivováním viz př. P. 206.

$$\begin{aligned}
 777. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + r}}, \quad \text{kde } z = x - \frac{1}{3}, \quad r = \frac{2}{9}. \\
 I &= \frac{1}{\sqrt{3}} \lg(z + \sqrt{z^2 + r}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \lg(3x - 1 + \sqrt{3}\sqrt{3x^2 - 2x + 1}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 778. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 4x - 7}} &= \sqrt{3} \int \frac{dx}{\sqrt{(3x + 2)^2 - 25}} = \\
 &= \frac{1}{3} \sqrt{3} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 25}} = \frac{1}{3} \sqrt{3} \lg(z + \sqrt{z^2 - 25}) = \\
 &= \frac{1}{3} \sqrt{3} \lg(3x + 2 + \sqrt{9x^2 + 12x - 21}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 779. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 11x + 8}}; \\
 -x^2 + 11x + 8 &= \frac{15}{4} - (x - \frac{11}{2})^2 = r - z^2, \\
 I &= \int \frac{dz}{\sqrt{r - z^2}} = \arcsin \frac{z}{\sqrt{r}} = \arcsin \frac{2x - 11}{\sqrt{153}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 780. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx}} &= \sqrt{a} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2 + 2abx}}; \\
 a^2x^2 + 2abx &= (ax + b)^2 - b^2 = z^2 - b^2, \quad a dx = dz, \\
 I &= \frac{\sqrt{a}}{a} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg(z + \sqrt{z^2 - b^2}) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \lg[ax + b + \sqrt{ax^2 + 2bx}\sqrt{a}].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 781. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{-ax^2 + 2bx}} &= \sqrt{a} \int \frac{dx}{\sqrt{-a^2x^2 + 2abx}}; \\
 -a^2x^2 + 2abx &= -(ax - b)^2 + b^2 = b^2 - z^2, \\
 I &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dz}{\sqrt{b^2 - z^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{z}{b} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{ax - b}{b}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 782. \int \sqrt{x^2 + 2bx} \, dx &= (x + b) \sqrt{x^2 + 2bx} - \int \frac{x^2 + 2bx + b^2}{x^2 + 2bx} dx \\
 &= (x + b) \sqrt{x^2 + 2bx} - \int \sqrt{x^2 + 2bx} \, dx - b^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2bx}} \\
 2I &= (x + b) \sqrt{x^2 + 2bx} - b^2 \lg(x + b + \sqrt{x^2 + 2bx}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 783. \int \sqrt{-ax^2 + 2bx} \, dx &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \sqrt{-a^2x^2 + 2abx} \, dx; \\
 -a^2x^2 + 2abx &= -(ax - b)^2 + b^2 = b^2 - z^2, \quad dx = \frac{1}{a} dz,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{a\sqrt{a}} \int \sqrt{b^2 - z^2} \, dz = \frac{1}{2a\sqrt{a}} \left(z\sqrt{b^2 - z^2} + b^2 \arcsin \frac{z}{b} \right) = \\
 &= \frac{ax - b}{2a} \sqrt{-ax^2 + 2bx} + \frac{b^2}{2a\sqrt{a}} \arcsin \frac{(ax - b)}{b}.
 \end{aligned}$$

Zkoušku derivováním viz př. P. 205.

* * *

Další základní integrály jsou

$$\int \frac{x^n \, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = I_n \quad \text{a} \quad \int \frac{dx}{(x - a)^n \sqrt{W}},$$

kde $W = ax^2 + bx + c$. Druhý z nich lze substitucí $x = 1:t + \alpha$ převést na první, pro který existuje redukční vzorec.

Jest totiž

$$D(x^n \sqrt{W}) = \frac{(n + 1) ax^{n+1} + (n + \frac{1}{2}) bx^n + ncx^{n-1}}{\sqrt{W}}.$$

Odtud integrací $(n + 1) aI_{n+1} + (n + \frac{1}{2}) bI_n + ncI_{n-1} = x^n \sqrt{W}$.

Podobně $\int x^n \sqrt{W} \, dx = \int x^n \frac{ax^2 + bx + c}{\sqrt{W}} \, dx = aI_{n+2} + bI_{n+1} + cI_n$.

Jest však pohodlnější neodvozovati pro každý druh základních integrálů zvláštní metody, které se snadno zapomínají, nýbrž je snazší a praktičtější postupovati podle metod pro integrály obecné, obsahující $\sqrt{ax^2 + bx + c}$. Ty jsou uvedeny v dalších odstavcích.

Obecné metody pro $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$.

A) R značí racionální funkci x a $\sqrt{W} = \sqrt{ax^2 + bx + c}$. Vyskytne-li se $\sqrt{W}$ v čitateli, násobíme čitatele i jmenovatele $\sqrt{W}$, takže $\sqrt{W}$ se převede do jmenovatele, R přejde v $R_1(x) : \sqrt{W}$. Rozložením R_1 na část racionální celistvou a na částečné zlomky dostaneme integrály

$$I_1 = \int \frac{M_n(x) dx}{\sqrt{W}} \quad \text{a} \quad I_2 = \int \frac{dx}{(x - \alpha)^p \sqrt{W}},$$

kde $M_n(x)$ značí mnohočlen n -tého stupně; substitucí $x - \alpha = \frac{1}{y}$ převedeme I_2 na předchozí typ I_1 . Položíme pak za I_1

$$I_1 = M_{n-1}(x) \cdot \sqrt{W} + k \int \frac{dx}{\sqrt{W}}.$$

Koeficienty v M_{n-1} se pak určí po derivaci metodou neurčitých činitelů.

B) Druhá metoda: Je-li $a > 0$, položíme $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \cdot x + t$, z toho po umocnění $x = \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}$ a integrovaná funkce přejde v racionální funkci t . Pro $a \leq 0$ položíme $\sqrt{W} = (x - \alpha)t$, kde α jest jeden kořen rovnice $W = ax^2 + bx + c = 0$. Integrovaná funkce opět přejde v racionální funkci t .

Příklady

$$784. \int \frac{9x^3 - 3x^2 + 2}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} dx = (a_0x^2 + a_1x + a_2) \sqrt{3x^2 - 2x + 1} + b \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}};$$

derivujíce a násobíce $\sqrt{3x^2 - 2x + 1}$ máme rovnici

$$9x^3 - 3x^2 + 2 = (2a_0x + a_1)(3x^2 - 2x + 1) + (a_0x^2 + a_1x + a_2)(3x - 1) + b,$$

odkud plyne metodou neurčitých činitelů

$$a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = -\frac{1}{3}, b = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Integrál} = (x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}) \sqrt{3x^2 - 2x + 1} + \frac{4}{3} \sqrt{3} \lg(3x - 1 + [3x^2 - 2x - 1] \sqrt{3}).$$

$$785. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}} \text{ přejde po } x = \frac{1}{y}, dx = -dy : y^2 \text{ na}$$

$$-\int \frac{dy}{y\sqrt{(1+y-y^2):y^2}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{1+y-y^2}} =$$

$$= -\arcsin \frac{1-2y}{\sqrt{5}} = \arcsin \frac{2-x}{x\sqrt{5}}.$$

$$786. \int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt{x^2-6x+6}} \text{ převedeme substitucí}$$

$$x-1 = \frac{1}{y} \text{ na } -\int \frac{y dy}{\sqrt{y^2-4y+1}} =$$

$$= -\sqrt{y^2-4y+1} - 2 \lg(y-2 + \sqrt{y^2-4y+1}),$$

který zase nazpět po $y = 1 : (x-1)$ přechází ve

$$-\frac{\sqrt{x^2-6x+6}}{x-1} - 2 \lg \frac{3-2x+\sqrt{W}}{x-1} \text{ nebo také}$$

$$-\frac{\sqrt{x^2-6x+6}}{x-1} + 2 \lg \frac{x-1}{3-2x+\sqrt{x^2-6x+6}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2-6x+6}}{x-1} + 2 \lg \frac{(x-1)(3-2x-\sqrt{x^2-6x+6})}{3(x^2-2x+1)} =$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2-6x+6}}{x-1} + 2 \lg \frac{3-2x-\sqrt{x^2-6x+6}}{x-1} + k.$$

$$787. I = \int (8x^2 - x + 3)\sqrt{x^2+x-1} dx =$$

$$= \int \frac{(8x^2 - x + 3)(x^2+x-1)}{\sqrt{x^2+x-1}} dx =$$

$$= M_3(x) \sqrt{x^2+x-1} + k \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-1}}.$$

Derivujeme a násobíme $2\sqrt{x^2+x-1}$:

$$2(8x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 4x - 3) = 2(3a_0x^2 + 2a_1x + a_2).$$

$$\cdot (x^2+x-1) + (a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3)(2x+1) + 2k$$

a metodou neurčitých činitelů dostaneme

$$\begin{array}{ll} 16 = 6a_0 + 2a_0, & a_0 = 2, \\ 14 = 6a_0 + 4a_1 + a_0 + 2a_1, & a_1 = 0, \\ -12 = 2a_2 + 2a_2 - 6a_0, & a_2 = 0, \\ 8 = 2a_3, & a_3 = 4, \\ -6 = a_3 + 2a_4, & a_4 = -5. \end{array}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x - 1}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}}} = \\ &= \lg(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x - 1}) = \lg(2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x - 1}) + c, \\ I &= (2x^3 + 4) \sqrt{x^2 + x - 1} - 5 \lg(2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x - 1}).\end{aligned}$$

$$788. I = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = c_1 \sqrt{x^2 + 2x + 3} + c_2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}.$$

Derivace poskytuje

$$\frac{x}{\sqrt{W}} = \frac{c_1 \cdot 2(x + 1)}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}} + \frac{c_2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}.$$

Násobíme-li rovnici $\sqrt{x^2 + 2x + 3}$,

dostaneme $x = c_1 x + c_1 + c_2$, $c_1 = 1 = -c_2$.

$$I = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \lg(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3}). \text{ (Viz 795.)}$$

$$\begin{aligned}789. I &= \int \frac{3x^3 - 2x^2 + 5x + 2}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \\ &= (a_0 x^2 + a_1 x + a_2) \sqrt{1 - x^2} + k \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \\ 3x^3 - 2x^2 + 5x + 2 &= (2a_0 x + a_1)(1 - x^2) - \\ &\quad - (a_0 x^2 + a_1 x + a_2)x + k. \\ a_0 &= -1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -7, \quad k = 1.\end{aligned}$$

$$I = (-x^2 + x - 7) \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x.$$

$$\begin{aligned}790. \int \frac{4x^2 + 7x + 5}{\sqrt{2x^2 + 6x + 7}} dx &= \\ &= (x - 1) \sqrt{2x^2 + 6x + 7} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 6x + 7}} = \\ &= (x - 1) \sqrt{2x^2 + 6x + 7} + \sqrt{2} \lg[2x + 3 + \sqrt{2(2x^2 + 6x + 7)}].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}791. \int \frac{1 + 2x + 2x^2}{\sqrt{1 - 2x - 4x^2}} &= \\ &= (a_0 x + a_1) \sqrt{1 - 2x - 4x^2} + k \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - 4x^2}},\end{aligned}$$

$$\frac{1+2x+2x^2}{\sqrt{1-2x-4x^2}} = a_0\sqrt{W} + (a_0x + a_1)\frac{-(1+4x)}{\sqrt{1-2x-4x^2}} +$$

$$+ \frac{k}{\sqrt{1-2x-4x^2}}. \text{ Násobení } \sqrt{1-2x-4x^2}, \text{ dává}$$

$$1+2x+2x^2 = a_0(1-2x-4x^2) - (a_0x + a_1)(4x+1) + k,$$

$$1 = a_0 - a_1 + k, \quad k = \frac{1}{16},$$

$$2 = -2a_0 - a_0 - 4a_1, \quad a_1 = -\frac{5}{16},$$

$$2 = -8a_0, \quad a_0 = -\frac{1}{4}.$$

$$I = -\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{16}\right)\sqrt{1-2x-4x^2} + \frac{1}{3\frac{5}{2}} \arcsin \frac{4x+1}{\sqrt{5}}.$$

$$792. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{cx^2+2bx+a}} = \left(\frac{x}{2c} - \frac{3b}{2c^2}\right)\sqrt{cx^2+2bx+a} +$$

$$+ \frac{3b^2-ac}{2c^2} \int \frac{dx}{\sqrt{cx^2+2bx+a}} = \frac{x}{2c} \left(x - \frac{3b}{c}\right) \times$$

$$\times \sqrt{cx^2+2bx+a} + \frac{3b^2-ca}{c^2\sqrt{c}} \lg[x+b+\sqrt{c(cx^2+bx+a)}].$$

$$793. \int \sqrt{7+8x-5x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{10}(5x-4)\sqrt{7+8x-5x^2} + \frac{51}{10\sqrt{5}} \arcsin \frac{5x-4}{\sqrt{51}}.$$

$$794. \int \frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4x+1}} =$$

$$= \frac{1}{4} \int \left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right] \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}} =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+1}} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-4x+1}} =$$

$$= \frac{1}{4} I_1 - \frac{1}{4} I_2.$$

$$I_1 \dots x-2 = \frac{1}{y}, \quad dx = -(1:y^2) dy, \quad y = \frac{1}{x-2},$$

$$I_1 = - \int \frac{dy}{\sqrt{1-3y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin y \sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{x-2}.$$

$$I_2 \dots x+2 = \frac{1}{z}, \quad dx = (-1:z^2) dz, \quad z = \frac{1}{x+2},$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= - \int \frac{dz}{\sqrt{13z^2 - 8z + 1}} = \\
 &= - \frac{1}{\sqrt{13}} \lg(13z - 4 + \sqrt{13} \sqrt{13z^2 - 8z + 1}) = \\
 &= - \frac{1}{\sqrt{13}} \lg \frac{5 - 4x + \sqrt{13} \sqrt{x^2 - 4x + 1}}{x + 2}.
 \end{aligned}$$

795. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$. Položme $\sqrt{x^2 + 2x + 3} = x + t$,
 odkudž $x = \frac{t^2 - 3}{2(1 - t)}$, $\sqrt{x^2 + 2x + 3} = \frac{-t^2 + 2t - 3}{2(2 - t)}$,

$$dx = \frac{1}{2} \frac{-t^2 + 2t - 3}{(1 - t)^2} dt.$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{t^2 - 3}{2(1 - t)^2} dt = \int \frac{(1 - t)^2 - 2(1 - t) - 2}{2(1 - t)^2} dt = \\
 &= \frac{1}{2}t + \lg(1 - t) - \int \frac{dt}{(1 - t)^2} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{1 - t} + \lg(1 - t) = \\
 &= \frac{-t^2 + t - 2}{2(1 - t)} - \lg \frac{1}{1 - t} = \\
 &= \frac{-t^2 + 2t - 3}{2(1 - t)} + \frac{1 - t}{2(1 - t)} - \lg \frac{1}{1 - t} = \\
 &= \sqrt{x^2 + 2x + 3} + \frac{1}{2} - \lg(1 + x + \sqrt{x^2 + 2x + 3}) = \\
 &= \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \lg(1 + x + \sqrt{x^2 + 2x + 3}) + k.
 \end{aligned}$$

796. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \lg \frac{t - \sqrt{3}}{t + \sqrt{3}} =$
 $= \frac{1}{\sqrt{3}} \lg \frac{\sqrt{x + 2x + 3} - x - \sqrt{3}}{\sqrt{x + 2x + 3} - x + \sqrt{3}}.$

797. $\int \frac{dx}{(x - 5)\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = I;$
 $\sqrt{-x^2 + 2x + 3} = (x + 1)t,$

umocněním $-(x-3)(x+1) = (x+1)^2 t^2$ a po krácení

$$-(x-3) = (x+1)t^2, \quad x = \frac{-t^2+3}{t^2+1},$$

$$\sqrt{-x^2+2x+3} = \frac{4t}{t^2+1}, \quad dx = \frac{-8t}{(t^2+1)^2} dt;$$

$$I = \int \frac{dt}{3t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctgt} \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3(3-x)}{x+1}}.$$

798. a) $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$ se vypočte substitucí $\frac{1-x^2}{1+x^2} = y^2$.

Z ní plyne dále $x^2 = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad 1+x^2 = \frac{2}{1+y^2},$

$$x = \sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}, \quad dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+y^2}{1-y^2}} \frac{(-4y) dy}{(1+y^2)^2}.$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}} = \\ &= -2 \int y \sqrt{\frac{1+y^2}{1-y^2}} \frac{1}{(1+y^2)^2} \frac{(1+y^2) \sqrt{1+y^2}}{2\sqrt{2}y} dy = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}. \end{aligned}$$

b) $\int \frac{dx}{(x^2+a)\sqrt{x^2+a}}.$

Položíme $\sqrt{x^2+a} = -x+t$, po umocnění

$$x = \frac{1}{2} \left(t - \frac{a}{t} \right), \quad \sqrt{x^2+a} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{a}{t} \right), \quad dx = \frac{1}{2} \frac{t^2+a}{t^2} dt,$$

$$I = \int \frac{4t dt}{(t^2+a)^2} = \frac{-2}{t^2+a} = \frac{x}{a\sqrt{x^2+a}} + k. \text{ (Viz př. P. 488.)}$$

799. $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{b^2-x^2}} = I$. Položíme $\sqrt{b^2-x^2} = (x-b)t$,

$$x = \frac{-b(1-t^2)}{1+t^2}, \quad \sqrt{b^2-x^2} = \frac{-2bt}{1+t^2}, \quad dx = \frac{4bt dt}{(1+t^2)^2}.$$

$$I = - \int \frac{2 dt}{t^2(b-a) - (b+a)} = 2 \int \frac{dt}{(a+b) + (a-b)t^2}.$$

$$\alpha) \text{ Je-li } a-b < 0, \quad I = \frac{2}{a+b} \int \frac{dt}{1 + \frac{a-b}{a+b} t^2}.$$

$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} t = z, \quad dt = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} dz.$$

$$\text{Pak jest} \quad I = \frac{-2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-b}{a+b} \frac{b+x}{b-x}}.$$

$$\beta) \text{ Pro } a > b \text{ je} \quad I = \frac{-2}{b-a} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{b+a}{b-a}}.$$

$$\text{Zavedeme } t = \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} z, \quad dt = \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} dz$$

$$\text{a obdržíme } I = \frac{-2}{\sqrt{b^2-a^2}} \int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \lg \frac{z+1}{z-1},$$

$$\text{kde} \quad z = \sqrt{\frac{b-ab+x}{b+ab-x}}.$$

$$800. \quad \int \frac{\sqrt{x^2+2x-1}}{x} dx = I.$$

$$\sqrt{x^2+2x-1} = -x+t, \quad x = \frac{t^2+1}{2(t+1)},$$

$$\sqrt{x^2+2x-1} = t-x = \frac{t^2+2t-1}{2(t+1)}, \quad dx = \frac{t^2+2t-1}{2(t+1)^2} dt.$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+2t-1)^2 dt}{(t+1)^2 (t^2+1)} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{2}{t^2+1} \right) dt.$$

$$I = \sqrt{x^2+2x-1} + \lg(x+1 + \sqrt{x^2+2x-1}) - 2 \operatorname{arctg}(x + \sqrt{x^2+2x-1}).$$

Lze ovšem převést $\sqrt{x^2+2x-1}$ do jmenovatele a rozložit integrál na

$$\int \frac{(x+1) dx}{\sqrt{x^2+2x-1}} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-1}} - \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$$

a počítati

$$I_3 = \int \frac{2(t+1)}{t^2+1} \frac{2(t+1)}{t^2+2t-1} \frac{t^2+2t-1}{2(t+1)^2} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = \\ = 2 \operatorname{arctgt};$$

dostaneme přirozeně týž výsledek, neboť v prvním integrálu lze položit $x^2 + 2x - 1 = u$, $2(x+1) dx = du$; druhý integrál patří mezi základní.

Abelovy integrály

Je-li funkce y definována algebraickou rovnicí $F(x, y) = 0$, slove $\int R(x, y) dx$ integrálem Abelovým. Pro křivky unikursální (racionální nebo rodu 0) je možno x a y vyjádřiti jako racionální funkce parametru t a tím přejde integrál v integrál funkce racionální.

801. Vypočítí $\int y dx$ pro y definované rovnicí $x^3 + y^3 = 3axy$. (Descartesův list.) Položíce $y = xt$, dostaneme vyjádření racionálně: $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$, $dx = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} dt$.

$$\int y dx = 9a^2 \int \frac{t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3} dt. \text{ Zavedeme } 1+t^3 = u,$$

$$\int y dx = 3a^2 \int \frac{3-2u}{u^3} du =$$

$$= -\frac{9a^2}{2u^2} + \frac{6a^2}{u} = \frac{-9a^2}{2(1+t^3)^2} + \frac{6a^2}{1+t^3}.$$

$$t = \frac{y}{x}, \quad t^3 + 1 = \frac{x^3 + y^3}{x^3} = \frac{3axy}{x^3} = \frac{3ay}{x^2}.$$

a tedy
$$\int y dx = -\frac{x^4}{2y^2} + \frac{2ax^2}{y}.$$

802. Pro $y^3 = x^2(x-1)$ máme $x = \frac{1}{1-t^3}$, $y = \frac{t}{1-t^3}$,

$$dx = \frac{3t^2 dt}{(1-t^3)^2}, \quad I = \int \frac{dx}{(x^3-x^2)^{\frac{2}{3}}} = \int \frac{dx}{y^2} \text{ je Abelův integrál a}$$

$$I = \int 3 dt = 3t = 3 \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}.$$

Lze jej ovšem též vyčísliti jako integrál binomický podle př. 755.

803. Je-li $x^4 = (x^2 - y^2)y$, vypočtete $\int y \, dx$. Položíme-li $y = xt$, vyplyne $x = t - t^3$, $y = t^2 - t^4$, $dx = (1 - 3t^2) dt$ a hledaný integrál $\int y \, dx = \int (t^2 - t^4)(1 - 3t^2) dt$ obsahuje integrant racionální v t .

$$I = \frac{1}{3}t^3 - \frac{4}{5}t^5 + \frac{3}{7}t^7 = \frac{35y^3x^4 - 84y^5x^2 + 45y^7}{105x^7}.$$

Viz též př. 972, 975, 976.

* * *

Celkový přehled různých pěti metod na výpočet integrálu iracionálního podává příklad 891.

Některé jednodušší integrály goniometrických funkcí.

804. $\int \frac{\sin 2x}{\cos 3x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{4 \cos^2 x - 3 \cos x} dx,$

$$\cos x = y, \quad -\sin x \, dx = dy,$$

$$\begin{aligned} I &= -2 \int \frac{y \, dy}{4y^2 - 3y} = -2 \int \frac{dy}{4(y^2 - \frac{3}{4})} = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{dy}{(y - \frac{1}{2}\sqrt{3})(y + \frac{1}{2}\sqrt{3})} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \lg \frac{y - \frac{1}{2}\sqrt{3}}{y + \frac{1}{2}\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$\frac{\cos x - \cos 30}{\cos x + \cos 30} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(x + 30) \sin \frac{1}{2}(30 - x)}{2 \cos \frac{1}{2}(x + 30) \cos \frac{1}{2}(30 - x)} =$$

$$= \operatorname{tg}(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\pi) \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x).$$

$$I = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \lg [\operatorname{tg}(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\pi) \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x)].$$

805. $\int \frac{x^2 \, dx}{(x \cos x - \sin x)^2}$ se zjednoduší, když položíme

$$x \cos x - \sin x = x \sin x \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = \cos x (x - \operatorname{tg} x)$$

$$a \quad D\left(\cot gx - \frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2}, \quad D(x - \operatorname{tg} x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Funkce za integračním znaméním se rozloží na

$$\frac{\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}}{\left(\cot gx - \frac{1}{x}\right)^2} + \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{(x - \operatorname{tg} x)^2}, \quad \text{takže jest}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\cot gx - \frac{1}{x}} + \frac{1}{x - \operatorname{tg} x} = \frac{x \sin x + \cos x}{x \cos x - \sin x} = \frac{\operatorname{tg} x + \frac{1}{x}}{1 - \frac{\operatorname{tg} x}{x}} = \\ &= \operatorname{tg}\left(x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right). \quad \text{Zkoušku viz v př. P. 204.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 806. \quad \int \frac{\cos x}{a + b \sin x} dx &= \int \frac{d \sin x}{a + b \sin x} = \int \frac{du}{a + bu} = \\ &= \frac{1}{b} \lg(a + b \sin x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 807. \quad \int \frac{dx}{\sin^5 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{dx}{\sin x} - \frac{1}{2} \int \cos x d(\sin^{-2} x) = \\ &= \int \frac{dx}{\sin x} - \frac{1}{2} \cos x \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin x} = \\ &= \frac{-\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 808. \quad \int \frac{dx}{\sin^4 x} &= \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \frac{dx}{\sin^2 x} = \quad (1. \text{ zp.}) \\ &= -\cot gx - \int \cot g^2 x d(\cot gx) = -\cot gx - \frac{1}{3} \cot g^3 x. \end{aligned}$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \frac{1}{\sin^4 x} = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2}{\operatorname{tg}^4 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad (2. \text{ zp.})$$

$$\operatorname{tg} x = z, \quad dx = \frac{dz}{1 + z^2};$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(1 + z^2)^2}{z^4} \frac{dz}{1 + z^2} = \int \frac{dz}{z^4} + \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{3z^3} - \frac{1}{z} = \\ &= -\frac{1}{3} \cot g^3 x - \cot gx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 809. \quad \int \frac{\sin^2 x \, dx}{1 - k^2 \cos^2 x} &= \int \frac{z^2 \, dz}{(1 - k^2 + z^2)(1 + z^2)} = \\
 &= \frac{1}{k^2} \int \left(\frac{1}{1 + z^2} - \frac{1 - k^2}{1 - k^2 + z^2} \right) dz = \\
 &= \frac{1}{k^2} \left(\operatorname{arctg} z + \sqrt{1 - k^2} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \right) = \\
 &= \frac{1}{k^2} [x + \sqrt{1 - k^2} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x : \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x})].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 810. \quad \int \frac{dx}{\cos^3 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = \\
 &= \int \frac{dx}{\cos x} + \frac{1}{2} \int \sin x \, d(\cos^{-2} x) = \int \frac{dx}{\cos x} + \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \\
 &- \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \pi) + \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x}.
 \end{aligned}$$

$$811. \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x} \text{ podobně, nebo } I = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x.$$

$$812. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x} = \int \cot g x \, dx = \lg \sin x.$$

$$813. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x} = \int \cot g^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = -\cot g x - x.$$

$$814. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x} = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) \cot g x \, dx = -\frac{1}{2} \cot g^2 x - \lg \sin x.$$

$$\begin{aligned}
 815. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^4 x} &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) \cot g^2 x \, dx = -\frac{1}{3} \cot g^3 x + \cot g x + x, \\
 &\text{nebo lze položit za } x \text{ doplněk } \frac{1}{2} \pi - x \text{ do } \int \operatorname{tg}^n x \, dx.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 816. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^5 x} &= -\int \operatorname{tg}^5(\frac{1}{2} \pi - x) \, d(\frac{1}{2} \pi - x) = \\
 &= -\frac{1}{4} \cot g^4 x + \frac{1}{2} \cot g^2 x + \lg \sin x.
 \end{aligned}$$

$$817. \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx = \int \operatorname{tg}^3 x \, d\operatorname{tg} x = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x.$$

Integrály z funkcí $\cos^2 x$, $\sin^2 x$ nebo z takových, že

$R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$, lze vyjádřiti jednoduše proměnnou $z = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arctg} z$, $dx = \frac{dz}{1+z^2}$.

Sem patří integrály $\int f(\operatorname{tg} x) dx$. Viz na př. 809, 812–816.

$$818. \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = I. \quad \sin x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

$$I = \int \frac{1+z^2}{z} \frac{dz}{1+z^2} = \lg z = \lg \operatorname{tg} x. \quad (\text{Viz př. P. 539.})$$

$$819. \int \sin x \cos x dx = \int \frac{z}{1+z^2} \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{z dz}{(1+z^2)^2} = \\ = \frac{1}{2} \int \frac{du}{(1+u)^2} = \frac{-1}{2} \frac{1}{(1+u)} = \frac{-1}{2(1+\operatorname{tg}^2 x)} = -\frac{1}{2} \cos^2 x.$$

Ovšem také

$$I = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x = -\frac{1}{4} (\cos^2 x - \sin^2 x) = \\ = -\frac{1}{2} \cos^2 x + k.$$

$$820. \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{z^2}{1+z^2} dz = \int \frac{1+z^2-1}{1+z^2} dz = z - \operatorname{arctg} z = \\ = \operatorname{tg} x - x.$$

$$821. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(1+z^2)^2}{z^2} \frac{dz}{1+z^2} = -\frac{1}{z} + z = \\ = \operatorname{tg} x - \cot x. \quad (\text{P. 539.})$$

$$822. \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x \pm b^2 \sin^2 x} \cdot z = \frac{b}{a} \operatorname{tg} x. \quad I = \frac{1}{ab} \int \frac{dz}{1 \pm z^2} \text{ dává}$$

$$\text{bud } \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} x \right) \quad \text{nebo} \quad \frac{1}{2ab} \lg \frac{a \cos x + b \sin x}{a \cos x - b \sin x}.$$

Methody obecné a složitější integrály goniometrických funkcí.

Je-li $R(\sin x, \cos x)$ racionální funkce dvou argumentů, přemění se

$\int R(\sin x, \cos x) dx$ v integrál racionální funkce $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2} x$, neboť

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

823. $\int \frac{dx}{c + d \cos(x - a)}$ přejde substitucí $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - a) = t$
v integrál $\int \frac{2dt}{c + d + (c - d)t^2}$. Je-li $\frac{c - d}{c + d} = k^2 > 0$,

vede $\sqrt{\frac{c - d}{c + d}} t = z$ na $\frac{1}{\sqrt{c^2 - d^2}} \operatorname{arctg} [k \operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - a)]$.

Pro $\frac{d - c}{c + d} = k^2 > 0$

máme $\frac{1}{\sqrt{d^2 - c^2}} \lg \frac{k \operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - a) + 1}{k \operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - a) - 1}$.

824. $\int \frac{dx}{1 + e \cos x} = I$ má tedy pro $e < 1$ hodnotu
 $\frac{2}{\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \right)$ a integrál omezený

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1 + e \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

825. $\int \frac{\cos x \, dx}{a + b \cos x} = \frac{1}{b} \int \frac{(a + b \cos x - a)}{a + b \cos x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a + b \cos x}$.

826. $\int \frac{dx}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{2} \int (1 + t^2)^2 \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{2} t + \frac{1}{6} t^3 =$
 $= \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} x.$

827. $\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c}$ převedeme pomocí $a = d \sin \alpha$,

$b = d \cos \alpha$, $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ na $\int \frac{dx}{c + d \cos(x - \alpha)}$,

takže podle př. 823

$I = \frac{2}{\sqrt{m}} \lg \left| \frac{(c - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + b - \sqrt{m}}{(c - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + b + \sqrt{m}} \right|$ pro $m = a^2 + b^2 - c^2 > 0$;

$$I = \frac{2}{\sqrt{-m}} \operatorname{arctg} \frac{(c-a) \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + b}{\sqrt{-m}} \text{ pro } m < 0;$$

$$I = \frac{2}{(c-a) \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + b} \text{ pro } m = 0.$$

Je-li $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ stačí substituce $\operatorname{tg} x = z$,

$$x = \operatorname{arctg} z, \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}, \text{ jak bylo již uvedeno.}$$

$$\begin{aligned} 828. \quad \int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x} &= \int \frac{dz}{(1+z)(1+z^2)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+z^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{z}{1+z^2} \right) dz = \frac{1}{2} [\lg(1+z) + \operatorname{arctg} z - \frac{1}{2} \lg(1+z^2)] = \\ &= \frac{1}{2} \lg(1+\operatorname{tg} x) + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \lg(1+\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 829. \quad \int \frac{dx}{a \cos^2 x + 2b \cos x \sin x + c \sin^2 x} &= \int \frac{dz}{a + 2bz + cz^2} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{d}} \lg \left| \frac{c \operatorname{tg} x + b - \sqrt{d}}{c \operatorname{tg} x + b + \sqrt{d}} \right| \text{ pro } d = b^2 - ac > 0; \\ &= \frac{1}{\sqrt{-d}} \operatorname{arctg} \frac{c \operatorname{tg} x + b}{\sqrt{-d}} \text{ pro } d < 0; \\ &= \frac{-1}{c \operatorname{tg} x + b} \text{ pro } d = 0. \end{aligned}$$

$$830. \quad \int \frac{dx}{(a+b \cos x)^2} = \alpha \frac{\sin x}{a+b \cos x} + \beta \int \frac{dx}{a+b \cos x}.$$

Učiníme-li tento předpoklad, dostaneme derivaci

$$\frac{1}{(a+b \cos x)^2} = \frac{\alpha b \sin x \sin x}{(a+b \cos x)^2} + \frac{\alpha \cos x}{a+b \cos x} + \frac{\beta}{a+b \cos x}$$

a násobením $(a+b \cos x)^2$ po úpravě

$$1 = \alpha b (\sin^2 x + \cos^2 x) + (\alpha x + \beta) \cos x + \beta a.$$

Odtud pro α, β máme dvě lineární rovnice

$$\alpha b + \beta a = 1, \quad \alpha a + \beta b = 0,$$

$$\text{z nichž plyne pro } a \neq b \quad \alpha = \frac{-b}{a^2 - b^2}, \quad \beta = \frac{a}{a^2 - b^2}.$$

Tím je integrál převeden na typ v př. 827 pro $b = 0$.

Sem patří omezený integrál vyskytující se při výpočtu výšeče kuželosečky dané v polárních souřadnicích rovnici

$$\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Obsah výšeče od φ_1 do φ_2

$$P = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho^2 d\varphi = \frac{1}{2} p^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2}.$$

Dále bylo již dříve uvedeno zjednodušení integrálů:

$$\int f(\sin x) \cos x dx = \int f(u) du, \quad u = \sin x, \quad du = \cos x dx.$$

$$\int f(\cos x) \sin x dx = - \int f(u) du, \quad u = \cos x, \quad du = - \sin x dx.)$$

* * *

Integrály součinů $\cos(ax + \alpha) \cos(bx + \beta)$, $\sin(ax + \alpha) \sin(bx + \beta)$ a $\sin(ax + \alpha) \cos(bx + \beta)$ zjednoduší se tím, že součiny promění se v poloviční součty (rozdíly) funkcí podle známých vzorců

$$\cos \gamma \cos \delta = \frac{1}{2} [\cos(\gamma + \delta) + \cos(\gamma - \delta)],$$

$$\sin \gamma \sin \delta = \frac{1}{2} [\cos(\gamma - \delta) - \cos(\gamma + \delta)],$$

$$\sin \gamma \cos \delta = \frac{1}{2} [\sin(\gamma + \delta) + \sin(\gamma - \delta)].$$

$$\int \sin 3x \cos 4x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 7x - \sin x) dx = - \frac{1}{14} \cos 7x + \frac{1}{2} \cos x.$$

* * *

Integrály z funkcí $\sin^n x$ a $\cos^n x$ pro n celé, kladné nebo záporné.

$\alpha)$ n liché: Položí se $\cos x = z$, respektive $\sin x = z$. Na př.

$$\sin^5 x dx = (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx = - (1 - z^2)^2 dz.$$

$$\cos^7 x dx = (1 - \sin^2 x)^3 \cos x dx = (1 - z^2)^3 dz.$$

$$\beta) n \text{ sudé: } \operatorname{tg} x = z, \sin^2 x = \frac{z^2}{1 + z^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1 + z^2}, dx = \frac{dz}{1 + z^2}.$$

$\gamma)$ n celé: Lze užití integrace per partes vedoucí k redukčním vzorcům (viz P. 541—544).

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx, \quad n > 0,$$

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} - \frac{1}{n-1} \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}, \quad n > 1.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} + \frac{1}{n-1} \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x}.$$

δ) n celé a kladné: Použitím Eulerových vzorců vyjádří se $\sin^n x$ i $\cos^n x$ pomocí $\sin kx$, $\cos kx$. Pro menší n možno vyjadřovati postupně.

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \cos^2 x \cos x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \cos x = \\ &= \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} (\cos 3x + \cos x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \sin^2 x \sin x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \sin x = \\ &= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{4} (\sin 3x - \sin x). \end{aligned}$$

Pro $\sin^4 x$ viz př. P. 552.

Obecně podle Eulera $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.

Takže na př.

$$\cos^3 x = \frac{1}{8}[e^{3ix} + e^{-3ix} + 3(e^{ix} + e^{-ix})] = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3 \cos x);$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{8i}[e^{3ix} - e^{-3ix} - 3(e^{ix} - e^{-ix})] = \frac{1}{4}(-\sin 3x + 3 \sin x);$$

a tak i pro libovolnou celistvou kladnou mocninu.

Integrály součinů $\sin^m x \cos^n x$ pro m, n celistvá provádějí se podobně. Je-li jeden mocnitel lichý, zvolí se druhá funkce za novou proměnnou. Jsou-li oba exponenty sudé, zvolíme $z = \operatorname{tg} x$. Nebo se převedou obě mocniny na funkce kx buď postupně nebo pomocí vzorců Eulerových. Nebo lze tyto integrály převést na binomické dosazením $\sin x = z$ nebo $\cos x = z$.

Konečně je možno odvoditi pro m, n celistvá redukční vzorce.

$$831. \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \cos x \, dx = \quad (1. \text{ zp.})$$

$$= \int (z^2 - z^4) \, dz = \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{5} z^5 = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x.$$

$$\sin^2 x \cos^3 x = -\frac{1}{32}(e^{ix} - e^{-ix})^2(e^{ix} + e^{-ix})^3 = \quad (2. \text{ zp.})$$

$$= -\frac{1}{32}[e^{5ix} + e^{-5ix} + e^{3ix} + e^{-3ix} - 2(e^{ix} + e^{-ix})] =$$

$$= -\frac{1}{16}(\cos 5x + \cos 3x - 2 \cos x),$$

$$\text{takže } I = -\frac{1}{16}(\frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{3} \sin 3x - 2 \sin x).$$

832. $\int \sin^3 x \cos^4 x = I$. Snadno odvodíme jako prve

$$64 \sin^3 x \cos^4 x = 3 \sin x + 3 \sin 3x - \sin 5x - \sin 7x$$

$$\text{a odtud } I = \frac{1}{64}(-3 \cos x - \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x + \frac{1}{7} \cos 7x).$$

$$833. \int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x) \, dx = \\ = \frac{1}{4}(x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{6} \sin 6x).$$

$$834. I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx = \quad (m \neq -1) \\ = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x \, dx.$$

Do posledního integrálu dosadíme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ a máme pro $m \neq \pm 1$

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m-1} I_{m,n-2} - \frac{n-1}{m+1} I_{m,n},$$

$$\text{takže } \frac{m+n}{m+1} I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2},$$

a konečně

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2} \quad (\text{pro } m+n \neq 0).$$

835. Jiný redukční vzorec dostaneme částečnou integrací cosinu:

$$I_{m,n} = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \cos^{n+2} x \sin^{m-2} x \, dx.$$

Do posledního integrálu zavedeme $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ a dostaneme

$$I_{m,n} = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} I_{m-2,n} - \frac{m-1}{n+1} I_{m,n},$$

a z toho

$$I_{m,n} = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}, \quad (m+n \neq 0).$$

836. Pro $n = -m \neq 1$ běží o

$$\int \operatorname{tg}^m x \, dx = \frac{1}{m-1} \operatorname{tg}^{m-1} x - \int \operatorname{tg}^{m-2} x \, dx$$

a opětovným užitím této redukce plyne

$$\int \operatorname{tg}^m x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{m-1} x}{m-1} - \frac{\operatorname{tg}^{m-3} x}{m-3} + \dots \pm \operatorname{tg} x \mp x \text{ pro } m \text{ sudé;}$$

pro m liché budou poslední dva členy na pravé straně

$$\pm \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x \mp \int \operatorname{tg} x \, dx.$$

(Viz příklady P. 546—548.)

$$837. \int \sin^m x \cos^n x \, dx = - \int \sin^{m-1} x \cos^n x \, d\cos x;$$

$\cos x = t$ dává hned integrál binomický

$$I_{m,n} = - \int (1-t)^{\frac{m-1}{2}} t^n \, dt.$$

Substitucemi lze integrovati někdy také iracionální funkce funkcí goniometrických, na př.

$$838. \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \text{ vypočte se, položíme-li } \operatorname{tg} x = z^2, \frac{dx}{\cos^2 x} = 2z \, dz,$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+z^4}, \quad I = 2 \int \frac{dz}{1+z^4} \text{ (viz př. 738).}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \lg |\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x}| + \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(\sin x - \cos x).$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \text{ vede však k integrálu eliptickému } \sqrt{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z(1+z^2)}}.$$

Některé omezené integrály funkcí goniometrických

$$839. \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \dots \pm 1 \mp \frac{1}{4}\pi \text{ pro } n \text{ sudé; pro } n$$

liché budou poslední dva členy na pravé straně $\pm \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \lg 2$.

Viz př. 836.

$$840. \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} x \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{\pi}{2ab}. \text{ (Viz př. 822).}$$

$$841. \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4 x \cos^6 x \, dx = I_{4,6} \text{ plyne hned z redukčního vzorce. Neboť}$$

$$I_{4,6} = \frac{5}{10} I_{4,4} = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{8} I_{4,2} = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} I_{4,0},$$

$$\text{z příkladu 471 plyne } I_{4,0} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \frac{\pi}{2},$$

$$\text{tedy } I_{4,6} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \pi}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3}{5 \cdot 12} \pi. \quad \text{Podobně:}$$

$$842. \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4 x \cos^5 x \, dx = I_{4,5} = \frac{4}{9} I_{4,3} = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{7} I_{4,1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} I_{2,1} = \\ = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} I_{0,1} = \frac{8}{3 \cdot 15}.$$

$$843. \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2p+1} x \cos^{2q+1} x \, dx = \\ = \frac{2q}{2(p+q+1)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2p+1} x \cos^{2q-1} x \, dx = \\ = \frac{2q \cdot 2(q-1) \dots 2 \cdot 1}{2(p+q+1) 2(p+q) \dots 2(p+2)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2p+1} x \cos x \, dx;$$

$$I_{2p+1,1} = \left(\frac{\sin^{2p+2}}{2p+2} x \right)_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{2(p+1)}, \text{ takže původní}$$

$$I = \frac{2^q q!}{2^q (p+q+1) \dots (p+2)} \frac{p!}{2(p+1) p!} = \frac{q! p!}{2(p+q+1)!}.$$

$$844. \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} \, dx, \quad (a, b \text{ celá, kladná čísla}).$$

$$\text{Položme } x = \sin^2 z, \, dx = 2 \sin z \cos z \, dz.$$

$$I = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2(a-1)+1} z \cos^{2(b-1)+1} z \, dz, \text{ a podle předešlého příkladu}$$

$$\text{dostaneme } I = \frac{(a-1)! (b-1)!}{(a+b-1)!}.$$

845. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{1 - k^2 \sin^2 x} = I_1$. Neurčitý integrál stanovíme

substitucí $\operatorname{tg} x = z$, $\sin x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$, $dx = \frac{dz}{1+z^2}$,

a dostaneme

$$I = \int \frac{dz}{1+z^2(1-k^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{1-k^2} \operatorname{tg} x).$$

Odtud

$$I_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{1-k^2}}.$$

846. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c}$ nelze počítati $F(2\pi) - F(0)$ podle

příkladu 827, kde $F(x) = \frac{2}{\sqrt{-m}} \operatorname{arctg} \frac{(c-a) \operatorname{tg} \frac{1}{2}x + b}{\sqrt{-m}}$,

poněvadž $F(x)$ v bodě $x = \pi$ není spojitá. Proto je nutno psáti

$$I = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \text{ a každý integrál vyčísliti zvlášť.}$$

První integrál je roven $\frac{\pi}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}},$

a druhý $\frac{2}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}(\pi - \frac{1}{2}\pi) = \frac{\pi}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}.$

Tedy celkově $I = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}.$ Viz př. 824 a 1139.

Integrály některých zvláštních funkcí transcendentních

Většinou půjde o součiny, nebo je dnoduché zlomky obsahující mocniny x , e^{ax} , $\sin kx$, $\cos lx$ a pod. Někdy lze je redukovati integrací per partes. Na př.

$$\int x^n \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx.$$

$$\int x^n \cos ax \, dx = \frac{1}{a} x^n \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \, dx.$$

A tak se postupně snižuje mocnitel n (celistvý, kladný). Pro n celé záporné lze příslušné integrály opět redukovati ($n = -m$):

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin ax}{x^m} dx &= -\frac{\sin ax}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{a}{m-1} \int \frac{\cos ax}{x^{m-1}} dx, \\ \int \frac{\cos ax}{x^m} dx &= -\frac{\cos ax}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{a}{m-1} \int \frac{\sin ax}{x^{m-1}} dx.\end{aligned}\quad (m \neq 1)$$

Tím se dospěje k vyšším transcendentním funkcím Liouvillovým:

$$\int \frac{\sin ax}{x} dx, \quad \int \frac{\cos ax}{x} dx,$$

zvaným integrálsinus a integrálcossinus. Podobně lze redukovati integrály $\int x^n e^{ax} dx$ integrací per partes:

$$\begin{aligned}\int x^n e^{ax} dx &= \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx \quad (n \text{ kladné}); \\ \int \frac{e^{ax}}{x^m} dx &= \frac{e^{ax}}{(1-m)x^{m-1}} + \frac{a}{m-1} \int \frac{e^{ax}}{x^{m-1}} dx, \quad 0 < m \neq 1.\end{aligned}$$

Ve druhém případě se dojde k nové transcendentě

$$\int \frac{e^{ax}}{x} dx. \text{ Je-li } e^{ax} = z, \quad ax = \lg z, \quad a dx = \frac{1}{z} dz,$$

dostaneme ji ve tvaru $\int \frac{dz}{\lg z}$, t. zv. integrállogaritmus.

Příklady

$$\begin{aligned}847. \text{ a) } \int x^3 \sin x dx &= -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x dx = \\ &= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6 \int x \sin x dx = \\ &= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \int \cos x dx = \\ &= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } \int x^3 \cos x dx &= x^3 \sin x - 3 \int x^2 \sin x dx = \\ &= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6 \int x \cos x dx = \\ &= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 848. \quad \int x^n \sin ax \, dx &= -\frac{x^n \cos ax}{a} + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx = \\
 &= -\frac{x^n \cos ax}{a} + \frac{nx^{n-1} \sin ax}{a^2} - \frac{n(n-1)}{a^2} \int x^{n-2} \sin ax \, dx = \\
 &= -\left[\frac{x^n}{a} \cos ax - \binom{n}{1} \frac{x^{n-1}}{a^2} \sin ax - \binom{n}{2} 2! \frac{x^{n-2}}{a^3} \cos ax + \right. \\
 &\quad \left. + \binom{n}{3} 3! \frac{x^{n-3}}{a^4} \sin ax + \binom{n}{4} 4! \frac{x^{n-4}}{a^5} \cos ax - \dots \right].
 \end{aligned}$$

Uvážíme-li, že

$$\begin{aligned}
 -\sin ax &= \cos(ax + \tfrac{1}{2}\pi), & -\cos ax &= \cos(ax + \pi), \\
 \sin ax &= \cos(ax + \tfrac{3}{2}\pi), & \cos ax &= \cos(ax + 2\pi),
 \end{aligned}$$

můžeme psáti

$$\int x^n \sin ax \, dx = -\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! \frac{x^{n-k}}{a^{k+1}} \cos(ax + \tfrac{1}{2}k\pi).$$

Podobně lze odvoditi

$$\int x^n \cos ax \, dx = \sum \binom{n}{k} k! \frac{x^{n-k}}{a^{k+1}} \sin(ax + \tfrac{1}{2}k\pi).$$

$$\begin{aligned}
 849. \quad \int x^n e^{-x} \, dx &= -e^{-x} x^n + n \int x^{n-1} e^{-x} \, dx = \\
 &= -e^{-x} (x^n + nx^{n-1}) + n(n-1) \int x^{n-2} e^{-x} \, dx = \\
 &= -e^{-x} [x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \dots + n!]. \\
 \int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx &= n!
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 850. \quad \int \frac{x \, dx}{\sin^3 x} &= \frac{x}{\sin x} \cotgx + \int \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \\
 &= \frac{x \cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x} - \int \frac{x \cos^2 x}{\sin^3 x} \, dx = \\
 &= -\frac{x \cos x + \sin x}{\sin^2 x} - \int \frac{x \, dx}{\sin^3 x} + \int \frac{x \, dx}{\sin x}. \\
 I &= -\frac{\sin x + x \cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{x \, dx}{\sin x}.
 \end{aligned}$$

$$851. \quad I_n = \int e^{ax} \sin^n x \, dx = \frac{e^{ax}}{a} \sin^n x - \frac{n}{a} \int e^{ax} \sin^{n-1} x \cos x \, dx.$$

Integrál napravo je roven

$$\frac{e^{ax}}{a} \sin^{n-1} x \cos x - \int \frac{e^{ax}}{a} [(n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x - \sin^n x] dx =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \sin^{n-1} x \cos x - \frac{n-1}{a} \int e^{ax} \sin^{n-2} x dx + \\ + \frac{n-1}{a} \int e^{ax} \sin^n x dx + \frac{1}{a} I_n.$$

$$I_n = \frac{e^{ax}}{a} \sin^n x - \frac{n}{a^2} e^{ax} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2} - \\ - \frac{n(n-1)}{a^2} I_n - \frac{n}{a^2} I_n.$$

$$\frac{a^2 + n^2}{a^2} I_n = \frac{e^{ax} \sin^{n-1} x (a \sin x - n \cos x)}{a^2} + \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2}.$$

$$I_n = \frac{A}{a^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} I_{n-2}.$$

$$852. \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x - \int \frac{1 + \cos x + \sin x}{(1 + \cos x)^2} e^x dx = \\ = \text{zlomek} - \int \left(\frac{dx}{1 + \cos x} + e^x d \frac{1}{1 + \cos x} \right) = \\ = (\text{zl.}) - \frac{e^x}{1 + \cos x} = \frac{1 + \sin x - 1}{1 + \cos x} e^x = e^x \operatorname{tg} \frac{1}{2} x.$$

$$853. \int x^m \lg^n x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \lg^n x - \frac{n}{m+1} \int x^m \lg^{n-1} x dx = \dots = \\ = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left[\lg^n x - \frac{n}{m+1} \lg^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2} \lg^{n-2} x + \right. \\ \left. + \dots \pm \frac{n!}{(m+1)^n} \right].$$

$$854. \int_0^1 x^m \lg^n x dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

$$855. \int x \lg(x^4 - 1) dx = \frac{1}{2} x^2 \lg(x^4 - 1) - 2 \int \frac{x^5 dx}{x^4 - 1};$$

poslední integrál

$$I_2 = \int \frac{x^5 - x}{x^4 - 1} dx + \int \frac{x dx}{x^4 - 1} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \\ = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4} \lg \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right|.$$

$$I = \frac{1}{2}x^2 \lg(x^2 - 1)(x^2 + 1) - x^2 - \frac{1}{2}[\lg(x^2 - 1) - \lg(x^2 + 1)] = \\ = (x^2 - 1) \lg \sqrt{x^2 - 1} + (x^2 + 1) \lg \sqrt{x^2 + 1} - x^2.$$

$$856. \int f(\lg x) x^m dx = I. \quad z = \lg x, \quad x = e^z, \quad dx = e^z dz.$$

$$I = \int f(z) e^{(m+1)z} dz.$$

$$857. \int x^n \arcsin x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \arcsin x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$858. \int f'(x) \operatorname{arctg} x dx = f(x) \operatorname{arctg} x - \int \frac{f(x)}{1+x^2} dx.$$

$$859. \int f'(x) \arcsin x dx = f(x) \arcsin x - \int \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Integrovaní řadami. Základy

Nekonečnou řadu $\sum u_i(x)$ lze integrovati člen za členem, jen je-li *stejně* konvergentní v uvažovaném intervalu. To platí předně o řadách potenčních $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$. Nedovedeme-li tedy předloženou $f(x)$ jinak integrovati, rozvedeme ji v řadu a tuto pak integrujeme.

Příklady

$$860. \int \frac{e^x}{x} dx = I. \quad \frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots. \text{ Integrací řady}$$

$$I = \lg x + x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \dots. \text{ Položíme-li } e^x = z, \text{ jest}$$

$$I = \int \frac{dz}{\lg z} = \lg \lg z + \lg z + \frac{\lg^2 z}{2 \cdot 2!} + \frac{\lg^3 z}{3 \cdot 3!} + \dots$$

a tím jest odvozeno vyjádření t. zv. integrállogaritmu.

861. $\int e^{-x^2} dx$ se provede pomocí řady

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots;$$

$$I = x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots$$

$$\begin{aligned} 862. \int \frac{\sin x}{x} dx &= \int \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) \frac{dx}{x} = \\ &= x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 863. \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx &= \int \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \dots \right) dx = \\ &= x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 864. \int_0^1 x^x dx &= \int_0^1 e^{x \lg x} dx = \\ &= \int_0^1 \left(1 + \frac{x \lg x}{1!} + \frac{x^2 \lg^2 x}{2!} + \frac{x^3 \lg^3 x}{3!} + \dots \right) dx = \\ &= \sum_0^\infty \frac{1}{k!} \int_0^1 x^k \lg^k x dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} = \\ &= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \dots \quad (\text{Viz př. 854.}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 865. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} &= \int (1-x^4)^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= \int \left(1 + \frac{1}{2} x^4 + \frac{3}{2 \cdot 4} x^8 + \dots \right) dx = \\ &= x + \frac{x^5}{2 \cdot 5} + \frac{3x^9}{2 \cdot 4 \cdot 9} + \dots, \quad (x^2 < 1). \end{aligned}$$

Integrace řad lze někdy použití k sčítání řad:

$$\begin{aligned}
 866. \int \frac{dx}{1-x+x^2} &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1-2x}{\sqrt{3}} = \\
 &= \int (1+x-x^3-x^4+x^6+\dots) dx = \\
 &= x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 + \dots
 \end{aligned}$$

Dosadíme-li meze 1 a 0, jest

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

$$\begin{aligned}
 867. \int_0^1 \frac{x dx}{1+x+x^2} &= \int_0^1 (x-x^2+x^4-x^5+\dots) dx = \\
 &= (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots)_0^1 = \\
 &= \left(\lg \sqrt{1+x+x^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1+2x}{\sqrt{3}} \right)_0^1
 \end{aligned}$$

$$\text{a odtud } \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \lg \sqrt{3} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}. \text{ (Viz P. 490.)}$$

Je-li obtížné rozvésti funkci v řadu, lze někdy snadno rozvésti její derivaci a pak integrovati:

$$868. D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \dots$$

$$\text{Integrací: } \arcsin x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots, |x| \leq 1.$$

$$\begin{aligned}
 869. D \lg(x + \sqrt{1+x^2}) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \\
 &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \dots
 \end{aligned}$$

Integrací:

$$\lg(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \dots, |x| \leq 1.$$

$$870. D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

$$\text{Integrací: } \operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots, \text{ pro } |x| \leq 1.$$

Některé integrály eliptické

Integrály eliptické jsou tvaru $\int R(x, y) dx$, kde

$$y = \sqrt{a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4} \text{ a někdy } a_0 = 0.$$

Dají se redukovati na tři základní typy Legendrovy:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx,$$

$$\int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (|k| \leq 1),$$

t. zv. eliptické integrály druhu prvního, druhého a třetího.

Substitucí $x = \sin \varphi$, kde φ slove amplituda, přejdou v

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

a
$$\Pi(n, k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad |\varphi| \leq \frac{1}{2}\pi.$$

Výpočet těchto integrálů se děje integrací řad:

$$\begin{aligned} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} &= \\ &= 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 \varphi + \dots \\ (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} &= \\ &= 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \varphi - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 \varphi + \dots \end{aligned}$$

Výsledky jsou pak sestaveny v tabulkách pro $F(k, \varphi)$ a $E(k, \varphi)$.

Nejnázne se počítají t. zv. *integrály úplné* v mezích 0 a $\frac{1}{2}\pi$. Neboť pro sudá n je

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n \varphi d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots n} \frac{1}{2}\pi \quad (\text{viz P. 602}).$$

871. Pro úplné integrály eliptické platí

$$F(k) = \frac{1}{2}\pi \left[1 + \left(\frac{1}{2}k\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}k^2\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}k^3\right)^2 + \dots \right].$$

$$872. E(k) = \frac{1}{2}\pi \left[1 - \left(\frac{1}{2}k\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}k^2\right)^2 - \frac{1}{5} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}k^3\right)^2 - \dots \right].$$

$$F\left(\frac{1}{3}\right) = 1,617\dots, \quad F\left(\frac{1}{2}\right) = 1,685\dots, \quad F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1,854\dots,$$

$$F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2,156.$$

$$E\left(\frac{1}{3}\right) = 1,526\dots, \quad E\left(\frac{1}{2}\right) = 1,467\dots, \quad E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1,350\dots,$$

$$E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1,211.$$

Ostatní eliptické integrály převádějí se vhodnými substitucemi na základní druhy, aby bylo možno použití tabulek.

$$873. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \text{ přejde po } x = \cos\varphi, \quad dx = -\sqrt{1-\cos^2\varphi} d\varphi$$

$$\begin{aligned} \text{v} \quad - \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{2}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \arccos x\right). \end{aligned}$$

$$874. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1,311\dots$$

$$875. \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \text{ se převádí pomocí } x = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi, \quad dx = \frac{d\varphi}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}$$

$$\begin{aligned} \text{na} \quad I &= \frac{1}{2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^4\frac{1}{2}\varphi + \cos^4\frac{1}{2}\varphi}} = \frac{1}{2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \\ &= \frac{1}{2}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right). \end{aligned}$$

$$876. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,927\dots$$

$$877. \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}. \text{ Zavedeme } \sin x = \cos^2 \varphi, \cos x \, dx = -2 \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi, \\ \cos x = \sqrt{1 - \cos^4 \varphi} = \sin \varphi \sqrt{1 + \cos^2 \varphi}.$$

$$I = -2 \int_{\frac{1}{2}\pi}^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2 - \sin^2 \varphi}} = \sqrt{2} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \\ = 2,622\dots$$

$$878. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}. \text{ Položíme } x = \cos \varphi, dx = -\sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \, d\varphi;$$

$$I = \int \frac{-\cos^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}} = -\int \sqrt{1 + \cos^2 \varphi} \, d\varphi + \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}} = \\ = -\sqrt{2} \int \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi} \, d\varphi + \frac{1}{2} \sqrt{2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

$$879. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_{\frac{1}{2}\pi}^0 = -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} = \sqrt{2} E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,599.$$

880. Délka kvadrantu elipsy $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, kde $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ vyjádří se eliptickým integrálem

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \, d\varphi = a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \, d\varphi.$$

$\varphi = \frac{1}{2}\pi - \psi$, $d\varphi = -d\psi$ převádí integrál na

$$-a \int_{\frac{1}{2}\pi}^0 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \psi} \, d\psi = a E(\varepsilon).$$

Pro obvod elipsy máme tedy

$$4a E(\varepsilon) = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\varepsilon^2\right)^2 - \dots \right].$$

Přibližně také $2\pi[\frac{3}{4}(a+b) - \frac{1}{2}\sqrt{ab}]$ shoduje se do 4. členu.

881. Délka sinoidy $y = \sin x$ od 0 do 2π jest

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1+y'^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1+\cos^2 x} dx = 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x} dx = \\ &= 4\sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 7,640\dots \end{aligned}$$

882. Délka oblouku lemniskaty $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$.

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi, \quad rr' = -2a^2 \sin 2\varphi, \quad r'^2 = \frac{4a^4 \sin^2 2\varphi}{r^2}.$$

$$ds = \sqrt{\frac{r^4 + 4a^4 \sin^2 2\varphi}{r^2}} d\varphi = a\sqrt{2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Čtvrtina obvodu $s = a\sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2 \varphi}}$. Zde vadí

modul 2, který má býti $k^2 < 1$. Proto klademe $2\sin^2 \varphi = \sin^2 \psi$.
 $\sqrt{2} \sin \varphi = \sin \psi$, $\sqrt{2} \cos \varphi d\varphi = \cos \psi d\psi$. Mezím $\varphi(0, \frac{1}{4}\pi)$ odpovídají meze $\psi(0, \frac{1}{2}\pi)$, takže vzhledem k

$$d\varphi = \frac{\cos \psi d\psi}{\sqrt{2} \cos \varphi} = \frac{\cos \psi d\psi}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}}$$

jest $s = a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}} = a F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ a celá

délka lemniskaty $4aF\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 7,416a$.

883. Vypočísti délku čtyřlístu $r = a \sin 2\varphi$ (obr. 3).

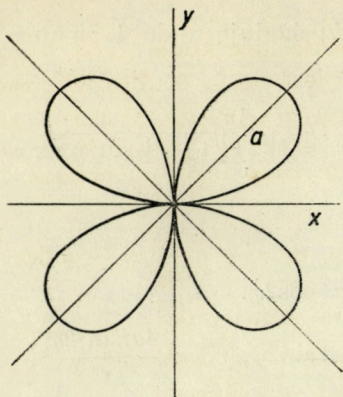
$$r' = 2a \cos 2\varphi \text{ a } ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi.$$

Jest vypočísti

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 \sin^2 2\varphi + 4a^2 \cos^2 2\varphi} d\varphi &= \int \sqrt{a^2 + 3a^2 \cos^2 2\varphi} d\varphi = \\ &= a \int \sqrt{4 - 3 \sin^2 2\varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

máme

$$I = 2 \cdot \frac{1}{2} a \int \sqrt{4 - 3 \sin^2 \psi} d\psi.$$



Obr. 3.

Pro osminu čáry se mění φ od 0 do $\frac{1}{4}\pi$, tedy ψ od 0 do $\frac{1}{2}\pi$. Celý obvod je

$$8a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \psi} d\psi = 8aE\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

884. Určiti délku cykloidy

$$x = a\varphi - b \sin\varphi,$$

$$y = a - b \cos\varphi.$$

$$dx = (a - b \cos\varphi) d\varphi,$$

$$dy = b \sin\varphi d\varphi,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos\varphi} d\varphi = \\ &= \sqrt{(a+b)^2 - 2ab(1 + \cos\varphi)} d\varphi = \\ &= (a+b) \sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2} \cos^2 \frac{1}{2}\varphi} d\varphi. \quad \varphi = 2\psi, \quad d\varphi = 2d\psi. \end{aligned}$$

$$ds = 2(a+b) \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \psi} d\psi. \quad \psi = \frac{1}{2}\pi - t, \quad d\psi = -dt,$$

$$ds = -2(a+b) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt.$$

Mění-li se φ od 0 do π , mění se ψ od 0 do $\frac{1}{2}\pi$ a t od $\frac{1}{2}\pi$ do 0.

$$s = 2(a+b) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt = 2(a+b) E\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right).$$

885. Pro Pascalovu závitnici $r = a \cos\varphi + b$ máme:

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi, \quad r' = -a \sin\varphi,$$

tedy
$$ds = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos\varphi} d\varphi =$$

$$= (a+b) \sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2} \sin^2 \frac{1}{2}\varphi} d\varphi,$$

$$\varphi = 2\psi, \quad d\varphi = 2d\psi, \quad ds = 2(a+b) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi.$$

Polovině závitu odpovídají meze $\varphi(0, \pi)$, tedy $\psi(0, \frac{1}{2}\pi)$ a obvod je $4(a+b) E\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)$. Je-li $b = a$, máme kardioidu (obr. P. 20).

886. Prostorová křivka Vivianiho je průsečnice koule

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ s válcem $x^2 + y^2 - rx = 0$. Pro výpočet oblouku užijeme záměny $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, $z^2 = r^2 - \varrho^2$,

$$x^2 + y^2 - rx = \varrho^2 - r\varrho \cos \varphi = 0, \quad \cos \varphi = \frac{\varrho}{r}, \quad \varrho = r \cos \varphi.$$

$$d\varrho = -r \sin \varphi d\varphi, \quad z dz = -\varrho d\varrho, \quad dz = \frac{-\varrho d\varrho}{r \sin \varphi} = -\varrho d\varphi.$$

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2 + dz^2} = \\ &= \sqrt{r^2 \sin^2 \varphi d\varphi^2 + r^2 \cos^2 \varphi d\varphi^2 + r^2 \cos^2 \varphi d\varphi^2} = \\ &= r d\varphi \sqrt{1 + \cos^2 \varphi} = r \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi} d\varphi, \end{aligned}$$

$$s = 4\sqrt{2}r \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi} d\varphi = 4r\sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Funkce eliptické

Inversní funkce k $u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ jest $x = \operatorname{sn} u$.

Klademe-li $x = \sin \varphi$, je $u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$,

$$\varphi = \operatorname{am} u, \quad x = \operatorname{sn} u.$$

$$\text{Dále} \quad \operatorname{cn}^2 u = 1 - \operatorname{sn}^2 u, \quad \operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u,$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} =$$

$$= \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u, \quad D_u \operatorname{cn} u = -\operatorname{sn} u \cdot \operatorname{dn} u,$$

$$D_u \operatorname{dn} u = -k^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u.$$

Příklady

887. Dokázati pro $x = \operatorname{cn} u$, $y = \operatorname{dn} u$ vztahy

$$(D_u x)^2 = (1-x^2)(k^2x^2 + 1 - k^2),$$

$$(D_u y)^2 = (1-y^2)(y^2 - 1 + k^2).$$

$$\begin{aligned} (D_u \operatorname{cn} u)^2 &= \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u = (1 - \operatorname{cn}^2 u) [1 - k^2(1 - \operatorname{cn}^2 u)] = \\ &= (1 - x^2)(k^2x^2 + 1 - k^2). \end{aligned}$$

$$(D_u \operatorname{dn} u)^2 = k^4 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u = k^4 \frac{1 - \operatorname{dn}^2 u}{k^2} \frac{k^2 - 1 + \operatorname{dn}^2 u}{k^2} = \\ = (1 - y^2)(y^2 - 1 + k^2).$$

888. Vyjádřiti průvodič lemniskaty jako funkci oblouku.

$$\varrho^2 = 2c^2 \cos 2\varphi.$$

$$s = c \sqrt{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = c \sqrt{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 \varphi}}.$$

$$\text{Položíme } 2 \sin^2 \varphi = \sin^2 \psi, \quad \sqrt{2} \cos \varphi d\varphi = \cos \psi d\psi,$$

$$d\varphi = \frac{\cos \psi}{\sqrt{2(1 - \sin^2 \varphi)}} d\psi,$$

$$\text{takže} \quad s = c \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}}.$$

$$\sin \psi = \operatorname{sn} \left(\frac{s}{c} \right) = \sqrt{2} \sin \varphi. \quad \cos 2\varphi = 1 - 2 \sin^2 \varphi = 1 - \sin^2 \psi.$$

$$\varrho = c \sqrt{2} \sqrt{\cos 2\varphi} = c \sqrt{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{s}{c}} = c \sqrt{2} \operatorname{cn} \left(\frac{s}{c} \right).$$

$$\text{Modul } k = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

889. Vyjádřiti výchylku matematického kyvadla jako funkci času.

Pro matematické kyvadlo platí

$$t \sqrt{\frac{g}{l}} = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad k = \sin \frac{1}{2} \alpha, \quad \sin \frac{1}{2} \varphi = k \sin \psi.$$

$$\sin \psi = \operatorname{sn} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}} \right), \quad \sin \frac{1}{2} \varphi = \sin \frac{1}{2} \alpha \cdot \operatorname{sn} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}} \right).$$

890. Dokázati, že prostorová čára $x = \operatorname{sn} u$, $y = \operatorname{cn} u$, $z = \operatorname{dn} u$ je čtvrtého stupně.

Pro eliptické funkce platí $\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1$,

$$k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1,$$

neboli pro čáru $x^2 + y^2 = 1$, $k^2 x^2 + z^2 = 1$. Je tedy průsečnicí dvou válců kvadratických a tím čarou čtvrtého stupně.

Užití integrálů omezených

Příklady

Určiti obsahy ploch omezených:

891. a) Smyčkou čáry $x = t^2$, $y = t - \frac{1}{3}t^3$. Průsečíky s osou x odpovídají $y = t - \frac{1}{3}t^3 = 0$, $t_1 = 0$, $t_2 = \pm \sqrt[3]{3}$. Celé smyčce odpovídá interval t od $-\sqrt[3]{3}$ do $\sqrt[3]{3}$.

$$P = \int_{-\sqrt[3]{3}}^{\sqrt[3]{3}} (t - \frac{1}{3}t^3) 2t dt = \frac{8}{5}\sqrt[3]{3}.$$

891. b) Kisoidou $y^2(a - x) = x^3$ až k asymptotě $x = a$.

α) Parametrické rovnice čáry jsou $x = \frac{at^2}{1+t^2}$, $y = \frac{at^3}{1+t^2}$.

$$P = \int_0^a x \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx \text{ vede po substituci } \frac{x}{a-x} = t^2, \quad x = \frac{at^2}{1+t^2}$$

k parametrickému vyjádření.

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a^2 t^4}{(1+t^2)^3} dt = \int_{-\infty}^{\infty} 2a^2 \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{2}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{(1+t^2)^3} \right) dt;$$

podle př. P. 508 skládají se integrály zlomků z částí racionálních,

$$\text{které sloučeny dávají } R(t) = \frac{M_3(t)}{(1+t^2)^2},$$

kde čitatel je o stupeň nižší jmenovatele, a z

$$(\arctgt - 2 \cdot \frac{1}{2} \arctgt + \frac{3}{8} \arctgt) = \frac{3}{8} \arctgt.$$

V mezích $-\infty$ do ∞ racionální část dává 0 a zbývá $P = \frac{3}{4}\pi a^2$.

$$\text{Ostatně } 2a^2 R(t) = -\frac{1}{4} \left[\frac{3a^2 t}{(1+t^2)^2} + \frac{5a^2 t^3}{(1+t^2)^3} \right].$$

Vrátíme-li se k původním proměnným, užívajíce vztahu $y = tx$, dostaneme

$$P_x = \int_0^x x \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = \frac{3}{4}a^2 \arctg \sqrt{\frac{x}{a-x}} - \\ - (3a + 2x) \sqrt{(a-x)x}.$$

Odtud zase, položíme-li $a = 2r$,

$$P_a = \frac{3}{4}a^2 \cdot \frac{1}{2}\pi, \quad P = 2P_a = \frac{3}{2}\pi a^2 = 3\pi r^2.$$

$\beta)$ Výpočet
$$I = \int_0^{2r} x \sqrt{\frac{x}{2r-x}} dx$$

podle metody př. 518 (díl I) a 745 (díl II):

$$\frac{x}{2r-x} = z^2, \quad x = \frac{2rz^2}{1+z^2}, \quad dx = \frac{4rz}{(1+z^2)^2} dz.$$

$$\begin{aligned} I &= 8r^2 \int_0^\infty \frac{z^4}{(1+z^2)^3} dz = 8r^2 \left[\int_0^\infty \frac{z^2-1}{(z^2+1)^2} dz + \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z^2)^3} \right] = \\ &= 8r^2 \left[\int \frac{dz}{z^2+1} - 2 \int \frac{dz}{(1+z^2)^2} + \int \frac{dz}{(1+z^2)^3} \right]_0^\infty = \\ &= 8r^2 \left[-\frac{5}{8} \frac{z}{1+z^2} + \frac{z}{4(1+z^2)^2} + \frac{3}{8} \arctg z \right]_0^\infty = \frac{3}{2}\pi r^2. \end{aligned}$$

$\gamma)$ Položme podle B (str. 58)

$$\sqrt{2rx-x^2} = xt, \quad 2rx-x^2 = x^2 t^2,$$

$$x = \frac{2r}{1+t^2}, \quad dx = \frac{-4rt}{(1+t^2)^2} dt, \quad \sqrt{2rx-x^2} = \frac{2rt}{1+t^2}.$$

$$\begin{aligned} I &= -8r^2 \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^3} = \\ &= 8r^2 \left[\frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3}{8} \frac{t}{1+t^2} + \frac{3}{8} \arctgt \right]_0^\infty = \frac{3}{2}\pi r^2. \end{aligned}$$

$\delta)$ Obecnou metodou A (str. 54) máme neurčitý integrál

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{2rx-x^2}} dx = (ax+b) \sqrt{2rx-x^2} + k \int \frac{dx}{\sqrt{2rx-x^2}}, \\ \frac{dI}{dx} &= \frac{x^2}{\sqrt{2rx-x^2}} = a\sqrt{2rx-x^2} + (ax+b) \frac{r-x}{\sqrt{2rx-x^2}} + \\ &+ \frac{k}{\sqrt{2rx-x^2}}, \quad \text{násobeno } \sqrt{2rx-x^2} \text{ dává} \end{aligned}$$

$$x^2 = a(2rx - x^2) + (ax + b)(r - x) + k,$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -\frac{3}{2}r, \quad k = \frac{3}{2}r^2,$$

$$I = -\frac{1}{2}(x + 3r)\sqrt{2rx - x^2} + \frac{3}{2}r^2 \int \frac{dx}{\sqrt{2rx - x^2}},$$

$$I_0^{2r} = \left[-\frac{1}{2}(x + 3r)\sqrt{2rx - x^2} + \frac{3}{2}r^2 \arccos \frac{r - x}{r} \right]_0^{2r} = \frac{3}{2}\pi r^2.$$

ε) I možno psáti jako binomický

$$\int x^{\frac{3}{2}}(2r - x)^{-\frac{1}{2}} dx \text{ nebo } \int x(2rx^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Položíme-li $2rx^{-1} - 1 = u^2$, přejde ve tvar

$$\begin{aligned} I &= -8r^2 \int \frac{du}{(1 + u^2)^3} = \\ &= -8r^2 \left[\frac{u}{4(1 + u^2)^2} + \frac{3}{8} \frac{u}{1 + u^2} + \frac{3}{8} \operatorname{arctgu} \right] \end{aligned}$$

a po dosazení mezí $I_\infty^0 = \frac{3}{2}\pi r^2$.

ζ) Substituce

$x = r(1 - \cos\varphi)$, $dx = r \sin\varphi d\varphi$, $\sqrt{2rx - x^2} = r \sin\varphi$
dává

$$I = r^2 \int (1 - \cos\varphi)^2 d\varphi = r^2 \left[\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi \right]_0^\pi = \frac{3}{2}\pi r^2.$$

892. Stanoviti povrch a objem tělesa vzniklého rotací cykloidy

$x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$ kolem osy x .

$$dx = r(1 - \cos t) dt, \quad dy = +r \sin t dt,$$

$$V = \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx = \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt =$$

$$= \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt.$$

$$\int \cos^3 t dt = \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t. \quad \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t, \text{ je tedy}$$

$$V = \pi r^3 \left[t - 3\sin t + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t - \sin t + \frac{1}{3}\sin^3 t \right]_0^{2\pi} = 5\pi^2 r^3.$$

$$\text{Povrch } P = 2\pi \int_0^{2\pi} y ds, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 = 2r^2(1 - \cos t) dt^2,$$

$$ds = 2r \sin \frac{1}{2}t dt,$$

$$y \, ds = 2r \sin^{\frac{1}{2}} t \cdot 2r \sin^{\frac{1}{2}} t \, dt = 4r^2 \sin^{\frac{1}{2}} t \, dt,$$

$$P = 8\pi r^2 \int_0^{2\pi} \sin^{\frac{1}{2}} t \, dt = 16\pi r^2 \int_0^{2\pi} \sin^{\frac{1}{2}} t \cdot d(\frac{1}{2}t) = \\ = 16\pi r^2 [\frac{1}{3} \cos^{\frac{3}{2}} t - \cos^{\frac{3}{2}} t]_0^{2\pi} = \frac{64}{3} \pi r^2.$$

Objem tělesa omezeného dvěma válcovými plochami $y = f(x)$, $z = g(x)$, rovinami xy , xz a $x_1 = a$, $x_2 = b$

$$V = \int_a^b f(x) g(x) \, dx \quad (\text{obr. 4}).$$

Povrchy těchto válcových ploch jsou

$$P_1 = \int_a^b g(x) \sqrt{1 + f'^2} \, dx; \quad P_2 = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + g'^2} \, dx.$$

893. Vypočítí povrch a objem tělesa omezeného rotačními plochami válcovými $y^2 = r^2 - x^2$, $z^2 = r^2 - x^2$,

$$P_1 = P_2 = \int_0^r r \, dx = r^2, \quad y' = \frac{-x}{y}.$$

Povrch celého tělesa $P = 16r^2$.

$$1 + y'^2 = \frac{x^2 + y^2}{y^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2},$$

$$V_1 = \int_0^r (r^2 - x^2) \, dx = \frac{2}{3} r^3, \quad V = \frac{16}{3} r^3.$$

894. Určítí objem a povrch tělesa omezeného válcovými plochami $x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$,

$$\frac{1}{8} V = \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 \, dx = [a^2 x - 3a^{\frac{4}{3}} \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}} \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3} x^3]_0^a = \\ = \frac{1}{105} a^3. \quad V = \frac{128}{105} a^3.$$

$$P_1 = P_2 = \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} \, dx \quad (\text{viz př. P. 621}).$$

$$P = 16P_1 = 16 \int_0^a a^{\frac{1}{3}} y^{\frac{3}{2}} \, dy = \frac{48}{5} a^2.$$

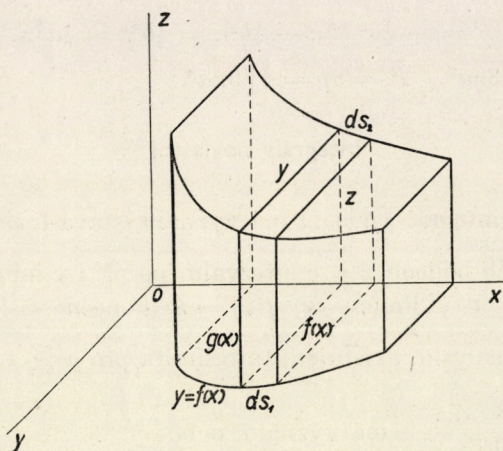
895. Vypočítí povrch tělesa omezeného plochami válcovými $y^2 = rx - x^2$, $z^2 = 4rx$.

$$p = p_1 + p_2, \quad P = 4p.$$

Podle schematu na obr. 4 je

$$p_1 = \int_0^r z \, ds_1, \quad y' = \frac{r - 2x}{2\sqrt{rx - x^2}}, \quad p_1 = \int_0^r r\sqrt{r} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{rx - x^2}} dx,$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{r}{2\sqrt{rx - x^2}}, \quad p_1 = r\sqrt{r} \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r - x}} = 2r^2.$$



Obr. 4.

$$p_2 = \int_0^r y \, ds_2, \quad z' = \sqrt{\frac{r}{x}}, \quad \sqrt{1 + z'^2} = \sqrt{\frac{x + r}{x}},$$

$$p_2 = \int_0^r \sqrt{rx - x^2} \sqrt{\frac{x + r}{x}} dx = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{2}r^2 \arcsin \frac{x}{r} \right]_0^r = \frac{1}{4}\pi \cdot r^2.$$

$$P = (8 + \pi) r^2.$$

896. Vypočísti obsah válcové plochy $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ omezené koulí $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

$$P = 8p, \quad p = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} - y^2 a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx, \quad y^2 = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3,$$

$$p = \sqrt[3]{3a^{\frac{2}{3}}} \int_0^a \sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} dx, \quad x^{\frac{2}{3}} = u, \quad dx = \frac{3}{2} \sqrt{u} du,$$

$$p = \sqrt[3]{3a^{\frac{2}{3}}} \frac{3}{2} \int_0^{2b} \sqrt{2bu - u^2} du. \quad 2b = a^{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Integrál } I = \left[\frac{u-b}{2} \sqrt{2bu - u^2} - \frac{1}{2} b^2 \arcsin \frac{b-u}{b} \right]_0^{2b} =$$

$$= + \frac{1}{2} b^2 \frac{1}{2} 3\pi - \frac{1}{4} b^2 \pi = \frac{1}{2} b^2 \pi = \frac{1}{8} a^{\frac{4}{3}} \pi.$$

$$p = \frac{3}{16} \sqrt[3]{3\pi} a^2, \quad P = 8p = \frac{3}{2} \sqrt[3]{3\pi} a^2.$$

Integrály nevlastní

Nevlastní integrál $\int_a^b f(x) dx$ má význam, stává-li se $f(x)$ nekonečnou v některých bodech $x = c$ intervalu (po př. i v mezích a, b) řádu menšího než 1, t. j. $\lim_{x \rightarrow c} (c - x)^n f(x) = k$ (konečné číslo) pro $n < 1$.

Integrál nemá smyslu, existuje-li tato limita pro $n \geq 1$.

Na př. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ má význam, neboť

$$\lim_{x \rightarrow -1} (1+x)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ a číslo } n = \frac{1}{2} < 1. \text{ Skutečně}$$

$$I = -\arcsin(-1) = \frac{1}{2}\pi.$$

Neexistuje $\int_{-1}^0 \frac{e^x}{x} dx$, neboť $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \frac{e^x}{x} = 1$ pro $n = 1$.

$\int_a^\infty f(x) dx$ má význam, nemění-li $f(x)$ znaménko od určité hodnoty x , stává-li se $f(x)$ pro $x \rightarrow \infty$ nekonečně malou řadu většího než 1, t. j. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \cdot f(x) = k$ pro $n > 1$. Integrál je nekonečný, existuje-li k pro

$n \leq 1$. Mění-li $f(x)$ znaménko jako na př. $\frac{\sin x}{x}$ pro hodnoty $x = k\pi$,

může integrál existovati i pro $n = 1$ jako zde. Interval se rozdělí a položíme $u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}$. Pro existenci $\int_a^\infty$ stačí, když $|u_{k+1}| < |u_k|$ a střídají-li u_k

znaménka. Neexistuje však $\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$.

$\int_a^\infty f(x) dx$ také existuje, když $|f(x)| < \varphi(x)$, kde $\varphi(x)$ je kladná pro $x > a$, a má-li význam integrál $\int_a^\infty \varphi(x) dx$, neboť $\int_a^\infty f(x) dx < \int_a^\infty \varphi(x) dx$.

Na př.
$$\int_1^\infty e^{-x^2} dx < \int_1^\infty x e^{-x^2} dx = \left[\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_1^\infty = \frac{1}{2e}.$$

Příklady

897. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x^2+1)}}$ existuje, neboť

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^n f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ pro } n = \frac{2}{3} < 1.$$

898. $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$. Integrovaná funkce stává se nekonečnou pro $p < 1$ v mezi 0, pro $q < 1$ v mezi 1. Pro první případ je podmínka existence integrálu, aby $x^{n+p-1}(1-x)^{q-1}$ měla konečnou limitu pro $n < 1$. Zřejmě musí $n + p - 1 > 0$, $p > 1 - n$, $p > 0$. Podobně najdeme i $q > 0$.

899. $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$. Když P i Q jsou celistvé racionální funkce, stává se zlomek nekonečný pro některý kořen jmenovatele nejméně ve stupni prvé. Nesmí mít tudíž $Q(x)$ kořeny v intervalu (a, b) .

900. $\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \frac{P(x)}{Q(x)} = k$ je konečná pro $n > 1$, tedy aspoň

pro $n = 2$, je-li stupeň jmenovatele aspoň o 2 větší nežli stupeň čitatele.

901. $\int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx$. Pro $x \rightarrow \infty$ stává se $x^{m-1} e^{-x}$ nulou řádu vyššího než jakékoliv číslo. Zbývá tedy vyšetřiti mez 0. Aby $\lim_{x \rightarrow 0} x^n x^{m-1} e^{-x} = k$, musí $n + m - 1 > 0$, tedy $m > 1 - n$, a pro $n < 1$ musí $m > 0$.

Užití věty o střední hodnotě pro integrály nevlastní

902. Frullaniový integrál. Má-li $\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ význam pro $\varepsilon > 0$, lze

počítati pro $a > 0, b > 0$, integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \text{ a rozkladem}$$

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(bx)}{x} dx = \\ &= \int_{a\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{b\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Dosadili jsme za $ax = x'$, resp. $bx = x'$ a čárku pak vynechali. Podle věty o střední hodnotě platí

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx = f(c\varepsilon) \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{dx}{x} = f(c\varepsilon) \lg \frac{b}{a},$$

kde c je vhodné číslo v intervalu (a, b) . A tak pro $\lim \varepsilon = 0$ máme

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \lg \frac{b}{a}. \quad [f(x) \text{ musí být spojitá.}]$$

Na př.

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx = \lg \frac{\beta}{\alpha}.$$

903. Jiný Frullaniův integrál je $\int_0^{\infty} \frac{\varphi(ax) - \varphi(bx)}{x^2} dx$. Dá se

rozložit na $\int_0^{\infty} \frac{\varphi(ax)}{x^2} dx - \int_0^{\infty} \frac{\varphi(bx)}{x^2} dx$. Položíme-li $ax = x'$

a čárku potom vynecháme, dostaneme $(a - b) \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx$.

Derivace určitých integrálů podle parametru

$\int_a^b f(x, \alpha) dx = F(\alpha)$ jest funkcí parametru α . Nezávisí-li meze na α , má tato $F(\alpha)$ derivaci podle α v bodě $\alpha = \alpha_0$.

$$\frac{d}{d\alpha} F(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx,$$

jestliže $f'_\alpha(x, \alpha)$ je spojitou funkcí proměnných x, α v uvažovaných intervalech pro $x \in (a, b)$ i $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$.

Závisí-li i meze $a(\alpha), b(\alpha)$ na parametru, jest

$$\frac{d}{d\alpha} F(\alpha) = \frac{db}{d\alpha} f(b, \alpha) - \frac{da}{d\alpha} f(a, \alpha) + \int_a^b \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx.$$

Je-li jedna mez nekonečná (na př. b), přistupuje podmínka, že

$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_B^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx$ konverguje k 0 stejnoměrně pro α v uvažovaném inter-

valu (α_1, α_2) . (V příkladech dále uvedených je všude derivace za integračním znamením dovolena.)

904. Vypočísti $\int_0^x \frac{dx}{(x^2 + a)^n} \cdot \int_0^x \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a}}.$

Derivujeme-li podle parametru a $(n - 1)$ -krát, máme

$$(-1)^{n-1} (n-1)! \int_0^x \frac{dx}{(x^2 + a)^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a}} \right).$$

(Viz P. 508.)

905. Derivujte n -krát podle m : $\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ pro $m > -1$!

Vyjde $\int_0^1 x^m (\lg x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.$ (Je spojitý pro $m > -1$.)

[Totéž plyne z $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$ (viz př. 849), položíme-li $x =$
 $= e^{-\frac{t}{m+1}}.$ Pak jest

$$\int_0^1 x^m (\lg x)^n dx = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.]$$

(Viz př. 854.)

906. $\int_b^\infty \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{2}\pi.$ Derivujte n -krát podle a !

$$\begin{aligned} (-1)^n n! \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}} &= \frac{1}{2}\pi \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(-\frac{2n-1}{2}\right) a^{-\frac{1}{2}-n} = \\ &= \frac{1}{2}\pi \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{a^n \sqrt{a} 2^n}; \end{aligned}$$

odtud $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n! a^n \sqrt{a}} \frac{1}{2}\pi.$

$$907. \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}. \quad (\text{Viz př. 840.})$$

Odvoditi $I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2}$ derivacemi.

$$-\frac{dI}{da} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2 x \, dx}{j^2} = \frac{\pi}{4a^3 b}, \quad -\frac{dI}{db} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{j^2} = \frac{\pi}{4ab^3}.$$

Sečtením dostaneme $I_2 = \frac{\pi}{4ab} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$

$$908. \text{ Vypočísti } \int_0^{\infty} x^n e^{-kx} \, dx \text{ z integrálu } \int_0^{\infty} e^{-kx} \, dx = \frac{1}{k}.$$

Po n -násobné derivaci druhého integrálu jest

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial k^n} (e^{-kx}) \, dx = \int_0^{\infty} (-1)^n x^n e^{-kx} \, dx = (-1)^n \frac{n!}{k^{n+1}},$$

takže $I = \frac{n!}{k^{n+1}}. \quad (\text{Pro } n > 0.)$

$x^n e^{-kx}$ se pro $\lim x \rightarrow \infty$ stává 0 řádu vyššího než libovolné číslo.

$$909. \text{ Vypočísti } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n} \text{ derivováním, je-li } q - \frac{1}{4}p^2 > 0.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctg \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}.$$

(viz př. P. str. 77). Z toho

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{2\pi}{\sqrt{4q - p^2}} \text{ a po } (n-1) \text{ derivacích dle } q$$

$$\begin{aligned}
 (-1)^{n-1} (n-1)! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n} &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial q^{n-1}} \left(\frac{\pi}{\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}} \right) = \\
 &= \pi (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2^{n-1} (q - \frac{1}{4}p^2)^{n+\frac{1}{2}}}; \text{ (viz př. 906), tudíž} \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n} &= \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2^{n-1} (n-1)!} \frac{\pi}{(q - \frac{1}{4}p^2)^n \sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}}.
 \end{aligned}$$

910. Totéž lze odvoditi z redukčního vzorce v příkladu 507P.

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)(q - \frac{1}{4}p^2)} \left[(2n-3) I_{n-1} + \frac{x + \frac{1}{2}p}{(x^2 + px + q)^{n-1}} \right]$$

pro integrál neomezený. Dosadíme-li meze $-\infty$ a ∞ , zbývá na pravé straně v závorce jen prvý člen. Označíme-li omezené integrály L_n , bude tedy

$$\begin{aligned}
 L_n &= \frac{2n-3}{2(n-1)(q - \frac{1}{4}p^2)} L_{n-1} = \frac{(2n-3)(2n-5)}{2^2(n-1)(n-2)d^2} L_{n-2} = \\
 &= \dots = \frac{(2n-3)(2n-5) \dots 3 \cdot 1}{2^{n-1}(n-1)! d^n} L_1, \text{ kde } L_1 = \frac{\pi}{\sqrt{d}}.
 \end{aligned}$$

A tak máme týž výsledek.

911. Derivujte podle parametru a $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2 + b^2}$
(viz př. P. 465, 586) pro $a > 0$.

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial I}{\partial a} &= \int_0^{\infty} x e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}. \\
 \frac{\partial^2 I}{\partial a^2} &= \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{2a(a^2 - 3b^2)}{(a^2 + b^2)^3}.
 \end{aligned}$$

912. Derivací odvoditi integrál $\int_0^1 \frac{x^m - 1}{\lg x} dx = I$.

$$\frac{\partial I}{\partial m} = \int_0^1 \frac{x^m \lg x}{\lg x} dx = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1} \right]_0^1 = \frac{1}{m+1}.$$

Naopak tedy $I = \int \frac{1}{m+1} dm = \lg(m+1) + k$.

Avšak pro $m = 0$, jest $I = 0 = \lg(1) + k$, tedy $k = 0$.

913. Podobně odvoďte ze známého integrálu $I = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx$.

Pro $a > 0$ známe $\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2 + b^2} = \frac{\partial I}{\partial b},$

tudíž hledaný $I = \int \frac{a}{a^2 + b^2} db = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + k.$

Avšak pro $b = 0$ jest $I = 0 = \operatorname{arctg} 0 + k$, tedy $k = 0$.

Zvláště pro $a = 0$ dostáváme integrál

914. $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx = \frac{1}{2}\pi \operatorname{sign} b$. Na hodnotě b tento integrál nezávisí,

tedy i $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2}\pi$, (integrál Dirichletův).

Určité integrály nekonečných řad

Řadu stejnoměrně konvergentní $s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots$ lze integrovati člen za členem, takže platí vztah

$$S(x) = \int_a^b u_1 dx + \int_a^b u_2 dx + \dots = \int_a^b s(x) dx.$$

Při vyšetřování podmínek integrace pro interval nekonečný používáme na př. substituce $y = \frac{1}{x}$.

915. Vypočísti $\int_0^1 \frac{\lg x}{1-x} dx$ řadou.

$$\frac{\lg x}{1-x} = \lg x + x \lg x + x^2 \lg x + \dots \text{ Integrál obecného členu}$$

$$\int_0^1 x^{k-1} \lg x dx = \left[\frac{x^k \lg x}{k} \right]_1^0 - \frac{1}{k} \int_0^1 x^{k-1} dx = -\frac{1}{k^2}.$$

Řada je stejnoměrně konvergentní v mezích $(0, 1)$ kromě prvního členu, jehož integrál $x \lg x - x$ však vymizí.

$$\text{Jest tedy } \int_0^1 \frac{\lg x}{1-x} dx = -\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) = -\frac{\pi^2}{6}.$$

916. Integrací řady vypočísti $\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$ pro $a > 0$.

$$e^{-ax} \frac{\sin x}{x} = e^{-ax} \left(\frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right).$$

$$\text{Integrací } I = \frac{1}{a} - \frac{1}{3a^3} + \frac{1}{5a^5} - \dots = \arctg \frac{1}{a}$$

pro $a > 1$, neboť pro $a < 1$ jest řada I divergentní.

917. Vypočísti $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1}$.

$$\frac{x^2}{e^x - 1} = \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}} = x^2 (e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots).$$

Integrál jednotlivého obecného členu řady jest

$$\int_0^\infty x^2 e^{-kx} dx = \frac{2}{k^3}, \text{ neboť integrací po částech}$$

$$\begin{aligned}
 \int x^2 e^{-kx} dx &= -\frac{1}{k} e^{-kx} x^2 + \frac{2}{k} \int x e^{-kx} dx = \\
 &= -\frac{x^2 e^{-kx}}{k} + \frac{2}{k} \left(-\frac{e^{-kx}}{k} x + \frac{1}{k} \int e^{-kx} dx \right) = \\
 &= -\frac{x e^{-kx}}{k^2} (kx + 2) - \frac{2}{k^3} e^{-kx} \quad (\text{viz př. 908}).
 \end{aligned}$$



Hledaný integrál $I = 2 \left[\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots \text{in inf.} \right]$.

Řady Fourierovy I

Dirichlet dokázal, že funkci $f(x)$ lze rozvinouti v goniometrickou řadu Fourierovu v intervalu $-c < x < c$, je-li jednoznačná, konečná, s konečným počtem extrémů a bodů, kde smí být přetržitá. Tomu hovoří většinou obvyklé funkce v praxi. Obecně v intervalu $-\pi < x < \pi$ platí rozvoj

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots + \\
 &\quad + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots,
 \end{aligned}$$

kde
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

V intervalu $\alpha < x < \alpha + 2\pi$ jsou koeficienty dány týmiž integrály s mezemi $\alpha, \alpha + 2\pi$. V intervalu $-c < x < c$ platí rozvoj podobný

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} a_k \cos k \frac{\pi x}{c} + \sum_1^{\infty} b_k \sin k \frac{\pi x}{c}, \quad \text{v němž } a_0 = \frac{1}{c} \int_{-c}^c f(x) \, dx, \\
 a_k &= \frac{1}{c} \int_{-c}^c f(x) \cos k \frac{\pi x}{c} \, dx, \quad b_k = \frac{1}{c} \int_{-c}^c f(x) \sin k \frac{\pi x}{c} \, dx.
 \end{aligned}$$

Řady Fourierovy jsou stejnoměrně konvergentní. Lze je derivovati a integrovati. Pro funkce sudé $f(-x) = f(x)$ obsahují pouze kosiny, liché funkce jen siny.

Příklady

- 918.** Vyjádřiti F. řadou funkcí $y = \frac{1}{2}x$ v intervalu $(-\pi, +\pi)$ a $(-c, +c)$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}x \, dx = 0; \text{ funkce je lichá, kdy } a_k = 0.$$

$$\pi b_k = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \, dx = \left[-x \frac{\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2} \right]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{2\pi}{k} \text{ pro } k \text{ lichá,}$$

pro sudá k jest hodnota $\pi b_k = -\frac{2\pi}{k}$. Jest tedy v intervalu

$$(-\pi, +\pi) \quad \frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots$$

Pro kraje intervalu $(\pm \pi)$ dává řada 0, t. j. skutečně $\frac{1}{2}(\pi + (-\pi))$. V intervalu $(-c, +c)$ podobně

$$\frac{1}{2}x = \frac{c}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{c} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{c} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{c} - \dots \right).$$

- 919.** Rozvésti ve F. ř. $y = \frac{1}{4}x^2$ v týchž intervalech. Výsledek dostaneme integrací řady v předchozím příkladě:

$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}a_0 - \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{9} \cos 3x + \dots$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4}x^2 \, dx = \frac{x^3}{\pi 12} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2 \frac{\pi^2}{12}, \text{ takže } \frac{1}{2}a_0 = \frac{\pi^2}{12}.$$

Tutéž řadu ovšem dostaneme i obecným postupem.

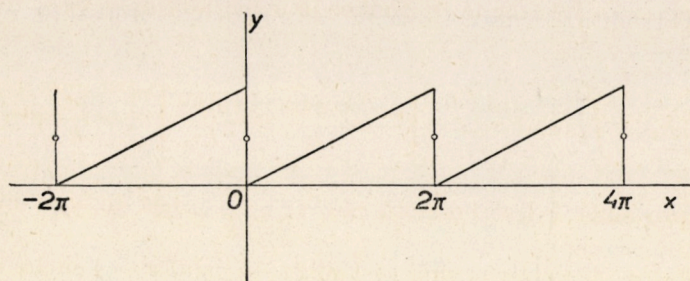
- 920.** Totéž pro funkci $y = \frac{1}{2}x$ v intervalu $(0, 2\pi)$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}x \, dx = \pi, \quad a_k = 0, \text{ protože funkce jest lichá.}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}x \sin kx \, dx = - \left[\frac{x \cos kx}{2k\pi} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi} \cos kx \, dx = \\ &= -\frac{1}{k}. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi - \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} - \dots$$

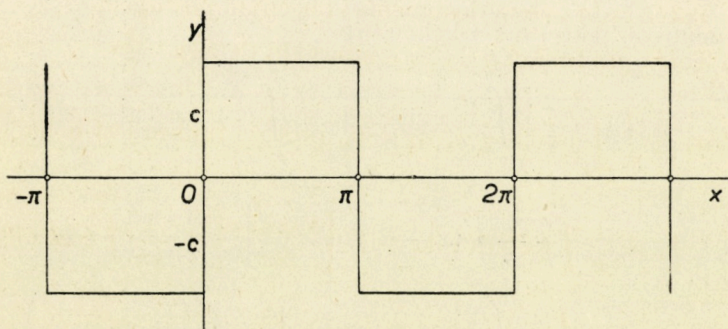
Čára vyjádřená řadou se skládá z úseků rovnoběžek s přímkou $y = \frac{1}{2}x$ a z bodů $(2k\pi, \frac{1}{2}\pi)$ (obr. 5).



Obr. 5.

921. Totéž pro funkci $y = -c$ v intervalu $(-\pi, 0)$, $y = c$ v intervalu $(0, \pi)$ pro celý interval $(-\pi, +\pi)$. Funkce je lichá $f(-x) = -f(x)$, všechna $a_k = 0$.

$$\begin{aligned} \pi b_k &= \int_{-\pi}^0 -c \sin kx \, dx + \int_0^{\pi} c \sin kx \, dx = \int_0^{\pi} 2c \sin kx \, dx = \\ &= -\frac{2c}{k} \cos kx \Big|_0^{\pi} = (-1)^{k+1} \frac{2c}{k} + \frac{2c}{k} = \\ &= \frac{2c}{k} [1 - (-1)^k], \end{aligned}$$



Obr. 6.

$$b_k = \frac{4c}{k\pi} \text{ pro } k \text{ liché, } 0 \text{ pro } k \text{ sudé. Celkem}$$

$$y = \frac{4c}{\pi} (\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots) \quad (\text{Obr. 6}).$$

922. Odvoditi F. ř. pro $y = x^3$. Funkce je lichá. Interval $(0, \pi)$.

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^3 \sin kx \, dx. \text{ Podle př. 848 jest}$$

$$b_k = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3 \cos kx}{k} - 3 \frac{x^2}{k^2} \sin kx - \frac{6}{k^3} x \cos kx + \frac{6}{k^4} \sin kx \right]_0^{\pi} =$$

$$= (-1)^k \left[\frac{12}{k^3} - \frac{2\pi^2}{k} \right],$$

$$x^3 = \sum_1^{\infty} (-1)^k \left[\frac{12}{k^3} - \frac{2\pi^2}{k} \right] \sin kx, \text{ bylo dál}$$

$$x = \sum 2(-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k}.$$

$$\text{Z toho na př. } \frac{1}{1^2} (\pi^3 x - x^3) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} \sin kx.$$

923. Funkci $y = \frac{v}{p} x$ v intervalu $(0, p)$; $y = v$ pro interval $(p, \pi - p)$;

$y = -\frac{v}{p} (x - \pi)$ v intervalu $(\pi - p, \pi)$, rozvinouti v řadu sinovou jako funkci lichou.

$$b_k = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^p \frac{v}{p} x \sin kx \, dx + \int_p^{\pi-p} v \sin kx \, dx - \right.$$

$$\left. - \frac{v}{p} \int_{\pi-p}^{\pi} (x - \pi) \sin kx \, dx \right] = \frac{4v}{\pi p} \frac{\sin kp}{k^2} \text{ pro lichá } k.$$

$$y = \frac{4v}{\pi p} \left(\frac{1}{1^2} \sin p \sin x + \frac{1}{3^2} \sin 3p \cdot \sin 3x + \dots \right).$$

924. Vyjádřiti $f(x) = \frac{1}{8}\pi(\pi - 2x)$ řadou kosinovou v intervalu $(0, \pi)$.

$$\begin{aligned}\pi a_k &= 2 \int_0^\pi \left(\frac{1}{8}\pi^2 - \frac{1}{4}x\right) \cos kx \, dx = 2 \left[\frac{1}{k} \sin kx (-) \right]_0^\pi + \\ &+ \frac{\pi}{2k} \int_0^\pi \sin kx \, dx = -\frac{\pi}{2k^2} [(-1)^k - 1].\end{aligned}$$

Pro k sudé $a_k = 0$, pro k liché $a_k = \frac{1}{k^2}$.

$$f(x) = \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots$$

925. Rozvedte $f(x) = \frac{1}{8}\pi x(\pi - x)$ v řadu sinovou pro interval $(0, \pi)$.

$$\frac{1}{2}\pi b_k = \int_0^\pi \frac{1}{8}\pi (\pi x - x^2) \sin kx \, dx = \frac{1}{8}\pi I.$$

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{k} (\pi x - x^2) \cos kx \Big|_0^\pi + \frac{1}{k} \int_0^\pi (\pi - 2x) \cos kx \, dx = \\ &= 0 + \frac{1}{k^2} \sin kx (\pi - 2x) \Big|_0^\pi + \frac{1 \cdot 2}{k^2} \int_0^\pi \sin kx \, dx = \\ &= -\frac{2}{k^3} [(-1)^k - 1].\end{aligned}$$

Pro k liché $I = \frac{4}{k^3}$, pro k sudé $I = 0$.

$$\frac{1}{2}\pi b_k = \frac{1}{8}\pi \frac{4}{k^3}, \quad b_k = \frac{1}{k^3}, \quad f(x) = \sum_0^\infty \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}.$$

926. Funkci $f(x) = \frac{1}{96}\pi(\pi - 2x)(\pi^2 + 2\pi x - 2x^2)$ rozvésti v řadu kosinovou v intervalu $(0, \pi)$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\pi a_k &= \int_0^\pi f(x) \cos kx \, dx = \\ &= \frac{1}{k} [f(x) \sin kx]_0^\pi - \frac{1}{k} \int_0^\pi f'(x) \sin kx \, dx =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k^2} [f'(x) \cos kx]_0^\pi - \frac{1}{k^2} \int_0^\pi f''(x) \cos kx \, dx = \dots = \\
&= -\frac{1}{k^4} [f'''(x) \cos kx]_0^\pi = \frac{\pi}{4k^4} (1 - \cos k\pi) = \\
&= \frac{\pi}{4k^4} [1 - (-1)^k] = \frac{\pi}{2k^4} \text{ pro } k \text{ liché, } 0 \text{ pro } k \text{ sudé. } a_k = \frac{1}{k^4}. \\
f(x) &= \cos x + \frac{\cos 3x}{3^4} + \frac{\cos 5x}{5^4} + \dots
\end{aligned}$$

927. Rozvésti v kosinovou řadu $f(x) = e^{sx}$ pro x v intervalu $(0, \pi)$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty a_k \cos kx. \quad \frac{1}{2}\pi a_k = \int_0^\pi e^{sx} \cos kx \, dx \quad (\text{viz př. P. 465}) \\
\frac{1}{2}\pi a_k &= \frac{e^{sx}(k \sin kx + s \cos kx)}{s^2 + k^2} \Big|_0^\pi = \frac{e^{\pi s} s(-1)^k - s}{s^2 + k^2} = \\
&= \frac{s(e^{\pi s} - 1)}{s^2 + k^2} \text{ pro } k \text{ sudé,} \quad -\frac{s(e^{\pi s} + 1)}{s^2 + k^2} \text{ pro } k \text{ liché.} \\
f(x) &= \frac{2s}{\pi} (e^{\pi s} - 1) \left[\frac{1}{2s^2} + \frac{\cos 2x}{s^2 + 4} + \dots \right] - \\
&\quad - \frac{2s}{\pi} (e^{\pi s} + 1) \left[\frac{\cos x}{s^2 + 1^2} + \frac{\cos 3x}{s^2 + 3^2} + \dots \right].
\end{aligned}$$

928. Pro e^{-sx} jest analogicky

$$\pi a_k' = \frac{(-1)^k(-s)}{k^2 + s^2} (-e^{s\pi} + e^{-s\pi}) = \frac{(-1)^k s}{k^2 + s^2} (e^{s\pi} - e^{-s\pi}).$$

Pomocí těchto výsledků lze vyjádřit na př.

$$F(x) = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{e^{mx} - e^{-mx}}$$

$$\text{řadou } F(x) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2m} - \frac{m}{1^2 + m^2} \cos x + \frac{m}{2^2 + m^2} \cos 2x - \dots \right].$$

Další rozvoje s použitím funkcí komplexní proměnné viz v dodatku.

Methoda integrace podle parametru a záměny pořadu integračního

Pro spojité funkce proměnných x a parametru t platí

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_a^b f(x, t) dx \right] dt = \int_a^b \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dt \right] dx,$$

t. j. funkci danou integrálem $\int_a^b f(x, t) dx$ můžeme integrovati podle parametru tak, že integrujeme podle parametru funkci za integračním znamením. Integrály pak nazýváme dvojnásobnými. Za jistých podmínek platí uvedená věta i pro meze nekonečné.

Na př. integrujme podle parametru t integrál

$$929. \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t+1} \text{ v mezích } (\alpha, \beta). \text{ Dostaneme}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_0^1 x^t dx \right] dt = \int_0^1 \left[\int_{\alpha}^{\beta} x^t dt \right] dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{t+1} = \lg \frac{\beta+1}{\alpha+1}.$$

$$\text{Tedy} \quad \int_0^1 \left[\frac{x^t}{\lg t} \right]_{\alpha}^{\beta} dx = \int_0^1 \frac{x^{\beta} - x^{\alpha}}{\lg x} dx = \lg \frac{\beta+1}{\alpha+1}.$$

Tím jsme dostali nový integrál pro $\alpha+1$ a $\beta+1 > 0$. Integraci podle parametru za integračním znamením dospíváme tedy nových integrálů. Často se tam parametr úmyslně zavádí, jako na př. při výpočtu integrálu Laplaceova

$$930. \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx, \text{ kam místo } x \text{ dosadím } tx.$$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-t^2 x^2} t dx. \text{ Násobíme obě strany } e^{-t^2}, \text{ máme}$$

$$I e^{-t^2} = \int_0^{\infty} e^{-(1+x^2)t^2} t dx. \text{ Nyní integrujeme podle } t \text{ v intervalu } (0, \infty), \text{ vpravo za integračním znamením.}$$

$$I \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = I^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(1+x^2)t^2} t dt dx. \text{ Substituce } t^2 = z,$$

$$2t \, dt = dz \text{ dává } \int_0^{\infty} e^{-(1+x^2)t^2} t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(1+x^2)z} dz = \\ = \left[\frac{e^{-(1+x^2)z}}{-2(1+x^2)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2(1+x^2)}.$$

$$\text{Tedy } I^2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{2(1+x^2)} = \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \right]_0^{\infty} = \frac{1}{4}\pi. \quad I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Odtud plynou hned integrály

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}; \quad \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Příklady

Integrací podle parametru odvoditi nové integrály ze známých:

$$931. \int_0^{\infty} e^{-tx} dx = \frac{1}{t}. \quad \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{-tx}}{-x} \right]_{\alpha}^{\beta} dx = \lg \beta - \lg \alpha,$$

$$\text{neboli } \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx = \lg \frac{\beta}{\alpha} \quad (\text{viz př. 902}).$$

$$932. \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}. \quad \text{Integrováním } \int_{\alpha}^{\beta} \text{ podle } b \text{ máme}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{y \, dy}{a^2 + y^2} = \left[\frac{1}{2} \lg(a^2 + y^2) \right]_{\alpha}^{\beta} = \\ = \frac{1}{2} \lg \frac{a^2 + \beta^2}{a^2 + \alpha^2}.$$

$$933. \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2 + b^2}. \quad \text{Integrováním podle } b \text{ dostaneme}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin \beta x - \sin \alpha x}{x} dx = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{a} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{a} = \\ = \operatorname{arctg} \frac{a(\beta - \alpha)}{a^2 + \alpha\beta}.$$

Jest totiž $\operatorname{tg}[\operatorname{arctg} p - \operatorname{arctg} q] = \frac{p - q}{1 + pq}.$

934. $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$ Integrovaním podle a jest

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{x} \sin bx \, dx = \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \text{ a pro } \lim a \rightarrow \infty,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = \frac{1}{2}\pi \operatorname{sign} b \text{ (viz př. 914).}$$

935. $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2 + b^2}.$ Integrací podle a jest

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{x} \cos bx \, dx = \frac{1}{2} \lg(a^2 + b^2), \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{x} dx \text{ neexistuje.}$$

936. Z integrálu $\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$ odvoditi další derivováním podle α .

$$-2\alpha \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^2} \text{ a tedy } \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3}.$$

Odtud další derivací podle α plyne $\int_0^{\infty} x^4 e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{1 \cdot 3\sqrt{\pi}}{2^3 \alpha^5}$

$$\text{atd. až obecně } \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^{n+1} \alpha^{2n+1}} \sqrt{\pi}.$$

$$\begin{aligned} \text{Odtud pak lze odvoditi } \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos 2bx \, dx &= \\ &= \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx \left[1 - \frac{(2bx)^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{(2bx)^{2n}}{2n!} + \dots \right] = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx - \int_0^{\infty} \frac{4b^2 x^2}{2!} e^{-a^2 x^2} dx + \dots + \\ &+ (-1)^n \int_0^{\infty} \frac{(2b)^n}{2n!} x^{2n} e^{-a^2 x^2} dx + \dots \end{aligned}$$

Dosadíme-li sem právě vypočtené integrály, dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} \cos 2bx \, dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \left[1 - \frac{1}{2!} \frac{b}{\alpha^2} + \frac{1}{3!} \frac{b^4}{\alpha^4} - \dots \right] = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\frac{b^2}{\alpha^2}}. \end{aligned}$$

937. Vypočísti pomocí $\int_0^{\infty} e^{-xt^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$ (viz 930)

t. zv. integrál *Fresnelův* $\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = I.$

Za $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ můžeme klásti právě $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-xt^2} dt$, takže

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \sin x e^{-xt^2} dt \right] dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \sin x e^{-xt^2} dx \right] dt$$

po záměně pořadu integračního, která je tu dovolena. Bude

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2 x} \sin x \, dx = \frac{1}{t^4 + 1} \quad (\text{viz } 587, 738),$$

proto
$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^4 + 1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

938. Podobně lze odvoditi druhý integrál *Fresnelův*

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\pi}. \quad \text{Záměnou } x = y^2 \text{ se integrály}$$

$$\text{změní ve tvar } \int_0^{\infty} \sin(y^2) \, dy = \int_0^{\infty} \cos(y^2) \, dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\pi}.$$

939. Podobným postupem odvoditi

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx \quad \text{z integrálu} \quad \frac{1}{x} = \int_0^{\infty} e^{-xt} \, dt.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-xt} \sin x \, dt \right] dx = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-xt} \sin x \, dx \right] dt = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\operatorname{arctg} t]_0^{\infty} = \frac{1}{2}\pi \quad (\text{viz př. 914, 934}). \end{aligned}$$

940. Pomocí $\int \cot g y \, dy = \lg \sin y$ odvoditi $I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x \lg \sin x \, dx$.

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\int_x^{\frac{1}{2}\pi} \sin x \cot g y \, dy \right] dx = - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cot g y \left[\int_0^y \sin x \, dx \right] dy = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\operatorname{tg} \frac{1}{2}y - \sin y) \, dy = [\cos y - \lg \cos^2 \frac{1}{2}y]_0^{\frac{1}{2}\pi} = -1 + \lg 2. \end{aligned}$$

Přímý výpočet omezených integrálů z definice

$$\text{Lze počítati} \quad \int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

podle str. P. 91 rozdělíme-li interval (a, b) na n částí Δx_k a uvnitř každého Δx_k vybereme libovolné ξ_k . Pak učiníme $\lim n \rightarrow \infty, \lim \Delta x_k = 0$.

941. Na př. $\int_0^x z^2 dz$. Učinme $\Delta z = \frac{x}{n}$, $\zeta = k \frac{x}{n}$,

$$f(\zeta) = \zeta^2 = k^2 \frac{x^2}{n^2}, \text{ takže pro}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k^2 \frac{x^3}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3} x^3.$$

Totéž bychom dostali přímou integrací.

942. Podobně pro $f(x) = e^x$ by plynulo z definice

$$\begin{aligned} \int_0^x e^x dx &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x (e^{\Delta x} + e^{2\Delta x} + \dots + e^{n\Delta x}) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \frac{e^x - 1}{e^{\Delta x} - 1} = (e^x - 1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} = e^x - 1. \end{aligned}$$

943. Pro Dirichletův integrál $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ lze použití známé řady

$$\sin \Delta x + \frac{1}{2} \sin 2\Delta x + \dots = \frac{\pi - \Delta x}{2}.$$

Odtud
$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x \frac{\pi - \Delta x}{2\Delta x} = \frac{1}{2} \pi \text{ (viz př. 939).}$$

944. a) Pro $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \lg \sin x dx$ použije se známé věty pro $\Delta x = \frac{\pi}{2n}$

$$\sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \sin \frac{3\pi}{2n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

$$I = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \lg \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \lg \frac{n^{\frac{1}{2n}}}{2^{1-\frac{1}{n}}} = -\frac{1}{2} \pi \lg 2.$$

b) Zřejmě

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \lg \sin x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \pi \lg \left(\sin \frac{\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lg \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \pi \lim \left(\frac{1}{n} \lg n - \frac{n-1}{n} \lg 2 \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \pi \lg 2.\end{aligned}$$

Integrály Eulerovy B, Γ

Jsou to nevlastní integrály: $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$, t. zv. bétafunkce, a integrál druhého druhu neboli gammafunkce $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$. Význam mají pro $p, q, n > 0$. O těchto funkcích platí mnoho vět. Základní jsou

$$B(p, q) = B(q, p) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

$\Gamma(n) = (n-1) \Gamma(n-1)$, pro celistvé n platí $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} = 1,7725,$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}, \text{ atd.}$$

$$\Gamma(n) \Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin \pi n}. \quad \Gamma(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N! N^n}{n(n+1) \dots (n+N)}.$$

Záměnou ax místo x dostáváme obecněji

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(n)}{a^n} \text{ pro } a, n > 0.$$

Položíme-li $e^{-x} = y$, $x = \lg \frac{1}{y}$, dostaneme jiný tvar

$$\Gamma(n) = \int_0^1 \left(\lg \frac{1}{y} \right)^{n-1} dy.$$

Jiná definice jest:

$$\Gamma^{-1}(z) = ze^{\gamma z} \prod_1^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}} \right];$$

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} - \lg m \right]. \quad (A)$$

Dále platí vztah Gaussův

$$\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right) \dots \Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} n^{\frac{1}{2}-nz} \Gamma(nz). \quad (B)$$

Mnohé omezené integrály lze výhodně vyjádřiti pomocí funkcí gamma nebo béta substitucemi. Dosadíme-li $x = \sin^2 z$ do integrálu pro B -funkci, dostaneme

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2p-1} z \cdot \cos^{2q-1} z \cdot dz =$$

$$= B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Píšeme-li $2p-1 = m$, $2q-1 = n$, $p = \frac{1}{2}(m+1)$, $q = \frac{1}{2}(n+1)$,

$$\text{jest} \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(m+1)] \cdot \Gamma[\frac{1}{2}(n+1)]}{\Gamma[\frac{1}{2}(m+n+2)]}.$$

Protože musí $p, q > 0$, tedy musí býti $m, n > -1$.

Odtud plynou všeobecné vzorce

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^n x dx = \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(n+1)] \Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{1}{2}n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(n+1)]}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)},$$

které dosud jsme měli jen pro $n > 0$ celistvé (př. 471).

Položíme-li ve výrazu pro $B(p, q)$ číslo $p = q$, dostáváme

$$\frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin z \cos z)^{2p-1} dz = \frac{1}{2^{2p-2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2p-1} 2z dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{2p-1}} \int_0^{\pi} \sin^{2p-1} u \, du = \frac{1}{2^{2p-2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2p-1} x \, dx = \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p + \frac{1}{2})}.
\end{aligned}$$

Dostali jsme t. zv. vzorec Legendreův, který se píše

$$\Gamma(p) \Gamma(p + \tfrac{1}{2}) = 2^{1-2p} \sqrt{\pi} \Gamma(2p) \quad (\text{viz vztah Gaussův}).$$

Eliptický integrál
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})},$$

A podle vzorce Legendreova $\Gamma(\frac{1}{4}) \Gamma(\frac{3}{4}) = 2^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2}),$

takže náš integrál je $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \Gamma^2(\frac{1}{4}) \quad (\text{viz př. 877}).$

Odtud
$$\Gamma(\tfrac{1}{4}) = 2 \sqrt{\sqrt{\pi} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 3,625\dots$$

a z Legendreova vzorce $\Gamma(\frac{3}{4}) = \pi \sqrt{2} : \Gamma(\frac{1}{4}) = 1,225\dots$

Příklady

945. Vypočísti pomocí gama funkce integrál $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{tg}^n x \, dx = I.$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x \cos^{-n} x \, dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right), \text{ pro } |n| < 1$$

a $\mu = \frac{1+n}{2}$ je $\Gamma(\mu) \Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{\sin \mu \pi},$ takže $I = \frac{\pi}{2 \cos \frac{1}{2} n \pi}.$

946. Vypočísti $\int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} \, dx$ pomocí substituce $x^2 = z.$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} z^{\frac{1}{2}(n-1)} e^{-z} \, dz = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ pro } n+1 > 0.$$

Pro $n = 0$ máme znovu integrál Laplaceův

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad (\text{viz př. 930}).$$

947. Vypočísti $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[r]{1-x^n}} = \int_0^1 (1-x^n)^{-\frac{1}{r}} dx. \quad (x^n = z).$

$$I = \frac{1}{n} \int_0^1 z^{\frac{1}{n}-1} (1-z)^{-\frac{1}{r}} dz = \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{r}\right).$$

948. Vypočísti podle toho $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$

$$I = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \text{ a podle vzorce dostaneme}$$

$$I = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\sqrt{2\pi}}.$$

949. Vypočísti $\int_0^1 x^{p-1} (1-x^n)^{q-1} dx$ substitucí $x^n = y$.

$$I = \frac{1}{n} \int_0^1 y^{\frac{p}{n}-1} (1-y)^{q-1} dy = \frac{1}{n} B\left(\frac{p}{n}, q\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right) \Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{n} + q\right)}. \quad \text{Odtud na př.}$$

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{4}\right)} = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{4}\right)}$$

a podle Legendreovy věty $2^{\frac{n-5}{2}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$

Podle toho
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = I_n.$$

$$I_n = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}.$$

Dále jest
$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2^{-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma^2(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{\Gamma^2(\frac{3}{4})}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\pi \sqrt{2\pi}}{\Gamma^2(\frac{1}{4})}.$$

(Viz také př. 879.)

950. Integrací per partes odvoditi redukční vzorec pro $B(p, q)$.

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-2} dx,$$

avšak $x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)$ a tedy

$$I = \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-2} dx - \frac{q-1}{p} I,$$

neboli
$$\frac{p+q-1}{p} I = \frac{q-1}{p} B(p, q-1),$$

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1).$$

951. Podobně $B(p, q) = \frac{p-1}{q} \int_0^1 x^{p-2} (1-x)^q dx$; avšak

$$(1-x)^q = (1-x)(1-x)^{q-1} = (1-x)^{q-1} - x(1-x)^{q-1},$$

tedy
$$B(p, q) = \frac{p-1}{q} B(p-1, q) - \frac{p-1}{q} B(p, q).$$

Odtud
$$B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q).$$

952. Vypočísti $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = I_a$.

$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$ a dosazením ax místo x dostaneme

$a^{n+1} \cdot I_a$, tedy $I_a = a^{-(n+1)} \Gamma(n+1)$.

953. Vypočísti $\int_0^a x^{p-1} (a-x)^{q-1} dx = I$.

Vložíme-li ax místo x , dostaneme $I = a^{p+q-1} B(p, q)$.

954. Dokázati vztah $B(p, p) = 2^{1-2p} B(p, \frac{1}{2})$.

$$B(p, p) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin z \cos z)^{2p-1} dz = \frac{1}{2^{2p-1}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin 2z)^{2p-1} d(2z) =$$

$$= \frac{1}{2^{2p-1}} \int_0^{\pi} (\sin u)^{2p-1} du = 2^{1-2p} \frac{\Gamma(p) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p + \frac{1}{2})}.$$

$$B(p, p) = \frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)} = 2^{1-2p} \frac{\Gamma(p) \sqrt{\pi}}{\Gamma(p + \frac{1}{2})} \text{ a odtud věta Legendreova.}$$

955. Vypočísti $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} dx$ pomocí béta funkce.

$$I = \int_0^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} - \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} =$$

$$= \frac{1}{4} B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} B(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) \quad (\text{viz př. 948, 949}).$$

956. Vypočísti délku lemniskaty $\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$.

$$\text{Podle př. 882 je } s = 4a \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}. \quad (2\varphi = z.)$$

$$s = 2a \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dz}{\sqrt{\cos z}} = 2a \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dz}{\sqrt{\sin z}}, \quad (\frac{1}{2}\pi - z \text{ místo } z).$$

$$s = a \sqrt{2\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \Gamma^2(\frac{1}{4}).$$

957. Vypočísti obsah plochy omezené čarou $\varrho^n = a^n \cos n\varphi$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}P &= \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \varrho^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sqrt{\cos^2 n\varphi} d\varphi = \frac{a^2}{n} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{\frac{2}{n}} y dy = \\ &= \frac{a^2}{n} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + 1\right)}, \text{ a protože} \end{aligned}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{n} + 1\right) = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right), \quad \frac{1}{4}P = a^2 \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right) : \Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

Křivka se zove sinová spirála.

958. Vypočísti obsah plochy ohraňené čarou $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$ při

parametrickém vyjádření $x = a\sqrt[m]{\cos^2 t}$, $y = b\sqrt[n]{\sin^2 t}$.

$$\begin{aligned} P &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} y dx = 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} ab \sin^{\frac{2}{n}+1} t \frac{2}{m} \cos^{\frac{2}{m}-1} t dt = \\ &= \frac{8ab}{m} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{\frac{2}{n}+1} t \cos^{\frac{2}{m}-1} t dt = \frac{8ab}{m} \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)} = \\ &= \frac{4ab}{m} \frac{\frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)} = \frac{4ab}{m+n} B\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

959. Vypočísti integrály $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^m} dx$, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^n} dx$ pomocí vztahu

$$\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty z^{m-1} e^{-zx} dz \text{ dříve odvozeného.}$$

$$I_m = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^m} dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \cos x z^{m-1} e^{-zx} dz \right] dx$$

a po záměně pořadu integračního

$$I_m = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \cos x z^{m-1} e^{-zx} dx \right] dz = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{\infty} \frac{z^m}{b^2 + z^2} dz.$$

Položíce $z = \operatorname{tg} \varphi$, $dz = \frac{d\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$, dostaneme

$$I_m = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{tg}^m \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2\Gamma(m) \cos \frac{1}{2}m\pi} \text{ pro } m < 1.$$

Podobně se odvodí pro kladné $n < 2$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^n} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(n) \sin \frac{1}{2}n\pi}.$$

960. S použitím věty (B) dokázati:

$$\prod_{r=1}^8 \Gamma\left(\frac{1}{3}r\right) = \frac{640}{3^6} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Z uvedené věty plyne pro $z_1 = \frac{1}{3}$, $z_2 = 1$, $z_3 = 2$ postupně pro $n = 3$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 2\pi \cdot 3^{\frac{1}{2}-1} \Gamma(1),$$

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) = 2\pi \cdot 3^{\frac{1}{2}-3} \Gamma(3),$$

$$\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \Gamma\left(\frac{7}{3}\right) \Gamma\left(\frac{8}{3}\right) = 2\pi \cdot 3^{\frac{1}{2}-6} \Gamma(6),$$

$$\prod_1^8 \Gamma\left(\frac{1}{3}r\right) = 8\pi^3 \cdot 3^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 \cdot 2! \cdot 5! = \frac{640}{3^6} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

961. Dokázati $B(p, p) B(p + \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2^{4p-1}p} = C.$

$$\begin{aligned} C &= \frac{\Gamma(p) \Gamma(p)}{\Gamma(2p)} \frac{\Gamma(p + \frac{1}{2})^2}{2p\Gamma(2p)} = \frac{1}{2p} \left[\frac{\Gamma(p) \Gamma(p + \frac{1}{2})}{\Gamma(2p)} \right]^2 = \\ &= \frac{2^{2(1-2p)}\pi}{2p} = \frac{\pi}{2^{4p-1}p}. \end{aligned}$$

962. Dokážati $B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}} dy.$

V základním vztahu pro $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$

položme $y = \frac{1-x}{x}$, $x = \frac{1}{1+y}$, $dx = -\frac{dy}{(1+y)^2}.$

$$\begin{aligned} B(p, q) &= - \int_{\infty}^0 \left(\frac{1}{1+y} \right)^{p-1} \left(\frac{y}{1+y} \right)^{q-1} \frac{dy}{(1+y)^2} = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}} dy. \end{aligned}$$

963. Vypočísti $I = \int_{-1}^1 (1+x)^{p-1}(1-x)^{q-1} dx.$

Položíme $\frac{1-x}{1+x} = y$, $x = \frac{1-y}{1+y}$, $1+x = \frac{2}{1+y},$

$$1-x = \frac{2y}{1+y}, \quad dx = -\frac{2dy}{(1+y)^2},$$

$$\begin{aligned} I &= - \int_{\infty}^0 \left(\frac{2}{1+y} \right)^{p-1} \left(\frac{2y}{1+y} \right)^{q-1} 2 \frac{dy}{(1+y)^2} = \\ &= \int_0^{\infty} 2^{p+q-1} \frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}} dy = 2^{p+q-1} B(p, q). \end{aligned}$$

964. Vypočísti $I = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \frac{dx}{(x+p)^{a+b}}$ pro $a, b, p > 0.$

Zavedme $y = \frac{(p+1)x}{p+x}$, $x = \frac{py}{1+p-y}$, $dy = \frac{p(p+1)dx}{(p+x)^2}:$

$$y^{a-1}(1-y)^{b-1} dy = \frac{(p+1)^a p^b x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(1+x)^{a+b}} dy,$$

$$I = \frac{1}{(p+1)^a p^b} \int_0^1 y^{a-1} (1-y)^{b-1} dy = \frac{1}{(1+p)^a p^b} B(a, b).$$

$$965. \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^q dx = \left[\frac{x^p}{p} (1-x)^q \right]_0^1 + \frac{q}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-1} dx,$$

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p} B(p+1, q) \text{ a odtud pro } n \text{ celé, kladné}$$

$$\begin{aligned} B(p, n+1) &= \frac{n}{p} B(p+1, n) = \frac{n}{p} \frac{n-1}{p+1} B(p+2, n-1) = \\ &= \dots = \frac{n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{p(p+1) \dots (p+n)} B(p+n, 1). \end{aligned}$$

$$966. \text{ Ze vztahu } \frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_1^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}} \right] \text{ odvoditi}$$

$$\frac{d}{dz} \lg \Gamma(z+1) = -\gamma + \frac{z}{1(z+1)} + \frac{z}{2(z+2)} + \frac{z}{3(z+3)} + \dots,$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \lg \Gamma(z+1) = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \dots$$

$$967. \text{ Vypočísti oblouk čáry } r^m = 2^{m-1} a^m \cos m\vartheta \text{ složené z } m \text{ smyček.}$$

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'^2 + r'^2} d\vartheta, \quad r = 2^{1-\frac{1}{m}} a (\cos m\vartheta)^{\frac{1}{m}} = c (\cos m\vartheta)^{\frac{1}{m}}.$$

$$r' = -c (\cos m\vartheta)^{\frac{1}{m}-1} \sin m\vartheta,$$

$$\begin{aligned} \sqrt{r'^2 + r'^2} &= c \sqrt{\cos^{\frac{2}{m}} m\vartheta + \cos^{\frac{2}{m}-2} m\vartheta (1 - \cos^2 m\vartheta)} = \\ &= c \sqrt{\cos^{\frac{2}{m}-2} m\vartheta}. \end{aligned}$$

$$\text{Půl smyčky je tedy } am^{-1} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\tfrac{1}{2} \cos x)^{\frac{1}{m}-1} dx \text{ a celá čára je}$$

$$2m \cdot m^{-1} a I = 2a I = s, \text{ položíme-li } m\vartheta = x, \quad d\vartheta = m^{-1} dx, \text{ je}$$

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2m} + \frac{1}{2}\right)}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2m} + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-\frac{1}{m}} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)},$$

$$s = a \Gamma^2\left(\frac{1}{2m}\right) : \Gamma\left(\frac{1}{m}\right).$$

968. Substitucí $\cos\vartheta = 1 - 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$ dokázati vztah

$$I = \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{(3 - \cos\vartheta)^{\frac{1}{2}}} = \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right) : 4\sqrt{\pi}.$$

$$3 - \cos\vartheta = 2(1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi), \quad \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{d\varphi}{\cos^2 \frac{1}{2} \varphi}$$

$$\sin\vartheta = 2\sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi (1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi)}.$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \frac{1}{2} \varphi \cdot 2\sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi (1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi)}}. \quad z = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi, \quad dz = \frac{d\varphi}{2\cos^2 \frac{1}{2} \varphi}.$$

$$I = \int_0^1 \frac{dz}{z^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - z^2}}, \quad z^2 = x, \quad dz = \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}.$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{-\frac{3}{4}} (1 - x)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{a nebo} \quad I = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{2\pi}}.$$

Integrály křivočaré

Je-li $y = f(x)$ rovnice čáry mezi body A , s úsečkou $x_A = a$, a $B(x_B = b)$, rozumíme křivočarým integrálem funkce $P(x, y)$ podél oblouku AB (t. j. podél c) integrál

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \int_a^b P[x, f(x)] dx = \int_c P(x, y) dx.$$

Podobně se definuje

$$\int_{AB} Q(x, y) dy = \int_c Q(x, y) dy.$$

Lze-li oblouk c vyjádřiti parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, takže bodům A , resp. B odpovídá t_1 , resp. t_2 , jest obecně

$$\int_{c(A,B)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{t_1}^{t_2} [P(\varphi, \psi) \varphi' + Q(\varphi, \psi) \psi'] dt.$$

Obsah plochy omezené uzavřenou čarou k jest při kladném obíhání (plocha po levé ruce)

$$P = \int_k x dy = - \int_k y dx = \frac{1}{2} \int (x dy - y dx).$$

Na př. obsah elipsy $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ jest

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

Skládá-li se hranice plochy ze dvou nebo více uzavřených čar (jako mezikruží), rozumí se k všechny čáry kladně obíhané.

Pro výseč omezenou dvěma průvodiči OA , OB a obloukem AB je $\int x dy - y dx = 0$ podél přímk $OA(OB)$, jak je patrné po dosazení $y = kx$, $dy = k dx$. Je tedy výseč

$$OAB = \frac{1}{2} \int_{AB} (x dy - y dx),$$

kde se integruje pouze po oblouku AB . Píšeme-li $t = \frac{y}{x}$, jest také

$$P = \frac{1}{2} \int_{AB} x^2 dt, \quad \text{neboť} \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x dy - y dx}{x^2}.$$

Příklady

969. Stanovte hodnotu křivočarého integrálu $\int x dy - y dx$ podél čtvrtkružnice AB ; $A(1, 0)$; $B(0, 1)$, $r = 1$.

Parametrické rovnice kružnice jsou

$$x = \cos t, \quad y = \sin t; \quad dx = -\sin t dt, \quad dy = \cos t dt,$$

$$\text{takže} \quad \int_{AB} x dy - y dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{1}{2}\pi.$$

970. Vypočtete $\int y^2 dx - x^2 dy$ mezi body $A(0, 1)$, $B(1, 0)$ a) po přímce AB ; b) po čtvrtkružnici AB .

a) Z rovnice přímky $y = 1 - x$ a integrálu dostaneme

$$I = \int_0^1 (1 - x)^2 dx + x^2 dx = \int_0^1 (1 - 2x + 2x^2) dx = \frac{2}{3}.$$

b) Dosadíme $x = \cos t$, $y = \sin t$ a máme

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{2}\pi}^0 (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} [\sin(1 - \cos^2 t) + \cos(1 - \sin^2 t)] dt = \\ &= [-\cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t + \sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

971. Výseč hyperboly $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ od bodu $A(x_1, y_1)$ do bodu $B(x_2, y_2)$.

Pro hyperbolu je $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$, $dy = \frac{b}{a} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

takže pro výseč bude

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{b}{a} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \sqrt{x^2 - a^2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} ab \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{2} ab [\lg(x + \sqrt{x^2 - a^2})]_{x_1}^{x_2} = \\ &= \frac{1}{2} ab \left[\lg \left(x_2 + \frac{ay_2}{b} \right) - \lg \left(x_1 + \frac{ay_1}{b} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} ab [\lg(bx_2 + ay_2) - \lg(bx_1 + ay_1)]. \end{aligned}$$

Jest totiž $\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{a}{b} y$ atd.

Vzdálenost v_2 bodu (x_2, y_2) od asymptoty $bx + ay = 0$

je $\frac{bx_2 + ay_2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = v_2$. Takže $P = \frac{1}{2} ab \lg \frac{v_2}{v_1}$.

972. Obsah smyčky Descartesova listu $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Položme $t = \frac{y}{x}$, $x = \frac{3at}{1+t^3}$. Můžeme užít vzorce

$$\frac{1}{2}P = \frac{1}{2} \int_{t=0}^1 x^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{9a^2 t^2}{(1+t^3)^2} dt; \quad (t^3 = z),$$

$$P = 3a^2 \left[\frac{1}{1+t^3} \right]_1^0 = \frac{3}{2}a^2 \quad (\text{obr. 9 P.}).$$

973. Obsah výseče astroidy $x = a \cos^3 \varphi$, $y = a \sin^3 \varphi$ od φ_1 do φ_2

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} x dy - y dx = \\ &= \frac{3}{2} a^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\cos^3 \varphi \sin^2 \varphi \cos \varphi + \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi \sin \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{3}{2} a^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{3}{16} a^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^2 2\varphi d(2\varphi) = \\ &= \frac{3}{16} a^2 \left[\frac{1}{2} \cdot 2\varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \\ &= \frac{3}{64} a^2 [4(\varphi_2 - \varphi_1) - \sin 4\varphi_2 + \sin 4\varphi_1]. \end{aligned}$$

Odtud obsah celé astroidy jest $\frac{3}{8}a^2\pi$.

[Jinak lze vyjádřit plochu ohraničenou čarou $x^n + y^n = a^n$ takto

$$\begin{aligned} P &= 4 \int_0^a y dx = 4 \int_0^a (a^n - x^n)^{\frac{1}{n}} dx = \frac{4a^2}{n} \int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1} (1-t)^{\frac{1}{n}} dt = \\ &= \frac{2a^2 \Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{n \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}. \end{aligned}$$

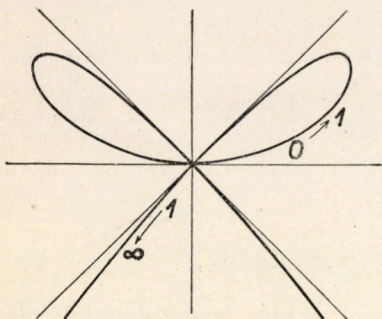
Pro $n = 2$ (kruh) vychází πa^2 a pro $n = \frac{3}{2}$ (astroida) $\frac{3}{8}\pi a^2$.]
(Viz př. 958.)

974. Určiti obsah plochy výseče pro křivku danou v souřadnicích polárních $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$.

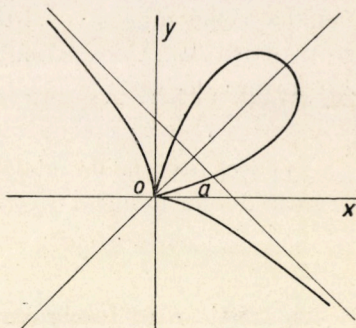
$$P = \frac{1}{2} \int x dy - y dx = \frac{1}{2} \int \varrho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int \varrho^2 d\varphi.$$

975. Vypočísti plochu smyčky křivky $x^4 = (x^2 - y^2)y$ (obr. 7). Křivka je racionální; $x = t - t^3$, $y = t^2 - t^4$ (př. 803), takže je vhodné užití pro plochu integrálu

$$P = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (t - t^3)^2 dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) = \frac{4}{105}.$$



Obr. 7.



Obr. 8.

976. Podobně pro smyčku čáry $x^{2n+1} + y^{2n+1} = (2n+1)ax^ny^n$. Křivka je racionální, neboť položíce $y = xt$, máme

$$x = \frac{(2n+1)t^na}{1+t^{2n+1}}.$$

Smyčka pak leží v 1. kvadrantu a křivka má asymptotu $x + y = (-1)^n a$. Pro $n = 2$ viz obr. 8.

$$\frac{1}{2} \int x^2 dt = \frac{(2n+1)^2}{2} \int \frac{a^2 t^{2n} dt}{(1+t^{2n+1})^2}.$$

Substitucí $t^{2n+1} + 1 = z$, $(2n+1)t^{2n} dt = dz$, dostaneme

$$\frac{1}{2} I = \frac{(2n+1)a^2}{2} \int_1^1 \frac{dz}{z^2} = \left[\frac{-(2n+1)a^2}{2(1+t^{2n+1})} \right]_1^0 = \frac{1}{2} a^2 \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Smyčka i křivka jsou souměrné podle přímky $y = x$, tedy obsah smyčky rovná se $I = a^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)$.

Pro $n = 1$ máme Descartesův list a jeho obsah smyčky $\frac{3}{2}a^2$ jako dříve.

Pojem a výpočet dvojného integrálu

Dvojný integrál je definován vztahem

$$\iint_{\omega} f(x, y) d\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\omega_i.$$

Celý obor ω v rovině (x, y) ohraničený uzavřenou čarou si myslíme rozdělen na velké množství částečných oborů $\Delta\omega_i$ a (ξ_i, η_i) značí bod uvnitř oboru $\Delta\omega_i$. Geometricky si lze tento dvojný integrál představit jako objem válce nad plochou ω v rovině x, y , který je nahoře ohraničen plochou $z = f(x, y)$.

Výpočet dvojného integrálu převádí se obyčejně na výpočet integrálu dvojnásobného

$$\iint_{\omega} f(x, y) d\omega = \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy \right] dx,$$

při čemž ω je rozděleno rovnoběžkami s osou x a y na obdélníčky obsahu $dx dy = d\omega$. Hodnota dvojného integrálu závisí ovšem při téže funkci $f(x, y)$ na tvaru oboru ω , tedy na čarách, které jej ohraničují.

Je-li obor ω obdélník omezený přímkami $x_1 = a$, $x_2 = b$, $y_1 = c$, $y_2 = d$, jest výpočet nejjednodušší, neboť

$$\iint_{\omega} f(x, y) d\omega = \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) = \int_c^d dy \left(\int_a^b f(x, y) dx \right).$$

Je-li obor ω ohraničen přímkami $x_1 = a$, $x_2 = b$ a dvěma čarami, nahoře $y_2 = g_2(x)$, dole $y_1 = g_1(x)$, ($g_i(x)$ jsou jednoznačné funkce s derivací), jest

$$\iint_{\omega} f(x, y) d\omega = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

Pro obor $y_1 = c$, $y_2 = d$ a čáry $x_2 = h_2(y)$, $x_1 = h_1(y)$ podobně

$$I = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

V oborech ohraničených uzavřenou křivkou možno postupovati oběma cestami.

Dirichletova věta. Pro dvojný integrál vzatý v trojúhelníku $y = 0$, $x = a$, $y = x$ platí (viz obr. 9):

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx.$$

Odvodí se ze základního vztahu na str. 128 pro

$$[g_1(x) = 0, g_2(x) = x; h_1(y) = y, h_2(y) = a.]$$

Podobně integraci v trojúhelníku $x = 1, y = \alpha x, y = \beta x$ lze odvoditi

$$\int_0^1 dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy = \int_0^{\frac{\beta}{\alpha}} dy \int_{\frac{y}{\beta}}^{\frac{y}{\alpha}} f(x, y) dx + \int_{\frac{\beta}{\alpha}}^{\beta} dy \int_{\frac{y}{\beta}}^1 f(x, y) dx.$$

Pro integraci v oktantu $y = 0,$

$y = x$ plyne analogicky

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^{\infty} dy \int_y^{\infty} f(x, y) dx.$$

V trojúhelníku $x = 0, y = 0,$

$x + y = 1$ platí podobně

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y) dx.$$

Provedeme-li záměnu

$$\xi = a + (b - a)x,$$

$$\eta = b - (b - a)y,$$

dostáváme

$$x = \frac{\xi - a}{b - a}, y = \frac{b - \eta}{b - a}$$

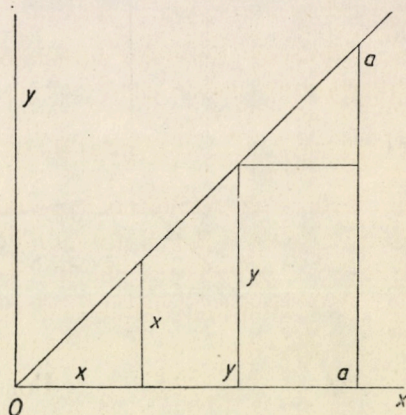
a integrály

$$\int_0^b d\xi \int_b^{\xi} \Phi(\xi, \eta) d\eta = \int_b^a d\eta \int_a^{\eta} \Phi(\xi, \eta) d\xi,$$

$$\int_a^b d\xi \int_{\xi}^b \Phi d\eta = \int_a^b d\eta \int_a^{\eta} \Phi d\xi.$$

Někdy je vhodné zavést nové proměnné, na př. místo pravoúhlých souřadnic x, y polární ϱ, φ . Pak

$$\iint_{\omega} f(x, y) d\omega = \iint_{\omega} F(\varrho, \varphi) \varrho d\varrho d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\varrho_1(\varphi)}^{\varrho_2(\varphi)} [F(\varrho, \varphi) \varrho d\varrho] d\varphi. \quad (\text{Obr. 10}).$$



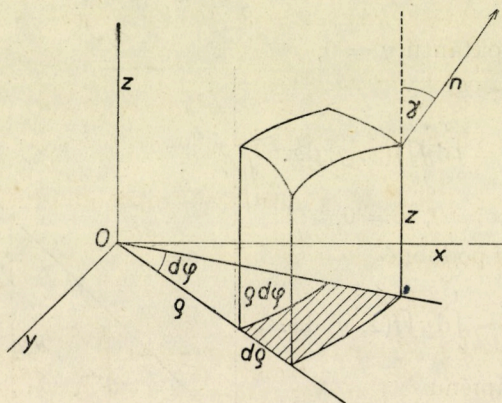
Obr. 9.

Obecně po záměně proměnných $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ je

$$\iint_{\omega} f(x, y) d\omega = \iint_w f(\varphi, \psi) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| du dv,$$

kde funkcionální determinant

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \neq 0.$$



Obr. 10.

Příklady

977. Vypočísti $\iint_{\omega} \frac{xy}{m} dx dy$ v oboru ω určeném obdélníkem $x_1 = a$, $x_2 = b$, $y_1 = c$, $y_2 = d$.

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b dx \left[\int_c^d \frac{xy}{m} dy \right] = \int_a^b \frac{x}{2m} (d^2 - c^2) dx = \\ &= \frac{1}{4m} (d^2 - c^2)(b^2 - a^2). \end{aligned}$$

978. Vypočísti $\iint_{\omega} x dx dy$, kde ω je úseč kruhu $x^2 + y^2 = r^2$ ohraničená přímkou $x = \frac{1}{2}r$.

Horní polovina kružnice má rovnici $y_2 = +\sqrt{r^2 - x^2}$, dolní polovina $y_1 = -\sqrt{r^2 - x^2}$. Tudíž

$$I = \int_{\frac{1}{2}r}^r dx \left[\int_{y_1}^{y_2} dy \right] = \int_{\frac{1}{2}r}^r x(y_2 - y_1) dx = 2 \int_{\frac{1}{2}r}^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx = \\ = 2 \left[-\frac{1}{3} \sqrt{(r^2 - x^2)^3} \right]_{\frac{1}{2}r}^r = \frac{1}{4} r^3 \sqrt{3}.$$

Nebo užitím opačného pořadu integračního

$$I = \int_{-\frac{1}{2}r\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}r\sqrt{3}} dy \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} x dx \right] \dots x_1 = \frac{1}{2}r; x_2 = h_2(y) = \sqrt{r^2 - y^2}, \\ I = \int_{-\frac{1}{2}r\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}r\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\frac{1}{2}r}^{\sqrt{r^2 - y^2}} dy = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}r\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}r\sqrt{3}} (\frac{1}{2}r^2 - y^2) dy = \frac{1}{4} r^3 \sqrt{3}.$$

979. Vypočísti $\int_{\omega} \int \frac{xy}{m} d\omega$ uvnitř čtvrtkruhu ohraničeného kladnými osami a kružnicí $x^2 + y^2 = r^2$.

$$I = \int_0^r dx \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{xy}{m} dy = \int_0^r \frac{x}{2m} [y^2]_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r \frac{x(r^2 - x^2)}{2m} dx = \frac{r^4}{8m}.$$

980. Vypočísti $\iint x^2 y dx dy$ v trojúhelníku s vrcholy $(0, 0); (2a, 0); (a, a)$.

$$I = \int_0^a dx \int_0^x x^2 y dy + \int_a^{2a} dx \int_0^{2a-x} x^2 y dy = \frac{1}{2} \int_0^a x^4 dx + \frac{1}{2} \int_a^{2a} x^2 (2a - x)^2 dx = \\ = \frac{1}{10} a^5 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} 4a^2 x^3 - ax^4 + \frac{1}{5} x^5 \right]_a^{2a} = \frac{1}{30} a^5.$$

981. Vypočísti $\iint \frac{1}{(x+y)^3} dx dy$ v trojúhelníku o stranách

$$x = 1, y = 1, x + y = 3.$$

$$I = \int_1^2 dx \int_1^{3-x} \frac{dy}{(x+y)^3} = \int_1^2 \left(\frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{18} \right) dx = \\ = \left[\frac{-1}{2(x+1)} - \frac{1}{18} x \right]_1^2 = \frac{1}{36}.$$

982. Vypočísti $\int \int \sqrt{4x^2 - y^2} dx dy$ v trojúhelníku o stranách $y = 0$, $x = 1$, $x = y$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{y=x} \sqrt{4x^2 - y^2} dy = \\ &= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} y \sqrt{4x^2 - y^2} + 2x^2 \arcsin \frac{y}{2x} \right]_0^{y=x} = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 \sqrt{3} + \frac{1}{3} x^2 \pi \right) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{3} \pi \right). \end{aligned}$$

983. Vypočísti Laplaceův integrál pomocí dvojného integrálu

$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ převedením na polární souřadnice.

Daný integrál je $\int_0^\infty I e^{-x^2} dx = I^2$, avšak také

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\varrho^2} \varrho d\varrho d\varphi = \frac{1}{2} \pi \int_0^\infty e^{-\varrho^2} \varrho d\varrho = \frac{1}{4} \pi \left[-e^{-\varrho^2} \right]_0^\infty = \frac{1}{4} \pi.$$

Proto je $I = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$.

Záměna pořadu integračního při nekonečných mezích jest dovolena jen za jistých podmínek, které jsou zde splněny (viz př. 946).

984. Dokázati vztah

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 f(xy) (1-x)^{\mu-1} y^\mu (1-y)^{\nu-1} dx dy = \\ &= B(\mu, \nu) \int_0^1 f(z) (1-z)^{\mu+\nu-1} dz. \end{aligned}$$

Zavedme $xy = z$, $x = \frac{z}{y}$, $dx = \frac{dz}{y}$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \left[\int_0^y f(z) \left(\frac{y-z}{y} \right)^{\mu-1} y^\mu (1-y)^{\nu-1} \frac{dz}{y} \right] = \\ &= \int_0^1 dy \left[\int_0^y f(z) (y-z)^{\mu-1} (1-y)^{\nu-1} dz \right]. \end{aligned}$$

Položme $1 - y = \eta$, $dy = -d\eta$:

$$I = - \int_1^0 dy \int_0^{1-\eta} f(z)(1 - \eta - z)^{\mu-1} \eta^{v-1} dz = \\ = \int_0^1 d\eta \int_0^{1-\eta} f(z)(1 - \eta - z)^{\mu-1} \eta^{v-1} dz,$$

což dává podle transformace Dirichletovy

$$I_1 = \int_0^1 f(z) dz \int_0^{1-z} (1 - \eta - z)^{\mu-1} \eta^{v-1} d\eta = \int_0^1 f(z) dz I_2.$$

Do I_2 zavedme

$$1 - \eta - z = (1 - z)u, \quad \eta = (1 - z)(1 - u), \quad d\eta = (z - 1)du:$$

$$I_2 = - \int_1^0 (1 - z)^{\mu-1} u^{\mu-1} (1 - z)^{v-1} (1 - u)^{v-1} (1 - z) du = \\ = (1 - z)^{\mu+v-1} \int_0^1 u^{\mu-1} (1 - u)^{v-1} du = B(\mu, v)(1 - z)^{\mu+v-1}.$$

Dosazením I_2 do I_1 dostaneme hledaný výsledek.

Užití dvojných integrálů

Obsah rovinné plochy je $\iint_P dx dy$, kde P je celá plocha.

Objem části válce nad plochou ω v rovině x, y , která je shora ohraničena plochou $z = f(x, y)$, jest

$$\iint_{\omega} f(x, y) dx dy.$$

Povrch křivé plochy $z = f(x, y)$ nad oborem ω v rovině x, y , je

$$P = \iint_{\omega} \frac{dx dy}{\cos \gamma} = \iint_{\omega} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy.$$

γ jest úhel tečné roviny plochy v bodě (x, y, z) s rovinou xy (obr. 10).

Hmota rovinné plochy, jejíž hustota $\sigma(x, y)$ se mění místem, je

$$\iint_{\omega} \sigma(x, y) dx dy.$$

Statický moment rovinné plochy vzhledem k osám y , resp. x jest

$$S_y = \iint_{\omega} \sigma x dx dy, \quad S_x = \iint_{\omega} \sigma y dx dy.$$

Poloha těžiště (ξ, η) plochy o hustotě $\sigma(x, y)$ a hmotě M jest

$$\xi = \frac{1}{M} \iint_{\omega} \sigma x \, dx \, dy, \quad \eta = \frac{1}{M} \iint_{\omega} \sigma y \, dx \, dy.$$

Momenty setrvačnosti plochy ω vůči osám y a x jsou

$$I_y = \iint_{\omega} \sigma x^2 \, dx \, dy, \quad I_x = \iint_{\omega} \sigma y^2 \, dx \, dy.$$

Potenciál plochy hustoty náboje σ v bodě P je $\int_{\omega} \int \frac{\sigma \, dp}{r}$ vzatý přes uvažovanou část plochy ω .

Příklady

985. Vypočítí dvojným integrálem obsah čtvrtkruhu.

$$P = \int_0^r \left[\int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} dy \right] dx = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{4} \pi r^2.$$

Obečně $P = \int_0^a y \, dx$ souhlasně se známým pravidlem.

Nebo $P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{r=f(\varphi)} r \, dr \right] d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 \, d\varphi$ opět známé pravidlo.

986. Vypočítí hmotu elipsy, je-li $\sigma = \sigma_1 \cdot y$, ($\sigma_1 = \text{konst.}$).

$$M = 4 \int_0^a \int_0^y \sigma_1 y \, dx \, dy, \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$M = 4 \int_0^a \sigma_1 \frac{1}{2} y^2 \, dx = 2 \int_0^a \sigma_1 \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \, dx = 2\sigma_1 \left[b^2 x - \frac{b^2}{a^2} \frac{1}{3} x^3 \right]_0^a.$$

$$M = \frac{4}{3} \sigma_1 a b^2.$$

987. Vypočítí polohu těžiště první čtvrti elipsy, jestliže hustota $\sigma = kxy$.

$$\begin{aligned} M &= \int_0^a \left[\int_0^y kxy \, dy \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^a kx \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \, dx = \\ &= \frac{kb^2}{2a^2} \left[\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^a = \frac{ka^2 b^2}{8}. \end{aligned}$$

$$S_y = \int_0^a \int_0^y kx^2 y \, dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^a kx^2 \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \, dx =$$

$$= \frac{kb^2}{2a^2} \left[\frac{a^2 x^3}{3} - \frac{1}{5} x^5 \right] = \frac{ka^3 b^2}{15}.$$

$$\xi = \frac{1}{M} S_y = \frac{8}{15} a. \quad \text{Podobně} \quad \eta = \frac{8}{15} a$$

988. Určiti momenty setrvačnosti plochy omezené dvěma souosými elipsami vzhledem k osám.

$$\frac{1}{4} I_y = \int_0^{a_1} x^2 \left(\int_{y_1}^{y_2} dy \right) dx + \int_{a_1}^{a_2} x^2 \left(\int_0^{y_2} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^{a_1} x^2 (y_2 - y_1) dx + \int_{a_1}^{a_2} x^2 y_2 dx =$$

$$= \int_0^{a_2} x^2 \frac{b_2}{a_2} \sqrt{a_2^2 - x^2} dx - \int_0^{a_1} x^2 \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 - x^2} dx =$$

$$= \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Poslední integr. přejde substitucí $x = a \sin z$, $dx = a \cos z \, dz$ ve tvar

$$a^4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 z \cos^2 z \, dz = \frac{1}{8} a^4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 2z \, d(2z) = \frac{1}{8} a^4 \left[z - \frac{1}{4} \sin 4z \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} =$$

$$= \frac{1}{16} \pi a^4. \quad \text{Tedy} \quad I_y = \frac{1}{4} \pi (a^3 b_2 - a^3 b_1). \quad I_x = \frac{1}{4} \pi (a_2 b^3 - a_1 b^3).$$

Pro celou elipsu $I_y = \frac{1}{4} \pi a^3 b$, pro kruh $\frac{1}{4} \pi r^4$.

989. Určiti objem osminy trojosého elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Pro body v 1. oktantu je $z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = f(x, y)$.

Elipsoid vytíná na rovině xy elipsu E o rovnici

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad \text{Hledaný objem jest}$$

$$V = \int_E \int f(x, y) \, dx \, dy = c \int_0^a \left[\frac{1}{b} \int_0^y \left(\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) - y^2} \right) dy \right] dx.$$

Označme výraz pod odmocnítkem W ; pak

$$\begin{aligned} \int_0^y \sqrt{W} \, dy &= \\ &= \left[\frac{1}{2} y \sqrt{W} + \frac{1}{2} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \arcsin y : b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right]_0^y = \\ &= \frac{1}{4} \pi b^2 \left(1 - \frac{a^2}{x^2} \right) \end{aligned}$$

a odtud
$$V = \frac{1}{4} \pi b c \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \frac{\pi a b c}{6}.$$

Celý elipsoid má objem $\frac{4}{3} \pi a b c$.

990. Vypočítí objem tělesa omezeného danými plochami:

a) válcovými $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 = b z$ a rovinou xy .

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} V &= \int_0^a \int_0^y z \, dx \, dy = \int_0^a \left[\int_0^y \frac{1}{b} y^2 \, dy \right] dx = \\ &= \int_0^a \frac{1}{3b} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \int_0^a \frac{a^3}{3b} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx. \end{aligned}$$

Po substituci $x = a \sin z$, $dx = a \cos z \, dz$ bude

$$\frac{1}{4} V = \frac{a^4}{3b} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^4 z \, dz = \frac{a^4 3\pi}{3b 16}, \quad \text{takže konečně} \quad V = \frac{1}{4} \frac{a^4}{b} \pi.$$

b) eliptickým paraboloidem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ a rovinou $z = c$.

Rovina protíná paraboloid v elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c \quad \text{nebo} \quad y = b \sqrt{c - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Pro objem doplňkového tělesa mezi paraboloidem a rovinou xy

$$\begin{aligned}
 \text{máme } \frac{1}{4}V_1 &= \int_0^{a\sqrt{c}} \left[\int_0^y z \, dy \right] dx = \int_0^{a\sqrt{c}} \left[\int_0^{\sqrt{c - \frac{x^2}{a^2}}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dy \right] dx = \\
 &= \int_0^{a\sqrt{c}} \left(\frac{x^2}{a^2} y + \frac{y^3}{3b^2} \right) dx = \\
 &= \int_0^{a\sqrt{c}} \left[\frac{x^2}{a^2} \frac{b}{a} \sqrt{a^2c - x^2} + \frac{b}{3a^3} (a^2c - x^2)^{\frac{3}{2}} \right] dx.
 \end{aligned}$$

Potřebné integrály byly právě v předchozích příkladech vypočteny až na záměnu $a\sqrt{c}$ místo a . Tedy

$$\frac{1}{4}V_1 = \frac{b}{a^3} \frac{\pi a^4 c^2}{16} + \frac{b}{3a^3} \frac{3\pi a^4 c^2}{16} = \frac{1}{8}\pi abc^2. \quad V_1 = \frac{1}{2}\pi abc^2.$$

A protože celý válec nad elipsou πabc o výšce c má objem πabc^2 , zbývá pro úseč paraboloidu $V = \frac{1}{2}\pi abc^2$.

991. Jak mnoho vody zůstane ve válcovité sklenici, nakloníme-li ji tak, že hladina vody jde středem podstavu? (Jest vlastně vypočítati objem tělesa omezeného rovinou xy , rovinou $z = \frac{v}{r}y$ a válcem $x^2 + y^2 = r^2$).

$$V = 2 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{v}{r} y \, dy \, dx = 2 \int_0^r \frac{v}{r} \frac{1}{2} (r^2 - x^2) \, dx = \frac{2}{3} r^2 v.$$

992. Určiti objem tělesa omezeného elipsoidem s poloosami a, b, c

v osách souřadnicových a plochou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$.

Rovnice elipsoidu je $z = c \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)}$.

Objem tělesa nad xy je $\int_E z \, d\omega$ vzatý přes elipsovitou podstavu válce. Za plošné elementy $d\omega$ možno zvoliti elipsovitě proužky v rovině xy odpovídající vrstevnicím elipsoidu ve výši z .

Rovnice takové elipsy je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$,

takže má poloosy $a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$

a obsah úzkého proužku podél této elipsy je

$$D \left[\pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right) \right] \cdot dz = - \frac{2\pi ab z}{c^2} dz = d\omega, \quad \text{takže}$$

$$\text{objem } V = \frac{\pi ab}{c^2} \int_{-\frac{c}{\sqrt{2}}}^{\frac{c}{\sqrt{2}}} 2z^2 dz = \frac{\pi ab}{c^2} \left[\frac{2z^3}{3} \right]_{-\frac{c}{\sqrt{2}}}^{\frac{c}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{6} \pi abc (4 - \sqrt{2}).$$

993. Jest vypočísti objem tělesa omezeného plochami $x^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = k^2 a^2$ a zvláště v případě $k = 1$.

$$V = 8 \int_0^{ka} \int_0^{\sqrt{k^2 a^2 - x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx dy = 8 \int_0^{ka} \sqrt{(a^2 - x^2)(k^2 a^2 - x^2)} dx.$$

Substitucí $x = ka \sin \varphi$ dostaneme

$$V = 8k^2 a^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \cos^2 \varphi d\varphi.$$

Integrace po částech dává

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \cos \varphi \sin \varphi + \int \left(\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + \frac{k^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right) \sin^2 \varphi d\varphi$$

a výraz za integračním znaméním snadno upravíme na

$$- 2\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \cos^2 \varphi + \frac{1 + k^2}{k^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - \frac{1 - k^2}{k^2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

$$\text{A tak jest } 3k^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \cos^2 \varphi d\varphi =$$

$$= (1 + k^2) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - (1 - k^2) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

a konečně $V = \frac{8}{3} a^3 [(1 + k^2) E(k) - (1 - k^2) F(k)]$.

Pro $k = 1$ vychází hned z prvního integrálu $\frac{1}{3} a^3$.

994. Vypočísti povrch koule dvojným integrálem.

$$P = 8 \int_0^a \left[\int_0^y \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dy \right] dx.$$

$$z = f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad f_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

$$f_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

V rovině xy jest $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

$$P = 8a \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx = 8a \int_0^a I dx.$$

$$I = \left[\arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right]_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2} \pi.$$

$$P = 8a \cdot \frac{1}{2} \pi \int_0^a dx = 4\pi a^2.$$

995. Vypočísti dvojný integrál z př. 994 užitím substituce

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi.$$

$$z = \sqrt{a^2 - \varrho^2}, \quad d\omega = \varrho d\varrho d\varphi, \quad f_x = \frac{-x}{z} = \frac{-\varrho \cos \varphi}{\sqrt{a^2 - \varrho^2}},$$

$$f_y = \frac{-y}{z} = \frac{-\varrho \sin \varphi}{\sqrt{a^2 - \varrho^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - \varrho^2},$$

takže celkem
$$P = 2 \int_K \int \frac{a}{\sqrt{a^2 - \varrho^2}} \varrho d\varrho d\varphi$$

v kruhu K ležícím v rovině xy .

$$P = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{a\varrho d\varrho}{\sqrt{a^2 - \varrho^2}} d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} a^2 d\varphi = 4\pi a^2.$$

996. Je-li obor ω v xy omezen čarami $\varrho_1(\varphi)$, $\varrho_2(\varphi)$, jest plocha *všeobecně*

$$P = \int_{\varphi_1(\varphi)}^{2\pi} \int_{\varrho_1(\varphi)}^{\varrho_2(\varphi)} \frac{\varrho d\varrho}{\cos \gamma} d\varphi \quad (\text{viz obr. 10})$$

a je-li $z = F(\varrho, \varphi)$, máme

$$f_x = \frac{\partial F}{\partial \varrho} \cos \varphi - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\varrho}, \quad f_y = \frac{\partial F}{\partial \varrho} \sin \varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\varrho}$$

$$\text{a} \quad 1 + f_x^2 + f_y^2 = 1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \varrho} \right)^2 + \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)^2.$$

997. Vypočítí obsah plochy na kouli $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, omezené válcovou plochou $y^2 = ax - x^2$.

$z = \sqrt{a^2 - \varrho^2}$, $\cos \gamma = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - \varrho^2}$ jako dříve. Pro čtvrtinu plochy je oborem v xy polokruh podstavy válce, z jehož rovnice $\varrho = a \cos \varphi$ pro φ v intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$.

$$\begin{aligned} P &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{a \cos \varphi} \frac{a \varrho \, d\varrho}{\sqrt{a^2 - \varrho^2}} \, d\varphi = 4a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} [\sqrt{a^2 - \varrho^2}]_{a \cos \varphi}^0 \, d\varphi = \\ &= 4a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - \sin \varphi) \, d\varphi = 4a^2 [\varphi + \cos \varphi]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 2a^2(\pi - 2). \end{aligned}$$

998. Vypočítí obsah plochy vymezené na kuželi $c^2(x^2 + y^2) - a^2z^2 = 0$ plochou válcovou $x^2 + y^2 - ax = 0$.

$$z = \frac{c}{a} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{c}{a} \varrho, \quad \text{v rovině } xy \dots \varrho = a \cos \varphi,$$

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c}{a} \cos \varphi, \quad f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c}{a} \sin \varphi,$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}},$$

$$\text{takže} \quad P = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{a \cos \varphi} \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{a} \varrho \, d\varrho \, d\varphi = \frac{1}{2} \pi a \sqrt{a^2 + c^2}.$$

999. Vypočítí objem tělesa omezeného týmiž plochami a rovinou xy .

$$V = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{a \cos \varphi} \frac{c}{a} \varrho^2 \, d\varrho \, d\varphi = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} ca^2 \cos^3 \varphi \, d\varphi = \frac{4}{3} a^2 c.$$

1000. Vypočísti obsah plochy vymezené na ploše šroubové $z = k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ rovinami $z = 0$, $z = 2k\pi$ a plochou válcovou $x^2 + y^2 = a^2$.

Podle př. 996 máme po transformaci $z = k\varphi$,

$$1 + f_x^2 + f_y^2 = 1 + \frac{1}{\varrho^2} k^2 = \frac{\varrho^2 + k^2}{\varrho^2},$$

takže pro celou podstavu kruhovou o poloměru a jest

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{\frac{\varrho^2 + k^2}{\varrho^2}} \varrho \, d\varrho \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{\varrho^2 + k^2} \, d\varrho \, d\varphi.$$

Poněvadž integrál

$$\int \sqrt{\varrho^2 + k^2} \, d\varrho = \frac{1}{2} (x \sqrt{k^2 + x^2} + k^2 \lg(x + \sqrt{k^2 + x^2})) \text{ podle 362,}$$

$$\begin{aligned} \text{je } P &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} a \sqrt{a^2 + k^2} + \frac{1}{2} k^2 \lg \frac{a + \sqrt{a^2 + k^2}}{k} \right) d\varphi = \\ &= \pi \left(a \sqrt{a^2 + k^2} + k^2 \lg \frac{a + \sqrt{a^2 + k^2}}{k} \right). \end{aligned}$$

1001. Vypočísti hydrostatický tlak kapaliny na polokruh svisle ponořený do vody, tak, že průměr je rovnoběžný s hladinou a leží ve hloubce r .

Značíme-li hloubku plošného elementu $r - x$, je tlak na něj $\sigma(r - x) d\omega$ jako váha sloupečku kapaliny o výšce $z = r - x$. Myslíme si, že polokruh je vodorovný (obr. 11), pak všechny sloupečky vytvoří poloválec seříznutý šikmo rovinou $z = r - x$. Je-li σ hustota kapaliny, je tlak $P = \iint \sigma(r - x) d\omega$ vztažený na polokruhovou podstavu. Po transformaci $x = \varrho \cos \varphi$ je $z = r - x = r - \varrho \cos \varphi$ a tlak jest

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\pi \int_0^a \sigma(r - \varrho \cos \varphi) \varrho \, d\varrho \, d\varphi = \sigma \int_0^\pi \left(r \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{3} r^3 \cos \varphi \right) d\varphi = \\ &= \sigma r^3 \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

1002. Vypočísti potenciál koule nabitě na povrchu hustotou σ ve vnějším bodě A vzdáleném o v od středu koule (obr. 12).

$$V = \int_P \int \frac{\sigma dp}{x}.$$

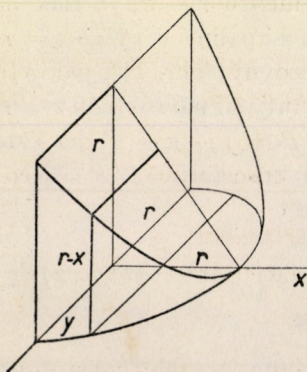
Element plochy zvolíme jako část proužku na rovnoběžce a jeho obsah je $dp = \varrho \sin \gamma d\varphi$. $\varrho d\gamma = \varrho^2 \sin \gamma d\varphi d\gamma$. Jeho vzdálenost od bodu A je $x^2 = \varrho^2 + v^2 - 2\varrho v \cos \gamma$. Je tedy

$$V = \sigma \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\gamma=0}^{\pi} \frac{\varrho^2 \sin \gamma d\gamma d\varphi}{x} = 2\pi \varrho^2 \sigma \int_0^{\pi} \frac{\sin \gamma d\gamma}{x}.$$

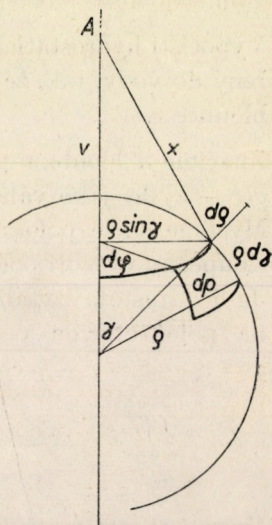
Derivací x^2 plyne $x dx = \varrho v \sin \gamma d\gamma$, takže $\sin \gamma d\gamma = \frac{x dx}{\varrho v}$

a potenciál
$$V = 2\pi \varrho^2 \sigma \frac{1}{\varrho v} \int_{v-\varrho}^{v+\varrho} dx = \frac{4\pi \varrho^2 \sigma}{v}.$$

Odpovídá totiž $\gamma = 0, \pi$ mez pro x dolní $v - \varrho$, horní $v + \varrho$, jak patrně přímo z obrazce.



Obr. 11.



Obr. 12.

Pojem a výpočet trojného integrálu

Trojný integrál

$$\iiint_v f(x, y, z) dv = \lim_{\Delta v_i \rightarrow 0} \sum f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i,$$

kde (ξ_i, η_i, ζ_i) je bod v trojrozměrném elementu Δv_i a počítá se přes uvažovaný trojrozměrný obor v . Převádí se obvykle na integrál trojnásobný

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z) dz,$$

kde z_1, z_2 jsou funkce proměnných x, y . Hodnoty $y_{1,2}$ jsou funkce proměnné x a $x_{1,2}$ jsou konstanty. Pořadí integrací se volí tak, aby integrace byla nejjednodušší; nejdůležitější je ovšem správné stanovení mezí.

V souřadnicích cylindrických $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, z je prostorový element $dv = \varrho d\varphi d\varrho dz$ (obr. 10) a trojný integrál změní tvar:

$$I = \iiint_v f(x, y, z) dv = \iiint_v F(\varrho, \varphi, z) \varrho d\varphi d\varrho dz.$$

V souřadnicích sférických (viz obr. 13)

$$x = \varrho \sin \gamma \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \gamma \sin \varphi, \quad z = \varrho \cos \gamma$$

je element $dv = \varrho^2 \sin \gamma d\varphi d\varrho d\gamma$

a máme $I = \iiint_v \Phi(\varrho, \gamma, \varphi) \varrho^2 \sin \gamma d\varphi d\varrho d\gamma$.

Při obou transformacích je třeba ovšem i správně změnit tvar mezí. Při obecné záměně proměnných za u, v, w jest

$$\iiint_v f(x, y, z) dv = \iiint_v F(u, v, w) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw,$$

kde $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ značí funkcionální determinant.

Příklady

1003. Vypočítá $\iiint z dx dy dz$ v prvním oktantu koule $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad I &= \int_0^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} dz = \int_0^r dx \int_0^{\frac{1}{2}(r^2-x^2)} \frac{1}{2}(r^2-x^2-y^2) dy = \\ &= \int_0^r \left[\frac{1}{2}(r^2-x^2)y - \frac{1}{6}y^3 \right] dx = \frac{1}{3} \int_0^r (r^2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx. \end{aligned}$$

Zavedeme-li sem $x = r \cos \varphi$, $dx = -r \sin \varphi d\varphi$, jest

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} r^4 \sin^4 \varphi d\varphi = \frac{1}{3} r^4 \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{16} \pi r^4.$$

b) Tých integrál v souřadnicích cylindrických jest

$$\begin{aligned} \iiint_V z \varrho d\varrho d\varphi dz &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^r d\varrho \int_0^{\sqrt{r^2-\varrho^2}} z dz = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^r \frac{1}{2} \varrho (r^2 - \varrho^2) d\varrho = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1}{2} r^4 - \frac{1}{4} r^4 \right) d\varphi = \frac{1}{16} \pi r^4. \end{aligned}$$

c) Tých integrál možno však počítati i v souřadnicích sférických. Jest pak

$$\begin{aligned} I &= \iiint \varrho \cos \gamma \cdot \varrho^2 \sin \gamma d\varrho d\varphi d\gamma = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin 2\gamma d\gamma \int_0^r \varrho^3 d\varrho = \\ &= \left[\varphi \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} \cdot \left[-\frac{1}{4} \cos 2\gamma \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} \cdot \left[\frac{1}{4} \varrho^4 \right]_0^r = \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} r^4 = \frac{1}{16} \pi r^4. \end{aligned}$$

Integrál značí statický moment oktantu koule vzhledem k rovině xy .

1004. Vypočísti $I = \iiint xy dx dy dz$ v prvním oktantu koule $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

$$I = \iiint xy dx dy dz = \int_0^r x dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y \sqrt{r^2-x^2-y^2} dy.$$

Ve druhém integrálu položíme $r^2 - x^2 - y^2 = u$, $-2y dy = du$; mezím $y(0, \sqrt{r^2-x^2})$ odpovídají meze $u(r^2-x^2, 0)$,

takže integrál bude $\int_0^r x dx \int_0^{r^2-x^2} \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} du = \int_0^r \frac{1}{3} x (r^2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$.

Nyní zase $r^2 - x^2 = t$, $-2x dx = dt$ převádí integrál na

$$\int_0^{r^2} \frac{1}{6} t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \left[t^{\frac{5}{2}} \right]_0^{r^2} = \frac{1}{15} r^5.$$

Týž trojný integrál vztažený na čtvrtinu koule by byl ovšem $\frac{2}{15}r^5$.

Užití integrálů trojných

Objem tělesa

$V = \iiint dx dy dz = \iiint \varrho d\varphi d\varrho dz = \iiint \varrho^2 \sin\varphi d\varphi d\varrho dz$
v mezích odpovídajících ohrazení tělesa.

Hmota tělesa, jehož hustota σ se mění od místa k místu je

$$M = \iiint \sigma(x, y, z) dx dy dz.$$

Statický moment tělesa vzhledem k rovině xy je

$$S_z = \iiint z\sigma dx dy dz,$$

podobně S_x, S_y .

Souřadnice (ξ, η, ζ) těžiště hmoty M plynou z rovnic:

$$M\xi = \iiint x\sigma dx dy dz$$

a podobných dvou dalších.

Moment setrvačnosti tělesa hustoty $\sigma(x, y, z)$ vzhledem k ose na př. z je

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2) \sigma dx dy dz,$$

podobně I_x, I_y .

Příklady

1005. Vypočítí objem eliptického paraboloidu $x^2 + y^2 = z$ omezeného rovinou $z = y$.

Zavedme $x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$, $z = z$, takže objem jest $\iiint \varrho d\varphi d\varrho dz$. Obě plochy jsou $\varrho^2 = z$, $z = \varrho \sin\varphi$; jimi jsou určeny meze integrace podle z , takže v prvním oktantu jest hledaný objem

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\sin\varphi} \int_0^{\varrho^2 \sin\varphi} \varrho d\varrho d\varphi dz &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\frac{1}{3} \varrho^3 \sin\varphi - \frac{1}{4} \varrho^4 \right]_0^{\sin\varphi} d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1}{3} \sin^3\varphi \sin\varphi - \frac{1}{4} \sin^4\varphi \right) d\varphi = \frac{1}{12} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4\varphi d\varphi = \frac{1}{64} \pi. \end{aligned}$$

Uvažovaný objem prostírá se v prvním kvadrantu a jest tedy dvojnásobný: $\frac{1}{3}\pi$.

1006. Vypočísti hmotu koule, jejíž hustota je přímo úměrná n -té mocnině vzdálenosti od středu.

Položme $\sigma = k\rho^n$, $dv = \rho^2 \sin\gamma \, d\rho \, d\gamma \, d\varphi$.

$$\begin{aligned} M &= \iiint k\rho^{n+2} \sin\gamma \, d\rho \, d\gamma \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} d\gamma \sin\gamma \int_0^r k\rho^{n+2} d\rho = \\ &= \frac{kr^{n+3}}{n+3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi kr^{n+3}}{n+3} \quad (\text{pro } n > -3). \end{aligned}$$

1007. Vypočísti objem a těžiště kulové výšeče o středovém úhlu 2α v kouli poloměru r . Osa výšeče budiž z .

$$\begin{aligned} V &= \iiint \rho^2 \sin\gamma \, d\rho \, d\gamma \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha \sin\gamma \, d\gamma \int_0^r \rho^2 d\rho = \\ &= \frac{2}{3}\pi r^3 (1 - \cos\alpha). \end{aligned}$$

Těžiště leží na ose z ve vzdálenosti ζ .

$$M\zeta = S_z = \iiint z \, dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha \sin\gamma \cos\gamma \, d\gamma \int_0^r \rho^3 d\rho,$$

$$\frac{2}{3}\pi r^3 \cdot 2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha \cdot \zeta = 2\pi \frac{1}{4}r^4 \frac{1}{2}\sin^2\alpha \quad \text{a odtud po krácení}$$

$$\zeta = \frac{3}{4}r \cos^2 \frac{1}{2}\alpha.$$

1008. Vypočísti souřadnice těžiště kulového klínu omezeného rovinami xz , xy a rovinou jdoucí z pod úhlem α k xz .

Objem klínu $V = \frac{1}{3}r^3\alpha$. Statické momenty

$$S_x = \iiint x \cdot dv = \iiint \rho^3 \sin^2\gamma \cos\varphi \, d\rho \, d\gamma \, d\varphi = \frac{1}{4}r^4 \cdot \frac{1}{4}\pi \sin\alpha,$$

$$\begin{aligned} S_y &= \iiint y \cdot dv = \iiint \rho^3 \sin^2\gamma \sin\varphi \, d\rho \, d\gamma \, d\varphi = \\ &= \frac{1}{4}r^4 \cdot \frac{1}{4}\pi (1 - \cos\alpha), \end{aligned}$$

$$S_z = \iiint z \cdot dv = \iiint \rho^3 \sin\gamma \cos\gamma \, d\rho \, d\gamma \, d\varphi = \frac{1}{4}r^4 \cdot \frac{1}{2}\alpha.$$

$$\text{Odtud} \quad \xi = S_x : V = \frac{1}{16}\pi r \frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

$$\eta = S_y : V = \frac{1}{16}\pi r \frac{1 - \cos\alpha}{\alpha},$$

$$\zeta = S_z : V = \frac{3}{8}r.$$

1009. Vypočísti objem uzavřený plochou

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3a^3xyz \quad \text{v prvním oktantu.}$$

$$V = \iiint \varrho^2 \sin \gamma \, d\varrho \, d\gamma \, d\varphi \quad \text{v daném oboru.}$$

Zavedeme-li sférické souřadnice, je rovnice plochy po krácení r^3 :

$$r^3 = 3a^3 \sin^2 \gamma \cos \gamma \sin \varphi \cos \varphi.$$

$$\begin{aligned} \text{Objem } V &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin \gamma \, d\gamma \int_0^r \varrho^2 \, d\varrho = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin \gamma \, \frac{1}{3} r^3 \, d\gamma = \\ &= a^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^3 \gamma \cos \gamma \, d\gamma = \\ &= a^3 \left[\frac{1}{2} (\sin^2 \varphi) \cdot \frac{1}{4} (\sin^4 \gamma) \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{8} a^3. \end{aligned}$$

1010. Vypočísti gravitační sílu hmotného válce poloměru r , výšky $2b$, hustoty σ , s osou z a středem v počátku na hmotnou jednotku na ose z vně válce ve vzdálenosti c od počátku.

$$P = \iiint \frac{\sigma}{d^2} \cos \gamma \, dv, \quad \text{kde } d^2 = (c - z)^2 + \varrho^2 \text{ a } \cos \gamma = \frac{c - z}{d},$$

$$\begin{aligned} P &= \sigma \iiint \frac{(c - z) \varrho \, d\varrho \, d\varphi \, dz}{[(c - z)^2 + \varrho^2]^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-b}^b (c - z) \, dz \int_0^r \frac{\varrho \, d\varrho}{[(c - z)^2 + \varrho^2]^{\frac{3}{2}}} = \\ &= 2\pi\sigma \int_{-b}^b \left[1 - \frac{c - z}{[(c - z)^2 + r^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dz = \\ &= 2\pi\sigma [2b + \sqrt{(c - b)^2 + r^2} - \sqrt{(c + b)^2 + r^2}]. \end{aligned}$$

1011. Vypočísti statický moment S_x osminy elipsoidu trojosého.

$$S_x = \iiint x \, dv = \int_0^b dy \int_0^{\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}} dz \int_0^{\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2} - z^2}} dx$$

$$\begin{aligned}
 a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} \cdot b \cdot \frac{c}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \\
 \int_0^a x \, dx = \int_0^b dy \int_0^c \frac{1}{2} a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) dz = \\
 = \frac{1}{2} a^2 \int_0^b \frac{c}{b^3} \sqrt{(b^2 - y^2)^3} \, dy = \frac{1}{3} a^2 bc \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{16} \pi a^2 bc
 \end{aligned}$$

Objem $V = \frac{1}{6} \pi abc$, tedy souřadnice ξ těžiště $\xi = S_x : V = \frac{3}{8} a$.

Podobně $\eta = \frac{3}{8} b$, $\zeta = \frac{3}{8} c$.

1012. Vypočísti momenty setrvačnosti elipsoidu o poloosách a, b, c vzhledem k osám x, y, z .

Zavedme $x = a\varrho \sin\gamma \cos\varphi$, $y = b\varrho \sin\gamma \sin\varphi$, $z = c\varrho \cos\gamma$,
kde ϱ se mění od 0 do 1. $dv = abc\varrho^2 \sin\gamma \, d\varrho \, d\gamma \, d\varphi$.

$$I = \iiint (x^2 + y^2) \, dv = \iiint x^2 \, dv + \iiint y^2 \, dv = I_1 + I_2,$$

kde se integrály vztahují na celý objem elipsoidu.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \iiint a^3 \varrho^2 \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi bc \varrho^2 \sin\gamma \, d\varrho \, d\gamma \, d\varphi = \\
 &= a^3 bc \iiint \varrho^4 \sin^3 \gamma \cos^2 \varphi \, d\varrho \, d\gamma \, d\varphi = \\
 &= a^3 bc \left[\frac{1}{5} \varrho^5 \right]_0^1 \cdot \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^3 \gamma \, d\gamma \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{15} 4\pi a^3 bc.
 \end{aligned}$$

Podobně $I_2 = \frac{1}{15} 4\pi ab^3 c$, $I_3 = \frac{1}{15} 4\pi abc^3$.

Takže na př. $I_z = I_1 + I_2 = \frac{1}{15} 4\pi abc(a^2 + b^2)$.

Celá hmota je $M = \frac{4}{3} \pi abc$, proto je možno psát také

$$I_z = \frac{1}{5} M(a^2 + b^2).$$

1013. Vypočísti objem tělesa uvnitř plochy

$$\left(\frac{x}{a} \right)^n + \left(\frac{y}{b} \right)^n + \left(\frac{z}{c} \right)^n = 1,$$

kde n je podíl čitatele sudého a lichého jmenovatele.

$$\begin{aligned}
 V &= 8 \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt[n]{a^n - x^n}} dy \int_0^{\frac{c}{a} \sqrt[n]{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^n - \left(\frac{y}{b}\right)^n}} dz = \\
 &= 8 \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt[n]{a^n - x^n}} c dy \sqrt[n]{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^n - \left(\frac{y}{b}\right)^n}.
 \end{aligned}$$

Píšeme-li $\frac{b}{a} \sqrt[n]{a^n - x^n} = d$, jest druhý integrál

$$I_2 = c \int_0^d \frac{1}{b} (d^n - y^n)^{\frac{1}{n}} dy = \frac{cd^2}{bn} \int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1} (1-t)^{\frac{1}{n}} dt,$$

klademe-li $y^n = d^n t$, $dy = \frac{d}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$.

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{cd^2}{bn} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + 1\right) = \frac{cd^2}{bn} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n} + 1\right)} = \\
 &= \frac{cd^2}{2bn} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{cb^2}{2abn} (a^n - x^n)^{\frac{2}{n}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}. \\
 V &= 8 \int_0^a dx \frac{cb}{2an} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)} (a^n - x^n)^{\frac{2}{n}} = \\
 &= \frac{4bc}{an} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)} \int (a^n - x^n)^{\frac{2}{n}} dx.
 \end{aligned}$$

Poslední integrál přejde substitucí $x^n = a^n t$ na

$$I_3 = \frac{a^2}{n} \int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1} (1-t)^{\frac{2}{n}} dt = \frac{a^2}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n} + 1\right)} =$$

$$= \frac{2a^2}{3n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}, \text{ takže } V = \frac{8abc}{3n^2} \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

Odtud pro astroidní těleso $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ plyne objem

$$\frac{8a^3}{3} \cdot \frac{\Gamma^3\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}.$$

Protože

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \text{ a}$$

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{7}{2} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \sqrt{\pi},$$

jest $V_a = \frac{4}{3} \pi a^3$, t. j. asi $\frac{1}{12}$ opsané koule.

1014. Vypočísti $I = \iiint x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} (1-x-y-z)^{s-1} dx dy dz$ v oboru, pro který $x + y + z < 1$; $x, y, z, p, q, r, s > 0$.

$$\int_0^{1-x-y} z^{r-1} (1-x-y-z)^{s-1} dz$$

po záměně $z = (1-x-y)t$ přejde v

$$(1-x-y)^{r+s-1} \int_0^1 t^{r-1} (1-t)^{s-1} dt = (1-x-y)^{r+s-1} B(r, s).$$

$$I = B(r, s) \iint x^{p-1} y^{q-1} (1-x-y)^{r+s-1} dx dy$$

pro obor $x + y < 1$. Stejným postupem dostaneme

$$I = B(r, s) \cdot B(q, r+s) \cdot B(p, r+s+q)$$

a nahradíme-li

$$B(r, s) = \frac{\Gamma(r) \Gamma(s)}{\Gamma(r+s)},$$

bude $I = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q) \Gamma(r) \Gamma(s)}{\Gamma(p+q+r+s)}$, a pro $s=1$

$$\iiint x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} dx dy dz = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q) \Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r+1)}$$

pro $x + y + z < 1$.

1015. Vypočísti $I = \iiint x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} dx dy dz$ v prvním oktantu tělesa

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^l < 1 \text{ pro čísla } a, b, c, n, m, l > 0.$$

Zavedeme $x = ax_1^{\frac{1}{n}}, y = by_1^{\frac{1}{m}}, z = cz_1^{\frac{1}{l}}, dx = \frac{a}{n} x_1^{\frac{1}{n}-1} dx_1$

atd. Pak jest $I = \frac{a^p b^q c^r}{nml} \iiint x_1^{\frac{p}{n}-1} y_1^{\frac{q}{m}-1} z_1^{\frac{r}{l}-1} dx_1 dy_1 dz_1$

při $x_1 + y_1 + z_1 < 1$. A to podle předcházejícího příkladu dává

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{nml} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right) \Gamma\left(\frac{q}{m}\right) \Gamma\left(\frac{r}{l}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{n} + \frac{q}{m} + \frac{r}{l}\right)}.$$

1016. Ve fysice má význam integrál

$$I = \int_{u_0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-\frac{\varepsilon - w_i}{kT}} du dv dw \text{ při } \varepsilon = \frac{1}{2}m(u^2 + v^2 + w^2).$$

$$\text{Vydeme od př. 930 } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

$$u e^{-\frac{m}{2kT}\left(u^2 + w^2 - \frac{2w_i}{m}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m}{2kT}v^2} dv = B \sqrt{\frac{\pi}{\frac{2kT}{m}}}.$$

$$u e^{-\frac{m}{2kT}\left(u^2 - \frac{2w_i}{m}\right)} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{2kT}{m}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m}{2kT}w^2} dw = C \frac{2\pi kT}{m}.$$

$$I = e^{\frac{w_i}{kT}} \frac{2\pi kT}{m} \int_{u_0}^{\infty} u e^{-\frac{m}{2kT}u^2} du. \quad \frac{m}{2kT}u^2 = z, \quad u du = \frac{kT}{m} dz.$$

$$\int_{u_0}^{\infty} = \int_{z_0}^{\infty} e^{-z} dz \frac{kT}{m}, \quad e^z = x, \quad dz = \frac{dx}{x}, \quad u_0 = \frac{1}{2}(mu_0^2),$$

$$\frac{m}{kT} \int_{u_0}^{\infty} = \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x_0} = e^{-z_0} = e^{-\frac{m}{2kT}u_0^2} = e^{-\frac{w_0}{kT}}.$$

$$I = e^{-\frac{w_0 - w_i}{kT}} \frac{2\pi(kT)^2}{m^2}.$$

1017. Pro obor uvnitř elipsoidu $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$

má integrál v příkladu 1015 hodnotu

$$I = \frac{1}{8} a^p b^q c^r \frac{\Gamma(\frac{1}{2}p) \Gamma(\frac{1}{2}q) \Gamma(\frac{1}{2}r)}{\Gamma(1 + \frac{1}{2}(p + q + r))}.$$

Pro $p = q = r = 1$ jest to objem $\frac{1}{8}$ elipsoidu.

Pro $q = r = 1$, $p = 2$ dostáváme S_x oktantu elipsoidu $\frac{1}{16}\pi a^2 bc$ jako př. 1011.

Pro $p = 3$, $q = r = 1$ dostáváme I_1 z příkladu 1012, pro moment setrvačnosti.

1018. Analogicky k př. 1014 plyne pro n -násobný integrál $I_p = \iint \dots \int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_n^{p_n-1} (1 - x_1 - \dots - x_n)^{p-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n$ v oboru $x_1 + x_2 + \dots + x_n < 1$

$$I_p = \frac{\Gamma(p) \Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p + p_1 + p_2 + \dots + p_n)}. \text{ Pro } p = 1 \text{ plyne}$$

$$I_1 = \iint \dots \int x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 \dots dx_n = \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(1 + p_1 + \dots + p_n)}.$$

Týž integrál v oboru $\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} + \dots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n} < 1$

přechází po substitucích $x_i = a_i z_i^{\frac{1}{\alpha_i}}$ v integrál

$$I_\alpha = \frac{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \int \dots \int z_1^{\frac{p_1}{\alpha_1}-1} \dots z_n^{\frac{p_n}{\alpha_n}-1} dz_1 \dots dz_n$$

a tedy má hodnotu
$$\frac{a_1^{p_1} \dots a_n^{p_n}}{\alpha_1 \dots \alpha_n} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \dots \Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{p_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n}\right)}.$$

Pro $p_i = 1$, $a_i = 1$, $\alpha_i = 2$ jest speciálně

$\iint \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n = V_n$ v oboru $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1$

$$V_n = \frac{\Gamma^n(\frac{1}{2})}{\Gamma(1 + \frac{1}{2}n)} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(1 + \frac{1}{2}n)} = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}n}}{n\Gamma(\frac{1}{2}n)}.$$

(Objem n -rozměrné koule.)

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

I. OBYČEJNÉ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

Základní úlohy

Separací proměnných řešíme rovnici

$$f_1(x) g_1(y) dx + f_2(x) g_2(y) dy = 0, \quad (g_1 f_2 \neq 0)$$

takto
$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = c.$$

Rovnice homogenní $dy = f\left(\frac{y}{x}\right) dx$ se převedou na první případ změnou $y = xz$, $dy = x dz + z dx$. Rovnice přejde ve tvar

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

V homogenní rovnici přechází $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$, když položíme

$$a_1x + b_1y + c_1 = \xi, \quad a_2x + b_2y + c_2 = \eta, \quad \text{je-li } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

Je-li $a_2x + b_2y = \lambda(a_1x + b_1y)$, zavedeme $a_1x + b_1y = z$ a proměnné lze separovati.

Rovnice lineární $y' + X_1y = X_2$, (X_1, X_2 jsou funkce x) řeší se nejprve bez členu X_2 . $\frac{dy}{y} = -X_1 dx$; $y = ce^{-\int X_1 dx}$.

Pak vložíme toto y do původní rovnice, považující c za funkci x . Obdržíme $c'e^{-\int X_1 dx} = X_2$, tedy

$$c = \int X_2 e^{\int X_1 dx} dx + k. \quad \text{Potom } y = e^{-\int X_1 dx} [\int X_2 e^{\int X_1 dx} dx + k].$$

Methoda slove variace konstanty.

Uhodneme-li jeden partikulární integrál y_1 úplné rovnice, je obecný $y = y_1 + ke^{-\int X_1 dx}$. Známe-li dva partikulární integrály y_1, y_2 , jest obecný $y = y_1 + k(y_2 - y_1)$.

Mnohé rovnice lze převést na uvedené typy vhodnými substitucemi.

Rovnice Bernoulliho $y' + X_1 y = X_2 y^n$ se převede na lineární substitucí $z = y^{1-n}$. Dělicí y^n dostáváme

$$z' + (1 - n) X_1 z = (1 - n) X_2.$$

Rovnice Riccatiho jest $y' = X_0 + X_1 y + X_2 y^2$, kde X_i jsou funkce pouze x . Nelze ji obecně řešiti kvadraturami. Je-li však y_1 partiikulární integrál, přejde substitucí $y = y_1 + z$ v Bernoulliho

$$z' - (X_1 + 2X_2 y_1) z = X_2 z^2.$$

Příklady

1019. Řešiti rovnice $x^2 y' = 1 - y$. Rovnice $\frac{dy}{1-y} = \frac{dx}{x^2}$ dává integrováním

$$\lg(1 - y) = \frac{1}{x} + \lg k, \quad 1 - y = k e^{\frac{1}{x}} \quad \text{a tedy} \quad y = 1 - k e^{\frac{1}{x}}.$$

1020. $(x^2 - 3y^2) x dx + (3x^2 - y^2) y dy = 0$ je homogenní. Zavedeme $y = xz$, $dy = x dz + z dx$ a dostaneme

$$\frac{dx}{x} = - \frac{(3 - z^2) z dz}{1 - z^4}. \quad \text{Úpravou}$$

$$- \frac{dx}{x} = \frac{3(1 - z^2) z dz}{1 - z^4} + \frac{2z^3 dz}{1 - z^4} = \frac{3z dz}{1 + z^2} + \frac{2z^3 dz}{1 - z^4} \quad \text{a}$$

integrací dostaneme $-\lg x = \frac{3}{2} \lg(1 + z^2) - \frac{1}{2} \lg(1 - z^4) - \lg a$,

$$x = a \frac{\sqrt{(1 - z^2)(1 + z^2)}}{(1 + z^2)\sqrt{1 + z^2}} = a \frac{\sqrt{1 - z^2}}{1 + z^2};$$

odtud $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

1021. $y' = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$. Položíme $\frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1} = \xi$, $2dx - dy = d\xi$,
 $x - 2y + 1 = \eta$, $dx - 2dy = d\eta$,

$$3dx = 2d\xi - d\eta, \quad 3dy = d\xi - 2d\eta.$$

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{d\xi - 2d\eta}{2d\xi - d\eta}, \quad \eta(d\xi - 2d\eta) = \xi(2d\xi - d\eta).$$

Zavedeme $\eta = \xi z$, $d\eta = z d\xi + \xi dz$.

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{1-2z}{2(z^2-z+1)} dz = -\frac{1}{2} \frac{(2z-1) dz}{z^2-z+1},$$

$$2 \lg \xi = -\lg(z^2-z+1) + \lg c,$$

$$\xi^2(z^2-z+1) = c_1 = \eta^2 - \xi\eta + \xi^2,$$

neboli

$$x^2 - xy + y^2 + x - y = c.$$

1022. $y' = -\frac{2x+3y-1}{2x+3y-5}$. Položíme $\frac{2x+3y}{2dx+3dy} = z$,
 $dy(z-5) = -(z-1)dx$, $3dy = dz - 2dx$,
 $(dz-2dx)(z-5) = -(z-1)dx$,
 $-dx = dz \frac{z-5}{z+7} = dz \left(1 - \frac{12}{z+7}\right)$,
 $3c - x = z - 12 \lg(z+7)$,
 $c = x + y - 4 \lg(2x+3y+7)$.

1023. Určiti orthogonální trajektorie soustavy čar $y^2 + 3x^2 - 2ax = 0$, kde a je proměnný parametr.

Derivací $2yy' + 6x - 2a = 0$, $2a = \frac{y^2 + 3x^2}{x}$.

Za y' dosadíme $-\frac{1}{y'}$ a dostaneme $(y^2 - 3x^2)y' + 2xy = 0$;

$$y = zx, \quad \frac{dx}{x} + \frac{3dz}{z} - \frac{dz}{z+1} - \frac{dz}{z-1} = 0,$$

$$xz^3 = c(z^2 - 1) \quad \text{neboli} \quad y^3 = c(y^2 - x^2).$$

1024. Totéž pro soustavu kružnic poloměru r , $(x-a)^2 + y^2 = r^2$, kde a je proměnlivé.

Do $x-a + yy' = 0$ zavedeme $-\frac{1}{y'}$ místo y' a dostaneme

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y}, \quad \text{kde musíme vyloučiti } a \text{ pomocí původní rovnice.}$$

$$x-a = \sqrt{r^2 - y^2}, \quad x = \int \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{y} dy. \quad \text{Položme } y = r \sin \varphi$$

$$x = r \int \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} d\varphi = r(\cos \varphi + \lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi) + k,$$

x, y jsou parametrické rovnice trajektorií. K témuž výsledku bychom přišli hledající čáry o konstantní délce tečny. Křivka slove traktrix. Je to evolventa řetězovky (obr. P. 19).

1025. Řešiti rovnici $(1 + x^2) y' - xy = a$.

Je lineární
$$y' - \frac{x}{1 + x^2} y = \frac{a}{1 + x^2}.$$

Rovnice bez pravé strany
$$\frac{dy}{y} = \frac{x dx}{1 + x^2}$$

dává
$$\lg y = \frac{1}{2} \lg(1 + x^2), \quad y = c \sqrt{1 + x^2}.$$

Variací konstanty dostaneme

$$c' \sqrt{1 + x^2} = \frac{a}{1 + x^2}, \quad c' = \frac{a}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

odtud podle př. 434, 488, 798b

$$c = \frac{ax}{\sqrt{1 + x^2}} + k; \quad y = ax + k \sqrt{1 + x^2}.$$

1026. Řešiti $y' \cos x + y \sin x = a$.

Ohled je patrný partikulární integrál $y_1 = a \sin x$. Položme $y = a \sin x + z$; dostaneme $z' \cos x + z \sin x = 0$,

$$\frac{dz}{z} = -\operatorname{tg} x \cdot dx, \quad \lg z = \lg \cos x + \lg c, \quad z = c \cos x,$$

$$y = a \sin x + c \cos x.$$

1027. Řešiti vhodnou substitucí $y' = \sqrt{ax + by + c}$.

Položíme $ax + by + c = z^2$, $dy = z dx$, $a dx + bz dx = 2z dz$,

$$dx = \frac{2z}{a + bz} dz, \quad b dx = 2dz - \frac{2a}{bz + a} dz,$$

$$bx + k = 2z - \frac{2a}{b} \lg(a + bz),$$

$$bx + k = 2\sqrt{ax + by + c} - \frac{2a}{b} \lg(a + b\sqrt{ax + by + c}).$$

Substitucemi lze integrovati na př. rovnice:

1028. $y' = f(ax + by + c)$,

$$z = ax + by + c, \quad dz = a dx + b dy,$$

$$\frac{dz - a dx}{b} = f(z) dx, \quad dz = dx[a + b f(z)].$$

1029. $yy' = f\left(\frac{y^2}{x}\right)$. $y^2 = z$, $yy' = \frac{1}{2}z'$, $z' = 2f\left(\frac{z}{x}\right)$ je homogenní.

1030. $y' = y^2 f(xy)$. $xy = z$, $y + xy' = z'$,

$$y' = \frac{1}{x} \left(z' - \frac{z}{x} \right), \quad z' - \frac{z}{x} = x \frac{z^2}{x^2} f(z),$$

$$z' = \frac{z}{x} [1 + z f(z)], \quad \frac{dz}{z[1 + z f(z)]} = \frac{dx}{x}.$$

1031. $x + yy' = f(x) g(\sqrt{x^2 + y^2})$, $x^2 + y^2 = z^2$,
 $zz' = f(x) g(z)$, $x + yy' = zz'$,

$$\frac{z dz}{g(z)} = f(x) dx \text{ má separované proměnné.}$$

1032. Řešiti $2ky' + \frac{1}{x^2} + y^2 = 0$, $2ky' = -y^2 \left(1 + \frac{1}{x^2 y^2}\right)$.

Podle uvedeného zavedeme $xy = z$, $y' = \frac{1}{x} \left(z' - \frac{z}{x} \right)$.

$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{x}{2k} \frac{z^2}{x^2} \left(1 + \frac{1}{z^2}\right), \quad z' = \frac{z}{x} \left[1 - \frac{z}{2k} \left(1 + \frac{1}{z^2}\right)\right],$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{2k dz}{z^2 - 2kz + 1} = 0.$$

Pro $k^2 > 1$

$$\frac{dx}{x} + \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} \left(\frac{1}{z - k - \sqrt{k^2 - 1}} - \frac{1}{z - k + \sqrt{k^2 - 1}} \right) dz = 0,$$

$$\lg x + \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} \lg \frac{z - k - \sqrt{k^2 - 1}}{z - k + \sqrt{k^2 - 1}} = \lg c.$$

Odtud

$$x \left(\frac{xy - k - \sqrt{k^2 - 1}}{xy + k + \sqrt{k^2 - 1}} \right)^{\frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}}} = c$$

nebo

$$x^{\frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k}} = a \frac{xy - k + \sqrt{k^2 - 1}}{xy - k - \sqrt{k^2 - 1}}$$

$$\text{a konečně} \quad xy = k + \sqrt{k^2 - 1} \frac{x^{\frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k}} + a}{x^{\frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}}} - a}.$$

1033. Vzájemnou záměnou proměnných $\bar{x}, y$ řešiti rovnici $y'(x + y^2) = 1$.

Pišme $\frac{dx}{dy} - x = y^2$, která je lineární a má integrál

$$ce^y - y^2 + 2y - x + 2 = 0.$$

1034. Řešiti rovnici $(1 - x^2)y' - xy = axy^2$. (Bernoulliova)

$$(1 - x^2) \frac{y'}{y^2} - \frac{x}{y} = ax, \quad \frac{1}{y} = z.$$

$$(1 - x^2)z' + xz = -ax \text{ je lineární.}$$

$$\frac{z'}{z} + \frac{x}{1 - x^2} = 0 \text{ má integrál } \lg z = \frac{1}{2} \lg(x^2 - 1) + \lg c;$$

$$z = c\sqrt{x^2 - 1} \text{ dosadíme do lineární považující } c \text{ za funkci } x$$

$$\text{a máme } (1 - x^2)c'\sqrt{x^2 - 1} = -ax, \quad c' = \frac{1}{2} \frac{2ax}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}},$$

$$c = k - \frac{a}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\text{a celkem tedy } z = k\sqrt{x^2 - 1} - a = \frac{1}{y}.$$

1035. Řešiti $xy' + y = xy^3$.

Rovnice je Bernoulliova, ale možno ji psáti jednoduše

$$d(xy) = (xy)^3 \frac{dx}{x^2}, \quad xy = z. \quad -\frac{1}{2z^2} = -\frac{1}{x} - c,$$

$$2z^2 = \frac{x}{1 + cx}, \quad 2xy^2(cx + 1) = 1 \text{ nebo při } c = \frac{1}{2}k$$

$$xy^2(kx + 2) = 1.$$

Podobně lze řešiti $xy' + y = y^2 \lg x$.

1036. Řešiti $xyy'(1 + xy^2) = 1$.

$$\frac{1}{y^4} = x' = xy(1 + xy^2) \text{ je Bernoulliova pro } x.$$

$$\frac{x'}{x^2} - \frac{y}{x} = y^3; \quad z = \frac{1}{x} \quad \text{dává} \quad z' + zy = -y^3,$$

ta má integrál $z = 2 - y^2 + ke^{-\frac{1}{2}y^2} = \frac{1}{x}.$

1037. Řešiti rovnici Riccatiovu $y' = b - ay^2$, kde a, b jsou konstanty.

$$-\frac{dy}{y^2 - \frac{b}{a}} + a dx = 0 \quad \text{má integrál}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{b}} \lg \frac{y - \sqrt{\frac{b}{a}}}{y + \sqrt{\frac{b}{a}}} + a(x - c) = 0$$

nebo $y = \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{e^{a(x-c)} \sqrt{\frac{b}{a}} + e^{-a(x-c)} \sqrt{\frac{b}{a}}}{e^{a(x-c)} \sqrt{\frac{b}{a}} - e^{-a(x-c)} \sqrt{\frac{b}{a}}} \quad \text{pro} \quad \frac{b}{a} > 0.$

(Viz také př. 1032.)

Integrační faktor

Rovnice exaktní je taková, kde $f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0$ má na levé straně úplný diferenciál. Musí býti $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$. Nejčastěji se stane rovnice exaktní po násobení integračním faktorem $\mu(x, y)$, pro

něžž $\frac{\partial \mu f}{\partial y} = \frac{\partial \mu g}{\partial x}$ nebo $g \frac{\partial \mu}{\partial x} - f \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right).$

Poměr dvou integračních faktorů je integrál rovnice. Integrační faktor rovnice homogenní je

$$\frac{1}{xf + yg}.$$

Úplný diferenciál má integrál $\int_{x_0}^x f(x, y) dx + \int_{y_0}^y g(x_0, y) dy = C$, bereme-li společné členy jen jednou.

Příklady

1038. Řešiti $x(x^2 + y^2 - a^2) dx + y(x^2 + y^2 - b^2) dy = 0$.

$x(x^2 + y^2) dx + y(x^2 + y^2) dy = a^2 x dx + b^2 y dy$ je exaktní.

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 = \frac{1}{2}a^2(x^2 + y^2) + c \quad \text{neboli}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 + y^2) + k.$$

1039. Řešiti integračním faktorem rovnici $(x + 2y) dx + y dy = 0$.
 Integrační faktor této homogenní rovnice je

$$\mu = \frac{1}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{1}{(x + y)^2}.$$

$$\int \frac{x + 2y}{(x + y)^2} dx = \lg(x + y) - \frac{y}{x + y},$$

$$\int \frac{y}{(x + y)^2} dy = \lg(x + y) + \frac{x}{x + y},$$

$$\lg(x + y) - \frac{y}{x + y} = C.$$

1040. Dokázati, že $y' = f(x, y)$ je lineární, když integrační faktor $\mu(x)$ je pouze funkcí x .

Z parciální rovnice pro faktor plyne $-1 \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \frac{\partial f}{\partial y} = \varphi(x)$,

z toho $\frac{\partial f}{\partial y} = \varphi_1(x)$, $f(x, y) = \varphi_1(x) y + \varphi_2(x)$,

Je to skutečně rovnice lineární.

1041. Naléztí integrační faktor z parciální rovnice pro dif. rovnici
 $(x^n + y) dx - x dy = 0$.

$$-x \frac{\partial \mu}{\partial x} - (x^n + y) \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \cdot 2 \text{ splňuje } \mu = \frac{1}{x^2}.$$

Rovnice je lineární: $y' - \frac{1}{x} y = x^{n-1}$.

$$y = x \left[\int x^{n-2} dx + k \right] = kx + \frac{x^n}{n-1}.$$

Rovnice neřešené podle y' . Singulární integrály

Nelineární rovnice v y' mohou mít vedle integrálu obecného ještě integrál singulární, který představuje často obálku křivek určených partikulárními integrály $F(x, y, c) = 0$, takže splňuje také $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$ a vznikne eliminací c z obou rovnic. Singulární integrál je též faktorem

diskriminantu vzniklého eliminací y' z $f(x, y, y') = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$.

Často je snazší rozhodnout, jsou-li splněny $f(x, y, \lambda) = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \lambda = 0 \quad \text{pro } S(x, y) = 0.$$

Pak je S singulární integrál. (Pravidlo Lagrangeovo.)

Jednotlivé případy

Má-li algebraická rovnice $f(x, y, y') = 0$ kořeny $y'_i = f_i(x, y)$, integrujeme tyto rovnice 1. stupně a dostaneme integrály $\varphi_i(x, y, c) = 0$.

Rovnice $y = f(y')$ řeší se derivací podle x

$$y' = p = f'(p) \frac{dp}{dx}, \quad dx = \frac{f'(p)}{p} dp; \quad \text{odtud}$$

$x = \varphi(p)$, $y = f(p)$ vyjadřují parametricky integrál rovnice dané.

Rovnice $x = f(y')$ se řeší stejně.

$$1 = f'(p) \frac{dp}{dx}, \quad dy = p dx, \quad dy = p f'(p) \cdot dp \quad \text{dává } y = \psi(p).$$

Potom $x = \varphi(p)$, $y = \psi(p)$ dávají integrál parametricky.

Obecněji lze někdy obě proměnné y, p nebo x, p vyjádřit parametrem u a odtud pak plynou integrály kvadraturami ve tvaru parametrickém.

$y = f(x, y')$ derivujeme podle x a dostaneme

$$p = \frac{\partial}{\partial x} f(x, p) + \frac{\partial}{\partial p} f(x, p) \frac{dp}{dx}.$$

Lze-li nalézt její integrál $p = \varphi(x, c)$, je hledaný integrál

$$y = f[x, \varphi(x, c)].$$

Nebo pro $x = \varphi(p)$, je $y = f[(\varphi(p), p)]$ parametrické vyjádření integrálu.

$y = f(y, y')$ řeší se podobně derivací podle x .

Rovnice *Clairautova* $y = xy' + f(y')$ má obecný integrál

$$y = cx + f(c).$$

Rovnice *Lagrangeova* $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ řeší se derivací podle x .

Vede k lineární

$$[\varphi(p) - p] \frac{dx}{dp} + x\varphi'(p) + \psi'(p) = 0.$$

Příklady

1042. Řešiti $yy'^3 = x$.

$y^{\frac{1}{3}} dy = x^{\frac{1}{3}} dx$ má separované proměnné, $y^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{4}{3}} + c$ je reálný integrál.

1043. Určiti orthogonální trajektorie kružnic $(x - m)^2 + y^2 = r^2$.

$$2(x - m) dx + 2y dy = 0, \quad xy' = -\frac{x - m}{y},$$

$$y'^2 = \left(\frac{x - m}{y}\right)^2 = \frac{r^2 - y^2}{y^2}.$$

Pro orthogonální trajektorie místo y' nutno psáti $-\frac{1}{y'}$.

Dostaneme $y'^2 = \frac{y^2}{r^2 - y^2}; \quad \frac{dx}{dy} = \pm \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{y}.$

Integrací $\pm x = \int \frac{1}{y} \sqrt{r^2 - y^2} dy.$

V integrálu I pišme $y = r \sin \varphi$, $dy = r \cos \varphi d\varphi$.

$$I = \int \frac{r \cos \varphi}{\sin \varphi} \cos \varphi d\varphi = r \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi} - r \int \sin \varphi d\varphi = \\ = r \operatorname{lg} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi + r \cos \varphi + c.$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{y}{r + \sqrt{r^2 - y^2}}.$$

$$\pm x = \sqrt{r^2 - y^2} + r \operatorname{lg} \frac{y}{r + \sqrt{r^2 - y^2}} + c.$$

1044. Určiti poledník rotační plochy, která odráží paprsky rovnoběžné s osou do téhož bodu osy. Osa x budiž osou rotační, ohnisko v počátku O . Pak úhel tečny s průvodičem musí se rovnati úhlu tečny s osou x .

$$\frac{\frac{y}{x} - y'}{\frac{y}{x} + \frac{yy'}{x}} = y', \quad yy'^2 + 2xy' - y = 0.$$

$$y'_{1,2} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y} \text{ je homogenní, } z = \frac{y}{x}.$$

$$z'x + z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+z^2}}{z}, \quad z'x = \frac{-(1+z^2) \pm \sqrt{1+z^2}}{z},$$

$$\frac{z \, dz}{-(1+z^2) \pm \sqrt{1+z^2}} = \frac{dx}{x} = \frac{u \, du}{-u^2 \pm u} = \frac{du}{-u \pm 1},$$

$$1 + z^2 = u^2, \quad z \, dz = u \, du.$$

$$\lg x = \lg c - \lg(1 - \sqrt{1+z^2}) = \lg c - \lg\left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right),$$

$$x = \frac{cx}{x - \sqrt{x^2+y^2}}, \quad x - \sqrt{x^2+y^2} = c,$$

$$x^2 - 2cx + c^2 = x^2 + y^2, \quad y^2 = -2cx + c^2,$$

a píšeme-li $-c = k$, máme též $y^2 = 2kx + k^2$ (konfokální paraboly).

1045. Určiti čáry o konstantní délce normály.

Jejich diferenciální rovnice zní $y^2 y'^2 + y^2 - a^2 = 0$.

$$y' = \pm \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}, \quad \frac{y \, dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \pm dx.$$

$$\sqrt{a^2 - y^2} = \pm x + c \text{ neboli } a^2 - y^2 = (x + c)^2.$$

Diskriminant $y^2 - a^2 = 0$ dává singulární integrály $y = \pm a$.

1046. Řešiti rovnici $y^2(y' - 1) = (2 - y')^2$.

Je tvaru $y = f(y')$. Možno však použití vyjádření parametric-

kého $2 - y' = yu$, odkud $y' = 1 + u^2$, $y = \frac{1}{u} - u$.

$dy = y' dx$ dává $-du \frac{1+u^2}{u^2} = (1+u^2) dx$ nebo $dx =$

$= -\frac{du}{u^2}$. Tedy $x = \frac{1}{u} + c$ a obecný integrál je

$$y = x - c - \frac{1}{x - c}.$$

1047. Podobně řešiti $y^3 + y'^3 = 3yy'$.

Podle př. 801 lze zavést parametrické vyjádření $y' = yu$:

$$y' = \frac{3u}{1+u^3}, \quad y = \frac{3u^2}{1+u^3}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(2u + 2u^4 - 3u^4)}{(1 + u^3)^2} \frac{du}{dx} = \frac{3u}{1 + u^3},$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{2 - u^3}{1 + u^3}, \quad x = -u + \int \frac{3du}{1 + u^3} \quad (\text{viz př. P. 504}).$$

$$x = -u + 1 \frac{u + 1}{\sqrt{u^2 - u + 1}} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2u - 1}{\sqrt{3}} + c,$$

$$y = \frac{3u^2}{1 + u^3} \text{ vyjadřují integrál parametricky.}$$

1048. Řešiti derivací $(1 + x^2) y'^2 - 2xyy' + y^2 - 1 = 0$.

$$2p \frac{dp}{dx} (1 + x^2) + 2xp^2 - 2xp^2 - 2yp = 2xy \frac{dp}{dx} + 2yp = 0,$$

$$\frac{dp}{dx} (p + px^2 - xy) = 0.$$

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad p = y' = c \text{ dává dosazeno do rovnice}$$

$$(1 + x^2) c^2 - 2xyc + y^2 - 1 = 0 \text{ a odtud}$$

$$y = cx \pm \sqrt{1 - c^2}.$$

Druhý činitel $p + px^2 - xy = 0$ dává $p = \frac{xy}{1 + x^2}$, což vloženo do rovnice vede k singulárnímu integrálu $y^2 - x^2 = 1$.

1049. Řešiti $y'^2 + 2y'^3 = y$.

Rovnici lze psáti $y = p^2 + 2p^3$, derivací odtud

$$p = 2p \frac{dp}{dx} + 6p^2 \frac{dp}{dx} \text{ nebo } (2 + 6p) dp = dx$$

$$\text{a integrací } 2p + 3p^2 = x + c, \quad y = p^2 + 2p^3.$$

1050. Řešiti $yy'^2 - 2xy' + y = 0$.

Bylo by možno vypočísti y' atd.

$$\text{Jinak} \quad x = \frac{yp^2 + y}{2p} = \frac{yp}{2} + \frac{y}{2p}$$

$$\text{a derivací} \quad dx = \left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2p} \right) dy + \left(\frac{y}{2} - \frac{y}{2p^2} \right) dp.$$



Odtud
$$\frac{dy}{p} - \frac{p^2 + 1}{2p} dy = \frac{y}{2p^2} (p^2 - 1) dp,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2p(p^2 - 1)}{2p^2(1 - p^2)} dp = -\frac{dp}{p}.$$

Integrací $\lg y = -\lg p + k$, $p = \frac{c}{y}$, což dosazeno do x dává

$$x = \frac{y^2}{2c} + \frac{1}{2}c, \text{ nebo obecný integrál } y^2 = 2cx - c^2.$$

Derivujíce podle c máme $0 = 2x - 2c$, $x = c$. $y^2 = x^2$,
 $y = \pm x$ je integrál singulární.

1051. Určiti čáru, jejíž tečny mají konstantní součet úseků na osách souřadnicových.

Z podmínky plyne $y = xy' + \frac{ay'}{y' - 1}.$

Dostali jsme rovnici Clairautovu s integrálem $y = cx + \frac{ac}{c - 1}.$

Pro obálku derivujeme podle c :

$$x - \frac{a}{(c - 1)^2} = 0, \quad c = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \quad y = (\sqrt{a} + \sqrt{x})^2,$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{x} = \pm \sqrt{y} \quad \text{nebo} \quad (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2 = a.$$

1052. Řešiti $(y - xy')^2 - a^2 y'^2 = b^2(1 + y'^2).$

Označme $a^2 + b^2 = c^2$, pak z rovnice dané plyne $y - xy' = \pm \sqrt{b^2 + c^2 y'^2}$, což jsou rovnice Clairautovy. Obecný integrál $y = kx \pm \sqrt{b^2 + c^2 k^2}$. Singulární integrál je $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1.$

1053. Řešiti $4y^2 y'^3 - 2xy' + y = 0$ substitucí $y = \sqrt{z}.$

Substituce vede k rovnici Clairautově $z = xz' - \frac{1}{3}z'^3$ s obecným integrálem $y^2 = z = cx - \frac{1}{3}c^3$. Derivujeme podle c :

$$0 = x - \frac{2}{3}c^2, \quad c = \sqrt{\frac{3}{2}x}, \quad y^2 = \sqrt{\frac{3}{2}x}(x - \frac{1}{3}x) = \sqrt{\frac{3}{2}x} \frac{x}{3},$$

nebo $27y^4 = 8x^3$ jest singulární integrál.

1054. Řešiti $y = y'^2 + x(y' + 1).$

Je to rovnice Lagrangeova. Derivujeme ji dle x .

$$p = \frac{dp}{dx} (2p + x) + p + 1,$$

$$\frac{dx}{dp} = -2p - x, \text{ nebo } \frac{dx}{dp} + 2p = -x \text{ je lineární.}$$

$$x = e^{-p}(c - 2 \int p e^p dp) = e^{-p}(c - 2e^p p + 2e^p),$$

$$x = ce^{-p} - 2p + 2, \quad y = p^2 + x(p + 1),$$

$$y = ce^{-p}(p + 1) - p^2 + 2.$$

1055. Integrovaťi $(y - xy') \cos y' = 1 - x \sin y'$.

Jinak $y = x(y' - \operatorname{tg} y') + \frac{1}{\cos y'}$. (Rovnice Lagrangeova.)

Derivací $x \sin y' + \frac{dx}{dy'} \cos y' = 1$. Jest pro x lineární.

Řešení je $x = \sin p + a \cos p$, $y = x(p - \operatorname{tg} p) + \frac{1}{\cos p}$.

Vypočteme-li $\sin p$ kladouce $\cos p = \sqrt{1 - \sin^2 p}$,

obdržíme $(1 + a^2) \sin p = x \pm a \cdot \sqrt{1 + a^2 - x^2}$,

podobně $(1 + a^2) \cos p = ax \mp \sqrt{1 + a^2 - x^2}$, odtud

$$\operatorname{tg} p = \frac{x \pm a \sqrt{1 + a^2 - x^2}}{ax \mp \sqrt{1 + a^2 - x^2}} = \frac{a \pm x \sqrt{1 + a^2 - x^2}}{-1 + x^2},$$

$$p = \operatorname{arctg} \frac{a \pm x \sqrt{1 + a^2 - x^2}}{-1 + x^2}.$$

Obecný integrál původní diferenciální rovnice je

$$y + x \operatorname{arctg} \frac{a \pm x \sqrt{1 + a^2 - x^2}}{1 - x^2} \pm \sqrt{1 + a^2 - x^2} = 0.$$

1056. Naléztí evolventu čáry $\eta^2 = 2a\xi$ jako orthogonální trajektorii tečen.

Tečna $y - \eta = \eta'(x - \xi)$; $\eta\eta' = a$

$$\eta = \frac{a}{\eta'}, \quad \xi = \frac{a}{2\eta'^2}, \quad \eta' = -\frac{1}{y'}$$

dosazeno do rovnice tečny dává

$$y + \frac{x}{y'} = -ay' + \frac{1}{2}ay', \text{ tedy } y + \frac{x}{y'} + \frac{1}{2}ay' = 0.$$

Derivováním obdržíme

$$p + \frac{1}{p} - \frac{x}{p^2} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{2}a \frac{dp}{dx} = 0, \quad \frac{p^2 + 1}{p} = \frac{dp}{dx} \left(\frac{x}{p^2} - \frac{1}{2}a \right),$$

$$\frac{dx}{dp} - \frac{x}{p(p^2 + 1)} = -\frac{ap}{2(p^2 + 1)}. \quad (\text{Rovnice lineární.})$$

Její integrál obsahuje výraz

$$\int \frac{dp}{p(p^2 + 1)} = \int \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} \right) dp = \lg \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} = \lg \sin \varphi,$$

jestliže píšeme za $p = \operatorname{tg} \varphi$.

$$x = \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} \left(-\frac{1}{2}a \int \frac{p}{p^2 + 1} \frac{\sqrt{p^2 + 1}}{p} dp + c \right) = \\ = \sin \varphi (k + \frac{1}{2}a \lg \cos \varphi) \quad \text{a z diferenciální rovnice}$$

$$y = -\cos \varphi (k + \frac{1}{2}a \lg \cos \varphi) - \frac{1}{2}a \operatorname{tg} \varphi.$$

II. OBYČEJNÉ ROVNICE ŘÁDU DRUHÉHO

Některé základní typy a jejich integrace

$y'' = f(x)$ dává integrací $y' = \int f(x) dx + c_1 = \varphi(x) + c_1$ (t. zv. první integrál) a další integrací obecný integrál

$y = \int \varphi(x) dx + c_1 x + c_2$, který obsahuje 2 integrační konstanty.

$y'' = f(y)$. Násobíme $2y'$ a integrací rovnice $2y'y'' = 2f(y) \cdot y'$ dostaneme $y'^2 = \int 2f(y) dy = \varphi(y) + c_1$; odtud

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(y) + c_1}}, \quad \text{a dále } x = \int \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y) + c_1}} + c_2.$$

$$y'' = f(y'). \quad \text{Jinak } p' = f(p), \quad dx = \frac{dp}{f(p)}, \quad x = \int \frac{dp}{f(p)} + c_1;$$

$$dy = p dx, \quad dy = \frac{p}{f(p)} dp, \quad y = \int \frac{p}{f(p)} dp + c_2.$$

$$y' = \varphi(y''). \quad \text{Jinak } p = \varphi(q), \quad \text{kde } q = \frac{dp}{dx}. \quad dp = \varphi'(q) dq,$$

$$dx = \frac{dp}{q} = \frac{\varphi'(q)}{q} dq, \quad dy = p dx = \frac{\varphi(q) \varphi'(q)}{q} dq,$$

kde jsou proměnné separovány.

$F(x, y', y'') = 0$ neobsahuje y , přechází v $F(x, p, p') = 0$, t. j. v rovnici prvního řádu.

$F(y, y', y'') = 0$ přejde v $F\left(y, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$, ale volí se za neoddvisle proměnnou y , takže $\frac{dp}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ a rovnice $F\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0$ je prvního řádu. Někdy vede k cíli i derivování dané rovnice.

Příklady

1057. Určiti čáru, jejíž poloměr křivosti jest úměrný třetí mocnině délky normály.

Z podmínky plyne $\pm \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p'} = k(y\sqrt{1 + p^2})^3$, nebo

$ky^3 p' \pm 1 = 0$, která neobsahuje x .

$$dp = \pm \frac{dx}{ky^3} = \pm \frac{dy}{pky^3}, \quad p dp = \pm \frac{dy}{ky^3},$$

$$\frac{1}{2}p^2 = \pm \frac{1}{2ky^2} + c_1, \quad p = \frac{\sqrt{2c_1 y^2 k \pm 1}}{y\sqrt{k}}.$$

Píšeme-li $\frac{1}{2c_1} = n$, $\frac{1}{k} = a^2$, jest

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 \pm na^2}}{y\sqrt{n}}, \quad dx = \sqrt{n} \frac{y dy}{\sqrt{y^2 \pm na^2}} \quad \text{a integrací}$$

$$x - m = \sqrt{n} \sqrt{y^2 \pm na^2}, \quad (x - m)^2 - ny^2 = \pm n^2 a^2.$$

Obecný integrál jsou kuželosečky.

1058. Nalézti křivky, jejichž poloměr křivosti má stálý poměr k délce normály. (Ribaucourovy křivky)

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = ky\sqrt{1 + y'^2}, \quad \text{tedy } 1 + y'^2 = kyy''.$$

Opět rovnice neobsahuje x . $1 + p^2 = ky \frac{dp}{dx} = kyp \frac{dp}{dy}$.

$$\text{Odtud} \quad \frac{dy}{ky} = \frac{p dp}{1 + p^2}, \quad \frac{1}{2} \lg(1 + p^2) = \frac{1}{k} \lg y + c.$$

$$1 + p^2 = \left(\frac{y}{c_1}\right)^{\frac{2}{k}}, \quad \text{a odtud } p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y}{c_1}\right)^{\frac{2}{k}} - 1}.$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c_1}\right)^{\frac{2}{k}} - 1}}, \quad x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c_1}\right)^{\frac{2}{k}} - 1}} + c_2.$$

Křivka je algebraická pro k celistvé.

1059. Integrovať rovnici $ky'' \operatorname{arctg} y' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$.

Jinak $k \frac{dp}{dx} = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{\operatorname{arctg} p}$, odkud $dx = k \frac{\operatorname{arctg} p}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} dp$

a integrací per partes (viz př. 858)

$$\begin{aligned} x + c_1 &= k \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \operatorname{arctg} p - \int \frac{p dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \\ &= \frac{k}{\sqrt{1 + p^2}} (p \operatorname{arctg} p + 1). \end{aligned}$$

$$dy = p dx = k \frac{p \operatorname{arctg} p}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} dp;$$

$$\begin{aligned} \text{per partes} \quad y &= k \left(-\frac{\operatorname{arctg} p}{\sqrt{1 + p^2}} + \int \frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + c_2 = \\ &= \frac{k}{\sqrt{1 + p^2}} (p - \operatorname{arctg} p) + c_2. \end{aligned}$$

(Křivky jsou evolventy kružnice. Viz Vojtěch II, str. 702.)

1060. Integrovať $xy'' + (x^2 - 1)y' - x^3 = 0$.

Neobsahuje y . Pišme $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx}$.

$$\frac{dp}{dx} + \left(x - \frac{1}{x} \right) p = x^2 \text{ je lineární.}$$

$$p = x e^{-\frac{1}{2}x^2} (c_1 + e^{\frac{1}{2}x^2}) = c_1 x e^{-\frac{1}{2}x^2} + x,$$

$$dy = p dx = (c_1 x e^{-\frac{1}{2}x^2} + x) dx.$$

$$y - c_2 = \frac{1}{2} x^2 - c_1 e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

Rovnice *homogenní* tvaru $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ měj partikulární integrály y_1, y_2 . Pak jest obecný integrál $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Partikulární integrál je $y = e^{\lambda x}$, kde λ je kořen rovnice charakteristické $a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$. Dvěma různým kořenům λ_1, λ_2 odpovídá obecný integrál $y = c_1e^{\lambda_1x} + c_2e^{\lambda_2x}$.

Jsou-li $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, lze upravit integrál na tvar

$$y = e^{\alpha x}(a_1 \cos \beta x + a_2 \sin \beta x).$$

Je-li kořen dvojnásobný $\lambda_{1,2} = \alpha$, je obecný integrál

$$y = e^{\alpha x}(c_1 + c_2x).$$

Rovnice *nehomogenní* (se druhým členem) jsou tvaru $a_0y'' + a_1y' + a_2y = B(x)$, kde a_i jsou konstanty. Jsou-li y_1, y_2 partikulární integrály rovnice bez druhého členu a $v(x)$ partikulární integrál rovnice nehomogenní, jest její obecný integrál $y = c_1y_1 + c_2y_2 + v$. Funkce v závisí ovšem na $B(x)$. Je-li $B(x) = e^{\beta x} p_n(x)$, kde $p_n(x)$ je mnohočlen stupně n , tu

pro $\beta \neq \lambda_{1,2}$ klademe $v = e^{\beta x}(d_0 + d_1x + \dots + d_nx^n)$ a koeficienty d_i se najdou methodou neurčitých činitelů;

pro $\beta = \lambda_1$ klademe $v = x^e e^{\lambda_1 x}(d_0 + \dots + d_nx^n)$, je-li λ_1 e -násobný kořen charakt. rovnice.

$B(x) = e^{\beta x}[p_1(x) \cos \gamma x + p_2(x) \sin \gamma x]$, kde mnohočleny p_1, p_2 jsou stupně nejvýše n , položíme pro $\beta \neq \lambda_{1,2}$ $v = e^{\beta x}(q_1 \cos \gamma x + q_2 \sin \gamma x)$, kde q_1, q_2 jsou opět mnohočleny stupně n . Pro $\beta = \lambda_1$ pak píšeme $v = x^e e^{\lambda_1 x}(q_1 \cos \gamma x + q_2 \sin \gamma x)$, je-li λ_1 kořen e -násobný.

Příklady

1061. Integrovať $y'' + 3y' + 2 = 0$. $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ má kořeny $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Obecný integrál $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$.
1062. Integrovať $y'' - y' - 12 = 0$. $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ má kořeny $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -3$. Obecný integrál jest $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-3x}$.
1063. Integrovať $y'' - 6y' + 9 = 0$. $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$ má $\lambda_{1,2} = 3$ a obecný integrál $y = e^{3x}(c_1 + c_2x)$.
1064. Integrovať $4y'' - 12y' + 9y = 0$. $4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \frac{3}{2}$ a obecný integrál $y = e^{\frac{3}{2}x}(c_1 + c_2x)$.
1065. Integrovať $y'' + 9y = 0$. $\lambda^2 + 9 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Obecný integrál jest $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$.

1066. Integrovať $y'' + y' + y = 0$. $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ dáva $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Obecný integrál $y = e^{-\frac{1}{2}x} (c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$.

1067. Integrovať $y'' - 2y' + 4 = 0$. $\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$ dáva $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$. Obecný integrál $y = e^x (c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x)$.

1068. Integrovať $y'' - 3y' + 2y = 0$. Rovnice charakteristická $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ má kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Obecný integrál $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

1069. Integrovať $y'' - 4y' + 4y = 0$. $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ má $\lambda_{1,2} = 2$, tedy integrál $y = e^{2x}(c_1 + c_2 x)$.

1070. Integrovať $y'' + 4y = 0$. $\lambda^2 + 4 = 0$ má $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. $y = a_1 \cos 2x + a_2 \sin 2x$.

1071. Integrovať $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$. $\beta = -1$ není kořenem charakteristické rovnice, je $v = de^{-x}$. Dosazením do rovnice $d = \frac{1}{6}$.

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{6} e^{-x}.$$

1072. Integrovať $y'' - 3y' + 2y = e^x$. $\beta = 1$ jest kořen jednoduchý charakt. rovnice, tedy $v = dx e^x$. Dosazením do rovnice $d = -1$.

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x.$$

1073. Integrovať $y'' - 3y' + 2y = \cos x$. $v = d_1 \cos x + d_2 \sin x$. Dosazením do rovnice $d_1 = \frac{1}{10}$, $d_2 = -\frac{3}{10}$, takže obecný integrál

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{10}(\cos x - 3 \sin x).$$

1074. Integrovať $y'' - 3y' + 2y = 10 \cos x + 6e^{-x} + 3e^x$. Partikulární integrál bude lineárně složen z integrálů předchozích rovnic, neboť pravá strana je lineárně složena z druhých členů těchto rovnic. Takže

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \cos x - 3 \sin x + e^{-x} - 3x e^x.$$

1075. Integrovať $y'' + 4y = \cos 3x$. $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. $v = d \cos 3x$. Dosazením $d = -\frac{1}{5}$. $y = a_1 \cos 2x + a_2 \sin 2x - \frac{1}{5} \cos 3x$.

1076. Integrovať $y'' + 4y = e^x \cos 2x$. $v = e^x(d \cos 2x + c \sin 2x)$, d, c se vypočtou dosazením do původní rovnice a

$$y = a_1 \cos 2x + a_2 \sin 2x + x e^x (d \cos 2x + c \sin 2x).$$

1077. Integrovať $y'' - 4y = x^2 e^{3x}$. $\lambda^2 - 4 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 2$. Partikulární integrál klademe $v = e^{3x}(d_0 + d_1x + d_2x^2)$. Dosadíme do rovnice:

$$\begin{aligned} v' &= 3e^{3x}(d_0 + d_1x + d_2x^2) + e^{3x}(d_1 + 2d_2x), \\ v'' &= 9e^{3x}(d_0 + d_1x + d_2x^2) + 6e^{3x}(d_1 + 2d_2x) + e^{3x} 2d_2. \end{aligned}$$

Dostaneme:

$$9(d_0 + d_1x + d_2x^2) + 6(d_1 + 2d_2x) + 2d_2 - 4d_0 - 4d_1x - 4d_2x^2 = x^2,$$

$$5d_2x^2 + (12d_2 + 5d_1)x + 5d_0 + 6d_1 + 2d_2 = x^2.$$

$$\text{Odtud } d_2 = \frac{1}{5}, 12d_2 + 5d_1 = 0, 5d_0 = \frac{7}{5} - \frac{2}{5} = \frac{6}{5},$$

$$d_1 = -\frac{12}{5}, d_0 = \frac{6}{5}.$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{125} e^{3x} (62 - 60x + 25x^2).$$

1078. Integrovať $y'' - y' - 2y = a$. $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, $\lambda_{1,2} = 2; -1$.

Zrejme $v = -\frac{1}{2}a$, tedy $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}a$.

1079. Integrovať $y'' + 2y' + y = x^2 + 9x$. $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$,

$\lambda_{1,2} = -1$. Položme $v = d_0 + d_1x + d_2x^2$. Dosazením

$v' = d_1 + 2d_2x$, $v'' = 2d_2$ do dané rovnice plyne

$2d_2 + 2d_1 + 4d_2x + d_0 + d_1x + d_2x^2 = x^2 + 9x$. Srovnáním činitelů $d_0 + 2d_1 + 2d_2 = 0$, $4d_2 + d_1 = 9$, $d_2 = 1$.

$$d_0 = -12, d_1 = 5.$$

$$y = e^{-x}(c_1 + c_2x) + x^2 + 5x - 12.$$

1080. Integrovať $y'' + 2y' + y = e^{-x}(2 + 3x)$, $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$,

$\lambda_{1,2} = -1$. $v = x^2 e^{-x}(a + bx)$ vloženo do původní rovnice,

dává $v' = [2x(a + bx) - x^2(a + bx) + x^2b] e^{-x}$,

$$v'' = [2(a + bx) + 2bx - 2x(a + bx) - x^2b + 2xb - 2x(a + bx) + x^2(a + bx) - x^2b] e^{-x},$$

$$6bx + 2a = 2 + 3x; a = 1, b = \frac{1}{2},$$

$$y = e^{-x}(c_1 + c_2x + x^2 + \frac{1}{2}x^3).$$

Lineární rovnice 2. řádu s proměnnými koeficienty

Má-li homogenní rovnice $y'' + Py' + Qy = 0$ partikulární in-

tegrál y_1 , je další integrál $y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx} dx$.

Známe-li partikulární integrál v rovnice nehomogenní $y'' + Py' + Qy = B$ a obecný integrál homogenní u , jest obecný integrál rovnice nehomogenní $y = u + v$.

Variace konstant. Známe-li dva partikulární integrály y_1, y_2 rovnice homogenní, klademe pro nehomogenní $v = z_1 y_1 + z_2 y_2$, kde funkce z_1, z_2 hoví rovnicím

$$z_1' y_1 + z_2' y_2 = 0,$$

$$z_1' y_1' + z_2' y_2' = B.$$

Eulerova rovnice $a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0$ přejde substitucí $x = e^t$ v rovnici s konstantními koeficienty. Položíme-li $y = x^\lambda$ řešíme charakteristickou rovnici pro λ . Kořenům ϱ -násobným přísluší integrály $x^\lambda (\lg x)^{\varrho-1}$.

Příklady

1081. Integrovaní rovnici $x^2 y'' - (2n - 1) x y' + n^2 y = 0$.

Je to rovnice Eulerova. Položíme $y = x^\lambda$ a obdržíme

$y' = \lambda x^{\lambda-1}$, $y'' = \lambda(\lambda - 1) x^{\lambda-2}$ a dosazením

$x^\lambda [\lambda(\lambda - 1) - (2n - 1)\lambda + n^2] = 0$, nebo $(\lambda - n)^2 = 0$.

$\lambda_{1,2} = n$, takže rovnice má partikulární integrály $y_1 = x^n$,

$y_2 = x^n \lg x$ a obecný integrál $y = x^n (c_1 + c_2 \lg x)$.

Druhý partikulární integrál bylo možno vypočítati podle dříve uvedené obecné poučky vzorcem

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx} dx = x^n \int \frac{1}{x^{2n}} e^{\int \frac{2n-1}{x} dx} dx = \\ &= x^n \int \frac{1}{x^{2n}} e^{(2n-1) \lg x} dx = x^n \lg x. \end{aligned}$$

1082. Integrovaní $x^2 y'' + x y' - y = f(x)$.

Rovnice bez druhého členu je Eulerova. Položíme $y = x^\lambda$.

$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - 1 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Partikulární integrál dané rovnice předpokládáme nyní ve tvaru

$v = z_1 x + \frac{z_2}{x}$, a pro z_1, z_2 platí

$$x z_1' + \frac{1}{x} z_2' = 0, \text{ tedy } z_1' = -\frac{1}{2} f(x),$$

$$z_1' - \frac{1}{x^2} z_2' = \frac{f(x)}{x^2}, \quad z_2' = \frac{1}{2} \frac{f(x)}{x^2}.$$

$$v = -\frac{1}{2}x \int f(x) dx - \frac{1}{2x} \int f(x) d\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\text{Obecný integrál } y = c_1 x + \frac{c_2}{x} + v.$$

1083. Integrovať $x^2 y'' + xy' + y = x$.

Charakteristická rovnice ľavej strany po dosadení $y = x^\lambda$, $\lambda(\lambda - 1) + \lambda + 1 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm i$. Tým odpovídají partikulární integrály $\cos t = \operatorname{cosl} g x$, $\sin t = \operatorname{sinl} g x$. Partikulární integrál dané rovnice je zřejmě $y = \frac{1}{2}x$, takže obecný

$$y = \frac{1}{2}x + c_1 \operatorname{cosl} g x + c_2 \operatorname{sinl} g x.$$

1084. Integrovať $y'' + n^2 y = f(x)$ variací konstant.

Charakteristická rovnice $\lambda^2 + n^2 = 0$, dává $\lambda_{1,2} = \pm in$ a obecný integrál $y = z_1 \cos nx + z_2 \sin nx$. Variace konstant žádá

$$\begin{aligned} z_1' \cos nx + z_2' \sin nx &= 0, \\ -z_1' n \sin nx + z_2' n \cos nx &= f(x). \end{aligned} \quad \text{Odtud plyne}$$

$$z_1' = -\frac{1}{n} f(x) \sin nx, \quad z_2' = \frac{1}{n} f(x) \cos nx. \quad f(x) \text{ a obecný integrál}$$

$$\begin{aligned} y &= \left(c_1 - \frac{1}{n} \int f(x) \sin nx dx \right) \cos nx + \\ &+ \left(c_2 + \frac{1}{n} \int f(x) \cos nx dx \right) \sin nx. \end{aligned}$$

1085. Integrovať $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 + px + q$.

Charakteristická rovnice ľavej strany $\lambda(\lambda - 1) - 2\lambda + 2 = 0$ má kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. $y_1 = x$, $y_2 = x^2$.

Členu q odpovídá partikulární integrál $v_1 = \frac{1}{2}q$.

$y = z_1 y_1 + z_2 y_2$ podrobíme variací konstant.

$$z_1' x + z_2' x^2 = 0, \quad z_1' = -1 - \frac{p}{x},$$

$$z_1' + z_2' \cdot 2x = 1 + \frac{p}{x}, \quad z_2' = \frac{1}{x} + \frac{p}{x^2}$$

$$\text{Odtud} \quad z_1 = -x - p \lg x, \quad z_2 = \lg x - \frac{p}{x}$$

a integrál obecný dané rovnice jest

$$y = c_1'x + c_2'x^2 + \frac{1}{2}q - x^2 - px \lg x + x^2 \lg x - px$$

$$\text{nebo} \quad y = c_1x + c_2x^2 + x^2 \lg x - px \lg x + \frac{1}{2}q.$$

1086. Najděte nutnou a postačující podmínku, aby rovnice $y'' + py' + qy = 0$ měla dva různé integrály y_1, y_2 takové, že $y_1 y_2 = 1$. Je-li $p = -\frac{1}{x}$, nalézt q a obecný integrál.

Má platiti $y_2'' + py_2' + qy = 0$ pro $y_2 = \frac{1}{y_1}$. Odtud

$$y_2' = -\frac{y_1'}{y_1^2}, \quad y_2'' = -\frac{y_1''y_1 - 2y_1'^2}{y_1^3},$$

$$\text{a po dosazení} \quad y_1 y_1'' - 2y_1'^2 + p y_1 y_1' - q y_1^2 = 0,$$

$$\text{jinak} \quad y_1(y_1'' + p y_1' + q y_1) - 2q y_1^2 - 2y_1'^2 = 0. \quad \text{Z toho}$$

$$y_1'^2 + q y_1^2 = 0, \quad \frac{y_1'}{y_1} = \pm \sqrt{-q}, \quad \lg y_1 = \pm \int \sqrt{-q} \, dx;$$

$$y_{1,2} = e^{\pm \int \sqrt{-q} \, dx}, \quad y_1' = \sqrt{-q} e^{\int \sqrt{-q} \, dx},$$

$$y_1'' = -\frac{q'}{2\sqrt{-q}} e^{\int \dots} + (-q) e^{\int \dots}.$$

Dosazením do původní rovnice vyplyne

$$-\frac{q'}{2\sqrt{-q}} + (-q) + p\sqrt{-q} + q = 0, \quad \frac{q'}{q} = -2p,$$

$$q = e^{-2\int p \, dx}. \quad \text{Speciálně pro } p = -\frac{1}{x} \text{ máme } q = x^2$$

$$\text{a rovnice zní} \quad y'' - \frac{1}{x} y' + x^2 y = 0.$$

$$\text{Avšak bylo} \quad y_{1,2} = e^{\pm \int \sqrt{-q} \, dx} = e^{\pm \int x \, dx} = e^{\pm \frac{1}{2}x^2}.$$

$$\text{Obecný integrál je tedy } y = c_1 \cos \frac{1}{2}x^2 + c_2 \sin \frac{1}{2}x^2,$$

$$\text{užijeme-li vztahů } e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z.$$

1087. Nalézti obecný integrál rovnice

$$(2x + 1) y'' + (4x - 2) y' - 8y = (6x^2 + x - 3) e^x,$$

víme-li, že partikulární integrál rovnice bez druhého členu je e^{mx} . Dosazením do homogenní rovnice dostaneme

$$(2x + 1) m^2 e^{mx} + (4x - 2) m e^{mx} - 8e^{mx} = 0,$$

$$x(2m^2 + 4m) + m^2 - 2m - 8 = 0;$$

pro každé x musí býti $m^2 + 2m = 0$, $m = -2$; souhlasí s $m^2 - 2m - 8 = 0$. Partikulární integrál homog. rovnice je tedy $e^{-2x} = y_1$. Podle theorie je hned

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-2 \int \frac{2x-1}{2x+1} dx} dx.$$

$$u = \frac{2x-1}{2x+1} = 1 - \frac{2}{2x+1},$$

$$\int u dx = x - \lg(2x+1), \quad e^{-2 \int u dx} = e^{-2x} (2x+1)^2.$$

Je tedy $y_2 = e^{-2x} \int e^{2x} (2x+1)^2 dx = 2(x^2 + \frac{1}{4})$. (Př. 479.)

Předpokládejme dále pro partikulární integrál rovnice s druhým členem ve tvaru $v = e^x(ax+b)$, dostaneme

$v' = e^x(ax+b+a)$, $v'' = e^x(ax+b+2a)$ a po dosazení do rovnice vychází $a = 1$, $b = \frac{1}{3}$. Obecný integrál dané rovnice je tudíž $y = c_1 e^{-2x} + c_2 (x^2 + \frac{1}{4}) + e^x (x + \frac{1}{3})$.

Integrace řadami

Není-li snadné řešiti lineární rovnici $y'' + P(x) y' + Q(x) y = 0$ jinými způsoby, zkoušíme pro integrál mocninovou řadu

$y = x^\alpha (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$ a koeficienty určíme po dosazení do rovnice dané methodou neurčitých činitelů. Sem patří na př. dif. rovnice

Legendreova $(1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n+1) y = 0,$

Besselova $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0,$

Gaussova $x(1-x) y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] y' - \alpha\beta y = 0$

také zvaná hypergeometrickou. Důkladnější poučení jest v učebnicích vyšší analyzy. Některé další řešitelné případy dif. rovnic druhého řádu najde čtenář také v oddíle o rovnicích řádu n -tého.

III. OBYČEJNÉ ROVNICE ŘÁDU n -TÉHO

Základní typy

Rovnice $y^{(n)} = f(x)$ se integruje n -krát za sebou, takže

$$y = \int dx \int dx \dots \int f(x) dx + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n,$$

nebo
$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z) dz + P_{n-1}(x).$$

V rovnici $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ dosadí se $y^{(n-1)} = z$, $y^{(n)} = z'$.

V rovnici $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ dosadí se $y^{(k)} = z$.

V rovnici $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ zvolí se y za nezávisle proměnnou a $p = y'$ za neznámou funkci. Pak

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} p, \quad y''' = \frac{d}{dy} \left(\frac{dp}{dy} p \right) p = p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + p^2 \frac{d^2 p}{dy^2} \text{ atd.}$$

Rovnice homogenní v $y, y', \dots, y^{(n)}$ má tvar

$$F\left(x, \frac{y'}{y}, \dots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0$$

řeší se substitucí $\frac{y'}{y} = u, y' = yu,$

$$y'' = y(u^2 + u'), \quad y''' = y(u^3 + 3uu' + u''), \text{ atd. } y = e^{\int u dx}.$$

Rovnice homogenní v $x, y, dx, dy, d^2y, \dots, d^{(n)}y$ se nezmění při transformaci $x = Cx, y = Cy$. Řeší se substitucí $y = e^u, x = ve^u$.

Příklady

Integrovatí rovnice:

1088. $y''' = x \sin x$.

$$y'' = \int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + c_1,$$

$$y' = \int (-x \cos x) dx = -\cos x = -x \sin x - 2 \cos x + c_1 x + c_2,$$

$$y = x \cos x - 3 \sin x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3.$$

1089. $a^2 y^{IV} = y''$.

Položíme $y'' = z$. Dostaneme $a^2 z'' - z = 0$ lineární.

$$a^2 \lambda^2 - 1 = 0 \text{ dává } \lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{a}; \quad z = c_1 e^{\frac{x}{a}} + c_2 e^{-\frac{x}{a}} = y''.$$

Dvojití integrací $y = b_1 e^{\frac{x}{a}} + b_2 e^{-\frac{x}{a}} + b_3 x + b_4$.

1090. $yy'y'' = y'^3 + y''^2$.

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy} \text{ dává}$$

$$yp^2 \frac{dp}{dy} = p^3 + p^2 \left(\frac{dp}{dy} \right)^2,$$

$$p = y \frac{dp}{dy} - \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 \quad \text{Clairautova.}$$

Tudíž $p = c_1 y - c_1^2 = y'$, $\frac{dy}{y - c_1} = c_1 dx$, $y = c_1 + c_2 e^{c_1 x}$

integrál obecný. Avšak Clairautova rovnice má také singulární integrál pro diskriminant $y^2 - 4y' = 0$. Odtud singulární

integrály rovnice dané $y = \frac{4}{c - x}$.

1091. $xyy' + y'^2 = yy''$. (Homogenní v y, y', y'' .)

Dosadíme $y = e^{\int u dx}$, $y' = yu$, $y'' = y(u^2 + u')$.
 $y^2(u^2 + u') = y^2 u^2 + xy^2 u$, $u^2 + u' = u^2 + xu$,

$$\frac{du}{u} = x dx, \quad \lg u = \frac{1}{2} x^2 + \lg c_1, \quad u = c_1 e^{\frac{1}{2} x^2},$$

$$\int u dx = c_1 \int e^{\frac{1}{2} x^2} dx + \lg c_2 = c_1 \varphi(x) + \lg c_2, \quad y = c_2 e^{c_1 \varphi(x)}.$$

1092. $5(y''')^2 - 3y''y^{IV} = 0$.

Položíme $y'' = z$. Vznikne $5z'^2 - 3zz'' = 0$ homogenní.

$$5z'^2 u^2 - 3z^2(u^2 + u') = 0, \quad 3u' = 2u^2,$$

$$z' = zu, \quad z'' = z(u^2 + u'), \quad z = e^{\int u dx}.$$

neboli $\frac{du}{u^2} = \frac{2}{3} dx$, $\frac{-1}{u} = \frac{2}{3}(x + c_1)$, $u = -\frac{3}{2} \frac{1}{x + c_1}$.

$$z = y'' = c_2(x + c_1)^{-\frac{3}{2}}, \quad y' = -2c_2(x + c_1)^{-\frac{1}{2}} + c_3,$$

$$y = -4c_2(x + c_1)^{\frac{1}{2}} + c_3 x + c_4.$$

1093. $\frac{1}{x} yy' + y'^2 = yy''$. (Opět homogenní.)

$$y' = yu, \quad y'' = y(u^2 + u'), \quad y = e^{\int u dx}.$$

$$\frac{1}{x} y^2 u + y^2 u^2 = y^2 (u^2 + u').$$

$$\frac{1}{x} = \frac{u'}{u}, \quad \lg u = \lg x + k,$$

$$u = 2c_1 x, \quad 2 \int c_1 x dx = c_1 x^2 + d, \quad y = c_2 e^{c_1 x^2}.$$

Rovnice lineární řádu n -tého

Má-li rovnice bez druhého členu $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$ partikulární integrály $y_1, y_2, \dots, y_n$, jest obecný integrál

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$. Má-li rovnice se druhým členem $b(x)$ partikulární integrál v , jest její obecný integrál $y + v$. Integrál rovnice s druhým členem lze určit také variací konstant.

Má-li rovnice lineární bez druhého členu *koefficienty konstantní*, řešíme charakteristickou rovnici $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$. Je-li λ reálný kořen p -násobný, je příslušný partikulární integrál $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{p-1} e^{\lambda x}$. Komplexním kořenům $\alpha \pm \beta i$ q -násobným přísluší podobně integrály tvaru $e^{\alpha x}(\cos \beta x + \sin \beta x), x e^{\alpha x}(-), \dots, x^{q-1} e^{\alpha x}(-)$. Je-li druhý člen rovnice tvaru $b(x) = e^{\beta x} P(x)$, kde $P(x)$ je mnohočlen stupně r , lze voliti za partikulární integrál při $\beta \neq \lambda$ $v = e^{\beta x} (d_0 + d_1 x + \dots + d_r x^r)$, při $\beta = \lambda$ pak $v = x^p e^{\beta x} (d_0 + \dots + d_r x^r)$. Je-li $b(x) = e^{\alpha x} (P \cos \gamma x + Q \sin \gamma x)$ volí se za partikul. integrál $v = e^{\alpha x} (P_1 \cos \gamma x + Q_1 \sin \gamma x)$, kde P_1, Q_1 jsou téhož stupně jako P, Q pro $\beta \neq \gamma$, kdežto pro $\gamma = \beta$ (q násob.) $v = x^q e^{\alpha x} (P_1 \cos \gamma x + Q_1 \sin \gamma x)$.

Rovnice *Eulerova* $a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$ se transformuje substitucí $x = e^t$ v rovnici s konstantními koefficienty. $y = x^\lambda$ poskytuje charakteristickou rovnici přímo. Jejím r -násobnému kořenu odpovídají integrály $x^\lambda, x^\lambda \lg x, \dots, x^\lambda (\lg x)^{r-1}$.

Příklady

Integrovatí rovnice:

1094. $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$.

Charakteristická rovnice $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$ má zřejmý kořen $\lambda_1 = 1$; dělíme-li kořenovým činitelem $(\lambda - 1)$, má zbývající kvadratická kořeny $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$.

Partikulární integrály jsou e^x , $e^x \cos x$, $e^x \sin x$ a obecný integrál

$$y = e^x(c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x).$$

1095. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2}^2 = -1$, $\lambda_{1,2} = i$, $\lambda_{3,4} = -i$.

Integrály jsou $\cos x$, $x \cos x$, $\sin x$, $x \sin x$, tedy

$$y = (c_1 + c_2 x) \cos x + (c_3 + c_4 x) \sin x.$$

1096. $y^V + y'' = x$.

Partikulární integrál rovnice je zřejmě $v = \frac{1}{6}x^3$. V rovnici bez druhého členu položíme $y'' = z$, $y^V = z'''$. Charakteristická

rovnice $\lambda^3 + 1 = 0$ má kořeny -1 , $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$. Tomu odpovídá obecný integrál

$$z = c_1 e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}(c_2 \cos \frac{1}{2}\sqrt{3}x + c_3 \sin \frac{1}{2}\sqrt{3}x) = y''.$$

Po dvojí integraci máme obecný integrál dané rovnice

$$y = a_1 + a_2 x + a_3 e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}(a_4 \cos \frac{1}{2}\sqrt{3}x + a_5 \sin \frac{1}{2}\sqrt{3}x) + \frac{1}{6}x^3.$$

To by ostatně plynulo i bez zavedení z z rovnice

$\lambda^5 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^3 + 1) = 0$. Kořenu $\lambda_{1,2} = 0$ by odpovídal partikulární integrál $a_1 + a_2 x$, ostatním tytéž jako prve.

1097. $y^{IV} - 2y'' + y = ae^x + be^{-x} + c \sin x + d \cos x$.

$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_{3,4} = -1$.

Těm odpovídá $y = e^x(c_1 + c_2 x) + e^{-x}(c_3 + c_4 x)$.

Rovnice s druhým členem má partikulární integrály

$$v_1 = d_0 x^2 e^x, \quad v_1'' = d_0 e^x(2 + 4x + x^2), \quad v_1^{IV} = d_0 e^x(12 + 8x + x^2)$$

a dosazením do dané plyne $d_0 = \frac{1}{8}a$. Podobně $v_2 = \frac{1}{8}x^2 e^{-x}$,

$$v_3 = \frac{1}{4}c \sin x, \quad v_4 = \frac{1}{4}d \cos x. \quad \text{Celkem}$$

$$y = e^x(c_1 + c_2 x + \frac{1}{8}x^2) + e^{-x}(c_3 + c_4 x + \frac{1}{8}x^2) + \frac{1}{4}(c \sin x + d \cos x).$$

1098. $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 7xy' - 8y = 0$.

Pro $y = x^\lambda$

$$y' = \lambda x^{\lambda-1}, \quad y'' = \lambda(\lambda-1) x^{\lambda-2}, \quad y''' = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) x^{\lambda-3},$$

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 3\lambda(\lambda-1) + 7\lambda - 8 = 0 =$$

$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda-2)^3.$$

$$y = x^2(c_1 + c_2 \lg x + c_3 \lg^2 x).$$

1099. $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 4xy' - 4y = x^3 - 2x.$

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) - 3\lambda(\lambda - 1) + 4\lambda - 4 = 0 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4).$$

Partikulární integrály jsou x , $x \lg x$, x^4 . Rovnice s druhým členem má

$$v = ax^3 + bx \lg^2 x,$$

$$v' = 3ax^2 + b \lg^2 x + 2b \lg x, \quad v'' = 6ax + \frac{2b \lg x}{x} + \frac{2b}{x},$$

$$v''' = 6a + \frac{2b}{x^2} - \frac{2b \lg x}{x^2} - \frac{2b}{x^2}. \quad \text{Dosazením do rovnice}$$

$$-4ax^3 - 6bx = x^3 - 2x \text{ plyne } a = -\frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Obecný integrál } y = c_1 x + c_2 x \lg x + c_3 x^4 - \frac{1}{4} x^3 + \frac{1}{3} x \lg^2 x.$$

1100. $y''' - 2y' + 4y = e^x \cos x.$

$$\lambda^3 - 2\lambda + 4 = 0 \text{ má kořeny } -2, 1 \pm i.$$

Partikulární integrály e^{-2x} , $e^x \cos x$, $e^x \sin x$.

Rovnice s druhým členem má partikulární integrál

$v = xe^x(a \cos x + b \sin x)$, kde a, b se najde dosazením. Pak

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \sin x + xe^x(a \cos x + b \sin x).$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{3}{2}.$$

Soustavy obyčejných rovnic lineárních

Kanonická soustava

$$\frac{dy}{dx} + a_1 y + b_1 z + \dots + m_1 t = P_1$$

.....

$$\frac{dt}{dx} + a_n y + b_n z + \dots + m_n t = P_n,$$

n rovnic, v nichž $a_i, b_i, \dots, m_i, P_i$ jsou funkce x , slove homogenní (bez druhého členu), jsou-li $P_i = 0$. Máme-li pro homogenní soustavu n skupin partik. integrálů $y_i, z_i, \dots, t_i$ ($i = 1, \dots, n$) lineárně nezávislých, je obecný integrál soustavy $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n, z = c_1 z_1 + \dots + c_n z_n, \dots, t = c_1 t_1 + \dots + c_n t_n$. — Partikulární integrály $\pi_1, \dots, \pi_n$ soustavy se druhým členem buď určíme zkusmo, nebo je nalezneme variací konstant.

Soustavy s koeficienty *konstantními*, na př.

$$\frac{dy}{dx} + a_1y + b_1z = 0, \quad \frac{dz}{dx} + a_2y + b_2z = 0,$$

řešíme dosazením $y = e^{\lambda x}$, $z = \mu e^{\lambda x}$. Konstanty λ, μ se určí z takto vzniklých 2 rovnic. Obecné integrály jsou pak

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad z = c_1 \mu_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \mu_2 e^{\lambda_2 x}.$$

V soustavě se druhým členem určíme partikulární integrály zkusmo nebo variací konstant.

Příklady

Integrovaní soustavy

1101. $y' + 7y - z = 0, \quad z' + 2y + 5z = 0.$

Položme $y = e^{\lambda x}$, $z = \mu e^{\lambda x}$ a dostaneme

$$\lambda + 7 - \mu = 0, \quad \mu\lambda + 2 + 5\mu = 0. \quad \text{Odtud } \mu = \lambda + 7$$

$$\text{a dále } \lambda^2 + 7\lambda + 2 + 5\lambda + 35 = \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -6 \pm i, \quad \mu_{1,2} = 1 \pm i. \quad \text{Partikulární integrály } y_1 = e^{-6x} e^{ix},$$

$$y_2 = e^{-6x} e^{-ix} \text{ možno upravit podle vzorců } e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \text{ a psáti nové partikulární integrály}$$

$$y_3 = e^{-6x} \cos x, \quad y_4 = e^{-6x} \sin x. \quad \text{Obecný integrál}$$

$$y = e^{-6x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) \text{ a z nejlépe dosazením do první}$$

$$\text{dané rovnice, odkud } z = e^{-6x}[(c_1 + c_2) \cos x + (c_2 - c_1) \sin x].$$

1102. $y' - y - 2z = x, \quad z' - 2y - z = x.$

$$\lambda - 1 - 2\mu = 0, \quad \mu\lambda - 2 - \mu = 0 \text{ dávají } \lambda = 1 + 2\mu \text{ a dále}$$

$$\mu + 2\mu^2 - 2 - \mu = 0, \quad 2(\mu^2 - 1) = 0, \quad \mu_{1,2} = \pm 1, \quad \lambda_1 = 3,$$

$$\lambda_2 = -1.$$

Integrály rovnic homogenních jsou

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}, \quad z = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}.$$

Za partikulární integrály rovnic úplných předpokládejme

$$y_1 = ax + b, \quad z_1 = cx + d.$$

Dosazením do daných rovnic máme

$$a - ax - b - 2cx - 2d = x,$$

$$c - 2ax - 2b - cx - d = x.$$

Odtud $a + 2c = -1$, $2a + c = 1$ dávají $a = c = -\frac{1}{3}$.

$a - b - 2d = 0$, $c - 2b - d = 0$ pak $b = d = -\frac{1}{9}$.

Celkem

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9},$$

$$z = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}.$$

1103. Pro řešení 2 rovnic lineárních s proměnnými činiteli

$$y' + A_1(x) \cdot y + A_2(x) \cdot z = A,$$

$$z' + B_1(x) \cdot y + B_2(x) \cdot z = B,$$

užívá se metody d'Alembertovy. Násobíme jednu $\sigma(x)$ a sečteme

$$y' + \sigma z' + (A_1 + B_1\sigma)y + (A_2 + B_2\sigma)z = A + \sigma B.$$

Položíme $y + \sigma z = t$, odkud $y' + \sigma z' = t' - \sigma'z$. Dostaneme

$$t' - \sigma'z + (A_1 + \sigma B_1)(t - \sigma z) + (A_2 + \sigma B_2)z = A + \sigma B,$$

kde odstraníme z tím, že pro σ zvolíme podmínky

$$\sigma' + (A_1 + \sigma B_1)\sigma - (A_2 + \sigma B_2) = 0; \text{ zbývá pak}$$

rovnice
$$t' + (A_1 + \sigma B_1)t - (A + \sigma B) = 0$$

lineární pro t , kterou rozřešíme, najdeme-li 2 partikulární integrály σ_1, σ_2 první rovnice tvaru Riccatiova.

Obecné soustavy nelineárních rovnic

Tyto lze převést na kanonický tvar

$$\frac{dx_i}{dx} = X_i(x, x_1, \dots, x_n) \quad [i = 1, 2, \dots, n]$$

při neodvisle proměnné x . Jinak také

$$dx = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Této soustavě hoví n prvních integrálů $f_i(x, x_1, x_2, \dots, x_n) = c_i$. Dáno-li n nezávislých integrálů, je každý další $f = \Phi(f_1, \dots, f_n)$. Abychom našli nějaký první integrál, tvoříme kombinace oněch rovnic integrace schopné, na př.

$$\frac{dx_i}{X_i} = \frac{\mu_1 dx_1 + \dots + \mu_n dx_n}{\mu_1 X_1 + \dots + \mu_n X_n}.$$

Je-li jmenovatel 0, je i čitatel $d\varphi = \mu_1 dx_1 + \dots + \mu_n dx_n = 0$ a integrací plyne první integrál $\varphi = c$.

Příklady

1104. Integrovať $\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}$.

$x dx + y dy + z dz = 0$ dáva prvý integrál $x^2 + y^2 + z^2 = c_1$;
 $l dx + m dy + n dz = 0$ dáva podobne $lx + my + nz = c_2$.

Tím jsou stanoveny y, z jako funkce x a dvou libovolných nezávislých konstant.

1105. Integrovať $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}$.

Z prvých 2 poměrů $x dx = y dy$ plyne $x^2 - y^2 = c_1$.

Z prvního a třetího $\frac{dx}{\sqrt{x^2 - c_1}} = \frac{dz}{z}$ plyne

$$z = c_2(x + \sqrt{x^2 - c_1}) = c_2(x + y).$$

1106. Integrovať $y' = \frac{z}{(z - y)^2}$, $z' = \frac{y}{(z - y)^2}$.

Lze psát $\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} = \frac{dx}{(z - y)^2}$.

$y dy = z dz$ dáva první integrál $y^2 - z^2 = c_1$.

$$\frac{dy - dz}{z - y} = \frac{dx}{(z - y)^2} \text{ píšme ve tvaru } -(y - z) d(y - z) = dx,$$

$$z \text{ čehož plyne } (y - z)^2 = -2x + 2c_2 = 2(c_2 - x).$$

Oba první integrály definují y, z jako funkce x a dvou konstant.

1107. Stanovit orthogonální trajektorie soustavy ploch $xyz = \lambda$.

Podmínka žádá $dx : dy : dz = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}$, kde F jest $xyz - \lambda$.

Tedy $\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}$.

$$\frac{y dy}{xyx} = \frac{x dx}{xyz} \text{ dáva } y^2 = x^2 + c_1,$$

$$z dz = y dy \text{ dáva } z^2 = y^2 + c_2.$$

Jinak $z^2 = y^2 + c_2 = x^2 + c_3$.

1108. Integrovať $\frac{dy}{dx} = z + u$, $\frac{dz}{dx} = u + y$, $\frac{du}{dx} = y + z$.

Píšme $\frac{dy}{z+u} = \frac{dz}{u+y} = \frac{du}{y+z} = dx$.

$$\frac{d(y-z)}{-(y-z)} = \frac{dx}{1}; \text{ odtud } y-z = c_1 e^{-x}.$$

$$\frac{d(y-u)}{-(y-u)} = \frac{dx}{1} \text{ dává } y-u = c_2 e^{-x}.$$

$$\frac{d(y+z+u)}{2(y+z+u)} = dx \text{ dává } y+z+u = c_3 e^{2x}.$$

Sečtením $3y = e^{-x}(c_1 + c_2) + c_3 e^{2x}$ nebo $y = a_1 e^{-x} + a_2 e^{2x}$, pak $z = a_3 e^{-x} + a_2 e^{2x}$, a dále $u = -(a_1 + a_3) e^{-x} + a_2 e^{2x}$. Integrace schopné kombinace lze ovšem tvořit přímo z rovnic daných,

na př. $\frac{d(y+z+u)}{dx} = 2(y+z+u)$ a pod.

1109. Integrovať soustavu $y' + \varphi'(x) \cdot y - \psi'(x) \cdot z = 0$,
 $z' + \psi'(x) \cdot y - \varphi'(x) \cdot z = 0$.

Píšme $\frac{dy}{z\psi' - y\varphi'} = \frac{dz}{\varphi'z - \psi'y} = dx$.

Utvořme $\frac{y dy + z dz}{-\varphi'(y^2 + z^2)} = dx = \frac{d(z^2 + y^2)}{-2(z^2 + y^2)\varphi'}$ a integraci

$$-2\varphi + k_1 = \lg(y^2 + z^2) \text{ nebo } y^2 + z^2 = \frac{c_1^2}{e^{2\varphi(x)}}. \quad (\text{I})$$

Podobně $\frac{z dy - y dz}{\psi'(z^2 + y^2)} = dx$ a zavedme $y = ze^u$, $\frac{y}{z} = e^u$,

$$\frac{z dy - y dz}{z^2} = e^u du. \text{ Dostaneme rovnici } \frac{e^u du}{1 + e^{2u}} = \psi' dx,$$

jejíž integrál jest $\arctg e^u = \arctg \frac{y}{z} = \psi(x) + c_2$ neboli

$$\frac{y}{z} = \operatorname{tg}(\psi + c_2). \text{ Dosazením za } y \text{ do (I)}$$

$$z^2[1 + \operatorname{tg}^2(\psi + c_2)] = \frac{c_1^2}{e^{2\varphi}} = \frac{z^2}{\cos^2(\psi + c_2)}.$$

$$\text{Tedy } z = \frac{c_1 \cdot \cos[\psi(x) + c_2]}{e^{\varphi(x)}}, \quad y = \frac{c_1 \cdot \sin[\psi(x) + c_2]}{e^{\varphi(x)}}.$$

Zkoušku lze provést dosazením do dané rovnice.

Soustavy rovnic vyššího řádu

Tyto soustavy, na př.

$$F(x; y, y', y''; z, z') = 0, \quad G(x; y, y'; z, z', z'') = 0$$

lze převést na kanonický tvar rovnic řádu prvního, píšeme-li

$$y' = u, \quad y'' = u', \quad z' = v, \quad z'' = v'.$$

Nebo při praktickém řešení z daných rovnic a jejich derivací eliminujeme všechny funkce a jejich derivace až na jednu, na př. y a její derivace $y', y'', \dots$. Tuto rovnici vyššího řádu integrujeme a máme y . Podobně se najdou funkce další.

Příklady

1110. Integrovati $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2z = 0, \quad \frac{d^2z}{dx^2} - a^2y = 0.$

Derivujeme první rovnici dvakrát a dosadíme za z'' ze druhé dostaneme $y^{IV} + a^4y = 0$. Pro $y = e^{ax}$ dostaneme rovnici charakteris-

tickou $\lambda^4 + a^4 = 0$ s kořeny $\lambda_{1,2,3,4} = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$. Obecný

integrál je tedy ($\alpha = a : \sqrt{2}$)

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x) + e^{-\alpha x}(c_3 \cos \alpha x + c_4 \sin \alpha x).$$

Z prvé rovnice $z = -\frac{1}{a^2}y''$, nebo podobnou eliminací

$z^{IV} + a^4z = 0$ s toutéž rovnicí charakteristickou, tedy s týmiž partikulárními integrály. Tak dostaneme dosazením

$$z = \frac{1}{2}e^{\alpha x}(c_1 \sin \alpha x + c_2 \cos \alpha x) + \frac{1}{2}e^{-\alpha x}(-c_3 \sin \alpha x + c_4 \cos \alpha x).$$

1111. Integrovati soustavu $\frac{d^2y}{dx^2} = -5y + 3z,$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 3y - 5z.$$

Sečtením dostáváme $\frac{d^2}{dx^2}(y + z) = -2(y + z).$

Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 2 = 0$ dává $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$ a integrál $y + z = c_1 \cos x\sqrt{2} + c_2 \sin x\sqrt{2}$. Podobně odečtením dostáváme rovnici $\frac{d^2}{dx^2}(y - z) = -8(y - z)$.

$$\lambda^2 + 8 = 0, \lambda_{1,2} = \pm 2i\sqrt{2} \text{ s integrálem}$$

$$y - z = c_3 \cos 2x\sqrt{2} + c_4 \sin 2x\sqrt{2}.$$

1112. Integrovaťi

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5y + z = \cos 2x,$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - y + 3z = 0.$$

Sečtením $\frac{d^2}{dx^2}(y + z) + 4(y + z) = 0.$

Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 4 = 0$ dává $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, takže integrál jest $y + z = a_1 \cos 2x + a_2 \sin 2x$. Vezmeme-li nyní ohled na druhý člen první rovnice $\cos 2x$, najdeme partikulární integrál součtové rovnice se druhým členem ve tvaru

$b_1 x \cos 2x + b_2 x \sin 2x$ a po dosazení vyplyne $b_1 = 0$, $b_2 = \frac{1}{4}$.

Jest tedy $y + z = a_1 \cos 2x + \sin 2x$. ($a_2 + \frac{1}{4}x$).

Dosadíme-li za y do druhé dané rovnice, jest

$$z'' + 4z = a_1 \cos 2x + a_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x \sin 2x.$$

Charakteristická rovnice je táž jako dříve. Druhému členu $a_1 \cos 2x$ odpovídá partik. integrál $\frac{1}{4}a_1 x \sin 2x$, členu $a_2 \sin 2x$ odpovídá partik. integrál $-\frac{1}{4}a_2 x \cos 2x$, členu $\frac{1}{4}x \sin 2x$ konečně $-\frac{1}{16}x^2 \cos 2x$. Je tedy

$$z = a_3 \cos 2x + a_4 \sin 2x + \frac{1}{4}a_1 x \sin 2x - \frac{1}{4}a_2 x \cos 2x - \frac{1}{16}x^2 \cos 2x,$$

$$z = \frac{1}{16}(16a_3 - 4a_2 x - x^2) \cos 2x + \frac{1}{4}(4a_4 + a_1 x) \sin 2x.$$

$$y = a_1 \cos 2x + \frac{1}{4}(4a_2 + x) \sin 2x - z.$$

IV. DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PARCIÁLNÍ

Rovnice lineární prvního řádu

Některé jednoduché typy lze integrovati kvadraturami. Lineární rovnice homogenní

$$\frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial x_1} X_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} X_n = 0$$

převádí se na integraci systému

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Podobně rovnice se druhým členem

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} X_1 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} X_n - R = 0$$

má integrál $V(z, x_1, \dots, x_n) = 0$, který hová rovnici homogenní

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n + R \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

a tím soustavě

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{R}.$$

Z n nezávislých integrálů $V_1, \dots, V_n$ plyne obecný integrál

$$F(V_1, \dots, V_n) = 0.$$

Soustavě

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

kde P, Q, R jsou nenulové funkce tří proměnných, vyhovují čáry charakteristické. Jejich tečny leží v tečné rovině plochy $z = f(x, y)$, neboť podle

$$P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} = R$$

t. j. jejich tečny jsou kolmé k normále plochy.

Integrál soustavy $\varphi(x, y, z) = c_1$, $\psi(x, y, z) = c_2$ je dvojparametrická soustava čar charakteristických. Obecný integrál $V(\varphi, \psi) = 0$ je plocha tvořená těmi charakteristikami, které hová $F(c_1, c_2) = 0$.

Příklady

1113. Integrovaní $\frac{\partial z}{\partial x} + z f(x, y) = g(x, y)$.

Je lineární pro z . Je tedy integrál $z = e^{-\int f dx} [\varphi(y) + \int g e^{\int f dx} dx]$, kde ovšem místo konstanty je $\varphi(y)$ nezávislá na x .

1114. Integrovaní $px + qy = mz$, kde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Rovnici řešíme soustavou $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{mz}$. Její první

integrály jsou $\frac{y}{x} = c_1$, $\frac{z}{x^m} = c_2$. Integrál obecný je

$z = x^m f\left(\frac{y}{x}\right)$. Pro $m = 1$ jsou charakteristiky přímky jdoucí počátkem a integrální plochy jsou kužely s vrcholem v počátku. Pro $m = 0$ jsou charakteristické přímky rovnoběžné s xy a protínají z . Plochy integrální jsou tu konoidy.

- 1115.** Integrovaní $(x - 6y)p + (10x - y)q = 6y^2 - 4x^2 - 36xy$.
Příslušná soustava je

$$\frac{dx}{x - 6y} = \frac{dy}{10x - y} = \frac{dz}{6y^2 - 4x^2 - 36xy}.$$

Odtud $10x dx - y dx = x dy - 6y dy$ nebo

$10x dx + 6y dy - (x dy + y dx) = 0$ a první integrál
 $5x^2 + 3y^2 - xy = c_1$.

Dále $4x dx + 6y dy + dz = 0$ poskytuje další integrál

$2x^2 + 3y^2 + z = c_2$. Obecný integrál je
 $F(z + 2x^2 + 3y^2, 5x^2 + 3y^2 - xy) = 0$.

- 1116.** Nalézt rovnici plochy vytvořené přímkou, jež při svém pohybu protíná osu z v konstantním úhlu.

Plocha $z = f(x, y)$ hověí tedy rovnici diferenciální, která vyjadřuje, že přímka směru

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} : \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} : \frac{1}{k} = \operatorname{tg} \gamma$$

je kolmá k normále plochy. Tedy

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{k}.$$

Řešíme pak soustavu $\frac{dx}{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} = \frac{dy}{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}} = k dz$.

Zřejmě $y dx - x dy = 0$, odkud $\frac{y}{x} = c_1$.

Dále
$$\frac{x \, dx + y \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k \, dz = \frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

dává první integrál $\frac{1}{k} \sqrt{x^2 + y^2} = z + c_2$. Obecný integrál

$$F\left(z - \frac{1}{k} \sqrt{x^2 + y^2}, \frac{y}{x}\right) = 0 \text{ nebo } z = \frac{1}{k} \sqrt{x^2 + y^2} + f\left(\frac{y}{x}\right)$$

dává hledané plochy.

1117. Odvoditi rovnici ploch, které protínají kolmo homothetické plochy kvadratické $mx^2 + ny^2 + pz^2 = k$.

Hledané plochy hovějí diferenciální rovnici, která vyjadřuje, že normály obou ploch jsou k sobě kolmé:

$$mx \frac{\partial z}{\partial x} + ny \frac{\partial z}{\partial y} - pz = 0.$$

Řešíme

$$\frac{dx}{mx} = \frac{dy}{ny} = \frac{dz}{pz}, \quad p \frac{dx}{x} = m \frac{dz}{z} \text{ dává } x^p = c_1 z^m, \text{ podobně}$$

$$p \frac{dy}{y} = n \frac{dz}{z} \text{ dává } y^p = c_2 z^n.$$

Obecný integrál $F\left(\frac{x^p}{z^m}, \frac{y^p}{z^n}\right) = 0$ je rovnice ploch.

Nelineární rovnice prvního řádu

Rovnice $F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$ má *úplný (kompletní) integrál* $f(x, y, z, a, b) = 0$ závislý na dvou parametrech a, b . Učiníme-li $b = \varphi(a)$ a má-li tato jednodemná soustava ploch obálku, slove tato obálka integrálem *obecným*. Dostane se eliminací a, b z rovnic $f = 0$, $b = \varphi(a)$, $\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b} \varphi'(a) = 0$. Obálka původního dvojmoemného systému ploch $f(x, y, z, a, b) = 0$ najde se eliminací a, b z rovnic $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$ a slove integrálem *singulárním*.

Danou rovnici $F(x, y, z, p, q) = 0$ podaří se někdy uvést na tvar $dz = p \, dx + q \, dy$, který se pak integruje. Na př. při $F(p, q) = 0$

zvolíme $p = a$ konstantní a z dané rovnice pak vyplyne $q = f(a)$. Integrací $dz = a dx + f(a) dy$ dostaneme úplný integrál $z = ax + f(a) \cdot y + b$.

Při $F(x, p, q) = 0$ zvolíme $q = a$, vypočteme $p = f(x, a)$ a integrujeme: $z = \int f(x, a) dx + ay + b$. $F(y, p, q) = 0$ řeší se volbou $p = a$. $z = xp + yq + f(p, q)$ má úplný integrál $z = ax + by + f(a, b)$.

Metoda Lagrange-Charpitova převádí řešení $F(x, y, z, p, q) = 0$ na řešení $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{pP + qQ} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ}$,

kde $P = \frac{\partial F}{\partial p}$, $X = \frac{\partial F}{\partial x}$ atd. Integrál $f(x, y, z, p, q) = c$ poskytne s danou rovnicí p, q pro $dz = p dx + q dy$. Odtud z .

Příklady

1118. Integrovaťi $pq = k$.

Položíme $p = a$, pak $q = \frac{k}{a}$ a máme $dz = a dx + \frac{k}{a} dy$

a úplný integrál jest $z = ax + \frac{k}{a} y + b$.

Obecný integrál má $b = \varphi(a)$. Funkci φ lze určit tak, aby integrální plocha procházela danou křivkou, na př.

$z = 0$, $x^2 + y^2 = r^2$ (kružnicí v xy). Musí pak

$$0 = ax + \frac{k}{a} y + \varphi(a), \text{ tedy } x = -\frac{1}{2a} [\varphi(a) + a \varphi'(a)],$$

$$0 = x - \frac{k}{a^2} y + \varphi'(a), \quad y = \frac{a}{2k} (a\varphi' - \varphi).$$

Dosazením do $x^2 + y^2 = r^2$ obdrží se rovnice prvního řádu pro φ .

1119. Integrovaťi $pq = z$.

Zvolme $p = \frac{\sqrt{z}}{a}$, $q = a\sqrt{z}$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a\sqrt{z} \text{ dává } \sqrt{z} = \frac{1}{2}(ay + d), \quad d = d(x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2a}(ay + d) = \frac{1}{2}(ay + d) \frac{\partial d}{\partial x}.$$

Odtud $\frac{\partial d}{\partial x} = \frac{1}{a}$, $d = \frac{x}{a} + b$ a obecný integrál

$$z = \frac{1}{4}(ay + \frac{x}{a} + b)^2.$$

1120. Integrovať $p^2 + q^2 = x + y$.

Položme $p^2 - x = y - q^2 = a$.

$p = \sqrt{a+x}$, $q = \sqrt{y-a}$, $dz = p dx + q dy$ dává

$$z = \frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(y-a)^{\frac{3}{2}} + b.$$

1121. Integrovať $z = xp + yq + 3\sqrt[3]{pq}$.

Úplný integrál $z = ax + by + 3\sqrt[3]{ab}$. Pro singulární integrál dostaneme pomocí $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$, vztahy

$$x + \sqrt[3]{b:a^2} = 0 = y + \sqrt[3]{a:b^2}, \text{ jinak } -x^3 = b:a^2, \\ -y^3 = a:b^2 \text{ a vynásobením } x^3y^3 = 1:ab \text{ nebo } \sqrt[3]{ab} = 1:xy,$$

$$b = -a^2x^3, -b^2y^3 = -a^4x^6y^3, \text{ a dále } a = \frac{-1}{x^2y},$$

$$b = \frac{-1}{xy^2}, \text{ takže } z = -\frac{2}{xy} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{xy} \text{ a konečně } xyz = 1.$$

1122. Integrovať methodou Lagrange-Charpitovou rovnicí $xp + yq - pq = 0$.

Příslušný kanonický systém je

$$\frac{dx}{x-q} = \frac{dy}{y-p} = -\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q} = \frac{dz}{-pq}.$$

Má integrály $\lg p = \lg q$, neboli $ap = q$, a z dané rovnice

$$xp + yap - ap^2 = 0 \text{ plyne } p = \frac{x+ay}{a}, q = x+ay.$$

$$dz = \frac{x+ay}{a} dx + (x+ay) dy,$$

$$z = \frac{x^2}{2a} + yx + \frac{1}{2}ay^2 + c \text{ nebo jinak } 2az = (x+ay)^2 + b.$$

1123. Integrovať rovnici $z = x^2 p^2 + y^2 q^2$.

Provedme transformaci $u = \lg x, v = \lg y, x = e^u, y = e^v$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v} \frac{1}{y}, \quad p_1 = \frac{\partial z}{\partial u}, \quad q_1 = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Rovnice přejde ve tvar $z = p_1^2 + q_1^2$.

Kanonická soustava $\frac{du}{2p_1} = \frac{dv}{2q_1} = \frac{dz}{2z} = \frac{dp_1}{p_1} = \frac{dq_1}{q_1}$.

První integrál $\sqrt{z} = ap_1$ dává $p_1 = \frac{\sqrt{z}}{a}, q_1^2 = z - \frac{z}{a^2}$,

$$q_1 = \sqrt{z \frac{a^2 - 1}{a^2}}, \quad dz = \frac{\sqrt{z}}{a} du + \sqrt{z} \sqrt{\frac{a^2 - 1}{a^2}} dv,$$

nebo $\frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{a} du + \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} dv$. Integrací pak

$$2\sqrt{z} = bu + \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} v + \lg a, \text{ jinak } e^{2\sqrt{z}} = ax^b y^{\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}}.$$

Jiný úplný integrál dostaneme hned z původní rovnice a soustavy:

$$\frac{-dp}{2xp^2 - p} = \frac{-dq}{2yq^2 - q} = \frac{dx}{2x^2p} = \frac{dy}{2y^2q} = \frac{dz}{2x^2p^2 + 2y^2q^2} = \frac{dz}{2z}.$$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{p}{x} = \frac{1}{2x^2} \text{ lineární. } p = \frac{a}{x} + \frac{\lg x}{2x}$$

a podobně $\frac{dq}{dy} + \frac{q}{y} = \frac{1}{2y^2}$ dává $q = \frac{b}{y} + \frac{\lg y}{2y}$,

takže $dz = \left(\frac{a}{x} + \frac{\lg x}{2x} \right) dx + \left(\frac{b}{y} + \frac{\lg y}{2y} \right) dy$

dává $z = a \lg x + \frac{1}{4} \lg^2 x + b \lg y + \frac{1}{4} \lg^2 y + \lg d$,

avšak z dané rovnice

$$\begin{aligned} z &= x^2 \left(\frac{a}{x} + \frac{\lg x}{2x} \right)^2 + y^2 \left(\frac{b}{y} + \frac{\lg y}{2y} \right)^2 = \\ &= a^2 + b^2 + a \lg x + \frac{1}{4} \lg^2 x + b \lg y + \frac{1}{4} \lg^2 y. \end{aligned}$$

Tedy $a^2 + b^2 = \lg d$, $b = \sqrt{\lg d - a^2}$ a úpravou $e^z =$
 $= dx^{a + \frac{1}{4} \lg x} y^{\sqrt{\lg d - a^2} + \frac{1}{4} \lg y}$ jest také úplný integrál.

1124. Integrovať $(z + qy)^2 = p$.

Kanonický systém je

$$\frac{dx}{-1} = \frac{dy}{2y(qy + z)} = \frac{dp}{2p(qy + z)} = \frac{dq}{-4q(qy + z)} = \frac{dz}{q^2y^2 - z^2}.$$

Z toho
$$\frac{2dy}{y} = -\frac{dq}{q}, \quad q = \frac{a}{y^2}, \quad p = \left(\frac{a}{y} + z\right)^2.$$

$$dz = \left(\frac{a}{y} + z\right)^2 dx + \frac{a}{y^2} dy.$$

$$z = -\frac{a}{y} + \varphi(x), \quad \frac{d\varphi}{dx} = \varphi^2, \quad -\frac{1}{\varphi} = x + b, \quad \varphi = \frac{-1}{x + b}.$$

Tedy úplný integrál jest
$$z = \frac{-1}{x + b} - \frac{a}{y}.$$

Pro obecný integrál buď $a = \varphi(b)$, tedy

$$z = \frac{-1}{x + b} - \frac{\varphi(b)}{y} \quad \text{a derivací podle } b, \quad 0 = \frac{1}{(x + b)^2} + \frac{\varphi'(b)}{y}.$$

Parciální rovnice řádu druhého

Rovnice řádu druhého vznikají eliminací dvou libovolných funkcí z dané rovnice, která je obsahuje. Při řešení hledíme obyčejně dostati t. zv. *integrál intermediární*, t. j. rovnici parciální řádu prvního, která se pak řeší dále.

Rovnice lineární s *konstantními koeficienty* jest

$$Ar + Bs + Ct + Dp + Eq + Fz = G, \text{ značí-li}$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Příklady

1125. V rovnici bez druhého členu $G(x, y)$ klademe $z = e^{\mu x + \nu y}$ a řešením rovnice charakteristické $A\mu^2 + B\mu\nu + C\nu^2 + D\mu + E\nu + F = 0$ dostáváme $\nu_1 = f(\mu)$, $\nu_2 = g(\mu)$ a integrálem je
$$z = ae^{\mu x + f(\mu)y} + be^{\mu x + g(\mu)y}.$$

1126. Rovnice $Ar + Bs + Ct = 0$ má pro $\nu_1 = \alpha_1\mu$, $\nu_2 = \alpha_2\mu$ integrál
$$z = \varphi(x + \alpha_1 y) + \psi(x + \alpha_2 y),$$
 kde φ, ψ jsou libovolné funkce.

Pro $v_1 = \alpha_1 \mu + \beta_1$, $v_2 = \alpha_2 \mu + \beta_2$ je integrál

$$z = e^{\beta_1 y} \varphi(x + \alpha_1 y) + e^{\beta_2 y} \psi(x + \alpha_2 y).$$

1127. Rovnice s proměnnými koeficienty lze snadno řešiti při jednoduchých typech, jako

$$r = f(x) \text{ dává } z = \int dx \int f(x) dx + x \varphi(y) + \psi(y).$$

$$r + Ap = B \text{ nebo } \frac{\partial p}{\partial x} + Ap = B \text{ je lineární pro } p,$$

$$s + Ap = B \text{ nebo } \frac{\partial p}{\partial y} + Ap = B \text{ rovněž a pod.}$$

$$Pr + Qs = R \text{ nebo } P \frac{\partial p}{\partial x} + Q \frac{\partial p}{\partial y} = R \text{ je 1. řádu pro } p \text{ atd.}$$

1128. Odvoditi diferenciální rovnici ploch vytvořených přímkou protínající osu z .

$$\text{Rovnice přímky } z = bx + c, \text{ kde } b = f(a) = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$y = ax, \text{ kde } c = \varphi(a) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Rovnice ploch je $z = x f\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Jest tedy vyloučiti f a φ pomocí derivací z .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f - \frac{y}{x} f' - \frac{y}{x^2} \varphi', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f' + \frac{1}{x} \varphi'. \quad \text{Odtud}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{x} \frac{\partial z}{\partial y} = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ neobsahuje již } \varphi. \text{ Derivováním}$$

$$\text{dostaneme } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{y}{x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{x^2} f',$$

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{y}{x} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x} f'.$$

Násobme druhou $\frac{y}{x}$ a přičtěme k první; dostaneme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{y}{x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

nebo
$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

1129. Stanoviti diferenciální rovnici ploch, které protínají roviny jdoucí z v rovnoosých hyperbolách se středem v počátku.

Jest tedy $y = bx$, $zu = a = z(y - bx)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(y - bx) + z(-b) = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(y - bx) + z = 0. \quad -b = \frac{1}{x} \left(\frac{-z}{q} - y \right)$$

dosazeno do první derivované rovnice dává

$$p \left(\frac{-z}{q} \right) + \frac{z}{x} \left(\frac{-z}{q} - y \right) = 0$$

neboli
$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

1130. Stanoviti diferenciální rovnici ploch, které tytéž roviny protínají v parabolách s vrcholem v rovině xy a s osou rovnoběžnou k ose z .

Máme $y = ax$, $\sqrt{z} = b(r - m) = f\left(\frac{y}{x}\right) \left[\sqrt{x^2 + y^2} - \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \right].$

Jinak $\psi\left(\frac{y}{x}\right) \sqrt{z} = \sqrt{x^2 + y^2} - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Máme eliminovati funkce φ , ψ pomocí derivací.

$$-\frac{y}{x^2} \psi' \sqrt{z} + \psi \frac{\partial z}{\partial x} \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{x^2} \varphi',$$

$$\frac{1}{x} \psi' \sqrt{z} + \psi \frac{\partial z}{\partial y} \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{x} \varphi'. \quad \left(\text{Násob } \frac{y}{x} \right).$$

$$\frac{\psi}{2\sqrt{z}} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{x} \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}; \quad \text{jinak}$$

(I)
$$\psi \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 2 \sqrt{z(x^2 + y^2)}. \quad \text{Opětnou derivací}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{y}{x^2} \psi'(xp + yq) + \psi(p + ys + xr) &= \\
&= p \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{z}} + 2\sqrt{z} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\
\frac{1}{x} \psi'(xp + yq) + \psi(sx + q + yt) &= \\
&= q \cdot \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{z}} + 2\sqrt{z} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left(\text{Násob } \frac{y}{x} \right) \\
\psi \left(p + 2ys + xr + \frac{y^2}{x} t + \frac{y}{x} q \right) &= \\
&= \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{z}} \left(p + \frac{y}{x} q \right) + 2\sqrt{z} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \\
&= \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{z}} (xp + yq) + \frac{2\sqrt{z(x^2 + y^2)}}{x}
\end{aligned}$$

a dosazením rovnice (I)

$$\begin{aligned}
\frac{\psi}{x} (xp + yq + x^2r + 2xys + y^2t) &= \\
&= \frac{1}{z} \frac{\psi}{2x} (xp + yq)^2 + \frac{\psi}{x} (xp + yq).
\end{aligned}$$

Násobíme obě strany $\frac{2xz}{\psi}$ a dostaneme

$$2z(xp + yq) + 2z[x^2r + 2xys + y^2t] = (xp + yq)^2 + 2z(xp + yq)$$

nebo konečně po zrušení stejných členů

$$\left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 2z \left[x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right].$$

1131. Integrovaťi $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial p}{\partial y} + ap = f(x, y) \text{ je lineární pro } p.$$

$$p = e^{-ay} [\varphi'(x) + \int e^{ay} f(x, y) dy] = \frac{\partial z}{\partial x}; \text{ integrací dále}$$

$$z = \psi(y) + \varphi(x) e^{-ay} + e^{-ay} \int dx \int e^{ay} f(x, y) dy.$$

Na př. pro $f(x, y) = xy$ máme

$$p = e^{-ay} \left[\varphi'(x) + \frac{x}{a} e^{ay} y - \frac{x}{a^2} e^{ay} \right] = e^{-ay} \varphi'(x) + \frac{x}{a} y - \frac{x}{a^2},$$

takže
$$z = \frac{x^2}{2a} y - \frac{x^2}{2a^2} + e^{-ay} \varphi(x) + \psi(y).$$

1132. Integrovať $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = 1.$

Pro $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ jest $\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = 1 - p.$

Řešíme soustavou $dx = dy = \frac{dp}{1-p}$, která má integrály

$x - y = c_1$, $y = -\lg(1-p) + \lg c_2$, takže dostáváme inter-
mediární integrál $e^y(1-p) = f(x-y)$, jinak

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 - e^{-y} f(x-y). \text{ Odtud kvadraturou}$$

$$z = x - e^{-y} \varphi(x-y) + \psi(y).$$

1133. Integrovať $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12x^2.$ Pro rovnici bez druhého

členu je charakteristické rovnice $\mu^2 = a^2 \nu^2$, $\mu_1 = a\nu$, $\mu_2 = -a\nu$
a integrál je tedy $z = \varphi(ax+y) + \psi(-ax+y)$. Partikulární
integrál rovnice s druhým členem jest x^4 , takže celkem
 $z = \varphi(ax+y) + \psi(-ax+y) + x^4.$

1134. Integrovať $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 3x + y^2.$

Charakteristická rovnice $\mu^3 + 3\mu\nu + 2\nu^2 = 0$ dává $\nu_1 = -\frac{1}{2}\mu$,
 $\nu_2 = -\mu$. Partikulární integrál celé rovnice budiž
 $ax^3 + by^4$. Dosazením $6ax + 24by^2 = 3x + y^2$; odtud $a = \frac{1}{2}$,
 $b = \frac{1}{24}$. Jest tedy integrál dané rovnice

$$z = \varphi(x - \frac{1}{2}y) + \psi(x-y) + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}y^4$$

nebo také $z = \varphi(2x-y) + \psi(x-y) + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}y^4.$

1135. Integrovať $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 3 \frac{\partial z}{\partial x} + 3 \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x + \cos x.$

Charakteristická rovnice $\mu^2 - \nu^2 - 3\mu + 3\nu = 0$ se rozloží na $(\mu - \nu)(\mu + \nu - 3) = 0$. Odtud $\nu_1 = \mu_1$, $\nu_2 = 3 - \mu$. Partikulární integrál úplné rovnice předpokládejme ve tvaru $a \sin x + b \cos x$. Po dosazení do rovnice

$$-a \sin x - b \cos x - 3(a \cos x - b \sin x) = \sin x + \cos x$$

dává $a = -0,4$; $b = 0,2$ a hledaný integrál jest

$$z = \varphi(x + y) + e^{3y} \psi(x - y) - 0,4 \sin x + 0,2 \cos x.$$

DODATEK

Integrály funkcí komplexní proměnné. Residua.

Funkce $f(z)$ komplexní proměnné $z = x + iy$ slove analytická, má-li v jistém bodě derivaci $\frac{df}{dz}$ nezávislou na $\frac{dy}{dx}$. Funkce $f(z)$ v určitém oboru jednoznačná, spojitá, mající všude derivaci $f'(z)$ slove též holomorfní. — Je-li $f(z)$ holomorfní uvnitř uzavřené čáry i na ní, jest $\int_C f(z) dz = 0$ vzatý po celém obvodu té uzavřené čáry C (věta *Cauchyova*). Je-li obor, kde funkce je holomorfní, omezen více uzavřenými čarami, nutno integrál vztáhnouti na všechny hranice probíhané tak, aby obor ležel po levé ruce.

$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0)$ nezávisí na dráze integrační v oboru, kde $f(z)$ je holomorfní, takže je funkcí horní meze.

Cauchyův integrál $\int_C \frac{f(z)}{z - x} dz = 2\pi i f(x)$, je-li $f(z)$ holomorfní v oboru omezeném uzavřenou konturou C a x leží v oboru. — Je-li a singulární bod (nebo pól) funkce

$$f(z) = P(z - a) + \frac{B_1}{z - a} + \frac{B_2}{(z - a)^2} + \dots, \quad *)$$

tu $\int_C f(z) dz$ po kruhu uzavírajícím bod a rovná se $2\pi i B_1$, kde B_1 slove *residuum* funkce v bodě a . Týž integrál podél uzavřené čáry Γ , uvnitř které leží singulární body $a, b, \dots, l$ o residuech $A, B, \dots, L$, jest

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i (A + B + \dots + L). \quad (\text{I})$$

*) $P(z - a) = a_0 + a_1(z - a) + a_2'(z - a)^2 + \dots$

Je-li $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ a je-li a jednoduchý nulový bod $Q(z)$, jest residuum

$$A = \frac{P(a)}{Q'(a)}. \quad (\text{II})$$

Je-li $f(z)$ lomená a $\varphi(z)$ holomorfní uvnitř čáry C , f, f', φ pak spojitě na C , jest

$$\int_C \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i [\Sigma \varphi(a) - \Sigma \varphi(b)], \quad (\text{III})$$

kde a jsou nulové body, b póly funkce $f(z)$ uvnitř C . Zvláště

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (N - P),$$

kde $N(P)$ značí počet nulových bodů (pólů) $f(z)$ uvnitř C .

Pro bod v nekonečnu

$$f(z) = \dots + B_1 z + A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$

jest residuum $-A_1$.

Vytčených vět lze užít i k výpočtu integrálů reálných funkcí, integrujeme-li po vhodných uzavřených obvodech. Při tom máme ještě na paměti vztahy:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i \text{ integrujeme-li po kružnici } \gamma \text{ kolem } a; \quad (\text{IV})$$

když $\lim_{z-a \rightarrow 0} (z-a) f(z) = 0$, je $\lim_{\gamma} \int_{\gamma} f(z) dz = 0$ pro integraci po kružnici kolem a , a takové, že poloměr $\rightarrow 0$; (V)

$$\text{když } \lim_{z-a \rightarrow \infty} (z-a) f(z) = 0, \text{ jest } \lim_C \int_C f(z) dz = 0 \quad (\text{VI})$$

po kružnici s poloměrem rostoucím do nekonečna, i na části kružnice.

Příklady

1136. Zvolte $f(z) = e^z$ a vypočtěte $\int_C \frac{f(z)}{z} dz$ po kružnici s poloměrem R

kolem počátku. Oddělte části reálné a komplexní.

$$I = \int_C \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i. \text{ Položme } z = Re^{i\varphi} \text{ (} R \text{ konstantní),}$$

takže $dz = Re^{i\varphi} i d\varphi$.

$$I = i \int_0^{2\pi} e^{R(\cos\varphi + i\sin\varphi)} d\varphi = i \int_0^{2\pi} e^{R\cos\varphi} [\cos(R\sin\varphi) + i\sin(R\sin\varphi)] d\varphi.$$

Protože $I = 2\pi i$, dává ryze imaginární část integrálu

$$\int_0^{2\pi} e^{R\cos\varphi} \cos(R\sin\varphi) d\varphi = 2\pi,$$

a část reálná
$$\int_0^{2\pi} e^{R\cos\varphi} \sin(R\sin\varphi) d\varphi = 0.$$

1137. Totéž pro funkci $f(z) = \lg(1+z) = \lg(1+e^{i\varphi})$ pro $\varrho < 1$,
 $-\pi < \varphi < \pi$.

Klademe (podle obr. 13):

$$1+z = re^{i\psi}, \text{ takže jest}$$

$$1+\varrho \cos\varphi = r \cos\psi,$$

$$\varrho \sin\varphi = r \sin\psi,$$

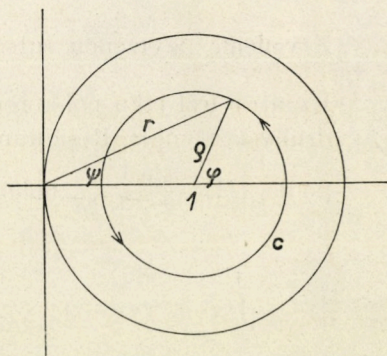
$$r^2 = 1 + \varrho^2 + 2\varrho \cos\varphi,$$

$$\psi = \arctg \frac{\varrho \sin\varphi}{1 + \varrho \cos\varphi}.$$

$f(z)$ je holomorfní pro $\varrho < 1$.

Potom

$$\int_C \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0) = 0.$$



Obr. 13.

Pro kruh $\lim_{\varrho \rightarrow 1} \varrho = 1$ mění se ψ od $-\frac{1}{2}\pi$ do $\frac{1}{2}\pi$, φ od $-\pi$ do $+\pi$.

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} (\lg r + i\psi) d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} (\lg \sqrt{1 + \varrho^2 + 2\varrho \cos\varphi} + i\psi) d\varphi = 0,$$

t. j.
$$\int_{-\pi}^{\pi} \lg(1 + \varrho^2 + 2\varrho \cos\varphi) d\varphi = 0 \text{ a také}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\varrho \sin \varphi}{1 + \varrho \cos \varphi} d\varphi = 0.$$

Integrály typu $\int_0^{2\pi} R(\cos \vartheta, \sin \vartheta) d\vartheta$ se všeobecně určí substitucí

$$e^{i\vartheta} = z, \cos \vartheta = \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \sin \vartheta = \frac{1}{2i}(z - z^{-1}), i e^{i\vartheta} d\vartheta = dz, d\vartheta = \frac{dz}{iz}.$$

Přejdou tak v integrály $\int_c S(z) dz$ racionální funkce $S(z)$ po obvodě kružnice c kolem počátku s poloměrem 1, které se rovnají 2π -násobnému součtu residuí v singulárních bodech uvnitř c (viz I).

1138. Vypočísti $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x + a}$ pro $a > 1$.

Zavedeme navrženou substituci a dostaneme $\frac{2}{i} \int \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}$.

Uvnitř c leží jako pól kořen jmenovatele $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$; druhý leží vně c . Residuum funkce $S(z)$ pro $z = z_1$ je

podle (II) $\frac{1}{2z_1 + 2a}$ neboli $R_1 = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}}$. Proto jest

$$\int_c \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x + a} = 2\pi i \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}},$$

takže konečně $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x + a} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$ (viz 824 a 846).

1139. Píšeme-li v předchozím integrálu $\frac{a}{b}$ místo a ($a > b > 0$), dostá-

váme obecněji $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$. Derivací podle

parametru a plyne dále $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Tento integrál lze ovšem též počítati samostatně methodou shora

uvedenou. Přejde v $\int_c \frac{4z dz}{i(2az + bz^2 + b)^2}$. Kořeny jmenovatele

$z_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ jsou póly; uvnitř c leží při $a > b > 0$

jen z_1 . Residuum R_1 je činitel členu $(z - z_1)$ v rozvoji

$(z - z_1)^2 S(z) = \frac{4z}{ib^2(z - z_2)^2}$ podle mocnin $(z - z_1)$. Rozvoj

$\frac{4}{ib^2} (z_1 + \overline{z - z_1})(\overline{z - z_1} + z_1 - z_2)^{-2}$ dává po úpravách

$R_1 = \frac{-4(z_1 + z_2)}{ib^2(z_1 - z_2)^3}$, $z_1 + z_2 = -\frac{2a}{b}$, $z_1 - z_2 = \frac{2}{b} \sqrt{a^2 - b^2}$.

Po dosazení je hledaný integrál

$$I = 2\pi i R_1 = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ jako dříve.}$$

$$1140. \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{1 - 2p \cos \vartheta + p^2} = \int_c \frac{dz}{i(1 - pz)(z - p)}.$$

Pro $0 < p < 1$ leží uvnitř c jen pól $z = p$ s residuem

$$R_1 = \lim_{z \rightarrow p} (z - p) \frac{1}{i(1 - pz)(z - p)} = \frac{1}{i(1 - p^2)}.$$

Jest tedy daný integrál $I = \frac{2\pi}{1 - p^2}$.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\vartheta d\vartheta}{1 - 2p \cos 2\vartheta + p^2} &= \int_c \frac{1}{iz} \left(\frac{z^3 + z^{-3}}{2} \right)^2 \frac{dz}{(1 - pz^2)(1 - pz^{-2})} = \\ &= 2\pi i \sum_k R_k. \end{aligned}$$

R_k jsou residua. Funkce $S(z)$ za integračním znamením má uvnitř c jednoduché póly $0, p^{-\frac{1}{2}}, p^{\frac{1}{2}}$, neboť jest

$$S(z) = \frac{(z^6 + 1)^2}{4iz^5(1 - pz^2)(z^2 - p)}.$$
 Příslušná residua v pólech $p^{\frac{1}{2}}, p^{-\frac{1}{2}}$ dostaneme podle (II) ve tvaru $\frac{(p^3 + 1)^2}{8p^3(1 - p^2)i}$. Pro pól $z = 0$ určíme residuum R_1 jako součinitel z^4 v rozvoji funkce

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4pi} (z^6 + 1)^2(1 - pz^2)^{-1}(1 - z^2p)^{-1} = \\ & = -\frac{1}{4pi} (1 + \dots)(1 + pz^2 + p^2z^4 + \dots) \left(1 + \frac{z^2}{p} + \frac{z^4}{p^2} + \dots\right), \end{aligned}$$

$$R_1 = -\frac{1 + p^2 + p^4}{4p^3i} = \frac{-(1 - p^6)}{4ip^3(1 - p^2)}.$$
 Součet všech residuí

$$\text{jest } \frac{1}{2i} \frac{1 - p + p^2}{1 - p}, \quad \text{takže } I = \pi \frac{1 - p + p^2}{1 - p}.$$

1141. Vypočítí $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(n\theta - \sin\theta) d\theta = I.$

Funkce za integračním znamením se odvodí z $e^{\cos\theta} e^{i(n\theta - \sin\theta)} = e^{in\theta} e^{-i\theta}$ a po známé substituci $e^{i\theta} = z$ vede k vyšetřování

integrálu $\int_c z^n e^{\frac{1}{iz}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_c z^{n-1} e^{\frac{1}{z}} dz.$ V počátku $z = 0$ jest

jediný singulární bod uvnitř c . Residuum najdeme z rozvoje

$$z^{n-1} \left(1 + \frac{1}{1!} z + \dots + \frac{1}{n!} z^n + \dots\right); R_1 = \frac{1}{n!} \text{ u členu } \frac{1}{z}.$$

Potom
$$I = 2\pi i \frac{1}{in!} = \frac{2\pi}{n!}.$$

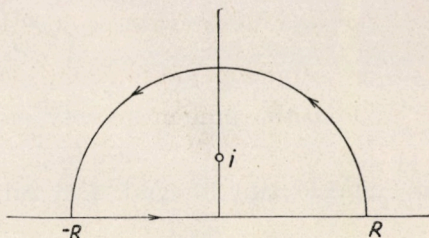
Dále plyne
$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(n\theta - \sin\theta) d\theta = 0.$$

Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} Q(x) dx$. Vyšetřujeme $\int Q(z) dz$ podél uzavřené půlkružnice na obr. 14. Je-li $Q(z)$ analytická funkce bez pólů na reálné ose x , konverguje-li pak pro $z \rightarrow \infty$ stejnoměrně $\lim_{z \rightarrow \infty} Q(z) = 0$ pro

všechny argumenty $0 \leq \arg z \leq \pi$, vymizí integrál podél půlkružnice podle (VI) a zbývá $\int_{-\infty}^{\infty} Q(x) dx = 2\pi i \sum_k R_k$.

1142. Integrovať $f(z) = \frac{e^{imz}}{1+z^2}$

pro $m > 0$ podél dráhy vyznačené v obr. 14 stává-li se poloměr kruhu R nekonečně velkým a odvoditi důsledky. $f(z)$ má uvnitř naznačené uzavřené dráhy jediný pól $z = i$. Residuum



Obr. 14.

$$A_1 = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{e^{imz}}{(z + i)(z - i)} = \frac{e^{-m}}{2i}. \text{ Tedy } \int_{\Gamma} f(z) dz = \pi e^{-m}.$$

Kontura C skládá se z polokružnice Γ , průměru $-R$ až $+R$.

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz = 0$, neboť podle (VI) modul $z \cdot \frac{e^{imz}}{1+z^2}$ blíží se nule s rostoucím R . Jest totiž při $z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,

$$e^{imz} = e^{-mR \sin \varphi + imR \cos \varphi} \text{ s modulem } e^{-mR \sin \varphi} < 1, \lim \left(\frac{z}{1+z^2} \right) = 0$$

pro $z \rightarrow \infty$.

$$\int_C f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{mix}}{1+x^2} dx = \pi e^{-m}.$$

Píšeme-li nyní $e^{mix} = \cos mx + i \sin mx$, jest reálná část

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx = \pi e^{-m}. *)$$

1143. Určiti $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 dx}{(a+bx^2)^4}$.

*) Viz Petr, Počet integrální, str. 230 a násl.

Funkce má pól v bodě $p = i \sqrt{\frac{a}{b}}$ uvnitř kontury při $a, b > 0$.

Residuum R_1 je součinitel při $(z - p)^3$ v rozvoji

$$\frac{(p + \overline{z - p})^4}{b^4(z - p + 2p)^4} = \frac{1}{16p^4b^4} \frac{(p + \overline{z - p})^4}{\left(1 + \frac{z - p}{2p}\right)^4}.$$

Použitím binomické věty najdeme $R_1 = -\frac{1}{32p^3b^4} = \frac{1}{32ia^{\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{2}}}$,

takže daný integrál $I = 2\pi i R_1 = \frac{\pi}{16a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{2}}}$.

1144. Dokázati, že
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n n!} \pi.$$

Funkce $Q(z) = \frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$ má uvnitř uvedené kontury

$(n+1)$ -násobný pól $z = i$. Residuum R_1 je koeficient členu $(z - i)^{-1}$ v rozvoji $Q(z)$ podle $(z - i)$ nebo členu $(z - i)^n$ v rozvoji $(z - i)^{n+1} Q(z)$.

$$\begin{aligned} (z - i)^{n+1} Q(z) &= \frac{1}{(z + i)^{n+1}} = \frac{1}{(2i)^{n+1} \left(1 + \frac{z - i}{2i}\right)^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{(2i)^{n+1}} \left[1 + \frac{z - i}{2i}\right]^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

Rozvedeme-li mocninu podle binomické řady, jest

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{(2i)^{n+1}} \binom{-(n+1)}{n} \frac{1}{(2i)^n} = \\ &= \frac{(-1)^n (n+1)(n+2) \dots 2n}{2^{2n+1} e^{i\frac{1}{2}\pi(2n+1)} n!}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} &= 2\pi i R_1 = 2\pi e^{i\frac{1}{2}\pi} R_1 = \\ &= \frac{2\pi e^{ni\pi} (n+1) \dots 2n n!}{2 \cdot 2^{2n} e^{i\pi n} n! n!}, \end{aligned}$$

$$I = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n-1) \cdot 2 \cdot 4 \dots 2n}{2^n n! \cdot 2^n n!} = \\ = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1) \pi}{2^n n!}.$$

Na př.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{3}{8}\pi.$$

Zavedeme-li
$$x = \frac{t-\alpha}{\beta}, \quad dx = \frac{dt}{\beta},$$

obdržíme
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{2n+1} dt}{[(t-\alpha)^2 + \beta^2]^{n+1}} = I$$

a tedy
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{[(t-\alpha)^2 + \beta^2]^{n+1}} = \frac{I}{\beta^{2n+1}}.$$

1145. Vypočítá
$$\int_0^{\infty} \frac{3x^2 - a^2}{(x^2 + b^2)^2} \cos mx \, dx = I.$$

Vyšetříme
$$\int_C \frac{3z^2 - a^2}{(z^2 + b^2)^2} e^{imz} \, dz.$$

Jediný pól uvnitř C jest $z_1 = ib$ a jeho residuum R_1 jest koeficient členu $(z - ib)^{-1}$ v rozvoji $(z - ib)^{-2} f(z)$. Máme tedy

$$\frac{[3(z - ib + ib)^2 - a^2]}{(z - ib + 2ib)^2} e^{im(z-ib)} e^{i^2 mb} = \frac{e^{-mb}}{4b^2} [a^2 + 3b^2 - \\ - b ib (z - ib) + \dots] \left[1 - \frac{2}{2ib} (z - ib) + \dots \right] \times \\ \times \left[1 + \frac{im}{1!} (z - ib) + \dots \right],$$

$$R_1 = \frac{e^{-mb}}{4b^2} \left[(a^2 + 3b^2) im - \frac{1}{ib} (a^2 + 3b^2) - 6ib \right] = \\ = \frac{e^{-mb}}{4b^2} \frac{3b^2 - a^2 - mb(a^2 + 3b^2)}{ib}.$$

$$I = \pi i R_1 = \frac{\pi e^{-mb}}{4b^3} [3b^2 - a^2 - mb(3b^2 + a^2)].$$

Má-li $Q(z)$ na ose reálné jednoduché póly $a_1, a_2, \dots$, užijeme téže kontury C jako na obr. 14, na ose x však jednotlivé póly a_i obejdeme polokružnicemi γ_k nad x , takže vznikne jakési zoubkování. Integrál podél γ_k se rovná polovině integrálu po celé kružnici $2\gamma_k$, integrujeme-li v kladném smyslu tedy $-\pi i A_k$, kde A_k je residuum patřící pólu a_i . Potom

$$\int_C Q(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} + \int_{\Gamma} - \pi i \sum_k A_k = 2\pi i \sum_k R_k.$$

R_k jsou residua pólů uvnitř kontury C , Γ samotná velká půlkružnice. Konečně $\int_{-\infty}^{\infty} Q(x) dx = 2\pi i \sum_k R_k + \pi i \sum_k A_k$.

1146. Vypočísti $\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x(x^2 + a^2)} dx = I$.

Vyšetříme $\int_C \frac{e^{imz} dz}{z(z^2 + a^2)^2}$. Uvnitř C je pól $z = ia$, na ose x

jen $z = 0$. Residuum v bodě ia je koeficient $(z - ia)$ v rozvoji

$$\begin{aligned} (z - ia)^2 \frac{e^{im(z-ia)} e^{-ma}}{(z - ia + ia)(z - ia)^2(z - ia + 2ia)} &= \\ &= \frac{e^{-ma}}{-4ia^3} \frac{e^{im(z-ia)}}{\left(1 + \frac{z-ia}{ia}\right)\left(1 + \frac{z-ia}{2ia}\right)^2} = \\ &= \frac{e^{-ma}}{-4ia^3} \left[1 + \frac{im(z-ia)}{1!} + \dots\right] \left[1 - \frac{z-ia}{ia} + \dots\right] \times \\ &\quad \times \left[1 - 2\frac{z-ia}{2ia} + \dots\right]. \end{aligned}$$

$$R_1 = \frac{e^{-ma}}{-4ia^3} \left(\frac{im}{1!} - \frac{2}{ia}\right), \quad 2\pi i R_1 = \frac{e^{-ma}\pi}{-2a^3} \left(\frac{2}{a} + m\right) i.$$

Residuum A_1 v počátku podle (II) jest $\frac{1}{a^4}$.

$$\int_C \frac{e^{imz}}{z(z^2 + a^2)} = 2 \int_0^{\infty} \frac{i \sin mz dz}{z(z^2 + a^2)} = 2\pi i R_1 + \pi i A_1,$$

takže
$$I = \frac{\pi}{2a^4} - \frac{\pi e^{-ma}}{4a^3} \left(m + \frac{2}{a} \right).$$

1147.
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2} dx = I.$$

Funkce $\frac{e^{2iaz}}{z^2}$ má pól jen v počátku s residuem $2ia$. Uvnitř kontury pólu není. Jest tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = -2\pi a + 2\pi b = 2\pi(b - a). \quad I = \pi(b - a).$$

Obecnější výsledek viz Petrův Počet integrální, str. 265.

1148. Vypočísti
$$\int_0^{\infty} \frac{t^{2m} - t^{2n}}{1 - t^{2p}} dt \quad \text{pro } m < p, n < p \text{ a celá kladná.}$$

Uvažujme
$$\int_C \frac{z^{2m}}{1 - z^{2p}} dz$$
 vzatý po obvodě polokruhu

z př. 1142. Funkce ve jmenovateli má nulové body $a_k = \sqrt[p]{1}$, t. j. $2p$ hodnot, z nichž polovina leží nad reálnou osou na polokružnici s poloměrem 1. Residuum jest podle (II)

$$\begin{aligned} \frac{z^{2m}}{-2pz^{2p-1}} &= \frac{1}{-2pa_k^{2(p-m)-1}} = \\ &= -\frac{1}{2p} \left[\cos k \frac{2m+1}{p} \pi + i \sin k \frac{2m+1}{p} \pi \right], \end{aligned}$$

neboť

$$a_k^{1-2p+2m} = a_k^{-2p} a_k^{2m+1} = \left(\cos \frac{2k\pi}{2p} + i \sin \frac{2k\pi}{2p} \right)^{2m+1}.$$

$$\int_C = \int_{-\infty}^{\infty} + \int_{\Gamma} = 2\pi i \sum_0^p R_k. \quad \int_{\Gamma} = 0, \int_{-\infty}^{\infty} = 2\int_0^{\infty}, \text{ tedy}$$

$$\int_0^{\infty} = \pi i \sum_0^p R_k = -\pi i \frac{1}{2p} \sum_0^p \left[\cos k \frac{2m+1}{p} \pi + i \sin k \frac{2m+1}{p} \pi \right].$$

Součet kosinů dává 0 následkem symetrie, takže zbývá

$$\sum_0^p R_k = \frac{-i}{2p} \sum_0^p \sin k \frac{2m+1}{p} \pi.$$

Podle známé věty $\sum_0^p \sin kx = \frac{\sin \frac{px}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{1}{2} (p+1)x$; proto

$$\sum_0^p = \frac{\sin p \frac{\pi}{2p} (2m+1)}{\sin \frac{2m+1}{2p} \pi} \sin \frac{p+1}{2p} (2m+1) \pi = \cotg \frac{2m+1}{2p} \pi.$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{2m}}{1-t^{2p}} dt = \frac{\pi}{2p} \cotg \frac{2m+1}{2p} \pi, \text{ a konečně}$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{2m} - t^{2n}}{1-t^{2p}} dt = \frac{\pi}{2p} \left[\cotg \frac{2m+1}{2p} \pi - \cotg \frac{2n+1}{2p} \pi \right].$$

1149. Z integrálu $\int_C \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} dz$ podél kružnice (střed O) odvoditi
(n, k celá kladná čísla) integrály

$$\int_0^\pi (2 \cos u)^{n+k} \cos(n-k) u du, \quad \int_{-1}^{+1} \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Bod $z = 0$ je pól řádu $(k+1)$; residuum bude činitel z^k v rozvoji $z^{k+1} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}$, t. j. $A_1 = \binom{n}{k}$. Jest tedy $\int_C \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} dz = 2\pi i \binom{n}{k}$.

Nyní položíme $z = e^{2iu}$, na místo n pišme pak $n+k$.

$z = \cos \varphi + i \sin \varphi = \cos 2u + i \sin 2u$, na kružnici C mění se tedy φ od 0 do 2π , u od 0 do π .

$$I = \int_0^\pi \frac{(1 + e^{2iu})^{n+k}}{e^{2iu(k+1)}} 2ie^{2iu} du.$$

Čítatel je $(e^{-iu} + e^{iu})^{n+k} e^{iu(n+k)} = (2 \cos u)^{n+k} e^{iu(n+k)}$,

tedy $I = 2i \int_0^\pi (2 \cos u)^{n+k} e^{iu(n-k)} du = \pi 2i \binom{n+k}{k}$.

Dosadíme-li za $e^{iu(n-k)} = \cos(n-k)u + i \sin(n-k)u$, jest po srovnání částí ryze imaginárních

$$\int_0^\pi (2 \cos u)^{n+k} \cos(n-k) u du = \pi \binom{n+k}{k}.$$

Pišme dále $\cos u = x$, $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $k = n$.

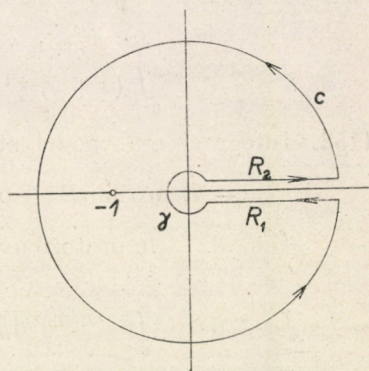
$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n n!}.$$

1150. Integrací funkce $\frac{z^{p-1}}{1+z}$ (pro $p < 1$ a kladné) podél obvodu v obrazci 15 odvoditi

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx.$$

Uvnitř obvodu I' leží jen pól $z = -1$. Jeho residuum podle (II) jest $(-1)^{p-1} = e^{(p-1)\pi i}$. Tedy

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_C + \int_{R_1} + \int_{\gamma} + \int_{R_2} = \\ &= 2\pi i e^{(p-1)\pi i}. \end{aligned}$$



Obr. 15.

Integrály $\int_C$ a $\int_{\gamma}$ konvergují k 0, když $R \rightarrow \infty$ nebo $\varrho \rightarrow 0$, podle (V) a (VI). Podél $R_2 z^{p-1} = x^{p-1}$, podél R_1 je argument z roven 2π , takže $z^{p-1} = e^{(p-1)(\log x + 2\pi i)} = e^{2\pi i(p-1)} x^{p-1}$. Jest tedy

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = [1 - e^{2\pi i(p-1)}] \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}.$$

Z toho

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i}{e^{-(p-1)\pi i} - e^{(p-1)\pi i}} = \frac{-\pi}{\sin(p-1)\pi} = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

1151. Integrál lze derivovati podle parametru p a dostaneme

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1} \lg x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2 \cos p\pi}{\sin^2 \pi p}.$$

Zavede-li se místo $x = \frac{y}{a}$ vznikne při $a > 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{a+y} dy = \frac{\pi a^{p-1}}{\sin \pi p}, \text{ který lze derivovati podle } a:$$

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(a+y)^2} dy = -\frac{(p-1) \pi a^{p-1}}{\sin \pi p}, \text{ nebo po } k \text{ derivacích:}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(a+y)^{k+1}} dy = (-1)^k \left(\frac{p-1}{k} \right) \frac{\pi a^{p-k-1}}{\sin \pi p}.$$

1152. Integraci e^{-z^2} podél stran obdélníka $y = 0$, $y = b$, $x = R$,

$x = -R$ pro $\lim R = \infty$ odvoditi $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2}$.

$\int_R e^{-z^2} dz = 0$, protože uvnitř obdélníku není sing. bodu. Jinak:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx + \int_0^b e^{-(R+iy)^2} dy + \int_R^{-R} e^{-(x+ib)^2} dx + \int_b^0 e^{-(-R+iy)^2} dy = 0.$$

$$\text{Tedy } \sqrt{\pi} + 0 + \int_{\infty}^{-\infty} e^{-x^2+b^2} e^{-2ibx} dx + 0 = 0.$$

$$e^{-2bix} = \cos 2bx - i \sin 2bx \text{ dává}$$

$$e^{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx = \sqrt{\pi} \text{ a tím hledanou formuli (viz 936).}$$

1153. Integrovaťi funkci $e^{-z} z^{n-1}$ (n reálné kladné) podél osy x od O do R , pak po oblouku kružnice AB poloměru R velikosti α o středu O a zpět po poloměru BO . Nechati $R \rightarrow \infty$ a odvoditi při $\alpha < \frac{1}{2}\pi$ integrály

$$I_1 = \int_0^{\infty} u^{n-1} e^{-au} \cos bu \, du, \quad I_2 = \int_0^{\infty} u^{n-1} e^{-au} \sin bu \, du$$

pro a, b reálné kladné.

Integrál $\int_R f(z) dz = 0$, protože funkce $e^{-z} z^{n-1}$ je pro n celistvé kladné funkcí celistvou. Avšak při $R \rightarrow \infty$ jest

$$\int_R f(z) dz = 0 = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx + \int_{AB} e^{-z} z^{n-1} dz + \int_{\infty}^0 e^{-z} z^{n-1} dz. \quad (\text{I})$$

Integrál po oblouku AB je pro $\lim R \rightarrow \infty$ roven 0 (viz podobná vyšetřování na př. v Goursatově Cours d'analyse, t. II); integrál první po ose x jest Eulerův integrál $\Gamma(n)$, takže zbývá podél OB integrál třetí, který možno psáti při $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$ po substituci $z = u(a + ib)$, $dz = (a + ib) du$, při reálném u ve tvaru

$$\begin{aligned} (a + ib)^n \int_0^{\infty} e^{-u(a+ib)} u^{n-1} du &= \Gamma(n) \text{ (podle I).} \\ \int_0^{\infty} e^{-u(a+ib)} u^{n-1} du &= \int_0^{\infty} e^{-au} (\cos bu - i \sin bu) u^{n-1} du = \\ = I_1 - iI_2 &= \frac{\Gamma(n)}{(a + ib)^n} = \frac{\Gamma(n)}{a^n(1 + i \operatorname{tg} \alpha)^n} = \frac{\Gamma(n) \cos^n \alpha}{a^n(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n} = \\ &= \frac{\Gamma(n) \cos^n \alpha}{a^n} (\cos n\alpha - i \sin n\alpha). \end{aligned}$$

Odtud srovnáním částí reálných a imaginárních

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} u^{n-1} e^{-au} \cos bu \, du &= \frac{\Gamma(n)}{a^n} \cos^n \alpha \cos n\alpha, \\ \int_0^{\infty} u^{n-1} e^{-au} \sin bu \, du &= \frac{\Gamma(n)}{a^n} \cos^n \alpha \sin n\alpha. \end{aligned}$$

Přímý výpočet mnohem složitější viz na př. Serret-Harnack, Integralrechnung, 1899, str. 150—152.

Zavedeme-li $a = b \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, dostanou integrály tvaru

$$\frac{\Gamma(n)}{b^n} \sin^n \alpha \cos n\alpha, \quad \frac{\Gamma(n)}{b^n} \sin^n \alpha \sin n\alpha. \text{ Pak pro } a = 0, \alpha = \tfrac{1}{2}\pi$$

dostáváme integrály ($n < 1$):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{n-1} \cos bx \, dx &= \frac{\Gamma(n)}{b^n} \cos \tfrac{1}{2}n\pi, \\ \int_0^{\infty} x^{n-1} \sin bx \, dx &= \frac{\Gamma(n)}{b^n} \sin \tfrac{1}{2}n\pi. \end{aligned}$$

Z integrálů I_1, I_2 pro $a = b = 1, \alpha = \frac{1}{4}\pi$ plynou dále

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} \cos x \, dx = \frac{n!}{\sqrt{2^{n+1}}} \cos(n + \frac{1}{4})\pi,$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} \sin x \, dx = \frac{n!}{\sqrt{2^{n+1}}} \sin(n + \frac{1}{4})\pi \text{ (viz Cesàro, l. c. str. 717).}$$

Fourierovy řady II

1154. Máme-li rozvésti ve Fourierovy řady funkce $\sin mx, \cos mx$, zavedeme $e^{imx} = \cos mx + i \sin mx = f(x)$ a dostaneme v intervalu $(-\pi, \pi)$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \text{kde koeficienty}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

a srovnáme pak části reální a ryze imaginární. Protože

$$\int e^{(a+bi)x} \, dx = \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} e^{ax} (\cos bx + i \sin bx),$$

dostaneme srovnáním částí reálních a imaginárních

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos bx + b \sin bx),$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin bx - b \cos bx).$$

Nyní plyne dál

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} \sin kx \, dx &= \frac{e^{imx}}{k^2 - m^2} (im \sin kx - k \cos kx) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{(-1)^{k+1}k}{k^2 - m^2} (e^{im\pi} - e^{-im\pi}) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos mx + i \sin mx) \sin kx \, dx = i \frac{2(-1)^{k+1}k}{k^2 - m^2} \sin m\pi. \end{aligned}$$

Odtud

$$b_k = \frac{2 \sin m\pi (-1)^{k+1} k}{\pi (k^2 - m^2)} \text{ a hledaná řada}$$

$$\sin mx = \frac{2}{\pi} \sin m\pi \left[\frac{\sin x}{1^2 - m^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2 - m^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2 - m^2} - \dots \right]$$

Podobně

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} \cos kx \, dx = e^{imx} \frac{k \sin kx + im \cos kx}{k^2 - m^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= e^{im\pi} \frac{im(-1)^k}{k^2 - m^2} - e^{-im\pi} \frac{im(-1)^k}{k^2 - m^2} = \frac{(-1)^{k+1} m}{k^2 - m^2} 2 \sin m\pi,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \sin m\pi \frac{(-1)^k m}{k^2 - m^2}, \text{ takže}$$

$$\cos mx = \frac{2}{\pi} \sin m\pi \left[\frac{1}{2m} + \frac{m \cos x}{1^2 - m^2} - \frac{m \cos 2x}{2^2 - m^2} + \dots \right].$$

1155. Rozvéstí ve Fourierovu řadu $\frac{1 - r \cos z}{1 - 2r \cos z + r^2}$.

$$\text{Uvažujme } \frac{1}{1 - re^{iz}} = 1 + re^{iz} + r^2 e^{2iz} + \dots = A =$$

$$= 1 + r \cos z + r^2 \cos 2z + \dots + ir(\sin z + r \sin 2z + \dots).$$

$$\text{Avšak též } \frac{1}{1 - re^{iz}} = \frac{1}{a} e^{-i\varphi} = A, \text{ kde v modulu } \frac{1}{a} \text{ jest}$$

$$a = (1 - r \cos z)^2 + r^2 \sin^2 z = 1 + r^2 - 2r \cos z = j \quad (\text{obr. 16}).$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{j}} \left(\frac{1 - r \cos z}{\sqrt{j}} - \frac{ir \sin z}{\sqrt{j}} \right), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{r \sin z}{1 - r \cos z}.$$

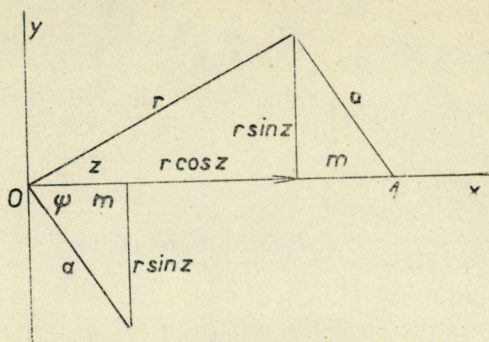
Srovnáním částí reálních a ryze imaginárních plyne:

$$\frac{1 - r \cos z}{1 - 2r \cos z + r^2} = 1 + r \cos z + r^2 \cos 2z + \dots,$$

$$- \frac{1}{j} \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{r \sin z}{1 - r \cos z} \right) = r \sin z + r^2 \sin 2z + \dots$$

Aby řady konvergovaly, musí

$$|re^{iz}| < 1, \quad re^{-y} < 1, \quad e^y > r, \quad y > \operatorname{lgr}.$$



Obr. 16.

1156. Totéž pro $\frac{1}{2} \lg(1 - 2r \cos z + r^2)$.

Podle formule $\lg(1 + u) = \frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots$ jest

$$\lg(1 - re^{iz}) = -re^{iz} - \frac{r^2}{2} e^{2iz} - \frac{r^3}{3} e^{3iz} - \dots \quad \text{Avšak}$$

$$1 - re^{iz} = \sqrt{1 - 2r \cos z + r^2} e^{i\psi} = \sqrt{j} \left[\frac{1 - r \cos z}{\sqrt{j}} + \frac{ir \sin z}{\sqrt{j}} \right]$$

$$\text{a dále } \lg(1 - re^{iz}) = \frac{1}{2} \lg |j| + i\psi = -r \cos z - \frac{r^2}{2} \cos 2z - \frac{r^3}{3} \cos 3z - \dots + i \left[r \sin z + \frac{r^2}{2} \sin 2z + \dots \right].$$

$$\text{Odtud } \frac{1}{2} \lg(1 - 2r \cos z + r^2) = -r \cos z - \frac{r^2}{2} \cos 2z - \dots$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{r \sin z}{1 - r \cos z} = r \sin z + \frac{r^2}{2} \sin 2z + \dots$$

Derivací $\frac{d\psi}{dz}$ obdržíme zase řadu pro

$$\frac{1 - r \cos z}{1 + r^2 - 2r \cos z} \text{ jako shora.}$$

OBSAH

	Str.
Předmluva	7

POČET DIFERENCIÁLNÍ

Funkce hyperbolické a hyperbolometrické	9
Věta Taylorova	11
Numerické řešení rovnic methodami přibližnými	17
Funkce složené o více proměnných. Vyšší derivace funkce více proměnných	24
Zavádění nových proměnných	27
Extrémy funkcí více proměnných	30
Další užití derivací v geometrii	35

POČET INTEGRÁLNÍ

Integrály racionálních funkcí lomených	38
Jednoduché integrály funkcí iracionálních	42
Integrály binomické	44
Integrály funkcí hyperbolických	47
Přímé metody pro základní integrály obsahující $\sqrt{ax^2 + bx + c}$	50
Obecné metody pro $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$	54
Abelovy integrály	61
Některé jednodušší integrály goniometrických funkcí	62
Methody obecné a složitější integrály goniometrických funkcí	65
Některé omezené integrály funkcí goniometrických	71
Integrály některých zvláštních funkcí transcendentních	73
Integrovaní řadami — Základy	77
Některé integrály eliptické	80
Funkce eliptické	85
Užití integrálů omezených	87
Integrály nevlastní	92
Užití věty o střední hodnotě pro integrály nevlastní	94
Derivace určitých integrálů podle parametru	95
Určité integrály nekonečných řad	99
Řady Fourierovy I	101
Methoda integrace podle parametru a záměny pořadu integračního	107
Přímý výpočet omezených integrálů z definice	111
Integrály Eulerovy B, Γ	113
Integrály křivočaré	123

	Str.
— Pojem a výpočet dvojného integrálu	128
— Užití dvojných integrálů	133
— Pojem a výpočet trojného integrálu	143
— Užití integrálů trojných	145

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Obyčejné rovnice prvního řádu

Základní úlohy	153
Integrační faktor	159
Rovnice neřešené podle y' . Integrály singulární	160

Obyčejné rovnice řádu druhého

— Některé základní typy a jejich integrace	167
— Lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty	169
Lineární rovnice 2. řádu s proměnnými koeficienty	172
Integrace řadami	176

Obyčejné rovnice řádu n -tého

Základní typy	177
Rovnice lineární	179
Soustavy obyčejných rovnic lineárních	181
Obecné soustavy nelineárních rovnic	183
Soustavy rovnic vyššího řádu	186

Diferenciální rovnice parciální

Rovnice lineární řádu prvního	187
Nelineární rovnice řádu prvního	190
Parciální rovnice řádu druhého	194

DODATEK

Integrály funkcí komplexní proměnné. Residua	199
Fourierovy řady II	214

Spisovatel	<i>Dr Vladimír Ryšavý</i>
Název díla	<i>Řešené úlohy z vyšší matematiky (díl druhý)</i>
Vydala	<i>Jednota československých matematiků a fyziků</i>
roku	<i>1950</i>
za redakce	<i>Dr Františka Vyčichla</i>
Stran	<i>220</i>
Obrazců	<i>16</i>
Vytiskla	<i>Knihhtiskárna Prometheus v nár. správě, Praha VIII</i>
Vydání	<i>první (4400 výt.)</i>
Cena	<i>Kčs 140,—</i>

24. IX. 1965

