MATHEMATICKÉ PŘEDNÁŠKY ČESKÉ UNIVERSITY V PRAZE

PROF. DR. JAN SOBOTKA

DIFFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE

DÍL III.

PARAMETRICKÉ VYJÁDŘENÍ PLOCH. ÚTVARY PŘÍMKOVÉ.

SESTAVIL

VÁCLAV OBEŠLO, assistent č. univ.

V PRAZE
NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ A FYSIKŮ
1914

OBSAH.

KAPITOLA I.

I. Rovnice plochy.

Str.

1. Křivoploché souřadnice v prostoru 1
2. Křivočaré souřadnice na ploše . 3
3. Příklad. Plocha přímková . . . 4
4. Zobrazení plochy na rovině. Plochy rozvinutelné 6
5. Podmínky pro rovnice plochy. Transformace souřadnic . . . 14

II. Lineární element na ploše.

6. Základní veličiny prvého řádu . . 16
7. Jejich invariance k pohybu . . 18
8. Příklady 19
9. Změna veličin při transformaci parametrů 20

III. Normála ku ploše.

10. Její cosiny směrné 21
11. Kladný smysl na normále . . . 22
12. Veličiny 2. řádu 25
13. Jejich invariance k pohybu a změna pro transformaci parametrů . 26
14. Derivace sm. cosinů normály . . 28

IV. Základní rovnice.

15. Derivace souřadnic 31
16. Tři základní rovnice 33
17. Přímé vyvození zákl. rovnic . . 36

KAPITOLA II.

I. Směry na ploše. Dupinova indikatrix.

18. Směry sdružené 41
19. Úhel dvou směrů 42
20. Dupinova indikatrix 44

II. Křivost řezů plochy.

Str.

21. Poloměr křivosti řezu plochy . . 46
22. Body specielního druhu 46
23. Plochy specielních vlastností . . 49
24. Křivky křivosti 51
25. Hlavní poloměry křivosti . . . 53
26. Křivky křivosti jako parametrické 56

III. Některé příklady ploch.

27. Obyčejná plocha šroubová . . . 57
28. Obecná plocha šroubová 60
29. Plocha rotační 62
30. Minimální plocha rotační . . . 63
31. Rotační plochy konstantní míry křivosti 67

IV. Soumezné normály.

32. Osa dvou soumezných normál . . 75
33. Místo os soumezných normál pro bod plochy 78

KAPITOLA III.

I. Sférické zobrazení plochy.

34. Základní veličiny. Míra křivosti plochy 82
35. Specielní případy 86
36. Přímky isotropické jako sfer. obrazy 88
37. Příslušné pravé úhly na ploše a na kouli 89
38. Geom. význam vztahu $e : f : g = E : F : G$ 90
39. Plochy zobrazující se na plochu kulovou konformně 92

II. Povrchové parametry řídící.

Str.
40. Definice 93
41. Řídící parametry křivek parametrických 94
42. Cosiny směrné pro normálu . . 95
43. Geometrické znázornění povrchových parametrů řídících 96
44. Podmínky kolmosti dvou tečen . 97
45. Harmonická čtveřina tečen . . . 98
46. Úhel dvou tečen 99
47. Směrový koefficient povrchový . . 100
48. Kongruence tečen plochy . . . 101
49. Orthogonální síť křivek 101
50. Dodatek 102

III. Rovinové vyjádření plochy 104

KAPITOLA IV.

I. Křivky minimální na ploše.

51. Křivka minimální a její plocha tečnová 109
52. Přímé vyvození rovnic křivky minimální 113
53. Křivky minimální na dané ploše 115
54. Křivky minimální jako parametrické 116

II. Křivky isothermické na ploše.

55. Určení soustav těchto křivek . . 118
56. Vzorce pro případ param. thermických 120
57. Síť křivek parametrických . . . 120

III. Příklady.

58. Plocha kulová 125
59. Jiný postup 127
60. Thermické parametry na ploše kulové 127
61. Obyčejná plocha šroubová . . . 128
61. Dodatek ku ploše kulové . . . 129

IV. Konformní zobrazení ploch.

Str.
62. Křivky minimální 132
63. Křivky isothermické 134
64. Plocha a rovina 136
65. Rovina a rovina 136
66. Plocha kulová sama v sebe . . 138
67. Jeden případ pro kouli a rovinu . 141
68. Stereografická projekce plochy kulové 142
69. Stanoviti všecka konformní zobrazení plochy kulové na rovinu, aby kružnice přecházely v kružnice . 145
70. Meridiány a kružnice paralelní přecházejí v kružnice 152
71. Mercatorovo zobrazení 157

V. Stejnoploché zobrazení ploch.

72. Dvě plochy 158
73. Plocha a rovina 160
74. Plocha rotační a rovina 160
75. Plocha kulová a rovina 161
76. Rovina a rovina 162
77. Plocha kulová a rovina 164
78. Jiný postup 165
79. Dvě kollineární roviny 173

VI. Zásady obecného zobrazení ploch.

80. Svazky tečen 174
81. Vztah plošných elementů . . . 176
82. Applikace pro zobrazení stejnoploché 177
83. Příslušné pravé úhly 178
84. Další souvislost plošných elementů 181

VII. Deformace ploch.

85. Nutné podmínky 184
86. Míra křivosti. Příklad 186
87. Vyšetřiti, zdali dvě dané plochy lze navzájem deformovati . . . 188
88. Plochy stálé míry křivosti . . . 192
89. Plochy rotační a šroubové . . . 196
90. Plochy rotační 200
91. Plochy samy v sebe rozvinutelné . 202
92. Případ ploch rotačních 205
93. Plochy v sebe rozvinutelné a plochy rotační 206

KAPITOLA V.

I. Differenciální invarianty plochy.

94. Definice 208
95. Invarianty 1. řádu a obecné . . 210
96. Příklady; výrazy $Sx_{ik}x_{mn}$ . . . 211

II. Trojhran přidružený bodu plochy.

97. Směr. cosiny jeho hran 213
98. Derivace cosinů těch 215

Str.
99. Podmínky integrability 217
100. Podmínky ty nezáleží na k . . 218
101. Jejich úplné vyvození 220

III. Základní veličiny a příslušné plochy.

102. Podmínky pro trojhran přidružený 221
103. Riccatiho rovnice 223
104. Obecná totální dif. rovnice . . . 224
105. Pokračování o rovnici Riccattiho 228
106. Důsledek pro trojhran přidružený 229
107. Výpočet pro specielní trojhran . . 232
108. Pravoúhlé souřadnice bodu plochy 233
109. Shodnost získaných ploch . . . 234
110. Jiný postup 236

IV. Přirozené rovnice ploch.

111. Zavedení příslušných veličin . . 238
112. Dvě plochy vztažené ke křivkám křivosti 240
113. Postačující podmínky jejich shodnosti 241
114. Jiný tvar podmínek těch . . . 244
115. Přirozené rovnice plochy . . . 245

KAPITOLA VI.

I. Křivka na ploše. Křivka geodetická.

115. Elementy křivky na ploše . . . 246
116. Výraz pro křivost tangenciální . 249
117. Dif. rovnice křivek geodetických . 251
118. Definice křivek geodetických . . 254

II. Applikace na plochu rotační.

119. Případ obecné plochy rotační . . 257
120. Rotační plocha stálé křivosti . . 259
Poznámky 262

KAPITOLA VII.

Přímky a útvary přímkové vůbec.

I. Analytické vyjádření.

121. Úvod 265
122. Útvary přímkové 266
123. Kongruence přímek 268
124. Zavedení souřadnic přímky . . . 270

Str
125. Plückerovy souřadnice přímky . . 271
126. Jejich mechanický význam . . . 277
127. Souvislost s veličinami r, s, ϱ, σ 278
128. Podmínka, aby se dvě přímky protínaly 280
129. Průsečík a rovina jimi dané . . 282
130. Svazek přímek 282
131. Tři přímky a soustavy jimi dané 285
132. Transformace souřadnic přímkových 291
133. Vyjádření útvarů přímkových . . 292

II. Dif. rovnice některých ploch.

134. Plocha válcová 294
135. Plocha kuželová 296
136. Konoid 298
137. Plocha rotační 300
138. Plochy, jejichž normály protínají pevnou přímku 300
139. Plocha rotační o ose z 302
140. Plocha rozvinutelná 302
141. Plocha přímková vůbec 304

KAPITOLA VIII.

Plochy přímkové.

I. Základní vlastnosti.

142. Rovnice plochy přímkové 308
143. Rovina tečná 309
144. Řídící kužel plochy 310
145. Osa dvou soumezných površek . 313
146. Distribuční parametr površky . . 315
147. Moment soumezných površek . . 317
148. Plocha normál podél površky . . 318
149. Dvě přímkové plochy o společné površce 319
150. Podmínka rozvinutelnosti plochy přímkové 319
151. Strikční křivka 322

II. Příklady.

152. Plocha binormál křivky 323
153. Plocha hlavních normál křivky . 324
154. Strikční křivka jednoploch. hyperboloidu 325
155. Konstrukce křivky 327
156. Strikční křivka hyperb. paraboloidu 329
157. Strikční křivka plochy $f(x, y, z) = 0$ 330

III. Užití základních veličin.

Str.
158. Lineární element přímkové plochy 331
159. Dvě plochy přímkové 333
160. Křivky asymptotické 335
161. Specielní případy 335
162. Obecný případ 337
163. Dif. rovnice křivek křivosti . . 339
164. Geod. křivost orth. trajektorie površek 341
165. Věta Bonnetova o deformaci . . 342
166. Věta Bonnetova v obecnějším tvaru 345
167. Věta Enneperova 347
168. Applikace pro větu Bonnetovu . . 350
169. Věta Beltramiho 351
170. Věta o křivkách geodetických . . 352
171. Křivost křivky strikční 353

IV. Applikace.

172. Plochy přímkové rozvinutelné na plochy rotační 356
173. Dvě kategorie ploch těch . . . 358

V. Hlavní poloměry křivosti.

174. Hlavní poloměry v bodě centrálném 361
175. Oskulační hyperboloid 362
176. Důsledky a jiná konstrukce . . . 364
177. Rovnice pro hlavní poloměry a její applikace 366
178. Stanoviti přímkové plochy minimální 368

KAPITOLA IX.

Kongruence přímek.

I. Základní úvahy.

179. Vyjádření a příklady kongruencí . 371
180. Přímkové plochy v kongruenci . 373
181. Ohniska paprsku kongruence . . 374
182. Plocha ohnisková 376
183. Případ splynutí ohnisek . . . 378
184. Rozvinutelné plochy v kongruenci 380

II. Vzorce základní.

185. Paprsek soumezný k danému . . 383
186. Body hlavní 386
187. Křivky hlavní jako parametrické 387
188. Plocha střední jako řídící . . . 390

III. Jiný způsob vyjádření.

Str.
190. Užití směr. cosinů 391
191. Specielní souřadnice 393
192. Souvislost s ohnisky 393
193. Věta Sturmova 394

IV. Kongruence pseudosferické.

194. Ohniskové plochy jsou pseudosferické 397
195. Další vlastnosti 401
196. Bäcklundova transformace pseudosferických ploch 403
197. Riccattiho rovnice 408

V. Specielní případy a rozv. plochy.

198. Případ dvojné plochy ohniskové . 409
199. Dvojná křivka ohnisková . . . 410
200. Jedna ohnisková plocha jest rozvinutelná 412
201. Obě jsou rozvinutelné 413
202. Kongruence Königsovy 413
203. Applikace. Plochy Joachimsthalovy 415
204. Řešení dif. rovnice ploch rozvinutelných ve spec. případech kongruence 419

VI. Kongruence normálové.

205. Plochy rozvinutelné 423
206. Podmínka pro kongruenci normálovou 424
207. Věta Taylorova od Beltramiho . 427
208. Věta Malus-Dupinova 428
209. Plocha kanálová 431
210. Dupinova cyklida 432
211. Obalové plochy ploch kulových . . 434
212. Analogie geometrie přímkové a geometrie ploch kulových . . . 435
213. Vytvoření a rovnice Dup. cyklidy 436
214. Isotropická plocha kanálová . . 439
215. Křivky asymptotické a křivky křivosti 441
216. Křivky křivosti na obalové ploše koulí 442
217. Jeden z pláštů evolutové plochy jest plochou rozvinutelnou . . . 445
218. Specielní případy 448

VII. Elementární trs kongruence.

219. Zavedení »pomocné přímky« . . 450
220. Representační bod pro element přímkové plochy 451

Str.
221. Analytické vyjádření 452
222. Representační kruh trsu . . . 453
223. Další souvislost 456
224. Trs normál plochy 457

KAPITOLA X.

Dotykové transformace.

225. Elementy a multiplicity dotykové 460
226. Dvě multiplicity 2. řádu . . . 462
227. Transformace dotykové 463
228. Duální transformace 465
229. Transformace involutorní . . . 466
230. Obecný případ jedné relace . . . 469
231. Případ 2 relací 470
232. Specielní případ 471
233. Transformace Lieova 475

DODATEK K DÍLU III.

I. Trojnásobně orthogonální soustavy ploch.

Str.
234. Definice 481
235. Jiný způsob podmínky orthogonality. Věta Darbouxova 482
236. Podmínka pro soustavu ploch náležející systemu 487
237. System obsahující danou plochu . 489
239. Systemy obsahující soustavu ploch kulových 490
240. Základní veličiny a rovnice Lamého 493
241. System o daných veličinách H . 496

II. Zobrazování cyklografické.

242. Definice 498
243. Obraz svazku kružnic 499

III. Kongruence křivek . . 502

Část prvá.

Parametrické vyjádření ploch.

Kapitola I.

I. Rovnice plochy.

1. Křivoploché souřadnice v prostoru. - Rovnici plochy měli jsme doposud dánu v obecném tvaru $f(x, y, z) = 0$, kde studovali jsme ovšem pouze takové plochy a v takových oborech, kde funkce f vyhovovala určitým předpokladům. Vycházejíce přímo z pravoúhlých souřadnic bodu v prostoru, měli jsme každý bod (x_0, y_0, z_0) dán jakožto průsečík rovin k. zb. souřadných, které dány byly rovnicemi $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Poněvadž pak tři roviny ty protínají se v jediném bodě, bylo toto určení jednojednoznačným, t. j. nejen každému bodu příslušely tři určité souřadnice, ale též naopak každým třem souřadnicím odpovídal jediný bod. Všecky body mající jednu souřadnici společnou vyplňo-

valy jedné souřadnou rovinu a všecky souřadné roviny dávaly nejjednodušší případ trojnásobné soustavy orthogonálních ploch.

Místo souřadných rovin mohou nastoupiti obecné plochy. Dejme tři soustavy ploch danými rovnicemi

(1). $f(x, y, z) = \lambda$, $g(x, y, z) = \mu$, $h(x, y, z) = \nu$,

kde λ, μ, ν jsou parametry, t. j. proměnné veličiny nezávislé na x, y, z.

Vyskumeme-li si nyní libovolný bod v prostoru o souřadnicích pravoúhlých x_0, y_0, z_0, obdržíme dosazením do rovnic napsaných – předpokládajíc, že funkce f, g, h jsou jednoznačné – určité tři hodnoty λ_0, μ_0, ν_0, které možno tedy též považovati za souřadnice bodu daného.

Zvolíme-li naopak určité hodnoty λ, μ, ν, vyskumeme tím v každé soustavě jednu plochu a všecky tři plochy protnou se obecně v několika bodech. Dají-li se z rovnic (1) souřadnice x, y, z vypočísti:

(2). $x = \varphi(\lambda, \mu, \nu)$, $y = \psi(\lambda, \mu, \nu)$, $z = \chi(\lambda, \mu, \nu)$,

při čemž funkce φ, ψ, χ nejsou obecně jednoznačné, dospíváme tím k pravoúhlým souřadnicím průsečíků vytčených ploch.

Toto určení bodů v prostoru není tedy obecně jednoznačné. Ale jsou-li funkce $f, \ldots$ jednoznačné a spojité, pak v okolí bodu, v němž funkce dy těmto pod-

mínkám vyhovují, platí i jednoznačnost našeho určení. V dalším uvažovati budeme pouze funkce takové a v těch oborech, kde podmínky ty jsou splněny.

Parametry λ, μ, ν možno též interpretovati jako pravoúhlé souřadnice jiného prostoru. Pak rovnice (1) a (2) jsou transformačními vzorci pro příbuznost dvou prostorů.

2. Křivočaré souřadnice na ploše. – Učiňme v předchozích rovnicích (1) jeden z parametrů, na př. ν, konstantou. Tedy nechť

$$\nu = \nu_0 \quad \ldots (3)$$

Tím vyčleníme jest jedna plocha ze soustavy (V) a měníme-li hodnoty λ, μ, zůstává příslušný bod stále na ploše dé splývaje postupně se všemi jejími body.

Je-li možno z rovnic daných – přihlížejíc ovšem k předpokladu (3) — vypočísti souřadnice x, y, z jako funkce λ a μ:

$$x = \Phi(\lambda, \mu), \quad y = \Psi(\lambda, \mu), \quad z = X(\lambda, \mu) \quad \ldots (4),$$

nabýváme tím parametrického vyjádření naší plochy uvažované jako místo bodů.

Připojíme-li k předpokladu (3) ještě další předpoklad $\mu = \mu_0 \quad \ldots (5)$, pak rovnicemi

$$x = \Phi(\lambda, \mu_0), \quad y = \Psi(\lambda, \mu_0), \quad z = X(\lambda, \mu_0) \quad \ldots (5'),$$

které vyjadřují závislost souřadnic x, y, z na jediném parametru λ, dáno jest parametrické vyjádření určité křivky na ploše. Jest to t. zv. křivka souřadná nebo parametrická. Křivek (5) jest ∞^1; tvoří celou soustavu.

Obdobně předpokládejme

$$\lambda = \lambda_0 \quad \ldots \quad (6)$$

vede nás ke druhé soustavě parametrických křivek na naší ploše.

Každému bodu na ploše přísluší dvojice určitých hodnot (λ_0, μ_0) obou parametrů. Bod ten jest dán průsečíkem křivky λ_0 soustavy jedné a křivky μ_0 soustavy druhé. To se týče jednoznačnosti tohoto určení, platí totéž, co řečeno ke konci předešlého odstavce.

3. Příklad. Plocha přímková. – Plocha přímková obsahuje jak známo ∞^1 přímek povrchových. Vyskytne-li tedy na ní libovolnou křivku, která všechny povrchové přímky protíná, prochází obecně každým bodem křivky určitá přímka.

Jsou-li souřadnice (x, y, z) vytčené křivky dány jako funkce parametru v, pak i směrnice přímky povrchové jsou určitými funkcemi parametru toho. Jest-li poloha bodu (X, Y, Z) povrchové přímky dána hodnotou parametru u, jsou body mezi souřadnicemi (X, Y, Z) a

(x, y, z) vzdálenosti

$$X = x + a u, \quad Y = y + b u, \quad Z = z + c u \quad \dots (1),$$

při čemž v případě že u znamená právě vzdálenost bodů (X, Y, Z), (x, y, z), udávají a, b, c směrnice přímky, kdežto je-li u volno jako libovolná funkce vzdálenosti té, jsou a, b, c cosinům směrným pouze úměrny.

Jak z předchozího plyne jest třeba pouze položiti

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(v), \quad y = \chi(v), \quad z = \chi(v) \\ a &= f(v), \quad b = g(v), \quad c = h(v), \end{aligned}\right\} (1')$$

aby rovnice (1) dávaly nám vyjádření obecné plochy přímkové pomocí parametrů u, v.

Křivky parametrické v = konst jsou zde dány přímkami povrchovými. Křivky u = konst, ke kterým náleží též křivka základní (x, y, z) čili $u = 0$, vytínají v případě, že u značí přímo vzdálenost bodů (X, Y, Z), (x, y, z), na všech přímkách povrchových úsečky stejných délek.

Zvláštním případem ploch přímkových jsou <u>plochy rozvinutelné</u>. Jako plochy tohoto druhu považovali jsme plochy tečen ke křivkám prostorovým. Každé dvě sousedné přímky povrchové takovéto plochy mají společný bod, kterýžto vlastnost snadno vede nás k podmínce, za které rovnice (1) vyjadřují plochu rozvinutelnou. Při tom rýsuje

cí křivkou $u = \text{konst.}$ jest ovšem opět libovolná křivka na ploše, která protíná všechny přímky povrchové.

Sousedními body A, A_1 řídicí křivky $u = \text{konst.}$, jimiž omezen jest element křivky (dx, dy, dz), procházejí povrchové přímky (a, b, c), $(a+da, b+db, c+dc)$, které se protínají v bodě M hrany vratu. Rovina AA_1M jest tečnou rovinou naší plochy. Jsou-li (α, β, γ) cosiny směrné její normály, platí vzhledy

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$
$$(a+da)\alpha + (b+db)\beta + (c+dc)\gamma = 0, \text{ čili též } da\cdot\alpha + db\cdot\beta + dc\cdot\gamma = 0$$
$$dx\cdot\alpha + dy\cdot\beta + dz\cdot\gamma = 0$$

odkud plyne, použijeme-li označení v (1') zavedených,

$$\begin{vmatrix} f(v), & g(v), & h(v) \\ f'(v), & g'(v), & h'(v) \\ \varphi'(v), & \psi'(v), & \chi'(v) \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (2)$$

jakožto podmínka, kterou musí splňovati funkce $f, \dots, \varphi, \dots$ vyskytující se v rovnicích (1) plochy přímkové, máli plocha tato býti plochou rozvinutelnou.

4. Zobrazení plochy na rovině. Plochy rozvinutelné. — V předchozím stanovily jsme parametry u, v v rovnicích

$$x = \varphi(u, v), \quad \dots$$ křivočaré souřadnice na

ploše. Parametry ty možno však také interpretovati jako pravoúhlé souřadnice x, y bodů druhé dané plochy, čímž rovnice vyložené dají nám určité přiřazení bodů obou ploch. Body jedné plochy a obrazce na ní nakreslené zobrazují se takto na plochu druhou.

Jako nejjednodušší příklad uvažujme parametry u, v jako pravoúhlé souřadnice ξ, η bodů dané roviny. Při této interpretaci představují nám tedy vzorce

$$x = \varphi(\xi, \eta), \quad y = \psi(\xi, \eta), \quad z = \chi(\xi, \eta) \cdots (1)$$

určité zobrazení plochy (1) na rovinu (ξ, η). Každému bodu plochy přísluší – za příslušného předpokladu o funkcích φ, ψ, χ – určitá dvojice hodnot ξ, η a tudíž určitý bod v rovině (ξ, η). Křivce na ploše odpovídá křivka v rovině. Křivkám parametrickým na ploše odpovídají speciálně přímky rovnoběžné s osami pravoúhlé soustavy (ξ, η). —

– Jednali jsme v II. dílu, že plochy řečen ke křivkám prostorovým schopny jsou procesu, kterýž nazvali jsme rozvinutím do roviny a při kterém každá křivka plochy přechází v rovinnou křivku o téže délce oblouku. —

– Jako application nynějších úvah provedeme řešení otázky po všech plochách, které dají se rozvinouti do roviny. Rozhodněme tedy, zdali i jiné

plochy kromě ploch tečen ke křivkám prostorovým jsou plochami rozvinutelnými.

Rovnost oblouků křivek na ploše a příslušných křivek v rovině vyjadřme předpokladem rovnosti příslušných elementů těchto křivek.

Vyjdeme tedy z podmínky

$$ds = d\sigma \quad \ldots (2)$$

kde

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2.$$

Jest dále

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta,$$ odkud a z rovnice (2) plyne

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 d\xi^2 + 2S\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} d\xi\, d\eta + S\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 d\eta^2 = d\xi^2 + d\eta^2. \quad \ldots (2'),$$

kde součty vztahují se k x, y, z. Poněvadž rovnice (2') platí pro libovolné přírůstky $d\xi, d\eta$, plynou z ní rovnice

$$\left.\begin{aligned} S\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 &= 1 \\ S\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} &= 0 \\ S\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 &= 1 \end{aligned}\right\} (3)$$

z nichž derivací nabudeme dalších podmínek.

– Věnujme zřetel pouze takovým funkcím φ, ψ, χ,

(viz rovnice (1)), které splňují podmínky

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta \partial \xi}, \quad \dots \quad .—$$

Máme tedy dále

$$S \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} = 0, \quad S \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

$$S \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + S \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} = 0, \quad S \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + S \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

$$S \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad S \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0$$

kteréžto rovnice se mezi sebou částečně zjednodušší na tvar

$$\left.\begin{aligned} S \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} = 0, \quad & S \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \\ S \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} = 0, \quad & S \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0 \\ S \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad & S \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Kombinujeme-li z těchto rovnic první s třetí, dále druhou s pátou a konečně čtvrtou s šestou, nabudeme rovnice

$$(5) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} : \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} : \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} : \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} : \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} =$$

$$= \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} : \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} : \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}.$$

Odtud plyne

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{D\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}\right)}{D(\xi, \eta)} = 0 \quad \text{a obdobně}$$

$$\frac{D\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi}\right)}{D(\xi, \eta)} = 0$$

Funkcionální determinanty derivací

$\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi}$ jako funkcí proměnných ξ, η

jsou tedy rovny nule, takže tyto derivace jsou funkcemi téže funkce $w(\xi, \eta)$:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = A_1(w), \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = B_1(w), \quad \frac{\partial z}{\partial \xi} = C_1(w) \dots (6)$$

Obdobně plyne, že též derivace

$\frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \eta}$ jsou funkcemi téže funkce $\mu(\xi, \eta)$.

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = A_1^*(\mu), \dots .$$

Avšak ze vztahu

$$S \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} = S A_1(w) A_1^*(\mu) = 0$$

plyne, že μ je jest funkcí w, takže

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = A_2(w), \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = B_2(w), \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = C_2(w) \dots (6')$$

Ježto, jak již zmíněno, vylučujeme ze svých úvah funkce, pro které by neplatil na př. vztah

$$\frac{\partial \frac{\partial x}{\partial \xi}}{\partial \eta} = \frac{\partial \frac{\partial x}{\partial \eta}}{\partial \xi},$$

musí být splněna rovnice

$$\frac{\partial A_1(w)}{\partial \eta} = \frac{\partial A_2(w)}{\partial \xi}$$ čili

$$\mathcal{A}_1'(w)\frac{\partial w}{\partial \eta} = \mathcal{A}_2'(w)\frac{\partial w}{\partial \xi}\,. \quad \text{— } (7^*)$$

Po těchto přípravných úvahách uvažujme nyní na naší ploše křivku

$$w(\xi, \eta) = k \ \ldots\ (\mathcal{Z})\,.$$

Z této rovnice plyne derivací

$$\frac{\partial w}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial w}{\partial \eta}\,d\eta = 0$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial \xi}}{\frac{\partial w}{\partial \eta}}\,, \text{ čili, vzhledem ku } (7^*),$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\mathcal{A}_1'(w)}{\mathcal{A}_2'(w)}\,.$$

Pro body křivky $(\mathcal{Z})$ jest tedy

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \text{konst} = \mathcal{K} \ldots (\mathcal{Z}')$$

t. j. rovnice $(\mathcal{Z})$ značí v rovině (ξ, η) přímku.

Tážme se, jaká křivka odpovídá této přímce na ploše (1). Jest

$$x = \varphi(\xi, \eta)\,, \text{ tedy}$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}\,d\eta \quad \text{čili}$$

$$dx = \mathcal{A}_1(w)\,d\xi + \mathcal{A}_2(w)\,d\eta \quad \text{a obdobně}$$

$$dy = \mathcal{B}_1(w)\,d\xi + \mathcal{B}_2(w)\,d\eta$$

$$dz = \mathcal{C}_1(w)\,d\xi + \mathcal{C}_2(w)\,d\eta\,,$$

odkud vzhledem ku $(\mathcal{Z})$ a $(\mathcal{Z}')$ plyne pro naši křivku

$$dx : dy : dz = \left[\mathcal{A}_1(k) + \mathcal{K}\cdot\mathcal{A}_2(k)\right] : \left[\mathcal{B}_1(k) + \mathcal{K}\mathcal{B}_2(k)\right] : \left[\mathcal{C}_1(k) + \mathcal{K}\cdot\mathcal{C}_2(k)\right], \text{ čili}$$

$$dx : dy : dz = k_1 : k_2 : k_3 ,$$

nebo, po integraci,

$$\left.\begin{aligned} k_2 x &= k_1 y + k' \\ k_3 x &= k_1 z + k'' \end{aligned}\right\} (z'').$$

Přímkám $w = \text{konst}$ v rovině odpovídají na naší ploše zase rovněž přímky. Naše plocha obsahuje zase ∞^1 přímek; jest plochou přímkovou.

Přímky $w = \text{konst}$ v rovině obalují nyní obecně určitou křivku. Budiž

$$\xi_0 = \alpha(t), \quad \eta_0 = \beta(t) \quad \dots\dots (8)$$

parametrické rovnice této křivky.

Určuje-li parametr τ polohu bodu na tečně křivky (8), jsou souřadnice bodu toho

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha(t) + \tau\, \alpha'(t) \\ \eta &= \beta(t) + \tau\, \beta'(t) \end{aligned}\right\} (9),$$

kde α', β' jsou úměrny cosinům směrným naší tečny a τ úměrno vzdálenosti bodů $(\xi, \eta), (\xi_0, \eta_0)$.

Jsou-li souřadnice x, y, z jsou funkcemi souřadnic ξ, η, které závisí opět rovnicemi (9) na t, τ, jest na přímce plochy $\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \tau}$, čili po dosazení

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = A_1(w) \cdot \alpha'(t) + B_1(w) \cdot \beta'(t) \dots (10)$$

Poněvadž pak jako $w = \text{konst}$ tak i $t = \text{konst}$ stanoví tečnu křivky (8), jest w funkcí t. Z rovnice (10) následuje plynně $\frac{\partial x}{\partial \tau} = U(t)$,

a obdobně $\frac{\partial y}{\partial t} = V(t)$, $\frac{\partial z}{\partial \tau} = W(t)$,

z kterýchžto rovnic integrací dle τ plyne

$$\left.\begin{aligned} x &= \Phi(t) + U(t)\cdot\tau \\ y &= \Psi(t) + V(t)\cdot\tau \\ z &= X(t) + W(t)\cdot\tau \end{aligned}\right\} (11).$$

Abychom sezmali vztah funkcí Φ, Ψ, X k funkcím U, V, W, vyvodíme $\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial \tau}$ jednak na základě rovnic (9):

$$\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \tau} =$$

$$= A_1(w)\left[\alpha' + \tau\alpha''\right] + B_1(w)\left[\beta' + \tau\beta''\right] - A_1\alpha' - B_1\beta'$$

$$= (A_1\alpha'' + B_1\beta'')\,\tau$$

a jednak na základě rovnic (11):

$$\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial \tau} = \Phi'(t) - U(t) + U'(t)\cdot\tau$$

načež porovnáním obou výsledků plyne

$$\Phi' = U.$$

Naše plocha plátna jest dosty rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} x &= \Phi(t) + \tau\Phi'(t) \\ y &= \Psi(t) + \tau\Psi'(t) \\ z &= X(t) + \tau X'(t) \end{aligned}\right\} (12)$$

v nichž sezrcadlujeme parametrické vyjádření plochy sečen prostorové křivky na základě dělo hrany vratu jakožto křivky řídicí.

Uvažujeme-li tedy pouze funkce vyděleného oboru, seznáváme, že jedinými plochami rozvinutelnými jsou plochy tečen k prostorovým křivkám. - Mezi ně řadí se ovšem též plochy kuželové a válcové při nichž hrana vratu přechází v jediný bod, buď v konečný nebo úběžný.

5.) Podmínky pro rovnice plochy. Transformace souřadnic. - Seznali jsme, že parametrické vyjádření souřadnic pravoúhlých jednak k theorii transformací, jednak k theorii útvarů prostorových souvisí, tedy především k theorii ploch.

Pokud se týče funkcí φ, ψ, χ v rovnicích plochy

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = \chi(u,v), \ldots \quad (1),$$

jest nám známo již ze II. dílu, že mají-li rovnice ty skutečně vyjadřovati plochu, musí alespoň dvě z funkcí φ, ψ, χ býti na sobě nezávislé. Funkcionální determinanty

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(\psi,\chi)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(\chi,\varphi)}{D(u,v)}$$

nesmí tedy býti identicky rovny nule.

Rovnice kladoucí jeden z těchto determinantů roven nule udává určitý vztah mezi parametry u, v, značí tedy obecně určitou křivku na ploše, - která ovšem nemusí býti reálná a která v případě válcové plochy rovnoběžné s osou z přechází v celou plochu -. Obdobně druhý determinant vede ke

druhé křivce, a průsečíky těchto křivek jsou body, pro které všecky tři funkcionální determinanty jsou rovny nule.

Ve svých úvahách budeme tyto singulární body nulčky vylučovati a uvažovati jen takové body, v jejichž okolí dají se funkce φ, ψ, χ rozvinouti v poletční řadu dle proměnných u, v.

Vyskytne-li na ploše vyjádřené parametry u, v určitý vztah mezi oběma parametry na př. $u = \varphi(v)$ nebo obecněji $\Phi(u, v) = 0$, pak souřadnice bodů plochy, které vztah ten splňují, možno vyjádřiti jako funkce jednoho parametru, ale již jednoho z parametrů u, v nebo obecněji jiného parametru t,

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t),$$

jehož funkcemi parametry u a v jsou. Jest tím řady vyčtena na ploše křivka.

Vyjádříme-li vyčtené parametry u, v novými parametry u_1, v_1 na základě vztahů

$$u = \lambda(u_1, v_1), \quad v = \mu(u_1, v_1) \quad \ldots \quad (1),$$

pak je-li možno z těchto rovnic vypočítati u_1 a v_1 jako funkce u, v — k čemuž nutnou podmínkou jest, aby funkce λ a μ byly navzájem nezávislé —, pak rovnice

$$u_1 = \lambda_1(u, v) = \text{konst}, \quad v_1 = \mu_1(u, v) = \text{konst} \quad \ldots \quad (2)$$

značí dle právě řečeného dvě soustavy křivek na ploše, parametrických to křivek naší plochy pro vyjádření na základě parametrů u_1, v_1, které dává ve tvaru

$$x = \varphi(\lambda, \mu) = \varphi_1(u_1, v_1), \quad y = \psi_1(u_1, v_1), \quad z = \chi_1(u_1, v_1) \ldots (3).$$

Každé určité transformaci parametrů odpovídají takto určité křivky parametrické. Nelze však říci naopak, že by určitým křivkám parametrickým příslušelo jediné vyjádření parametrické.

Neboť je-li pro parametrickou křivku parametr $u = \text{konst}$, má pro body křivky té také každá funkce u $U = f(u)$ konstantní hodnotu. Zavedeme-li tedy nové parametry U a V vztahy

$$U = f_1(u), \quad V = f_2(v) \ldots (4),$$

takže každý z nich jest funkcí pouze jednoho z parametrů původních, pak křivky parametrické se touto transformací nemění.

Příslušící tedy téže síti parametrických křivek na ploše nekonečné množství vyjádření parametrických, kteréžto okolnosti možno mnohdy použíti k zjednodušení výrazů pro plochu a útvary s ní související.

II. Lineární element na ploše.

6). Základní veličiny prvého řádu. — Pro čtverec prvku oblouku na ploše

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

obdržíme pro parametrické vyjádření obsazením

$$dx = x_u\,du + x_v\,dv$$
$$dy = y_u\,du + y_v\,dv$$
$$dz = z_u\,du + z_v\,dv$$

výraz

$$ds^2 = \Sigma x_u^2 \cdot du^2 + 2\,\Sigma x_u x_v \cdot du\,dv + \Sigma x_v^2 \cdot dv^2 .$$

Pro koeficienty zde se objevující použijme označení

$$\underline{E = \Sigma x_u^2}, \quad \underline{F = \Sigma x_u x_v}, \quad \underline{G = \Sigma x_v^2} \ \ldots (1),$$

takže výraz pro ds^2 píšeme krátce ve tvaru

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \ \ldots (2).$$

K veličinám E, F, G takto zavedeným připojme ještě další výraz Δ definovaný vztahem

$$\underline{\Delta^2 = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2} \ \ldots (1').$$

Jest pak dle známých vlastností determinantů

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} \Sigma x_u^2 & \Sigma x_u x_v \\ \Sigma x_u x_v & \Sigma x_v^2 \end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{matrix} \right\|^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}^2 .$$

Pro reálnou plochu v reálném vyjádření parametrickém jest součet Δ^2 vždy hodnotou kladnou — jsou totiž součtem čtverců, které nemohou být rovny nule (viz odst. 5.) —.

Za Δ sluší bráti pak vždy výraz

$$\Delta = +\sqrt{EG - F^2} \ \ldots (1'').$$

Výrazy E, F, G, Δ mají v theorii ploch v pa-

rametrickém vyjádření důležitý význam. Poněvadž závisí pouze na derivacích prvého řádu souřadnic x, y, z, nazýváme je základními veličinami prvého řádu.

7. Jejich invariance vzhledem k pohybu. – Uvažujme pohyb plochy vůči soustavě pravoúhlých souřadnic. Buď schema

	x	y	z
X	α_1	β_1	γ_1
Y	α_2	β_2	γ_2
Z	α_3	β_3	γ_3

kosiny směrný transformace pohybové plochy pro nové souřadnice X, Y, Z výrazy

$$\left.\begin{aligned} X &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a \\ Y &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + b \\ Z &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + c \end{aligned}\right\} \quad (1),$$

z nichž plyne

$$X_u = \alpha_1 x_u + \alpha_2 y_u + \alpha_3 z_u \quad , \quad X_v = \alpha_1 x_v + \alpha_2 y_v + \alpha_3 z_v ,$$

– – – – – –

a označíme-li

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= S X_u^2 \quad , \quad \mathcal{F}_1 = S X_u X_v \quad , \quad \mathcal{G}_1 = S X_v^2 \quad , \\ \Delta_1 &= + \sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{G}_1 - \mathcal{F}_1^2} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

plyne odtud bezprostředně vzhledem k známým relacím mezi kosiny směrnými pravoúhlého trojhranu pro $\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1$ a odtud též pro Δ_1, že

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}, \quad \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}, \quad \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}, \quad \Delta_1 = \Delta \quad \ldots (3),$$

takže základní veličiny nezávisí na poloze plochy

k pravoúhlé soustavě souřadné.

8.) Příklady výrazů pro ds^2. – Přečteme-li plochu dáním rovnicí $z = f(x, y) \dots (1)$ pak jest $dz = p\,dx + q\,dy$, takže

$$ds^2 = (1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2$$

a pro základní veličiny jest

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2 \Big\} (2)$$

odkud plyne

$$\Delta = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Uvažujme dále specielně plochu rozvinutelnou a vyjadřme ji na základě hrany vratu jako křivky řídící ve tvaru

$(1) \dots x = \varphi(u) + v\,\varphi'(u), \quad y = \chi(u) + v\,\chi'(u), \quad z = \chi(u) + v\chi'(u)$,

pak jest

$$x_u = \varphi'(u) + v\,\varphi''(u), \quad x_v = \varphi'(u)$$

– – – – .

Béřeme-li pro jednoduchost za parametr u přímo oblouk hrany vratu, pak jest, vzhledem ke vztahům $S\varphi'^2 = 1$, $S\varphi'\varphi'' = 0$, $S\varphi''^2 = S\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2}$,

$$ds^2 = [S\varphi'^2 + 2v\,S\varphi'\varphi'' + v^2 S\varphi''^2]\,du^2 + 2[S\varphi'^2 + v\,S\varphi'\varphi'']\,du\,dv + dv^2,$$

$$ds^2 = \left[1 + \frac{v^2}{\rho^2}\right] du^2 + 2\,du\,dv + dv^2 \dots (2)$$

kterýžto výraz možno též kráčce napsati ve tvaru

$$ds^2 = [du+dv]^2 + \frac{v^2}{r^2}\,dw^2 \dots (2').$$

Pozn.
Výraz pro ds^2, který jsme odvodili, platí obecně pro každý směr postupu z bodu na ploše. Pro element oblouku na křivkách parametrických el $u = \text{konst}$ čili (u), $v = \text{konst}$ čili (v) obdržíme z něho výsledky

$$ds^2_{(u)} = G\,dw^2, \quad ds^2_{(v)} = E\,du^2$$

a dáme-li oblouku vzrůstati s rostoucím příslušným parametrem, máme odtud

$$ds_{(u)} = \sqrt{G}\,dw, \quad ds_{(v)} = \sqrt{E}\,dw.$$

<u>9. Změna základ. veličin 1. řádu při transformaci parametrů.</u> – Je-li přechod od původních parametrů u, v k novým U, V dán výrazy

$$u = \lambda(U, V), \quad v = \mu(U, V) \dots (1)$$

nebo obecněji, při přechodu nových křivkách parametrických, výrazy

$$u = \lambda(\lambda(U), \mathfrak{B}(V)), \quad v = \mu(\lambda(U), \mathfrak{B}(V)) \dots (1')$$

pak jsou-li E_1, F_1, G_1, Δ_1 nové základ. veličiny v nichž $ds^2 = E_1\,dU^2 + 2F_1\,dU\,dV + G_1\,dV^2$,

bude $E_1 = S\,x_U^2, \dots \dots (2)$ Při tom jest

$$x_U = x_u\frac{\partial\lambda}{\partial U} + x_v\frac{\partial\mu}{\partial U}$$

$$x_V = x_u\frac{\partial\lambda}{\partial V} + x_v\frac{\partial\mu}{\partial V}$$

a dosazením do (2) pak plyne

$$(3)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2 + 2\mathcal{F}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\mu}{\partial u} + \mathcal{G}\left(\frac{\partial\mu}{\partial u}\right)^2 \\ \mathcal{G}_1 = \mathcal{E}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2 + 2\mathcal{F}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\mu}{\partial v} + \mathcal{G}\left(\frac{\partial\mu}{\partial v}\right)^2 \\ \mathcal{F}_1 = \mathcal{E}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \mathcal{F}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\mu}{\partial v} + \frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right] + \mathcal{G}\frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial\mu}{\partial v} \end{cases}$$

Jsou tudíž $\mathcal{E}_1$ a $\mathcal{G}_1$ dány kvadratickými formami v derivacích funkcí λ a μ; $\mathcal{F}_1$ jest kvadratickou formou polární.

Pro Δ_1^2 jest (viz str. 17) dle pravidla o násobení determ.

$$\Delta_1^2 = S\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}^2 = S\begin{vmatrix} x_u\frac{\partial\lambda}{\partial u} + x_v\frac{\partial\mu}{\partial u}, & y_u\frac{\partial\lambda}{\partial u} + y_v\frac{\partial\mu}{\partial u} \\ x_u\frac{\partial\lambda}{\partial v} + x_v\frac{\partial\mu}{\partial v}, & y_u\frac{\partial\lambda}{\partial v} + y_v\frac{\partial\mu}{\partial v} \end{vmatrix}^2$$

$$\Delta_1^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial u} & \frac{\partial\mu}{\partial u} \\ \frac{\partial\lambda}{\partial v} & \frac{\partial\mu}{\partial v} \end{vmatrix}^2 \cdot S\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}^2 \quad \text{čili}$$

$$\Delta_1^2 = \left[\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}\right]^2 \cdot \Delta^2 \ldots (3').$$

III. Normála ku ploše.

10. Její cosiny směrné. – Pro bod (x, y, z) plochy sestrojme normálu ku ploše o cosinech směrných X, Y, Z. Normála kolmá jest – máme-li ovšem při tom na zřeteli pouze obyčejné body plochy, vylučujíce body n-násobné – ke všem směrům na ploše bodem plochy vedeným. Cosiny směrné těchto směrů úměrny jsou ku dx, dy, dz, tedy

$$dx = x_u\,du + x_v\,dv, \quad \dots \quad .$$

Ze vztahu $\quad SX\,dx = 0 \quad$ čili

$$SX(x_u\,du + x_v\,dv) = 0,$$

který platí ať $\frac{dv}{du}$ má jakoukoli hodnotu, plyne ihned, že

$$\left.\begin{aligned} Xx_u + Yy_u + Zz_u &= 0 \\ Xx_v + Yy_v + Zz_v &= 0 \end{aligned}\right\} (1)$$

odkud plošováním

$$X : Y : Z = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

a odtud konečně

$$(2) \dots X = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad Y = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad Z = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix},$$

béřeme-li ve jmenovateli hodnotu $+\Delta$, čímž stanovíme určitý smysl na normále za kladný.

– Pro rovinu tečnou ke ploše v bodě (x, y, z) máme zároveň rovnici

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \quad (3).$$

11. Kladný smysl na normále. – Uvažujme souvislost kladného smyslu na normále vytčeného s kladnými tečnami křivek parametrických, je-

jichž kladný smysl (viz str. 20) odpovídá rostoucímu příslušnému parametru, tedy $+du$ resp. $+dv$.

Pro křivku $v = \text{konst}$ jest

$$dx_{(v)} = x_u\,du\,,\quad dy_{(v)} = y_u\,du\,,\quad dz_{(v)} = z_u\,du$$

takže cosiny směrné pro kladný smysl její tečny jsou

$$\frac{x_u}{\sqrt{E}}\,,\ \frac{y_u}{\sqrt{E}}\,,\ \frac{z_u}{\sqrt{E}}\,.$$

Obdobně pro křivku $u = \text{konst}$ obdržíme cosiny směrné kladného smyslu tečny

$$\frac{x_v}{\sqrt{G}}\,,\ \frac{y_v}{\sqrt{G}}\,,\ \frac{z_v}{\sqrt{G}}\,.$$

Sinus rožný tečen ke křivkám $v = \text{konst}$ a $u = \text{konst}$ a normály plošné v bodě plochy jest tedy

$$\frac{1}{\sqrt{EG}}\begin{vmatrix} x_u & x_v & X \\ y_u & y_v & Y \\ z_u & z_v & Z \end{vmatrix}.$$

Vyšetříme hodnoty minorů k prvkům druhého sloupce. Jest

$$\begin{vmatrix} Y & y_u \\ Z & z_u \end{vmatrix} = Yz_u - Zy_u = \frac{(z_u x_v - z_v x_u)z_u - (x_u y_v - x_v y_u)y_u}{\Delta}$$

$$= \frac{x_v(y_u^2 + z_u^2) - x_u(y_u y_v + z_u z_v)}{\Delta} = \frac{x_v(E - x_u^2) - x_u(F - x_u x_v)}{\Delta}$$

$$\begin{vmatrix} Y & y_u \\ Z & z_u \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\left(Ex_v - Fx_u\right) = \begin{vmatrix} E & F \\ x_u & x_v \end{vmatrix} \quad \dots\ (1).$$

Obdobně

$$\begin{vmatrix} Z & z_u \\ X & x_u \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\left(Ey_v - Fy_u\right) = \begin{vmatrix} E & F \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \quad \dots\ (1'),$$

$$\begin{vmatrix} X & x_u \\ Y & z_u \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\left(\mathcal{G} z_v - \mathcal{F} z_u\right) = \begin{vmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ z_u & z_v \end{vmatrix} \dots (1'')$$

Obdobně pak bychom obdrželi pro minory prvého sloupce – vzaté s opačným znaménkem –

$$\begin{vmatrix} Y & y_v \\ Z & z_v \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\left(\mathcal{F} x_v - \mathcal{G} x_u\right) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \mathcal{F} & \mathcal{G} \\ x_u & x_v \end{vmatrix} \dots (2)$$

– – – – .

Náš determinant rovná se pak tedy

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v & X \\ y_u & y_v & Y \\ z_u & z_v & Z \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\Big[x_v(\mathcal{E} x_v - \mathcal{F} x_u) + y_v(\mathcal{E} y_v - \mathcal{F} y_u) + z_v(\mathcal{E} z_v - \mathcal{F} z_u)\Big]$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2\right] = \frac{1}{\Delta}\Delta^2 = \Delta$$

Jest tedy

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v & X \\ y_u & y_v & Y \\ z_u & z_v & Z \end{vmatrix} = \Delta \quad \dots (3)$$

Náš sinus rožný vytčeného trojhranu má tudíž hodnotu $\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}\Delta$, tedy hodnotu kladnou. Seznáváme tudíž, že trojhran daný kladnými tečnami křivek (v) a (u) a normálou vzatou ve smyslu stanoveném vzorci (2) str. 22 má touž orientaci jako trojhran os souřadných.

12. Základní veličiny druhého řádu. – Ze vzta-
hů platných pro cosiny směrné normály

$$S X x_u = 0 \,, \quad S X x_v = 0$$

plyne derivací:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L} &= S X x_{uu} = - S X_u x_u \\ M &= S X x_{uv} = - S X_v x_u = - S X_u x_v \\ N &= S X x_{vv} = - S X_v x_v \end{aligned}\right\} (1)$$

Tyto výrazy, označme je $\mathcal{L}, M, N$, nazýváme základními veličinami druhého řádu naší theorie ploch.

Dosazením za X, Y, Z (viz str. 22) nabýváme pro $\mathcal{L}, M, N$ též výrazů:

$$(1') \begin{cases} \mathcal{L} = S X x_{uu} = \dfrac{1}{\Delta} S x_{uu} \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \dfrac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_{uu} & x_u & x_v \\ y_{uu} & y_u & y_v \\ z_{uu} & z_u & z_v \end{vmatrix} \\ \text{a obdobně} \\ M = \dfrac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_v \\ y_{uv} & y_u & y_v \\ z_{uv} & z_u & z_v \end{vmatrix} , \quad N = \dfrac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_{vv} & x_u & x_v \\ y_{vv} & y_u & y_v \\ z_{vv} & z_u & z_v \end{vmatrix} . \end{cases}$$

Ku $\mathcal{L}, M, N$ připojujme opět jako další veličinu výraz ∇, pro který jest

$$\nabla^2 = \mathcal{L} N - M^2 \quad \ldots (1'').$$

Že tyto veličiny mají významu pro charakterisaci ploch, ukažme na jednoduchém příkladě. Uvažujme rovinu. Zde normála má stálý směr, tudíž veličiny $\mathcal{L}, M, N$ jsou rovny nule pro všechny

body roviny.

Předpokládejme naopak $\mathcal{L}=M=N=0$ a vyšetřeme příslušnou plochu. Dle daného předpokladu platí

$$X_u x_u + Y_u y_u + Z_u z_u = 0$$
$$X_u x_v + Y_u y_v + Z_u z_v = 0$$

odkud plyne rovnost poměrů

$$X_u : Y_u : Z_u = X : Y : Z$$

možno tedy klásti

$$X_u = \lambda X, \quad Y_u = \lambda Y, \quad Z_u = \lambda Z \ldots (r)$$

Jest však $X^2+Y^2+Z^2=1$, odkud

$$S X X_u = 0$$ a dosazením z (r) máme

$$\lambda (X^2+Y^2+Z^2) = 0.$$

Jest tedy $\lambda = 0$,

$$X_u = Y_u = Z_u = 0,$$ a obdobně $$X_v = Y_v = Z_v = 0$$

odkud: $X = k_1, \; Y = k_2, \; Z = k_3$

načež na př. rovnice $S X x_u = 0$

integrací dává

$$k_1 x + k_2 y + k_3 z = \text{konst}$$

jako rovnici naší plochy.

Jest tedy podmínka $\mathcal{L}=M=N=0$ nutnou a postačující pro charakterisaci roviny.

13. Jejich invariance vzhledem k pohybu a změna pro transformaci parametrů. — Je-li pohybová transformace souřadnic (x, y, z) v nové souřadnice ξ, η, ζ dána vztahy

$$\xi = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a, \ldots,$$

z nichž plyne derivací

$$\xi_u = \alpha_1 x_u + \alpha_2 y_u + \alpha_3 z_u , \quad \dots$$
$$\xi_v = \alpha_1 x_v + \alpha_2 y_v + \alpha_3 z_v , \quad \dots$$
$$\xi_{uu} = \alpha_1 x_{uu} + \alpha_2 y_{uu} + \alpha_3 z_{uu} , \quad \dots$$
$$-- \; - \; --- \; ,$$

pak pro nové veličiny $\mathcal{L}_1, M_1, N_1$ dají nám výrazy (1') str. 25

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{\Delta_1} \left| \xi_{uu} \, \xi_u \, \xi_v \right| =$$
$$= \frac{1}{\Delta} \left| \alpha_1 x_{uu} + \alpha_2 y_{uu} + \alpha_3 z_{uu}, \alpha_1 x_u + \alpha_2 y_u + \alpha_3 z_u, \alpha_1 x_v + \dots \right|$$
$$= \frac{1}{\Delta} \left| x_{uu} \, x_u \, x_v \right| \underbrace{\left| \alpha_1 \, \alpha_2 \, \alpha_3 \right|}_{1} ,$$ takže

$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}$ a obdobně

$M_1 = M$, $N_1 = N$, načež také

$\nabla_1 = \nabla$,

čímž invariance veličin 2. řádu vůči pohybu dokázána.

Zavedeme-li dále nové parametry U, V vztahy

$$u = \lambda(U, V) , \quad v = \mu(U, V)$$

obdržíme pro nové základ. veličiny 2. řádu $\mathcal{L}_1, M_1, N_1$ výrazy:

$$\mathcal{L}_1 = - S X_u x_u = - S \left[\left(X_u \frac{\partial \lambda}{\partial U} + X_v \frac{\partial \mu}{\partial U} \right) \cdot \left(x_u \frac{\partial \lambda}{\partial U} + x_v \frac{\partial \mu}{\partial U} \right) \right] ,$$

čili po provedení

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial u}\right)^2 + 2M\frac{\partial u}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial u} + N\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2, \quad \dots (1)$$

výraz to zcela obdobný k výrazu pro $\mathcal{E}_1$ (viz str. 21)

Obdobně

$$M_1 = \mathcal{L}\frac{\partial u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v} + M\left[\frac{\partial u}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}\right] + N\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial v} \dots (2)$$

$$N_1 = \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2 + 2M\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v} + N\left(\frac{\partial v}{\partial v}\right)^2 \quad \dots (3)$$

a konečně

$$\nabla_1 = \nabla\frac{\partial(u,v)}{\partial(U,V)} \quad \dots (4).$$

14. Derivace sm. cosinů normály. – Pro derivace dle u platí vztahy

$$\left.\begin{aligned} X X_u + Y Y_u + Z Z_u &= 0 \\ x_u X_u + y_u Y_u + z_u Z_u &= -\mathcal{L} \\ x_v X_u + y_v Y_u + z_v Z_u &= -M \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

a ježto determinaud soustavy jest rovem Δ (str. 24), jest

$$\Delta X_u = \begin{vmatrix} 0 & Y & Z \\ -\mathcal{L} & y_u & z_u \\ -M & y_v & z_v \end{vmatrix} = \mathcal{L}\begin{vmatrix} Y & Z \\ y_v & z_v \end{vmatrix} - M\begin{vmatrix} Y & Z \\ y_u & z_u \end{vmatrix} =$$

(viz str. 24)

$$= \frac{\mathcal{L}}{\Delta}\begin{vmatrix} \mathcal{F} & \mathcal{G} \\ x_u & x_v \end{vmatrix} - \frac{M}{\Delta}\cdot\begin{vmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ x_u & x_v \end{vmatrix},$$

$$(1') \quad \begin{cases} X_u = \frac{1}{\Delta^2}(\mathcal{F}M - \mathcal{G}\mathcal{L})x_u + \frac{1}{\Delta^2}(\mathcal{F}\mathcal{L} - \mathcal{E}M)x_v \\ Y_u = \frac{1}{\Delta^2}(\mathcal{F}M - \mathcal{G}\mathcal{L})y_u + \frac{1}{\Delta^2}(\mathcal{F}\mathcal{L} - \mathcal{E}M)y_v \\ Z_u = \quad \dots \quad z_u + \quad \dots \quad z_v \end{cases}$$

Obdobně nahradíme výrazy pro X_v, Y_v, Z_v. Ve vý-

sledku jest třeba – jak plyne z rovnic obdobných rovnicím (1) – pouze psáti M místo $\mathcal{L}$ a N místo M.

Jest tedy

$$X_v = \frac{1}{\Delta^2}(\mathcal{F}N - \mathcal{G}M)\,x_u + \frac{1}{\Delta^2}(\mathcal{F}M - \mathcal{E}N)\,x_v \Big\} \quad (2')$$

Výrazy tyto možno též psáti ve tvaru determinantů

$$\Delta^2 X_u = \begin{vmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ M & \mathcal{F} & \mathcal{G} \\ 0 & x_u & x_v \end{vmatrix}, \quad \ldots \quad (1'')$$

$$\Delta^2 X_v = \begin{vmatrix} M & \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ N & \mathcal{F} & \mathcal{G} \\ 0 & x_u & x_v \end{vmatrix}, \quad \ldots \quad (2'').$$

Odtud vypočteme $S X_u^2, \ldots$. Obdržíme

$$\left.\begin{aligned} S X_u^2 &= \frac{1}{\Delta^2}(\mathcal{G}\mathcal{L}^2 - 2\mathcal{F}\mathcal{L}M + \mathcal{E}M^2) \\ S X_v^2 &= \frac{1}{\Delta^2}(\mathcal{G}M^2 - 2\mathcal{F}MN + \mathcal{E}N^2) \\ S X_u X_v &= \frac{1}{\Delta^2}(\mathcal{G}\mathcal{L}M + \mathcal{E}MN - \mathcal{F}M^2 - \mathcal{F}\mathcal{L}N) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Pro tyto součty postáváme tedy vyjádření základními veličinami. Hodnota jejich je tudíž rovněž nezávislá na poloze pravoúhlé soustavy souřadné.

Dalšího zjednodušení výrazů (3) nabudeme zavedením dalších dvou veličin, jejichž hodnota rovněž nezávisí na volbě pravoúhlé soustavy souřadné

né. Jsou to

$$\mathcal{H} = \frac{\mathcal{E}\mathcal{N} - 2\mathcal{F}\mathcal{M} + \mathcal{G}\mathcal{L}}{\Delta^2}, \qquad \mathcal{K} = \frac{\nabla^2}{\Delta^2}.$$

Jest pak

$$\Delta^2 S X_u^2 = \mathcal{L}(\mathcal{G}\mathcal{L} - 2\mathcal{F}\mathcal{M}) + \mathcal{E}\mathcal{M}^2 = \Delta^2 \mathcal{H}\mathcal{L} - \mathcal{E}(\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2)$$

($\mathcal{G}\mathcal{L} - 2\mathcal{F}\mathcal{M} = \Delta^2\mathcal{H} - \mathcal{E}\mathcal{N}$; $\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2 = \nabla^2$)

$$= \Delta^2 \mathcal{H}\mathcal{L} - \mathcal{E}\Delta^2\mathcal{K}$$

$$\left.\begin{aligned} S X_u^2 &= \mathcal{H}\mathcal{L} - \mathcal{K}\mathcal{E} = \begin{vmatrix} \mathcal{H} & \mathcal{K} \\ \mathcal{E} & \mathcal{L} \end{vmatrix} \\ \text{Obdobně} \\ S X_u X_v &= \mathcal{H}\mathcal{M} - \mathcal{K}\mathcal{F} = \begin{vmatrix} \mathcal{H} & \mathcal{K} \\ \mathcal{F} & \mathcal{M} \end{vmatrix} \\ S X_v^2 &= \mathcal{H}\mathcal{N} - \mathcal{K}\mathcal{G} = \begin{vmatrix} \mathcal{H} & \mathcal{K} \\ \mathcal{G} & \mathcal{N} \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (3')$$

Dalších vztahů nabudeme vyjádřením veličiny ∇^2 pomocí cosinů směrových normály a jejich derivací. Jest

$$\nabla^2 = \mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2 = S X_u x_u \cdot S X_v x_v - S X_u x_v \, S X_v x_u$$

Značme na okamžik $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$; $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ veličiny x, y, z; X, Y, Z. Pak jest, jelikož součiny stejnolehlých prvků činitelů obou součinů se ruší

$$\nabla^2 = S X_u^{(i)} X_v^{(k)} x_u^{(i)} x_v^{(k)} - S X_u^{(i)} X_v^{(k)} x_u^{(k)} x_v^{(i)},$$

kde $i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3$, $i \neq k$; čili

$$\nabla^2 = S X_u^{(i)} X_v^{(k)} \left(x_u^{(i)} x_v^{(k)} - x_u^{(k)} x_v^{(i)} \right).$$

Připomeneme-li si vztah $\Delta X = y_u z_v - z_u y_v, \ldots$ jest

$$\nabla^2 = \Delta \cdot S X_u^{(i)} X_v^{(k)} \cdot X^{(l)},$$

kde $l = 1, 2, 3$, $i \neq k \neq l$,

čili použijeme-li determinantu,

$$\nabla^2 = \Delta \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} \quad \dots \quad (4).$$

Násobíme-li prvky prvého sloupce X a přičteme k nim prvky sloupce druhého a třetího násobené Y resp. Z, máme dále

$$\nabla^2 = \frac{\Delta}{X} \begin{vmatrix} SX^2 & Y & Z \\ SXX_u & Y_u & Z_u \\ SXX_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{X} \begin{vmatrix} 1 & Y & Z \\ 0 & Y_u & Z_u \\ 0 & Y_v & Z_v \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 X = \Delta \begin{vmatrix} Y_u & Z_u \\ Y_v & Z_v \end{vmatrix}, \text{ obdobně } \nabla^2 Y = \Delta \begin{vmatrix} Z_u & X_u \\ Z_v & X_v \end{vmatrix}, \dots$$

odkud zdvojmocněním a sečtením dostaneme

$$\frac{\nabla^4}{\Delta^2} = S \begin{vmatrix} Y_u & Z_u \\ Y_v & Z_v \end{vmatrix}^2 = \left\| \begin{matrix} X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{matrix} \right\|^2 = \begin{vmatrix} SX_u^2 & SX_uX_v \\ SX_uX_v & SX_v^2 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\nabla^4}{\Delta^2} = SX_u^2 \cdot SX_v^2 - (SX_uX_v)^2 \dots \quad (5)$$

čili po dosazení výrazů (3')

$$\frac{\nabla^4}{\Delta^2} = (\mathcal{H}\mathcal{L} - \mathcal{K}\mathcal{E})(\mathcal{H}\mathcal{N} - \mathcal{K}\mathcal{G}) - (\mathcal{H}\mathcal{M} - \mathcal{K}\mathcal{F})^2 \dots (5').$$

IV. Základní rovnice.

15. Derivace souřadnic. – Určíme nejprve výrazy pro druhé derivace x_{uu}, x_{uv}, x_{vv}, ... na základě ve-

ličin $\mathcal{E}, \ldots \mathcal{L} \ldots$.

Ze vztahů definujících veličiny prvého řádu

$$S x_u^2 = \mathcal{E}, \quad S x_u x_v = \mathcal{F}, \quad S x_v^2 = \mathcal{G}$$

plyne derivací

$$\left.\begin{aligned} S x_{uu} x_u &= \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_u, \quad S x_{uv} x_u = \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_v \\ S x_{uv} x_v &= \tfrac{1}{2}\mathcal{G}_u, \quad S x_{vv} x_v = \tfrac{1}{2}\mathcal{G}_v, \\ S x_{uu} x_v &= \mathcal{F}_u - \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_v, \quad S x_{uv} x_u = \mathcal{F}_v - \tfrac{1}{2}\mathcal{G}_u \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Uvážíme-li mimo to výrazy pro $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ ((1)' str. 25), máme pro $x_{uu}, \ldots$ vztahy

$$x_{uu}(y_u z_v - z_u y_v) + y_{uu}(z_u x_v - x_u z_v) + z_{uu}(x_u y_v - y_u x_v) = \Delta \mathcal{L}$$

$$x_{uu} x_u + y_{uu} y_u + z_{uu} z_u = \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_u$$

$$x_{uu} x_v + y_{uu} y_v + z_{uu} z_v = \mathcal{F}_u - \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_v$$

odkud vzhledem ke (2) str. 22 a (3) str. 24 plyne

$$\Delta^2 x_{uu} = \begin{vmatrix} \Delta\mathcal{L} & z_u x_v - x_u z_v & x_u y_v - y_u x_v \\ \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_u & y_u & z_u \\ \mathcal{F}_u - \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

$$\Delta^2 x_{uu} = \Delta\mathcal{L}(y_u z_v - z_u y_v) - \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_u(z_u z_v x_v - x_u z_v^2 - x_u y_v^2 + y_u y_v x_v) + \left(\mathcal{F}_u - \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_v\right)(z_u^2 x_v - x_u z_u z_v - x_u y_u y_v + y_u^2 x_v) =$$

$$= \Delta\mathcal{L}(y_u z_v - z_u y_v) - \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_u\left[x_v(\mathcal{F} - x_u x_v) - x_u(\mathcal{G} - x_v^2)\right] + \left(\mathcal{F}_u - \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_v\right)\left[x_v(\mathcal{E} - x_u^2) - x_u(\mathcal{F} - x_u x_v)\right]$$

odkud

$$(2)\ldots x_{uu} = \mathcal{L}X + \frac{1}{2\Delta^2}(\mathcal{E}_u\mathcal{G} - 2\mathcal{F}\mathcal{F}_u + \mathcal{E}_v\mathcal{F})x_u + \frac{1}{2\Delta^2}(-\mathcal{E}_u\mathcal{F} + 2\mathcal{F}_u\mathcal{E} - \mathcal{E}_v\mathcal{E}).$$

Obdobně obdržíme

$$(2)\quad \begin{cases} x_{vv} = NX + \frac{1}{2\Delta^2}(G_v\mathcal{E} - 2\mathcal{F}\mathcal{F}_v + G_u\mathcal{F})x_u + \frac{1}{2\Delta^2}(-G_v\mathcal{F} + 2\mathcal{F}_v\mathcal{G} - G_u\mathcal{G}) \\ x_{uv} = MX + \frac{1}{2\Delta^2}(\mathcal{E}_v\mathcal{G} - G_u\mathcal{F})x_u + \frac{1}{2\Delta^2}(G_u\mathcal{E} - \mathcal{E}_v\mathcal{F})x_v \end{cases}$$

Dostáváme tudíž 2. derivace souřadnic pravoúhlých vyjádřeny prvními jejich derivacemi pomocí směrových cosinů normály, pomocí základ. veličin 1. řádu a jejich 1. derivací a pomocí základ. veličin řádu druhého.

Se zřetelem k výrazům pro $X_u, \ldots$ (str. 28 a 29) jest odtud patrno, že derivace kteréhokoli řádu pravoúhlých souřadnic dají se vyjádřiti jejich prvními derivacemi pomocí základ. veličin 1. řádu a jejich derivací až do řádu o jedna menšího a pomocí základ. veličin 2. řádu a jejich derivací až do řádu o 2 menšího.

16. Tři základní rovnice. – Jak již řečeno, omezujeme se ve svých úvahách na funkce mající derivace, jejichž hodnota nezáleží na pořadu, v němž derivování dle jednotlivých proměnných se provádí. Platí tedy také $x_{uuv} = x_{uvu}$. Derivujme tudíž první z rovnic (2) dle v a třetí dle u a položme rozdíl výsledků roven nule. Za x_{uu} dosadíme obsah do výsledku výrazy (2) a za X_u, X_v výrazy dříve vyvozené (str. 28, 29). Tím nabudeme rovnice, v níž kromě základních veličin a jejich derivací budou pouze X, x_u, x_v.

Obdržíme tudíž po provedeném dosazení:

$$\mathcal{L}_v X - \mathcal{M}_u X + \frac{\mathcal{L}}{\Delta^2}(\mathcal{F}\mathcal{N} - \mathcal{G}\mathcal{M})x_u + \frac{\mathcal{L}}{\Delta^2}(\mathcal{F}\mathcal{M} - \mathcal{E}\mathcal{N})x_v -$$
$$- \frac{\mathcal{M}}{\Delta^2}(\mathcal{F}\mathcal{M} - \mathcal{G}\mathcal{L})x_u - \frac{\mathcal{M}}{\Delta^2}(\mathcal{F}\mathcal{L} - \mathcal{E}\mathcal{M})x_v +$$
$$+ \frac{1}{2\Delta^2}(\mathcal{E}_u\mathcal{G} + \mathcal{E}_v\mathcal{F} - 2\mathcal{F}_u\mathcal{F})\Big[\mathcal{M}X + \frac{1}{2\Delta^2}(\mathcal{E}_v\mathcal{G} - \mathcal{G}_u\mathcal{F})x_u +$$
$$+ \frac{1}{2\Delta^2}(-\mathcal{E}_v\mathcal{F} + \mathcal{G}_u\mathcal{E})x_v\Big] +$$
$$+ \frac{1}{2\Delta^2}(-\mathcal{E}_u\mathcal{F} - \mathcal{E}_v\mathcal{E} + 2\mathcal{F}_u\mathcal{E})\Big[\mathcal{N}X + \frac{1}{2\Delta^2}(-\mathcal{G}_v\mathcal{F} - \mathcal{G}_u\mathcal{G} + 2\mathcal{F}_v\mathcal{G})x_u$$
$$+ \frac{1}{2\Delta^2}(\mathcal{G}_v\mathcal{E} + \mathcal{G}_u\mathcal{F} - 2\mathcal{F}_v\mathcal{F})x_v\Big] -$$
$$- \frac{1}{2\Delta^2}(\mathcal{E}_v\mathcal{G} - \mathcal{G}_u\mathcal{F})\Big[\mathcal{L}X + \frac{1}{2\Delta^2}(\mathcal{E}_u\mathcal{G} + \mathcal{E}_v\mathcal{F} - 2\mathcal{F}_u\mathcal{F})x_u +$$
$$+ \frac{1}{2\Delta^2}(-\mathcal{E}_u\mathcal{F} - \mathcal{E}_v\mathcal{E} + 2\mathcal{F}_u\mathcal{E})x_v\Big] -$$
$$- \frac{1}{2\Delta^2}(-\mathcal{E}_v\mathcal{F} + \mathcal{G}_u\mathcal{E})\Big[\mathcal{M}X + \frac{1}{2\Delta^2}(\mathcal{E}_v\mathcal{G} - \mathcal{G}_u\mathcal{F})x_u + \frac{1}{2\Delta^2}(-\mathcal{E}_v\mathcal{F} + \mathcal{G}_u\mathcal{E})x_v\Big]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\mathcal{E}_u\mathcal{G} + \mathcal{E}_v\mathcal{F} - 2\mathcal{F}_u\mathcal{F}}{2\Delta^2}\cdot x_u + \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{-\mathcal{E}_u\mathcal{F} - \mathcal{E}_v\mathcal{E} + 2\mathcal{F}_u\mathcal{E}}{2\Delta^2}\cdot x_v$$
$$- \frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\mathcal{E}_v\mathcal{G} - \mathcal{G}_u\mathcal{F}}{2\Delta^2}\cdot x_u - \frac{\partial}{\partial u}\,\frac{-\mathcal{E}_v\mathcal{F} + \mathcal{G}_u\mathcal{E}}{2\Delta^2}\cdot x_v = 0 \quad \ldots (1)$$

Rovnice tato jest lineární vzhledem k X, x_u, x_v takže ji lze psáti ve tvaru

$$A X + B x_u + C x_v = 0 \quad \ldots\ (1')$$

Podobně vztah $y_{uv} = y_{vu}$ vede k rovnici

$$A Y + B y_u + C y_v = 0 \quad \ldots\ (1'')$$

kde koeficienty A, B, C jsou tytéž, a konečně vztah $z_{uv} = z_{vu}$ dává

$$A Z + B z_u + C z_v = 0 \quad \ldots\ (1''').$$

Poněvadž determinant soustavy těchto tří rovnic jest Δ, který nerovná se nule, plyne z nich

$A = 0$, $B = 0$, $C = 0$.

Rovnice $A = 0$ dává

$$(2)\ldots\ L_v - M_u = \frac{E_v G - G_u F}{2\Delta^2} L - \frac{E_u G - G_u E + 2(E_v - F_u) F}{2\Delta^2} M - \frac{-E_u F - E_v E + 2 F_u E}{2\Delta^2} N$$

Vztahy $B = 0$, $C = 0$ vedou k jediné rovnici, která se zřetelem k tomu, že

$$\Delta^2 = EG - F^2, \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial u} = E_u G + G_u E - 2 F_u F,$$

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial v} = E_v G + G_v E - 2 F_v F, \quad \text{má tvar}$$

$$(3)\ldots\ \frac{LN - M^2}{\Delta^2} = \frac{1}{2\Delta^2}(2F_{uv} - E_{vv} - G_{uu}) + \frac{E}{4\Delta^4}(G_u^2 + E_v G_v - 2 G_v F_u) + \frac{G}{4\Delta^4}(E_v^2 + E_u G_u - 2 E_u F_v) + \frac{F}{4\Delta^4}(E_u G_v - E_v G_u - 2 F_u G_u - 2 F_v E_v + 4 F_u F_v).$$

Obdobně rovnice

$x_{uvv} = x_{vvu}, \ldots$ mají koefficienty A_1, B_1, C_1 rovny nule,

$A_1 = 0$, $B_1 = 0$, $C_1 = 0$.

Rovnice, které po dosazení obdržíme, plynou z rovnic (2), (3) tím, že zaměníme u a v, E a G, L a N. Rovnice (3) se tímto zaměněním nezmění, takže přistupuje k rovnicím (2), (3) již jen jedna rovnice

$$(4)\ldots\ N_u - M_v = \frac{G_u E - E_v F}{2\Delta^2} N - \frac{G_v E - E_v G + 2(G_u - F_v) F}{2\Delta^2} M - \frac{-G_v F - G_u G + 2 F_v G}{2\Delta^2} L$$

Rovnice (2), (3), (4) vyjadřují vztahy mezi základními veličinami $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ a jejich derivacemi dle parametrů u, v. Jsou nazývány základními rovnicemi parametrického vyjádření ploch. První a třetí z nich označovány jsou obvykle jako relace Codazzi-ho, druhá z nich jako relace Gaussova.

Rovnice tyto nezávisí na pravoúhlé soustavě souřadné, takže lze souditi, že mají určitý geometrický význam. Na levé straně relace Gaussovy jest výraz, pro který zavedli jsme již označení $\mathcal{K}$;

$$\frac{\mathcal{L}\mathcal{N}-\mathcal{M}^2}{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2} = \frac{\nabla^2}{\Delta^2} = \mathcal{K}.$$

17. Přímé vyvození základ. rovnic. – Vyvodíme nejprve relaci Gaussovu. Dosadíme-li za $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ známé výrazy (viz (1)' str. 25), obdržíme

$$\Delta^2(\mathcal{L}\mathcal{N}-\mathcal{M}^2) = \left|x_{uu}\, x_u\, x_v\right| \cdot \left|x_{vv}\, x_u\, x_v\right| - \left|x_{uv}\, x_u\, x_v\right|^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} S x_{uu}x_{vv} & S x_{uu}x_u & S x_{uu}x_v \\ S x_{vv}x_u & S x_u^2 & S x_u x_v \\ S x_{vv}x_v & S x_u x_v & S x_v^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} S x_{uv}^2 & S x_{uv}x_u & S x_{uv}x_v \\ S x_{uv}x_u & S x_u^2 & S x_u x_v \\ S x_{uv}x_v & S x_u x_v & S x_v^2 \end{vmatrix}$$

čili po dosazení (viz str. 32)

$$= \begin{vmatrix} S x_{uu}x_{vv} & \frac{1}{2}\mathcal{E}_u & \mathcal{F}_u - \frac{1}{2}\mathcal{E}_v \\ \mathcal{F}_v - \frac{1}{2}\mathcal{G}_u & \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \frac{1}{2}\mathcal{G}_v & \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} S x_{uv}^2 & \frac{1}{2}\mathcal{E}_v & \frac{1}{2}\mathcal{G}_u \\ \frac{1}{2}\mathcal{E}_v & \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \frac{1}{2}\mathcal{G}_u & \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{vmatrix} =$$

$$= (S x_{uu} x_{vv} - S x_{uv}^2) \begin{vmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\mathcal{E}_u & \mathcal{F}_u - \frac{1}{2}\mathcal{E}_v \\ \mathcal{F}_v - \frac{1}{2}\mathcal{G}_u & \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \frac{1}{2}\mathcal{G}_v & \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\mathcal{E}_v & \frac{1}{2}\mathcal{G}_u \\ \frac{1}{2}\mathcal{E}_v & \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \frac{1}{2}\mathcal{G}_u & \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{vmatrix}.$$

Zbývá ještě vyjádřiti rozdíl $S x_{uu} x_{vv} - S x_{uv}^2$. Použijme za tím účelem rovnic (1) a derivujme páry z nich dle v a druhý dle u. Obdržíme

$$S x_{uu} x_{vv} = \mathcal{F}_{uv} - \frac{1}{2}\mathcal{E}_{vv} - S x_{uuv} x_v$$

$$S x_{uv}^2 = \frac{1}{2}\mathcal{G}_{uu} - S x_{uuv} x_v$$

takže odečtením plyne žádaný rozdíl

$$S x_{uu} x_{vv} - S x_{uv}^2 = \mathcal{F}_{uv} - \frac{1}{2}\mathcal{E}_{vv} - \frac{1}{2}\mathcal{G}_{uu}$$

a dosazením nabýváme žádané relace Gaussovy napsané v přehlednějším tvaru

$$(\mathcal{L}N - M^2)\Delta^2 = \Delta^2(\mathcal{F}_{uv} - \frac{1}{2}\mathcal{E}_{vv} - \frac{1}{2}\mathcal{G}_{uu}) +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\mathcal{E}_u & \mathcal{F}_u - \frac{1}{2}\mathcal{E}_v \\ \mathcal{F}_v - \frac{1}{2}\mathcal{G}_u & \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \frac{1}{2}\mathcal{G}_v & \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\mathcal{E}_v & \frac{1}{2}\mathcal{G}_u \\ \frac{1}{2}\mathcal{E}_v & \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \frac{1}{2}\mathcal{G}_u & \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{vmatrix} \quad \ldots (3').$$

Snadno dospějeme též přímo k relacím Codazzi-ho. Jest

$$\mathcal{L} = -S X_u x_u, \quad M = -S X_v x_u$$

$$\mathcal{L}_v = -S X_{uv} x_u - S X_u x_{uv}, \quad M_u = -S X_u x_{uv}.$$

takže

$$\mathfrak{L}_v - \mathfrak{M}_u = S X_v x_{uu} - S X_u x_{uv}.$$

Měli jsme pak výrazy

$$\Delta^2 X_u = \begin{vmatrix} \mathfrak{L} & \mathfrak{E} & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{M} & \mathfrak{F} & \mathfrak{G} \\ 0 & x_u & x_v \end{vmatrix}, \quad \Delta^2 X_v = \begin{vmatrix} \mathfrak{M} & \mathfrak{E} & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{F} & \mathfrak{G} \\ 0 & x_u & x_v \end{vmatrix},$$

takže jest

$$\Delta^2 S X_v x_{uu} = \begin{vmatrix} \mathfrak{M} & \mathfrak{E} & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{F} & \mathfrak{G} \\ 0 & S x_{uu} x_u & S x_{uu} x_v \end{vmatrix}, \quad \text{čili}$$

$$S X_v x_{uu} = \frac{1}{2\Delta^2} \begin{vmatrix} \mathfrak{M} & \mathfrak{E} & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{F} & \mathfrak{G} \\ 0 & \mathfrak{E}_u & 2\mathfrak{F}_u - \mathfrak{E}_v \end{vmatrix}$$

a obdobně

$$S X_u x_{uv} = \frac{1}{2\Delta^2} \begin{vmatrix} \mathfrak{L} & \mathfrak{E} & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{M} & \mathfrak{F} & \mathfrak{G} \\ 0 & \mathfrak{E}_v & \mathfrak{G}_u \end{vmatrix}$$

a tím dostáváme první relaci Codazziho ve tvaru

$$\mathfrak{L}_v - \mathfrak{M}_u = \frac{1}{2\Delta^2} \left| \begin{array}{cc:c} \mathfrak{E} & \mathfrak{F} & \mathfrak{M} \\ \mathfrak{F} & \mathfrak{G} & \mathfrak{N} \\ \hdashline \mathfrak{E}_u, & 2\mathfrak{F}_u - \mathfrak{E}_v, & 0 \end{array} \right| - \frac{1}{2\Delta^2} \left| \begin{array}{cc:c} \mathfrak{E} & \mathfrak{F} & \mathfrak{L} \\ \mathfrak{F} & \mathfrak{G} & \mathfrak{M} \\ \hdashline \mathfrak{E}_v & \mathfrak{G}_u & 0 \end{array} \right| \quad \ldots (2')$$

Známou záměnou a po rychlé úpravě plyne ostatní druhá rovnice Codazziho:

$$\mathfrak{N}_u - \mathfrak{M}_v = \frac{1}{2\Delta^2} \left| \begin{array}{cc:c} \mathfrak{E} & \mathfrak{F} & \mathfrak{L} \\ \mathfrak{F} & \mathfrak{G} & \mathfrak{M} \\ \hdashline 2\mathfrak{F}_v - \mathfrak{G}_u, & \mathfrak{G}_v & 0 \end{array} \right| - \frac{1}{2\Delta^2} \left| \begin{array}{cc:c} \mathfrak{E} & \mathfrak{F} & \mathfrak{M} \\ \mathfrak{F} & \mathfrak{G} & \mathfrak{N} \\ \hdashline \mathfrak{E}_v & \mathfrak{G}_u & 0 \end{array} \right| \quad \ldots (4').$$

Možno upozorniti na to, že na pravé straně rovnice Gaussovy nejsou veličiny $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ vůbec zastoupeny,

kdežto pravé strany rovnic Codazziho jsou vzhledem k nim lineární homogenní.

Pozn.

Že veličiny E, F, G jsou invariantní vzhledem k pohybu, plyne z té okolnosti, že forma

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

má geometrický význam, představujíc čtverce oblouku elementárního ds na ploše.

Také však forma

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}\,dX\,dx &= S(X_u\,du + X_v\,dv)(x_u\,du + x_v\,dv) \\ &= -(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2) \end{aligned}$$

má geometrický význam rovnající se

$$\cos\varphi \cdot ds \cdot d\sigma$$

kde $d\sigma$ značí element sférického obrazu na jednotkové kouli pro křivku s plochy, kterýžto obraz jest určen rovnoběžkami ke kladným normálám plochy v bodech křivky s, a kde φ jest úhel tečny křivky s a křivky $\mathfrak{S}$.

Odtud plyne tedy invariance veličin L, M, N vzhledem k pohybu.

Výraz pro $d\sigma^2$

$$d\sigma^2 = S(dX)^2 = SX_u^2\,du^2 + 2SX_uX_v\,du\,dv + SX_v^2\,dv^2$$

vede k invarianci výrazů SX_u^2, SX_uX_v, SX_v^2, které však (viz str. 29) dají se již vyjádřiti veličinami E, F, G, L, M, N.

Základní veličiny 1. a 2. řádu jsou jak jsme

seznámili takovými funkcemi parametrů u, v, že platí mezi nimi vztahy dané základními rovnicemi. Naskytne se pak ovšem úloha, dvojici veličin takového druhu, rozhodnouti o existenci plochy příslušné, případně stanoviti tuto plochu. Úlohu tuto rozřešíme až později. V dalším budeme míti příležitost blíže seznámiti geometrický význam základních veličin.

Kapitola II.

I. Směry na ploše. Dupinova indikatrix.

18. Směry sdružené. – Sdružené směry v bodě plochy (dx_1, dy_1, dz_1), (dx_2, dy_2, dz_2) vázány jsou, jak jsme seznali v II. dílu, relacemi

$$S\, dX_1\, dx_2 = 0$$
$$S\, dX_2\, dx_1 = 0 .$$

Pro naše vyjádření máme odtud

$$S(X_u du_1 + X_v dv_1)(x_u du_2 + x_v dv_2) = 0$$

takže rovnice

(1) ... $L\, du_1 du_2 + M(du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + N dv_1 dv_2 = 0$

udává podmínku pro to, aby směry (du_1, dv_1), (du_2, dv_2) byly sdruženy.

Mají-li specielně křivky parametrické býti sdruženy, musí rovnice (1) býti splněna na př. pro

$$dv_2 = 0 , \quad du_1 \geqq 0$$
$$du_2 \gtrless 0 , \quad dv_1 \gtrless 0$$

čímž plyne vztah

$$M = 0 \quad \ldots . \quad (2).$$

Směr asymptotický představuje jak známo dva

S III. 6.

splývající směry sdružené. Jest tudíž

$$\mathcal{L}\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0 \quad \dots (3)$$

diferenciální rovnice asymptotických křivek na ploše.

A dělíme-li rovnici (3) dv^2 resp. du^2, seznáme, že vzdahy

$$\mathcal{L} = 0, \quad N = 0 \quad \dots (4)$$

současně plodné dávají nutné podmínky pro to, aby křivky asymptotické byly křivkami parametrickými.

Tím objeví se nám geometrický význam pro $\mathcal{L}, M, N$.

<u>19. Úhel dvou směrů na ploše.</u> – Pro cosinus tohoto úhlu w máme vzdah

$$\cos w = \frac{dx_1}{ds_1}\cdot\frac{dx_2}{ds_2} + \dots$$

$$= \frac{S(x_u du_1 + x_v dv_1)(x_u du_2 + x_v dv_2)}{ds_1\,ds_2}$$

$$\cos w = \frac{\mathcal{E}\,du_1 du_2 + \mathcal{F}(du_1 dv_2 + dv_1 du_2) + G\,dv_1 dv_2}{\sqrt{\mathcal{E}du_1^2 + 2\mathcal{F}du_1 dv_1 + G dv_1^2}\,\sqrt{\mathcal{E}du_2^2 + 2\mathcal{F}du_2 dv_2 + G dv_2^2}}$$

čili značíme-li $\frac{dv_1}{du_1} = k_1$, $\frac{dv_2}{du_2} = k_2$,

$$\cos w = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{F}(k_1 + k_2) + G k_1 k_2}{\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}k_1 + G k_1^2}\,\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}k_2 + G k_2^2}} \quad \dots (5)$$

Platí tudíž pro dva navzájem kolmé směry podmínka

$$\mathcal{E} + \mathcal{F}(k_1 + k_2) + G k_1 k_2 = 0 \quad \dots (6)$$

Pro směry izotropické v planém bodě na ploše, ale je pokládáme za směry samy k sobě kolmé nebo za směry, pro které element oblonku jest roven nule, máme tudíž rovnici

$$E + 2Fk + Gk^2 = 0 \quad \dots (7),$$

která jest tedy diferenciální rovnicí obou soustav křivek minimálních na ploše.

Pro sinus úhlu w obdržíme

$$\sin^2 w = 1 - \cos^2 w = 1 - \left(S \frac{dx_1}{ds_1} \frac{dx_2}{ds_2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{ds_1^2 ds_2^2} \left\| \begin{matrix} dx_1 & dy_1 & dz_1 \\ dx_2 & dy_2 & dz_2 \end{matrix} \right\|^2 = \frac{1}{ds_1^2 ds_2^2} S \left| \begin{matrix} dx_1 & dy_1 \\ dx_2 & dy_2 \end{matrix} \right|^2 =$$

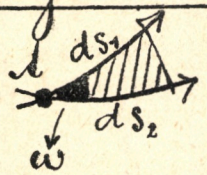
$$= \frac{1}{ds_1^2 ds_2^2} S \left| \begin{matrix} x_u du_1 + x_v dv_1 , & y_u du_1 + y_v dv_1 \\ x_u du_2 + x_v dv_2 , & y_u du_2 + y_2 dv_2 \end{matrix} \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{ds_1^2 ds_2^2} \left| \begin{matrix} du_1 & du_2 \\ dv_1 & dv_2 \end{matrix} \right|^2 \cdot \underbrace{S \left| \begin{matrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{matrix} \right|^2}_{\Delta^2}$$

Jest tedy

$$\sin w = \frac{\Delta (k_2 - k_1)}{\sqrt{E + 2Fk_1 + Gk_1^2} \sqrt{E + 2Fk_2 + Gk_2^2}} \quad \dots (8)$$

Z výrazu pro $\sin w$ snadno obdržíme výraz pro plošný element $d\mathfrak{J}$ vymezený v našem bodě A plochy křivkami s_1 a s_2. Jest tudíž



$$2\, d\mathfrak{J} = ds_1 \cdot ds_2 \cdot \sin w ,$$

odkud z výrazu (8) plyne

$$2\,d\mathfrak{J} = ds_1\,ds_2\,\frac{\Delta\,\left|\begin{matrix} du_1 & du_2 \\ dv_1 & dv_2 \end{matrix}\right|}{ds_1\,ds_2}$$

$$2\,d\mathfrak{J} = \Delta\cdot\left|\begin{matrix} du_1 & du_2 \\ dv_1 & dv_2 \end{matrix}\right| \dots (9).$$

Pro úhel křivek parametrických speciálně obdržíme

$$\cos\omega = \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}, \qquad \sin\omega = \frac{\Delta}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} \dots (10)$$

a podmínka pro to, aby křivky parametrické byly navzájem kolmy dána jest tím, že

$$\mathcal{F} = 0 \dots (11).$$

20. Dupinova indikatrise. – Rovina dečná bodu $A(x, y, z)$ plochy dána jest rovnicí

$$\Sigma X(\xi - x) = 0,$$

kdežto pro rovinu vedenou rovnoběžně k ní ve vzdálenosti δ platí rovnice

$$\Sigma X(\xi - x) = \delta \dots (1)$$

Předpokládajíce, že δ limituje k nule vyhledejme průsečnou křivku roviny (1) s plochou.

Pro souřadnice sousedního $k\,(x, y, z)$ bodu plochy (ξ, η, ζ) platí za obvyklých předpokladů rozvoj

$$\xi = x + dx + \tfrac{1}{2}d^2x + \dots$$

$$\xi = x + x_u\,du + x_v\,dv + \tfrac{1}{2}x_{uu}\,du^2 + x_{uv}\,du\,dv + x_{vv}\,dv^2 + \dots$$

načež dosazením do (1) plyne

$$\Sigma X\left(x_u\,du + x_v\,dv + \tfrac{1}{2}x_{uu}\,du^2 + x_{uv}\,du\,dv + \tfrac{1}{2}x_{vv}\,dv^2 + \dots\right) = \delta$$

Se zřetelem k tomu, že $SX x_u = 0$, $SX x_v = 0$, obdržíme zanedbáním veličin nekonečně malých řádu vyššího než prvního obdržíme rovnici pro Dupinovu indikatrisu uvažovaného bodu plochy ve tvaru

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 2\delta \quad \cdots (2)$$

Uvažujme útvar, který s naší indikatrií úzce souvisí. Na normále bodu $A(x\,y\,z)$ zvolme bod B mající od A vzdálenost ε a uvažujme roviny dotečné jdoucí bodem B a plochy se plochy v bodech sousedních k bodu A, jež mají souřadnice $(x+dx, \dots)$ a v nichž vedené normály mají směr $(X+dX, \dots)$.

Rovina dotečná takového plochu má rovnici

$$S(X+dX)(\xi - x - dx) = 0 .$$

Na ní leží též bod $B(x+\varepsilon X, \dots)$, takže platí

$$S(X + X_u\,du + X_v\,dv)(\varepsilon X - x_u\,du - x_v\,dv) = 0$$

čili po vynásobení

$$\varepsilon + L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$$

Pro body $(u+du, v+dv)$ dotyčné křivky uvažované plochy kuželové platí tedy rovnice

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = -\varepsilon \quad \cdots (2').$$

Dospíváme tedy tímto dualním postupem k indikatrii odpovídající vzdálenosti $\delta = -\frac{\varepsilon}{2}$.

II. Křivost řezů plochy.

21. Poloměr křivosti řezu plochy. – Je-li w úhel roviny řezu s příslušným řezem normálným, platí jak jsme seznali pro poloměr R našeho řezu v uvažovaném bodě plochy vztah

$$\frac{\cos w}{R} = \frac{I_1}{ds^2}$$

kde I_1 má významu známý z I. dílu. Zde obdržíme dosazením

$$\frac{\cos w}{R} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} \quad \dots (1)$$

označíme-li opět $\frac{dv}{du} = k$, máme speciálně pro řezy normálné ($w = 0$)

$$\frac{1}{R} = \frac{L + 2Mk + Nk^2}{E + 2Fk + Gk^2} \quad \dots (2)$$

Každému směru postupu z bodu na naší ploše přísluší určitá hodnota k. Rovnice (2) udává nám známý jednohodnotný vztah poloměrů křivosti normálných řezů v našem bodě plochy a rovin těchto řezů.

22. Body speciálního druhu. – Tato 1-2 značná příbuznost nastávají však pouze tehdy, nemají-li čitatel a jmenovatel pravé strany rovnice (2) společné míry.

a) Na této pravé straně vyskytují se k jenom zvolím-

livě tehdy, je-li

$$\mathcal{L} : \mathcal{M} : \mathcal{N} = \mathcal{E} : \mathcal{F} : \mathcal{G} \quad \ldots\ldots (\text{I})$$

čili $\mathcal{L} = \sigma \mathcal{E}$, $\mathcal{M} = \sigma \mathcal{F}$, $\mathcal{N} = \sigma \mathcal{G}$

Pak jest totiž

$\frac{1}{R} = \sigma$, jest tedy poloměr křivosti nezávislý na směru k.

Bod náš jest totiž bodem kruhovým.

b) Druhý speciální případ vyznačen jest tím, že čitatel a jmenovatel na pravé straně rovnice (2) dají se krátiti lineární funkcí v k, takže pak

$$\frac{1}{R} = \frac{\mathcal{A} + k\mathcal{B}}{\mathcal{C} + k\mathcal{D}} \quad \ldots\ldots (\text{II})$$

V tomto případě platí mezi R, k, jak patrno z rovnice (II), vztah bilineární. Svazek normálných řezů a řada jejich středů křivosti jsou zde projektivní.

Tato vlastnost není závislá na mahoplilé volbě parametrů, jak se snadno přesvědčíme. Zavedeme nové parametry u_1, v_1 vztahy

$$u = \lambda(u_1, v_1), \quad v = \mu(u_1, v_1);$$

pak jest

$$du = \frac{\partial u}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial u}{\partial v_1} dv_1, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial v}{\partial v_1} dv_1$$

takže, položíme-li $\frac{dv_1}{du_1} = k_1$, jest

$$k = \frac{\frac{\partial u}{\partial u_1} + \frac{\partial u}{\partial v_1} k_1}{\frac{\partial v}{\partial u_1} + \frac{\partial v}{\partial v_1} k_1}$$

a dosazením do (II) plyne skutečně výraz téhož tvaru

$$\frac{1}{R} = \frac{A_1 + k_1 B_1}{C_1 + k_1 D_1} .$$

Jak řečeno nastává tento případ tehdy, jestliže čitatel a jmenovatel výrazu (2) dají se krátiti výrazem lineárním v k, čili mají-li kvadratické rovnice pro k

$$\mathcal{L} + 2\mathcal{M}k + \mathcal{N}k^2 = 0 \quad \dots (3)$$
$$\mathcal{E} + 2\mathcal{F}k + \mathcal{G}k^2 = 0 \quad \dots (4)$$

jeden kořen společný.

Odvoďme si podmínku mezi základními veličinami tohoto bodu. Vyloučme z rovnic (3), (4) na př. k^2; čímž obdržíme

$$\begin{vmatrix} \mathcal{L} + 2\mathcal{M}k, & \mathcal{N} \\ \mathcal{E} + 2\mathcal{F}k, & \mathcal{G} \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$\mathcal{L}\mathcal{G} - \mathcal{E}\mathcal{N} + 2(\mathcal{M}\mathcal{G} - \mathcal{F}\mathcal{N})k = 0 , \quad \text{odkud}$$

$$2k = \frac{\mathcal{L}\mathcal{G} - \mathcal{E}\mathcal{N}}{\mathcal{F}\mathcal{N} - \mathcal{M}\mathcal{G}} .$$

Vyloučme dále k.

$$\begin{vmatrix} \mathcal{L} + \mathcal{N}k^2, & \mathcal{M} \\ \mathcal{E} + \mathcal{G}k^2, & \mathcal{F} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{odkud}$$

$$k^2 = \frac{\mathcal{E}\mathcal{M} - \mathcal{F}\mathcal{L}}{\mathcal{F}\mathcal{N} - \mathcal{G}\mathcal{M}}$$

načež vztah $4 \cdot k^2 = (2k)^2$ vede nás k relaci

$$4(\mathcal{F}\mathcal{N} - \mathcal{G}\mathcal{M})(\mathcal{E}\mathcal{M} - \mathcal{F}\mathcal{L}) - (\mathcal{L}\mathcal{G} - \mathcal{E}\mathcal{N})^2 = 0 \quad \dots (5),$$

kterou splňují základní veličiny bodu uvažovaného druhu.

Pro plochu, kde základní veličiny jsou danými funkcemi u, v, udává rovnice (5) určitou relaci mezi u, v, značící tedy obecně křivku na ploše, jež všem nemusí být reálná.

Rovnice (5) splněna jest však též body kruhovými (viz (I) str. 47)! Křivka (5) prochází tedy kruhovými body plochy a po příp. skládá se pouze z bodů kruhových.

23. Plochy speciálních vlastností. – Jako plochu jejíchž všechny body jsou kruhové, seznali jsme plochu kulovou a rovinu čili kratčeji řečeno pouze plochu kulovou.

Uvažujme nyní plochy obsahující vesměs body druhého druhu, pro něž platí známá projektivnost. Z okolnosti, že rovnice (3) a (4) mají jeden kořen společný, plyne, že jeden směr asymptotický pro každý bod plochy naší směřuje k bodu kruhovému čili že jedna soustava křivek asymptotických splývá s jednou soustavou křivek minimálních!

Křivka asymptotická má však jak známo rovinu oskulační splývající s rovinou tečnou, kdežto křivky geodetické – k nimž patří též křivky minimální – mají oskulační rovinu kolmou k rovině tečné. Má-li tedy křivka na ploše být současně křivkou asymptotickou a geo-

delickou, musí její rovina oskulační býti libovolná, křivka tedy přechází v přímku.

Plochy nyní uvažované obsahují jednu soustavu přímek isotropických. Plocha jest přímkovou plochou o površkách isotropických — a to plochou nerozvinutelnou*.

V obvyklém případě odpovídá jak známo každé střepu křivosti na normále bodu plochy projektivní s ní involuce rovin normálových a tedy též stop těchto rovin na rovině tečné. Jednou dvojicí této involuce jsou směry asymptotické (odpovídají hodnotě $R = \infty$) a jednou dvojicí směry isotropické (pro $R = 0$). V našem případě dva prvky těchto dvou párů splynou, kdežto druhé dva jsou různé, což jest možno jen tehdy, je-li naše involuce involucí parabolickou — jejíž oba prvky dvojné, totiž stopy hlavních řezů, splývají v onom směru isotropickém.

Isotropické površky naší plochy jsou tedy zároveň dvojnými křivkami křivosti. — Z řečené parabolické involuce patrna jest projektivnost zpředu uvedená.

*Pro plochu rozvinutelnou seznali jsme totiž diferenciální rovnici $\Psi(1, 2) = 0$, čili $\begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = rt - s^2 = 0$, takže všecky body rozvinutelné plochy jsou parabolické, přímky povrchové jsou dvojnými křivkami asympt.

24. Křivky křivosti. – Vyvodíme si diferenciální rovnici těchto křivek. V II. dílu sestavili jsme tuto rovnici ve tvaru $M = 0$

Dosazením plyne

$$\left| X, X_u\,du + X_v\,dv, x_u\,du + x_v\,dv \right| = 0 \quad \ldots (1)$$

Aby bylo možno zavésti základní veličiny, násobme levou stranu rovnice (1) determinantem

$$\left| X \; x_u \; x_v \right| ,$$

o němž víme, že má hodnotu Δ, jest dosud za obvyklých našich předpokladů různý od nuly.

Znásobením plyne

$$\Delta M = \begin{vmatrix} SX^2 & SXx_u & SXx_v \\ SXX_u du + SXX_v dv, & SX_u x_u du + SX_v x_u dv, & SX_u x_v du + SX_v x_v dv \\ SXx_u du + SXx_v dv, & Sx_u^2 du + Sx_u x_v dv, & Sx_u x_v du + Sx_v^2 dv \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -L\,du - M\,dv & -M\,du - N\,dv \\ 0 & E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \end{vmatrix}$$

Pro křivky křivosti platí dosud rovnice diferenciální – vyloučíme-li případ $\Delta = 0$ – ve tvaru

$$\begin{vmatrix} E + Fk & F + Gk \\ L + Mk & M + Nk \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots . (2)$$

Z rovnice (2) plyne vynásobením

$$k^2 (FN - GM) - k(GL - EN) + (EM - FL) = 0 \ldots (2)$$

a jest patrno, že tuto rovnici možno též psáti ve tva-

ve

$$\begin{vmatrix} k^2 & \mathfrak{E} & \mathfrak{L} \\ -k & \mathfrak{F} & \mathfrak{M} \\ 1 & \mathfrak{G} & \mathfrak{N} \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \quad (2'')$$

Z této rovnice plyne, že poměr

$1 : (k_1 + k_2) : k_1 k_2$ pro obě křivky křivosti rovná se poměru minorů příslušných k prvnímu resp. druhému resp. třetímu prvku prvého sloupce. Z okolnosti, že součiny prvků jednoho sloupce determinantu na minorů odpovídajících příslušným prvkům druhého sloupce dávají součet rovný nule, jest

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E} + \mathfrak{F}(k_1 + k_2) + \mathfrak{G} k_1 k_2 &= 0 \\ \mathfrak{L} + \mathfrak{M}(k_1 + k_2) + \mathfrak{N} k_1 k_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

z kterýchžto rovnic jest patrno, že směry křivek definovaných rovnicí (2) jsou kolmé navzájem směry sdružené.

Volíme-li speciálně křivky křivosti za křivky parametrické, pak platí současně – jak patrno z rovnice (2'), jež má býti splněna pro $du = 0$ i pro $dv = 0$ –

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{F}\mathfrak{N} - \mathfrak{G}\mathfrak{M} &= 0 \\ \mathfrak{E}\mathfrak{M} - \mathfrak{F}\mathfrak{L} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Rovnice tyto upraveny dle $\mathfrak{F}, \mathfrak{M}$

$$\mathfrak{N}\mathfrak{F} - \mathfrak{G}\mathfrak{M} = 0$$
$$\mathfrak{L}\mathfrak{F} - \mathfrak{E}\mathfrak{M} = 0$$

vedou nás v případě, že $\mathfrak{F} \geq 0$, $\mathfrak{M} \geq 0$ ke vztahu

$\mathfrak{N}\mathfrak{E} - \mathfrak{G}\mathfrak{L} = 0$, takže platí v tomto případě

$\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{E}} = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{G}} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{F}}$ čili $\mathfrak{L} : \mathfrak{M} : \mathfrak{N} = \mathfrak{E} : \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$.

Vyloučujeme-li tento speciální případ, kdy všechny body plochy jsou kruhové, seznáváme, že pro obecnou plochu jsou křivky křivosti křivkami parametrickými tehdy a jen tehdy, je-li současně

$$F = 0, \quad M = 0 \quad \dots (5),$$

jak jest ostatně patrno z té okolnosti, že křivky parametrické jsou zde současně kolmé a sdružené.

25. Hlavní poloměry křivosti. – Pro křivost normálního řezu plochy obdrželi jsme výraz

$$\frac{1}{R} = \frac{L + 2Mk + Nk^2}{E + 2Fk + Gk^2} \quad \dots (1)$$

Pro směry hlavních řečen obdržíváme z výrazu (1) hodnoty pro hlavní řezy normálné, které tyto hodnoty jsou hodnotami extremními pro $\frac{1}{R}$. Derivujeme-li tedy výraz (1) dle k a položíme tuto derivaci rovnu nule, obdržíme rovnici, kterou splňují hodnoty k odpovídající hlavním řezům.

Působíme-li derivací na jmenovatele, máme tím pro příslušná k rovnici

$$(M + Nk)(E + 2Fk + Gk^2) - (F + Gk)(L + 2Mk + Nk^2) = 0.$$

Vztáhneme tuto rovnici výrazem $E + 2Fk + Gk^2$ a odpovídající z rovnice (1). Tím obdržíme mezi hlavními poloměry a příslušnými hodnotami k vztah

$$R(M + Nk) - (F + Gk) = 0$$

čili

$$k = -\frac{MR - F}{NR - G} \quad \dots (2)$$

odkud dosazením do rovnice (2') str. 52 obdržíme pro hlavní poloměry křivosti rovnici

$$\begin{vmatrix} (MR-\mathfrak{F})^2 & \mathfrak{E} & \mathfrak{L} \\ (MR-\mathfrak{F})(NR-\mathfrak{G}) & \mathfrak{F} & \mathfrak{M} \\ (NR-\mathfrak{G})^2 & \mathfrak{G} & \mathfrak{N} \end{vmatrix} =$$

$$R^2 \begin{vmatrix} M^2 & \mathfrak{E} & \mathfrak{L} \\ MN & \mathfrak{F} & \mathfrak{M} \\ N^2 & \mathfrak{G} & \mathfrak{N} \end{vmatrix} - R \begin{vmatrix} 2M\mathfrak{F} & \mathfrak{E} & \mathfrak{L} \\ M\mathfrak{G}+N\mathfrak{F} & \mathfrak{F} & \mathfrak{M} \\ 2N\mathfrak{G} & \mathfrak{G} & \mathfrak{N} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathfrak{F}^2 & \mathfrak{E} & \mathfrak{L} \\ \mathfrak{F}\mathfrak{G} & \mathfrak{F} & \mathfrak{M} \\ \mathfrak{G}^2 & \mathfrak{G} & \mathfrak{N} \end{vmatrix} = R^2\left[M^2(\mathfrak{F}N-\mathfrak{G}M)+MN(\mathfrak{G}\mathfrak{L}-\mathfrak{E}\mathfrak{N})+\right.$$

$$\left.+N^2(\mathfrak{E}\mathfrak{M}-\mathfrak{F}\mathfrak{L})\right] - R\left[2M\mathfrak{F}(\mathfrak{F}N-\mathfrak{G}M)+(M\mathfrak{G}+N\mathfrak{F})(\mathfrak{G}\mathfrak{L}-\mathfrak{E}\mathfrak{N})\right.$$

$$\left.+2N\mathfrak{G}(\mathfrak{E}\mathfrak{M}-\mathfrak{F}\mathfrak{L})\right] + \left[\mathfrak{F}^2(\mathfrak{F}N-\mathfrak{G}M)+\mathfrak{F}\mathfrak{G}(\mathfrak{G}\mathfrak{L}-\mathfrak{E}\mathfrak{N})+\right.$$

$$\left.+\mathfrak{G}^2(\mathfrak{E}\mathfrak{M}-\mathfrak{F}\mathfrak{L})\right] = R^2(\mathfrak{G}M-\mathfrak{F}N)(\mathfrak{L}N-M^2) -$$

$$-R(\mathfrak{G}M-\mathfrak{F}N)(\mathfrak{E}N-2\mathfrak{F}M+\mathfrak{G}\mathfrak{L})+(\mathfrak{G}M-\mathfrak{F}N)(\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2)=0$$

Poněvadž pak pro obyčejné body, které pouze bereme v úvahu, jest $\mathfrak{G}M-\mathfrak{F}N \geq 0$ (body kruhové na př. vyloučujeme), dostáváme pro hlavní poloměry rovnici

$$R^2(\mathfrak{L}N-M^2)-R(\mathfrak{E}N-2\mathfrak{F}M+\mathfrak{G}\mathfrak{L})+\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2=0$$

čili

$$\frac{1}{R^2}-\frac{\mathfrak{E}N-2\mathfrak{F}M+\mathfrak{G}\mathfrak{L}}{\Delta^2}+\frac{\nabla^2}{\Delta^2}=0 \quad \ldots\ldots (3)$$

Jsou-li R_1, R_2 oba hlavní poloměry křivosti v uvažovaném bodě plochy jest totiž

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN - 2FM + GL}{\Delta^2} = \mathcal{H} \quad \dots (4)$$

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\nabla^2}{\Delta^2} = \mathcal{K} \quad \dots (5)$$

Tím seznáváme geometrický význam veličin $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, již dříve zavedených. $\mathcal{H}$ nazýváme střední křivostí plochy v uvažovaném bodě* a $\mathcal{K}$ úplnou neb Gaussovou křivostí nebo mírou křivosti bodu toho.

K rovnicím pro křivky křivosti a pro hlavní poloměry dospějeme snadno též ze známé nám okolnosti, že normály ku ploše podél křivky křivosti tvoří plochu rozvinutelnou.

Vlastnost tato vedla nás totiž k rovnici

$$dx + R\,dX = 0, \quad dy + R\,dY = 0, \dots$$

z níž zde plyne

$$x_u\,du + x_v\,dv + R(X_u\,du + X_v\,dv) = 0$$

— — —

násobme tyto rovnice po řadě x_u, y_u, z_u a sečteme a za druhé x_v, y_v, z_v a rovněž sečteme.

Tím dospějeme vzhledem k známým definicím základních veličin $E, \dots F, \dots G$ k rovnicím

* Rovná se součtu křivostí každých dvou navzájem kolmých řezů normálových, jak plyne ze známé relace Eul. $\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}$.

$$\mathcal{E}\,du + \mathcal{F}\,dv - R(\mathcal{L}\,du + \mathcal{M}\,dv) = 0$$
$$\mathcal{F}\,du + \mathcal{G}\,dv - R(\mathcal{M}\,du + \mathcal{N}\,dv) = 0$$

z nichž vyloučením du, dv plyne pro hlavní poloměry $\begin{vmatrix} \mathcal{E}-R\mathcal{L} & \mathcal{F}-R\mathcal{M} \\ \mathcal{F}-R\mathcal{M} & \mathcal{G}-R\mathcal{N} \end{vmatrix} = 0 \;\ldots (3')$,

čili právě získaná rovnice (3),
a vyloučením R pro $k = \frac{dv}{du}$ známá nám diferenciální rovnice křivek křivosti

$$\begin{vmatrix} \mathcal{E}+\mathcal{F}k & \mathcal{L}+\mathcal{M}k \\ \mathcal{F}+\mathcal{G}k & \mathcal{M}+\mathcal{N}k \end{vmatrix} = 0 .$$

26. Křivky křivosti jako křivky parametrické.

Seznali jsme již, že v tomto případě jest současně

$$\mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{M} = 0 \ldots (1)$$

Známé nám vzorce nabývají zde tvaru jednoduchého tvaru

$$\frac{1}{R} = \frac{\mathcal{L}+\mathcal{N}k^2}{\mathcal{E}+\mathcal{G}k^2},$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{\mathcal{E}\mathcal{N}+\mathcal{G}\mathcal{L}}{\mathcal{E}\mathcal{G}} = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{G}} + \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{E}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\ \mathcal{K} &= \frac{\mathcal{L}\mathcal{N}}{\mathcal{E}\mathcal{G}} = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{G}} \cdot \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{E}} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} \end{aligned}\right\} (2)$$

takže z rovnic (2) plyne

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{E}}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{G}} \ldots (2').$$

Pro X_u, X_v měli jsme prak v obecném případě výrazy:

$$\Delta^2 X_u = \begin{vmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{M} & \mathcal{F} & \mathcal{G} \\ 0 & x_u & x_v \end{vmatrix}, \quad \Delta^2 X_v = \begin{vmatrix} \mathcal{M} & \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{N} & \mathcal{F} & \mathcal{G} \\ 0 & x_u & x_v \end{vmatrix},$$

které zde tedy nabývají tvaru

$$\mathcal{E}\mathcal{G} \cdot X_u = \begin{vmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{E} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{G} \\ 0 & x_u & x_v \end{vmatrix} = - \mathcal{L}\mathcal{G} x_u$$

$$\mathcal{E}\mathcal{G} \cdot X_v = \begin{vmatrix} 0 & \mathcal{E} & 0 \\ \mathcal{N} & 0 & \mathcal{G} \\ 0 & x_u & x_v \end{vmatrix} = - \mathcal{N}\mathcal{E} x_v$$

takže

$$X_u = - \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{E}} x_u, \quad X_v = - \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{G}} x_v$$

čili vzhledem k výrazům (2')

$$X_u = - \frac{1}{R_1} x_u, \quad X_v = - \frac{1}{R_2} x_v$$

a obdobně

$$\left.\begin{aligned} Y_u &= - \frac{1}{R_1} y_u, & Y_v &= - \frac{1}{R_2} y_v \\ Z_u &= - \frac{1}{R_1} z_u, & Z_v &= - \frac{1}{R_2} z_v \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Které-žto rovnice jsou známy pod názvem rovnice Rodriguesovy.

Plynou též bezprostředně z rovnice $dx + R\,dX = 0$.

III. Některé příklady ploch.

27. Obyčejná plocha šroubová – jest místem přímek, které vycházejíce z bodů obyčejné šroubovice protínají orthogonálně její osu. Vytvoří se tedy šroubo-

vým pohybem přímky, která osu pohybu orthogonálně protíná.

Rovnice šroubovice vyjádříme nejjednodušeji, běžeme-li osu její za osu z. Je-li a poloměr válcový, na kterém šroubovice leží, a v úhel otočení kolem osy, mají rovnice ty tvar

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = qv \quad \dots (1)$$

je-li q parametr pohybu šroubového.

Učiníme-li u proměnným, dávají nám rovnice (1) již parametrické vyjádření naší plochy, přičemž křivkami u = konst jsou povrchové šroubovice a křivkami v = konst povrchové přímky naší plochy. Pro základní veličiny obdržíme

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{E} = 1, \quad \mathfrak{F} = 0, \quad \mathfrak{G} = u^2 + q^2, \text{ tedy } \Delta^2 = u^2 + q^2 \\ \mathfrak{L} = \mathfrak{N} = 0, \quad \Delta\mathfrak{M} = -q, \text{ tedy} \\ \mathfrak{M} = -\dfrac{q}{\sqrt{u^2+q^2}}, \end{cases}$$

kde odmocninu, značící Δ, béřeme kladně, čímž jak známo stanoven jest kladný smysl normály.

Z okolnosti $\mathfrak{L} = \mathfrak{N} = 0$ plyne, že křivky parametrické jsou asymptotickými křivkami plochy.

Pro křivky křivosti jest

$$\begin{vmatrix} k^2 & 1 & 0 \\ -k & 0 & -\dfrac{q}{\sqrt{u^2+q^2}} \\ 1 & u^2+q^2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ odkud}$$

$$k^2 = \frac{1}{u^2+q^2}, \qquad k = \pm\frac{1}{\sqrt{u^2+q^2}} \quad \dots (3).$$

Pro hlavní poloměry plyne pak

$$\frac{1}{R} = \frac{-\frac{2q}{\sqrt{u^2+q^2}}\,k}{1+(u^2+q^2)\,k^2}$$ a odtud vzhledem k (3)

$$\frac{1}{R} = \frac{\mp\frac{2q}{\sqrt{u^2+q^2}}\,\frac{1}{\sqrt{u^2+q^2}}}{1+1} = \mp\frac{q}{u^2+q^2},$$

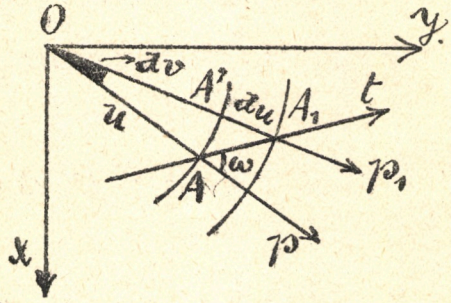
takže

$$\mathcal{H} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0 \quad \dots (4)$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{q^2}{(u^2+q^2)^2} \quad \dots (5).$$

Jest tedíž střední křivost naší plochy rovna nule. Plocha jest t.zv. plochou minimální.

Z výrazu (3) pro $k = \frac{dv}{du}$ příslušné křivkám křivosti snadno odvodíme konstrukci pro průmět tečny ke křivce křivosti do roviny (xy).

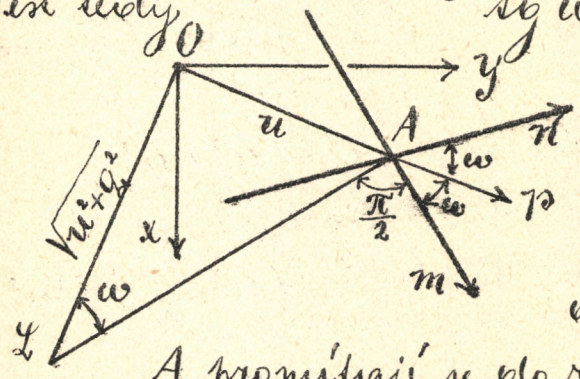


Je-li tedíž ω úhel, který svírá přímka $t = AA_1$ s poloměrem u bodu A, jest

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{AA'}{A'A_1} = \frac{u\,dv}{du} = u\cdot k.$$

Pro úhel ω příslušný průmětu naší hledané tečny jest tedy

$$\operatorname{tg}\omega = \pm\frac{u}{\sqrt{u^2+q^2}} \quad \dots (6)$$



a odtud jest konstrukce z obrazce patrna.

Jelikož kolmé navzájem asymptotické tečny bodu A promítají se do roviny (xy) rovněž jako kol-

mice, plyne z té okolnosti, že asymptotické tečny s tečnami hlavními tvoří harmonickou čtveřinu, ten důsledek, že průměty m, n obou hlavních tečen bodu A jsou souměrny dle p, jak jest ze vzorce (6) rovněž zřejmo.

28. Obecná plocha šroubová – vznikne šroubovým pohybem libovolné křivky. Mezi jejími křivkami povrchovými mají důležitý význam křivky meridiánové, t. j. řezy s rovinami jdoucími osou, a řezy kolmé k ose. Křivky prvého druhu, jakož i křivky druhého druhu jsou shodny.

Nejsnáze představíme si plochu šroubovou, známe-li její křivku meridiánovou. Za účelem jednoduchého vyjádření rovnic plochy učiňme osu šroubového pohybu opět osou z.

Je-li křivka meridiánová náležící rovině (xz) dána rovnicí $z = f(x)$, jsou

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(u) + qv \quad \cdots (1)$$

rovnice parametrické naší plochy, kde u, v, q mají týž význam jako v případě předchozím.

Pro základní veličiny plyne odtud

$$E = 1 + f'(u)^2, \quad F = q f'(u), \quad G = u^2 + q^2,$$

takže lineární element jest dán výrazem

$$(2) \quad ds^2 = [1 + f'(u)^2]\, du^2 + 2 q f'(u)\, du\, dv + (u^2 + q^2)\, dv^2.$$

Při tom křivkami parametrickými jsou kromě kři-

vek šroubových (u=konst) křivky meridiánové (v=konst). Zavedňme místo těchto křivek ortogonální trajektorie křivek šroubových.

Výraz pro ds^2 píšme totiž ve tvaru

$$ds^2 = (u^2+q^2)\left[dv^2 + 2\frac{q f'(u)}{u^2+q^2} du\,dv\right] + (1+f'^2)du^2$$

a doplňme koeficient při u^2+q^2 na úplný čtverec:

$$ds^2 = (u^2+q^2)\left[dv + \frac{q f'(u)}{u^2+q^2} du\right]^2 - \frac{q^2 f'(u)^2}{u^2+q^2} du^2 + \\ + [1+f'(u)^2]\, du^2$$

což dá

$$ds^2 = \left[1 + \frac{u^2 f'(u)^2}{u^2+q^2}\right] du^2 + (u^2+q^2)\left[dv + \frac{q f'(u)}{u^2+q^2} du\right]^2.$$

Značí-li l, k konstanty, položme nyní

$$l^2 du_1^2 = \left[1 + \frac{u^2 f'(u)^2}{u^2+q^2}\right] du^2$$

$$k^2 dv_1^2 = \left[dv + \frac{q f'(u)}{u^2+q^2} du\right]^2$$

čili zaveďme nové parametry u_1, v_1 vztahy

$$\left.\begin{aligned} l u_1 &= \int \sqrt{1 + \frac{u^2 f'(u)^2}{u^2+q^2}}\, du \\ k v_1 &= v + \int \frac{q f'(u)}{u^2+q^2} du \end{aligned}\right\} (3)$$

Je-li pak $u^2+q^2 = F(u_1)$, nabývá náš výraz pro ds^2 jednoduchého tvaru

$$ds^2 = l^2 du_1^2 + F(u_1)\, k^2 dv_1^2 \quad \dots (4);$$

Křivky

u_1 = konst, splývající s křivkami u = konst (viz (3)),

jsou povrchové šroubovice. Poněvadž pak $F_1 = 0$ (viz výraz (4)), jsou křivky $v_1 = \text{konst}$ orthogonální trajektorie těchto šroubovic na naší ploše šroubové.

Poznáváme tedy zároveň (viz rovnice (3)), že orthogonální trajektorie křivek šroubových na každé ploše šroubové stanovíme pouhou jednoduchými kvadraturami.

29. Plocha rotační – může býti pokládána za speciální případ plochy šroubové; stačí totiž klásti $q = 0$. Liniový element (viz (2) str. 60) má zde tedy tvar

$$ds^2 = [1 + f'(u)^2]\, du^2 + u^2\, dv^2 \dots (1),$$

při čemž křivky parametrické $u = \text{konst}$ jsou kružnice paralelní a křivky $v = \text{konst}$ jsou křivky meridiánové. Z výrazu (1) jest již patrno, že obě soustavy parametrických křivek jsou navzájem orthogonální.

Zavedeme-li zde nový parametr u_1 vztahem

$$u_1 = \int \sqrt{1 + f'(u)^2}\, du \dots (2)$$

– kladouce tedy ve výrazu (3) str. 61 konstantu l rovnu jedné, jest, jak patrno z rovnice $z = f(u)$ křivky meridiánové, u_1 obloukem délo křivky a pro liniový element plošný dostáváme výraz

$$ds = du_1^2 + F(u_1)\, dv^2 \dots (3).$$

K výrazu tomu dospějeme též přímo. Je-li totiž

u_1 oblouk křivky meridiánové a jsou-li

$$x = g(u_1), \quad z = f(u_1)$$

parametrické rovnice této křivky, pak jest

$$g'(u_1)^2 + f'(u_1)^2 = 1$$

a výraz pro lineární element

$$ds^2 = [g'(u_1)^2 + f'(u_1)^2]\, du_1^2 + g(u_1)^2\, dv^2$$

čili

$$ds^2 = du_1^2 + g(u_1)^2\, dv^2 \quad \dots (3')$$

má skutečně tvar výrazu (3). Seznámíme tím zároveň význam funkce $F(u_1)$ ve výrazu tom.

30. Minimální plocha rotační. – Minimálními plochami nazvali jsme ty plochy, pro něž střední křivost jest rovna nule ve všech bodech plochy. Je-li u poloměr rotace a v úhel otočení, jest rotační plocha dána rovnicemi

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(u) \quad \dots (1).$$

Při tom pro libovolný bod plochy jest jedním hlavním řezem řez meridiánový a druhý hlavní řez prochází kružnicí rovnoběžkovou – jak plyne na př. nejrychleji použitím věty Joachimsthalovy o křivce křivosti na ploše.

Poloměr křivosti R_1 křivky meridiánové jest – jak známo

Lagrange definuje plochu minimální tím, že nakreslíme-li na ní libovolnou uzavřenou křivku, jest, uvažujeme-li dále všechny plochy tuto křivku obsahující, povrch omezené tím části plochy naší minimem. Lze skutečně do-

no z theorie křivek rovinných,

$$R_1 = \frac{[1+f'(u)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(u)} \quad \dots (2).$$

Ježto pak u jest poloměr křivosti kružnice poledníkové, jest – značí-li φ úhel tečny křivky meridiánové s osou x – poloměr křivosti R_2 druhého hlavního řezu, vzhledem k větě Meusnierově dán výrazem

$$R_2 = \frac{u}{\sin\varphi};$$

dosazujeme sem $\sin^2\varphi = \frac{tg^2\varphi}{1+tg^2\varphi}$, $tg\,\varphi = f'(u)$,

takže $\frac{1}{R_2} = \frac{f'(u)}{u[1+f'(u)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad \dots (3).$

Podmínka $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$,

charakterisující plochu minimální, vede zde tedy k rovnici

$$\frac{1}{[1+f'^2]^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{f''(u)}{1+f'(u)^2} + \frac{f'(u)}{u}\right] = 0 \quad \dots (4)$$

Předpokládáme-li pak že

$$u^2[1+f'(u)^2] = \Delta^2 \geq 0$$

a také $1+f'(u)^2 \geq 0$, můžeme rovnici (4) nahraditi rovnicí

$$u \cdot f''(u) + f'(u) + f'(u)^3 = 0 \quad \dots (4'),$$

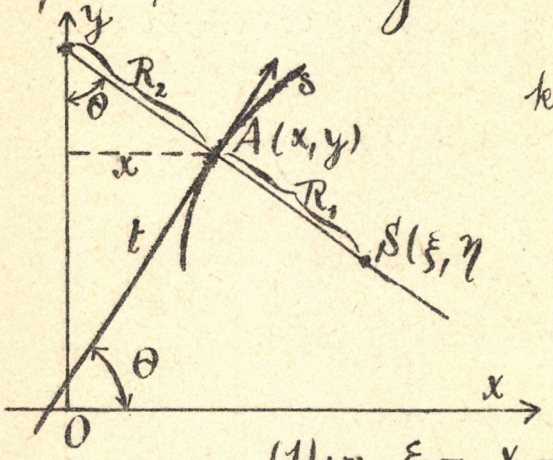
jež jest tudíž differenciální rovnicí meridiánové křivky hledané plochy rotační.

Poznati, že tyto plochy náležejí k oněm, pro něž $R_1 = -R_2$, že totiž

$$\iint dx\,dy\,\sqrt{1+p^2+q^2}$$

nabývá minimální hodnoty jen tehdy, je-li $R_1 + R_2 = 0$.

Integraci příslušné differenciální rovnice provedeme jednodušeji, pokračujeme-li následujícím postupem více geometrickým.



Budiž y osa rotace, s oblouk křivky meridiánové a

$$x = \varphi(s),\ y = \psi(s)$$

její rovnice.

Pak pro souřadnici ξ jejího středu křivosti platí (viz I. díl) vztah

$$(1) \ldots \quad \xi = x + \frac{y'^2}{x''}$$

Poněvadž však poloměr R_2 hlavního řezu obsahujícího tečnu kružnice paralelní má se rovnati až na znaménko poloměru R_1 křivky meridiánové a poněvadž koncový bod onoho jest na ose rotace y, musí

$$(2) \ldots \quad \xi = 2x$$

takže porovnáním těchto dvou rovnic plyne differenciální rovnice hledané křivky meridiánové ve tvaru

$$x = \frac{y'^2}{x''} \quad \text{čili}$$

$$y'^2 = 1 - x'^2 = x x'',$$

$$x'^2 + x x'' = 1 \ldots (3).$$

Levá strana rovnice (3) jest rovna $\frac{d(xx')}{ds}$, takže

integrací: $\quad x x' = s + k \ldots (3')$

tvšak $\quad x x' = \frac{1}{2}\frac{d(x^2)}{ds}$, tedy

$$d(x^2) = 2(s+k)\, ds, \quad \text{odkud}$$

§ III. 9.

$$x^2 = s^2 + 2ks + a^2 \quad \ldots (4)$$

kde a^2 značí opět konstantu.

Za příčinou zjednodušení klademe počátek oblouku do bodu, v němž jest tečna ku křivce rovnoběžna s osou y. Pak jest současně

$x' = 0$, $s = 0$, takže z rovnice (3') plyne

$k = 0$, tedy

(5) $x^2 = s^2 + a^2$, $x x' = s$, odkud

$$x' = \frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}, \text{ tedy}$$

$$y' = \frac{a}{\sqrt{s^2+a^2}}. \text{ Odtud plyne}$$

$$y = a \int \frac{ds}{\sqrt{s^2+a^2}} = a \log \left[s + \sqrt{s^2+a^2} \right] + K.$$

Přesuňme dále osu x tak, aby procházela bodem $s = 0$. Pak jest

$$0 = a \log a + K, \text{ tedy } K = -a \log a$$

a pro y jest

$$y = a \log \left[s + \sqrt{s^2+a^2} \right] - a \log a$$

$$\frac{y}{a} = \log \frac{s + \sqrt{s^2+a^2}}{a},$$

$$\begin{cases} e^{\frac{y}{a}} = \dfrac{s + \sqrt{s^2+a^2}}{a} \\ e^{-\frac{y}{a}} = \dfrac{-s + \sqrt{s^2+a^2}}{a} \end{cases}$$ a převrácená hodnota;

takže

$$e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}} = \frac{2\sqrt{s^2+a^2}}{a}$$ čili, vzhledem ku (5),

$$x = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}} \right) \ldots (6)$$

jest rovnicí křivky meridiánové pro hledanou ro-

kační plochu minimální.

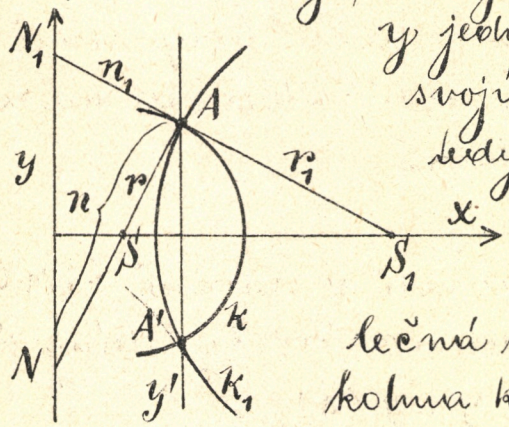
Seznáváme tedy jako rotační plochu minimální plochu zvanou katenoid, jež vzniká rotací řetězovky.*

31. Rotační plochy konstantní míry křivosti.

– Budiž naší úlohou stanoviti rovnice křivek meridiánových těchto rotačních ploch.

V úvaze předběžné nejme na zřeteli soustavu křivek v rovině a všecky křivky, které libovolným bodem A procházejí a z nichž každá protíná všecky křivky dané pod konstantním úhlem. Bodem A prochází tedy ∞^1 těchto trajektorií čili isogonálních křivek k dané soustavě a jest známa věta, že kružnice křivosti všech těchto trajektorií v bodě A sestrojené tvoří svazek kružnic.

Vznikne-li speciálně daná soustava křivek posunem jedné křivky v určitém směru, rovnoběžném na př. s osou y, pak jest i rovnoběžka y' bodem A ku y jedinou z trajektorií jsouc zároveň svojí kružnicí křivosti. Seznáváme tedy, že v tomto případě oba základní body A, A' našeho svazku leží na přímce y', takže společná středná kružnic svazku jest kolma ke směru y.



*kolmá osy kolmé k ose souměrnosti řetězovky ve vzdálenosti a od nejbližšího bodu řetězovky.

Jednou z trajektorií* dané soustavy křivek jest sama křivka tělo soustavy. Budiž r její poloměr, S střed křivosti v bodě A. Křivka ta jest totiž trajektorií příslušící úhlu nula. Pro orthogonální trajektorii budiž r_1 poloměr a S_1 střed křivosti. Pak jest tedy SS_1 kolmo ku y.

Je-li nyní daná soustava křivek tvořena křivkami takové vlastnosti, že pro každý bod křivky jest součin z poloměru křivosti r úsekem na normále n až k ose y hodnotou stálou

$$(1)\ldots\quad r \cdot n = \text{konst},$$

pak rotací každé z těchto křivek kolem osy y vzniká rotační plocha konstantní míry křivosti.

A dále plyne z podobnosti trojúhelníků NAN_1, S_1AS vztah

$$(2)\ldots\quad r_1 n_1 = - r n.$$

Rotací každé z orthogonálních trajektorií naší soustavy křivek kolem osy y vzniká tedy rovněž plocha konstantní míry křivosti, kteréžto míra liší se od první pouze znaménkem.

Mějme tudíž úlohou stanoviti v rovině křivky splňující vztah (1). Jsou-li rovnice křivky dány obecně ve tvaru $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, pak normála v bodě (x, y) křivky má rovnici

*totiž trajektorií jdoucích bodem A.

$$\eta - y = -\frac{x'}{y'}(\xi - x).$$

Pro průsečík s y jest tedy

$$\eta = y - \frac{x'}{y'} \quad \text{a pro } n \text{ jest}$$

$$n^2 = x^2 + (\eta - y)^2 = x^2\left(1 + \frac{x'^2}{y'^2}\right) = \frac{x^2(x'^2 + y'^2)}{y'^2} = \frac{x^2}{y'^2}$$

Že vzorce platného pro křivku prostorovou plyne dále $r^2 = \frac{1}{x''^2 + y''^2}$.

Jest však $y' = \sqrt{1 - x'^2}$, $y'' = \frac{-x'x''}{\sqrt{1-x'^2}}$, tedy

$$\frac{1}{r^2} = x''^2 + \frac{x'^2 x''^2}{1 - x'^2} = \frac{x''^2}{1 - x'^2} = \frac{x''^2}{y'^2}.$$

Jest tudíž

$$r^2 n^2 = \frac{x^2}{x''^2}, \text{ tedy } |r\,n| = \frac{x}{x''}.$$

Zbyle ještě o znaménko. Uvažme, že úsečka ξ středu křivosti jest $\xi = x + \frac{y'^2}{x''}$ a že jest součin $r\,n$ kladný resp. záporný dle toho, zdali $\xi - x$ a x mají znaménka různá resp. stejná čili dle toho zdali x'' jest záporné resp. kladné. Vždy plyne

$$r\,n = -\frac{x}{x''}$$

a předpokladu

$$r\,n = k$$

vede tedy k differenciální rovnici hledaných křivek

$$x'' + k\,x = 0 \quad \ldots (3)$$

Možno však k klásti rovno $+1$ resp. -1 dle toho, zdali bylo kladné nebo záporné; neboť tím přecházíme ke křivkám podobným pro modul podobnosti k.

Řešení našeho problému vede nás tedy k differen-

cidální rovnici

$$\text{I.)}\ x'' + x = 0 \quad \text{resp.} \quad \text{II.)}\ x'' - x = 0$$

dle toho zdali jde o plochy kladné křivosti resp. záporné křivosti a zároveň z předchozího plyne, že plochy jednoho druhu dostaneme z ploch druhého druhu pouhým sestrojením orthogonálních trajektorií soustavy křivek.

I.) Budiž $k \geq 0$.

Obecné řešení naší dif. rovnice má tvar

$$x = a \cos s + b \sin s$$

odkud $x' = -a \sin s + b \cos s$.

Pro zjednodušení položme počátek oblouku s do bodu $x' = 0$.. Pak jest $b = 0$ a naše obecné řešení má tvar

$$x = a \cos s \quad \ldots \quad (4)\ ;$$

při tom možno a brátí pouze kladné; neboť pro a záporné dostáváme prostě křivku souměrnou k prvé.

Uvažujme nejprve případ

a) $0 < a < 1$.

Zde jest $x' = -a \sin s$, $y' = \sqrt{1 - a^2 \sin^2 s}$

tedy $y = \int_0^s \sqrt{1 - a^2 \sin^2 s}\, ds + 0$

kde integrační konstanta odpovídá je-li pro $s = 0$ též $y = 0$.

Píšme c místo a, φ místo s, takže jest

a) $x = c \cos \varphi$, $y = \mathcal{E}(c, \varphi)$.

Budiž dále v druhém případě

b) $a = 1$, čili, v našem označení, $c = 1$.

Zde jest prostě

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi;$$

křivka jest kružnicí.

V dalším případě konečně budiž

c) $a > 1$.

Položme $a \sin s = \sin\varphi$, tedy

$\sin s = \frac{\sin\varphi}{a}$, $\cos s = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}\sin^2\varphi}$, $\cos s\, ds = \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{a}$,

takže, položíme-li ještě $\frac{1}{a} = c$ (tedy c jest opět < 1), jest

$$x = a\cos s = \frac{1}{c}\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}$$ a dále

$$\frac{dy}{d\varphi} = \sqrt{1 - a^2\sin^2 s}\ \frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{1 - \sin^2\varphi}\ \frac{\cos\varphi}{a\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}\sin^2\varphi}} =$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{c\cos^2\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}.$$

Jest však

$$\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi = 1 - \frac{1}{c^2}c^2\sin^2\varphi + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^2} =$$

$$= \frac{1}{c^2}(1 - c^2\sin^2\varphi) - \left(\frac{1}{c^2} - 1\right),$$ tedy

$$y = \int_0^\varphi \frac{1}{c}\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}\, d\varphi - c\frac{1 - c^2}{c^2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}};$$

užijeme-li opět obvyklého označení, jest v tomto případě

c) $x = \frac{1}{c}\Delta\varphi$, $y = \frac{1}{c}E(c,\varphi) - \frac{1 - c^2}{c}F(c,\varphi)$.

II) Budiž $k < \alpha$.

Obecné řešení má zde tvar

$$x = \alpha e^s + \beta e^{-s}.$$

V případě I bylo $x = a\cos s$, takže pro úhel τ_I tečny ke křivce s osou x platilo

$$\cos\tau_I = \frac{dx}{ds} = -a\sin s = -\sqrt{a^2 - a^2\cos^2 s} = -\sqrt{a^2 - x^2}.$$

V onom nějším případě II musí $\sin^2\tau_{II} = \cos^2\tau_I$, takže zde jest

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = \cos^2\tau_{II} = 1 - \cos^2\tau_I = 1 - a^2 + x^2$$

Jelikož však $x' = \alpha e^s - \beta e^{-s}$, nabýváme tím relace

$$(\alpha e^s - \beta e^{-s})^2 = 1 - a^2 + (\alpha e^s + \beta e^{-s})^2$$

čili

$$4\alpha\beta = a^2 - 1.$$

Počítáme-li s od bodu $x = a$, platí pro α, β ještě další relace $\alpha + \beta = a$, takže jest

$$\alpha = \frac{a \pm 1}{2}, \quad \beta = \frac{a \mp 1}{2}.$$

Záměna s a $-s$ dá však záměnu α a β, takže stačí bráti $\alpha = \frac{a+1}{2}$, $\beta = \frac{a-1}{2}$.

Je-li nyní

a) $0 < a < 1$,

zavedme parametr φ vztahem

$$x = \frac{a+1}{2} e^s + \frac{a-1}{2} e^{-s} = a\cos\varphi$$

odkud plyne

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = \left(\frac{a+1}{2} e^s - \frac{a-1}{2} e^{-s}\right)^2 = a^2\cos^2\varphi - a^2 + 1 = 1 - a^2\sin^2\varphi;$$

a také jest

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = a^2\sin^2\varphi \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2, \text{ takže po rovnáním vlastáváme}$$

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \frac{a^2\sin^2\varphi}{1 - a^2\sin^2\varphi}.$$

Pro y máme pak

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}\ \frac{ds}{d\varphi} = a\sin\varphi\ \frac{a\sin\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{a^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}.$$

Píšeme-li c místo a, máme po úpravě obdobné případu $\underline{I}c$ výsledek

a) $x = c\cos\varphi,\ y = \mathcal{F}(c,\varphi) - \mathcal{E}(c,\varphi).$

Případem přechodním mezi $c<1$ a $c>1$

b) $c=1$

přísluší tedy rovnice

b) $x = \cos\varphi,\ y = \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) - \sin\varphi.$

Křivka meridiánová v tomto případě jest tedy orthogonální trajektorií soustavy shodných kružnic mających středy na ose rotace, čili jest to křivka, pro kterou délka tečen měřených až k ose rotace jest stálá.

Známa jest pod názvem traktrix a plocha její rotací vzniklá zove se pseudosférou. Jest to nejjednodušší plocha stálé záporné křivosti.

Uvažujme konečně případ

c) $c>1.$

Položíme obdobně, zde ovšem se zřetelem k případu nikoli $\underline{I}a$ nýbrž $\underline{I}c$, :

$$x = \frac{a+1}{2}e^{s} + \frac{a-1}{2}e^{-s} = a\sqrt{1-\frac{1}{a^2}\sin^2\varphi}.$$

Pak jest

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = \left(\frac{a+1}{2}e^{s} - \frac{a-1}{2}e^{-s}\right) = a^2\left(1-\frac{1}{a^2}\sin^2\varphi\right) - a^2 + 1$$

tedy $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = \cos^2\varphi,$

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{a^2}\,\frac{\sin^2\varphi}{1-\frac{1}{a^2}\sin^2\varphi}\,,$$ načež

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{a}\,\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{a^2}\sin^2\varphi}}\,,$$ takže

označíme-li opět $a = \frac{1}{c}$, máme výsledek

$$c)\quad x = \frac{1}{c}\Delta\varphi,\quad y = \frac{1}{c}\mathcal{F}(c,\varphi) - \frac{1}{c}\mathcal{E}(c,\varphi).$$

Pozn. Seznáme, že plochy mající v příslušných bodech touž míru křivosti možno deformovati tak, že jedna přikryje druhou, čili možno jednu na druhou rozvinouti. Odtud plyne, že všecky plochy kladné stálé křivosti dají se odvoditi deformací plochy kulové a obdobně plochy záporné stálé křivosti deformací pseudosféry. Z geometrie sférické možno tedy přejíti ke geometrii na plochách kladné stálé křivosti. Geometrii v rovině staví se takto po bok geometrie na plochách stálé křivosti kladné a obdobně geometrie na plochách stálé křivosti záporné.

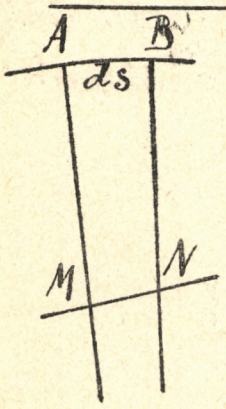
Uvažované plochy specielních vlastností vzhledem ke střední křivosti resp. k míře křivosti patří do kategorie ploch, pro které platí relace

$$\mathcal{F}(R_1, R_2) = 0$$

mezi oběma hlavními poloměry křivosti a které nazýváme společným názvem plochy Weingartenovy (po případě krátce: W plochy).

IV. Soumezné normály.

32. Osa dvou soumezných normál. – Budiž



B soumezný bod plochy k bodu A. Uvažujme jejich normály plošné. Budiž pak MN osa těchto normál.

Je-li ds oblouk AB a $d\sigma$ úhel obou normál, odvoďme vztahy veličin zde se vyskytujících.

Nejprve stanovme délku dn úsečky MN. – Jsou-li (X, Y, Z), $(X+dX, Y+dY, Z+dZ)$ cosiny směrné obou normál, jest

$$\begin{vmatrix} \xi & X & X+dX \\ \eta & Y & Y+dY \\ \zeta & Z & Z+dZ \end{vmatrix} = 0 \quad \text{čili} \quad \begin{vmatrix} \xi & X & dX \\ \eta & Y & dY \\ \zeta & Z & dZ \end{vmatrix} = 0$$

rovnice roviny jdoucí počátkem rovnoběžně k oběma. A z toho důvodu jest

$$\begin{vmatrix} \xi & X & dX \end{vmatrix} = \delta$$

rovnice každé roviny s ní rovnoběžné. Tak pro rovinu jdoucí bodem $A(x, y, z)$ jest

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} x & X & dX \end{vmatrix}$$

a pro rovinu jdoucí bodem $B(x+dx, y+dy, z+dz)$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} x+dx, & X & dX \end{vmatrix}$$

Vzdálenost prvé roviny od počátku jest

$$v_1 = \frac{\delta_1}{J}, \quad \text{kde}$$

$$J = \sqrt{S\begin{vmatrix} X & dX \\ Y & dY \end{vmatrix}^2} = \sqrt{\begin{Vmatrix} X & Y & Z \\ dX & dY & dZ \end{Vmatrix}^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & SXdX \\ SXdX & SdX^2 \end{vmatrix}} =$$

$$\mathfrak{J} = \sqrt{S\,dX^2} = d\sigma$$

jak patrno z toho, že sestrojujeme-li středem jednotkové plochy kulové rovnoběžné polopaprsky ke kladným normálám naší plochy, přísluší našim souměrným normálám body určující oblouk $d\sigma$.

Jest tudíž
a obdobně

$$v_1 = \frac{|x \times dX|}{d\sigma}$$

$$v_2 = \frac{|x+dx \times dX|}{d\sigma} .$$

Poněvadž pak jde o roviny nekonečně blízké jsou v_1 a v_2 téhož znaménka, takže

$$\underline{dn} = v_2 - v_1 = \underline{|dx \times dX| \cdot \frac{1}{d\sigma}}$$

Z toho plyne

$$dn^2 . d\sigma^2 = \begin{vmatrix} S\,dx^2 & S\,X\,dx & S\,dX\,dx \\ S\,X\,dx & S\,X^2 & S\,X\,dX \\ S\,dX\,dx & S\,X\,dX & S\,dX^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} ds^2 & 0 & S\,dX\,dx \\ 0 & 1 & 0 \\ S\,dX\,dx & 0 & d\sigma^2 \end{vmatrix} = ds^2 d\sigma^2 - (S\,dX\,dx)^2$$

čili

$$ds^2 - dn^2 = \frac{(S\,dX\,dx)^2}{d\sigma^2} \quad \dots (1).$$

Budiž nyní m_1 resp m_2 vzdálenosti bodů $M(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ resp $N(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ od bodů A resp B, takže jest

$$\xi_1 = x + m_1 X, \qquad \xi_2 = x + dx + m_2 (X + dX)$$

Spojnice MN má nyní býti kolmá ku normále X, Y, Z i k normále $X+dX, Y+dY, Z+dZ$, takže platí současně

$$S(\xi_2 - \xi_1) X = 0, \quad S(\xi_2 - \xi_1) dX = 0$$

t. j.

$$S[dx + X(m_2 - m_1) + m_2 dX] X = 0$$
$$S[dx + X(m_2 - m_1) + m_2 dX] dX = 0.$$

Z prvé rovnice plyne: $m_2 - m_1 = 0$.

Položme $m_1 = m_2 = m$ a pak máme z rovnice druhé

$$m = -\frac{S\, dX\, dx}{S\, dX^2} = -\frac{S\, dX\, dx}{d\sigma^2} \quad \dots (2).$$

Vzhledem k našemu vyjádření plochy jest

$$(r_2'') \dots S\, dX\, dx = -(\mathfrak{L} du^2 + 2\mathfrak{M} du\, dv + \mathfrak{N} dv^2),$$

$$d\sigma^2 = S\, dX^2 = S(X_u du + X_v dv)^2 = S X_u^2 du^2 +$$
$$+ 2 S X_u X_v du\, dv + S X_v^2 dv^2$$

a vzhledem k získaným již prvním výrazům:

$$S X_u^2 = \mathfrak{H}\mathfrak{L} - \mathfrak{K}\mathfrak{E}, \quad S X_u X_v = \mathfrak{H}\mathfrak{M} - \mathfrak{K}\mathfrak{F}, \quad S X_v^2 = \mathfrak{H}\mathfrak{N} - \mathfrak{K}\mathfrak{G},$$

jest tudy

$$d\sigma^2 = \mathfrak{H}(\mathfrak{L} du^2 + 2\mathfrak{M} du\, dv + \mathfrak{N} dv^2) -$$
$$- \mathfrak{K}(\mathfrak{E} du^2 + 2\mathfrak{F} du\, dv + \mathfrak{G} dv^2) \dots (r_2').$$

Tudíž výraz pro m možno psáti ve tvaru

$$m = \frac{\mathfrak{L} du^2 + 2\mathfrak{M} du\, dv + \mathfrak{N} dv^2}{\mathfrak{H}(\mathfrak{L} du^2 + \dots) - \mathfrak{K} ds^2} \quad \dots (2').$$

Pro dn^2 plyne z rovnic (1), (2) vztah

$$dn^2 = ds^2 - m^2 d\sigma^2 \dots (3),$$

který vyjadřuje souvislost veličin zde se vyskytujících.

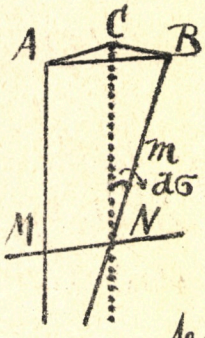
Vyloučíme-li z rovnic (r_2) a (2') výraz $L du^2 + 2M du dv + N dv^2$, obdržíme další vztah

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \frac{K}{mH - 1} \dots (4)$$

který, applikován pro rovnici (3), dává ji ve tvaru

$$\left(\frac{dn}{ds}\right)^2 = 1 - \frac{m^2 K}{mH - 1} \dots (3')$$

Relace (3) má jednoduchý geometrický význam. Sestrojíme-li totiž bodem N rovnoběžku k MA, takže její průsečík s rovinou tečnou bodu A jest C, pak jest $\sphericalangle CNB = d\sigma$, $CB = m\,d\sigma$, poněvadž $AC \# MN$.



Z pravoúhlého trojúhelníka ABC pak skutečně vztah (3) plyne.

33. Místo os sousedních normál v bodě plochy.

– Uvažovaný bod budiž počátkem pravoúhlé soustavy souřadnic, jeho klademe normálu osou z. V rovnici plochy $z = f(x, y)$ pokládejme x, y za parametry u, v. Jest tedy

$x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$ parametrické vyjádření naší plochy, tedy $x_u = 1$, $y_u = 0$, $z_u = p$,

$x_v = 0$, $y_v = 1$, $z_v = q$;
a ježto zde jest $p = q = 0$, jest též $z_u = z_v = 0$ pro uvažovaný bod plochy A.

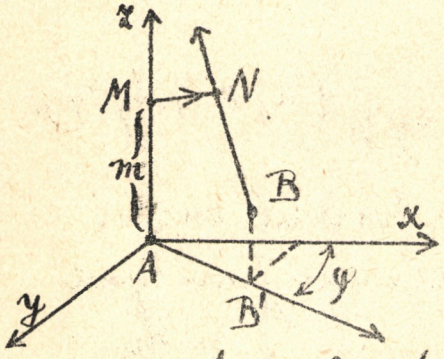
Pro základní veličiny jest

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1;$$

a volíme-li za roviny xz, yz oba hlavní řezy, pak z výrazu

$$\frac{1}{R} = \frac{L + 2Mk + Nk^2}{E + 2Fk + Gk^2} \quad \text{plyne}$$

pro $k = 0$ ... $\frac{1}{R_1} = L$,
pro $k = \infty$ ... $\frac{1}{R_2} = N$;
a ježto křivky křivosti jsou křivkami parametrickými, jest konečně $M = 0$.



Rovnice (2') str. 77 aplikována na náš případ dává pro m

$$m = \frac{\frac{1}{R_1}du^2 + \frac{1}{R_2}dv^2}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{R_1}du^2 + \frac{1}{R_2}dv^2\right) - \frac{1}{R_1 R_2}(du^2 + dv^2)}$$

čili — píšeme-li x, y místo u, v —

$$m = \frac{\frac{1}{R_1}dx^2 + \frac{1}{R_2}dy^2}{\frac{1}{R_1^2}dx^2 + \frac{1}{R_2^2}dy^2} = \frac{\frac{1}{R_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{R_2}\sin^2\varphi}{\frac{1}{R_1^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{R_2^2}\sin^2\varphi},$$

$$m = \frac{R_1 R_2 (R_2 + R_1 \operatorname{tg}^2\varphi)}{R_2^2 + R_1^2 \operatorname{tg}^2\varphi}; \quad \text{odkud plyne}$$

$$\frac{m - R_1}{m - R_2} = \frac{R_1^2 (R_2 - R_1)\operatorname{tg}^2\varphi}{R_2^2 (R_1 - R_2)} \quad \text{čili}$$

$$\frac{m-R_1}{m-R_2} = -\frac{R_1^2}{R_2^2}\,tg^2\varphi \ldots (1).$$

Uvažme dále, že osa MN jsouc kolmá k normálám rovin sečných v bodě A a v bodě B jest rovnoběžná k průsečnici těchto rovin, má tudíž směr sdružený ke směru $A\underline{B}$.

Je-li úsek φ úhel, který svírá MN s osou x, jest

$$tg\,\varphi \cdot tg\,\varphi = -\frac{R_2}{R_1} \ldots (2).$$

(viz: Dupinova indikatrise v II. dílu).

Vyloučením $tg\,\varphi$ z (1) a (2) plyne úsek

$$\frac{m-R_1}{m-R_2} = -\frac{R_1^2}{R_2^2}\cdot\frac{R_2^2}{R_1^2}\cot^2\varphi = -\cot^2\varphi \quad \text{čili}$$

$$(m-R_1)\sin^2\varphi + (m-R_2)\cos^2\varphi = 0$$

Odtud plyne

$$m = R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi = \frac{1}{1+tg^2\varphi}\,(R_2 + R_1\,tg^2\varphi).$$

Parametrické vyjádření plochy tvořené osami normály bodu A s normálami sousedními jest pak $\xi = \lambda\cos\varphi$, $\eta = \lambda\sin\varphi$, $\zeta = m$ a jelikož $\frac{\eta}{\xi} = tg\,\varphi$, jest její rovnice

$$\zeta = \frac{1}{\xi^2+\eta^2}\,(R_2\xi^2 + R_1\eta^2) \quad \text{čili}$$

$$\zeta(\xi^2+\eta^2) - R_2\xi^2 - R_1\eta^2 = 0 \ldots (3).$$

Sestrojujeme body:

Osy libovolné normály na ploše a všech normál sousedních tvoří cylindroid. – Jeho určení jest z rovni-

se (3) snadno provésti.

Mimochodem provedme též pro tento případ vyjádření pro úhel $d\sigma$ obou sousedních normál. Jest (viz (r_2) str. 77)

$$d\sigma^2 = \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{R_1}dx^2+\frac{1}{R_2}dy^2\right)-\frac{1}{R_1R_2}(dx^2+dy^2)$$

$$d\sigma^2 = \frac{1}{R_1^2}dx^2+\frac{1}{R_2^2}dy^2, \quad \text{čili}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \frac{1}{R_1^2}\cos^2\varphi+\frac{1}{R_2^2}\sin^2\varphi \quad \dots (4),$$

čímž nabýváme známého nám výrazu pro t.zv. křivost Bertrandovu.

Další vlastnosti sousedních normál jsou nám již známy. Tak seznali jsme, že normály sousedné k dané normále protínají dvě pevné přímky a že sousedná normála protíná normálu danou jen tehdy, leží-li pata její od prvé ve směru hlavním, čili že pouze podél křivky křivosti normály tvoří plocha rozvinutelnou.

Kapitola III.

I. Sférické zobrazení plochy.

34. Základní veličiny. Míra křivosti plochy.

Sestrojíme-li středem jednotkové plochy kulové rovnoběžky ke klovoucím normálám bodů plochy, nabýváme tím sférického zobrazení bodů plochy i křivek na ní ležících. Roviny tečné bodů a jejich sférických obrazů jsou navzájem rovnoběžné.*

Body o rovnoběžných normálách mají společný sférický obraz. Jest dále patrno, že příslušné body dvou ploch o společných normálách mají společné sférické obrazy, takže sférický n zobrazením lze studovati jen takové vlastnosti ploch, které jsou společny všem plochám o společných normálách.

Úvaha tato přivádí nás k plochám t. zv. paralelním. Nanesme na normálu (X, Y, Z) každého bodu (x, y, z) plochy konstantní délku l a uvažujme plochu koncovými body vytvořenou. Pro bod (ξ, η, ζ) této nové plochy jest:

* Pro libovolné rovnoběžné osvětlení má tedy bod plochy touž intensitu osvětlení jako jeho sférický obraz, takže sférického zobrazení plochy možno též použíti ku stanovení isofot.

$$\xi = x + \lambda X \,, \quad \eta = y + \lambda Y \,, \quad \zeta = z + \lambda Z \,.$$

Platí tudíž

$$\xi_u = x_u + \lambda X_u \,, \quad \xi_v = x_v + \lambda X_v \,, \ldots$$

takže $SX\,\xi_u = SX\,x_u + \lambda\, SX X_u$ a obdobně pro $SX\,\xi_v$.

Jest známo, že

$$SX\,\xi_u = 0 \,, \quad SX\,\xi_v = 0 \,.$$

Normála (X, Y, Z) jest tedy taková normálou plochy (ξ, η, ζ). Plocha tato má tedy tečné roviny rovnoběžné k tečným rovinám plochy dané, jest plochou parallelní k ploše dané.

Bodu (x, y, z) plochy, jehož souřadnice jsou funkcemi parametrů u, v, odpovídá na ploše kulové bod (X, Y, Z), a jeho souřadnice jsou rovněž funkcemi u, v. Vyjadřme tudíž se zřetelem k parametrům u, v základní veličiny $e, f, g, \lambda, \mu, \nu$ pro plochu kulovou.

Jest jak známo

$$e = SX_u^2 = \mathcal{H}L - \mathcal{K}\mathcal{L} \,, \quad f = SX_u X_v = \mathcal{H}M - \mathcal{K}\mathcal{F} \,,$$
$$g = SX_v^2 = \mathcal{H}N - \mathcal{K}\mathcal{G} \ldots \quad (1)$$

Dosadíme-li pak za $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ známé výrazy, máme

$$\left.\begin{aligned} e &= \frac{1}{\Delta^2}\,(\mathcal{E}M^2 - 2\mathcal{F}LM + \mathcal{G}L^2) \\ f &= \frac{1}{\Delta^2}\,[\mathcal{E}MN - \mathcal{F}(LN + M^2) + \mathcal{G}LM] \\ g &= \frac{1}{\Delta^2}\,[\mathcal{E}N^2 - 2\mathcal{F}MN + \mathcal{G}M^2] \end{aligned}\right\} \quad (1')$$

Označme dále $\delta^2 = eg - f^2$. Jest pak

$$\delta^2 = \begin{vmatrix} \mathcal{H}L - K\mathcal{E} & \mathcal{H}M - K\mathcal{F} \\ \mathcal{H}M - K\mathcal{F} & \mathcal{H}N - K\mathcal{G} \end{vmatrix} =$$

$$= \mathcal{H}^2\nabla^2 + K^2\Delta^2 - \mathcal{H}K\underbrace{(EN - 2MF + GL)}_{\mathcal{H}\Delta^2}$$

a ježto $\nabla^2 = K\Delta^2$, jest

$$\delta^2 = K^2\Delta^2 \text{ , tedy}$$

$$\delta = \varepsilon K\Delta \quad \dots (2),$$

kde nejen Δ ale i δ béřeme stále kladně určující tak kladný smysl normály. Jest tedy

$$\varepsilon = \pm 1 \text{ dle toho zdali } K \gtrless 0.$$

Pro cosiny směrné $\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{Z}$ normály koule platí pak obdobně

$$\mathcal{E} = \frac{Y_u Z_v - Z_u Y_v}{\delta}, \dots .$$

Měli jsme však

$$Y_u Z_v - Z_u Y_v = \frac{\nabla^2}{\Delta} X, \dots ,$$

takže

$$\mathcal{E} = \frac{\nabla^2}{\Delta\delta} X = \frac{\nabla^2}{\Delta^2} \cdot \frac{\Delta}{\delta} X = \frac{K\Delta}{\delta} X = \varepsilon X$$

Tedy

$$\mathcal{E} = \varepsilon X, \quad \mathcal{H} = \varepsilon Y, \quad \mathcal{Z} = \varepsilon Z \quad \dots (3)$$

Ježto jest $K \gtrless 0$ dle toho, zdali jest bod bodem elliptickým nebo hyperbolickým, shledáváme, že pro body elliptické resp. hyperbolické kladná normála plochy kulové – vyčtena předpokladem $\delta > 0$ – má smysl souhlasný resp. nesouhlasný se smyslem normály ku ploše, t. j. směřuje ven resp. dovnitř plochy kulové.

Pro základní veličiny druhého řádu máme dále

$$\lambda = -S\,\mathfrak{E}_u X_u = -\varepsilon\, S X_u^2 = -\varepsilon e$$

a obdobně μ, ν:

$$\lambda = -\varepsilon e,\ \mu = -\varepsilon f,\ \nu = -\varepsilon g \ \dots (4);$$

– že musí pro plochu kulovou býti splněn vztah

$\lambda : \mu : \nu = e : f : g$, věděli jsme již předem –.

Pro naši plochu ve vyjádření parametrickém odvodili jsme konečně výraz

$$d\mathfrak{J} = \Delta\, du\, dv \ \dots (5)$$

pro plošný element v bodě (u, v).

Obsahům rovinných přidáváme jak známo různé znaménko dle toho v jakém smyslu jest obvod obrazce opsán. Seznali jsme pak, že předpokladem $\Delta > 0$ jest kladný smysl normály určen tak, že tečny křivek $v = \text{konst}$, $u = \text{konst}$ a kladná normála tvoří trojhran tak orientovaný jako trojhran souřadný. Vytvořme tedy náš plošný element postupem od prvé tečny ke druhé a dejme mu v tomto případě znaménko kladné. Našemu plošnému prvku odpovídá na ploše kulové plošný prvek dj. Normála plochy kulové má však* touž orientaci jako normála naší plochy jen v případě bodu elliptického; a totéž platí též o orientaci trojhranu příslušného prvému; a totéž platí – ponecháme-li pro plochu kulovou v platnosti týž předpoklad o volbě znaménka pro dj – též o tomto znaménku.

* k tečnám křivek $v = \text{konst}$, $u = \text{konst}$ na kouli; viz str. 95.

Nutno tudíž psáti

$$dj = \varepsilon\, \delta\, du\, dv \quad \dots (5').$$

Takže jest

$$\frac{dj}{dJ} = \frac{\varepsilon\delta}{\Delta} = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon K \Delta}{\Delta} = K.$$

$$\frac{dj}{dJ} = K \quad \dots (6).$$

Přihlížíme-li tedy vytčeným způsobem ke znaménku plošného elementu, udává nám poměr sférického obrazu elementární plošky na ploše ku plošce té samé míru křivosti čili totální křivost příslušného bodu plochy.

Co platilo totiž o elementárních trojúhelnících, platí totiž o elementárních obrazcích libovolného tvaru, neboť jest možno na trojúhelníky je rozděliti.

Gaussova míra křivosti plochy jeví se nám tedy pojmem obdobným ke křivosti křivky, kterou bylo možno rovněž definovati užitím sférického zobrazení prvku křivky.

35. Specielní případy. – Míru křivosti, pro kterou nabyli jsme právě na základě sférického zobrazení nové definice, znali jsme nejprve dánu výrazem $\frac{1}{R_1 R_2}$ nebo $\frac{LN - M^2}{EG - F^2}$. Druhý z těchto výrazů má obecnější platnost, neboť prvý pozbývá smyslu v každém případě, kdy nelze o hlavních normálných řezech mluviti.

Jsme bylo by možno řaditi i plochu kulovou samu. Ú ní jest totiž známo, že obsahuje dvě soustavy povrchových přímek isotropických, takže pro každý její bod směry asymptotické splývají oba se směry isotropickými. Každé dva navzájem kolmé řezy jsou zde pak kolmými směry sdruženými. Béřeme-li tedy skutečně libovolné dva navzájem kolmé řezy normálné za řezy hlavní, jest zde $R_1 = R_2 = R$, kde R jest poloměr koule, takže $\frac{1}{R^2}$ jest konstantní mírou křivosti pro všechny body plochy kulové, kterou tím máme podřazenu případu obecnému.*

Případ speciálnějšího druhu skytají plochy obsahující pouze jednu soustavu přímek isotropických. Předpokládejme nejprve, že přímky tyto neobalují křivku na ploše, takže jde o plochu nerozvinutelnou. Seznali jsme, že v tomto případě platí mezi řezy normálnými a jejich poloměry křivosti vztah projektivní, takže v bodech takovéto plochy nelze o hlavních směrech – jež v obecném případě jsou dvojmými známé nám involuce – mluviti. Základní veličiny nepozbývají zde všeho smyslu, takže druhý z nich pro K nepozbývá zde platnosti.*

Případem ještě speciálnějším jsou rozvinutelné plochy o povrchových přímkách minimálních. Rovina tečná takovéto plochy jest rovinou isotropickou a tak-

*Rovněž pokud se týče sférického zobrazení a z něho plynoucí definice křivosti plochy nemá zde výjimky.

ké normála plochy jest přímkou minimální,* takže zde jest $X^2+Y^2+Z^2=0$

a z výrazu pro Δ:

$$\begin{vmatrix} X & x_u & x_v \\ Y & y_u & y_v \\ Z & z_u & z_v \end{vmatrix} = \Delta,$$

plyne též umocněním: $\Delta^2=0$, tedy také $\Delta=0$.

V případě tomto pozbývají veličiny X, Y, Z svého významu přikládaného jim v dosavadních vzorcích, kde stále předpokládáno $X^2+Y^2+Z^2=1$, a základní veličiny L, M, N nelze definovati.

Zde degeneruje i sférické zobrazení plochy, jak tomu jest pro všecky plochy rozvinutelné vůbec. Neboť sférickým obrazem všech ∞^2 bodů plochy rozvinutelné jest pouze ∞^1 bodů plochy kulové.

Obrazem sférickým plošného elementu plochy rozvinutelné jest tedy element oblouku. Sférickým zobrazením dostáváme tudíž pro křivost každého bodu plochy rozvinutelné nulu, kterýžto výsledek jest správný, neboť jak známo jsou všecky body plochy rozvinutelné parabolickými, křivost jednoho hlavního řezu, tedy též míra křivosti jsou rovny nule.

36. Přímky isotropické jako sférické obrazy. –

Tažme se, kterým křivkám plochy odpovídají tyto přímky jako sférické obrazy. Tečné roviny ku ploše kulové ve všech bodech přímky isotropické obsahují

* že tečná rovina plochy obsahuje totiž dvě souměrné površky isotropického kužele bodu hrany vratu; početní důkaz na str. 111

tuto přímku, tudíž tečné roviny bodů té křivky na ploše, jejímž obrazem jest naše přímka isotropická, jsou k této přímce rovnoběžny, obalují tedy válec přímek minimálních. Křivky ty jsou následkem toho ve všech svých bodech sdruženy ku přímkám minimálním dotyčným, tvoří tedy s jednou soustavou minimálních křivek na ploše soustavu křivek sdružených. Ježto pak plocha – vyjímaje případ rozvinutelné plochy přímek minimálních – obsahuje dvě různé soustavy minimálních křivek, jsou na ploše též dvě soustavy našich křivek uvažovaných.

Směry isotropické jsou však souměrny k hlavním směrům čili k osám indikatrie bodu plochy. Seznáváme tedy též, že uvažované křivky tvoří dvě soustavy takového druhu, že v každém bodě plochy jsou úhly jejich půleny směry hlavními.

37. Příslušné pravé úhly na ploše a na kouli. – Z výrazu pro f jest patrno, že je-li současně $F=0$, $M=0$, jest též $f=0$, t. j. při sférickém zobrazení obecné plochy odpovídají křivkám křivosti plochy zase křivky navzájem kolmé.

Hledejme naopak vůbec všecky křivky navzájem kolmé, jejichž sférické obrazy jsou rovněž k sobě kolmy. Budiž tedy současně $F=0$, $f=0$. Pak z výrazu $f = HM - KF$ plyne

$$HM = 0 .$$

a) Pro obecnou plochu, pro kterou jest $\mathcal{H} = 0$, dostáváme tedy $\mathcal{M} = 0$. Odtud plyne: Pro plochy, které nejsou plochami minimálními, jsou křivky křivosti jedinými křivkami*, které se zobrazují sféricky zase jako křivky orthogonální.

Že tomu tak jest, patrno též geometricky z toho důvodu, že ze souměrných normál k normále uvažovaného bodu plochy protínají ji pouze ty, jejichž paty jsou od bodu toho ve směrech hlavních, určujíce s ní dvě roviny navzájem kolmé, k nimiž rovnoběžny a tedy také navzájem kolmy jsou roviny určené rovnoběžkami k normálám těm středem plochy kulové vedenými. Okolnost, že rovina tečná ku ploše kulové jest kolmá ku poloměru bodu dotyčného, stačí pak již k dokončení našeho důkazu.

b). Je-li specielně $\mathcal{H} = 0$, pak jest

$$e = -\mathcal{K}\mathcal{E}, \quad f = -\mathcal{K}\mathcal{F}, \quad g = -\mathcal{K}\mathcal{G}.$$

Každá dvojice křivek orthogonálních zobrazuje se zde sféricky opět ve křivkách orthogonálních. Při tom platí zde vztah $e : f : g = \mathcal{E} : \mathcal{F} : \mathcal{G}$.

38. Geom. význam vztahu $e : f : g = \mathcal{E} : \mathcal{F} : \mathcal{G}$.–

Buďtež dvě plochy vyjádřeny parametricky na základě parametrů u, v

$$(1) \begin{cases} x = \varphi(u,v), & y = \psi(u,v), & z = \chi(u,v); \\ x = \mathcal{F}(u,v), & y = \mathcal{G}(u,v), & z = \mathcal{H}(u,v). \end{cases}$$

* navzájem orthogonálními

Přiřazujme pak každému bodu $M(u,v)$ plochy jednoho bod o týchž parametrech $M(u,v)$ plochy druhé. Pak pravíme, že jednu plochu zobrazujeme na druhou.

Platí-li pro příslušné lineární elementy obou ploch výrazy

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dw + g\,dw^2,$$
$$d\sigma^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dw + G\,dw^2,$$

dostáváme pro poměr jejich:

$$\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = \frac{e+2fk+gk^2}{E+2Fk+Gk^2}.$$

Je-li pak v případě zvažovaném

(2) ... $e = \omega^2 E$, $f = \omega^2 F$, $g = \omega^2 G$, jest

poměr $$\frac{ds}{d\sigma} = \omega \quad \dots \quad (3)$$

nezávislý na k, tedy na směru postupu z bodu plochy.

A je-li φ úhel obou směrů k_1, k_2 na ploše prvé, tedy

$$\cos\varphi = \frac{e+f(k_1+k_2)+g\,k_1k_2}{\sqrt{e+2fk_1+gk_1^2}\,\sqrt{e+2fk_2+gk_2^2}}$$

a je-li φ_1 příslušný úhel na ploše druhé,

$$\cos\varphi_1 = \frac{E+F(k_1+k_2)+Gk_1k_2}{\sqrt{E+\dots}\quad\sqrt{E+\dots}},$$

pak z předpokladu (2) plyne

$$\varphi = \varphi_1 \quad \dots \quad (4).$$

Úhly se tudíž zachovávají.

Celkem plyne z výsledků (3) a (4), že naše posuzovaný vztah způsobuje, že vzájemné zobrazení obou ploch jest v případě tom charakterisováno podobností příslušných

útvarů v nekonečně malých jejich částech. Zobrazení to zovem krátce zobrazením konformním.* —

— Seznáváme tedy:

Je-li plocha plochou minimální, pak její sférické zobrazení jest zobrazením konformním.

36. Plochy zobrazující se na plochu kulovou konformně. — Pro základní veličiny e, f, g sférického zobrazení plochy seznali jsme výrazy:

(1) $\ldots e = \mathcal{H}L - \mathcal{K}E, \quad f = \mathcal{H}M - \mathcal{K}F, \quad g = \mathcal{H}N - \mathcal{K}G.$

Podmínku konformního zobrazení píšme ve tvaru

(2) $\ldots e = \omega^2 E, \quad f = \omega^2 F, \quad g = \omega^2 G$

načež porovnáním obojích rovnic nalézáme pro plochy zobrazující se na plochu kulovou konformně podmínečných rovnic

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{H}L &= (\omega^2 + \mathcal{K})E \\ \mathcal{H}M &= (\omega^2 + \mathcal{K})F \\ \mathcal{H}N &= (\omega^2 + \mathcal{K})G \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Tyto rovnice jsou splněny tehdy

a) je-li $\mathcal{H} = 0$ t.j. $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$

Jelikož E, F, G nemohou se současně rovnati nule, jest zde $\omega^2 = -\mathcal{K}$.

b) Není-li $\mathcal{H}$ rovno nule, tedy $\mathcal{H} \neq 0$, $\omega^2 + \mathcal{K} \neq 0$, tu jest $L : M : N = E : F : G$.

Všechny body plochy jsou zde tedy body kruhovými, plocha jest plochou kulovou, takže platí $R_1 = R_2 = 0$.

Úhrnem tedy seznáváme, že plochy zobrazující se

*Též naopak, zachovávají-li se úhly, plyne úměrnost základních veličin.

na plochu kulovou konformně, splňují rovnici

$$R_1^2 - R_2^2 = 0.$$

II. Povrchové parametry řídicí.

40. Definice. – Zavedení těchto veličin jest výhodné ke stanovení směru postupu z bodu na ploše, vedly při vyjadřování libovolných křivek na ploše.

Z rovnice roviny dečné bodu (u, v) plochy plyne, že cosiny směrné (a, b, c) pro libovolnou dečnu MT daného bodu M splňují rovnici

$$\begin{vmatrix} a & x_u & x_v \\ b & y_u & y_v \\ c & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0,$$

takže lze klásti

$$\left.\begin{aligned} a &= \lambda x_u + \mu x_v \\ b &= \lambda y_u + \mu y_v \\ c &= \lambda z_u + \mu z_v \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

při čemž následkem vztahu $\Sigma a^2 = 1$ platí

$$E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2 = 1 \quad \dots \quad (1').$$

Vyhovují-li naopak veličiny λ, μ vztahu (1'), jsou ze jinak zcela libovolné, určují vzorce (1) cosiny směrné libovolné dečny MT bodu M. Nazýváme je povrchovými parametry řídicími příslušné dečny.

Tyto parametry mají určitý geometrický význam nezáleží vedy na poloze pravoúhlé soustavy souřadné.

Jest totiž $a = \frac{dx}{ds}$, $b = \frac{dy}{ds}$, $c = \frac{dz}{ds}$, tedy též

$$a = x_u \frac{du}{ds} + x_v \frac{dv}{ds}$$

— — —

odkud odečtením rovnic (1) plyne

$$x_u\left(\frac{du}{ds} - \lambda\right) + x_v\left(\frac{dv}{ds} - \mu\right) = 0$$
$$y_u\left(\frac{du}{ds} - \lambda\right) + y_v\left(\frac{dv}{ds} - \mu\right) = 0$$
$$z_u\left(\frac{du}{ds} - \lambda\right) + z_v\left(\frac{dv}{ds} - \mu\right) = 0 .$$

Mají-li tyto tři rovnice býti současně platny, musí

$$\lambda = \frac{du}{ds}, \quad \mu = \frac{dv}{ds} \quad \dots (2)$$

neboť determinanty soustavy vždy dvou z nich nemohou jak jsme seznali býti současně rovny nule. Tím jest důkaz proveden.

Různé applikace použití veličin λ, μ jsou na snadě.

41. Řídící parametry křivek parametrických. – Pro křivku $v =$ konst jest

$$\lambda_1 = \frac{du}{ds_1} = \frac{du}{+\sqrt{E}\,du} = \frac{1}{+\sqrt{E}}, \quad \mu_1 = 0 .$$

Obdobně pro křivku $u =$ konst

$$\lambda_2 = 0, \quad \mu_2 = \frac{1}{+\sqrt{G}} .$$

Odtud plynou pak pro cosiny směrné tečen těchto křivek – označme je a', b', c'; a'', b'', c'' – známé výrazy

$$\left.\begin{aligned} a' &= \frac{x_u}{+\sqrt{E}}, & b' &= \frac{y_u}{+\sqrt{E}}, & c' &= \frac{z_u}{+\sqrt{E}} \\ a'' &= \frac{x_v}{+\sqrt{G}}, & b'' &= \frac{y_v}{+\sqrt{G}}, & c'' &= \frac{z_v}{+\sqrt{G}} \end{aligned}\right\} (3)$$

42. Cosiny směrné pro normálu. – Poznali jsme, že determinant

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \Delta > 0$$

Poněvadž pak Δ béřeme kladně, jest tím kladný smysl normály určen. Dosazením z (3) plyne

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \cdot +\sqrt{Eg} > 0$$

takže též

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} > 0 .$$

$\mathfrak{D}$ jest však rohový sinus trojhranu určeného tečnou křivky v = konst a křivky u = konst a normálou. Tím dlechá se nám tedy velmi rychle k výsledku, že tento trojhran má touž orientaci jako trojhran souřadnicový.

Pro sférické zobrazení jest obdobně *

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{X} & \mathfrak{Y} & \mathfrak{Z} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \delta > 0 .$$

Avšak následkem (3) str. 84 jest

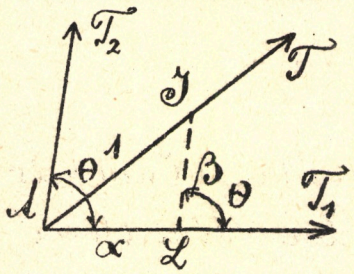
$$\delta = \varepsilon \cdot \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} =^{**} \varepsilon \cdot K \Delta ,$$

takže skutečně normála $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ plochy kulové, sta-

* viz str. 85, ** viz kapitola I.

novená podmínkou $\delta = 0$ čili určující s tečnami křivek $v = \text{konst}$, $u = \text{konst}$ na ploše kulové trojhran téže orientace jako trojhran souřadnicový, má s kladnou (ven jdoucí) normálou plochy kulové stejný smysl buď nebo protivný dle toho, je-li $K \gtrless 0$, t. j. je-li bod na ploše bodem elliptickým nebo bodem hyperbolickým.

43. Geometrické znázornění povrchových parametrů řídících. – Na tečnu AT naneseme od dotyčného bodu A úsečku $AJ = 1$ a najděme její složky α β do tečen AT_1, AT_2 obou křivek parametrických $v = \text{konst}$, $u = \text{konst}$, čili t. zv. obyčejné parametry řídící.



Je-li ds oblouk na křivce tečny AT a ds_1, ds_2 jeho složky do tečen AT_1, AT_2, pak jest

$$\frac{ds}{1} = \frac{ds_1}{\alpha} = \frac{ds_2}{\beta}$$

a z trojúhel. ALJ plyne, následkem věty cosinové – se zřetelem k tomu, že $\cos\theta = \frac{F}{+\sqrt{EG}}$ –, že jest právě

$$ds_1 = +\sqrt{E}\,du, \quad ds_2 = +\sqrt{G}\,dv, \quad \text{tudíž}$$

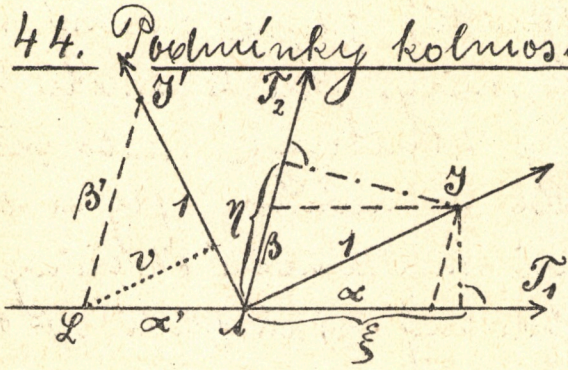
$$\frac{ds}{1} = \frac{+\sqrt{E}\,du}{\alpha} = \frac{+\sqrt{G}\,dv}{\beta}, \quad \text{a následkem toho}$$

$$\frac{du}{ds} = \lambda = \frac{\alpha}{+\sqrt{E}}, \quad \frac{dv}{ds} = \mu = \frac{\beta}{+\sqrt{G}} \quad \ldots (4)$$

Tím nabýváme jednoduché geometrické interpretace řídících parametrů λ, μ na základě α, β.

44. Podmínky kolmosti dvou tečen. – Jsou-li $\mathfrak{T}$ resp. $\mathfrak{T}'$ dvě navzájem kolmé tečny, jimž příslušejí parametry

α, β; λ, μ resp
α', β'; λ', μ',



pak pro α, β; α', β' plyne z příslušných dvojúhelníků

$$\left.\begin{aligned} \frac{-\alpha'}{1} &= \frac{v}{\xi} \\ \frac{\beta'}{1} &= \frac{v}{\eta} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\alpha'}{\beta'} = -\frac{\eta}{\xi} \quad \text{kde}$$

$$\xi = \alpha + \beta\cos\theta, \quad \eta = \beta + \alpha\cos\theta$$

tudíž

$$(\alpha + \beta\cos\theta)\,\alpha' + (\beta + \alpha\cos\theta)\,\beta' = 0 \quad \dots (5_0)$$

Dosadíme sem ze (4) a za $\cos\theta$.

čímž pro λ, μ; λ', μ' obou kolmých tečen obdržíme

$$E\lambda\lambda' + F(\lambda'\mu + \mu'\lambda) + G\mu\mu' = 0 \quad \dots (5).$$

Levá strana jest však polárním tvarem formy

$$-\varphi = E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2 -$$

takže při tomto označení možno rovnici (5) krátce psáti

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\lambda' + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\mu' = 0 \quad \dots (5').$$

Pozn. Izotropické tečny v bodě plochy jsou vyčteny podmínkou $ds = 0$ čili $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0$, čili pro parametry jejich λ, μ platí vztah

§ III 13.

$$E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2 = 0$$ nebo kráceně

$$\Phi = 0,$$

jehož porovnáním se vztahem (5') plyne známý výsledek, že každé dva kolmé směry jsou ke směrům isotropickým harmonicky sdruženy – anebo předpokládáme-li tuto vlastnost za známou, plyne tím vztah povrchových parametrů harmonické čtveřiny speciálního druhu. Že zcela obdobný vztah platí i v obecném případě, seznáme ihned.

45. Podmínka pro čtveřiny harmonických řečen.

Budtež (λ, μ), (λ', μ') povrchové parametry řečen ΔT, $\Delta T'$ a předpokládejme, že tyto parametry druhých dvou řečen $\Delta T''$, $\Delta T'''$ dány jsou rovnicí

$$f(\lambda, \mu) = A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 = 0 \quad \cdots (I)$$

ke které ovšem přistupuje známá podmínka

$$E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2 = 1.$$

Parametry λ, μ; λ', μ' jsou k obyčejným parametrům α, β; α', β' vázány vztahy

$$\lambda = \frac{\alpha}{+\sqrt{E}}, \quad \mu = \frac{\beta}{+\sqrt{G}} \quad ; \quad \lambda' = \frac{\alpha'}{+\sqrt{E}}, \quad \mu' = \frac{\beta'}{+\sqrt{G}},$$

na základě nichž plyne obdobně pro druhé dva směry podmínka $g(\alpha, \beta) = 0 \ldots (I_0)$, jako důsledek rovnice (I), takže $g(\alpha, \beta) = f(\lambda, \mu)$, z které-žto identity plyne bezprostředně vztah

$$\alpha' \frac{\partial g}{\partial \alpha} + \beta' \frac{\partial g}{\partial \beta} = \lambda' \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \mu' \frac{\partial f}{\partial \mu}.$$

Ze základů analyt. geometrie jest však známo, že

podmínka pro to, aby tečny AT, AT' byly harm. sdruženy vzhledem k AT'', AT''' určeným rovnicí (I₀) jest dána ve tvaru

$$\alpha' \frac{\partial g}{\partial \alpha} + \beta' \frac{\partial g}{\partial \beta} = 0$$

kde levá strana jest polární formou formy $g(\alpha, \beta)$.

Tudíž podmínka hledaná jest

$$\lambda' \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \mu' \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0 \quad \cdots (6') \quad \text{čili}$$

$$(A\lambda + B\mu)\lambda' + (B\lambda + C\mu)\mu' = 0 \quad \text{čili}$$

$$A\lambda\lambda' + B(\mu\lambda' + \mu'\lambda) + C\mu\mu' = 0 \quad \cdots (6),$$

což celá řada analogicky jako v rovině —, t. j. jako pro α, β.

46. Cosinus a sinus úhlu dvou tečen AT, AT'. —

Ponechejme předchozí označení a označme φ úhel těchto tečen.

— Zopakujme si pro úplnost vyjádření základních funkcí pomocí známých pravidel o násobení dvou vektorů.

Budiž AT, AT' dva jednotkové vektory a α, β; α', β' jejich složky do dvou sdružených AT_1, AT_2, čili jejich obyčejné parametry. Pak jest úhel. součin

$$\overline{AT} \cdot \overline{AT'} = (\alpha + \beta)(\alpha' + \beta')$$

$$= \alpha\alpha' + \alpha'\beta + \alpha\beta' + \beta\beta' \quad \text{čili}$$

$$\cos\varphi = \alpha\alpha' + \alpha'\beta\cos\theta + \alpha\beta'\cos\theta + \beta\beta',$$

$$\rightarrow \cos\varphi = \alpha\alpha' + \beta\beta' + (\alpha'\beta + \alpha\beta')\cos\theta \leftarrow$$

(odkud plyne ovšem též výsledek v odst. 44 vyvozený), a z cosinu obdržíme sinus

$$\rightarrow \sin\varphi = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\sin\theta \leftarrow . \quad —$$

Odtud známým dosazením obdržíme

$$(7)\ldots\begin{cases}\cos\varphi = (\mathcal{E}\lambda + \mathcal{F}\mu)\lambda' + (\mathcal{F}\lambda + \mathcal{G}\mu)\mu' \\ \sin\varphi = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)\Delta\end{cases}$$

Applikujme oba tyto vzorce pro případ tečen kolmých:

$$(\mathcal{E}\lambda + \mathcal{F}\mu)\lambda' + (\mathcal{F}\lambda + \mathcal{G}\mu)\mu' = 0$$

$$-\mu\lambda' + \lambda\mu' = \frac{1}{\Delta}$$

a vyjadřme odtud λ', μ', kterýchžto výrazů v dalším použijeme:

$$\lambda' = -\frac{\mathcal{F}\lambda + \mathcal{G}\mu}{\Delta}, \quad \mu' = \frac{\mathcal{E}\lambda + \mathcal{F}\mu}{\Delta} \quad \ldots (8).$$

<u>47. Směrový koefficient povrchový.</u> – Analogicky ke geometrii rovinné nazýváme poměr

$$m = \frac{\mu}{\lambda} \quad \ldots (9)$$

směrovým koefficientem povrchovým tečny AT.

Vzhledem ku definicím $\lambda = \frac{du}{ds}$, $\mu = \frac{dv}{ds}$ pro λ, μ plyne

$$m = \frac{dv}{du} = k \quad \ldots (10)$$

kde k jsme již pro vyjadřování směru postupu na ploše užívali.

Jinak dostáváme pro m též výraz

$$m = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{G}}} \quad \ldots (11)$$

kde $\delta = \frac{\beta}{\alpha}$ jest dělicí poměr (AT_1, AT_2, AT) tečny AT k tečnám AT_1, AT_2 (rovnaje se poměru kolmic z bodu tečny AT na AT_1, AT_2 spuštěných). Tím

seznáváme geometrický význam koefficientu m.

48. Kongruence tečen plochy. – Každému bodu A plochy přidružme určitou tečnu předpokládajíce příslušný zákon vyjádřen rovnicí

$$m = \varphi(u, v) \quad \dots \quad (1)$$

Soubrnu ∞^2 bodů plochy odpovídá takto souhrn ∞^2 tečen čili kongruence tečen plochy.

Každé tečnové kongruenci takto definované odpovídá určitá soustava takových křivek, že všechny tečny každé z nich náležejí naší kongruenci. Řešlo rovnici (1) možno psáti ve tvaru

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u, v) \quad \dots \quad (2),$$

skládá se hledaná soustava z křivek integrálních

$$\varphi(u, v) = \text{konst}$$

differenciální rovnice (2).

S geometrického hlediska značí integrace naší rovnice řešení úlohy, stanoviti rozvinutelné plochy obsažené v naší kongruenci tečen.

49. Sítě křivek ortogonálních. – Uvažujme kongruenci danou rovnicí (1) a přiřaďme každé tečně AT této kongruence kolmou tečnu AT'.

Vzhledem ke vzorcům (8) str. 100 definována jest kongruence tečen AT' rovnicí

$$m' = -\frac{E + Fm}{F + Gm}.$$

Jsou-li soustavy křivek těmito kongruencími při-

slušících definovány rovnicemi

$$dv - \varphi(u,v)\,dv = 0 \quad \dots (2)$$

$$[\mathcal{E} + \mathcal{F}\varphi(u,v)]\,du + [\mathcal{F} + \mathcal{G}\varphi(u,v)]\,dv = 0 \quad \dots (3)$$

Tyto dvě soustavy křivek mají tu vlastnost, že každá křivka soustavy jedné protíná orthogonálně všechny křivky soustavy druhé. Máme tím tedy vytčenou síť orthogonálních křivek na ploše. –

Jednu ze soustav sítě možno libovolně zvoliti a druhá jest tím úplně určena. Budiž na př.

$$\Phi(u,v) = \text{konst}$$

rovnice prvé soustavy. Druhá jest pak dána rovnicí (3), kde za φ dosadíme z rovnice $\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\varphi = 0$, tedy rovnicí

$$[\mathcal{E}\Phi_v - \mathcal{F}\Phi_u]\,du + [\mathcal{F}\Phi_v - \mathcal{G}\Phi_u]\,dv = 0 \quad - (3').$$

Uveďme speciálně obě sítě orthogonálních křivek, kde vždy jednou soustavou jsou křivky parametrické. Jsou dány rovnicemi

$$u = \text{konst}, \quad \mathcal{E}\,du + \mathcal{F}\,dv = 0$$

a síť druhá rovnicemi

$$v = \text{konst}, \quad \mathcal{F}\,du + \mathcal{G}\,dv = 0.$$

<u>50. Dodatek</u>. – Mějme dánu kvadratickou rovnici (1) … $A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 = 0$, čímž vytčeny jsou jak z předchozího plyne dvě soustavy křivek na ploše. A budiž naší úlohou najíti místo bodů, v nichž se křivky obou soustav orthogonálně protínají.

Ježto levou stranu lze rozložiti na součin

$$[\mathcal{A}\lambda + (\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C}})\mu][\mathcal{A}\lambda + (\mathcal{B} - \sqrt{\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C}})\mu] = 0,$$

máme pro prvou resp. druhou soustavu koeficienty

$$m = -\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C}}}, \quad m' = -\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B} - \sqrt{\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C}}}$$

Soustavy ty jsou reálné různé, splývající neb imaginárné dle toho, je-li $\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C} \gtreqless 0$.

a) Předpokládejme že $\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C} \neq 0$.

Podmínka orthogonality křivek obou soustav jest vyjádřena rovnicí

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B} - \sqrt{\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C}}} = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{F}\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C}}}}{\mathcal{F} - \mathcal{G}\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C}}}}$$

kteréž provedením obdrží

$$\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{E} - 2\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{F} + \mathcal{A}^2\mathcal{G} = 0,$$

čili – vylučujeme-li případ $\mathcal{A} = 0$, kdy by jedenou z obou soustav byly křivky parametrické v-kount – rovnice ta jest

$$\mathcal{C}\mathcal{E} - 2\mathcal{B}\mathcal{F} + \mathcal{A}\mathcal{G} = 0 \quad \dots (2)$$

Tím máme relaci mezi veličinami $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ bodů v nichž vrch. průsek mastává, čili, ježto veličiny ty jsou funkcemi obou parametrů, máme tím relaci mezi těmito, čímž vyloučena jest na ploše křivka, jež jest tedy hledaným místem geometrickým.

Postup lze lze také obrátit, neboť známe-li rovnici (2), snadno napíšeme rovnici (1). Vyloučeno-li tedy naše geom. místo(?), nutno naopak vyhledati při-

sluŠné dvě soustavy křivek dané rovnicí tvaru (1).

b). Budiž specielně $\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C} = 0$.

Rovnice (2) násobená $\mathcal{C}$ nabývá tvaru

$$\mathcal{C}^2\mathcal{E} - 2\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{F} + \mathcal{B}^2\mathcal{G} = 0$$ odkud

$$\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{B}} = \frac{\mathcal{F} \pm i\cdot\Delta}{\mathcal{E}}$$ čili, položíme-li $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{B}} = K$

$$(\mathcal{E}K - \mathcal{F})^2 = \mathcal{F}^2 - \mathcal{E}\mathcal{G} \quad \dots (3).$$

Násobíme-li rovnici (2) $\mathcal{B}$, obdržíme

$$\mathcal{C}\mathcal{B}\mathcal{E} - 2\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{F} + \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{G} = 0 \quad \dots (4).$$

Rovnice (3) nebo (4) znamená další křivku na ploše která protíná křivku (2) obecně v určitém počtu bodů. V bodech těch jest křivka dané soustavy sama k sobě kolmá, má tudíž minimální tečnu.

III. Rovinové vyjádření plochy.

Obecná plocha má nejen ∞^2 bodů ale též ∞^2 rovin tečných. Jako jsme pak mohli vyjádřili plochu jako místo bodů jejich rovnicemi udávajícími souřadnice bodů těch, tak možno též obecně plochu definovati jako obálku ∞^2 rovin, jejichž souřadnice budou opět dány jako funkce dvou parametrů. Tím nabudeme rovinového vyjádření plochy. Odvodíme si souvislost tohoto s vyjádřením bodovým.

Rovnice roviny tečné v bodě (x, y, z) plochy o rov-

máte (X, Y, Z) jest

$$X(\xi - x) + Y(\eta - y) + Z(\zeta - z) = 0 \quad \dots (1)$$

Při tom jest

$$P = Xx + Yy + Zz \quad \dots (1')$$

vzdálenost počátku soustavy souřadné od naší roviny.

Uvedeme-li rovnici (1) na tvar normální,

$$-\frac{X}{P}\xi - \frac{Y}{P}\eta - \frac{Z}{P}\zeta + 1 = 0,$$

seznáváme, že

$$U = -\frac{X}{P}, \quad V = -\frac{Y}{P}, \quad W = -\frac{Z}{P} \quad \dots (1''),$$

při čemž $\frac{1}{P^2} = U^2 + V^2 + W^2$ čili $P^2 = \frac{1}{U^2 + V^2 + W^2}$,

jsou souřadnice naší roviny v obvyklém slova smyslu.

Rovnice

$$U = \Phi(u, v), \quad V = \Psi(u, v), \quad W = \chi(u, v) \quad \dots (2)$$

znamenají nám pak uvažované rovinové vyjádření plochy v obecném tvaru.

Hledejme přechod od tohoto vyjádření k vyjádření bodovému. Pro cosiny směrné pro normálu platí

$$(3) \quad X = -\frac{\Phi(u,v)}{\sqrt{\Phi^2 + \Psi^2 + \chi^2}}, \quad Y = -\frac{\Psi(u,v)}{\sqrt{\quad}}, \quad Z = -\frac{\chi(u,v)}{\sqrt{\quad}},$$

a pro vzdálenost P:

$$P^2 = \frac{1}{\Phi^2 + \Psi^2 + \chi^2} \quad \dots (4)$$

Mezi veličinami X, Y, Z, P a souřadnicemi (x, y, z)

bodu dotyčného plochy pak relace

$$\left.\begin{aligned} X x + Y y + Z z - P &= 0 \\ X_u x + Y_u y + Z_u z - P_u &= 0 \\ X_v x + Y_v y + Z_v z - P_v &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

z ní plynou

a další

v důsledku toho, že $S X x_u = 0$, $S X x_v = 0$.

Mají-li rovnice (2) skutečně vyjadřovati plochu, musí nyní býti možno z rovnic (5) vypočísti souřadnice x, y, z, čímž nalezneme bodového vyjádření plochy obalené.

Jest jak známo

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} = \frac{\nabla^2}{\Delta} = \mathcal{K}\Delta, \text{ kdy}$$

$$(6)\ldots \mathcal{K}\Delta \cdot X = \begin{vmatrix} P & P_u & P_v \\ Y & Y_u & Y_v \\ Z & Z_u & Z_v \end{vmatrix} = \overbrace{P(Y_u Z_v - Z_u Y_v) + P_u(Y_v Z - Z_v Y) + P_v(Y Z_u - Z Y_u)}^{K\Delta \cdot X}$$

Jest však ovšem nutno determinand soustavy* z pravých funkcí vypočísti dříve než z rovnic (3), (4) vypočteme též derivace $X_1 \ldots P$.

Hledejme dále základní veličiny bodového vyjádření naší plochy jako obálky rovin obecné. Připomeňme si známé vzorce pro x_{uu}, x_{uv}, x_{vv}; myslenou si naši plochu zobrazením sférický a applikujme pak vzorce ty pro plochu kulovou.

* výraz na pravé straně.

Jsou-li $e, f, g, \lambda, \mu, \varkappa$ prak. základ. veličiny pro plochu kulovou a ξ, η, ζ cosiny směrné pro den smysl normály, který odpovídá předpokladu $\delta = \sqrt{eg - f^2} > 0$, pak jest jak známo

$$\lambda = -\varepsilon e, \dots ; \quad \mathfrak{E} = \varepsilon X, \dots .$$

Vzhledem k tomu dostáváme

$$(7)\begin{cases} X_{uu} = -eX + \frac{1}{2\delta^2}(e_u g + e_v f - 2f_u f)X_u \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2\delta^2}(-e_u f - e_v e + 2f_u e)X_v \\ X_{uv} = -fX + \frac{1}{2\delta^2}(e_v g - g_u f)X_u + \frac{1}{2\delta^2}(-e_v f + g_u e)X_v \\ X_{vv} = -gX + \frac{1}{2\delta^2}(-g_v f - g_u g + 2f_v g)X_u + \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2\delta^2}(g_v e + g_u f - 2f_v f)X_v \end{cases}$$

Z rovnic (5) však plyne

$$\left.\begin{aligned} X_{uu}x + Y_{uu}y + Z_{uu}z &= \mathfrak{P}_{uu} + \mathfrak{L} \\ X_{uv}x + Y_{uv}y + Z_{uv}z &= \mathfrak{P}_{uv} + \mathfrak{M} \\ X_{vv}x + Y_{vv}y + Z_{vv}z &= \mathfrak{P}_{vv} + \mathfrak{N} \end{aligned}\right\} (8)$$

kam z rovnic (7) vyjádříme:

$$X_{uu}x + Y_{uu}y + Z_{uu}z = -e\underbrace{SX\,x}_{\mathfrak{P}} + \frac{1}{2\delta^2}(e_u g + e_v f - 2f_u f)\underbrace{SX_u\,x}_{\mathfrak{P}_u} + \\ + \frac{1}{2\delta^2}(-e_u f - e_v e + 2f_u e)\underbrace{SX_v\,x}_{\mathfrak{P}_v}$$

takže

$$(9)\begin{cases} \mathfrak{L} = -\mathfrak{P}_{uu} - e\mathfrak{P} + \frac{1}{2\delta^2}(e_u g + e_v f - 2f_u f)\mathfrak{P}_u + \frac{1}{2\delta^2}(-e_u f - e_v e + 2f_u e)\mathfrak{P}_v \\ \text{a obdobně} \\ \mathfrak{M} = -\mathfrak{P}_{uv} - f\mathfrak{P} + \frac{1}{2\delta^2}(e_v g - g_u f)\mathfrak{P}_u + \frac{1}{2\delta^2}(-e_v f + g_u e)\mathfrak{P}_v \\ \mathfrak{N} = -\mathfrak{P}_{vv} - g\mathfrak{P} + \frac{1}{2\delta^2}(-g_v f - g_u g + 2f_v g)\mathfrak{P}_u + \frac{1}{2\delta^2}(g_v e + g_u f - 2f_v f)\mathfrak{P}_v . \end{cases}$$

Tím máme vyjádřeny veličiny L, M, N vyjádření bodového zobrazujícími funkcemi parametrů u, v. Půjde ještě o veličiny 1. řádu E, F, G. Tyto vyplynou nám ze známých dříve vztahů mezi e, f, g; E, F, G; L, M, N:

$$\Delta^2 e = E M^2 - 2 F L M + G L^2$$
$$\Delta^2 f = E M N - F(L N + M^2) + G L M$$
$$\Delta^2 g = E N^2 - 2 F M N + G M^2.$$

Sestrojíme-li si však výrazy obdobně pravé straně těchto rovnic píšíce pouze místo E, F, G veličiny e, f, g:
$e M^2 - 2 f L M + g L^2$, $e M N - f(L N + M^2) + g L M$,
$e N^2 - 2 f M N + g M^2$,
seznáme po provedení, že

$$(10)\quad \begin{cases} \delta^2 E = e M^2 - 2 f L M + g L^2 \\ \delta^2 F = e M N - f(L N + M^2) + g L M \\ \delta^2 G = e N^2 - 2 f M N + g M^2. \end{cases}$$

Tím jest přechod od parametrického vyjádření rovinného k bodovému úplně dán. Z funkcí Φ, Ψ, X parametrů u, v vyjádříme takto souřadnice bodů plochy i základní veličiny bodového vyjádření na základě těchže parametrů u, v a výrazů získaných pak použijeme obvyklým způsobem ke studiu plochy.

Kapitola IV.

I. Křivky minimální na ploše.

51. Křivka minimální a její plocha tečnová. – Věnujme nejprve krátce pozornost tečnové ploše křivky minimální, kteroužto plochu ze svých úvah stále vylučujeme.

Jak známo jsou minimální přímky bodem (x_0, y_0, z_0) procházející, které tvoří kužel obsahující absolutní kružnici v nekonečnu čili které tvoří nulovou plochu kulovou kolem našeho bodu, vyjádřeny parametricky rovnicemi

$$(1)\ldots x = x_0 + \frac{w}{2}(1-u^2),\quad y = y_0 + \frac{iw}{2}(1+u^2),\quad z = z_0 + wu;$$

parametry u, w.

– Důkaz snadno provedeme na př. použitím okolnosti, že plocha kulová obsahuje dvě soustavy přímek minimálních. Rovnici plochy kulové

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$ píšme (viz II. díl, Přirozené rovnice křivky ve tvaru

$$(x+iy)(x-iy) = (1+z)(1-z)$$ a položme

$$\frac{x+iy}{1-z} = \frac{1+z}{x-iy} = u,$$ načež při proměnném u

dostáváme jako průsečnici rovin

$$x+iy = u(1-z)\,,\quad x-iy = \frac{1+z}{u}$$ pro každé u

přímku minimální jedné soustavy.

Sestrojme k ní rovnoběžku počátkem o rovnicích

$$x+iy = -uz,\quad x-iy = \frac{z}{u}.$$

Rovnoběžky tyto vyplní isotropický kužel počátku soustavy. A skutečně znásobením posledních dvou rovnic plyne $x^2+y^2+z^2=0$

Z rovnic těch obdržíme

$$x = \frac{z}{2}\left(\frac{1}{u}-u\right),\quad y = \frac{-z}{2i}\left(\frac{1}{u}+u\right)$$

takže pro parametrické vyjádření našich přímek platí úměra

$$(\gamma)\quad x:y:z = \frac{1-u^2}{2u} : \frac{i(1+u^2)}{2u} : 1 = \frac{1-u^2}{2} : \frac{i(1+u^2)}{2} : u.$$

a násobíme-li všecky členy parametrem w, máme

$$(\gamma')\ldots\quad x = \frac{w}{2}(1-u^2),\quad y = \frac{iw}{2}(1+u^2),\quad z = wu.$$

Tím jest správnost uvedených rovnic dokázána. Stačí z počátku přejíti k bodu (x_0, y_0, z_0). —

Odtud snadno odvodíme obecné rovnice křivky minimální, t. j. křivky, jejíž všecky tečny jsou přímkami minimálními.

Učiníme-li totiž u parametrem pro tuto křivku, pak

$$\frac{dx}{du} : \frac{dy}{du} : \frac{dz}{du} = (x-x_0) : (y-y_0) : (z-z_0)$$

Zde svsem přestává býti w parametrem na u nezávislým, ježto z každé přímky tečné náleží naší křivce pouze bod dotyčný; w jest tedy zde jistou funkcí $F(u)$ parametru u.

I máme zde

$$\frac{dx}{du} = \frac{F(u)}{2}(1-u^2),\quad \frac{dy}{du} = \frac{i\,F(u)}{2}(1+u^2),\quad \frac{dz}{du} = F(u).u$$

a položíme-li $F(u) = f'''(u)$, dostáváme integrací po částech:

$$(2)\quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1-u^2)f''(u) + u f'(u) - f(u) \\ y = \frac{i}{2}(1+u^2)f''(u) - iu f'(u) + i f(u) \\ z = u f''(u) - f'(u) \end{cases}$$

parametrické vyjádření obecné křivky minimální.

Snadno seznáme*, že pro tečnovou plochu křivky minimální jsou všecky roviny tečné rovinami izotropickými (jež totiž dotýkají se absolutní kružnice). Pro křivku minimální jest totiž v každém bodě

$$S\,dx^2 = 0,$$ odkud plyne derivací
$$S\,dx\,d^2x = 0.$$

Dle známých pravidel o maticích jest nyní

$$\left\| \begin{matrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{matrix} \right\|^2 = S \left| \begin{matrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{matrix} \right|^2 = \left| \begin{matrix} S\,dx^2 & S\,dx\,d^2x \\ S\,dx\,d^2x & S(d^2x)^2 \end{matrix} \right|$$
$$= S\,dx^2 \cdot S(d^2x)^2 - (S\,dx\,d^2x)^2,$$

takže zcela jest

$$\left| \begin{matrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{matrix} \right|^2 + \dots = 0 \quad \dots (v)$$

Avšak pro kosiny směrné (X, Y, Z) binormály naší křivky čili normály tečnové její plochy jest

$$X : Y : Z = \left| \begin{matrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{matrix} \right| : \dots \quad \text{čili}$$

$$X = \lambda \left| \begin{matrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{matrix} \right|, \dots$$

* geometricky jest to zřejmo (viz str. 88)

Jakože ze vzťahu (v) plyne

$$\frac{X^2+Y^2+Z^2}{\lambda^2}=0 \qquad \text{tedy též}$$

$$X^2+Y^2+Z^2=0 .$$

Že pro tuto plochu jest $\Delta=0$, dokázali jsme již na str. 88 vycházejíce z výrazu pro Δ

$$\begin{vmatrix} X & x_u & x_v \\ Y & y_u & y_v \\ Z & z_u & z_v \end{vmatrix} = \Delta, \text{ odkud } \Delta^2 = \begin{vmatrix} SX^2 & SXx_u & SXx_v \\ SXx_u & Sx_u^2 & Sx_ux_v \\ SXx_v & Sx_ux_v & Sx_v^2 \end{vmatrix}$$

tedy zvole

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sx_u^2 & Sx_ux_v \\ 0 & Sx_ux_v & Sx_v^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Také naopak snadno plyne, že jedinými plochami, pro něž $\Delta=0$, jsou řečené plochy křivek minimálních.

Platí na př. rovnice

$$\frac{X}{y_uz_v-z_uy_v}=\frac{Y}{z_ux_v-x_uz_v}=\frac{Z}{x_uy_v-y_ux_v}=\frac{\sqrt{SX^2}}{\sqrt{S(x_uy_v-y_ux_v)^2}}=\frac{\sqrt{SX^2}}{\Delta}$$

V našem případě jest $\Delta=0$ a poněvadž jmenovatelé všech tří prvých zlomků nemohou býti rovny nule a jakési X, Y, Z nemohou býti nekonečně veliké, musí

$$X^2+Y^2+Z^2=0$$

t. j. všecky roviny řečné ku našim plochám jsou rovinami isotropickými, jejichž směrů jest celkem ∞^1.

Plochy ty jsou tedy skutečně řečnými plochami kři-

vek minimálních, při čemž ovšem čítáme i isotropické kužele za zvláštní případ ploch těch.

Pozn. Podmínka $\Delta = 0$ značí vlastně vztah mezi oběma parametry u, v, takže rovnice $x = \varphi(u, v), \ldots$ značí zde křivku nikoli plochu, v souhlase s tou okolností, že při ploše rozvinutelné obálkou rovin tečných jest hrana vratu. Křivka ta má jak z právě vyvozeného plyne binormálami přímky minimální, jest tedy křivkou minimální.

52. Přímé vyvození rovnice křivky minimální.–

Uvažujme jednoduchou nekonečně mnohých rovin isotropických. Obecná rovnice roviny jest

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Má-li býti rovinou isotropickou, musí

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0 \quad \text{čili}$$

$$(A + iB)(A - iB) = -C^2.$$

Klovoříme $A + iB = \lambda C$ tedy

$A - iB = \frac{1}{\lambda} C$ odtud

$$A = -\frac{1-\lambda^2}{2\lambda} C, \quad B = -i\frac{1+\lambda^2}{2\lambda} C;$$ jest pak

$$\frac{A}{1-\lambda^2} = \frac{B}{i(1+\lambda^2)} = \frac{C}{2\lambda} = \frac{1}{v}$$

a klovdame-li $\frac{D}{v} = 2w$, máme rovnici naší roviny ve tvaru

$$(1-\lambda^2)x + i(1+\lambda^2)y - 2\lambda z + 2w = 0 \ldots (1).$$

Bereme-li λ za parametr a je-li w funkcí λ, máme

již rovnicí (1) dána soustava ∞^1 rovin isotropických. Derivujme rovnici (1) dvakrát dle λ:

$$-\lambda x + i\lambda y - z + w' = 0 \quad \dots (2),$$

$$-x + iy + w'' = 0 \quad \dots (3)$$

takže rovnicemi (1), (2), (3) stanovena jest hrana vrcholu vytvořené plochy rozvinutelné, o níž víme, že jest křivkou minimální. Pro parametrické vyjádření křivky tě máme

$$(4) \dots x - iy = w'', \quad z = w' - \lambda(x - iy)$$

takže $z = w' - \lambda w'' \dots (5)$

Z rovnice (1), kterou píšeme ve tvaru

$$x + iy - \lambda^2(x - iy) - 2\lambda x + 2w = 0$$

plyne dosazením ze (4), (5)

$$x + iy = -\lambda^2 w'' + 2\lambda w' - 2w \quad \dots (6)$$

a ze (4), (6) vyplývá

$$(7) \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 - \lambda^2) w'' + \lambda w' - 2w \\ y = \frac{i}{2}(1 + \lambda^2) w'' - i\lambda w' + iw \\ z = w' - \lambda w'', \end{cases}$$

rovnice totožné* s rovnicemi (2) str. 111.

Pozn. Že naše hrana vrcholu jest skutečně křivkou minimální, snadno též početně plyne.

Obdržíme totiž pro křivku tu

$$d(x + iy) \cdot d(x - iy) = -\lambda^2 w'''^2 = dx^2 + dy^2$$

a

$$\lambda^2 w'''^2 = dz^2$$

takže skutečně $dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$.

*až na znaménko při z, takže jde o křivku souměrnou k osé dle (xy).

53. Křivky minimální na obecné ploše. – Obě

soustavy těchto křivek definovány jsou jak známo, rovnicí

$$\mathcal{E}\,du^2 + 2\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2 = 0 \quad \dots (1)$$

nebo, klademe-li $\frac{dv}{du} = k \left(= \frac{u}{\lambda} = m\right)$,

$$\mathcal{E} + 2\mathcal{F}k + \mathcal{G}k^2 = 0.$$

Řešíme-li tuto rovnici dle k, seznáváme, že rovnice

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}\,du + (\mathcal{F} + i\Delta)\,dv &= 0 \\ \mathcal{E}\,du + (\mathcal{F} - i\Delta)\,dv &= 0 \end{aligned}\right\} \dots (2)$$

jsou dif. rovnicemi prvé resp. druhé soustavy.

Seznáváme též, že obě tyto soustavy splývají jen tehdy, je-li $\Delta = 0$ čili jde-li o tečnovou plochu křivky minimální. Tento případ v dalším opět vylučujeme.

Budiž $\lambda(u,v)$ resp. $\mu(u,v)$ multiplikační faktory, které mění levé strany prvé resp. druhé rovnice v úplné differenciály. Položme pak

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= \lambda(u,v)\left[\mathcal{E}\,du + (\mathcal{F} + i\Delta)\,dv\right] \\ d\eta &= \mu(u,v)\left[\mathcal{E}\,du + (\mathcal{F} - i\Delta)\,dv\right] \end{aligned}\right\} \dots (3)$$

takže $\xi = \text{konst.}$, $\eta = \text{konst.}$ značí minimální křivky obou soustav.

Znásobením rovnic (3) plyne

$$d\xi\,d\eta = \lambda\cdot\mu\left[\mathcal{E}^2 du^2 + 2\mathcal{E}\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{F}^2 dv^2 + \mathcal{E}\mathcal{G}\,dv^2 - \mathcal{F}^2 dv^2\right]$$
$$= \lambda\cdot\mu\cdot\mathcal{E}\left[\mathcal{E}\,du^2 + 2\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2\right] = \lambda\cdot\mu\cdot\mathcal{E}\,ds^2,$$

odkud plyne

$$ds^2 = \frac{1}{\lambda\mu\mathcal{E}}\,d\xi\,d\eta.$$

Jelikož provedením integrace rovnic (3) vyslovujeme ξ, η jako funkce u, v a také naopak u, v jako funkce ξ, η, můžeme dále $\lambda u, \xi$ vyjádřiti jako funkce ξ, η takže výraz pro liniového elementu v případě, že křivkami parametrickými jsou křivky minimální, nyní tvar

$$ds^2 = \Theta(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \ldots (4).$$

Porovnáním s obecným výrazem pro liniový element vidíme že $E = G = \Theta$. Pro křivky parametrické $d\xi = 0$ jakož i $d\eta = 0$ jest skutečně $ds = 0$.

54. Vzorce pro případ minimálních křivek jako parametrických. – Pokud se týče základních veličin prvého řádu jest

$E = G = \Theta$, načež $\Delta^2 = -F^2$, $\Delta = iF$.

Rovnice Codazziho jsou zde

(1) … $L_v - M_u = -\frac{F_u}{F} M$,

(2) … $N_u - M_v = -\frac{F_v}{F} M$.

Pro rovnici Gaussovu jest

$$\frac{LN - M^2}{-F^2} = -\frac{1}{2F^2} 2F_{uv} + \frac{F}{4F^4} 4F_u F_v \quad \text{čili}$$

$$\frac{LN - M^2}{F} = \frac{F_{uv}}{F} - \frac{F_u F_v}{F^2} = \frac{F F_{uv} - F_u F_v}{F^2} = \frac{\partial \frac{F_u}{F}}{\partial v},$$

avšak $\frac{F_u}{F} = \frac{\partial \log F}{\partial u}$, takže

$$\frac{LN - M^2}{F} = \frac{\partial^2 \log F}{\partial u\, \partial v} \ldots (3).$$

Jsou tedy v tomto případě základní rovnice dány ve velmi jednoduchém tvaru.

Odvoďme též další veličiny.

Tak pro $\mathcal{H}$ a $\mathcal{K}$ platí

$$\mathcal{H} = \frac{-2\mathcal{F}\mathcal{M}}{-\mathcal{F}^2} = \frac{2\mathcal{M}}{\mathcal{F}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\mathcal{K} = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{-\mathcal{F}^2} = \frac{(\mathcal{M}+\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{N}})(\mathcal{M}-\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{N}})}{\mathcal{F}^2} = \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}$$

takže $\frac{1}{R_1} = \frac{\mathcal{M}+\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{N}}}{\mathcal{F}}$, $\frac{1}{R_2} = \frac{\mathcal{M}-\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{N}}}{\mathcal{F}}$

Pro směry křivek křivosti jest

$$\mathcal{Q} = \begin{vmatrix} k^2 & 0 & \mathcal{L} \\ -k & \mathcal{F} & \mathcal{M} \\ 1 & 0 & \mathcal{N} \end{vmatrix} = \mathcal{F}(k^2\mathcal{N} - \mathcal{L})$$

tedy $k = \pm\sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{N}}}$ čili: $\mathcal{L}du^2 - \mathcal{N}dv^2 = 0$.

Pro $X_u, \ldots$ jest

$$-\mathcal{F}^2 X_u = \mathcal{F}(\mathcal{M}x_u + \mathcal{N}x_v) \quad \text{tedy}$$

$$X_u = -\frac{1}{\mathcal{F}}(\mathcal{M}x_u + \mathcal{L}x_v) \quad \text{a obdobně}$$

$$X_v = -\frac{1}{\mathcal{F}}(\mathcal{N}x_u + \mathcal{M}x_v)$$

— — —

Odtud plyne

$$S X_u^2 = \frac{2\mathcal{L}\mathcal{M}}{\mathcal{F}}, \quad S X_u X_v = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} + \mathcal{M}^2}{\mathcal{F}}, \quad S X_v^2 = \frac{2\mathcal{M}\mathcal{N}}{\mathcal{F}}.$$

Pro druhé derivace souřadnic na př. plyne

$$x_{uu} = \mathcal{L}X + \frac{\mathcal{F}_u}{\mathcal{F}}x_u$$

$$x_{uv} = \mathcal{M}X$$

$$x_{vv} = \mathcal{N}X + \frac{\mathcal{F}_v}{\mathcal{F}}x_v.$$

II. Křivky isothermické na ploše.

55. Určení soustav těchto křivek. – Seznali jsme, že stanovení křivek minimálních na ploše vyžaduje integrace rovnice (2) str. 115, a že v případě těchto křivek jakožto parametrických jest lineární element dán výrazem $ds^2 = \Theta(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \ldots (1)$

K dalšímu zajímavému způsobu vyjádření parametrického dospějeme, zavedeme-li nové parametry u, v vztahy

$$\xi = u + iv, \quad \eta = u - iv \ldots (2)$$

Pak máme pro lineární element:

$$ds^2 = \Omega(u,v)\,(du^2 + dv^2) \ldots (3),$$

takže $F = \Omega$ – nové křivky parametrické jsou navzájem kolmé – a mimo to $E = G$.

Parametrické křivky tohoto druhu parametrického vyjádření plochy nazýváme isothermickými křivkami plochy – obdobně jako v rovině.

– Ke křivkám těmto dospěli jsme na základě křivek minimálních, které bylo nutno předpokládati navzájem různé, takže na plochách, pro které $\Delta = \Omega$, nelze o isothermických křivkách mluviti. –

Jak známo jest možno místo parametrů ξ, η zavésti libovolné nové parametry ξ_1, η_1, pouze za předpokladu že jest

$$\xi_1 = F(\xi), \quad \eta_1 = G(\eta) \ldots (4),$$

aniž by se tím změnily křivky parametrické.

Učiníme-li tak vzhledem k parametrům ξ, η, jimž odpovídají křivky minimální, zůstanou tedy tyto křivky křivkami parametrickými a liniový element bude i v nových parametrech ξ_1, η_1 vyjádřen ve tvaru (1) za parametry u_1, v_1 zavedené vztahy

$$\xi_1 = u_1 + i v_1, \quad \eta_1 = u_1 - i v_1 \dots (5)$$

budou opět parametry thermickými, t.j. křivky parametrické jim odpovídající budou opět křivkami isothermickými.

Z rovnic (4) plynou pak relace

$$\left.\begin{aligned} u_1 + i v_1 &= F(u+iv) \\ u_1 - i v_1 &= G(u-iv) \end{aligned}\right\} (6).$$

Známe-li tedy jednu dvojici u, v thermických parametrů na ploše*, pak stanovíme nejobecnější dvojici u_1, v_1 thermických parametrů tím, že položíme (u_1+iv_1) rovno libovolné funkci $(u+iv)$ a (u_1-iv_1) libovolné funkci $(u-iv)$.

Předpokládáme-li specielně reálnou plochu a jsou-li u, v reálné thermické parametry na ní, takže x, y, z jsou jejich reálnými funkcemi, pak má-li obecná dvojice u_1, v_1 thermických parametrů býti rovněž reálná, pak nutno voliti funkce F, G tak, aby u_1, v_1 byly reálnými funkcemi parametrů u, v.

Klademe tedy u_1 rovno reálné části a iv_1 ryze ima-

* Tuto jednu dvojici thermických parametrů čili jednu dvojici soustav křivek isothermických stanovíme uvedeným postupem použitím křivek minimálních -

ginární části libovolné funkce výrazu $(u+iv)$.

56. Vzorce pro případ parametrů thermických. – V tomto případě nastává značné zjednodušení. Jest

$$E = G, \quad F = 0, \quad \Delta = E.$$

$$L_v - M_u = \frac{1}{2}\frac{E_v}{E}(L+N) \qquad LN - M^2 = -\frac{1}{2}(E_{vv}+E_{uu}) +$$

$$N_u - M_v = \frac{1}{2}\frac{E_u}{E}(L+N) \qquad + \frac{1}{2E}(E_u^2 + E_v^2).$$

$$H = \frac{L+N}{E}$$

$$S X_u^2 = \frac{L^2+M^2}{E}, \quad S X_v^2 = \frac{M^2+N^2}{E}$$

$$S X_u X_v = \frac{L+N}{E} M \qquad \text{atd.}$$

57. Síť křivek parametrických. – Je-li plocha vyjádřena na parametry u, v, dáváme parametrům u postupně hodnoty lišící se navzájem vždy nekonečně málo, čehož nejjednodušeji docílíme tím, že přírůstek du položíme rovna jisté funkci u násobené stálou nekonečně malou veličinou ε tudy

$$du = \varphi(u) \cdot \varepsilon \quad \ldots (1)$$

Obdobně pro parametr v:

$$dv = \varphi(v) \cdot \varepsilon \quad \ldots (2)$$

Tím obdržíme na ploše nekonečně hustou síť křivek parametrických. Plocha jest tím rozdělena na nekonečně malé čtyřúhelníky, které můžeme pokládati za rovnoběžníky.

Křivky pro které rostou u a v současně o $\pm \varphi(u) \cdot \varepsilon$,

$\pm \psi(v) \cdot \varepsilon$, probíhají po úhlopříčnách řečených čtyřúhelníků; naše válce je diagonálními křivkami sítě uvažované a dána jest jimi diagonální síť sítě té.

Diferenciální rovnice těchto křivek diagonálních jsou tedy

$$\frac{du}{\psi(u)} \pm \frac{dv}{\psi(v)} = 0 \quad \cdots (3)$$

Zavedením nových parametrů

$$\left.\begin{aligned} U &= \int \frac{du}{\psi(u)} + \int \frac{dv}{\psi(v)} \\ V &= \int \frac{du}{\psi(u)} - \int \frac{dv}{\psi(v)} \end{aligned}\right\} (4)$$

stávají se tyto křivky diagonální křivkami parametrickými.

Jsou-li tyto křivky diagonální navzájem kolmé, pak nekonečně malé plošky při vodní síti vyšetřené jsou elementární kosočtverce, při vodní síti jest síť rhombickou.

Podmínka pro tuto síť rhombickou jest, aby v nových parametrech U, V bylo $\mathcal{F}$ rovno nule čili

$$S\, x_U x_V = 0 \quad \cdots (5)$$

Jest však

$$dx = x_u du + x_v dv = x_U dU + x_V dV$$

$$= x_U \left(\frac{du}{\psi(u)} + \frac{dv}{\psi(v)}\right) + x_V \left(\frac{du}{\psi(u)} - \frac{dv}{\psi(v)}\right)$$

$$x_u du + x_v dv = \frac{1}{\psi(u)} (x_U + x_V)\, du + \frac{1}{\psi(v)} (x_U - x_V)\, dv$$

což platí pro každé u a v takže

$$x_u = \frac{1}{\varphi(u)}(x_U + x_V)$$

$$x_v = \frac{1}{\psi(v)}(x_U - x_V) \qquad \text{odkud}$$

$$x_U = \frac{\varphi x_u + \psi x_v}{2}, \quad x_V = \frac{\varphi x_u - \psi x_v}{2}$$

načež $\quad x_U x_V = \dfrac{\varphi^2 x_u^2 - \psi^2 x_v^2}{4}$

a podmínka (5) jest dána ve tvaru

$$\varphi^2(u)\cdot \mathcal{E} - \psi^2(v)\cdot \mathcal{G} = 0 \qquad \text{čili}$$

$$\mathcal{E} : \mathcal{G} = \frac{1}{\varphi^2(u)} : \frac{1}{\psi^2(v)} \quad \dots \quad (5').$$

Aby tedy parametrické křivky daly se uspořádati v síť rhombickou, jest nutno a stačí, aby poměr základních veličin $\mathcal{E}$ a $\mathcal{G}$ byl roven poměru funkce pouhého u k funkci pouhého v.

Je-li mimo to ještě základní veličina $\mathcal{F}$ našeho parametrického vyjádření rovna nule

$$\mathcal{F} = 0 \quad \dots \quad (6)$$

jsou též křivky parametrické navzájem kolmy, takže síť řečeným způsobem definovaná jest sítí kvadratickou – t. j. plocha jest tím rozdělena na nekonečně malé čtverce.

V tomto případě nabývá lineární element tvaru

$$ds^2 = Q(u,v)\left(\frac{du^2}{\varphi^2(u)} + \frac{dv^2}{\psi^2(v)}\right)$$

a zavedeme-li nové parametry $\bar{u}, \bar{v}$ vztahy

$$\bar{u} = \int \frac{du}{\varphi(u)}, \quad \bar{v} = \int \frac{dv}{\psi(v)} \quad \cdots (7)$$

čímž křivky parametrické se nezmění, máme pro lineární element výraz

$$\bar{d}s^2 = \bar{Q}(\bar{u}, \bar{v})(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2) \quad \cdots (8)$$

tedy $\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{G}}$, $\bar{\mathcal{F}} = 0$.

Jsou tudíž tyto parametry parametry thermickými. Seznáváme zároveň že pojmy síť kvadratická a síť isothermická jsou totožné.*

Seznali jsme totiž právě, že každá síť kvadratická jest sítí křivek isothermických a snadno plyne též, že každá dvojice soustav křivek isothermických vede naopak k síti kvadratické.

Předpokládejme za tím účelem na ploše takové parametry $\bar{u}, \bar{v}$ že $\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{G}}$, $\bar{\mathcal{F}} = 0$, tedy parametry thermické, a dejme parametrům těm vzrůstati postupně o stále stejné nekonečně malé přírůstky

$$d\bar{u} = \varepsilon, \quad d\bar{v} = \varepsilon \ldots (9)$$

Tím obdržíme síť jejíž diagonální křivky mají rovnice $\bar{u} \pm \bar{v} = \text{konst}$

(viz rovnici (3); zde jest totiž $\varphi = \psi = 1$)

Podmínka (5') pro to aby síť byla rhombickou nabývá v našem případě sítě (9) tvaru

$$\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{G}}$$

a jest dle předpokladu splněna. Poněvadž pak též $\bar{\mathcal{F}} = 0$ vede nás naše soustava křivek isothermických způsobem (9) k síti kvadratické.

* jak výroku tomu dlužno rozuměti, jest zřejmo a v dalším též zozvedeno.

Příslušnou větu možno tedy vyjádřiti ve tvaru:
Aby parametrické křivky na ploše daly se uspořádati v síť kvadratickou, jest-li to tím způsobem, že parametrům u, v dáme postupně vzrůstati o stejnou a stálou nekonečně malou veličinu ε, – jest nutno a stačí aby $\mathcal{E} = \mathcal{G}$, $\mathcal{F} = \mathcal{A}$.

— Parametry u, v tohoto druhu nazýváme jak již uvedeno parametry thermickými.

Téže soustavě křivek isothermických přísluší však nekonečně mnoho dvojic U, V parametrů vázaných pouze podmínkami $U = \lambda(u)$, $V = \mu(v)$.

Stanovme mezi těmito novými parametry takové, které jsou rovněž parametry thermickými, takže ds^2 má pro ně zase tvar

$$ds^2 = \Phi(U,V)(dU^2 + dV^2)$$ jako v původních

měl tvar $ds^2 = Q(u,v)(du^2 + dv^2)$.

Porovnáním obou výrazů:

$$\Phi(\lambda'^2 du^2 + \mu'^2 dv^2) = Q(du^2 + dv^2)$$

plyne $\Phi \lambda'^2 = Q = \Phi \mu'^2$ čili

$\lambda'^2(u) = \mu'^2(v)$ což jest možno jen tak, že

$\lambda'^2 = \mu'^2 = k^2$ kde k^2 jest konstanta;

tudíž $dU = \pm k\, du$, $dV = \pm k\, dv$ načež

$$\left.\begin{array}{l} U = \pm k u + \text{konst}, \quad V = \pm k v + \text{konst} \\ \text{nebo, v druhém případě, vyměníme-li názvy } U \text{ a } V, \\ V = \pm k u + \text{konst}, \quad U = \pm k v + \text{konst.} \end{array}\right\} (10).$$

Obecné thermické parametry U, V, které náleží dýmž isothermickým křivkám parametrickým jako obecné thermické parametry u, v, dány jsou tedy výrazy (10).—

Pozn. Jde-li o skutečné zakreslení kvadratické sítě na ploše znázorněnou modelem, pak ovšem volíme síť o elementárních ploškách konečné velikosti. V tomto případě dáme parametrům vzrůstati o stálý konečný přírůstek, takže hodnoty jejich tvoří aritmetické řady. Tím obdržíme síť čtyrúhelníků, které možno rovněž zváti čtverci, ovšem o křivočarých stranách. Jest pak patrno, že diagonální křivky skutečné nekonečně husté sítě kvadratické jsou také pro tuto konečnou síť křivkami diagonálními.

III. Příklady.

58. Plocha kulová. — Vyjadřme její rovnice na př. v tom tvaru jako pro obecnou plochu rotační jsme obdrželi:

$$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = \sqrt{1-u^2} \quad \dots (1)$$

Pro ds^2 jest

$$ds^2 = \frac{du^2}{1-u^2} + u^2 dv^2 = \left(\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} + iu\,dv\right)\left(\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} - iu\,dv\right)$$

Oba činitelé mají společný multiplikační faktor $\frac{1}{u}$, takže za účelem přechodu ke křivkám nulovým

jako parametrickými můžeme klásti
– vzhledem k tomu, že $\int \frac{du}{u\sqrt{1-u^2}} = -\log \frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}$ –
pro nové parametry α, β výrazy

$$\left.\begin{aligned} -\log\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u} + iv &= \log\alpha \\ -\log\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u} - iv &= \log\beta \end{aligned}\right\} (2)$$

Odtud plyne

$$\sqrt{\alpha\beta} = \frac{u}{1+\sqrt{1-u^2}},$$

$\log\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = iv$, tudíž $e^{iv} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, $e^{-iv} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$
takže

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{1+\alpha\beta} \\ \cos v &= \frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}}, \quad \sin v = \frac{\alpha-\beta}{2i\sqrt{\alpha\beta}} \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

a dosazením do našeho parametrického vyjádření

$$x = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta+1}, \quad y = \frac{1}{i}\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta+1}, \quad z = \frac{\alpha\beta-1}{\alpha\beta+1} \ldots (4),$$

nebo, píšeme-li $-\frac{1}{\beta}$ místo β, takže $\alpha, -\frac{1}{\beta}$ jsou hodnoty sdružené, máme

$$x = \frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \quad y = \frac{i(1+\alpha\beta)}{\alpha-\beta}, \quad z = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \ldots (5)$$

– Že křivkami parametrickými v tomto případě jsou přímky, plyne již na př. odtud, že – použijeme-li třetí rovnice (4) – jest poměr

$$x_\beta : y_\beta : z_\beta = (1-\alpha^2) : i(1+\alpha^2) : 2\alpha$$

na β nezávislý. –

59. Jiný postup. – K témuž výsledku musíme dospěti, vyjdeme-li přímo od přímek isotropických. Ze známého důvodu pišme rovnici

$$x^2+y^2+z^2=1$$

plochy kulové ve tvaru

$$(x+iy)(x-iy)=(1+z)(1-z)$$

a kladme

$$\frac{x+iy}{1-z}=\frac{1+z}{x-iy}=u\,,\quad \frac{x-iy}{1-z}=\frac{1+z}{x+iy}=-\frac{1}{v}$$

– takže $u, -\frac{1}{v}$ jsou hodnoty sdružené –.

Pro z plyne

$$\frac{1+z}{1-z}=-\frac{u}{v} \quad \text{čili}$$

$$z=\frac{u+v}{u-v} \quad \text{a pak}$$

$$x=\frac{1-uv}{u-v}\,,\quad y=\frac{i(1+uv)}{u-v}$$

takže skutečně vidíme, že toto vyjádření, při němž křivkami parametrickými jsou přímky minimální, jest totožné s vyjádřením (5).

60. Thermické parametry na ploše kulové. – V některých případech dospějeme k thermickým parametrům rychleji přímo než přechodem přes parametrické křivky minimální. Tak uvažujme opět plochu kulovou a vyjádřme ji na př. užitím souřadnic polárních φ, θ:

$$x=a\sin\theta\cos\varphi,\quad y=a\sin\theta\sin\varphi,\quad z=a\cos\theta \quad \ldots(1)$$

takže pro lineární element obdržíme

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

Píšeme-li jej ve tvaru

$$ds^2 = a^2\sin^2\theta\left(\frac{d\theta^2}{\sin^2\theta} + d\varphi^2\right)$$

vidíme, že stačí klásti

$$u = \int\frac{d\theta}{\sin\theta} = \log\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,,\quad v = \varphi \quad \dots(2)$$

abychom obdrželi jednu dvojici u, v parametrů isothermických.

Jest pak

$$e^u = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\quad;\quad \frac{e^{2u}}{1} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\,,\ \text{tudíž}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{-u}-e^u}{e^{-u}+e^u}\,,\quad \sin\theta = \frac{2}{e^u+e^{-u}}.$$

Tím nabýváme parametrického vyjádření

$$x = \frac{2a\cos\varphi}{e^u+e^{-u}}\,,\quad y = \frac{2a\sin\varphi}{e^u+e^{-u}}\,,\quad z = a\,\frac{e^{-u}-e^u}{e^{-u}+e^u} \quad \dots(3)$$

při čemž pro lineární element máme výraz

$$ds^2 = \frac{4a^2}{(e^u+e^{-u})^2}\,(du^2+d\varphi^2) \quad \dots(4).$$

61. <u>Obyčejná plocha šroubová</u> – jest dána obvyklým parametrickým vyjádřením

$$x = u\cos v\,,\quad y = u\sin v\,,\quad z = qv \quad \dots(1)$$

takže

$$ds^2 = du^2 + (u^2+q^2)\,dv^2$$

Píšeme: $ds^2 = (u^2+q^2)\left(\frac{du^2}{u^2+q^2} + dv^2\right)$

a položíme obdobně k předchozímu příkladu

$$\bar{u} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+q^2}} = \log(u+\sqrt{u^2+q^2}), \quad \bar{v} = v \quad \ldots (2).$$

čímž nabýváme thermických parametrů $\bar{u}, \bar{v}$.

Ježto transformací (2) se křivky parametrické nemění, seznáváme že povrchové přímky a obyčejné šroubovice naší plochy tvoří isothermickou soustavu.

Abychom obdrželi kvadratickou síť, volme na ploše soustavu takových površek, z nichž každé dvě sousední vznikají jedna ze druhé šroubovým pohybem o stálý úhel $d\bar{v} = \varepsilon$ ..(3) a volme na ose x řadu bodů jejichž souřadnice $x = u$ liší se o stálý přírůstek du definovaný vztahem

$$\varepsilon = d\bar{u} = \frac{du}{\sqrt{u+q^2}}$$

čili

$$du = \varepsilon\sqrt{u^2+q^2} \quad \ldots (4)$$

Volíme-li za ε konečnou veličinu, dostáváme tím na ploše konečnou síť kvadratickou, při čemž ze vztahu (4) vidíme, že čím blíže k ose, tím jest síť tato hustší.

Co řečeno o obyčejné ploše šroubové, platí obdobně o ploše rotační a specielně též o ploše kulové.

61. Dodatek k ploše kulové. – Vycházejíce z jedné dvojice $u = \log \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, $v = \varphi$ thermických parametrů na ploše kulové obdržíme všecky reálné isothermické soustavy o parametrech U, V tím že položíme $U + iV = F(\log \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + i\varphi)$

§ III. 17.

a porovnáme části reálné a části ryze imaginární obou stran rovnice.

Zvolíme-li na př. za F funkci exponenciální, máme

$$U+iV = e^{\log \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+i\varphi} = e^{\log \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}(\cos\varphi+i\sin\varphi), \text{ tedy}$$

$$U = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos\varphi, \quad V = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin\varphi.$$

Tím nalézáme jedné z dalších soustav isothermických na ploše kulové.

Jinou z těchto soustav obdržíme kterékoliv ve vyjádření (5) str. 126 plochy kulové

$$x = \frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \quad y = i\frac{(1+\alpha\beta)}{\alpha-\beta}, \quad z = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$$

pro nové parametry u, v výrazy

$$\alpha = u+iv, \quad -\frac{1}{\beta} = u-iv.$$

Pak máme parametrické vyjádření

$$x = \frac{2u}{u^2+v^2+1}, \quad y = \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \quad z = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}.$$

Povšimněme si blíže křivek parametrických v prvém případě.

Z rovnic pro x, y vyloučíme v, čímž obdržíme průmět parametrických křivek u do roviny (xy).

Jest $\frac{y}{x} = \frac{v}{u}$,

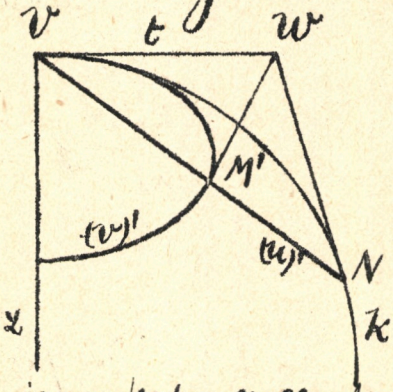
$$x = \frac{2u}{u^2\left(1+\frac{v^2}{u^2}+\frac{1}{u^2}\right)} = \frac{2ux^2}{u^2\left(x^2+y^2+\frac{x^2}{u^2}\right)} \quad \text{čili}$$

$$1 = \frac{2xu}{u^2(x^2+y^2)+x^2} \quad \text{čili}$$

$$u^2(x^2+y^2)+x^2=2ux$$

Průmětem každé křivky u = konst do roviny (xy) jest tedy ellipsa dotýkající se v počátku osy y a dotýkající se kružnice $x^2+y^2=1$ v obou bodech $x_{1,2}=u$. Křivky u = konst jsou tedy kružnice nacházející se v rovinách jdoucích tečnou bodu $x=y=0$, $z=1$ ležící v rovině yz a dotýkající se v bodě tom tečny té.

Obdobně křivky v = konst jsou kružnice dotýkající se v bodě řečeném tečny $y=0$. V bodě tom jsou tedy všecky křivky jedné soustavy kolmy ke všem křivkám druhé soustavy. Že i v druhých bodech průsečných jest každá křivka (u) kolma ke každé křivce (v), rovněž snadno geometricky nahlédneme.



Budiž M druhý průsečík kružnic (u), (v). Průmětem kružnice (v) do roviny (xz) jest ellipsa mající v bodě V jeden vrchol a v něm kružnici k – hlavní to řez koule – za kružnici křivosti. Křivky $(v)'$ a k jsou tedy v centrické kollineaci dle středu V a osy t. Protíná-li tečna bodu $N=(u)'k$ tečnu t v bodě W, jest W vrcholem rotační plochy kuželové, dle (u) kouli opsané. Následkem řečené kollineaci prochází tečna v bodě M' ku $(v)'$ též bodem W a též v prostoru tečna v bodě M ku (v) prochází tudíž bodem W čili jest povrchovou přímkou rotačního kužele nad (u) sestrojené-

ho. Tím jest důkaz proveden.

IV. Konformní zobrazení ploch.

62. Křivky minimální. - Seznali jsme, že vztahujeme-li navzájem dvě plochy

$$x=\varphi(u,v), \ldots ; \quad x=\Phi(u,v), \ldots$$

pomocí těchže parametrů a je-li pro základní veličiny příslušných bodů splněn vztah

$$\mathcal{E}:\mathcal{F}:\mathcal{G}=\mathcal{E}_1:\mathcal{F}_1:\mathcal{G}_1, \ldots \quad (1)$$

jest zobrazení to zobrazením konformním.

Poměr $K^2=\frac{ds^2}{ds_1^2}=\frac{\mathcal{E}+2\mathcal{F}k+\mathcal{G}k^2}{\mathcal{E}_1+2\mathcal{F}_1k+\mathcal{G}_1k^2}$

jenž nezávisí na k, nazýváme plošným poměrem pro příslušné body. Poměr ten ovšem obecně mění se od bodu k bodu.

Uvažujme nyní na obou plochách křivky minimální. Jejich diferenciální rovnice jsou

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{E}+2\mathcal{F}k+\mathcal{G}k^2&=0\\ \mathcal{E}_1+2\mathcal{F}_1k+\mathcal{G}_1k^2&=0\end{aligned}\right\}(2)$$

a je-li předpoklad (1) splněn, jest patrno že pro příslušné body stávají se obě rovnice (2) současně, mající tytéž kořeny.

Vzpomínáme snadno, že při konformním zobrazení dvou ploch odpovídají křivkám minimálním plochy jedné křivky minimální plochy druhé.

Také opak této věty platí. Neboť přísluší-li si křivky minimální, platí rovnice (2) současně pro dvě k,

čili mají společné kořeny. Avšak součiny resp. součty kořenů těch dají se vyjádřiti koefficienty rovnic odkud vyplynou nám rovnice

$$\frac{E}{G} = \frac{E_1}{G_1}, \quad \frac{F}{G} = \frac{F_1}{G_1} \quad \text{t. j.}$$

$$E : F : G = E_1 : F_1 : G_1.$$

Chceme-li tedy dvě plochy zobraziti navzájem konformně, stačí zobraziti je tak, aby křivkám minimálním jedné příslušely křivky minimální druhé plochy.

Okolnost tuto nahlédneme snadno též geometricky. Budiž zobrazení dvou ploch konformním. Pak svazku tečen bodu A plochy jedné přísluší shodný s ním svazek tečen bodu A_1 plochy druhé. Položme tyto svazky do jedné roviny a to tak aby smysl obou byl souhlasný. Pak výtvorem obou svazků jest kružnice jež jak známo prochází body kruhovými; takže isotropické směry obou svazků si skutečně přísluší. A poněvadž to platí pro každé dva příslušné body obou ploch, přísluší si navzájem celé křivky minimální.

Jde-li o důkaz obrácené věty, předpokládáme, že v bodech A, A_1 odpovídají si směry isotropické. Položme opět svazky A, A_1 do téže roviny a to tak, aby přiřazené navzájem směry isotropické obou svazků procházely vždy týmž bodem kruhovým, t. j. tak, aby oba svazky měly týž smysl.

Mezi svazky těmi platí – jako při každém zobrazení

dvou ploch pomocí těchže parametrů – vztah jednojednoznačný definovaný rovností příslušných k, svazky jsou projektivní. Položíme-li je do jedné roviny, vytvoří tedy kuželosečku.

Kuželosečka ta v případě námi uvažovaném prochází oběma body kruhovými, jest tudíž kružnicí. A projektivnost svazků těch přechází ve shodnost. Tím též zpětný důkaz proveden.

Počtem můžeme větu dokázanou vyjádřiti tak, že jsou-li ξ, η; ξ_1, η_1 parametry příslušné minimálním křivkám plochy prvé resp. druhé, jest zobrazení obou ploch konformním tehdy a jen tehdy, je-li

$$\left.\begin{aligned} \xi &= F(\xi_1), \quad \eta = F_1(\eta_1) \\ \text{nebo při záměně označení obou parametrů} \\ \eta &= F(\xi_1), \quad \xi = F_1(\eta_1). \end{aligned}\right\} (3)$$

<u>63. Křivky isothermické.</u> – Buďtež parametry u, v na jedné z obou uvažovaných ploch parametry thermickými, takže jest $\mathcal{E} = \mathcal{G}$, $\mathcal{F} = 0$. Pak z předpokladu (1) str. 132 konformního zobrazení obou ploch plyne že vztahujeme-li opět obě plochy navzájem pomocí těchže parametrů, jest také pro plochu druhou

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{G}_1, \quad \mathcal{F}_1 = 0.$$

Seznáváme tudíž, že při konformním zobrazení dvou ploch nejen každé isothermické soustavě plochy jedné odpovídá isothermická soustava na ploše druhé, ale že též každé dvojici thermických parametrů na jedné ploše

přísluší dvojice thermických parametrů na druhé ploše.

Budiž opět na jedné z obou ploch vytčena libovolná soustava isothermická a budiž u, v jedna dvojice příslušných parametrů thermických. Pak jest

$$ds^2 = \Theta(u, v)(du^2 + dv^2).$$

Přiřaďme nyní této libovolné soustavě isothermické na ploše prvé na základě právě řečeného jednu z isothermických soustav na ploše druhé tím, že plochu druhou vyjádříme nejprve pomocí libovolné dvojice u, v thermických parametrů a vztahujeme navzájem body o těchže parametrech. Nyní vytkněme si však libovolnou jinou dvojici (u_1, v_1) thermických parametrů příslušných této isothermické soustavě plochy druhé a proveďme zobrazení obou ploch vztahy

$$u_1 = \lambda(u), \quad v_1 = \mu(v).$$

Pak z věty na str. 124 odvozené plyne, že tyto funkce nemohou býti libovolné, nýbrž mají tvar

$$u_1 = \pm k u + k_1, \quad v_1 = \pm k v + k_2 \ldots \quad (4)$$

Docházíme tudíž k výsledku: Vyjádříme-li jednu ze dvou ploch libovolnými thermickými parametry u, v a plochu druhou rovněž libovolnými thermickými parametry u_1, v_1, pak vztahy (4) v nichž k, k_1, k_2 jsou libovolné konstanty, dána jsou všecka možná konformní zobrazení obou ploch.*

Proveďme některé applikace získaných výsledků.

* taková, při nichž zvolené dvě soustavy křivek isothermických v sebe přecházejí.

64. Plocha a rovina. – Nejjednodušší thermické parametry v rovině jsou pravoúhlé souřadnice x, y, neboť zde pro ds^2 platí výraz

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

takže $\mathcal{E} = \mathcal{G} = 1$, $\mathcal{F} = 0$.

Jsou-li tedy u, v libovolné thermické parametry na dané ploše, jest nejobecnější* konformní zobrazení plochy na rovinu dáno vztahy

$$x = \pm k u + k_1, \quad y = \pm k v + k_2$$

Zanedbáme-li konstanty k_1, k_2, jež znamenají pouhý posun v rovině naší, máme

$$x = \pm k u, \quad y = \pm k v.$$

Seznáváme pak: Zvolíme-li na ploše libovolnou dvojici u, v thermických parametrů, pak obdržíme nejjednodušší konformní zobrazení plochy na rovinu tím že klademe parametry u, v rovny pravoúhlým souřadnicím x, y v rovině

$$x = u, \quad y = v.$$

Všecka ostatní* konformní zobrazení naší plochy do roviny dají se z tohoto odvoditi zpodobněním a zrcadlením dle os souřadných.

65. Rovina a rovina. – Rovnice (3) str. 134 dávají nám po přechodu k thermickým parametrům u, v; u_1, v_1 větu, že jsou-li u, v; u_1, v_1 libovolné dvojice thermických parametrů na ploše jedné resp. druhé, musí, ať plochy jakýmkoli způsobem navzájem

* výroku tomu nutno ovšem opět rozuměti tím způsobem jako na předch. straně.

konformně zobrazíme, bývají platny vztahy

$$u+iv = F(u_1 \pm i v_1), \quad u-iv = F_1(u_1 \mp i v_1).$$

Při tom pro volbu znamení jsou oba isotropické směry navzájem zaměněny, zobrazení jest opačného smyslu k prvému.

Pro plošný poměr konformního zobrazení plyne dle

$$K^2 = \frac{ds^2}{ds_1^2} = \frac{\Theta(du^2+dv^2)}{\Theta_1(du_1^2+dv_1^2)} = \frac{\Theta(du+i\,dv)(du-i\,dv)}{\Theta_1(du_1+i\,dv_1)(du_1-i\,dv_1)}$$

$$K^2 = \frac{\Theta}{\Theta_1} F'(u_1 \pm i v_1) F_1'(u_1 \mp i v_1).$$

Jde-li o zobrazení roviny na rovinu, zvolme za dvojice theoretických parametrů v obou rovinách pravoúhlé souřadnice x, y resp. x_1, y_1. Pak $\Theta = \Theta_1 = 1$ a $K^2 = F'F_1'$.

Zvolme speciálně funkci F ve tvaru lomeném $F(z) = \frac{a^2}{z}$ a uvažujme příslušné reálné zobrazení obou rovin. Pak jest

$$\left.\begin{aligned} x+iy &= \frac{a^2}{x_1 \pm i y_1} \\ x-iy &= \frac{a^2}{x_1 \mp i y_1} \end{aligned}\right\} \text{takže } x^2+y^2 = \frac{a^4}{x_1^2+y_1^2}.$$

Položme obě soustavy do téže roviny a vztahujme je k týmž osám. Pak ze získaného vztahu plyne, že součin vzdáleností příslušných bodů obou soustav od počátku jest stálý. Transformace soustavy P na soustavu P_1' jest tedy jednoznačnou inversí.

Rovnice transformační získáme snadno na př. z rovnice $\frac{a^2(x_1 \mp i y_1)}{x_1^2+y_1^2} = x+iy$ ve tvaru

$$x = \frac{a^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y = \frac{\mp a^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

Inversní jest opět opět druhou z těchto transformací; pro první přistupuje ještě zrcadlení dle osy x.

66. Plocha kulová zobrazená sama v sebe. – Sestavili jsme parametrické vyjádření plochy kulové vzhledem k přímkám minimálním ve tvaru

$$x = \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha - \beta}, \quad y = \frac{i(1 + \alpha\beta)}{\alpha - \beta}, \quad z = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \quad \dots (1)$$

kde $\alpha, -\frac{1}{\beta}$ jsou hodnoty sdružené a při čemž pro lineární element máme výraz

$$ds^2 = \frac{4\, d\alpha\, d\beta}{(\alpha - \beta)^2}.$$

Každému bodu naší plochy kulové přiřazujme nyní bod α_1, β_1 na téže ploše. Aby zobrazení toto bylo konformním, musí býti

$$\alpha = F(\alpha_1), \quad \beta = F_1(\beta_1)$$

nebo $\beta = F(\alpha_1), \quad \alpha = F_1(\beta_1)$.

Uvažujme speciálně případ, kdy tyto funkce jsou lineárně lomené

$$\alpha_1 = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}, \quad \beta_1 = \frac{a\beta + b}{c\beta + d} \quad \dots (2)$$

kde konstanty a, b, c, d nemusí býti reálné.

Pro nový lineární element máme pak

$$ds_1^2 = \frac{4\, d\alpha_1\, d\beta_1}{(\alpha_1 - \beta_1)^2}$$ a dosazením z (2) obdržíme

mu

$$ds_1^2 = \frac{4(ad-bc)^2 d\alpha\, d\beta}{\{(ad-bc)\alpha-(ad-bc)\beta\}^2} = \frac{4\, d\alpha\, d\beta}{(\alpha-\beta)^2} = d\cdot s^2.$$

Plošný poměr jest tedy stále roven jedné. Zobrazení naše jest tedy nejen konformní ale též stejnoploché. Plocha kulová zobrazuje se tímto způsobem shodně sama v sebe, takže transformace naší možno patrně docíliti pohybem. Abychom tento druh pohybu blíže seznali, hledejme samodružné body obou soustav.

Tu musí býti $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ takže pro obojí dostaneme touž kvadratickou rovnici

$$c\,\xi^2 + (d-a)\,\xi - b = 0$$

jež, předpokládajíc, že $(d-a)^2 + 4bc \geq 0$, má kořeny

$$\xi_1,\ \xi_2.$$

Pak různou kombinací těchto hodnot obdržíme celkem 4 samodružné body. Dva z nich

$A(\alpha_1 = \alpha = \xi_1,\ \beta_1 = \beta = \xi_2)$ čili $A(x, y, z)$ a

$B(\alpha_1 = \alpha = \xi_2,\ \beta_1 = \beta = \xi_1)$ čili $B(x', y', z')$

jsou v konečnu a sice jest $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$, takže AB jest průměrem naší koule.

Druhé dva:

$C(\alpha_1 = \alpha = \xi_1,\ \beta_1 = \beta = \xi_1)$, $D(\alpha_1 = \alpha = \xi_2,\ \beta_1 = \beta = \xi_2)$

jsou v nekonečnu.

Cosiny směrné pro normálu roviny, která obsahuje body C, D jsou nyní úměrny minorům matice

$$\left\| \begin{matrix} 1-\xi_1^2, & i(1+\xi_1^2), & 2\xi_1 \\ 1-\xi_2^2, & i(1+\xi_2^2), & 2\xi_2 \end{matrix} \right\|$$

Hodnoty těchto minorů jsou

$$\delta_1 = 2i(\xi_2 - \xi_1)(1 - \xi_1\xi_2), \quad \delta_2 = -2(\xi_2 - \xi_1)(1 + \xi_1\xi_2),$$
$$\delta_3 = 2i(\xi_2^2 - \xi_1^2), \text{ takže}$$
$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = (1 - \xi_1\xi_2) : i(1 + \xi_1\xi_2) : (\xi_1 + \xi_2).$$

takže cosiny směrné pro uvažovanou normálu jsou úměrny (a tudíž ovšem rovny) cosinům směrným průměru AB.

Seznáváme tudíž že body C, D jsou kruhovými body roviny kolmé k průměru AB. Pohyb, při němž body A, B, C, D jsou body samodružnými, jest rotace kolem průměru AB — jak plyne ze známé věty, že pohyb v rovině, při němž samodružnými jsou dva body kruhové, jest rotace.

Tím vyjádřili jsme všecky rotace kolem průměrů naší plochy kulové — čili všecky pohyby jimiž plocha kulová sama v sebe přechází — čítaje v to ovšem též rotace imaginárné, pro něž body kruhové způsobem nabývané analytické definice.

Aby naše transformace byla reálná, musí mezi a, b, c, d býti splněn vztah, který plyne z toho, že $\alpha, -\frac{1}{\beta}$; $\alpha_1, -\frac{1}{\beta_1}$ jsou hodnoty sdružené.

Musí body $\frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$ a $\frac{-c\beta - d}{a\beta + b} = \frac{-c + d\bar{\alpha}}{a - b\bar{\alpha}}$,

kde $\bar{\alpha}$ značí hodnotu sdruženou k α, býti hodnotami sdruženými. Tato podmínka jest splněna, je-li

$$-c = \bar{b}, \quad d = \bar{a}.$$

Naše transformační vzorce vyznačují body reál-

ný pohyb lehody, mají-li tvar

$$\alpha_1 = \frac{a\alpha + b}{-\bar{b}\alpha + \bar{a}}, \quad \beta_1 = \frac{a\beta + b}{-\bar{b}\beta + \bar{a}} \quad \ldots (2')$$

a to jsou lehdy zároveň obecné vzorce pro transformaci soustavy souřadné pravoúhlé při zachování počátku.

6ž. Jeden případ pro kouli a rovinu. — Pro jeden případ thermických parametrů u, v dostali jsme vyjádření plochy kulové ve tvaru

$$x = \frac{2u}{u^2+v^2+1}, \quad y = \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \quad z = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}.$$

(viz str. 130.). Shodnou bylo thermické parametry roviny pravoúhlými souřadnicími v rovině, obdržíme jeden druh konformního zobrazení plochy kulové, plochy roviny. Mezi souřadnicemi (x, y, z) bodu plochy kulové a souřadnicemi (x_1, y_1) příslušného bodu roviny platí pak vztahy

$$x = \frac{2x_1}{x_1^2+y_1^2+1}, \quad y = \frac{2y_1}{x_1^2+y_1^2+1}, \quad z = \frac{x_1^2+y_1^2-1}{x_1^2+y_1^2+1}$$

odkud plyne

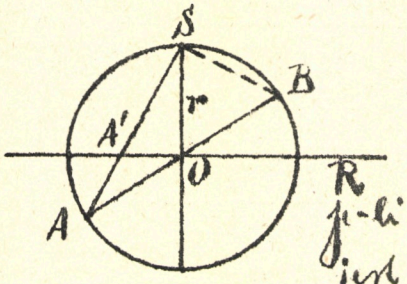
$$\frac{x_1^2+y_1^2+1}{z} = \frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{1}{1-z}.$$

Dáme-li rovině (x_1, y_1) splynouti s rovinou (x, y), obdržíme patrně bod (x_1, y_1) z bodu (x, y, z) plochy kulové průmětem ze středu promítání $(0, 0, 1)$.

Toto zobrazení plochy kulové do roviny jest tedy

stereografická projekce, o níž ledy takto seznámíme, že jest zobrazením konformním.

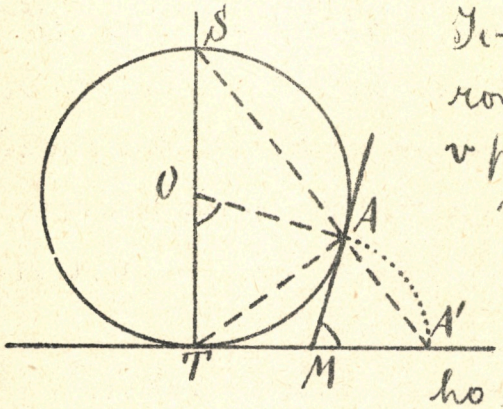
68. Stereografická projekce plochy kulové na rovinu. – Uvedeme krátce geometrické vyvození vlastností této projekce definované jakožto průmět plochy kulové z některého jejího bodu na rovinu rovnoběžnou s dečnou rovinou bodu toho.



Budiž S střed projekce a položme průmětnu R právě středem O plochy kulové. Je-li pak A' průmět bodu A a je-li B bod diametrálně protilehlý bodu A, jest $\triangle ABS \sim \triangle SA'O$ a odtud pro součin $SA \cdot SA' = 2r^2$.

Tato projekce jest ledy inversí pro střed S jako pól inverse a pro poloměr $\varrho = r\sqrt{2}$. O inversi pak známy jsou vztahy: Libovolné rovině odpovídá plocha kulová jdoucí pólem, ploše kulové jdoucí pólem naopak rovina, obecné ploše kulové zase plocha kulová, dvěma plochami protínajícími se pod určitým úhlem plochy svírající týž úhel. Důsledkem těchto vlastností jest, že stereografická projekce jest takovým konformním zobrazením plochy kulové na rovinu, při kterém všechny kružnice zobrazují se zase v kružnice. —

— Tyto vlastnosti stereografické projekce odvodíme snadno též přímo. Ponechme průmětnu v rovině dečné bodu T diametrálně protilehlého ke středu projekce S.



Je-li pak A' průmět bodu A a AM rovina tečná bodu A – jež jest ovšem v prostoru kolmá k rovině našeho znázorňujícího obrazce, pak trojúhelník AMA' má strany kolmé ke stranám rovnoramenného trojúhelníka AOT, jest tudíž rovněž rovnoramenný t. j. $MA = MA'$.

Průmět A' bodu A můžeme tedy též obdržeti sklopením tečné roviny bodu A kolem stopy m. Avšak tímto sklopením přechází svazek tečen bodu A ve svazek shodný. Tím provedeno důkazem, že úhly křivek na ploše kulové se stereografickou projekcí nemění, čili že jest to zobrazení konformní.

Uvažujme dále na ploše kulové libovolnou největší kružnici $\underline{k}$ a opišme podél ní ploše kulové plochu válcovou. Budiž $\underline{A}$ bod kružnice k, $\underline{a}$ povšska válcové plochy jím jdoucí a $\underline{t}$ tečna v bodě A ke kružnici k. Položme středem S rovnoběžku s k povšskám našeho válce. Jelikož rovina promítací (Sa) přímky a jest též určena přímkami s, a, prochází průmět a' přímky a pozor w přímky s, jsa dle předchozího kolmý k průmětu t' tečny t. Průmět $\underline{k'}$ kružnice k jest tedy křivka ta vlastnosti, že tečna její t' jest kolmá ke spojnici $A'w$ bodu dotyčného s pevným bodem w, – jest to kružnice o středu w.

Budiž nyní k libovolná kružnice plochy kulové a

budiž V vrchol rotačního kužele, podél kružnice té kouli opsaného. Přesuňme průmětnu právě do tohoto vrcholu. Pak průmět A' bodu A kružnice K padne (se zřetelem k úvaze na před. stránce shora) do vzdálenosti VA od bodu V. Průmětem kružnice K do naší roviny jest tedy kružnice o středu V.

Předchozí i tento výsledek možno spojiti větou: Stereografickou projekcí promítá se každá kružnice plochy kulové v kružnici, jejímž středem jest průmět bodu, který jest pólem roviny kružnice vzhledem ku ploše kulové.

K výsledku tomuto došli bychom též snadno na základě věty Dandelinovy, dle které jest rovinným řezem rotačního kužele taková kuželosečka, která má ohniska v dotyčných bodech ploch kulových vepsaných kuželi a roviny řezu se dotýkajících.

Stereografické projekce užívá se v důsledku vyvozených jejích vlastností s oblibou ku sestrojování map povrchu zemského. Zvolíme na př. libovolný bod povrchu zemského za střed projekce a rovinu průmětnou vedeme na př. středem země. Pak nejméně deformován jest obraz té části povrchu, která jest kolem bodu ke středu projekce diametrálně protilehlého, a obraz celé polokoule průmětnou vyťaté a střed projekce neobsahující obsažen jest v největší kružnici která průmětně náleží. Známé jsou zejména obrazy polokoule východní a polokoule západní, při nichž

středy projekce jsou na rovníku.

Meridiány promítají se jako kružnice tvořící svazek kolem obrazů obou pólů (severního a jižního), při čemž ovšem úhly jejich jsou zachovány. Kružnice paralelní tvoří pak svazek (o základních bodech imaginárních, při mě-řech do společných jejich bodů kruhových) kružnic ortho-gonálních k prvým.

66. Stanoviti všecka konformní zobrazení plochy kulové na rovinu, při nichž obrazem každé kružnice jest opět kružnice. - Vycházejme z para-metrického vyjádření plochy kulové na základě přímek minimálních:

$$x = \frac{u+v}{uv+1}\,, \quad y = -i\,\frac{u-v}{uv+1}\,, \quad z = \frac{uv-1}{uv+1} \quad \ldots (1)$$

Vyjádřeme si rovnici kružnice na kouli v těchto pa-rametrech. Budiž

$$Ax + By + Cz = D$$

rovnice roviny v níž uvažovaná kružnice leží; jak dosazením z (1) plyne

$$A(u+v) - iB(u-v) + C(uv-1) - D(uv+1) = 0\,;$$

čili obecně rovnice bilineární mezi parametry u, v

$$a\cdot uv + b\cdot u + c\cdot v + d = 0 \quad \ldots (2)$$

jest rovnicí kružnice na naší ploše kulové.

Výsledek tento mohli jsme předvídati vzhledem k analogii s obecnou plochou druhého stupně, kde jest známo, že přiřadíme-li obě soustavy povšek navzá-

jeme projektivně, jest výtvorem jejich jedna z kuželoseček čili rovinných řezů plochy.

Koefficienty a, b, c, d můžeme nazvati souřadnicemi naší kružnice. Jejich souvislost se souřadnicemi roviny kružnice jest dána vztahy

$$a = C - D, \quad b = A - iB, \quad c = A + iB, \quad d = -C - D,$$

odkud

$$2A = b + c, \quad 2iB = c - b, \quad 2B = i(b - c)$$

$$2C = a - d, \quad 2D = -a - d \quad \text{takže}$$

$$(2)' \ldots A : B : C : D = (b+c) : i(b-c) : (a-d) : -(a+d)$$

Aby šlo v reálnou rovinu, musí b, c býti imaginárné a to tak, aby $(b+c)$, $i(b-c)$ byly reálné; jsou tedy sdružené: $b = \alpha + i\beta$, $c = \alpha - i\beta$.

— Rovnice (2) může též degenerovati:

$$auv + bu + cv + d = (pu + q)(p_1 v + q_1) = 0$$

Tu kružnice přechází ve dvě přímky minimální. Jest pak

$$a = pp_1, \quad b = pq_1, \quad c = p_1 q, \quad d = qq_1.$$

Jest tedy nutně $\quad ad = bc \ldots (2'')$.

Tato podmínka jest též postačující pro degeneraci tu: Násobme d rovnici (2); pak jest vzhledem ku (2'')

$$bcuv + bdu + cdv + d^2 = 0 \quad \text{čili}$$

$$(bu + d)(cv + d) = 0 \quad \text{jak bylo dokázati.}$$

Pro A, B, C, D vede podmínka (2'') ke vztahu

$$-C^2 + D^2 - A^2 - B^2 = 0 \quad \text{čili}$$

$$\delta^2 = \frac{D^2}{A^2 + B^2 + C^2} = 1.$$

δ však jest vzdálenost naší roviny od počátku. Tato vzdálenost jest tedy rovna poloměru 1 plochy kulové; rovina sečná přechází v tečnou rovinu plochy kulové. Nabýváme tím známého výsledku, že tečná rovina protíná plochu kulovou ve dvou přímkách minimálních. —

Má-li nyní naše zobrazení býti konformním, musí minimálním přímkám plochy kulové odpovídati minimální přímky v rovině.
Rovnice minimálních přímek v rovině jsou však

$$\xi + i\eta = \text{konst} \quad \text{a} \quad \xi - i\eta = \text{konst},$$

takže má-li zobrazení býti konformním, musí

$$\bar{u} = \xi + i\eta = U(u), \quad \bar{v} = \xi - i\eta = V(v) \quad \cdots (3)$$

nebo, při zřejmém označení příslušných k sobě parametrů,

$$\bar{u} = \xi + i\eta = V(v), \quad \bar{v} = \xi - i\eta = U(u) \quad \cdots (3a)$$

kde $\bar{u}, \bar{v}$ značí v rovině parametry přímkám minimálním příslušné.

Uvažujme nyní rovněž v rovině rovnici bilineární mezi parametry $\bar{u}, \bar{v}$

$$e\bar{u}\bar{v} + f\bar{u} + g\bar{v} + h = 0 \quad \cdots (4)$$

a dosaďme sem ξ, η za $\bar{u}, \bar{v}$:

$$e(\xi + i\eta)(\xi - i\eta) + f(\xi + i\eta) + g(\xi - i\eta) + h = 0, \text{ čili}$$

$$e(\xi^2 + \eta^2) + (f+g)\xi + i(f-g)\eta + h = 0.$$

Vidíme, že rovnice (4) jest vyjádřením kružnice v rovině pomocí parametrů $\bar{u}, \bar{v}$. — Kružnice jest dále dosti dána jako výsledek dvou projektivních svazků paprsko-

vých kolem bodů kruhových.

Z bilineárního vztahu mezi u, v plyne na př. v jako lineární lomená funkce u:

$$v = \frac{\text{konst.}\, u + \text{konst.}}{\text{konst.}\, u + \text{konst.}} \quad \dots (5)$$

Má-li mít naše zobrazení být tohoto druhu, aby každé kružnici odpovídala kružnice, musí funkce $U(u)$, $V(v)$ být takové, aby rovnice (5), dosadíme-li do ní místo u resp. v funkce $U(u)$ resp. $V(v)$, nabyla po výpočtu v zase tvaru (5).

Naší úlohou jest tedy takovéto funkce U, V stanovit. Stanovme si diferenciální rovnici rovnice (5) čili ekvivalentní s ní rovnice (2):

$$a uv + b u + c v + d = 0$$

Derivujme dle u:

$$a(v + uv') + b + c v' = 0$$
$$a(2v' + uv'') + c v'' = 0$$
$$a(3v'' + uv''') + c v''' = 0$$

Z posledních dvou rovnic vyloučíme a, b, c:

$$\begin{vmatrix} v + uv' & 1 & v' \\ 2v' + uv'' & 0 & v'' \\ 3v'' + uv''' & 0 & v''' \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2v' + uv'')\, v''' - (3v'' + uv'')\, v'' = 0$$

$$2v'v''' - 3v''^2 = 0 \quad \dots (6).$$

Je-li nyní naopak v takovou funkcí u, že její derivace splňují rovnici (6), je

$$3\frac{v''}{v'} - 2\frac{v'''}{v''} = 0 \quad \text{čili}$$

$$3 \log v' - 2 \log v'' = \text{konst},$$

tedy
$$\frac{v''}{\sqrt{v'^3}} = \text{konst},$$

$$-\frac{2}{\sqrt{v'}} = \text{konst}\, u + \text{konst}$$

čili
$$v' = \frac{1}{(\text{konst}\, u + \text{konst})^2}, \quad \text{odkud konečně}$$

$$v = \frac{1}{\text{konst}\, u + \text{konst}} + \text{konst} = \frac{\text{konst}\, u + \text{konst}}{\text{konst}\, u + \text{konst}};$$

Jest tudíž v lineární lomenou funkcí u tehdy a jen tehdy, splňuje-li rovnici (6).

Buďte nyní také funkce U, V vázány bilineárním vztahem – kde A, B, C, D značí opět libovolné konstanty – $(\bar{2})\ldots\ A\,UV + B\,U + C\,V + D = 0$. Derivací plyne:

$$A\,\frac{d(U,V)}{du} + B\,\frac{dU}{du} + C\,\frac{dV}{du} = 0$$

$$A\,\frac{d^2(UV)}{du^2} + B\,\frac{d^2U}{du^2} + C\,\frac{d^2V}{du^2} = 0$$

$$A\,\frac{d^3(U,V)}{du^3} + B\,\frac{d^3U}{du^3} + C\,\frac{d^3V}{du^3} = 0$$

odkud vyloučením A, B, C a dosazením plyne

$$\begin{vmatrix} \cancel{U'V} + \cancel{UV'v'}, & U', & V'v' \\ \cancel{U''V} + 2U'V'v' + \cancel{UV''v'^2} + \cancel{UV'v''}, & U'', & V''v'^2 + V'v'' \\ \cancel{U'''V} + 3U''V'v' + 3U'V''v'^2 + \cancel{UV'''v'^3} + & U''', & V'''v'^3 + 3V''v'v'' + \\ \quad + 3U'V'v'' + \cancel{3UV''v'v''} + \cancel{UV'v'''}, & & \quad + V'v''' \end{vmatrix} = 0$$

Prvý sloupec determinantu zjednoduší se tím, že od něho odečteme V-násobný sloupec 2. a U-násobný sloupec 3., načež

provedením nabýváme rovnice

$$U'^2(3V''^2 - 2V'V''')V'^4 - V'^2(3U''^2 - 2U'U''')V'^2 + \\ + U'^2V'^2(3V''^2 - 2V'V''') = 0 \dots (7)$$

Mají-li pak funkce U, V míti žádanou vlastnost, musí rovnice (2) býti totožna s rovnicí tvaru (2) mezi u, v, tudíž rovnice (7) musí býti totožna s rovnicí (6), což - za zřejmého předpokladu $U' \geq 0$, $V' \geq 0$, $v' \geq 0$ - vede k rovnicím

$$3U''^2 - 2U'U''' = 0, \quad 3V''^2 - 2V'V''' = 0 \dots (7').$$

Funkce $U(u)$, $V(v)$ musí tedy býti lineárně lomené*:

na př.: $\xi + i\eta = \frac{a_1 u + b_1}{c_1 u + d_1}$, $\xi - i\eta = \frac{a_2 v + b_2}{c_2 v + d_2} \dots (8)$

Vztahy (8) provádějí nám tedy žádané zobrazení plochy kulové na rovinu.

Kružnici

$$A(\xi + i\eta)(\xi - i\eta) + B(\xi + i\eta) + C(\xi - i\eta) + D = 0$$

v rovině přísluší na ploše kulové pak kružnice

$$A(a_1 u + b_1)(a_2 v + b_2) + B(a_1 u + b_1)(c_2 v + d_2) + \\ + C(a_2 v + b_2)(c_1 u + d_1) + D(c_1 u + d_1)(c_2 v + d_2) = 0$$

Některé kružnice plochy kulové budou se však zobrazovati jako přímky. Jelikož případ ten nastává pro $A = 0$, mají tyto kružnice plochy kulové rovnice tvaru:

$$(9) \dots B(a_1 u + b_1)(c_2 v + d_2) + C(c_1 u + d_1)(a_2 v + b_2) + \\ + D(c_1 u + d_1)(c_2 v + d_2) = 0.$$

Mějsou však konstanty B, C, D voleny jakkoli, vždy

* zase obdržíme-li známou (3a).

jest poslední rovnice splněna, je-li

$$c_1 u + d_1 = \infty, \quad c_2 v + d_2 = \infty \ldots (10)$$

Prochází tedy všech ∞^2 kružnic plochy kulové, které odpovídají ∞^2 přímkám roviny, bodem

$$S\left(u = -\frac{d_1}{c_1}, \; v = -\frac{d_2}{c_2}\right).$$

Otočme nyní pravoúhlou soustavu souřadnou kolem počátku tak, aby bod S splynul s průsečíkem $(0,0,1)$ osy z s plochou čili se severním pólem jejím.

Ze vzorců (1) plyne, že pro bod $(0,0,1)$ jest $uv = \infty$, uvážíme-li mimo to odvozený dříve vzorec $\sin v = \frac{\alpha - \beta}{2i\sqrt{\alpha\beta}} \ldots (v)$ (kde v značilo azimut a α, β rovnaly se nynějším mašinu u a v) a béřeme zřetel k meridiánu hlavnímu čili nulovému $v = 0$, seznáváme, že pro tento meridián jest $\alpha = \beta$, tedy zde $u = v$.

Poněvadž pak tento meridián (jako všecky) prochází bodem S, máme pro u, v bodu S podmínky $uv = \infty$, $u = v$, tedy jest proň $u = v = \infty$.

To jest vzhledem ke vztahům (10) možno jen tak, že $c_1 = c_2 = 0$.

Tak vzorce (8) nabudou jednodušší tvaru

$$\xi + i\eta = a_1 u + b_1, \quad \xi - i\eta = a_2 v + b_2$$

a prostým přesunutím soustavy souřadné (ξ, η) v rovině zjednoduší se dále na tvar

$$\xi + i\eta = a_1 u, \quad \xi - i\eta = a_2 v \ldots (11).$$

Odtud plyne, že obrazem nulového meridiánu $u = v$ jest přímka

$$\frac{\xi + i\eta}{a_1} = \frac{\xi - i\eta}{a_2}$$

Učiňme za příčinou dalšího zjednodušení našich vztahů soustavu (ξ, η) kolem počátku tak, aby uvedený obraz nulového meridiánu splynul s osou ξ. Rovnice $(a_2 - a_1)\xi + (a_2 + a_1)i\eta = 0$ nabude tvaru $\eta = 0$, je-li $a_2 = a_1$. Klademe-li tedy $a_1 = a_2 = a$, máme

$$\xi + i\eta = au, \quad \xi - i\eta = av$$

a zvětšením podobným, které při konformním zobrazení jest ovšem možno, docílíme toho, že $a = 1$, takže jest konečně

$$\xi + i\eta = u, \quad \xi - i\eta = v \quad \ldots\ (12).$$

Zobrazením pak dle rovnic (1) obdržíme mezi souřadnicemi (x, y, z) bodu na ploše kulové a souřadnicemi příslušného bodu (ξ, η) v rovině vztahy

$$x = \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2 + 1}, \quad y = \frac{2\eta}{\xi^2 + \eta^2 + 1}, \quad z = \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{\xi^2 + \eta^2 + 1} \quad \ldots (13)$$

v kterých jsme seznali, že definují stereografickou projekci plochy kulové z pólu $(0, 0, 1)$ na rovinu (x, y).

Nabýváme tudíž výsledku:

Stereografické projekce plochy kulové jsou jedinými konformními zobrazeními plochy kulové na rovinu, při nichž každá kružnice má obrazem opět kružnici.

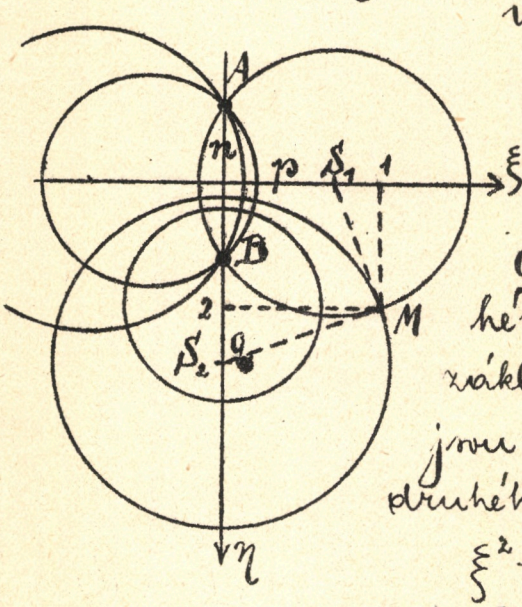
70. Konformní zobrazení plochy kulové na rovinu, při nichž meridiány a kružnice paralelní zobrazují se opět v kružnice. – Při tom pak ovšem nezáleží nám na tom, jak zobrazují se ostatní kruž-

nice naší plochy kulové. Kružnice zobrazující meridiány a kružnice paralelní musí ovšem následkem konformity zobrazení tvořiti soustavu kružnic ortogonálních a soustava tato musí býti isothermickou, jako jest tomu pro příslušnou soustavu na ploše kulové. O tom se snadno přesvědčíme.

Obecná soustava orthogonálních kružnic v rovině skládá se ze dvou svazků kružnic, z nichž jeden má reálné body základní. Budiž A, B tyto body, vzdálenost jejich $2n$ budiž půlena počátkem a spojnice jejich budiž osou η. Je-li p souřadnice ξ středu kružnice prvého svazku a q souřadnicí středu kružnice druhého svazku, jenž má jak známo základní body $C(in, 0)$, $D(-in, 0)$, jsou rovnice kružnic svazku prvého resp. druhého $(\xi - p)^2 + \eta^2 = p^2 + n^2$ čili

$$\xi^2 + \eta^2 - 2p\xi = n^2 \quad \cdots (1)$$

a odtudž $\xi^2 + \eta^2 - 2q\eta = -n^2 \quad \cdots (2)$.



Abychom seznali, tvoří-li tyto kružnice isothermickou síť, stanovme si liniový element v rovině pomocí parametrů p, q, jimž přísluší naše kružnice jako křivky parametrické. Derivací plyne

$$\left.\begin{aligned} (\xi - p)\,d\xi + \eta\,d\eta &= \xi\,dp \\ \xi\,d\xi + (\eta - q)\,d\eta &= \eta\,dq \end{aligned}\right\} (3)$$

Z těchto rovnic vypočteme $d\xi$, $d\eta$:

$$d\xi \cdot \delta = \begin{vmatrix} \xi\, dp & \eta \\ \eta\, dq & \eta - q \end{vmatrix} = \xi(\eta - q)\, dp - \eta^2 dq$$

a obdobně

$$d\eta \cdot \delta = \qquad = -\xi^2 dp + \eta(\xi - p)\, dq$$

a ježto $\quad ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2$, jest

$$ds^2 = \frac{1}{\delta^2}\Big[\xi^2 \underbrace{(\xi^2 + \overline{\eta - q}^2)}_{q^2 - n^2} dp^2 + \eta^2 \underbrace{(\eta^2 + \overline{\xi - p}^2)}_{p^2 + n^2} dq^2 -$$

$$- 2\xi\eta\left[\eta(\eta - q) + \xi(\xi - p)\right] dp\, dq\Big].$$

Jak plyne však z trojúhelníků

$$M1S_1 \sim M2S_2, \text{ jest}$$

$$\xi : (q - \eta) = \eta : (\xi - p),$$

odkud $\rightarrow \quad \eta(\eta - q) + \xi(\xi - p) = 0 \quad \leftarrow$

a dále $\quad \overline{S_2 M} : \xi = \overline{S_1 M} : \eta$

odkud $\rightarrow \quad (q^2 - n^2) : (p^2 + n^2) = \xi^2 : \eta^2 \quad \leftarrow$

takže výraz pro ds^2 můžeme též psáti

$$ds^2 = \frac{\xi^2(q^2 - n^2)}{\delta^2}\left[dp^2 + \frac{(p^2 + n^2)^2}{(q^2 - n^2)^2} dq^2\right] \quad \text{čili}$$

$$ds^2 = \frac{\xi^2(q^2 - n^2)(p^2 + n^2)}{\delta^2}\left[\frac{dp^2}{(p^2 + n^2)^2} + \frac{dq^2}{(q^2 - n^2)^2}\right] \ldots (4)$$

Tvoří tudíž skutečně naše kružnice isothermický system. Jednou dvojicí u_1, v_1 příslušných thermických parametrů jest

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{dp}{p^2 + n^2} = \frac{1}{n} \operatorname{arc\,tg} \frac{p}{n} \\ v_1 &= \int \frac{dq}{q^2 - n^2} = \frac{1}{2n} \log \frac{q - n}{q + n} \end{aligned}\right\} \ldots (5)$$

odkud plyne naopak

$$\left.\begin{aligned} p &= n \log n u_1 \\ q &= -n \frac{e^{n v_1} + e^{-n v_1}}{e^{n v_1} - e^{-n v_1}} \end{aligned}\right\} \dots (5')$$

Na ploše kulové tvoří křivky meridiánové a kružnice paralelní rovněž soustavu isothermickou a jako příslušné parametry thermické seznali jsme

$$U = \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad V = \varphi.$$

Zavedeme-li jako jest obvyklo místo θ, φ zeměpisnou šířku u a délku v, takže

$$\theta = \frac{\pi}{2} + u, \quad \varphi = v$$

a vyjádření plochy kulové jest $x = \cos u \cos v$, $y = \cos u \sin v$, $z = \sin u$, jest

$$U = \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right), \quad V = v \dots (6).$$

Obecné zobrazení žádaného obrazu jest pak

$$u_1 = \pm a U + k, \quad v_1 = \pm a V + K \quad \text{(nebo naopak:)}$$

$$u_1 = \pm a V + K, \quad v_1 = \pm a U + k$$

Dělíme-li a, máme

$$\frac{u_1}{a} = \pm U + k_1, \quad \frac{v_1}{a} = \pm V + k_2 \quad \text{(nebo naopak)}.$$

Ale pro $\frac{u_1}{a}$ možno psáti z (5)

$$\frac{u_1}{a} = \frac{1}{an} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{ap}{an} \quad \text{a obdobně}$$

$$\frac{v_1}{a} = \frac{1}{2an} \log \frac{aq - an}{aq + an}$$

takže seznáváme, že píšeme-li $\frac{u_1}{a}$, $\frac{v_1}{a}$ místo u_1, v_1, provádíme tím pouze podobné zvětšení našeho obrazce kružnic v poměru $a : 1$. Změ na aditčních konstant zna-

mená pak ovšem pouze rovnoběžné posunutí v rovině.

Transformační vzorce možno tedy psáti na př. ve tvaru – máme-li na zřeteli též možnost zrcadlení dle os –

(7) ... $u_1 = -U + \alpha$, $v_1 = V + \beta$ nebo naopak

(8) ... $u_1 = V + \beta$, $v_1 = -U + \alpha$,

kde α, β značí konstanty.

Máme tudíž buďto

$$\left.\begin{aligned} p &= n \operatorname{tg}\left[n\alpha - n \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)\right] \\ q &= -n \frac{e^{n(v+\beta)} + e^{-n(v+\beta)}}{e^{n(v+\beta)} - e^{-n(v+\beta)}} \end{aligned}\right\} \dots (9)$$

anebo

$$\left.\begin{aligned} p &= n \operatorname{tg} n(v+\beta) \\ q &= -n \frac{e^{n\alpha - n \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)} + e^{-n\alpha + n \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)}}{e^{n\alpha - n \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)} - e^{-n\alpha + n \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)}} \end{aligned}\right\} (10)$$

K účelům kartografickým užívá se ovšem způsobu druhého (10), kdy obrazy pólů (severního a jižního) jsou body reálné.

Pro toto zobrazení není pro póly samé konformita obecně zachována. Neboť kružnice příslušná jedné z hodnot p má v bodě ($\xi = 0$, $\eta = n$) tečnu, jejíž úhel ω s osou ξ jest dán vztahem $\operatorname{tg} \omega = \frac{p}{n}$;

avšak z prvé rovnice (10) plyne pak

$$\omega = n(v+\beta) = nv + n\beta ,$$

kde $n\beta$ jest pouze addiční konstantou. Vidíme tudíž, že pro úhel $\omega_2 - \omega_1$ obrazů dvou meridiánů jest

$$\omega_2 - \omega_1 = n(v_2 - v_1) ,$$

takže úhel dvou meridiánů na ploše kulové jeví se v obraze n-kráte zvětšen.

Pouze pro případ $|n| = 1$ jest konformita zachována i pro póly. Jest zřejmo, že v tomto případě jest naše zobrazení stereografickou projekcí.

Zvolme dále na př. $n = \frac{1}{2}$. Pak objeví se nám obraz celé plochy kulové obsažen v ploše jedné kružnice o poloměru n. Předpokládejme pro další zjednodušení, že tato kružnice jest obrazem meridiánu ($v = 0$). Pak jest

$p = 0$ pro $v = 0$, odkud plyne (z prvého vz. (10))

$\beta = 0$. Dále pak budiž rovník zobrazen osou ξ, takže

$q = \infty$ pro $u = 0$ načež 2. vzorec (10) dává

$\alpha = 0$.

Tím zjednoduší se vzorce (20) na tvar

$$p = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{v}{2}, \quad q = \frac{1}{2} \cot \frac{u}{2} \quad \dots \quad (10')$$

– Případy odpovídající jiným volbám pro n, na př. $n = 0$ nebo $n = \infty$, jsou na snadě a pomíjíme je, tudíž i případy specielních isothermických soustav kružnic v rovině. (Jsou to: Svazek kružnic se dotýkajících a svazek kružnic k nim kolmých, v témže bodě se dotýkajících*; svazek kružnic soustředných a svazek jejich průměrů**; dvě navzájem kolmé soustavy rovnoběžných přímek**. – Tento poslední případ uvažujeme v dalším zvláště.)

71. Mercatorovo zobrazení. – Jest zřejmo, že neexistu-

*$n = 0$; **$n = \infty$

je takové konformní zobrazení plochy kulové na rovinu, při němž by všech ∞^2 největších kružnic plochy kulové mělo svými obrazy přímky. Stačí uvážiti, že součet úhlů vnitřních trojúhelníka rovinného jest vždy roven π, čemuž tak není pro trojúhelník sférický.

Můžeme tedy žádati pouze, aby meridiány a kružnice paralelní zobrazily se jako dvě navzájem kolmé soustavy rovnoběžek. Zobrazení toto, známé pod názvem zobrazení Mercatorova má tu výhodu,* že každá přímka v rovině zobrazuje pak loxodromu na ploše kulové, t. j. křivku, která protíná všecky meridiány nebo všecky kružnice paralelní pod konstantním úhlem čili křivku, – jde-li o mapu povrchu zemského –, která má stálý směr vzhledem ke stranám světovým.

Takovéto zobrazení dáno jest nejjednodušeji rovnicemi

$$\xi = v, \quad \eta = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right).$$

V. Stejnoplochá zobrazení ploch.

72. Dvě plochy. – Uvažujme takový případ vzájemného zobrazení obou ploch, že elementární plošky příslušící navzájem na obou plochách jsou si rovny. Pak jsou stejnoplochými i konečné navzájem příslušné části obou ploch.

Uvažované plochy budiž dány rovnicemi

* důležitou na př. pro plavbu na moři

$$(1)\begin{cases} x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ z = \chi(u,v) & \text{resp} \\ x_1 = f(u,v),\ y_1 = g(u,v),\ z_1 = h(u,v). \end{cases}$$

Pro plošný element omezený dvěma soumeznými křivkami (u) a dvěma soumeznými křivkami (v) — možno jest pokládati jej za rovnoběžník — platí výraz druhou

$$(2)\begin{cases} dP = \Delta\, du\, dv & \text{a pro plochu} \\ dP_1 = \Delta_1\, du\, dv. \end{cases}$$

Je-li tudíž zobrazení obou ploch provedeno přiřazením bodů o těchže parametrech, plyne z předpokladu

$dP = dP_1$ pro každý bod obou ploch vztah

$$\Delta = \Delta_1 \ldots (3)$$

Ježto však jsou-li obě soustavy parametrických křivek na obou plochách zcela obecné, nebude poslední vztah zpravidla splněn, musíme, abychom docíliti stejnoplochého zobrazení, užiti jistých vztahů

$$U = \Phi(u,v),\quad V = \Psi(u,v) \ldots (4)$$

značí-li U, V parametry na ploše druhé.

V těchto nových souřadnicích U, V vyjádřen jest plošný element prvé plochy ve tvaru

$$dP = \bar{\Delta}\, dU\, dV$$

při čemž mezi $\Delta, \bar{\Delta}$ platí jak známo vztah

$$\Delta = \pm\bar{\Delta}\,\delta \quad \text{při čemž} \quad \delta = \frac{\partial(U,V)}{\partial(u,v)}.$$

Pro plochu druhou jest

$$dP_1 = \Delta_1\, dU\, dV$$

takže vzhledem ku (3) platí podmínečná rovnice

$$\bar{\Delta} = \Delta_1 \quad \text{čili}$$

$$\delta = \pm\frac{\Delta}{\Delta_1}.$$

Jest-li $\delta = \Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v$, nutno funkce Φ, Ψ voliti tak, aby byla splněna rovnice

$$\Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v = \pm \frac{\Delta}{\Delta_1} \quad \dots (5),$$

kde Δ, Δ_1 jsou známé funkce u, v resp. U, V.

Funkcí Φ, Ψ žádaného druhu jest nekonečné množství, jest tedy též nekonečně mnoho způsobů stejnoplochého zobrazení dvou ploch.

73. Plocha a rovina. – Za parametry U, V pro rovinu zavedeme pravoúhlé souřadnice ξ, η

$$\xi = U, \quad \eta = V$$

takže jsou-li u, v parametry na ploše, jest zobrazení provedeno vztahy

$$\xi = \Phi(u, v), \quad \eta = \Psi(u, v) \quad \dots (1')$$

Jest-li pak jest nyní $\Delta_1 = 1$ (neboť $E_1 = G_1 = 1, F_1 = 0$) nabývá zcela podmínka stejnoplochého zobrazení tvaru

$$\Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v = \pm \Delta \quad \dots (2').$$

74. Rotační plocha a rovina. – Volíme-li mimoběžné otočení v za parametr u oblouk křivky meridiánové, jest rotační plocha dána rovnicemi

$$x = r(u) \cos v, \quad y = r(u) \sin v, \quad z = f(u) \quad \dots (1)$$

při čemž $r'^2 + f'^2 = 1$.

Pak jest tedy $E = 1, G = r^2, F = 0$ takže

$$\Delta = r$$

a rovnice (2') přechází odtud, dává-li pro stejnoplochá zobrazení rotační plochy na ro-

vime, definované vzťahy (1'), podmínku

$$\Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v = \pm r \dots (2)$$

Volme pro jednoduchost $\Psi = v \dots (3)$,

načež obdržíme z (2):

$$\Phi_u = \pm r \quad \text{takže možno klásti}$$

$$\Phi = \int_0^u r \, du \dots (4)$$

Nyní zobrazení plochy rotační na rovinu dáno jest touto vztahy

$$\xi = v, \quad \eta = \int_0^u r \, du \dots (5)$$

Tu meridiány (v) zobrazují se jako rovnoběžky k ose η. Probíhá-li v hodnoty od $-\pi$ do π, obdržíme všechny reálné meridiány a jejich obrazy, kteréžto vyplní určitý pruh roviny o celkové šířce 2π.

Zobrazení toho docílíme snadno tím, že myslíme si pomocný rotační válec o poloměru 1, souosý ku ploše rotační, a každému bodu plochy rotační přiřadíme onen bod téhož meridiánového řezu válce, jehož vzdálenost η od roviny (xy) jest $\int_0^u r \, du$, načež válec rozvineme.

75. Plocha kulová a rovina. – Uplatníme postup na plochu kulovou:

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u \dots (1').$$

Zde jest $r(u) = \cos u$

takže pro naše zobrazení

$$\xi = v, \quad \eta = \sin u \dots (5').$$

Vidíme, že $\eta = z$, takže bod plochy kulové a

příslušný bod plochy válcové — která jest ploše kulové opsána podél rovníku — mají stejnou vzdálenost od roviny (x, y).

Toto nejjednodušší zobrazení stejnoploché plochy kulové na rovinu, které bývá zváno zobrazením Lambertovým, přivádí nás ke známé větě o povrchu pásma kulového.

76. Rovina a rovina. — Odvodili jsme diferenciální rovnici, na jejíž řešení možno problém stejnoplochého zobrazení dvou ploch převésti. Toto obecné obtížné řešení obcházíme všeh způsobem tím, že dané plochy zobrazíme nejprve nějakým jednoduchým stejnoplochým zobrazením na rovinu, načež obecné stejnoploché zobrazení obou ploch obdržíme tím že určíme obecné stejnoploché zobrazení první roviny na rovinu druhou.

Uvažujme k tomuto cíli dvě roviny. Budiž v první z nich pravoúhlé souřadnice u, v a v druhé x, y. Zobrazení jest definováno vztahy

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \ldots (1)$$

Jelikož z obou různých stran roviny jeví se obsah obrazce jejího v různých smyslech, stačí bráti pouze jedno znaménko, takže máme zde podmínku

$$\varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u = 1 \ldots (2)$$

Za účelem řešení této diff. rovnice vyjadříme

$$v = \Phi(x, u), \quad y = \Psi(u, \Phi) \ldots (3)$$

předpokládajíce, že jest to možno. Pak jsou čísla x, u

nezávislé proměnné.

Derivací rovnice (3) plyne

$$1 = \psi_v \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \psi_v \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$0 = \psi_u + \psi_v \frac{\partial v}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \psi_u + \psi_v \frac{\partial v}{\partial u}$$

odkud

$$\psi_v = \frac{1}{\frac{\partial v}{\partial x}}, \quad \psi_v = \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial x}}$$

$$\psi_u = -\frac{\frac{\partial v}{\partial u}}{\frac{\partial v}{\partial x}}, \quad \psi_u = -\frac{\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial u}}{\frac{\partial v}{\partial x}} + \frac{\partial y}{\partial u}$$

Dosazením do (2) obdržíme

$$-\frac{\frac{\partial v}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}}{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} + \frac{\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial u}}{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} - \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial v}{\partial x}} = 1$$

čili

$$\underline{\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial u}} \quad \dots \quad (4)$$

Stačí tedy zvolit libovolnou funkci $\theta(u, x)$ a klásti

$$v = \frac{\partial \theta}{\partial u}, \quad y = -\frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \dots \quad (5)$$

Musí ovšem $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial x} \geq +$.

Jde-li o speciální obrazy zobrazení, v nichž soustavy přímek rovnoběžných vždy s jedinou osou souřadnou si odpovídají v obou rovinách, tedy na př. o případ

$$x = \Phi(u), \quad y = \Psi(u, v),$$

pak má-li zobrazení to být stejnoplohým, musí

$$\Phi' \Psi_v = 1, \quad \text{tedy}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v}\, dv = \frac{1}{\Phi'}\, dv\,, \quad \text{odkud}$$

$$\Psi = \frac{v}{\Phi'} + \omega(u)\,.$$

77. Plocha kulová a rovina. – Z vyvozeného zobrazení Lambertova možno tudíž na základě posledně řečeného odvoditi další stejnoplochá zobrazení plochy kulové na rovinu.

Zobrazíme uvedeným způsobem rovinu (x, y) na novou rovinu (ξ, η).* Uveďme jednu applikaci.

2). Zvolme $\theta = \sqrt{v^2 - \xi^2} - \xi \arccos \frac{\xi}{v}$.

Pak jest

$$\sin u = \frac{1}{v}\sqrt{v^2 - \xi^2}\,, \quad \eta = \arccos \frac{\xi}{v}$$

odkud

$$\xi = v \cos u\,, \quad \eta = u \ldots\ldots (1).$$

Při tomto zobrazení jeví se paralelní kružnice (u) jako rovnoběžky k ose ξ při čemž vzdálenosti jejich se zachovávají, kdežto meridiány (v) znázorněny jsou křivkami

$$\xi = v \cos \eta\,,$$

které obdržíme z cosinusoidy $\xi = \cos \eta$, obrazu to meridiánu $v = 1$, konstantním zvětšením úseček. Tyto obrazy meridiánů vytínají na obrazech kružnic paralelních úsečky téže délky jako příslušné úseky kružnic paralelních na kouli samé.

---

* ve vzorcích (2)…(5) předešl. odst. nutno tedy psáti ξ, η místo x, y a v, $\sin u$ místo u, v.

78. Jiný postup. – Seznali jsme, že methoda právě applikovaná vede k cíli bez integrace sice, pouhou eliminací, nedává však zobrazení jednoduchými rovnicemi vyjadřitelných jednoduchými volbami funkce Θ. Jde-li nám tudíž o to vyvoditi určité speciální druhy stejnoplochého zobrazení plochy kulové na rovinu, užijeme přímého postupu, při čemž nutny jsou ovšem integrace.

Rovnice
$$\xi = \Phi(u,v),\ \eta = \Psi(u,v) \quad \dots (1)$$
stanoví totiž obecně stejnoploché zobrazení plochy kulové (u zem. šířka, v zem. délka) na rovinu (ξ, η), je-li
$$\Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v = \pm \cos u .$$
Ježto pak změny znamének na pravé straně docílíme pouhou záměnou ξ, η, volme případ
$$\Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v = -\cos u \quad \dots (2).$$

Užijeme-li místo pravoúhlých souřadnic ξ, η souřadnic polárních r, φ:
$$\xi = r\cos\varphi,\ \eta = r\sin\varphi \quad \dots (3),$$
jsou také r, φ funkcemi u, v:
$$r = R(u,v),\ \varphi = F(u,v) \quad \dots (4),$$
při čemž podmínka (2) nabude po této transformaci tvaru:
$$\xi_u \eta_v - \eta_u \xi_v = \begin{vmatrix} r_u\cos\varphi - r\varphi_u\sin\varphi, & r_v\cos\varphi - r\varphi_v\sin\varphi \\ r_u\sin\varphi + r\varphi_u\cos\varphi, & r_v\sin\varphi + r\varphi_v\cos\varphi \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} r_u & r_v \\ r\varphi_u & r\varphi_v \end{vmatrix} \underbrace{\begin{vmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{vmatrix}}_{1} = r(r_u\varphi_v - \varphi_u r_v) = -\cos u$$

čili $$R(F_u R_v - R_u F_v) = \cos u \dots (5).$$

(3). Pro příklad plejme se nejprve po stejnoplochém zobrazení plochy kulové na rovinu, při němž kružnice paralelní jeví se jako soustředné kružnice a meridiány jako jejich průměry.

Funkce R nezávisí pak na v a funkce F na u, takže podmínka (5) nabývá tvaru

$$-RR'(u)F'(v) = \cos u,$$

načež, je-li a konstanta, možno klásti

$$R \cdot R'(u) = -a\cos u, \quad F'(v) = \frac{1}{a}, \quad \text{odtud}$$

$$R^2 = 2(b - a\sin u), \quad F(v) = \frac{v}{a} + c$$

takže

$$r = \sqrt{2(b - a\sin u)}, \quad \varphi = \frac{v}{a} + c \dots (6),$$

kde a, b, c jsou libovolné konstanty, jsou rovnice vytčeného zobrazení.

Otočením základního paprsku souřadnic polárních docílíme toho, že nulový meridián zobrazuje právě paprsek $\varphi = 0$, takže jest pak $c = 0$.

Póly plochy kulové zobrazují se jako kružnice o poloměrech $\sqrt{2(b \mp a)}$. Závadu tuto odstraníme pro severní pól ($u = \frac{\pi}{2}$) tím, že učiníme $b = a$, takže pro zobrazení

$$r = 2\sqrt{a}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right), \quad \varphi = \frac{v}{a} \dots (7)$$

jest společný střed kružnic obrazem severního pólu.

V případě $a = 1$ přikrývá obraz plochy kulové právě plochu kružnicí ($u = -\frac{\pi}{2}$) omezenou, v případě $a = 2$ kryje plochu polokruhu.

4). Žádejme nyní, aby kružnice pravoleté jevily se jako přímky rovnoběžné.

Tu použijeme ovšem souřadnic pravoúhlých ξ, η. Řečené přímky budiž rovnoběžny s osou ξ.

Pak jest Ψ funkcí pouze u a známe podmínku

$$\Psi'(u)\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \cos u, \quad \text{tedy}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi = \Phi &= \frac{v\cos u}{\Psi'(u)} + w(u) \\ \eta &= \Psi(u) \end{aligned}\right\} \ldots (8)$$

jsou rovnice zobrazení uvažovaného obrazu.

Žádejme nyní, aby meridiány jevily se jako přímky svazku, jehož střed budiž obrazem severního pólu.

Myslíme si osu η položenu právě tímto bodem, jehož souřadnice jsou tedy $(\xi = 0, \eta = b)$ kde b jest libovolná délka.

Každý meridián zobrazí se pak jako přímka

$$\xi : (\eta - b) = \text{konst},$$

t. j. poměr vyčíslený na levé straně jest funkcí pouze v — označme ji $V(v)$. Známe pak

$$\frac{v\cos u}{\Psi'(u)} + w(u) = V(v)\left[\Psi(u) - b\right].$$

A poněvadž levá strana jest lineární ve v, platí totéž o $V(v)$: $\quad V = av + c \quad (a, c \text{ konstanty})$,

načež porovnáním plyne

$$\frac{\cos u}{\Psi'} = a(\Psi - b), \quad w = c(\Psi - b),$$

odkud $\cos u = a(\Psi(u) - b)\,\Psi'(u)$, a integrací:

$$\sin u + \text{konst} = \frac{a}{2}(\Psi - b)^2, \quad \text{čili}$$

$$\Psi = b \pm \sqrt{\alpha + \frac{2\sin u}{a}} \qquad (\alpha \text{ konstanta})$$

a dále pak

$$\omega(u) = \pm c \sqrt{\alpha + \frac{2\sin u}{a}}.$$

Naše zobrazení dáno tedy rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \pm (av + c)\sqrt{\alpha + \frac{2\sin u}{a}} \\ \eta &= b \pm \sqrt{\alpha + \frac{2\sin u}{a}} \end{aligned}\right\} \dots (9).$$

Ježto bod $(\xi = 0, \eta = b)$ má býti obrazem severního pólu $(u = \frac{\pi}{2})$, musí býti $a = -\frac{2}{\alpha}$.

Můžeme ovšem osu ξ bráti právě za obraz rovníku $(u = 0)$, takže $b \pm \sqrt{\alpha} = 0$. Volíme-li $b > 0$, což jest opět možno aniž bychom zobrazení specialisovali, volíme spodní znaménko a klademe $\alpha = b^2$.

Pak jest $a = -\frac{2}{\alpha} = -\frac{2}{b^2}$.

Učiníme-li mimo to osu η obrazem nulového meridiánu, jest $c = 0$, takže máme

$$\xi = \frac{2}{b} v \sqrt{1 - \sin u}, \quad \eta = b(1 - \sqrt{1 - \sin u})$$

čili

$$(10) \dots \quad \xi = \frac{2\sqrt{2}}{b} v \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right), \quad \eta = b\left[1 - \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)\right].$$

Konstantu b volíme jak řečeno libovolně. Možno tedy volbu tu provésti tak, aby meridiány $(v = \pm \frac{\pi}{2})$ jevily se jako přímky, které tvoří s osou η úhel $\frac{\pi}{4}$. Jest třeba pouze,

pro hodnoty $u=0$, $v=\pm\frac{\pi}{2}$ bylo $\xi=\pm b$; jest pak $b=\sqrt{\pi}$ a známe konečné rovnice

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\, v \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{u}{2}\right),\\ \eta &= \sqrt{\pi}\left[1-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{u}{2}\right)\right]\end{aligned}\right\} \cdots (11).$$

Celá plocha kulová zobrazí se do rovnoramenného trojúhelníka, jehož základnou jest přímka $\eta=-\sqrt{\pi}(\sqrt{2}-1)$ o délce $4\sqrt{2\pi}$ jako obraz jižního pólu.

(5). Menší změny podoby nastávají zobrazí-li se meridiány jako ellipsy, při čemž kružnice paralelní necháme zobrazeny jako rovnoběžky. Zobrazení to známo jest jako zobrazení Mollweidovo.

Známé ellipsy mějte jednu osu o koncových bodech $\xi=0$, $\eta=\pm b$. Druhou poloosu tohoto ellipsy, obsaženou v ose ξ nutno voliti jako funkci $V(v)$ proměr v, takže jest

$$\frac{\xi^2}{V^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1 \cdots (12)$$

obrazem meridiánu (v).

Přejme se tedy po příslušné volbě funkcí $\Psi(u)$, $w(u)$ v rovnicích (8). Jelikož z poslední rovnice plyne

$$(12')\cdots \xi=\frac{V}{b}\sqrt{b^2-\eta^2},$$ musí býti (vzhledem ke (8))

$$\frac{v\cos u}{\Psi'(u)}+w(u)=\frac{V(v)}{b}\sqrt{b^2-\Psi^2(u)}.$$

Nejprve vidíme, že V jest lineární ve v

$$V=av+c$$

načež porovnáním plyne

$$\frac{\cos u}{\Psi'} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2-\Psi^2}, \quad w = \frac{c}{b}\sqrt{b^2-\Psi^2}.$$

První rovnice vládne

$$\cos u = \frac{a}{b}\,\Psi'\sqrt{b^2-\Psi^2}$$

a integrací

$$\sin u + \text{konst} = \frac{a}{2b}\,\Psi\sqrt{b^2-\Psi^2} + \frac{ab}{2}\arcsin\frac{\Psi}{b} \quad \ldots(13)$$

To jest rovnice pro $\Psi(u)$, načež pro $w(u)$ jest

$$w(u) = \frac{c}{b}\sqrt{b^2-\Psi^2} \quad \ldots \quad (14).$$

Učiňme za příčinou zjednodušení opět některé předpoklady, jimiž obecnost úvah se neruší.

Nulový meridián nechť jeví se jako osa η, pak jest $\xi = 0$ pro $v = 0$, t. j. (viz (8)) též $w = 0$, čímž vyplývá $c = 0$. Dále buďte obrazy meridiánů ($v = \pm\frac{\pi}{2}$) půlkružnicemi, tedy $V = \pm b$ pro $v = \pm\frac{\pi}{2}$. Jelikož $V = a\,v$, jest tedy $a = 2b : \pi$.

Osa ξ budiž obrazem rovníku, čímž odpadne konst. ve (13). Konečně buďte společné vrcholy ($\xi = 0$, $y = \pm b$) ellipsy obrazy pólů ($u = \pm\frac{\pi}{2}$). Pak jest Ψ rovno $\pm b$ pro $u = \pm\frac{\pi}{2}$, tedy $b = \sqrt{2}$.

Místo (13), (14) máme tedy

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\,\Psi\sqrt{2-\Psi^2} + \arcsin\frac{\Psi}{\sqrt{2}} &= \frac{\pi}{2}\sin u, \\ w &= 0 \end{aligned}\right\} (15)$$

a místo (8) (vzhledem ku (12'))

$$\xi = \frac{2}{\pi}\,v\sqrt{b^2-\eta^2}, \quad \eta = \Psi(u) \ldots\ldots (16)$$

Tyto vzorce zjednodušší se tím, zavedeme-li místo $\Psi(u)$ novou funkci $\varphi(u)$ vzťahem

$$\frac{\eta}{\sqrt{2}} = \frac{\Psi}{\sqrt{2}} = \sin\varphi(u).$$ Pak jest

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} v \cos\varphi \\ \eta &= \sqrt{2}\sin\varphi \end{aligned}\right\} \ldots (17), \text{ při čemž (viz (15))}$$

$$\rightarrow 2\varphi + \sin 2\varphi = \pi \sin u \leftarrow .$$

Poslední rovnice pro určení $\varphi(u)$ jest transcendentní, avšak jest možno stanoviti přibližně ke každé hodnotě u příslušnou hodnotu pro $\varphi(u)$ s jakoukoli přesností.

Zobrazením (17) zobrazuje se celá plocha kulová v plochu ellipsy o poloosách $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$.

6.) Nejobvyklejší v praxi byla po delší dobu projekce Bonneova, při níž kružnice paralelní zobrazují se jako soustředné kružnice mající poloměr rovný sférickému poloměru příslušných kružnic na kouli.

Ježí-to u jest sférická vzdálenost kružnice (u) od rovníka, má býti poloměr r jejího obrazu

$$(18) \ldots \quad r = a - u \quad (a = \text{konst}).$$

Užijeme ovšem polárních souřadnic r, φ, jejichž počátkem bude střed oněch soustředných kružnic a použijeme vzorce

$$R(F_u R_v - R_u F_v) = \cos u$$

kde $r = R(u,v)$, $\varphi = F(u,v)$,

z něhož vzhledem ku (18) plyne .

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\cos u}{a-u}, \quad \text{čili}$$

$$\varphi = \frac{v \cos u}{a-u} + w(u) \dots (19).$$

Zvolíme-li pro zjednodušení, aby mallový meridián zobrazil se jako přímka ($\varphi = 0$), pak jest $w = 0$. Pro póly dostáváme obrazy ($r = a \mp \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$); má-li tedy střed kružnice býti obrazem severního pólu, nutno voliti $a = \frac{\pi}{2}$, takže máme vzorce

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{\pi}{2} - u, \\ \varphi &= \frac{v \cos u}{\frac{\pi}{2} - u} \end{aligned}\right\} \dots (20).$$

Meridiány zobrazují se jako křivky transcendentní. Uvažujme průsečíky kružnice (u) s meridiány v_1, v_2. Pro obrazy bodů těch budiž amplitudy φ_1, φ_2. Pak jest

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\cos u}{r}(v_1 - v_2) \quad \text{čili}$$

$$r(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos u (v_1 - v_2).$$

Poněvadž pak $\cos u$ jest poloměr kružnice (u) na ploše kulové, seznáváme, že úseky vyťaté meridiány na kružnicích parallelních zobrazují se ve skutečné délce. Připomeneme-li si okolnost, že přímka $\varphi = 0$ představuje meridián mallový, můžeme transcendentní křivky ty snadno nakreslit.

Rovnice jejich jest $v \sin r = \varphi r$.

Dalších příkladů nebudeme uvádětí. Ve příčině přehledu projekcí plochy kulové na rovinu možno poukázati na př. na knihu Tissotovu, jemuž příslušší zásluha, že uspořádal projekce ty vzhledem k praktickým účelům.

74. **Dvě kollineárné roviny.** – Vyšetříme, jako poslední příklad, jakého druhu musí býti kollineace dvou rovin, aby vzájemné jejich body zobrazení bylo stejnoplochým. Roviny budiž vztaženy k pravoúhlým souřadnicím (x, y), (ξ, η). Pak jest obecně

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a x + b y + c} = \frac{P_1}{P}, \\ \eta &= \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a x + b y + c} = \frac{P_2}{P}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

při čemž

$a x + b y + c = 0$ jest rovnicí osy centrálné.

Podmínka stejnoplochého zobrazení jest

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{matrix}\right| = \pm 1 = \left|\begin{matrix} \frac{P a_1 - P_1 a}{P^2}, & \frac{P b_1 - P_1 b}{P^2} \\ \frac{P a_2 - P_2 a}{P^2}, & \frac{P b_2 - P_2 b}{P^2} \end{matrix}\right|$$

čili

$$\pm P^3 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) P + (a_2 b - a b_2) P_1 + (a b_1 - a_1 b) P_2 .$$

čili

$$\pm P^3 = \left|\begin{matrix} P & P_1 & P_2 \\ a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \end{matrix}\right|$$

Na levé straně jest výraz kubický, kdežto na straně pravé výraz lineární v x, y. Má-li rovnice býti možna, nesmí se tedy v ní x, y vyskytovati.

Klademe-li podle (2). $a = b = 0$, máme podmínku

$$\pm c^3 = \left|\begin{matrix} c & P_1 & P_2 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ & b_1 & b_2 \end{matrix}\right| = c \left|\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}\right| \quad \text{čili}$$

$$\pm 1 = \begin{vmatrix} \frac{a_1}{c} & \frac{a_2}{c} \\ \frac{b_1}{c} & \frac{b_2}{c} \end{vmatrix} \quad \dots \quad (3)$$

Naše kollineace jest tedy affinita

$$(4) \dots \begin{cases} \xi = A_1 x + B_1 y + C_1 \\ \eta = A_2 x + B_2 y + C_2 \\ \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = \pm 1. \end{cases}$$

takového druhu, že

VI. Zásady obecného zobrazení ploch.

80. Svazky tečen. – Buďtež dány dvě plochy v parametrickém vyjádření

$$(1) \begin{cases} x = f(u,v),\ y = g(u,v),\ z = h(u,v) \\ x_1 = f_1(u,v),\ y_1 = g_1(u,v),\ z_1 = h_1(u,v) \end{cases}$$

a zobrazme je navzájem přiřazením bodů o těchže parametrech. Buďte

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \\ ds_1^2 &= E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2 \end{aligned}\right\} (2)$$

čtverce lineárních elementů na obou plochách.

Uvažujme především příslušné směry na obou plochách. Přechod od bodu (u, v) k bodu $(u+du, v+dv)$ na obou plochách dává pro pravoúhlé souřadnice přírůstky

$$dx = x_u\,du + x_v\,dv, \quad dy = \dots$$
$$dx_1 = \bar{x}_u\,du + \bar{x}_v\,dv, \quad dy_1 = \dots$$

Tečny příslušných těchto směrů mají rovnice

$$\xi = x + dx \cdot \mathcal{P} = x + (x_u du + x_v dv)\mathcal{P}$$

kde $\mathcal{T}$ jest parametrem. Klademe

$$\mathcal{T} du = l, \quad \frac{dv}{du} = k$$

máme pro příslušné tyto tečny rovnice

$$(3)\ldots \begin{cases} \xi = x + (x_u + x_v k)\, l, & \xi_1 = x_1 + (\bar{x}_u + \bar{x}_v k)\, l \\ \eta = y + (y_u + y_v k)\, l, & \eta_1 = y_1 + (\bar{y}_u + \bar{y}_v k)\, l \\ \zeta = z + (z_u + z_v k)\, l, & \zeta_1 = z_1 + (\bar{z}_u + \bar{z}_v k)\, l \end{cases}$$

Měníme-li nyní k, obdržíme tím v obou bodech daných ploch svazky příslušných tečen, které tyto svazky jsou projektivní, jak plyne z okolnosti, že výrazy (3) jsou v $\underline{k}$ lineární.

Chceme-li důkaz přímo provést, dosazujeme do rovnic (3) za l jednotku. Tím vyjdeme na pouhé tečné body

$$(4)\quad \xi = x + x_u + x_v k, \quad \eta = y + y_u + y_v k, \quad \zeta = z + z_u + z_v k.$$

Měníme-li opět k, jest rovnicemi (4) patrně dána určitá přímka v naší rovině tečné.

A dosazujeme-li za k hodnoty k_1, k_2, k_3, k_4, pak příslušné $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ — souřadnice do průsečíků příslušných tečen s přímkou (4) — plyne provedením

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (k_1, k_2, k_3, k_4).$$

Jest tedy svazek tečen projektivní s řadou hodnot $\underline{k}$ a tedíž platí obdobně o svazku tečen bodu plochy obecné, čímž důkaz proveden.

Sledujme dále bezprostřední okolí příslušných bodů obou ploch.

81. Vztah plošných elementů. – Položíme-li $t, kt = w$ za proměnné, pak rovnice (3) jsou parametrickým vyjádřením soustav rovinných v ležných rovinách příslušných bodů obou ploch. Píšíce je ve tvaru

$$\left\langle \begin{array}{ll} \xi = x + x_u \cdot t + x_w \cdot w & \xi_1 = x_1 + \bar{x}_u \cdot t + \bar{x}_w \cdot w \\ \eta = y + y_u t + y_w \cdot w & \eta_1 = y_1 + \bar{y}_u \cdot t + \bar{y}_w \cdot w \\ \xi = z + z_u t + z_w \cdot w & \xi_1 = z_1 + \bar{z}_u \cdot t + \bar{z}_w \cdot w \end{array} \right\rangle ,$$

vidíme, že přiřazení bodů obou rovin na základě těchže parametrů t, w jest vztahem affinním obou rovinných soustav.

Chceme-li dříkaz opět podrobně provésti, vypočteme t, w z prvních dvou rovnic a dosadíme do druhých dvou:

$$t(x_u y_w - y_u x_w) = \begin{vmatrix} \xi - x & x_w \\ \eta - y & y_w \end{vmatrix}$$

$$w(x_u y_w - y_u x_w) = \begin{vmatrix} x_u & \xi - x \\ y_u & \eta - y \end{vmatrix} \qquad \text{načež}$$

$$\xi_1 = x_1 + \frac{\bar{x}_u \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{\cdots} + \frac{\bar{x}_w \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{\cdots} \qquad \text{což lze psáti:}$$

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \\ \eta_1 = a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \end{array} \right. \quad \text{a obdobně}$$

čímž dříkaz proveden.

Co platí o celých rovinných soustavách obou ležných rovin, platí zejména též o bezprostředním jejich okolí obou bodů dotyčných, takže seznámáváme, že parametry k, t provádějí affinní vztah plošných elementů kolem

příslušných bodů obou ploch.

82. Aplikace pro podmínky zobrazení stejnoplochého.

– Na základě vyvozeného vztahu snadno dospějeme ke stanovení známé podmínky stejnoplochého zobrazení.

Má-li affinita (a) být zobrazením stejnoplochým, musí její koeficienty splňovati podmínku

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \pm 1,$$

což dosazením dává

$$\begin{vmatrix} \bar{x}_u y_v - \bar{x}_v y_u, & -\bar{x}_u x_v + \bar{x}_v x_u \\ \bar{y}_u y_v - \bar{y}_v y_u, & -\bar{y}_u x_v + \bar{y}_v x_v \end{vmatrix} \frac{1}{(x_u y_v - x_v y_u)^2} = \pm 1$$

čili po provedení

$$\frac{\bar{x}_u \bar{y}_v - \bar{y}_u \bar{x}_v}{x_u y_v - y_u x_v} = \pm 1 \quad \dots (1)$$

Zobrazením parametrického vyjádření plochy původní budiž parametry u_1, v_1 při čemž zobrazení obou ploch budiž přiřazováno vzorci

$$u_1 = \Phi(u, v), \quad v_1 = \Psi(u, v) \quad \dots (2)$$

Pak vzhledem k tomu, že

$$\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u_1, v_1)} \frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)}$$

a vzhledem k tomu, že, jsou-li (X, Y, Z), resp. (X_1, Y_1, Z_1) souřadnice obou ploch, jest

$$Z = \frac{x_u y_v - y_u x_v}{\Delta}, \quad Z_1 = \frac{\bar{x}_{u_1} \bar{y}_{v_1} - \bar{y}_{u_1} \bar{x}_{v_1}}{\Delta_1},$$

možno rovnici (1) psáti ve tvaru

$$\frac{z_1 \Delta_1}{z \Delta} \frac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(u, v)} = \pm 1 \ldots (2).$$

Učiňme první sečnou rovinu rovinou (x, y) a druhou sečnou rovinu rovinou (x_1, y_1); pak obsahy přímětí obrazců v obou sečných rovinách do rovin (x, y) resp. (x_1, y_1) rovnají se obsahům obrazců těch samých, neboť $z = z_1 = 1$, takže rovnice (2) dává

$$\Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v = \pm \frac{\Delta}{\Delta_1} \ldots (3)$$

známou to podmínku pro to, aby zobrazení obou ploch, definované vztahy (x), bylo stejnoplochým.

83. Příslušné pravé úhly. — Pro úhel obou směrů k_1, k_2 na ploše platí jak známo

$$\cos \alpha = \frac{E + F(k_1 + k_2) + G k_1 k_2}{\sqrt{E + 2F k_1 + G k_1^2}\ \sqrt{E + 2F k_2 + G k_2^2}}$$

a obdobně pro úhel $\bar{\alpha}$ na ploše druhé.

Pro navzájem kolmé směry k_1, k_2, které si při zobrazení obou ploch příslušejí, platí tedy podmínky

$$\left.\begin{aligned} E + F(k_1 + k_2) + G k_1 k_2 &= 0 \\ \bar{E} + \bar{F}(k_1 + k_2) + \bar{G} k_1 k_2 &= 0 \end{aligned}\right\} (k)$$

Pro $k_1 + k_2$, $k_1 k_2$ plyne odtud

$$k_1 + k_2 = \frac{G\bar{E} - E\bar{G}}{F\bar{G} - G\bar{F}}, \quad k_1 k_2 = \frac{E\bar{F} - F\bar{E}}{F\bar{G} - G\bar{F}} \Bigg\} (r)$$

takže k_1, k_2 jsou kořeny kvadratické rovnice

$$(E\bar{F} - F\bar{E}) - (G\bar{E} - E\bar{G}) k + (F\bar{G} - G\bar{F}) k^2 = 0 \text{ čili}$$

$$\begin{vmatrix} k^2 & \mathcal{E} & \bar{\mathcal{E}} \\ -k & \mathcal{F} & \bar{\mathcal{F}} \\ 1 & \mathcal{G} & \bar{\mathcal{G}} \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \quad (1).$$

1) Vyloučujme případ $\mathcal{E} : \mathcal{F} : \mathcal{G} = \bar{\mathcal{E}} : \bar{\mathcal{F}} : \bar{\mathcal{G}}$
kdy řada rovnice jest splněna identicky, kdy tedíž jde o zobrazení konformní, takže každému pravému úhlu na jedné ploše přísluší pravý úhel na ploše druhé.

Pak má rovnice (1) dva kořeny, buďto různé nebo splývající. Jsou-li různé, snadno dokážeme, že jsou vždy reálné. Zavedeme pro okamžik

$$\xi = k_1 + \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}, \quad \eta = k_2 + \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}.$$

Pak značí první rovnice (k) rovnoosou hyperbolu

$$\xi\eta = -\frac{\Delta^2}{\mathcal{G}^2}$$

a první rovnice (r) značí přímku

$$\xi + \eta = \text{konst},$$

jak posazením snadno seznáme. Přímka jest rovnoběžná k hlavní ose hyperboly, tedy protíná ji v reálných bodech — čímž důkaz proveden.

Při tom ovšem předpokládáme mlčky, že obě plochy i jejich zobrazení jsou reálné, takže též $\mathcal{E}, \dots$ mají reálné hodnoty. Pak v případě různých* kořenů rovnice (1) existují na plochách dvě reálné ortogonální soustavy křivek, které si navzájem odpovídají. Rovnice (2) (viz násl. str.) jest diferenciální rovnicí

*pro všechny body plochy

$$\begin{vmatrix} du^2 & \mathfrak{E} & \bar{\mathfrak{E}} \\ -du\,dv & \mathfrak{F} & \bar{\mathfrak{F}} \\ dv^2 & \mathfrak{G} & \bar{\mathfrak{G}} \end{vmatrix} = 0 \qquad \dots (2)$$

těchto soustav.

3) Splývají-li oba kořeny, pak oba orthogonální směry, které jim přísluší, splývají v jeden směr isotropický. A je-li tomu tak pro všechny body plochy, přísluší v našem zobrazení jedné soustavě křivek minimálních na jedné ploše jedna soustava minimálních křivek na ploše druhé – kdežto jak známo v případu 1) zobrazení konjugovaného přísluší oběma soustavám minimálních křivek plochy jedné obě soustavy minimálních křivek plochy druhé.

Případ 3) není v případě reálného zobrazení dvou reálných ploch možný, takže jde-li o reálné, nekonformní zobrazení dvou reálných ploch, existují na plochách těch obvě a jenom obvě reálné navzájem orthogonální soustavy křivek, které si zobrazením jim odpovídají.

Pozn. Podobně jako příslušné orthogonální směry možno též uvažovati příslušné navzájem sdružené směry k_1, k_2 dvou ploch. Pro tyto platí rovnice

$$L + M(k_1 + k_2) + N k_1 k_2 = 0$$
$$\bar{L} + \bar{M}(k_1 + k_2) + \bar{N} k_1 k_2 = 0$$

kdežto k_1, k_2 jsou kořeny rovnice

$$\begin{vmatrix} k^2 & L & \bar{L} \\ -k & M & \bar{M} \\ 1 & N & \bar{N} \end{vmatrix} = 0$$

Patrno jest tedy, že existují obecně dva různé (nemusí však býti reálné*) směry sdružené navzájem příslušné a tedy též soustavy sdružených křivek, příslušné navzájem na obou plochách. Splývající směry sdružené jsou jak známo směry asymptotické. V případě speciálním budiž podotčeno, že platí věta Bonnetova: Odpovídají-li si na dvou plochách dvě soustavy křivek asymptotických, jsou to buďto plochy přímkové nebo plochy shodné nebo souměrné.

---

84. Další souvislost plošných elementů. – Vylučujíce případy 1), 3) zaveďme uvažované pravoúhlé systémy křivek za křivky parametrické (u), (v). Pak pro lineární elementy obou ploch máme výrazy

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$
$$d\bar{s}^2 = \bar{E}\,du^2 + \bar{G}\,dv^2.$$

Pro úhel φ směru $\frac{dv}{du}$ s křivkou (u) jest

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{E}\,du}{ds}, \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{G}\,dv}{ds}.$$

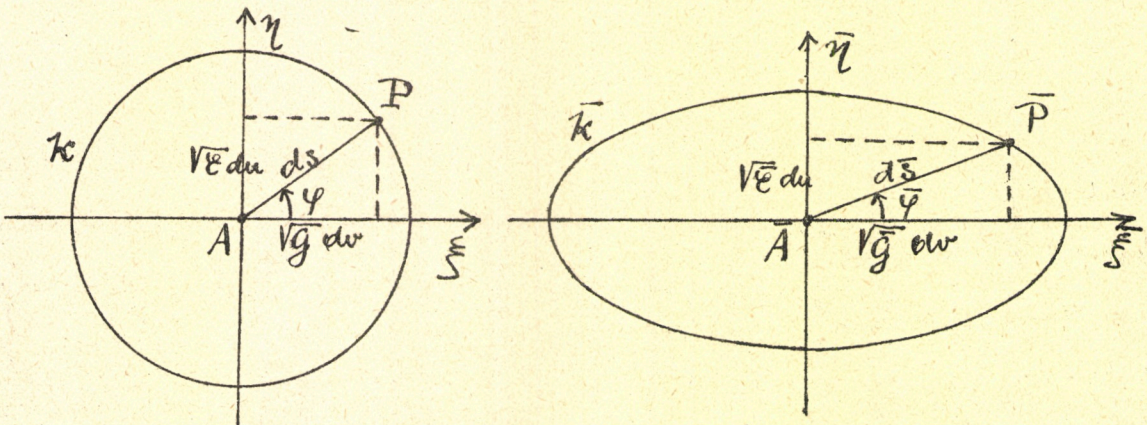
Pro příslušný úhel $\bar{\varphi}$ na ploše druhé jest pak obdobně

$$\sin\bar{\varphi} = \frac{\sqrt{\bar{E}}\,du}{d\bar{s}}, \quad \cos\bar{\varphi} = \frac{\sqrt{\bar{G}}\,dv}{d\bar{s}}.$$

Uvažujme na prvé ploše body mající od bodu A konstantní nekonečně malou vzdálenost ds. Místem jejich jest kružnice K. Bodům těm odpovídají – ježto vztah obou

---

* neboť úvaha o reálnosti kořenů, obdobná příslušné předchozí, není zde možna



plošných elementů jest tím, že navzájem přiřazujeme body těchže parametrů u, v, úplně stanoven — body určité křivky $\bar{k}$. Tak na př. bodu P — jenž má vzhledem k soustavě pravoúhlé (ξ, η) stanovené tečnami parametrických křivek $(u), (v)$ souřadnice

$$\xi = ds \cos\varphi = \sqrt{G}\, dv\,, \quad \eta = ds \sin\varphi = \sqrt{E}\, du\,,$$

příslušný bod $\bar{P}$ v obdobných souřadnicích

$$\bar{\xi} = d\bar{s} \cos\bar{\varphi} = \sqrt{\bar{G}}\, dv\,, \quad \bar{\eta} = d\bar{s} \sin\bar{\varphi} = \sqrt{\bar{E}}\, du\,.$$

Mezi souřadnicemi těmito platí tedy vztah

$$\xi = \sqrt{\frac{G}{\bar{G}}}\,\bar{\xi}\,, \quad \eta = \sqrt{\frac{E}{\bar{E}}}\,\bar{\eta}$$

a jelikož naše kružnice k jest dána rovnicí

$$\xi^2 + \eta^2 = ds^2\,,$$

máme pro křivku $\bar{k}$ rovnici

$$\frac{G}{\bar{G}}\,\bar{\xi}^2 + \frac{E}{\bar{E}}\,\bar{\eta}^2 = ds^2\,,$$

jest to tedy ellipsa o poloosách $\sqrt{\frac{G}{\bar{G}}}\,ds$, $\sqrt{\frac{E}{\bar{E}}}\,ds$, neboť $E, G, \bar{E}, \bar{G}$ jsou pro reálné plochy a reálné jejich vyjádření čísla kladná.

Ellipsa $\bar{k}$ bývá nazývána Tissot-ovou indikatrix, na rozdíl od známé námi indikatrix Dupinovy bodu plochy.

Poloměry kružnice k zobrazují se jako poloměry elipsy $\bar{k}$. Poněvadž pak osy elipsy jsou maximem resp. minimem poloměrů, seznáváme, že uvažované orthogonální křivky jsou křivkami, podél nichž v každém bodě plochy mají liniové elementy bodem jdoucí největší změnu délky při našem zobrazení.

Rovněž vidíme, že křivky neměnící zobrazením své délky, pro které tedy jest $ds = d\bar{s}$, tvoří dvě soustavy takového druhu, že úhly obou křivek bodem plochy jdoucích přímky jsou křivkami orthogonálního systému.

Uvažujme dále úhly směrů k_1, k_2 na obou plochách. Pro tangenty úhlů těch, $\alpha, \bar{\alpha}$, máme jak známo

$$tg\,\alpha = \frac{\Delta(k_1-k_2)}{E+F(k_1+k_2)+Gk_1k_2}, \quad tg\,\bar{\alpha} = \frac{\bar{\Delta}(k_1-k_2)}{\bar{E}+\bar{F}(k_1+k_2)+\bar{G}k_1k_2}.$$

Budiž úhel směrů těch nekonečně malý, budiž to tedy směry k, $k-dk$; pak píšeme $d\alpha$ místo α a užijme té okolnosti, že možno pak klásti $tg\,d\alpha = d\alpha$.

Máme pak

$$d\alpha = \frac{\Delta\,dk}{E+2Fk+Gk^2}, \quad d\bar{\alpha} = \frac{\bar{\Delta}\,dk}{\bar{E}+2\bar{F}k+\bar{G}k^2}.$$

Pro naše vyjádření parametrické jest však

$$F=\bar{F}=0, \quad \Delta=\sqrt{EG}, \quad \bar{\Delta}=\sqrt{\bar{E}\bar{G}}$$

takže jest zde

$$d\alpha = \frac{\sqrt{EG}}{E+Gk^2}\,dk \,, \quad d\bar{\alpha} = \frac{\sqrt{\bar{E}\bar{G}}}{\bar{E}+\bar{G}k^2}\,dk .$$

Pro poměr obou úhlů máme tedy

$$\frac{d\bar{\alpha}}{d\alpha} = \sqrt{\frac{\bar{E}\bar{G}}{EG}}\;\frac{E+Gk^2}{\bar{E}+\bar{G}k^2}$$

který žto výraz nabývá maxima resp. minima pro $k=0$ resp $k=\infty$ čili pro $dv=0$ resp $du=0$.

Seznáváme tudíž, že dvě nekonečně malé úhly ležící podél křivek našeho orthogonálního systemu dosahují při zobrazení největší změny ze všech nekonečně malých úhlů o témž vrcholu.

Podél křivek našeho orthogonálního systemu dostáváme tedy při zobrazení největší změny podoby.

VII. Deformace ploch.

85. Nutné podmínky. – Přechod od dané plochy ku ploše jiné, při kterém vzájemné zobrazení obou ploch jest zároveň konformní i stejnoplohé, nazýváme deformací jedné plochy na druhou.

– Ponechme při naší úvaze stranou otázku, zdali deformaci tu možno pak vždy spojitým zahýbáním – bez zahybů a natažení plochy – skutečně provésti. V tomto případě jest tedy nutna existence spojitého sledu změn podoby dané plochy až k ploše druhé. V té příčině dokáž-

zal Levi, že tomu tak skutečně jest, mají-li obě plochy zápornou křivost, avšak v případě kladné křivosti že jest nutno jednu z obou ploch nahradit plochou k ní souměrnou. —

Obě plochy budiž dány rovnicemi

$$x = f(u,v),\ y = g(u,v),\ z = h(u,v), \quad \dots (1)$$
$$\bar{x} = \varphi(u,v),\ \bar{y} = \psi(u,v),\ \bar{z} = \chi(u,v) \quad \dots (2).$$

Platí-li pro lineární jejich elementy

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ d\bar{s}^2 &= \bar{E}\,du^2 + 2\bar{F}\,du\,dv + \bar{G}\,dv^2 \end{aligned}\right\} (3),$$

pak má-li zobrazení jejich obmé přiřazením bodů o týchž parametrech býti konformním, musí

$$\frac{E}{\bar{E}} = \frac{F}{\bar{F}} = \frac{G}{\bar{G}} = \varkappa;$$

má-li pak býti též stejnoplochým, musí plošný poměr $\varkappa$ býti roven 1, takže pro deformaci jest nutně

$$E = \bar{E},\ F = \bar{F},\ G = \bar{G} \quad \dots (4).$$

Podmínka (4) jest též postačující, neboť důsledkem jejím jest: $ds = d\bar{s}$, t. j. elementy lineární příslušné navzájem na obou plochách jsou si rovny, odkud plyne, že příslušné elementární ploušky na obou plochách jsou shodny čili navzájem podobné i stejnoploché. — Rovnost lineárních elementů má ovšem v zápětí, že každé křivce (o konečné délce) na jedné ploše příslušší křivka téže délky na ploše druhé.

Aby bylo možno obě plochy na sebe deformovati, musí býti pro ně sestrojeny takové dvojice parametrů u, v,

aby příslušné základní veličiny obou ploch byly navzájem rovny.

Jest patrno, že pro zcela libovolné dvě plochy této možnosti obecně nebude, jak možno již souditi ze známé nám okolnosti, že na rovinu dají se deformovati – čili rozvinouti (zde v užším slova smyslu myšleno; dvě plochy, které lze na sebe deformovati, označujeme totiž také křivkami plochami navzájem rozvinutelnými), čili že rozvinutelnými (opět v užším slova smyslu) jsou pouze plochy zcela speciálního druhu, totiž plochy tečen křivek prostorových.

86. Totální křivost. Příklad. – Gaussova míra křivosti čili totální křivost plochy má vzhledem k uvažovaným problémům důležitý význam. Křivost tato dána jest totiž druhou základní rovnicí jako funkce veličin E, F, G a jejich derivací, odkud plyne, že dvě plochy navzájem rozvinutelné mají v příslušných si bodech touž totální křivost, čili, jinak řečeno, že totální křivost všech bodů plochy se deformací nemění.

Existuje-li však naopak pro dvě plochy takové vzájemné zobrazení, že každý bod jedné plochy má touž míru křivosti jako příslušný k němu bod plochy druhé, neplyne z toho ještě, že by toto zobrazení jedné plochy na druhou bylo deformací.

Uveďme jednoduchý příklad. Uvažujme plochu rotační, jejímž meridiánem jest křivka logaritmická $z = \log x$

mající osu rotace z asymptotou. Pro plochu platí pak parametrické vyjádření

$$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = \log u \quad \ldots\ (1).$$

Mimo to mějme obyčejnou plochu šroubovou, a to takovou, že její parametr jest 1, čili že výška jednoho závitu jest 2π:

$$x_1 = u_1\cos v_1,\quad y_1 = u_1\sin v_1,\quad z_1 = v_1 \quad \ldots\ (2)$$

Pak pro lineární elementy máme

$$ds^2 = \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du^2 + u^2\, dv^2$$

$$d\bar{s}^2 = du_1^2 + (1 + u_1^2)\, dv_1^2.$$

Dosazením veličin prvého řádku do vzorce Gaussova obdržíme pro míru křivosti obou ploch výrazy:

$$K = -\frac{1}{(1+u^2)^2},\quad K_1 = -\frac{1}{(1+u_1^2)^2}.$$

Zobrazíme-li body obě plochy navzájem tím, že klademe $u = u_1$, $v = v_1$, mají příslušné k sobě body stejnou míru křivosti, ačkoli veličiny E, F, G nejsou si rovny, ačkoli tedy toto zobrazení není deformací. Tím máme poslední výrok shora učiněný.

Možno zde dokonce snadno dokázati, že vůbec není možna vzájemná deformace obou těchto ploch. Neboť jestliže deformací se míra křivosti nemění, musí pro ni

$$1 + u^2 = \pm\,(1 + u_1^2),\quad \text{načež}$$

a) buďto $u_1 = \pm u$, $v_1 = \varphi(u, v)$, takže pro lin. element druhé plochy jest

$$d\bar{s}^2 = du^2 + (1+u^2)(\varphi_u\, du + \varphi_v\, dv)^2$$

$$= du^2 + (1+u^2)(\varphi_u^2\, du^2 + 2\varphi_u\varphi_v\, du\, dv + \varphi_v^2\, dv^2)$$

takže porovnáním základních veličin obou ploch obdržíme vztahy

$$\frac{u^2+1}{u^2} = 1 + (1+u^2)\varphi_u^2, \quad \varphi_u\varphi_v = 0, \quad (1+u^2)\varphi_v^2 = u^2$$

kterým není možno volbou funkce φ vyhověti, neboť z druhé rovnice plyne buďto $\varphi_u = 0$ nebo $\varphi_v = 0$, což obojí vede k rozporům;

b) nebo $u_1 = \pm\sqrt{-2-u^2}$, $v = \varphi(u, v)$

načež pro liniový element druhé plochy jest

$$ds_1^2 = -\frac{u^2}{2+u^2}du^2 + (1+u^2)(\varphi_u^2 du^2 + 2\varphi_u\varphi_v du\,dv + \varphi_v^2 dv^2)$$

odkud plyne

$$-\frac{u^2}{2+u^2} + (1+u^2)\varphi_u = 1 + \frac{1}{u^2}, \quad \varphi_u\varphi_v = 0, \quad (1+u^2)\varphi_v^2 = u^2,$$

což opět vede k rozporům.

87. Vyšetřiti, zdali 2 plochy lze navzájem deformovati.

a) Vyjádříme-li plocha první parametry u, v a plocha druhá parametry u_1, v_1, přechází náš problém obecně v úlohu, rozhodnouti, zdali existují mezi obojími parametry jednoznačné vztahy

$$u_1 = \varphi(u, v), \quad v_1 = \psi(u, v) \quad \ldots (1)$$

aby zobrazení vztahy těmi definované bylo deformací? Připomeneme-li si transformační vzorce

$$\left.\begin{aligned} E &= E_1\varphi_u^2 + 2F_1\varphi_u\psi_u + G_1\psi_u^2 \\ F &= E_1\varphi_u\varphi_v + F_1(\varphi_u\psi_v + \psi_u\varphi_v) + G_1\psi_u\psi_v \\ G &= E_1\varphi_v^2 + 2F_1\varphi_v\psi_v + G_1\psi_v^2 \end{aligned}\right\} \ldots (2),$$

odpovídající zavedení parametrů u_1, v_1 (viz (1)) na ploše první, vidíme, že existují-li funkce $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$

takového druhu, aby splňovaly současně všechny tři rovnice (2), kde E_1, F_1, G_1 jsou základními veličinami plochy druhé, jest pak zobrazení obou ploch, při kterém přiřazujeme navzájem body o stejných parametrech u_1, v_1, žádanou deformací.

Existují-li funkce takové, pak z rovnic (1) vypočteme naopak $u = \varphi_1(u_1, v_1)$, $v = \psi_1(u_1, v_1)$ a dosadíme odtud do rovnic parametrických ploch prvé, čímž dostaneme její vyjádření pomocí u_1, v_1, které vede nás k žádanému zobrazení.

Poněvadž však řešení našeho problému tímto nejzákladnějším způsobem jest zpravidla obtížné, užíváme raději jiných obratů.

6) Užijme k okolnosti, že deformace jest zobrazením konformním, takže křivkám minimálním plochy jedné odpovídají křivky minimální plochy druhé.

Zavedeme čáry na obou uvažovaných plochách křivky minimální za parametrické, čehož docílíme známým způsobem. Na prvé ploše budiž u, v, na druhé ploše $\bar{u}, \bar{v}$ příslušnými parametry. Pak pro lineární elementy mámě výrazy

$$ds^2 = 2\,\mathfrak{F}(u, v)\,du\,dv$$
$$d\bar{s}^2 = 2\,\bar{\mathfrak{F}}(\bar{u}, \bar{v})\,d\bar{u}\,d\bar{v}.$$

Je-li pak nyní <u>průměr</u> $\mathfrak{F}$ touž funkcí u a v jako $\bar{\mathfrak{F}}$ funkcí $\bar{u}$ a $\bar{v}$, jest zobrazení obou ploch dané rovnicemi $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$ žádanou deformací.

Obecně, za druhé, ovšem tento případ nenastane. Víme totiž, že k určité soustavě křivek parametrických náležejí jen jedna dvojice parametrů. Křivkami parametrickými na př. na ploše prvé budou křivky minimální i tehdy, zavedeme-li místo u, v nové parametry $\bar{u}, \bar{v}$ tak, že

buďto $\quad u = \mathfrak{A}(\bar{u}), \quad v = \mathfrak{B}(\bar{v})$

nebo ve druhém případě

$$u = \mathfrak{B}(\bar{v}), \quad v = \mathfrak{A}(\bar{u}),$$

kde $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ značí libovolné funkce, čímž pro lineární element máme

buďto $\quad ds^2 = 2F(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\, d\bar{u}\, d\bar{v}$

nebo ve druhém případě

$$ds^2 = 2F(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) \cdot \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\, d\bar{u}\, d\bar{v}.$$

Je-li tedy

buďto $\quad \bar{F} = F(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$

anebo

$$\bar{F} = F(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) \cdot \mathfrak{A}'\mathfrak{B}',$$

jest přiřazení bodů obou ploch o těchže parametrech $\bar{u}, \bar{v}$ žádanou deformací.

Tím máme již řešení našeho problému převedeno na úvahu rovnic jednoduššího tvaru.

c. Jiný způsob vyplyne nám úvahou (již v předch. článku na příkladě užitou) té okolnosti, že deformací se míra křivosti bodu plochy nemění.

Plocha prvá budiž opět vyjádřena parametry u_1, v_1 a plocha druhá parametry $\bar{u}_1, \bar{v}_1$.

Vyloučujeme-li plochy stálé míry křivosti, je

$$K = \varphi(u_1, v_1), \quad \bar{K} = \bar{\varphi}(\bar{u}_1, \bar{v}_1).$$

Zavedňme na obou plochách křivky bodů stálé míry křivosti za křivky jedné soustavy přiřazujíce navzájem křivky o téže hodnotě konstanty, takže klademe pro obě plochy

$$u = \psi(u_1, v_1), \quad u = \bar{\psi}(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$$

Na ploše prvé nechť přistoupí k parametru u druhý parametr v a na ploše druhé druhý parametr $\bar{v}$, při čemž zobrazení budiž obecně definováno vztahem

$$\bar{v} = \chi(u, v).$$

— (kromě ovšem vztahu $u = u$).

Pak jest

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$d\bar{s}^2 = \bar{E}\,du^2 + 2\bar{F}\,du\,d\bar{v} + \bar{G}\,d\bar{v}^2.$$

Ježto pak $d\bar{v} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}\,du + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}\,dv$,

jest

$$d\bar{s}^2 = \bar{E}\,du^2 + 2\bar{F}\,du\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial u}\,du + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}\,dv\right) + \bar{G}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial u}\,du + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}\,dv\right)^2,$$

takže, má-li zobrazení naše býti deformací, musí býti splněny vztahy

$$E = \bar{E} + 2\bar{F}\frac{\partial \bar{v}}{\partial u} + \bar{G}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial u}\right)^2$$
$$F = \bar{F}\frac{\partial \bar{v}}{\partial v} + \bar{G}\frac{\partial \bar{v}}{\partial u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial v}$$
$$G = \bar{G}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial v}\right)^2.$$

Musí tudíž existovati funkce $\chi(u, v) = \bar{v}$ takového druhu, aby současně všem těmto třem rovnicím vy-

hovělou, takže, ježto z posledních dvou plyne

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial v} = \sqrt{\frac{G}{\bar{G}}}, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} = \frac{\mathcal{F} - \bar{\mathcal{F}}\sqrt{\frac{G}{\bar{G}}}}{\sqrt{\bar{G}}\,G} = \frac{\mathcal{F}\sqrt{\bar{G}} - \bar{\mathcal{F}}\sqrt{G}}{\bar{G}\sqrt{G}},$$

musí především

$$\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{G}{\bar{G}}} = \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\mathcal{F}\sqrt{\bar{G}} - \bar{\mathcal{F}}\sqrt{G}}{\bar{G}\sqrt{G}}.$$

a přibéřeme-li rovnici první, seznáme po krátké úpravě, že musí též

$$\mathcal{E} - \frac{\mathcal{F}^2}{G} = \bar{\mathcal{E}} - \frac{\bar{\mathcal{F}}^2}{\bar{G}}$$

čili

$$\frac{\Delta}{G} = \frac{\bar{\Delta}}{\bar{G}}.$$

Tato poslední rovnice stanoví nám obecně hledanou funkci $\chi(u,v) = \bar{v}$.

Tento postup c) jest patrně obyčejně obtížnější než předchozí postup b).

88. Plochy stálé míry křivosti. – Budiž úlohou rozhodnouti, kdy dvě plochy takového druhu lze na sebe deformovati.

Zavedme na dané ploše křivky minimální za křivky parametrické. Jsou-li u, v příslušné parametry, jest (1) ... $ds^2 = 2\mathcal{F}(u,v)\,du\,dv$, při čemž pro míru křivosti platí výraz

$$K = -\frac{1}{\mathcal{F}}\,\frac{\partial^2 \log \mathcal{F}}{\partial u\,\partial v} \quad \ldots (2).$$

Položíme-li v levé rovnici $K = \text{konst.}$, máme tím diferenciální rovnici pro funkci $\mathcal{F}(u,v)$. Řešíme-li ji a

výsledek dosadíme do ds^2, nabudeme tím jednoduchého výrazu pro lineární element plochy konstantní míry křivosti.

Řešení rovnice (1), kterou píšeme ve tvaru

$$\frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} + K F = 0 \quad \dots (2),$$

podal jedním způsobem Liouville:

Zavedeme pomocnou funkci θ, kde

$$F = \frac{\partial \theta}{\partial u} \quad \dots (3). \quad \text{Pak jest}$$

$$\frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} + K \frac{\partial \theta}{\partial u} = 0, \qquad \text{odkud}$$

$$\int \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} du + K \int \frac{\partial \theta}{\partial u} du + f(v) = 0 \qquad \text{čili}$$

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial v} + K \theta + f(v) = 0 \qquad \text{nebo vzhledem ku (3)}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + K \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} + f(v) \frac{\partial \theta}{\partial u} = 0 \qquad \text{načež}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{K}{2} \theta^2 + \theta f(v) + g(v) = 0 \quad \dots (4),$$

kde $\theta(u, v)$ jest ovšem funkcí obou parametrů.

Dejme tomu, že bychom znali jeden partikulární integrál $w(v)$ této rovnice. Pak položme

$$\theta = w(v) - \psi(u, v) \quad \dots (5).$$

Pro určení funkce $w(v)$ máme při tom podmínku

$$\frac{\partial w}{\partial v} + \frac{K}{2} w^2 + w f(v) + g(v) = 0 \quad \dots (5')$$

která jest dle známého označení rovnicí Riccatiho.

Rovnice (4), (5), (5') vedou nás pro $\psi(u, v)$ k rovnici

$$-\frac{\partial \psi}{\partial v} - K w(v) \psi + \frac{K}{2} \psi^2 - \psi \cdot f(v) = 0 \quad \dots (6)$$

čili $$-\frac{1}{\psi^2} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{1}{\psi} [K w(v) + f(v)] + \frac{K}{2} = 0$$

a položíme-li

$$\frac{1}{\Psi} = \xi \quad \dots (6'),$$ máme pro $\xi(u,v)$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} - [K w(v) + f(v)]\,\xi = -\frac{K}{2} \quad \dots (7),$$

lineární do rovnici 1. řádu.

Vzhledem k známému řešení

$$y = e^{-\int P dx}\left(\mathcal{C} + \int Q e^{\int P dx} dx\right)$$

rovnice $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$

jest zde hledaný

$$\xi = e^{\int [K w(v) + f(v)]\,dv}\left[\Phi(u) - \frac{K}{2}\int e^{-\int [Kw + f]\,dv}\,dv\right].$$

Pro přehlednost položme

$$\frac{K}{2}\int e^{-\int [Kw+f]\,dv}\,dv = \Psi(v) \quad \dots (7'),$$ odkud

$$\frac{K}{2}\, e^{-\int [Kw+f]\,dv} = \Psi'(v), \quad e^{\int \dots} = \frac{K}{2\Psi'},$$

takže

$$\xi = \frac{K}{2\Psi(v)}\left(\Phi(u) + \Psi_1(v)\right) \quad \dots (8)$$

klademe-li $\Psi_1 = -\Psi \quad \dots (8')$.

Pak jest

$$\theta = w(v) + \frac{2\Psi_1(v)}{K(\Phi(u) + \Psi_1(v))},$$

hledaný $$\mathcal{F} = -\frac{2\Phi'(u)\Psi_1'(v)}{K(\Phi + \Psi_1)^2}$$

nebo, píšeme-li $\Phi(u) = \mathcal{U}$, $\Psi_1(v) = \mathcal{V}$,

$$\mathcal{F} = -\frac{2}{K}\,\frac{\mathcal{U}'\mathcal{V}'}{(\mathcal{U}+\mathcal{V})^2} \quad \dots (9).$$

Křivky parametrické se však nezmění, bereme-li U, V za parametry u, v. Jest pak

$$\mathcal{F} = -\frac{2}{K}\,\frac{1}{(u+v)^2},$$

tedy

$$ds^2 = -\frac{4}{K}\,\frac{du\,dv}{(u+v)^2} \quad \ldots\ (10).$$

Na tento jednoduchý tvar možno tedy uvésti výraz pro lineární element plochy konstantní míry křivosti K, - při čemž parametrickými křivkami jsou kř. minimální.

Je-li pak mimo tuto plochu dána druhá plocha téhož druhu, o konstantní křivosti K_1 a vyjádříme-li ji rovněž parametry u, v příslušnými křivkám minimálním, jest

$$ds_1^2 = -\frac{4}{K_1}\,\frac{du\,dv}{(u+v)^2}$$

a vidíme, že je-li $K = K_1$, jest přiřazení bodů obou ploch, jimž přísluší stejné parametry, deformací.

Zdůrazňujeme tudíž, že každé dvě plochy stálé a stejné míry křivosti dají se na sebe deformovati.

Ve příčině ploch stálé kladné křivosti plyne odtud, že každá plocha toho druhu dá se deformovati na určitou plochu kulovou (o poloměru $\frac{1}{\sqrt{K}}$). Poněvadž pak plocha kulová může býti sama v sebe obecně ∞^2 způsoby, plyne odtud, že každá plocha kladné stálé křivosti může býti ∞^2 způsoby sama v sebe deformována. - Totéž bylo by možno dokázati o plochách stálé záporné křivosti,

které dají se všecky deformovati na pseudosféru.

89. Plochy rotační a šroubové.* – Pro další příklady ploch navzájem rozvinutelných uvažujme obecnou plochu rotační

$$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = f(u) \;\ldots\ldots\; (1)$$

a obecnou plochu šroubovou

$$x = u_1\cos v_1,\quad y = u_1\sin v_1,\quad z = \varphi(u_1) + a v_1 \;\ldots\; (2).$$

Lineární elementy jejich dány jsou výrazy

$$(3)\ldots\quad ds^2 = (1+f'^2)\,du^2 + u^2\,dv^2,$$

$$ds_1^2 = (1+\varphi'^2)\,du_1^2 + 2a\varphi'\,du_1\,dv_1 + (u_1^2+a^2)\,dv_1^2,$$

z nichž druhý upravíme na tvar (jak z předu již provedeno)

$$ds_1^2 = \left[1 + \frac{u_1^2\varphi'^2}{u_1^2+a^2}\right]du_1^2 + (u_1^2+a^2)\left[dv_1 + \frac{a\varphi'}{u_1^2+a^2}\,du_1\right]^2$$

čili

$$(4)\ldots\; ds_1^2 = \left[1 + \frac{u_1^2\varphi'^2}{u_1^2+a^2}\right]du_1^2 + k^2(u_1^2+a^2)\,dw^2,$$

zaveden-li nový parametr w vztahem

$$k\,dw = dv_1 + \frac{a\varphi'}{u_1^2+a^2}\,du_1 \;\ldots\; (4')$$

takže na ploše šroubové jsou vedle povrchových šroubovic jejich orthogonální trajektorie křivkami parametrickými.

Klademe-li nyní

1) $v = w$, 2) $u^2 = k^2(u_1^2+a^2)$

3) $\left[1+f'(u)^2\right]du^2 = \left[1 + \frac{u_1^2\varphi'(u_1)^2}{u_1^2+a^2}\right]du_1^2$,

pak jsou-li všecky tři tyto rovnice splněny, jest definované tím zobrazení obou ploch jejich vzájemnou deformací.

Rovnicím těmto lze skutečně vyhověti. – a) Budiž známa

* věta Bourova.

nejprve plocha šroubová a hledejme plochy rotační na ni rozvinutelné.

Jest

$$u_1^2 = \frac{u^2}{k^2} - a^2 \quad \dots (5) \quad , \text{odkud: } k^2 u_1 \, du_1 = u \, du \quad \dots (5')$$

načež z (3) (použitím (5')):

$$(3') \dots 1 + f'^2 = \left[1 + \frac{u_1 \varphi'(u_1)^2}{u_1^2 + a^2} \right] \frac{u^2}{k^4 u_1^2} ,$$

kam třeba pouze dosaditi z (5) za u_1, abychom obdrželi

$$f'(u) = F(u) \quad , \text{ načež}$$

$$f(u) = \int F(u) \, du + C .$$

Ježto změna int. konstanty C znamená pouhé posunutí rotační plochy ve směru osy rotace, seznáváme, že každé ploše šroubové přísluší určitá soustava ∞^1 ploch rotačních na ni rozvinutelných.* Při tom křivky meridiánové rotač. ploch přecházejí v kř. w=konst.[1]

b). Zcela obdobně postupujeme, dána-li naopak plocha rotační a hledáme-li plochy šroubové na ni rozvinutelné. Zde zůstává ovšem v rovnici 3) ještě konstanta a neurčena, takže ploše rotační přísluší ∞^2 ploch šroubových na ni rozvinutelných, tak, že opět křivky meridiánové rotač. ploch přecházejí v křivky w = konst.[1]

Tento postup proveďme na příkladě. Hledejme šroubové plochy rozvinutelné na katenoid.

Křivka meridiánová dána tedy rovnicí

$$u = \frac{m}{2} \left(e^{\frac{z}{m}} + e^{-\frac{z}{m}} \right) \quad \dots (6)$$

odkud $$\frac{du}{dz} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{z}{m}} - e^{-\frac{z}{m}} \right).$$

---

* každá přísluší jedné z hodnot k;

[1] orth. trajektorie šroubovic

Ke stanovení $f'(u)$ máme vedle

$$f'(u) = \frac{dz}{du} = \frac{2}{e^{\frac{z}{m}} - e^{-\frac{z}{m}}}$$ a rovnici (6), ze které

$$u^2 = \left(e^{\frac{2z}{m}} + e^{-\frac{2z}{m}} + 2\right)\frac{m^2}{4} = \left[\left(e^{\frac{z}{m}} - e^{-\frac{z}{m}}\right)^2 + 4\right]\frac{m^2}{4}$$

a $$\left(e^{\frac{z}{m}} - e^{-\frac{z}{m}}\right)^2 = \frac{4u^2}{m^2} - 4$$

takže (vyloučením z) obdržíme

$$f'(u)^2 = \frac{m^2}{u^2 - m^2}, \text{ načež } 1 + f' = \frac{u^2}{u^2 - m^2} \quad \dots (7)$$

Užijme rovnice (3'), do které dosadíme výraz (7), načež dosadíme výraz (2) za u^2. Tím poslední rovnice pro deformaci nabývá tvaru

$$\frac{k^2(u_1^2 + a^2)}{k^2(u_1^2 + a^2) - m^2} = \left[1 + u_1^2 \frac{\psi'(u_1)^2}{u_1^2 + a^2}\right]\frac{k^2(u_1^2 + a^2)}{k^4 u_1^2}$$

odkud plyne pro $\psi(u_1)$ hledaných ploch středových:

$$\psi(u_1) = \int \frac{\sqrt{(u_1^2 + a^2)\left[k^2 u_1^2 (k^2 - 1) + m^2 - k^2 a^2\right]}}{u_1 \sqrt{k^2(u_1^2 + a^2) - m^2}}\, du_1 + C \quad \dots (8)$$

kde konst. C opět nemá na tvar plochy vlivu, toliko konstanty k, a. Řešení našeho problému převedeno tedy opět na jednoduchou kvadraturu.

Uvažujme některé jednoduché případy. Tak budiž

$$\underline{k = 1}.$$

Vynecháme-li C, máme vzdy

$$\psi(u_1) = \int \frac{\sqrt{(u_1^2 + a^2)(m^2 - a^2)}}{u_1 \sqrt{u_1^2 + a^2 - m^2}}\, du_1$$

a klademe-li $m^2 - a^2 = b^2$,

$$\psi(u_1) = b \int \frac{1}{u_1}\sqrt{\frac{u_1^2 + a^2}{u_1^2 - b^2}}\, du_1 = b \cdot J.$$

Pro vyčíslení integrálu J klademe $\frac{u_1^2 + a^2}{u_1^2 - b^2} = \lambda^2$, načež

$$J=(a^2+b^2)\int\frac{t^2\,dt}{(a^2+b^2t^2)(1-t^2)}=$$

$$=\int\frac{dt}{1-t^2}-a^2\int\frac{dt}{a^2+b^2t^2}=$$

$$J=\frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t}-\frac{a}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}t+\text{konst}$$

takže

$$\varphi(u_1)=\frac{b}{2}\log\frac{\sqrt{u_1^2-b^2}+\sqrt{u_1^2+a^2}}{\sqrt{u_1^2-b^2}+\sqrt{u_1^2+a^2}}-a\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\sqrt{\frac{u_1^2+a^2}{u_1^2-b^2}}+\text{konst}$$

čili, (upravíme-li první zlomek násobíce čitatelem),

$$(8)\ldots\varphi(u_1)=b\log\left[\sqrt{u_1^2-b^2}+\sqrt{u_1^2+a^2}\right]-a\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\sqrt{\frac{u_1^2+a^2}{u_1^2-b^2}}+\text{konst}$$

Zvolme pro příklad dále $a=0$

čímž obdržíme plochu rotační na náš kalenviol rozvinutelnou.
Jest zde (vynecháme-li opět additivní konstantu)

$$\varphi(u_1)=b\log\left[\sqrt{u_1^2-m^2}+u_1\right],\ \text{čili, jelikož zde } b=m,$$

$$z=\varphi(u_1)=m\log\frac{\sqrt{u_1^2-m^2}+u_1}{m},\ \text{takže}$$

$$me^{\frac{z}{m}}=\sqrt{u_1^2-m^2}+u_1\quad\text{čili}$$

$$m^2e^{\frac{2z}{m}}=2u_1^2-m^2+2u_1\sqrt{u_1^2-m^2}=2u_1^2-m^2+2u_1\left(me^{\frac{z}{m}}-u_1\right)$$

tedy $m\left(e^{\frac{2z}{m}}+1\right)=2e^{\frac{z}{m}}u_1$

odkud

$$u_1=\frac{m}{2}\left(e^{\frac{z}{m}}+e^{-\frac{z}{m}}\right)$$

čímž dospíváme k známému kalenviolu, jenž dá se ledy sám na sebe deformovati. Což jest pro každou plochu rotační patrno. Stačí ji jen obočiti o libovolný úhel kolem osy.

Zvolme v dalším případě $b=0$ – (čili $m=a$).

Tu jest nutno klásti $\gamma(u_1) = 0$, takže dostáváme obyčejnou čili pravoúhlou plochu šroubovou:

$$x = u_1 \cos v_1, \quad y = u_1 \sin v_1, \quad z = a v_1.$$

Jak zřejmo, – a také ze vzorce (2) str. 196 podobno –, příslušejí paralelním kružnicím plochy rotační šroubovice plochy šroubové. Nebot' křivka jedné plochy, podél níž jest míra křivosti konstantní, přechází na ploše obecné v křivku téhož obvodu.

Speciálně musí zde nejmenší (či hrdelní) kružnice kadenoidu ($u = m$) přejíti v nejmenší šroubovici, t. j. v uvažované obyčejné plochy šroubové (a skutečně z (2) str. 196 plyne pro $k = 1$, $u = m$: $u_1^2 = m^2 - a^2 = b^2 = 0$). Orthogonální trajektorie šroubovic, přímky povrchové, odpovídají meridiánům kadenoidu. Skutečně plyne z (4) str. 196 $w = v_1$, načež, vzhledem ku $v = w$,

$$v = v_1,$$

takže délka obvodu kružnice povrchové přechází právě v délku jednoho závitu příslušné šroubovice. Jest tedy výška Z závitu získané obyčejné šroubové plochy rovna

$$Z = 2\pi m.$$

<u>90. Plochy rotační.</u> – Přejme se po všech plochách rotačních, které jsou na danou plochu rotační rozvinutelny – vyločující případ ploch konstantní míry křivosti, kterými jsme se již zabývali.

Tedy musí paralelní kružnice dané plochy, jakožto křivky, podél nichž míra křivosti má konstantní hodnotu, přecházeti v kružnice paralelní hledaných ploch,

jakožto křivky téže vlastnosti. Jelikož zobrazení jest konformním, přecházejí pak meridiánový dané plochy v meridiánový ploch hledaných.

Je-li u oblouk křivky meridiánové $\xi = p(u),\ z = q(u)$ dané plochy:

$$x = p(u)\cos v,\quad y = p(u)\sin v,\quad z = q(u) \dots (1),$$

jest

$$ds^2 = du^2 + p^2(u)\,dv^2 \dots (1'),$$

a obdobně pro hledanou plochu

$$x = p_1(u_1)\cos v_1,\quad y = p_1(u_1)\sin v_1,\quad z = q_1(u_1) \dots (2)$$

jest

$$ds_1^2 = du_1^2 + p_1^2(u_1)\,dv_1^2 \dots (2'),$$

při čemž vzhledem k řečenému musí

$$u_1 = U(u),\quad v_1 = V(v) \dots (3),$$

takže musí býti splněny vztahy

$$\left.\begin{aligned} du^2 &= du_1^2 \\ p^2(u)\,dv^2 &= p_1^2(u_1)\,dv_1^2 \end{aligned}\right\} \dots (4),$$

vedoucí poměrně

$$u_1 = \pm u + k.$$

Zde k můžeme zanedbati, měníce tím pouze počátek oblouku u_1, a můžeme klásti

$$u_1 = u \dots (5),$$

vyjadřujíce tím na obou křivkách meridiánových souhlasný smysl.

Za druhé

$$\frac{p^2(u)}{p_1^2(u_1)} = \frac{dv_1^2}{dv^2},\quad = \frac{1}{a^2}.$$

kde na levé straně jest funkce pouze u, na pravé straně fun-

kce pouze v, takže obě strany jsou konstanty. Jest tudíž

$$p_1(u) = a\, p(u) \dots (6),$$

$\frac{dv_1}{dv} = \pm \frac{1}{a}$, odkud opět možno psáti

$$v_1 = \frac{v}{a} \dots (7).$$

Zbývá určiti $q_1(u)$. Jest $p_1'^2 + q_1'^2 = 1$, tedy

$$q_1(u) = \int \sqrt{1 - a^2 p'^2}\, du.$$

Rovnice všech ploch rotačních rozvinutelných na danou plochu rotační (1) jsou tedy

(8) ... $x = a\, p(u) \cos \frac{v}{a}$, $y = a\, p(u) \sin \frac{v}{a}$, $z = \int \sqrt{1 - a^2 p'^2}\, du$,

kde a jest libovolná konstanta.

Měníce a spojitě, obdržíme spojitou soustavu rotačních ploch rozvinutelných na plochu danou, která sama vyplývá pro $a = 1$. Přechod od dané plochy rotační k rotační ploše na ni rozvinutelné možno tedy provésti spojitou deformací, při čemž plocha zůstává stále plochou rotační.

Q1. Plochy rozvinutelné samy v sebe. – Plochy rotační mají tu vlastnost, že otáčením kolem osy přecházejí – obecněji řečeno deformují se – samy v sebe a že deformaci tu možno provésti spojitým přechodem. Tážme se obecně po plochách, které lze samy v sebe spojitě deformovati, čili tážme se, které plochy lze nekonečně málo deformovati tak, aby nová plocha byla s původní plochou shodná.

Zavedeme opět na ploše křivky minimální za parame-

trické - vylučující plochy tečen křivek minimálních - takže křivky ty tvoří dvě oddělené soustavy. Ježto při deformaci křivka minimální přechází zase v křivku minimální, přechází při uvažované nekonečně malé deformaci křivka u = konst nutně v soumeznou křivku téže soustavy a obdobně křivka v = konst.

Užijme pro naše parametry označení α, β, takže

$$ds^2 = 2\,F(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta \ldots\ (1)$$

Nechť křivka (α) přejde v křivku $[\alpha + \varphi(\alpha)\,\delta]$,
" (β) " $[\beta + \psi(\beta)\,\delta]$, $\Big\}$ (2)

kde δ budiž nekonečně malá hodnota pro celou plochu konstantní.

Křivky parametrické nezmění se však jak známo, zavedeme-li za příčinou zjednodušení místo parametrů α, β parametry $A(\alpha), B(\beta)$.

Pak křivka parametru $A(\alpha)$ přejde v křivku parametru

$$A[\alpha + \varphi(\alpha)\,\delta] = A(\alpha) + A'(\alpha)\,\varphi(\alpha)\,\delta + \cdots$$

a křivka parametru $B(\beta)$ v křivku parametru

$$B[\beta + \psi(\beta)\,\delta] = B(\beta) + B'(\beta)\,\psi(\beta)\,\delta + \cdots,$$

kde při dosti malém δ možno další členy rozvoje zanedbati.

Zavedeme-li tedy nové parametry $A(\alpha), B(\beta)$ vztahy

$$A(\alpha) = \int \frac{d\alpha}{\varphi(\alpha)}, \quad B(\beta) = \int \frac{d\beta}{\psi(\beta)} \ \ldots\ (3)$$

takže $A' = \frac{1}{\varphi(\alpha)}$, $B' = \frac{1}{\psi(\beta)}$, pak

křivka $A(\alpha)$ přejde v křivku $A(\alpha) + \delta$,
" B " $B + \delta$.

Píšíce α, β místo A, B, seznáváme, že na ploše uvažovaného druhu možno voliti takové parametry α, β, pří-

slušné křivkám minimálním, že nekonečně malou deformací plochy na sebe samu přejde křivka (α) v křivku $(\alpha+\delta)$ a křivka (β) v křivku $(\beta+\delta)$, kde $\delta = \text{konst.}$

Liniový element bodu (α, β), pro nějž

$$ds^2 = \mathcal{F}(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

musí při tom přijíti v liniový element bodu $(\alpha+\delta, \beta+\delta)$, pro který

$$ds^2 = \mathcal{F}(\alpha+\delta, \beta+\delta)\, d\alpha\, d\beta,$$

takže musí

$$\mathcal{F}(\alpha+\delta, \beta+\delta) = \mathcal{F}(\alpha, \beta) \quad \text{čili}$$

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta) + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}\right)\delta + \dots = \mathcal{F}(\alpha, \beta),$$

tedy, pro hodnoty malé δ, musí

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} = 0 \quad \dots (4)$$

Za příčinou bližšího seznání obsahu funkce $\mathcal{F}$ zavedeme místo α, β nové proměnné ξ, η vzorci

$$(4) \dots \xi = \alpha - \beta, \quad \eta = \alpha,$$

takže funkce $\mathcal{F}(\alpha, \beta) = \mathcal{F}(\eta, \eta - \xi)$ jest

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \beta} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi}$$

načež rovnice (4) nabývá tvaru

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} = 0 \dots (4')$$

$\mathcal{F}$ jest tedy funkcí pouze ξ t. j. $\alpha - \beta$, takže pro liniový element uvažované plochy jest nutně možno psáti

$$ds^2 = 2\,\mathcal{F}(\alpha - \beta)\, d\alpha\, d\beta \dots (5).$$

A též naopak každá plocha, pro kterou možno výraz

pro čtverec lin. elementu uvésti na tvar (5), dá se spojitě deformovati sama na sebe tak, že parametry α, β každého bodu plochy postupně rostou o konstantní hodnotu δ.

Při tom předpokládali jsme mlčky že $\varphi(\alpha) \neq 0$, $\psi(\beta) \neq 0$. Kdyby bylo na př. $\varphi(\alpha) = 0$, pak bod (α, β) přechází v bod $(\alpha, \beta + \delta)$, takže musí býti $F(\alpha, \beta) = F(\alpha, \beta + \delta)$, odkud plyne, že F nezávisí na β. Jest tudíž $\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta} = 0$ a ze vzorce $K = -\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta}$ plyne $K = 0$, takže plocha jest plochou rozvinutelnou. Úvaha naše platila tedy jen o plochách nerozvinutelných.

Jest konečně též zřejmo, že plochy příslušící tvaru (5) připouštějí též konečnou deformaci na sebe samy, při které parametry α, β každého bodu plochy vzrůstají o konečnou konstantu a.

92. Případ ploch rotačních. – Plochy rotační jsou jak známo triviálním případem ploch v předchozím uvažovaných. O tom se snadno přesvědčíme. Vyjadřme plochu rotační v obvyklém tvaru

$$x = p(u)\cos v, \quad y = p(u)\sin v, \quad z = q(u) \quad \cdots (1)$$

načež (značí-li u oblouk křivky meridiánové)

$$ds^2 = du^2 + p^2(u)\,dv^2 = p^2(u)\left(\frac{du^2}{p^2(u)} + dv^2\right)$$

$$ds^2 = p^2(u)\left(\frac{du}{p(u)} + i\,dv\right)\left(\frac{du}{p(u)} - i\,dv\right).$$

Za příčinou zavedení křivek minimálních kladme

$$2\alpha = \int\frac{du}{p(u)} + iv, \quad 2\beta = -\int\frac{du}{p(u)} + iv \quad \cdots (2),$$

takže $\quad ds^2 = -4p^2(u)\, d\alpha\, d\beta \;\cdots (3).$

Avšak z rovnic (2) plyne

$$(2') \quad \alpha - \beta = \int \frac{du}{p(u)},$$

takže u jest funkcí rozdílu $(\alpha - \beta)$.

Má tedy skutečně výraz (3) tvar výrazu (5) str. 204.

<u>93. Plochy na sebe rozvinutelné a plochy rotační.</u> – Dána-li nerozvinutelná (do roviny) plocha, která dá se na sebe deformovati, o čtverci lin. elementu

$$ds^2 = 2F(\alpha - \beta)\, d\alpha\, d\beta \;\cdots (1),$$

pak lze vždy stanoviti plochu rotační o témž lin. elementu.

Pro plochu rotační obdrželi jsme

$$ds^2 = -4p^2(u)\, d\alpha\, d\beta \;\cdots (2).$$

Má tedy býti

$$(3) \ldots \quad -2p^2(u) = F(w), \quad \text{klademe-li } w = \alpha - \beta.$$

Odtud plyne

$$-4p(u)\,p'(u) = F'(w)\,\frac{dw}{du}$$

při čemž $\quad \int \frac{du}{p(u)} = \alpha - \beta = w \quad$ (viz (2)' nahoře)

čili $\quad \frac{1}{p(u)} = \frac{dw}{du}$

takže

$$(4) \ldots \quad -4p^2(u)\,p'(u) = F'(w).$$

Vyloučením w z rovnic (3), (4) obdržíme $p'(u)$ jako funkci $p(u)$, na př.

$$p'(u) = \Omega[p(u)] \quad /\cdot du, \text{ načež}$$

$$\int \frac{dp}{\Omega(p)} = u,$$

zanedbáme-li addiční konstantu, která znamená jen

posunutí počátku oblouku u. Provedeme-li kvadraturu, vypočteme pak $p(u)$ jako funkci u. Tuto dosadíme pak do (3), odkud vyplyne nám w jako funkce u nebo naopak u jako funkce w. Pak vypočteme ještě q jako funkci w z výrazu

$$q = \int \sqrt{1-p'^2}\, du,$$

kde opět additivní konstantu možno zanedbati. Tím jest hledaná plocha rotační stanovena.

Seznáváme tudíž, že každá plocha, která dá se deformovati sama na sebe, dá se též deformovati na plochu rotační.

Též naopak každá plocha, rozvinutelná na plochu rotační, jest též sama v sebe rozvinutelna. Stačí za tím účelem otočiti rotační plochu, vzniklou deformací naší plochy, o libovolný úhel kolem osy o a pak přejíti deformací zpět k naší ploše.

Ježto tedy na př. plochy šroubové přecházejí šroubovým pohybem samy v sebe, plyne odtud, že dají se deformovati na plochy rotační (známá nám již věta Bonnetova).

Kapitola V.

I. Differenciální invarianty plochy.

94. Definice. – Uvažujíce obvodně jako při parametrickém vyjádření křivek, podrobme plochu libovolnému pohybu vzhledem k soustavě pravoúhlých souřadnic x, y, z. Jsou-li souvislost směrů nových souřadnic $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ s původními x, y, z známým schematem, jest

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a \\ \bar{y} &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + b \\ \bar{z} &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + c \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

odkud derivací dle u resp. v plyne

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_u &= \alpha_1 x_u + \alpha_2 y_u + \alpha_3 z_u \quad , & \bar{x}_v &= \alpha_1 x_v + \alpha_2 y_v + \alpha_3 z_v \\ \bar{y}_u &= \beta_1 x_u + \beta_2 y_u + \beta_3 z_u \quad , & \bar{y}_v &= \beta_1 x_v + \beta_2 y_v + \beta_3 z_v \\ \bar{z}_u &= \gamma_1 x_u + \gamma_2 y_u + \gamma_3 z_u & \bar{z}_v &= \gamma_1 x_v + \gamma_2 y_v + \gamma_3 z_v \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

jsou-li souřadnice x, y, z bodů plochy dány obvyklým způsobem jako funkce parametrů u, v:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

odkud plyne vzhledem k rovnicím (1) vyjádření nových souřadnic $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ týmiž parametry u, v.

Užijme-li obvyklého označení $f_{ik} = \dfrac{\partial^{i+k} f}{\partial^i u \, \partial^k v}$, máme

obecně
$$\left.\begin{aligned}\bar{x}_{ik} &= \alpha_1 x_{ik} + \alpha_2 y_{ik} + \alpha_3 z_{ik}\\ \bar{y}_{ik} &= \beta_1 x_{ik} + \beta_2 y_{ik} + \beta_3 z_{ik}\\ \bar{z}_{ik} &= \gamma_1 x_{ik} + \gamma_2 y_{ik} + \gamma_3 z_{ik}\end{aligned}\right\} \ldots (2')$$

Zabývejme se pak takovými funkcemi souřadnic x, y, z bodů plochy a jejich derivací dle u, v, které nemění při žádném pohybu svou hodnotu, takže pro takovouto funkci platí vztah

$$J(x, y, z; x_u, y_u, z_u; x_v, y_v, z_v; x_{uu}, \ldots) =$$
$$= J(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \bar{x}_u, \bar{y}_u, \bar{z}_u, \bar{x}_v, \bar{y}_v, \bar{z}_v; \bar{x}_{uu}, \ldots),$$

a nazývejme je, obdobně k podobným funkcím při křivkách differenciálními invarianty pohybovými pro naši plochu.

Ježto však mají býti vzaty v úvahu pohyby všeho druhu, tedy též libovolný posun:

$$\bar{x} = x + a, \quad \bar{y} = y + b, \quad \bar{z} = z + c,$$

jest zřejmo, opět obdobně ke křivkám, že argumenty x, y, z nemohou ve funkci J býti obsaženy.

A povážíme-li, že vyšší parc. derivace souřadnic x, y, z dají se vyjádřiti derivacemi prvního řádu za pomoci základních veličin E, F, G, L, M, N a jejich derivací, mají uvažované funkce obecný tvar

$$(3) \ldots J(x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v; E, F, G, L, M, N; E_u, \ldots L_u, \ldots).$$

Snadno dále vyplyne věta, že každá parc. derivace dif. invariantu jest zase dif. invariantem. Uvažujme za tím účelem rovnici

$$J(x_{ik}, \ldots) = J(\bar{x}_{ik}, \ldots), \quad \ldots (1')$$

která definuje invarianci naší funkce $J(x_{ik}, \ldots)$, platíc pro všecky hodnoty u a v, a derivujme obě její strany na

při dle u :

$$\frac{\partial \mathfrak{J}(x_{ik}, \dots)}{\partial u} = \frac{\partial \mathfrak{J}(\bar{x}_{ik}, \dots)}{\partial u} \dots (1')$$

Jest však

$$\frac{\partial \mathfrak{J}(x_{ik}, \dots)}{\partial u} = \frac{\partial \mathfrak{J}(x_{ik} \dots)}{\partial x_{ik}} \underbrace{\frac{\partial x_{ik}}{\partial u}}_{x_{i+1,k}} + \dots$$

a obdobně pro pravou stranu, takže na pravé straně obdržíme touž funkci derivací souřadnic $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ jako jest na levé straně funkce souřadnic derivací x, y, z, takže rovnice $(1')$ skutečně praví, že též naše derivace jest diff. invariantem.

§5. Invarianty 1. řádu a obecné. – Nazýváme-li opět takový invariant, jenž zavisí pouze na parc. derivacích 1. řádu invariantem 1. řádu, pak z úplné analogie – až na označení – rovnice (2) s příslušnými rovnicemi při křivkách prostorových plyne, že jediným podstatným invariantem 1. řádu pro naši plochu jsou funkce

$$x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \mathcal{E}$$
$$x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = \mathcal{F}$$
$$x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = \mathcal{G}$$

čili že každý diff. invariant 1. řádu jest funkcí záll. veličin 1. řádu $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$.

Zavedeme-li nyní do rovnice

(3') ... $\mathfrak{J}(x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v; \mathcal{E}, \dots \mathcal{L}, \dots; \mathcal{E}_u, \dots, \mathcal{L}_u, \dots) =$
$\mathfrak{J}(\bar{x}_u, \bar{y}_u, \bar{z}_u, \bar{x}_v, \bar{y}_v, \bar{z}_v; \mathcal{E}, \dots \mathcal{L}, \dots; \mathcal{E}_u, \dots, \mathcal{L}_u, \dots)$,

plynoucí z (3) za předpoklad samu o sobě, bez zřetele ke geometrické

kému významu veličin v ní obsažených, za veličiny $\mathcal{E}, .. \mathcal{L}, ...$ jakákoli čísla, redukuje se invariant $\mathcal{J}$ na funkci $x_u, ..., x_v ...$, tedy na invariant 1. řádu, jenž jest jak jsme právě seznali funkcí pouze $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$. Z toho soudíme, že funkce $\mathcal{J}$ byla před substitucí tou funkcí jedině základních veličin $\mathcal{E}, .. \mathcal{L}, ...$ a jejich derivací.

Každý dif. invariant pohybový pro plochu jest tudíž funkcí základních veličin $\mathcal{E}, .. \mathcal{L}, ..$ a jejich derivací dle u, v.

Že platí též opak této věty, jest jasno z toho, že nejen zákl. veličiny samy, ale též jejich derivace kteréhokoli řádu jsou dif. invarianty (viz konec předch. odstavce).

Při tom ovšem vylučujeme z našich úvah plochy tečen křivek minimálních (jak patrno z použití výrazů pro $x_{uu}, ...$).

Tím seznáváme důležitost základních veličin $\mathcal{E}, .., \mathcal{L}, ..$ pro theorii ploch. Vidíme již, že mají-li dvě plochy tytéž základní veličiny, mají společny i všecky dif. invarianty. Prve než přistoupíme k řešení úlohy, která se již sama podává, totiž úlohy po stanovení ploch majících dané zákl. veličiny, uveďme ještě některé příklady dif. invariantů plochy a pak věnujme pozornost – obdobně jako při křivkách prostorových – pravoúhlým trojhranům přidruženým bodům plochy.

<u>GC. Příklady; výrazy $S x_{ik} x_{mn}$.</u> – Ze vzorců (2') str.

str. 204 plyne

$$\bar{x}_{ik}\bar{x}_{mn} + \bar{y}_{ik}\bar{y}_{mn} + \bar{z}_{ik}\bar{z}_{mn} =$$
$$= S(\alpha_1 x_{ik} + \alpha_2 y_{ik} + \alpha_3 z_{ik})(\alpha_1 x_{mn} + \alpha_2 y_{mn} + \alpha_3 z_{mn}) =$$
$$= x_{ik}x_{mn} + y_{ik}y_{mn} + z_{ik}z_{mn},$$

jak plyne ze známých vzťahů směrových kosínů $\alpha_1 \dots$ pravoúhlého trojhranu.

Každý výraz tvaru $S\, x_{ik}x_{mn}$ jest tedy diff. invariantem plochy.

Vyvoďme si některé z nich. Jest nám již známo

$$x_{uu} = \frac{\mathcal{L}}{\Delta}(y_u z_v - z_u y_v) + \frac{1}{2\Delta^2}(\mathcal{E}_u G + \mathcal{E}_v F - 2\mathcal{F}_u F)\, x_u +$$
$$+ \frac{1}{2\Delta^2}(-\mathcal{E}_u F - \mathcal{E}_v \mathcal{E} + 2\mathcal{F}_u \mathcal{E})\, x_v,$$

$$x_{uv} = \frac{\mathcal{M}}{\Delta}(y_u z_v - z_u y_v) + \frac{1}{2\Delta^2}(\mathcal{E}_v G - G_u F)\, x_u +$$
$$+ \frac{1}{2\Delta^2}(-\mathcal{E}_v F + G_u \mathcal{E})\, x_v$$

$$x_{vv} = \frac{\mathcal{N}}{\Delta}(y_u z_v - z_u y_v) + \frac{1}{2\Delta^2}(-G_v F - G_u G + 2F_v G)\, x_u +$$
$$+ \frac{1}{2\Delta^2}(G_v \mathcal{E} + G_u F - 2F_v F)\, x_v.$$

Odtud se zřetelem ke vzťahům

$$S(y_u z_v - z_u y_v)^2 = \Delta^2, \quad S(y_u z_v - z_u y_v)\, x_u = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

a obdobně $S(y_u z_v - z_u y_v)\, x_v = 0$

plyne

$$\underline{S\, x_{uu}^2} = \mathcal{L}^2 + \frac{1}{4\Delta^2}(\mathcal{E}_u^2 G + 2\mathcal{E}_u \mathcal{E}_v F + \mathcal{E}_v^2 \mathcal{E} - 4\mathcal{E}_u \mathcal{F}_u F -$$
$$- 4\mathcal{E}_v \mathcal{F}_u \mathcal{E} + 4\mathcal{F}_u^2 \mathcal{E}),$$ a obdobně dále

$$\underline{S\, x_{uv}^2} = \mathcal{M}^2 + \frac{1}{4\Delta^2}(\mathcal{E}_v^2 G - 2\mathcal{E}_v G_u F + G_u^2 \mathcal{E}),$$

$$\underline{S\, x_{vv}^2} = \mathcal{N}^2 + \frac{1}{4\Delta^2}(G_u^2 G + 2G_u G_v F + G_v^2 \mathcal{E} - 4G_u F_v G -$$

$$-4G_v F_v F + 4F_v^2 G),$$

$$\underline{S x_{uu} x_{uv}} = LM + \frac{1}{4\Delta^2}(E_u E_v G + E_v^2 F - 2E_v F_u F - E_u G_u F - E_v G_u E + 2F_u G_u E),$$

$$\underline{S x_{uu} x_{vv}} = LN + \frac{1}{4\Delta^2}(-E_u G_v F - E_u G_u G + 2E_u F_v G - E_v G_v E - E_v G_u F + 2E_v F_v F + 2F_u G_v E + 2F_u G_u F - 4F_u F_v F),$$

$$\underline{S x_{uv} x_{vv}} = MN + \frac{1}{4\Delta^2}(G_u^2 F + G_u G_v E - 2G_u F_v F - G_u E_v G - G_v E_v F + 2E_v F_v G).$$

Snadno bychom vyvodili i výrazy složitější.

II. Trojhran přidružený bodu plochy.

97. Směrové cosiny jeho hran. – Jako jsme při křivkách prostorových při řešení úlohy stanoviti křivky vyhovující určitým podmínkám uvažovali nějprve trojhrany příslušné jednoduchým způsobem bodům křivky, učiňme i zde.

V bodě plochy

$$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ z = \chi(u,v) \quad \cdots \quad (1)$$

jest jedním význačným směrem směr normály plošné o směr. cosinech X, Y, Z. Dva k němu kolmé jakož i navzájem kolmé směry další vytkneme tím, že pro jeden, X_1, Y_1, Z_1, ze směrů těch, ku ploše tečných, vytkneme poměr $\frac{dv}{du} = k$ jako určitou funkci parametrů u, v.

Koeficient k_1 kolmého směru (X_2, Y_2, Z_2) vyplývá pak ze vztahu $E + F(k + k_1) + Gkk_1 = 0$,

takže jest $k_1 = -\frac{\mathcal{E}+\mathcal{F}k}{\mathcal{F}+\mathcal{G}k}$ .... (2).

Při tom jest vůbec

$X_1 : Y_1 : Z_1 = dx : dy : dz = (x_u + x_v k) : (y_u + y_v k) : (z_u + z_v k)$,

$X_2 : Y_2 : Z_2 = dx_1 : dy_1 : dz_1 = (x_u + x_v k_1) : (y_u + y_v k_1) : (z_u + z_v k_1)$

a jelikož

$S(x_u + x_v k)^2 = \mathcal{E} + 2\mathcal{F}k + \mathcal{G}k^2$,

$S(x_u + x_v k_1)^2 = \mathcal{E} + 2\mathcal{F}k_1 + \mathcal{G}k_1^2$, jest

$$X_1 = \frac{x_u + x_v k}{\sqrt{\mathcal{E}+2\mathcal{F}k+\mathcal{G}k^2}}, \quad Y_1 = \frac{y_u + y_v k}{\sqrt{\quad}}, \quad Z_1 = \frac{z_u + z_v k}{\sqrt{\quad}} \quad \ldots (3),$$

$$X_2 = \frac{x_u + x_v k_1}{\sqrt{\mathcal{E}+2\mathcal{F}k_1+\mathcal{G}k_1^2}}, \quad Y_2 = \frac{y_u + y_v k_1}{\sqrt{\quad}}, \quad Z_2 = \frac{z_u + z_v k_1}{\sqrt{\quad}} \quad \ldots (4).$$

Výrazy (4) nabývají vzhledem ku (2) po provedení tvaru

$$X_2 = \frac{-(\mathcal{F}+\mathcal{G}k)x_u + (\mathcal{E}+\mathcal{F}k)x_v}{\Delta\sqrt{\mathcal{E}+2\mathcal{F}k+\mathcal{G}k^2}}, \quad Y_2 = \frac{-(\mathcal{F}+\mathcal{G}k)y_u + (\mathcal{E}+\mathcal{F}k)y_v}{\Delta\sqrt{\quad}},$$

$$Z_2 = \frac{-(\mathcal{F}+\mathcal{G}k)z_u + (\mathcal{E}+\mathcal{F}k)z_v}{\Delta\sqrt{\quad}} \quad \ldots (4')$$

Tím zvolena již znaménka těchto cosinů tak, že trojhran určený směry a normálou plochy má touž orientaci jako trojhran souřadnicový. Jeho rohový sinus jest totiž

$$\left|\begin{matrix} X_1 & X_2 & X \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right| = \frac{1}{\Delta\sqrt{\mathcal{E}+2\mathcal{F}k+\mathcal{G}k^2}} \left|\begin{matrix} x_u + x_v k, & -(\mathcal{F}+\mathcal{G}k)x_u + (\mathcal{E}+\mathcal{F}k)x_v, & X \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right|$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left|\begin{matrix} x_u + x_v k, & x_v, & X \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right| = \frac{1}{\Delta}\left|\begin{matrix} x_u & x_v & X \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right| = +1,$$

čímž důkaz proveden.

68. Derivace cosinů těch. – Ze vzorců (3) plyne

$$\frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{x_{uu} + k x_{uv} + x_v k_u}{\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}} + (x_u + k x_v) \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{\dots}}}{\partial u},$$

neprovádějme podrobnou, nýbrž pouze uvažme, že druhé derivace souřadnic x dají se vyjádřiti lineárně a homogenně pomocí x_u, x_v, X, při čemž koeficienty obsahují pouze základní veličiny $E, \dots F, \dots$ a první derivace veličin E, F, G. Při tom vidíme ihned, že tyto vzorce zůstávají v platnosti, zaměníme-li x, X veličinami y, Y resp. z, Z. Z toho plyne, že možno psáti

$$\frac{\partial X_2}{\partial u} = \alpha x_u + \beta x_v + \gamma X$$

kde α, β, γ závisí na $E, \dots F, \dots$; $E_u, F_u, G_u, E_v, F_v, G_v$; k, k_u, k_v (5)

Nyní však z prvních rovnic (3), (4) dají se x_u, x_v vyjádřiti lineárně a homogenně pomocí X_1, X_2, takže jest

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial u} = A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X, & \text{obdobně} \\ \frac{\partial X_2}{\partial u} = B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X & \text{a obdobně též plyne} \\ \frac{\partial X}{\partial u} = C_1 X_1 + C_2 X_2 \end{cases}$$

a zcela obdobné výrazy dostáváme též pro

$$\frac{\partial X_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial X}{\partial v},$$

při čemž koeficienty jsou stále funkcemi veličin (5) a při čemž rovnice by platily při těchže koeficientech i tehdy, nastoupí-li místo X_1, X_2, X veličiny Y_1, Y_2, Y resp. Z_1, Z_2, Z.

Koeficienty výrazů našich vzorců vyhovují mezi-

tým podmínkám.

Jest na 1 č. $X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = 1$, odkud

$$X_1 \frac{\partial X_1}{\partial u} + Y_1 \frac{\partial Y_1}{\partial u} + Z_1 \frac{\partial Z_1}{\partial u} = 0$$

čili po dosazení:

$$X_1(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X) + Y_1(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 Y) + Z_1(\alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \alpha_3 Z) = 0$$

což vzhledem k tomu, že

$$S X_1^2 = 1, \quad S X_1 X_2 = 0, \quad S X_1 X = 0,$$ dává

$$\alpha_1 = 0 \quad \ldots (\gamma)$$

Obdobně vyjdeme-li z rovnice

$$X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 = 1$$

obdržíme, že musí býti

$$\beta_2 = 0 \quad \ldots (\gamma')$$

Užijme nyní rovnice

$$S X_1 X_2 = 0,$$ ze které plyne

$$S X_1 \frac{\partial X_2}{\partial u} + S X_2 \frac{\partial X_1}{\partial u} = 0$$ čili

$$S X_1 (\beta_1 X_1 + \beta_3 X) + S X_2 (\alpha_2 X_2 + \alpha_3 X) = 0$$

odkud jest

$$(\gamma'') \begin{cases} \beta_1 + \alpha_2 = 0 \\ C_1 + \alpha_3 = 0 \\ \beta_3 + C_2 = 0 \end{cases}$$

plyne „ , obdobně z: $S X_1 X = 0$ a z: $S X_2 X = 0$

Vzhledem ke vztahům $(\gamma), (\gamma'), (\gamma'')$ nabývají výrazy $\frac{\partial X_1}{\partial u}, \ldots$ jednodušší tvaru:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial u} &= C_1 X_2 - \beta_1 X \\ \frac{\partial X_2}{\partial u} &= A_1 X - C_1 X_1 \\ \frac{\partial X}{\partial u} &= \beta_1 X_1 - A_1 X_2 \end{aligned}\right\} (8)$$

a ježto táž úvaha platí o derivacích dle v, máme další tři vzorce

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial v} &= \mathcal{C}_2 X_2 - \mathcal{B}_2 X \\ \frac{\partial X_2}{\partial v} &= \mathcal{A}_2 X - \mathcal{C}_2 X_1 \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= \mathcal{B}_2 X_1 - \mathcal{A}_2 X_2 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Rovnice (8), (9) jsou ovšem na sobě závislé a nemůže-li mezi nimi býti rozpor, musí příslušné podmínky býti splněny, které jsou podmínkami integrability diferenciálních rovnic těch.

99. Podmínky integrability. – Uvažujeme-li stále pouze takové funkce, při nichž na pořadí derivací nezáleží, musí

$$\frac{\partial}{\partial v}(\mathcal{C}_1 X_2 - \mathcal{B}_1 X) = \frac{\partial}{\partial u}(\mathcal{C}_2 X_2 - \mathcal{B}_2 X)$$

čili

$$\mathcal{C}_1 \frac{\partial X_2}{\partial v} - \mathcal{B}_1 \frac{\partial X}{\partial v} + X_2 \frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial v} - X \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial v} = \mathcal{C}_2 \frac{\partial X_2}{\partial u} - \mathcal{B}_2 \frac{\partial X}{\partial u} + \\ + X_2 \frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial u} - X \frac{\partial \mathcal{B}_2}{\partial u}$$

čili, po odstranění za derivace cosinů X_2, X,

$$(10) \quad \left(\mathcal{C}_1 \mathcal{A}_2 - \mathcal{C}_2 \mathcal{A}_1 - \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial v} + \frac{\partial \mathcal{B}_2}{\partial u}\right) X + \left(\mathcal{B}_1 \mathcal{A}_2 - \mathcal{B}_2 \mathcal{A}_1 + \frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial v} - \frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial u}\right) X_2 = 0$$

K obdobným rovnicím vedou nás vztahy:

$$\frac{\partial^2 X_2}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 X_2}{\partial v \partial u}, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u};$$

rovnice ty obdržíme patrně cyklickou záměnou* z rovnic (10), takže, použijeme-li pro koeficienty, jež mají pouze tři různé hodnoty, rovnic těch označení

*mezi X_1, X_2, X; $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1$; $\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2$

$$\alpha = \frac{\partial A_1}{\partial v} - \frac{\partial A_2}{\partial u} - (B_1 C_2 - C_1 B_2)$$
$$\beta = \frac{\partial B_2}{\partial v} - \frac{\partial B_2}{\partial u} - (C_1 A_2 - A_1 C_2)$$
$$\gamma = \frac{\partial C_1}{\partial v} - \frac{\partial C_2}{\partial u} - (A_1 B_2 - B_1 A_2),$$

mají rovnice ty tvar

$$\beta X - \gamma X_2 = 0$$
$$\gamma X_1 - \alpha X = 0$$
$$\alpha X_2 - \beta X_1 = 0.$$

Mohou však být splněny jen tehdy, je-li

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

neboť jinak byl by poměr veličin X_1, X_2, X týž, jako veličin α, β, γ a odtud by pak plynulo o Y_1, Y_2, Y, resp Z_1, Z_2, Z, což jest pro tyto cosiny současně nemožno, neboť by pak rohový sinus jejich trojhranu byl nula.

Naše podmínky integrability obdržíváme tedy ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial v} - \frac{\partial A_2}{\partial u} - (B_1 C_2 - C_1 B_2) &= 0 \\ \frac{\partial B_1}{\partial v} - \frac{\partial B_2}{\partial u} - (C_1 A_2 - A_1 C_2) &= 0 \\ \frac{\partial C_1}{\partial v} - \frac{\partial C_2}{\partial u} - (A_1 B_2 - B_1 A_2) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (11).$$

Rovnice tyto obsahují jen základní veličiny, jejich derivace a veličiny $k, k_u, k_v, k_{uu}, k_{uv}, k_{vv}$.

100. Podmínky ty nezáleží na k. — Při svých úvahách vyšli jsme od libovolné funkce $k(u,v)$, která určovala nám pro každý bod plochy příslušný trojhran. Přejděme nyní od daného trojhranu k jinému tím, že pravý úhel těchto

(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) otočíme o úhel α rovný libovolné funkci parametrů u, v. Pak na místo cosinů těch nastoupí cosiny $\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_1$ resp $\bar{X}_2, \bar{Y}_2, \bar{Z}_2$, při čemž platí

$$(12)\quad \begin{cases} \bar{X}_1 = X_1 \cos\alpha + X_2 \sin\alpha \\ \bar{X}_2 = -X_1 \sin\alpha + X_2 \cos\alpha \end{cases}$$

a obdobně pro záměnu X za Y resp za Z.

Odtud jest

$$\frac{\partial \bar{X}_1}{\partial u} = \cos\alpha \frac{\partial X_1}{\partial u} + \sin\alpha \frac{\partial X_2}{\partial u} - X_1 \sin\alpha \cdot \alpha_u + X_2 \cos\alpha \cdot \alpha_u$$

nebo, vzhledem ku (8),

$$(13)\quad \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial u} = \cos\alpha (\mathcal{C}_1 X_2 - \mathcal{B}_1 X) + \sin\alpha (\mathcal{A}_1 X - \mathcal{C}_1 X_1) - X_1 \sin\alpha \cdot \alpha_u + X_2 \cos\alpha \cdot \alpha_u.$$

Nyní existují ovšem pro naše nové směr. cosiny podobné diff. rovnice obdobné k (8), (9), na př.:

$$\frac{\partial \bar{X}_2}{\partial u} = \bar{\mathcal{C}}_1 \bar{X}_2 - \bar{\mathcal{B}}_1 X$$

čili, vzhledem ku (12),

$$\frac{\partial \bar{X}_1}{\partial u} = \bar{\mathcal{C}}_1 (-X_1 \sin\alpha + X_2 \cos\alpha) - \bar{\mathcal{B}}_1 X,$$

odkud po srovnání s (13) plyne

$$\bar{\mathcal{B}}_1 = -\mathcal{A}_1 \sin\alpha + \mathcal{B}_1 \cos\alpha, \quad \bar{\mathcal{C}}_1 = \mathcal{C}_1 + \alpha_u.$$

Tímto postupem dostáváme pro nové koeficienty celkem vztahy

$$(14)\quad \begin{cases} \bar{\mathcal{A}}_1 = \mathcal{A}_1 \cos\alpha + \mathcal{B}_1 \sin\alpha & \bar{\mathcal{A}}_2 = \mathcal{A}_2 \cos\alpha + \mathcal{B}_2 \sin\alpha \\ \bar{\mathcal{B}}_1 = -\mathcal{A}_1 \sin\alpha + \mathcal{B}_1 \cos\alpha & \bar{\mathcal{B}}_2 = -\mathcal{A}_2 \sin\alpha + \mathcal{B}_2 \cos\alpha \\ \bar{\mathcal{C}}_1 = \mathcal{C}_1 + \alpha_u & \bar{\mathcal{C}}_2 = \mathcal{C}_2 + \alpha_v. \end{cases}$$

Tyto koeficienty musí pak splňovati podmínky integra-

bility téhož tvaru jako jsou rovnice (11). Utvoříme-li skutečně tyto rovnice, seznáme, upravíce je dle $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, že redukují se na původní rovnice (11), úhlu α prosté. Tím jest důkaz nadepsaného výroku proveden.

Naše podmínky integrability jsou tedy rovnicemi pouze mezi základními veličinami a jejich derivacemi. Možno již tudíž předem souditi, že jsou to tři základní rovnice theorie ploch.

101. Jejich úplné vyvození. – Ježto rovnice uvažované obdržíme, ať vycházíme z kteréhokoli k, zvolme $k = \alpha$ a pro příslušný trojhran proveďme úplné vyvození rovnic v předchozím pouze naznačených.

Zde jest tedy

$$X_1 = \frac{x_u}{\sqrt{\mathcal{E}}}, \quad Y_1 = \frac{y_u}{\sqrt{\mathcal{E}}}, \quad Z_1 = \frac{z_u}{\sqrt{\mathcal{E}}}$$

$$X_2 = \frac{-\mathcal{F}x_u + \mathcal{E}x_v}{\Delta\sqrt{\mathcal{E}}}, \quad Y_2 = \dots, \quad Z_2 = \dots$$

takže naopak

$$(15)\begin{cases} x_u = \sqrt{\mathcal{E}}\, X_1, \quad y_u = \dots, \quad z_u = \dots \\ x_v = \dfrac{\mathcal{F}X_1 + \Delta X_2}{\sqrt{\mathcal{E}}}, \quad \dots \end{cases}$$

takže provedením postupu dříve obecně naznačeného obdržíme

$$(15_0)\begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = \dfrac{-\mathcal{E}_u\mathcal{F} - \mathcal{E}_v\mathcal{E} + 2\mathcal{F}_u\mathcal{E}}{2\Delta\mathcal{E}} X_2 + \dfrac{\mathcal{L}}{\sqrt{\mathcal{E}}} X \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{\mathcal{E}\mathcal{M} - \mathcal{F}\mathcal{L}}{\mathcal{D}\sqrt{\mathcal{E}}} X - \dfrac{-\mathcal{E}_u\mathcal{F} - \mathcal{E}_v\mathcal{E} + 2\mathcal{F}_u\mathcal{E}}{2\Delta\mathcal{E}} X_1 \\ \dfrac{\partial X}{\partial u} = -\dfrac{\mathcal{L}}{\sqrt{\mathcal{E}}} X_1 - \dfrac{\mathcal{E}\mathcal{M} - \mathcal{F}\mathcal{L}}{\Delta\sqrt{\mathcal{E}}} X_2, \end{cases}$$

z čehož tedy

$$(15')\left\{\begin{aligned} A_1 &= \frac{\mathcal{E}M - \mathcal{F}L}{\Delta\sqrt{\mathcal{E}}}, \quad B_1 = -\frac{L}{\sqrt{\mathcal{E}}}, \quad C_1 = \frac{-\mathcal{E}_u\mathcal{F} - \mathcal{E}_v\mathcal{E} + 2\mathcal{F}_u\mathcal{E}}{2\Delta\mathcal{E}} \\ &\text{a obdobně jest} \\ A_2 &= \frac{\mathcal{E}N - \mathcal{F}M}{\Delta\sqrt{\mathcal{E}}}, \quad B_2 = -\frac{M}{\sqrt{\mathcal{E}}}, \quad C_2 = \frac{-\mathcal{E}_v\mathcal{F} + \mathcal{G}_u\mathcal{E}}{2\Delta\mathcal{E}}. \end{aligned}\right.$$

Dosadíme-li nyní tyto veličiny do rovnic (11), seznáme skutečně, že rovnice tím získané jsou jen jiným tvarem rovnic základních. První dvě budou složeny z první a třetí rovnice základní, kdežto třetí poskytne nám rovnici Gaussovu, napsanou v přehledném tvaru:

$$(16)\ldots\ \frac{LN - M^2}{\Delta} = \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{-\mathcal{E}_u\mathcal{F} - \mathcal{E}_v\mathcal{E} + 2\mathcal{F}_u\mathcal{E}}{2\Delta\mathcal{E}} - \frac{\partial}{\partial u}\,\frac{-\mathcal{E}_v\mathcal{F} + \mathcal{G}_u\mathcal{E}}{2\Delta\mathcal{E}}.$$

— Poukažme též k tomu, že výrazy pro x_u, x_v, plynoucí z (15) musí vyhověti podmínce

$$\frac{\partial}{\partial v}x_u = \frac{\partial}{\partial u}x_v, \text{ a obdobně pro } y_u, y_v \text{ resp } z_u, z_v.$$

Provedeme-li tyto derivace a dosadíme za $\frac{\partial x_u}{\partial u}, \ldots$ příslušné další výrazy, seznáme, že obdržíme skutečně identity. Poznámka tato jest vzhledem k dalšímu nutna. —

III. Základní veličiny a příslušné plochy.

102. Podmínky pro trojhran přidružený. — Zabývejme se nyní otázkou, zdali daným základním veličinám jako funkcím parametrů u, v přísluší vždy nějaká plocha. Vzhledem k předchozím úvahám budeme ovšem nejprve hledati směr. cosiny trojhranu, bodu plochy při

druženého a odpovídajícího libovolně zvolené funkci k parametru u, v.

O těchto cosinech víme, že musí splňovati rovnice (8), (9), jejichž koeficienty jsou funkcemi veličin

$$\xi_1 \dots, \xi \dots ; \xi_{u_1} \dots, \xi_{v_1} \dots ; k, k_u, k_v,$$

jsou tedy též známými námi funkcemi parametrů u, v, při nichž podmínky (11) integrability rovnic těch jsou skutečně splněny, vyhovují-li naše základní veličiny všem základním rovnicím, což předpokládejme.

Uvažme podmínku

$$X_1^2 + X_2^2 + X^2 = 1$$

kterou musí veličiny X_1, X_2, X vyhověti, a vyjadřme vzhledem k ní – způsobem vyčerpávajícím při ploše kulové – tyto tři veličiny dvěma neznámými funkcemi ξ, η parametrů u, v, hledajíce

$$X_1 = \frac{1-\xi\eta}{\xi-\eta}, \quad X_2 = i\frac{1+\xi\eta}{\xi-\eta}, \quad X = \frac{\xi+\eta}{\xi-\eta} \quad \dots (1)$$

čili

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{X_1 + iX_2}{1-X} = \frac{1+X}{X_1 - iX_2} \\ \eta &= -\frac{X_1 + iX_2}{1+X} = -\frac{1-X}{X_1 - iX_2} \end{aligned}\right\} (2).$$

Místo tedy nyní místo X_1, X_2, X hledati ξ, η.

Jest

$$\xi_u = \frac{1}{1-X}\left(\frac{\partial X_1}{\partial u} + i\frac{\partial X_2}{\partial u}\right) + \frac{\xi}{1-X}\frac{\partial X}{\partial u}$$

čili, vzhledem k (8) str. 216 a k (1),

$$(2')\dots \left\{\begin{aligned} \xi_u &= -\tfrac{i}{2}(\lambda_1 + i\beta_1) - i\gamma_1\xi + \tfrac{i}{2}(\lambda_1 - i\beta_1)\xi^2 \\ \xi_v &= -\tfrac{i}{2}(\lambda_2 + i\beta_2) - i\gamma_2\xi + \tfrac{i}{2}(\lambda_2 - i\beta_2)\xi^2. \end{aligned}\right.$$

a tímže postupem obdržíme

Vypočteme-li nyní η_u, η_v, seznáme že jsou vyjádřeny pomocí η způsobem zcela dlouhým, jako ξ_u resp. ξ_v pomocí ξ.

Vyhovují tedy ξ, η společně rovnicím

(3)... $\frac{\partial \sigma}{\partial u} = -\frac{i}{2}(\lambda_1 + i\beta_1) - i\gamma_1\sigma + \frac{i}{2}(\lambda_1 - i\beta_1)\sigma^2$

(4)... $\frac{\partial \sigma}{\partial v} = -\frac{i}{2}(\lambda_2 + i\beta_2) - i\gamma_2\sigma + \frac{i}{2}(\lambda_2 - i\beta_2)\sigma^2$.

A snadno přesvědčíme se naopak, že vztky, vyhovující funkcím ξ, η rovnicím (3), (4), vyhovují funkcí X_1, X_2, X, platné na základě těchto výrazy (1), rovnicím (8), (9) str. 216-7.

Nebot z (1) plyne

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{\xi_u(\eta^2-1) - \eta_u(\xi^2-1)}{(\xi-\eta)^2}$$

a dosazením za ξ_u, η_u z (2') obdržíme

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = i\gamma_1 \frac{1+\xi\eta}{\xi-\eta} - \beta_1 \frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}, \text{ čili}$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = \gamma_1 X_2 - \beta_1 X.$$

Obdobně bychom dostali

$$\frac{\partial X_1}{\partial v} = \gamma_2 X_2 - \beta_2 X.$$

A stejně bychom podobně provedli pro X_2 a pro X.

103. Riccattiho lokální diferenciální rovnice. –

Rovnice (3), (4) možno spojiti v lokální dif. rovnici

(5)... $d\sigma = \left[-\frac{i}{2}(\lambda_1 + i\beta_1) - i\gamma_1\sigma + \frac{i}{2}(\lambda_1 - i\beta_1)\sigma^2\right] du +$

$$+ \left[-\frac{i}{2}(\lambda_2 + i\beta_2) - i\gamma_2\sigma + \frac{i}{2}(\lambda_2 - i\beta_2)\sigma^2\right] dv,$$

která patří mezi rovnice tvaru rovnice Riccatiho. Aby tato rovnice byla možna, musí býti splněna podmínka

$$\frac{\partial}{\partial v}\sigma_u = \frac{\partial}{\partial u}\sigma_v ,$$

která vede nás k rovnici

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial(\lambda_1+i\beta_1)}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\sigma + \frac{1}{2}\frac{\partial(\lambda_1-i\beta_1)}{\partial v}\sigma^2 - \varphi_1\frac{\partial\sigma}{\partial v} +$$

$$+(\lambda_1-i\beta_1)\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial v} = -\frac{1}{2}\frac{\partial(\lambda_2+i\beta_2)}{\partial u} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\sigma + \frac{1}{2}\frac{\partial(\lambda_2-i\beta_2)}{\partial u}\sigma^2 -$$

$$-\varphi_2\frac{\partial\sigma}{\partial u} + (\lambda_2-i\beta_2)\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial u} .$$

Jsou dosadíme výrazy (3), (4) a obdržíme po obou stranách členy obsahující σ^2 resp σ^1 resp σ^0 (členy obsahující σ^3 se zruší). A porovnáním koeficientů seznáme, že podmínka naše jest splněna, jsou-li splněny rovnice (11), čili splňují-li členné základní veličiny dvě základní rovnice, což jsme předpokládali.

104. Obecná lokální diff. rovnice. – Úvahy týkající se podmínky integrability a způsobu vlastní integrace provedeme podrobněji pro obecnou lokální diff. rovnici. Obecná lokální diff. rovnice pro σ má tvar

$$d\sigma = \Phi(u,v,\sigma)\,du + \Psi(u,v,\sigma)\,dv \ldots (1),$$

kdeže jest

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \Phi(u,v,\sigma) , \quad \frac{\partial\sigma}{\partial v} = \Psi(u,v,\sigma) ,$$

při čemž levky musí

$$\Phi_v + \Phi_\sigma\Psi = \Psi_u + \Psi_\sigma\Phi \ldots (2).$$

Tuto rovnici (2), která jest nutna, aby rovnici (1) bylo možno integrovati, nazýváme podmínkou integrabi-

lidy rovnice (1). Platí-li rovnice (2) pro všecky hodnoty proměnných u, v, nazýváme rovnici (1) rovnicí neomezeně integrabilní. Seznali jsme v právě předchozím, že rovnice (5) jest takového druhu.

Ku integraci rovnice (1) použijme způsobu Lagrangeova. Hledejme totiž tu partikulární integrál $f(u,v,\sigma)=\Omega$ rovnice (1), který odpovídá volbě $\sigma = \text{konst.}$ Pak jde o obyčejnou differenciální rovnici 1. řádu v proměnných u, v:

$$\Phi\, du + \Psi\, dv = 0 \quad \ldots (3)$$

Určitému multiplikačnímu faktoru μ levé strany (jímž levá strana ta stává se úplným differenciálem dw) nechť odpovídá integrál $w = \Omega$, takže

$$(3') \qquad w_u = \mu\,\Phi, \quad w_v = \mu\,\Psi,$$

při čemž μ musí splňovati podmínku

$$\mu\,\Phi_v + \mu_v \Phi = \mu\,\Psi_u + \mu_u \Psi, \text{ čili}$$
$$\mu(\Phi_v - \Psi_u) = \mu_u \Psi - \mu_v \Phi \quad \ldots (4),$$

při čemž $w(u,v,\sigma)$, $\mu(u,v,\sigma)$ závisí též na σ.

Avšak σ není obecně konstantou, takže jest

$$dw = w_u\, du + w_v\, dv + w_\sigma(\sigma_u\, du + \sigma_v\, dv)$$

čili $dw = w_u\, du + w_v\, dv + w_\sigma\, d\sigma$,

nebo, po dosazení hodnot (3'),

$$dw = \mu(\Phi\, du + \Psi\, dv) + w_\sigma\, d\sigma$$

čili konečně vzhledem ku (1)

$$dw = (\mu + w_\sigma)\, d\sigma \quad \ldots (5).$$

Nyní jest σ nějakou funkcí proměnných u, v. Dosa-

zením jejím plynou též $w.a\ \mu + w_\sigma$ jako funkce u, v. A sice jsou w, σ funkce takového druhu, že (viz (5))

$$w_u = (\mu + w_\sigma)\,\sigma_u, \quad w_v = (\mu + w_\sigma)\,\sigma_v,$$

takže funkcionální determinant

$$\begin{vmatrix} w_u & \sigma_u \\ w_v & \sigma_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(w,\sigma)}{\partial(u,v)} = \Theta.$$

Odtud plyne, že $w(u,v,\sigma)$ jest funkcí takového druhu, že jest zároveň funkcí funkce $\sigma(u,v)$:

$$(6)\ldots\quad w(u,v,\sigma) = \lambda(\sigma),$$

odkud $$dw = \lambda'(\sigma)\,d\sigma,$$

takže vzhledem ku (5)

$$(7)\ldots\quad \lambda'(\sigma) = \mu + w_\sigma.$$

Těžíme se tedy, za příčinou řešení našeho problému, zdali lze stanoviti funkci $\lambda(\sigma)$ tak, aby též $\mu + w_\sigma$ bylo funkcí σ, takže funkc. determinant

$$\delta = \begin{vmatrix} \sigma_u & (\mu + w_\sigma)_u \\ \sigma_v & (\mu + w_\sigma)_v \end{vmatrix}$$

má býti rovem nule.

Jest však

$$\delta = \begin{vmatrix} \sigma_u & \mu_u + w_{\sigma u} + (\mu_\sigma + w_{\sigma\sigma})\,\sigma_u \\ \sigma_v & \mu_v + w_{\sigma v} + (\mu_\sigma + w_{\sigma\sigma})\,\sigma_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_u & \mu_u + w_{\sigma u} \\ \sigma_v & \mu_v + w_{\sigma v} \end{vmatrix},$$

a ježto $w_u = \mu\,\Phi$, $w_v = \mu\,\Psi$, jest

$$w_{\sigma u} = \mu_\sigma\,\Phi + \mu\,\Phi_\sigma,$$
$$w_{\sigma v} = \mu_\sigma\,\Psi + \mu\,\Psi_\sigma,$$

kdežto z (6) plyne

$$w_u + w_\sigma\,\sigma_u = \lambda'(\sigma)\,\sigma_u$$
$$w_v + w_\sigma\,\sigma_v = \lambda'(\sigma)\,\sigma_v,$$

odkud $\sigma_u = \frac{\omega_u}{\lambda' - \omega_\sigma}$, $\sigma_v = \frac{\omega_v}{\lambda' - \omega_\sigma}$

čili

$$\sigma_u = \frac{u\Phi}{\lambda' - \omega_\sigma} \,, \quad \sigma_v = \frac{u\Psi}{\lambda' - \omega_\sigma} \,,$$

takže dosazením do δ máme

$$\delta = \frac{u}{\lambda' - \omega_\sigma} \begin{vmatrix} \Phi & , \mu_u + \mu\Phi_\sigma + \mu_\sigma \Phi \\ \Psi & , \mu_v + \mu\Psi_\sigma + \mu_\sigma \Psi \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{u}{\lambda' - \omega_\sigma} \left[\Phi\mu_v - \Psi\mu_u + \mu(\Phi\Psi_\sigma - \Psi\Phi_\sigma) \right]$$

čili vzhledem ku (4)

$$\delta = \frac{u}{\lambda' - \omega_\sigma} \left[\mu(\Psi_\mu - \Phi_v) + \mu(\Phi\Psi_\sigma - \Psi\Phi_\sigma) \right] ,$$

což vzhledem ku (2) rovná se skutečně nule.

Žádoucí volba funkce $\lambda(\sigma)$ jest tedy nejen možna, nýbrž ale jest $\lambda(\sigma)$ jakoukoli funkcí σ, vždy definuje rovnice (6) takovou funkci σ proměnných u, v, že jest $\mu + \omega_\sigma$ rovněž funkcí této funkce σ.

Řešíme-li nyní rovnici (6) dle u, obdržíme u jako funkci veličin $v, \sigma, \lambda(\sigma)$. A dosadíme-li nyní za u do $\mu + \omega_\sigma$, bude $\mu + \omega_\sigma$ obsahovati, vzhledem k právě řečenému, jíž jen σ, nikoli však v samo o sobě, takže bude na př.

$$\mu + \omega_\sigma = \Omega(\sigma, \lambda(\sigma)) \,,$$

a podmínku (7) možno nyní psáti

$$\Omega(\sigma, \lambda(\sigma)) = \lambda'(\sigma) \quad \text{čili}$$

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \Omega(\sigma, \lambda) \,,$$

čímž nabýváme obyčejné diff. rovnice pro výpočet neznámé vlastní funkce $\lambda(\sigma)$.

Integrujeme-li dílo rovnici, obdržíme λ jako funkci σ a integrační konstanty c, načež rovnice (6) dává σ jako funkci u, v, c a jako hledaný integrál obecný dané neomezeně integrabilní rovnice (1).

Za účelem řešení rovnice (1), neomezeně integrabilní, – takže rovnice (2) musí platiti pro všecka u, v – stanovíme dosy integrál w rovnice (3), poskládající v ní σ za libovolnou konstantu. Buďtiž μ příslušný k w integrační faktor. Pak vypočteme z rovnice (6), kde λ jest neznámou složenou funkcí σ, proměnnou u atd. (viz str. 227 dole).

105. Pokračování o rovnici Riccatiho. – Získaný postup možno aplikovati na naši rovnici Riccatiho (5) str. 223, o které jsme se již přesvědčili, že jest neomezeně integrabilní.

K integrálu této rovnice možno však ještě vyvoditi zajímavý vztah obdobný němuž pro Riccatiho rovnici o 1 proměnné. Píšme naši rovnici v obecném tvaru

$$d\sigma = (\alpha + \beta\sigma + \gamma\sigma^2)\,du + (\alpha_1 + \beta_1\sigma + \gamma_1\sigma^2)\,dv.$$

Buďte nyní P, Q, R tři partikulární integrály této rovnice, takže

$$dP = (\alpha + \beta P + \gamma P^2)\,du + (\alpha_1 + \beta_1 P + \gamma_1 P^2)\,dv$$

– – – – – – – –

Je-li pak σ obecný integrál, uvažujme dvojpoměr těchto 4 hodnot, na př.

$$\tau = \frac{\sigma - P}{\sigma - R} : \frac{Q - P}{Q - R} = \frac{\sigma - P}{\sigma - R} \cdot \frac{Q - R}{Q - P}.$$

Logarithmickou derivací dle u plyne

$$\frac{\tau_u}{\tau} = \frac{\sigma_u - P_u}{\sigma - P} + \frac{Q_u - R_u}{Q - R} - \frac{\sigma_u - R_u}{\sigma - R} - \frac{Q_u - P_u}{Q - P}.$$

Dosadíme-li $\sigma_u = \alpha + \beta\sigma + \gamma\sigma^2$, $P_u = \alpha + \beta P + \gamma P^2, \dots$,

máme
$$\frac{\sigma_u - P_u}{\sigma - P} = \beta + \gamma(\sigma + P)$$

a obdobně další, takže

$$\frac{\tau_u}{\tau} = \gamma(P - R) + \gamma(R - P) = 0$$

a stejně obdržíme

$$\frac{\tau_v}{\tau} = 0, \quad \text{takže jest}$$

$$\tau_u = \tau_v = 0,$$

čili τ jest konstantou:* $\tau = c$.

Z toho plyne

$$\sigma = \frac{R(Q-R)\cdot c - P(Q-P)}{(Q-R)\cdot c - (Q-P)}.$$

Obecný integrál σ neomezeně integrabilní totální Riccattiho dif. rovnice o proměnných u, v má tedy tvar

$$\sigma = \frac{p(u,v)\cdot c + q(u,v)}{\pi(u,v)\cdot c + \varkappa(u,v)},$$

kde c jest libovolná konstanta.

106. Důsledek pro výpočet směr. cosinů přidruženého trojhranu. — Seznali jsme, že ξ, η musí býti integrály rovnice (5) str. 223. Přísluší-li jim hodnoty a_1, b_1 konstanty c, jest tedy

$$\xi_1 = \frac{p a_1 + q}{\pi a_1 + \varkappa}, \quad \eta_1 = \frac{p b_1 + q}{\pi b_1 + \varkappa},$$

---

*jež má ovšem pro každou hodnotu obecného integrálu σ jim hod.

označujeme-li nyní ξ_1, η_1 hodnoty pro ξ, η, příslušné ku X_1, X_2, X.

Pro Y_1, Y_2, Y resp Z_1, Z_2, Z možno totiž postupovati zcela stejně, jako se stalo pro X_1, X_2, X a seznáme, že hodnoty ξ_2, η_2 resp ξ_3, η_3 jim příslušné jsou rovněž integrály rovnice (5). Jsou-li a_2, b_2 resp a_3, b_3 příslušné hodnoty konstanty c, jest tedy úhrnem

$$(6) \ldots \quad \xi_i = \frac{p a_i + q}{\pi a_i + \varkappa}, \quad \eta_i = \frac{p b_i + q}{\pi b_i + \varkappa} \ldots i = 1, 2, 3,$$

při čemž

$$(7) \ldots \begin{cases} X_1 = \dfrac{1-\xi_1\eta_1}{\xi_1-\eta_1}, & X_2 = i\,\dfrac{1+\xi_1\eta_1}{\xi_1-\eta_1}, & X = \dfrac{\xi_1+\eta_1}{\xi_1-\eta_1} \\ Y_1 = \dfrac{1-\xi_2\eta_2}{\xi_2-\eta_2}, & Y_2 = i\,\dfrac{1+\xi_2\eta_2}{\xi_2-\eta_2}, & Y = \dfrac{\xi_2+\eta_2}{\xi_2-\eta_2} \\ Z_1 = \dfrac{1-\xi_3\eta_3}{\xi_3-\eta_3}, & Z_2 = i\,\dfrac{1+\xi_3\eta_3}{\xi_3-\eta_3}, & Z = \dfrac{\xi_3+\eta_3}{\xi_3-\eta_3}. \end{cases}$$

Konstanty a, b nemohou však býti, vzhledem ke geometrickému významu veličin (7), zcela libovolny. Směr. cosiny ty musí totiž mimo vztahy

$$(\alpha) \ldots X_1^2 + X_2^2 + X^2 = 1, \quad Y_1^2 + Y_2^2 + Y^2 = 1, \quad Z_1^2 + Z_2^2 + Z^2 = 1,$$

ze kterých jsme vycházeli, splňovati též vztahy

$$(\beta) \ldots Y_1 Z_1 + Y_2 Z_2 + Y Z = 0, \quad Z_1 X_1 + Z_2 X_2 + Z X = 0, \quad X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X Y = 0^{*}$$

Vzhledem ku $Y_1 Z_1 + Y_2 Z_2 + Y Z = 0$ musí tedy býti

$$\frac{1-\xi_2\eta_2}{\xi_2-\eta_2} \cdot \frac{1-\xi_3\eta_3}{\xi_3-\eta_3} - \frac{1+\xi_2\eta_2}{\xi_2-\eta_2}\,\frac{1+\xi_3\eta_3}{\xi_3-\eta_3} + \frac{\xi_2+\eta_2}{\xi_2-\eta_2}\,\frac{\xi_3+\eta_3}{\xi_3-\eta_3} = 0,$$

kde čitatel dává

---

* pak splněny jsou jimi, jak jsme seznali při theorii křivek prostorových, též další dvě kategorie vztahů —.

$$(\eta_2-\xi_3)(\eta_3-\xi_2) = (\xi_2-\xi_3)(\eta_2-\eta_3)$$

čili

$$\frac{\xi_2-\xi_3}{\xi_2-\eta_3} = -\frac{\eta_2-\xi_3}{\eta_2-\eta_3} \quad \text{čili}$$

$$\frac{\xi_2-\xi_3}{\xi_2-\eta_3} : \frac{\eta_2-\xi_3}{\eta_2-\eta_3} = -1, \text{ t. j.}$$

hodnoty ξ_2, η_2 musí býti hodnotami ξ_3, η_3 harmonicky odděleny. Vzhledem k tomu pak, že na pravé straně rovnice (6) jsou lineárně lomené funkce konstant a, b, musí totéž platiti o konstantách a_2, b_2, a_3, b_3.

Použijeme-li stejně obou jich dvou podmínek (β), seznáváme že dvojice konstant $a_1 b_1$; $a_2 b_2$; a_3, b_3 nutno voliti tak, aby každé dvě z nich se harmonicky oddělovaly.* Jinou podmínkou není volba těchto konstant určena.**)

Zvolíme-li tedy konstanty a, b tímto způsobem, máme pak (dosazením z (6) do (7))

$$(8)\ldots \begin{cases} X_1 = \dfrac{(\pi^2-p^2)a_1b_1+(\pi\varkappa-pq)(a_1+b_1)+(\varkappa^2-q^2)}{(p\varkappa-q\pi)(a_1-b_1)}, \\ X_2 = i\,\dfrac{(\pi^2+p^2)a_1b_1+(\pi\varkappa+pq)(a_1+b_1)+(\varkappa^2+q^2)}{(p\varkappa-q\pi)(a_1-b_1)} \\ X = \dfrac{2\pi p a_1b_1+(p\varkappa+q\pi)(a_1+b_1)+2\varkappa q}{(p\varkappa-q\pi)(a_1-b_1)} \end{cases}$$

odkud vzorce pro Y_1, Y_2, Y resp Z_1, Z_2, Z plynou zámě nou indexem 1 za 2 resp 3.

*Dvě z dvojic těch jsou body reálné a třetí imaginárná (viz polární trojúhelník kružnice). Dvě reálné $a_1 b_1$; $a_2 b_2$ zvolme libovolně, ale tak, aby $(a_1 b_1, a_2 b_2) = -1$, načež třetí jest společným párem involuce o dvojných prvcích $a_1 b_1$ resp $a_2 b_2$. – **) Viz násl. sloupec pozn.**)

Utvořme nyní determinant cosinů směrových hran našeho trojhranu, čili jeho sinus rožný:

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X \\ Y_1 & Y_2 & Y \\ Z_1 & Z_2 & Z \end{vmatrix},$$

při čemž musí ovšem $\mathfrak{D} = \pm 1$.

Po dosazení seznáme, že determinant rovná se součinu dvou determinantů. Vyčísleme-li první z nich, jenž není na a, b závislý, obdržíme

$$\mathfrak{D} = \frac{-2i}{(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)} \begin{vmatrix} 1 & a_1+b_1 & a_1 b_1 \\ 1 & a_2+b_2 & a_2 b_2 \\ 1 & a_3+b_3 & a_3 b_3 \end{vmatrix}$$

takže jest nutně

$$\frac{1}{(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)} \begin{vmatrix} 1 & a_1+b_1 & a_1 b_1 \\ 1 & a_2+b_2 & a_2 b_2 \\ 1 & a_3+b_3 & a_3 b_3 \end{vmatrix} = \pm \frac{i}{2}.$$

Jelikož však možno prvky kterékoli dvojice a_i, b_i mezi sebou zaměniti, možno docíliti výpočty takové volby konstant a, b, že toto poslední výraz jest roven $+\frac{i}{2}$, takže $\mathfrak{D} = +1$, čili, že náš trojhran jest stejně orientován jako trojhran souřadný.

Vězme tedy volbu konstant a, b ještě touto podmínkou!)

107. Výpočet pro speciální trojhran. – Skutečný výpočet směr. cosinů provedeme pro trojhran příslušný hodnotě $k = \alpha$. Vzhledem ku (15′) str. 221 nabývá zde rovnice (5) (str. 223)

---

1) Viz předch. strana pozn.1)

tvaru

$$d\sigma = \left[-\frac{(\Delta - iF)L + iEM}{2\Delta\sqrt{E}} + i\,\frac{E_u F + E_v E - 2F_u E}{2\Delta E}\,\sigma - \right.$$
$$\left. - \frac{(\Delta + iF)L - iEM}{2\Delta\sqrt{E}}\,\sigma^2 \right] du + \left[-\frac{(\Delta - iF)M + iEN}{2\Delta\sqrt{E}} + \right.$$
$$\left. + i\,\frac{E_v F - G_u E}{2\Delta E}\,\sigma - \frac{(\Delta + iF)M - iEN}{2\Delta\sqrt{E}}\,\sigma^2 \right] dv \ldots\ldots (1).$$

Tuto rovnici nutno tedy integrovati. Stanovíme-li na př. na základě tří jejích partikulárních integrálů funkce $p(u,v)$, $q(u,v)$, $\pi(u,v)$, $\varkappa(u,v)$ ve výraze

$$\sigma = \frac{p \cdot c + q}{\pi \cdot c + \varkappa} \quad \ldots (2)$$

pro její integrál obecný, pak volba hodnot a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 konstanty c, – vymezená v předchozím – dává nám vzhledem ku (8) nejobecnější výrazy pro cosiny směr. našeho trojhranu, odpovídajícího $k = 0$.

108. Výpočet pravoúhlých souřadnic bodů plochy. – Aplikujeme-li nyní získané výsledky dosadíce je do vzorců (15)*, obdržíme x, y, z jako funkce u, v jednoduchou kvadraturou. Na př.

$$(3) \ldots \quad x = \int \left(\sqrt{E}\, X_1\, du + \frac{F X_1 + \Delta X_2}{\sqrt{E}}\, dv \right),$$

při čemž, jak jsme již předem vyvodili, bude podmínka

$$\frac{\partial}{\partial v} x_u = \frac{\partial}{\partial u} x_v \qquad \text{splněna.}$$

Seznáváme tedy, že skutečně existují plochy, jejichž základní veličiny mají dané hodnoty E, F, G, L, M, N.**

*str. 220; ** splňující dle předpokladu tři zákl. rovnice § III. 30.

Že nalezené plochy skutečně mají dyno hodnoty za veličiny základní, snadno se rovněž přesvědčíme. Tak z rovnic (15) plyne na př.:

$$S x_u^2 = \mathcal{E} \cdot S X_1^2 = \mathcal{E},$$

a obdobně pro $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$. Dále z rovnic (15), (15₀) (str. 220) obdržíme

$$S x_u x_u = - \mathcal{L} \cdot S X_1^2 - \frac{\mathcal{E}\mathcal{M} - \mathcal{F}\mathcal{L}}{\Delta} S X_1 X_2 = - \mathcal{L}$$

a obdobně opět pro $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$.

10G. Shodnost získaných ploch. – Jelikož ve výrazech nalezených pro směr. cosiny vyskytují se konstanty a, b, jest nekonečně mnoho ploch, jimž náleží dané základní veličiny. Možno však dokázati, že všechny dyno plochy jsou shodny.

Píšme za dále účelem výrazy (8) str. 231 jiným způsobem. Klademe-li dobře

$$(9)\ldots \begin{cases} \dfrac{1 - a_1 b_1}{a_1 - b_1} = \alpha_1, \quad i\,\dfrac{1 + a_1 b_1}{a_1 - b_1} = \alpha_2, \quad \dfrac{a_1 + b_1}{a_1 - b_1} = \alpha_3, \\ \dfrac{1 - a_2 b_2}{a_2 - b_2} = \beta_1, \quad \ldots \quad \beta_2, \quad \ldots \quad \beta_3 \\ \dfrac{1 - a_3 b_3}{a_3 - b_3} = \gamma_1, \quad \ldots \quad \gamma_2, \quad \ldots \quad \gamma_3, \end{cases}$$

dostaneme, dosazením plynoucích odtud výrazů pro a, b, výrazy (8) ve tvaru

$$(8') \begin{cases} X_1 = \dfrac{p^2 - \pi^2 + q^2 + x^2}{2(px - q\pi)} \alpha_1 + \dfrac{i(p^2 - \pi^2 + q^2 - x^2)}{2(px - q\pi)} \alpha_2 + \dfrac{\pi x - qp}{px - q\pi} \alpha_3 \\ X_2 = \dfrac{-i(p^2 + \pi^2 - q^2 - x^2)}{2(px - q\pi)} \alpha_1 + \dfrac{p^2 + \pi^2 + q^2 + x^2}{2(px - q\pi)} \alpha_2 + \dfrac{i(\pi x + qp)}{px - q\pi} \alpha_3 \end{cases}$$

Obdobné výrazy platí pro Y_1, Y_2 resp. Z_1, Z_2. Nutno pouze místo α psáti β resp. γ.

Veličiny α, β, γ vyhovují vztahům

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1, \quad \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1, \quad \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$$

a mimo to, jelikož dvojice a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 se navzájem harmonicky oddělují, též vztahům*

$$\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0, \quad \gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3=0, \quad \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0$$

Konečně determinant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = -\frac{2i}{(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)} \begin{vmatrix} 1 & a_1+b_1 & a_1b_1 \\ 1 & a_2+b_2 & a_2b_2 \\ 1 & a_3+b_3 & a_3b_3 \end{vmatrix},$$

rovná se levý rovněž $+1$ (viz str. 232).

Tím seznáváme, že α, β, γ jsou směrnými cosiny trojhranu orientovaného jako trojhran souřadný.

Podrobme nyní naši plochu takové transformaci souřadnic, při které řečené dva trojhrany splynou. Pak jest

$$\alpha_1=\beta_2=\gamma_3=1, \quad \text{ostatní } \alpha_2=\alpha_3=\beta_1=\cdots=0.$$

Hodnoty $\bar{X}_1, \ldots$ cosinů směr. jsou pro tento případ (viz 8')

$$(10)\quad \begin{cases} \bar{X}_1=\dfrac{p^2-\pi^2-q^2+\varkappa^2}{2(p\varkappa-q\pi)}, & \bar{X}_2=-\dfrac{i(p^2+\pi^2-q^2-\varkappa^2)}{2(p\varkappa-q\pi)}, \\ \bar{Y}_1=\dfrac{i(p^2-\pi^2+q^2-\varkappa^2)}{2(p\varkappa-q\pi)}, & \bar{Y}_2=\dfrac{p^2+\pi^2+q^2+\varkappa^2}{2(p\varkappa-q\pi)} \\ \bar{Z}_1=\dfrac{\pi\varkappa-qp}{p\varkappa-q\pi}, & \bar{Z}_2=\dfrac{i(\pi\varkappa+qp)}{p\varkappa-q\pi} \end{cases}$$

Následkem (3) obdržíváme tedy pro souřadnice $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ jedné speciální plochy o dvojných základních veličinách výrazy

*viz stranu 230–1

$$(3')\ldots\begin{cases} \bar{x} = \int \dfrac{\mathcal{E}\bar{X}_1\,du + (\mathcal{F}\bar{X}_1 + \Delta\bar{X}_2)\,dv}{\sqrt{\mathcal{E}}}, \\ \bar{y} = \int \dfrac{\mathcal{E}\bar{Y}_1\,du + (\mathcal{F}\bar{Y}_1 + \Delta\bar{Y}_2)\,dv}{\sqrt{\mathcal{E}}} \\ \bar{z} = \int \dfrac{\mathcal{E}\bar{Z}_1\,du + (\mathcal{F}\bar{Z}_1 + \Delta\bar{Z}_2)\,dv}{\sqrt{\mathcal{E}}} \end{cases}.$$

A ježto obecné hodnoty směr. cosinů (8') vyjádřeny jsou speciálními hodnotami (10) lineárně o koeficientech α, β, γ, seznáváme z (3) a (3'), že běžné souřadnice obecné plochy příslušící danými základními veličinami vyjádřeny jsou týmž způsobem souřadnicemi $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$:

$$x = \alpha_1\bar{x} + \alpha_2\bar{y} + \alpha_3\bar{z} + \text{konst}$$
$$y = \beta_1\bar{x} + \beta_2\bar{y} + \beta_3\bar{z} + \text{konst}$$
$$z = \gamma_1\bar{x} + \gamma_2\bar{y} + \gamma_3\bar{z} + \text{konst},$$

kteréžto rovnice praví, že obecná plocha (x, y, z) vzniká ze speciální $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ pohybem, jest s ní tedy shodna.

Abychom tedy stanovili všecky plochy, které příslušejí danými základními veličinami $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$, vyhovujícími třem základním rovnicím, řešíme nejprve Riccatiho rovnici (1) str. 233 a stanovíme její obecný integrál ve tvaru (2), načež vypočteme hodnoty (10)[235], které pak dosadíme do výrazů (3') str. 236, čímž obdržíme rovnice plochy, jejímž pohybem plynou všecky plochy ostatní.

110. <u>Jiný postup.</u> – Vzorce v předchozím užívané pozbývají významu, je-li $\mathcal{E} = 0$, t. j. mají-li parametrické

ké křivky v = konst délku oblouku rovnu nule, čili jsou-li křivkami minimálními. V tom případě pomůžeme si ovšem tím, že zaměníme u a v, tedy $\mathcal{E}$ a $\mathcal{G}$. Je-li však

$$\mathcal{E} = \mathcal{G} = 0,$$

nutno užiti úplně jiného postupu. Buďto bychom zavedli nové parametry (jednoduché jest na př. zavedení parametrů $u+v$, u) anebo volíme za k jinou hodnotu. Budiž

$$k = 1.$$

Pak pro $X_1 \ldots$ jest (viz str. 214)

$$(1) \ldots \quad X_1 = \frac{x_u + x_v}{\sqrt{2\mathcal{F}}}, \quad X_2 = i\,\frac{x_u - x_v}{\sqrt{2\mathcal{F}}}$$

takže

$$(2) \ldots \quad x_u = \frac{1}{2}\sqrt{2\mathcal{F}}\,(X_1 - i X_2), \quad x_v = \frac{1}{2}\sqrt{2\mathcal{F}}\,(X_1 + i X_2).$$

Pro derivace cosinů směr. (viz str. 215) obdržíme použitím známých vzorců na základě křivek minimálních výrazy

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial X_1}{\partial u} &= -i\,\frac{\mathcal{F}_u}{2\mathcal{F}}\,X_2 + \frac{\mathcal{L}+\mathcal{M}}{\sqrt{2\mathcal{F}}}\,X, \\
\frac{\partial X_2}{\partial u} &= i\,\frac{\mathcal{L}-\mathcal{M}}{\sqrt{2\mathcal{F}}}\,X + i\,\frac{\mathcal{F}_u}{2\mathcal{F}}\,X_1 \\
\frac{\partial X}{\partial u} &= -\frac{\mathcal{L}+\mathcal{M}}{\sqrt{2\mathcal{F}}}\,X_1 - i\,\frac{\mathcal{L}-\mathcal{M}}{\sqrt{2\mathcal{F}}}\,X_2, \\
\frac{\partial X_1}{\partial v} &= i\,\frac{\mathcal{F}_v}{2\mathcal{F}}\,X_2 + \frac{\mathcal{M}+\mathcal{N}}{\sqrt{2\mathcal{F}}}\,X \\
\frac{\partial X_2}{\partial v} &= i\,\frac{\mathcal{M}-\mathcal{N}}{\sqrt{2\mathcal{F}}}\,X - i\,\frac{\mathcal{F}_v}{2\mathcal{F}}\,X_1 \\
\frac{\partial X}{\partial v} &= -\frac{\mathcal{M}+\mathcal{N}}{\sqrt{2\mathcal{F}}}\,X_1 - i\,\frac{\mathcal{M}-\mathcal{N}}{\sqrt{2\mathcal{F}}}\,X_2.
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Riccattiho rovnice (5) str. 223 nabývá zde tedy tvaru

(4)... $d\sigma = \left[-\frac{M}{\sqrt{2F}} - \frac{F_u}{2F}\sigma - \frac{L}{\sqrt{2F}}\sigma^2\right]du +$
$+ -\left[\frac{N}{\sqrt{2F}} + \frac{F_v}{2F}\sigma - \frac{M}{\sqrt{2F}}\sigma^2\right]dv.$

Je-li $\sigma = \frac{pc+q}{rc+s}$

její obecný integrál, platí pro směr. cosiny $X_1, \dots$ (zmečme je krátce $X_1, \dots$) opět výrazy (10) str. 235, kdež to vzhledem ku (2) (str. 237) jest

(5).... $x = \frac{1}{2}\int \sqrt{2F}\left[(X_1 - iX_2)du + (X_1 + iX_2)dv\right]$

– a obdobně pro y, z – parametrickým vyjádřením jedné z ploch hledaných.

Vidíme, že tímto postupem na základě křivek minimálních dospíváme k cíli jednodušším počtem a že vzorce jeví se nám ve tvaru symetrickém.

IV. Přirozené rovnice ploch.

111. Zavedení příslušných veličin. – Položme si nyní otázku, jak rozhodnouti o tom, zdali dvě plochy

$$x = f(u,v),\ y = g(u,v),\ z = h(u,v) \quad \dots (1)$$
$$\bar{x} = \bar{f}(\bar{u},\bar{v}),\ \bar{y} = \bar{g}(\bar{u},\bar{v}),\ \bar{z} = \bar{h}(\bar{u},\bar{v}) \quad \dots (2)$$

jsou navzájem shodny.

Vzhledem k dosavadnímu bylo by nutno rozřešiti za tou příčinou obtížný problem, zdali možno na plochách těch zavésti takové parametry, aby příslušné základní veličiny na obou plochách byly týmiž funkcemi parametrů.

Obtížnost řešení tohoto problému spočívá v tom, že uvažované doposud invarianty jsou i invariantními pouze vzhle-

dem k pohybu, nikoli však vzhledem ke změně parametrů. Věnujme tudíž pozornost takovým veličinám, které by byly invariantní vzhledem k oběma těmto transformacím.

Veličiny takové skutečně existují. Jest to na př. míra křivosti K, jakož i střední křivost H. Obě jsou křivostí hlavních normálních řezů plochy, takže mužeme místo nich jmenovati prostě poloměry R_1, R_2.

Myslíme si nyní obě křivky křivosti bodem plochy jdoucí. Jsou-li

$$\frac{dR_1}{ds_1}, \frac{dR_2}{ds_1} \quad \text{resp} \quad \frac{dR_1}{ds_2}, \frac{dR_2}{ds_2}$$

derivace obou hlavních poloměrů dle oblouku první resp druhé křivky křivosti, pak jest zřejmo, že derivace ty jsou, právě tak jako poloměry R_1, R_2 samy, invariantními vzhledem k oběma transformacím shora jmenovaným.

Jest pak, užijeme-li obvyklého v této příčině značení,

$$\frac{\partial R_1}{\partial_1 s} = \frac{\frac{\partial R_1}{\partial u} + \frac{\partial R_1}{\partial v} k_1}{\sqrt{E + 2Fk_1 + Gk_1^2}}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial_1 s} = \frac{\frac{\partial R_2}{\partial u} + \frac{\partial R_2}{\partial v} k_1}{\sqrt{E + 2Fk_1 + Gk_1^2}},$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial_2 s} = \frac{\frac{\partial R_1}{\partial u} + \frac{\partial R_1}{\partial v} k_2}{\sqrt{E + 2Fk_2 + Gk_2^2}}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial_2 s} = \frac{\frac{\partial R_2}{\partial u} + \frac{\partial R_2}{\partial v} k_2}{\sqrt{E + 2Fk_2 + Gk_2^2}}$$

kde k_1 resp k_2 značí poměry $k = \frac{dv}{du}$ pro první, resp druhou křivku křivosti, takže k_1, k_2 jsou kořeny kvadratické rovnice

$$\begin{vmatrix} k^2 & E & L \\ -k & F & M \\ 1 & G & N \end{vmatrix} = 0.$$

Že nejen poloměry R_1, R_2 ale též uvedené jejich derivace jsou veličinami žádaného druhu, jest patrno z toho, že veličiny ty mají význam čistě geometrický. Nutno však poukázati též na znaménko veličin těch. A tu jest zřejmé, že znaménka těchto veličin závisí na tom, jak definován jest kladný smysl normály ku ploše. Veličiny ty mohou se tedy při transformacích obojího druhu změniti jen a toliko ve znaménku.

Abychom však tyto úvahy mohli provésti úplně přesně, aby nemiklo nám tolik rozdíl ploch navzájem shodných a ploch pouze souměrných, omezme se pouze na plochy reálné v reálném vyjádření, neboť na nich jsme kladný smysl normály jednoznačně definovali.

112. Dvě plochy vztažené ke křivkám křivosti. – Pro zjednodušení zavedeme na ploše křivky křivosti za křivky parametrické. Budiž tedy $k_1 = \alpha$, $k_2 = \infty$.

Pak jest

$$\frac{\partial R_1}{\partial_1 s} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{E}}} \frac{\partial R_1}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial R_2}{\partial_1 s} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{E}}} \frac{\partial R_2}{\partial u}$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial_2 s} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{G}}} \frac{\partial R_1}{\partial v} \quad , \quad \frac{\partial R_2}{\partial_2 s} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{G}}} \frac{\partial R_2}{\partial v} .$$

Za kladný smysl normály plošné vyvolili jsme jak známo onen, který s tečnou (kladnou) křivky v = konst a tečnou křivky u = konst tvoří trojhran dle orientovaný jako trojhran souřadných os x, y, z.

Je-li tedy mimo uvažovanou plochu dána druhá plocha (jejíž veličiny jsou označeny čárkou) pak vzhledem k před-

chozímm (na konci předch. odstavce o znaménkách veličin řečeném) jest zřejmo, že obě plochy jsou shodny, platí-li současně rovnice

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \alpha\beta\,\bar{R}_1, & R_2 &= \alpha\beta\,\bar{R}_2 \\ \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial R_1}{\partial u} &= \beta\frac{1}{\sqrt{\bar{E}}}\frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{u}}, & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial R_1}{\partial v} &= \alpha\frac{1}{\sqrt{\bar{G}}}\frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{v}} \\ \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial R_2}{\partial u} &= \beta\frac{1}{\sqrt{\bar{E}}}\frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{u}}, & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial R_2}{\partial v} &= \alpha\frac{1}{\sqrt{\bar{G}}}\frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{v}} \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

kde α jest buďto $+1$ nebo -1 dle toho, zdali kladný smysl postupu na křivkách $v = \text{konst}$ zvolen jest na obou plochách souhlasně nebo nesouhlasně
a kde β jest buďto $+1$ nebo -1 dle toho, zdali kladný smysl postupu na křivkách $u = \text{konst}$ jest zvolen na obou plochách souhlasně nebo nesouhlasně.

113. Postačující podmínky jejich shodnosti. – Jsou-li rovnice (3) pro jednu z kombinací znamének α, β pro dané plochy (1), (2) splněny, dá se, zdali obě plochy budou skutečně shodny.

Rovnicemi (3) dány jsou parametry $\bar{u}, \bar{v}$ jako určité funkce parametrů u, v – kteréž, vzhledem k učiněnému předpokladu, vypočítány ze dvou z rovnic těch a do ostatních čtyř dosazeny musí tyto měniti v identity.

Derivací prvních rovnic (3) plyne

$$\frac{\partial R_1}{\partial u} = \alpha\beta\left(\frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{v}}\frac{\partial \bar{v}}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial u} = \alpha\beta\left(\frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{v}}\frac{\partial \bar{v}}{\partial u}\right).$$

Poněvadž pak vzhledem k ostatním rovnicím současně má býti

$$\frac{\partial R_1}{\partial u} = \beta\sqrt{\frac{\mathfrak{E}}{\mathcal{E}}}\,\frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{u}}\,,\quad \frac{\partial R_2}{\partial u} = \beta\sqrt{\frac{\mathfrak{E}}{\mathcal{E}}}\,\frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{u}}\,,$$

nabýváme rovnic

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} - \alpha\sqrt{\frac{\mathfrak{E}}{\mathcal{E}}}\right)\frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}\,\frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{v}} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} - \alpha\sqrt{\frac{\mathfrak{E}}{\mathcal{E}}}\right)\frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}\,\frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{v}} = 0$$

Determinant

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{u}} & \dfrac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{v}} \\ \dfrac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{u}} & \dfrac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{v}} \end{vmatrix}$$

soustavy těchto dvou rovnic jest funkcionální determinant

$$\frac{\partial(\bar{R}_1, \bar{R}_2)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$$

funkcí $\bar{R}_1, \bar{R}_2$ proměnných $\bar{u}, \bar{v}$.

Vyloučujeme-li tedy plochy, pro které oba hlavní poloměry jsou vázány nějakou relací $F(R_1, R_2) = 0$, jest $\mathfrak{D} \neq 0$ a rovnice naše mohou platiti jen tehdy, je-li

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} = \alpha\sqrt{\frac{\mathfrak{E}}{\mathcal{E}}}\,,\quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} = 0$$

Obdobně (derivací prvních rovnic (3) dle v) plynou rovnice

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial v} = 0\,,\quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} = \beta\sqrt{\frac{\mathcal{G}}{\mathfrak{G}}}\,.$$

Jest tedy $\bar{u}$ funkcí pouze u a $\bar{v}$ funkcí pouze v

$$\bar{u} = \lambda(u)\,,\quad \bar{v} = \mu(v) \quad \ldots (4)\,,$$

při čemž $\lambda' = \alpha\sqrt{\frac{\mathfrak{E}}{\mathcal{E}}}\,,\quad \mu' = \beta\sqrt{\frac{\mathcal{G}}{\mathfrak{G}}}$ $\ldots (5)$,

takže jest $\lambda' \gtrless 0$ dle toho zdali $\alpha = \pm 1$,
$\mu' \gtrless 0$ " " $\beta = \pm 1$,
jak vzhledem k definici α, β jest nutno.

Zaveďme nyní parametry $\bar{u}, \bar{v}$ na prvou plochu a vypočtěme příslušné základní veličiny $\mathcal{E}^x, \ldots \mathcal{L}^x \ldots$. Ježto $\bar{u}$ závisí jen na u a $\bar{v}$ jen na v, zůstanou křivky křivosti křivkami parametrickými, takže jest opět

$$\mathcal{F}^x = \mathcal{M}^x = 0 .$$

Vále jest, ježto souřadnice x, y, z stanou se funkcemi $\bar{u}, \bar{v}$,

$$x_u = \lambda' x_{\bar{u}} , \quad x_v = \mu' x_{\bar{v}} .$$

Jest tedy

$$\mathcal{E} = S x_u^2 = \lambda'^2 S x_{\bar{u}}^2 = \lambda'^2 \mathcal{E}^x$$

čili $$\mathcal{E}^x = \frac{\mathcal{E}}{\lambda'^2}$$

čili vzhledem ku (5)

$$\mathcal{E}^x = \mathcal{E} \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{E}} .$$

Stejně seznáme, že

$$\mathcal{G}^x = \bar{\mathcal{G}} .$$

Pro výpočet $\mathcal{L}^x, \mathcal{N}^x$ uvažme vzorce

$$R_1 = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{L}} , \quad R_2 = \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{N}} ,$$

pro případ křivek křivosti jako křivek parametrických platné.

Po zavedení parametrů $\bar{u}, \bar{v}$ na prvou plochu platí tedy

$$\alpha\beta R_1 = \frac{\mathcal{E}^x}{\mathcal{L}^x} = \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\mathcal{L}^x} \quad \text{čili} \quad R_1 = \alpha\beta \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\mathcal{L}^x}$$

kdežto současně jest pro plochu druhou

$$\bar{R}_1 = \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\bar{\mathcal{L}}} .$$

A ježto jest $R_1 = \alpha\beta \bar{R}_1$, máme rovnici

$$\frac{\bar{\mathcal{E}}}{\mathcal{L}^x} = \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\bar{\mathcal{L}}} ,$$

odkud plyne $\mathfrak{L}^x = \bar{\mathfrak{L}}$

a stejně obdržíme, že $\mathfrak{N}^x = \bar{\mathfrak{N}}$.

Jsou-li tedy obě plochy (1), (2) takového druhu, že ani na jedné z nich na druhé nejsou hlavní poloměry vázány relací, jsou parametrům u, v příslušné veličiny $\mathfrak{E}^x, \mathfrak{F}^x, \mathfrak{G}^x, \mathfrak{L}^x, \mathfrak{M}^x, \mathfrak{N}^x$ resp. $\bar{\mathfrak{E}}, \bar{\mathfrak{F}}, \bar{\mathfrak{G}}, \bar{\mathfrak{L}}, \bar{\mathfrak{M}}, \bar{\mathfrak{N}}$ obou ploch navzájem rovny, t. j. plochy (1), (2) tedy jsou shodny.

Rovnice (3) jsou tedy za učiněného předpokladu nutnými a postačujícími podmínkami shodnosti obou ploch (1), (2).

114. Jiný tvar podmínek těch. – Ježto jsou za učiněného předpokladu poloměry R_1, R_2 nezávislými navzájem funkcemi parametrů u, v, možno naopak tyto parametry pokládati za funkce poloměrů u, v. Dosadíme-li tyto funkce do čtyř našich derivací, jest pro plochu (1)

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{E}}}\frac{\partial R_1}{\partial u} = \Phi_1(R_1, R_2), & \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{G}}}\frac{\partial R_1}{\partial v} = \Psi_1(R_1, R_2) \\ \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{E}}}\frac{\partial R_2}{\partial u} = \Phi_2(R_1, R_2), & \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{G}}}\frac{\partial R_2}{\partial v} = \Psi_2(R_1, R_2). \end{cases}$$

Plocha (2) jest pak s plochou (1) shodna, platí-li současně s rovnicemi (6) rovnice

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{\beta}{\sqrt{\bar{\mathfrak{E}}}}\frac{\partial \bar{R}_1}{\partial u} = \Phi_1(\alpha\beta\bar{R}_1, \alpha\beta\bar{R}_2), & \frac{\alpha}{\sqrt{\bar{\mathfrak{G}}}}\frac{\partial \bar{R}_1}{\partial v} = \Psi_1(\alpha\beta\bar{R}_1, \alpha\beta\bar{R}_2) \\ \frac{\beta}{\sqrt{\bar{\mathfrak{E}}}}\frac{\partial \bar{R}_2}{\partial u} = \Phi_2(\alpha\beta\bar{R}_1, \alpha\beta\bar{R}_2), & \frac{\alpha}{\sqrt{\bar{\mathfrak{G}}}}\frac{\partial \bar{R}_2}{\partial v} = \Psi_2(\alpha\beta\bar{R}_1, \alpha\beta\bar{R}_2) \end{cases}$$

a to pro kteroukoli kombinaci znamének α, β.

Při tom vyjadřována jsou rovnicemi

$$(8)\ \cdots\quad R_1 = \alpha\beta\bar{R}_1, \quad R_2 = \alpha\beta\bar{R}_2$$

homologická místa (u, v), $(\bar{u}, \bar{v})$ obou ploch.

Z rovnic (6), (7), (8) plynou tedíž nazpět rovnice (3).

115. Přirozené rovnice plochy. – Vzhledem k posléze řečenému, možno rovnice

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial R_1}{\partial_1 s} = \Phi_1(R_1, R_2), & \dfrac{\partial R_1}{\partial_2 s} = \Psi_1(R_1, R_2) \\ \dfrac{\partial R_2}{\partial_1 s} = \Phi_2(R_1, R_2), & \dfrac{\partial R_2}{\partial_2 s} = \Psi_2(R_1, R_2), \end{cases}$$

které plochu nehledě k její poloze a k parametrickému vyjádření dokonale charakterisují, přirozenými rovnicemi plochy (1). – (Zavedeny potvrzené Scheffersem.)

Výjimku při tom činí plochy, pro které platí relace $F(R_1, R_2) = 0$.

Nepřihlížíme-li ke znaménkům, k nimž v hořejší úvaze bral zřetel, takže nerozlišujeme případu ploch shodných a ploch souměrných, možno rovnice (9) zváti přirozenými rovnicemi plochy i jde-li o plochy imaginární a o reálné plochy v imaginárním vyjádření parametrickém.

Pro plochy splňující relaci $F(R_1, R_2) = 0$ bylo by třeba zvláštní úvahy, od čehož ustupujeme. Plochy ty bývají zvány společným názvem jako plochy Weingartenovy. —

Kapitola VI.

I. Křivka na ploše. Křivka geodetická.

115. Elementy křivky na ploše. – Jsou-li u, v parametry, jimiž plocha jest vyjádřena, pak rovnicemi

$$u = \varphi(t), \quad v = \psi(t) \quad \ldots \quad (1),$$

kde t značí nějaký parametr, definována jest nějaká křivka k na ploše.

Element oblouku téže křivky ds odpovídající přírůstku dt parametru t dán jest vztahem

$$ds^2 = \left[E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right] dt^2$$

takže pro oblouk s křivky od bodu t_0 ku t platí

$$(2) \ldots \quad s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt$$

kde za $E, F, G, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}$ jest dosaditi funkce t, plynoucí z (1). Provedeme-li kvadraturu a rovnici řešíme dle t, dostáváme t jako funkci oblouku s.

Pokládáme-li pak oblouk s sám za parametr, platí mezi derivacemi funkcí (1) vztah

$$(3) \ldots \quad E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2 = 1.$$

Probíháme-li pak křivku ve směru rostoucího oblouku s, jsou směrné cosiny jejího Serretova trojhranu jednoznačně dány (singulární body ovšem z úvahy vylučujeme) a rovněž tak její křivost a torse. Poněvadž pak nám jde o stejnolitou křivky samé, jako při theorii křivek prostorových, berme její křivost $1:\rho$ vždy kladně – na rozdíl

od úvah majících za úkol studium křivosti plochy, při nichž jsme znakem r neoznačovali kladný vždy poloměr křivosti křivky prostorové, nýbrž vzdálenost středu křivosti plošné křivky od bodu plochy branou se znaménkem kladným nebo záporným dle toho, ležel-li střed ten na kladné nebo záporné straně tečné roviny plochy.

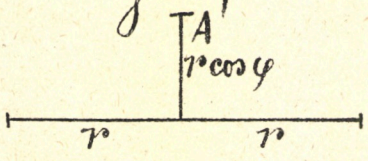
Nyní budiž tedy opět r kladně vždy braný poloměr křivosti křivky. Dále budiž θ úhel tvořený kladnou hlavní normálou křivky a kladnou normálou plochy, a to měřený ve smyslu od kladné hlavní normály ke kladné binormále.

Věnujme nyní pozornost křivosti normálné $\frac{1}{R}$ a křivosti tangenciální $\frac{1}{G}$ naší křivky plošné K. Křivosti tyto definovali jsme jako křivosti průmětů křivky K do roviny jdoucí tečnou křivky a normálou plochy resp. do tečné roviny plochy a obdrželi jsme pro ně (viz II. str. 473) výrazy $\frac{\cos\theta}{r}$ resp $\frac{\sin\theta}{r}$.

— Vzhledem k tomu, že nyní má r jiný význam než v theorii ploch, jest nyní nutna zvláštní úvaha ve příčině znaménka křivosti normálné i tangenciální naší křivky K.

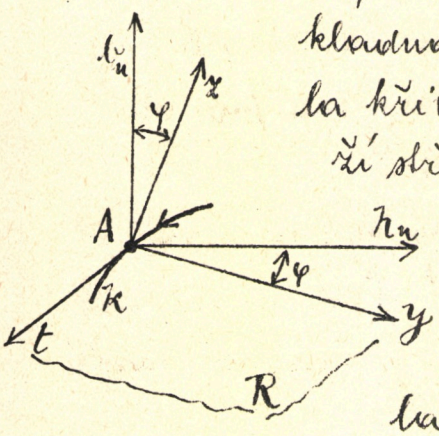
Při křivce rovinné opatřujeme totiž výraz pro křivost znaménkem, závislým na tom, se které strany na rovinu křivky hledíme, čili na tom, na kterou stranu roviny té klademe kladnou osu z k rovině kolmou, a to z toho důvodu, že úhel kontingenční křivky rovinné měříme ve smyslu od $+x$ ku $+y$, při čemž sinus rožný trojhranu souřadného jest $+1$.

Nejme dány křivku prostorovou k a na ní bod A, a sestrojme tečnou t bodu A libovolnou rovinu R. Budiž naší úlohou stanoviti poloměr r' křivosti křivky k', jež jest <u>orthogonálním průmětem křivky</u> k do roviny R, v bodě A.



Je-li φ úhel roviny oskulační bodu A křivky k s rovinou R, promításe kružnice křivosti bodu A do ellipsy o poloosách r, $r\cos\varphi$, jejíž poloměr křivosti v bodě A jest $\overline{r} = \frac{r^2}{r\cos\varphi} = \frac{r}{\cos\varphi}$.

Béřeme-li při tom, jak již řečeno, r kladně, bude hledaný poloměr r', určený i co do znaménka, rovnati se $\pm\overline{r}$, dle toho, se které strany na rovinu R hledíme.



Dle příčiny stanovme, že trojhran $t\,y\,z$, kde t jest kladná tečna křivky v bodě A, y kladná normála křivky k' (t. j. ta část normály té, na které leží střed křivosti) a <u>z</u>kladná normála k rovině R, jest tak orientován jako trojhran $t\,n_n\,b_n$, čili jako trojhran souřadný. Takto definovaná kladná normála <u>z</u> mají roviny R dvoří pak s kladnou binormálou křivky k týž úhel φ jako rovina R s oskulační rovinou křivky k. A hledíme-li na rovinu R s takto definované kladné strany, jest i co do znaménka

$$r' = \overline{r} = \frac{r^2}{r\cos\varphi} \quad \text{čili pro křivost platí}$$

i co do znaménka $\frac{1}{r'} = \frac{\cos\varphi}{r^2}$

kde řecky φ značí úhel kladné binormály křivky k s tím polopaprskem normály k rovině R, s jehož strany rovi-

mu R pozorujeme. —

V důsledku toho uvažujme nyní průmět k_n křivky k do roviny jdoucí tečnou t křivky k a normálou n plochy. Normálou t' této roviny jest tedy tečna plochy kolmá ku tečně t. Kladnou část této normály, s jejíž strany budeme na křivku k_n hleděti, volme tak, aby trojhran tnt' byl orientován jako trojhran souřadný. Pak t' tvoří s b_n týž úhel θ jako n tvoří s n_n, takže seznáváme, že jest pak i co do znaménka normálná křivost $\frac{1}{R}$ čili $\frac{\cos\theta}{r}$, kde r jest stále kladné, křivostí průmětu k_n křivky k do normálné roviny tn bodu A plochy.

Za druhé uvažujme průmět k_t křivky k do tečné roviny bodu A plochy. Na tuto rovinu hledíme ovšem se strany kladné normály plochy. Ježto úhel θ plošné normály n s hlavní normálou n_n křivky k jest měřen v smyslu od kladné hlavní normály ke kladné binormále, jest cosinus úhlu, který tvoří binormála s normálou n, roven $\sin\theta$.

Je-li tedy úhel θ měřen v řečeném smyslu, jest opět i co do znaménka tangenciální křivost

$\frac{1}{g}$ čili $\frac{\sin\theta}{r}$, kde r bráno kladně, křivostí průmětu k_t křivky k do tečné roviny bodu A plochy.

116. Výraz pro křivost tangenciální. — Odvoďme si pro křivost tangenciální i normálnou výrazy v našem vyjádření parametrickém. Jak z řečeného zřejmo, jest

$$\sin\theta = S\,X\,\Lambda = S\,X\,(n\beta - m\gamma)$$

a zavedeme-li derivace souřadnic dle oblouku s naší křivky k,

$$\sin\theta = S\,X\,(x''y' - y''x')\,r$$

čili

$$\frac{\sin\theta}{r^3} = \begin{vmatrix} X & x' & x'' \\ Y & y' & y'' \\ Z & z' & z'' \end{vmatrix} \quad \ldots\ (1)$$

Do výrazu toho nutno dosaditi:

$\frac{dx}{ds} = x' = x_u u' + x_v v'$, ...

$\frac{dx'}{ds} = x'' = x_{uu} u'^2 + 2x_{uv} u'v' + x_{vv} v'^2 + x_u u'' + x_v v''$, ...

Dosadíme-li sem za x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} známé výrazy, obdržíme

$$x'' = X(\mathcal{L}u'^2 + 2\mathcal{M}u'v' + \mathcal{N}v'^2) + \Lambda x_u + \mathcal{B} x_v,$$

kde

$$\Lambda = u'' + \frac{1}{2\Delta^2}\left[(\mathcal{E}_u G + \mathcal{E}_v F - 2\mathcal{F}_u F)u'^2 + 2(\mathcal{E}_v G - G_u F)u'v' + (-G_v F - G_u G + 2\mathcal{F}_v G)v'^2\right]$$

$$\mathcal{B} = v'' + \frac{1}{2\Delta^2}\left[(-\mathcal{E}_u F - \mathcal{E}_v \mathcal{E} + 2\mathcal{F}_u \mathcal{E})u'^2 + 2(-\mathcal{E}_v F + G_u \mathcal{E})u'v' + (G_v \mathcal{E} + G_u F - 2\mathcal{F}_v F)v'^2\right]$$

Dosazením do (1) dostáváme

$$\frac{\sin\theta}{r^3} = \begin{vmatrix} X & x_u u' + x_v v' & \Lambda x_u + \mathcal{B} x_v \\ Y & y_u u' + y_v v' & \Lambda y_u + \mathcal{B} y_v \\ Z & z_u u' + z_v v' & \Lambda z_u + \mathcal{B} z_v \end{vmatrix}$$

čili $\frac{\sin\theta}{r^3} = |X\ x_v\ x_u|\,\Lambda v' + |X\ x_u\ x_v|\,\mathcal{B}u'$

$$\frac{\sin\theta}{r^3} = (\mathcal{B}u' - \Lambda v')\,\Delta,$$

vzhledem k tomu, že $|X\ x_u\ x_v| = \Delta$.

Dosadíme-li sem výrazy za $\Lambda, \mathcal{B}$, obdržíme teorii

$$\frac{\sin\theta}{r} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} u', & \Delta^2 u'' + \frac{1}{2}(\mathcal{E}_u G + \mathcal{E}_v F - 2F_u F)u'^2 + \\ & + (\mathcal{E}_v G - G_u F)u'v' + \frac{1}{2}(-G_v F - G_u G + 2F_v G)v'^2 \\ v', & \Delta^2 v'' + \frac{1}{2}(-\mathcal{E}_u F - \mathcal{E}_v \mathcal{E} + 2F_u \mathcal{E})u'^2 + \\ & + (-\mathcal{E}_v F + G_u \mathcal{E})u'v' + \frac{1}{2}(G_v \mathcal{E} + G_u F - 2F_v F)v'^2 \end{vmatrix}$$

Násobíme-li poslední determinant D determinantem

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} \mathcal{E} & F \\ F & G \end{vmatrix}, \text{ obdržíme}$$

$$\Delta^2 D = \begin{vmatrix} \mathcal{E}u' + Fv', & (\mathcal{E}u'' + Fv')\Delta^2 + \frac{1}{2}\mathcal{E}_u u'^2(\overbrace{\mathcal{E}G - F^2}^{\Delta^2}) + \mathcal{E}_v u'v'\Delta^2 + \\ & + (F_v - \frac{1}{2}G_u)v'^2 \\ Fu' + Gv', & (Fu'' + Gv')\Delta^2 + (F_u - \frac{1}{2}\mathcal{E}_v)u'^2\Delta^2 + G_u u'v'\Delta^2 \\ & + \frac{1}{2}G_v v'^2\Delta^2 \end{vmatrix}$$

Jestliže můžeme zde vytknouti Δ^2 ze druhého sloupce, obdržíme

$$(2)\ldots \frac{\sin\theta}{r} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \mathcal{E}u' + Fv', & \frac{1}{2}\mathcal{E}_u u'^2 + \mathcal{E}_v u'v' + (F_v - \frac{1}{2}G_u)v'^2 \\ & + \mathcal{E}u'' + Fv' \\ Fu' + Gv', & (F_u - \frac{1}{2}\mathcal{E}_v)u'^2 + G_u u'v' + \frac{1}{2}G_v v'^2 + \\ & + Fu'' + Gv'' \end{vmatrix}$$

– Uveďme pro úplnost též výraz pro <u>křivost normálnou</u>. Jest, jak jsme seznali,

$$\frac{\cos\theta}{r} = \frac{1}{R} = \frac{\mathcal{L}du^2 + 2\mathcal{M}du\,dv + \mathcal{N}dv^2}{\mathcal{E}du^2 + 2F du\,dv + G\,dv^2}$$

anebo, vztahujeme-li naši křivku parametricky k její oblouku s,

$$\frac{\cos\theta}{r} = \mathcal{L}u'^2 + 2\mathcal{M}u'v' + \mathcal{N}v'^2 \ldots\ (3).$$

<u>117. Dif. rovnice křivek geodetických.</u> – Poněvadž o křivkách geodetických platí dle definice, že hlavní normála v každém bodě křivky splývá s normálou plochy

čili že tangenciální křivost jejich jest v každém bodě rovna nule, dostáváme z (2) diferenciální rovnici křivek geodetických naší plochy ve tvaru

$$(4)\ldots\mathfrak{Q} = \begin{vmatrix} \mathfrak{E}u' + \mathfrak{F}v', & \frac{1}{2}\mathfrak{E}_u u'^2 + \mathfrak{E}_v u'v' + (\mathfrak{F}_v - \frac{1}{2}\mathfrak{G}_u)v'^2 + \mathfrak{E}u'' + \mathfrak{F}v' \\ \mathfrak{F}u' + \mathfrak{G}v', & (\mathfrak{F}_u - \frac{1}{2}\mathfrak{E}_v)u'^2 + \mathfrak{G}_u u'v' + \frac{1}{2}\mathfrak{G}_v v'^2 + \mathfrak{F}u'' + \mathfrak{G}v' \end{vmatrix}.$$

2) "Rovnici tuto můžeme odvoditi též přímo. Křivka budiž opět dána parametrickým vyjádřením

$$u = \varphi(t), \quad v = \psi(t).$$

Jelikož její hlavní normála má splývati s normálou plochy, musí její binormála, jejíž cosiny směrné jsou jak známo úměrny výrazům

$$y'z'' - z'y'', \quad z'x'' - x'z'', \quad x'y'' - y'x'',$$

ležeti v rovině tečné plochy, což vede k rovnicím

$$\begin{aligned} y'z'' - z'y'' &= \alpha x_u + \beta x_v \\ z'x'' - x'z'' &= \alpha y_u + \beta y_v \\ x'y'' - y'x'' &= \alpha z_u + \beta z_v \end{aligned}$$

vyjadřujícím, že binormála křivky jest tečnou plochy příslušnou směru postupu $\frac{dv}{du} = \frac{\beta}{\alpha}$.

Vyloučme z těchto rovnic α, β. Násobme za tím účelem rovnice ty x', y', z' a sečtěme, čímž obdržíme

$$\alpha S x_u x' + \beta S x_v x' = 0;$$

a obdobně násobením jich x'', y'', z'' plyne

$$\alpha S x_u x'' + \beta S x_v x'' = 0,$$

kteréžto dvě rovnice dávají vyloučením α, β

$$\begin{vmatrix} S x_u x' & S x_v x' \\ S x_u x'' & S x_v x'' \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots (4_0)$$

Sem třeba již jen dosaditi známé výrazy za x', x'' (viz str. 250), abychom obdrželi ihned žádanou rovnici (4) křivek geodetických.

Pro zjednodušení možno za parametr t zvoliti jeden z parametrů u, v, na př. u, neboť jak známo můžeme libovolnou křivku na ploše definovati též tím, že podél křivky jest parametr v určitou funkcí parametru u, takže křivka jest pak dána rovnicemi

$$v = \omega(u), \quad u = t \quad \ldots \quad (k)$$

Výjimku při tom činí křivky $u = \text{konst}$, které jsou vyjádřeny rovnicemi

$$u = \text{konst}, \quad v = t,$$

takže jest pro ně $u' = u'' = 0$, $v' = 1$, $v'' = 0$.

Jest tedy podmínka pro to, aby křivka $u = \text{konst}$ byla křivkou geodetickou, dána rovnicí

$$\begin{vmatrix} F & F_v - \frac{1}{2} G_u \\ G & \frac{1}{2} G_v \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$F G_v - 2 G F_v + G G_u = 0 \quad \ldots \quad (5)$$

a obdobně podmínka pro to, aby křivka $v = \text{konst}$ byla křivkou geodetickou, dána rovnicí

$$F E_u - 2 E F_u + E E_v = 0 \quad \ldots \quad (5').$$

Pro všecky ostatní křivky geodetické jest vzhledem k rovnicím (k) $u' = 1$, $u'' = 0$, $v' = \frac{dv}{du}$, $v'' = \frac{d^2v}{du^2}$, takže jejich dif. rovnice má tvar

$$(6) \ldots \begin{vmatrix} E + F\frac{dv}{du}, & \frac{1}{2}E_u + E_v\frac{dv}{du} + (F_v - \frac{1}{2}G_u)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + F\frac{d^2v}{du^2} \\ F + G\frac{dv}{du}, & F_u - \frac{1}{2}E_v + G_u\frac{dv}{du} + \frac{1}{2}G_v\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + G\frac{d^2v}{du^2} \end{vmatrix} = 0$$

3) Nejrychleji konečně dospějeme k rovnici (4) křivky geodetické tím, že vyjdeme ze známé nám z II. dílu její rovnice

$$N \equiv \begin{vmatrix} X & dx & d^2x \\ Y & dy & d^2y \\ Z & dz & d^2z \end{vmatrix} = 0,$$

dosadíme sem

$$dx = x_u\,du + x_v\,dv$$

$$d^2x = x_{uu}\,du^2 + 2x_{uv}\,du\,dv + x_{vv}\,dv^2 + x_u\,d^2u + x_v\,d^2v$$

a provedeme součin determinantů

$$\Delta N = \begin{vmatrix} X & x_u & x_v \\ Y & y_u & y_v \\ Z & z_u & z_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X & dx & d^2x \\ Y & dy & d^2y \\ Z & dz & d^2z \end{vmatrix}$$

$$\Delta N = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & D \end{vmatrix},$$

takže $D = 0$ jest naše žádaná rovnice, která dosazením známých hodnot $S x_{uu} x_u = \frac{1}{2} E_u, \ldots$ nabývá skutečně tvaru (4).

118. Přesná definice křivek geodetických. – Diferenciální rovnici (4) křivek, jejichž hlavní normály splývají s normálami plochy, splňují jak snadno seznáme též přímky i křivky minimální.

Pro přímku jest totiž poměr $x' : y' : z'$ roven poměru konstant, na př. a, b, c, takže jest na př.

$$x' = \varrho \cdot a, \quad y' = \varrho \cdot b, \quad z' = \varrho \cdot c,$$

kde ϱ jest funkcí parametru t. Odtud plyne

$$x'' = \varrho' \cdot a, \quad y'' = \varrho' \cdot b, \quad z'' = \varrho' \cdot c,$$

takže rovnice (4_0), čili též ekvivalentní s ní rovnice (4), jest přímkou skutečně splněna.

Rovněž tak pro křivky minimální, které jsme v naší úvaze vylučovali. Podél křivky minimální jsou totiž u, v takovými funkcemi parametru t, že platí vztah

$$Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = 0 \quad \ldots (1^*)$$

pro všechny hodnoty t. Možno tuto rovnici touto cestou derivovati dle t, čímž plyne

$$(E_u u' + E_v v')u'^2 + 2(F_u u' + F_v v')u'v' + (G_u u' + G_v v')v'^2 + \\ + 2Eu'u'' + 2F(u''v' + u'v'') + 2Gv'v'' = 0 \quad \ldots (1^{**})$$

Přičteme-li však determinant (4) tak, že řádky jeho násobíme u' resp. v' a součet jejich klademe na místo prvého řádku, seznáme následkem rovnic (1^*), (1^{**}), že oba prvky řádku toho jsou rovny nule, takže rovnice (4) jest skutečně splněna též křivkami minimálními.

Seznali jsme dříve ve II. oddílu, že každá křivka mající tu vlastnost, že každý element její jest nejkratší spojnicí svých bodů koncových, má také tu vlastnost (máme při tom ovšem na mysli pouze křivky reálné), že hlavní normály její splývají s normálami plochy. Jest pak patrno, že existuje-li mezi dvěma konečně vzdálenými body na ploše takováto křivka, která jest nejkratší ze všech křivek na ploše, mají i elementy její vlastnost právě vyčtenou, tudíž její hlavní normály splývají též s normálami plochy.

Vážíváme-li tedy takovou křivku, jejíž hlavní normály splývají s normálami plochy, křivkou geodetic-

kou, jest každá nejkratší spojnice dvou bodů plochy geodetickou křivkou plochy. Nelze však též naopak říci, že by každá geodetická křivka na ploše byla nejkratší spojnicí každých svých dvou bodů.

Jednoduchý příklad poskytnou nám plochy rozvinutelné. Na rozvinutelné ploše existuje v obecném případě mezi dvěma body plochy jediná geodetická křivka oba body spojující, která jest zároveň nejkratší spojnicí obou bodů a která rozvinutím plochy přechází v přímku. Je-li však rozvinutí naší plochy na rovinu periodickým, seznáme snadno, že každé dva body A, B plochy možno spojiti nekonečným množstvím křivek geodetických. V rozvinutí jsou to přímky spojující bod $(A)_1$ prvé periody rozvinutí s bodem $(B)_k$ k-té periody rozvinutí. – Takovou plochou jest na př. rotační válec, na němž mezi body A, B probíhá co mnoho šroubovic, majících různé výšky závitu. Nejkratší z nich mezi A, B jest ta, pro kterou body A, B leží na témž závitu.

Vidíme tedy, že ani pro plochy rozvinutelné není definice křivek geodetických jako nejkratších spojnic jejich bodů postačitelnou. V případě obecné plochy není pak možno bez podrobnějšího vyšetření předpokládati, že by mezi nekonečným množstvím křivek spojujících dva body plochy byla vždy jedna nejkratší.*)

Možno tedy úhrnem říci: Reálné křivky geodetické možno nejobecněji definovati tím, že jejich hlavní nor-

*) připomeňme si na př. dva diametrálně protilehlé body plochy kulové.

mály splývají s normálami plochy. Všecky nejkratší spojnice dvojic bodů plochy náleží mezi ně, tedy také veškeré přímky na ploše ležící.

Ačkoli pak tato definice týká se jen křivek reálných, jest s hlediska analytického čítati též křivky minimální ke křivkám geodetickým.

Přes to nutno zdůrazniti tu okolnost, že křivky geodetické na ploše dány jsou dif. rovnicí 2. řádu, jest jich tedy na ploše ∞^2, na rozdíl od křivek křivosti, křivek asymptotických i křivek minimálních, jichž jest na ploše pouze ∞^1. Prochází tedy bodem na ploše obecně ∞^1 křivek geodetických a jest možno v obecném reálném případě mluviti o geodetické křivce na ploše jako nejkratší spojnici dvou bodů plochy. Podél takovéto křivky ustálí se v případě s fysikální stránky ideálním napjatá nit mezi dvěma body plochy v poloze rovnovážné. Se zřetelem k předchozímu nutno však při tomto způsobu vyjádření míti na mysli možné odchylky týkající se jednak existence takovéto křivky a jednak možnosti většího počtu křivek geodetických dva body plochy spojujících.

II. Applikace na plochu rotační.

11.9. Případ obecné plochy rotační. – Vyjděme z obvyklého vyjádření

$$x = p(u)\cos v,\quad y = p(u)\sin v,\quad z = q(u) \quad \ldots (1)$$

kde v nechť znamená odchylku roviny meridiánu a u

oblouk křivky meridiánové, takže jest

$$p'^2 + q'^2 = 1, \quad \text{tudíž}$$

$$\mathcal{E} = 1, \ \mathcal{F} = 0, \ \mathcal{G} = p^2.$$

Dosazením do příslušných vzorců (str. 253) seznáváme, že jen ty kružnice paralelní jsou křivkami geodetickými, pro které jest

$$p p' = 0.$$

Jsou to tedy kromě kružnic $p = 0$ v body degenerujících ony kružnice, podél nichž jest $p' = 0$, t. j. podél nichž dotýkají se plochy rotační válce o ose z.

Ostatní geodetické křivky dány jsou rovnicí

$$\begin{vmatrix} 1, & -pp'\left(\frac{dv}{du}\right)^2 \\ p^2\frac{dv}{du}, & 2pp'\frac{dv}{du} + p^2\frac{d^2v}{du^2} \end{vmatrix} = 0$$

čili $$\frac{d^2v}{du^2} + pp'\left(\frac{dv}{du}\right)^3 + 2\frac{p'}{p}\frac{dv}{du} = 0 \ \ldots\ (2).$$

Geometrický význam možno dáti této rovnici tím, že zavedeme úhel α, který tvoří geodetická křivka v bodě (u, v) s meridiánem.

Ze známého vzorce

$$\cos\varphi = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{F}(k_1 + k_2) + \mathcal{G}k_1k_2}{\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}k_1 + \mathcal{G}k_1^2}\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}k_2 + \mathcal{G}k_2^2}}$$ plyne zde

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2\left(\frac{dv}{du}\right)^2}},$$ přísluší-li $k = \frac{dv}{du}$ naší křivce.

Odtud obdržíme $\frac{dv}{du} = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{p}$, tedy $\frac{d^2v}{du^2} = \pm\frac{1}{p\cos^2\alpha}\frac{d\alpha}{du} \mp \frac{\operatorname{tg}\alpha}{p^2}p'$

a dosazením do rovnice (2) máme

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\frac{d\alpha}{du} + \frac{p'}{p} = 0$$

čili

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{d\sin\alpha}{du} + \frac{p'}{p} = 0,$$ tedy integrací:

$$\log \sin \alpha + \log p = \log m \qquad (n = \text{konst})$$

čili

$$p \sin \alpha = m \quad \dots \quad (3),$$

čímž dospíváme ke známé nám <u>větě Clairautově</u>.

Dosadíme do této rovnice (3) za $\sin \alpha$ hodnotu plynoucí z výrazu pro $\cos \alpha$:

Jest $$\sin^2 \alpha = \frac{p^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2}{1 + p^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2},$$

takže rovnice (3) nabývá tvaru

$$\frac{dv}{du} = \frac{m}{p\sqrt{p^2 - m^2}},$$ kde pravá strana jest závislá pouze na u, takže integrací plyne

$$v = m \int \frac{du}{p\sqrt{p^2 - m^2}} - n \quad \dots \quad (4) \qquad (m, n \text{ konst})$$

čímž nabýváme <u>konečné rovnice</u> $v = \omega(u)$ křivky geodetické na ploše rotační.

<u>120. Rotační plocha stálé křivosti.</u> – Aplikujme získané výsledky na rotační plochu stálé míry křivosti K. Pro tyto plochy jest jak jsme seznali

$$p'' = -Kp \qquad \text{a v důsledku toho}$$

$$p(u) = a \cos \sqrt{K}\, u + b \sin \sqrt{K}\, u$$

(neboť zde píšeme p místo x a u místo s (v II. díle))

Zavedeme místo u jinou volbou počátku $\bar{u}$ vztahem

$$\bar{u} = u - c. \qquad \text{Pak jest}$$

$$p = a \cos \sqrt{K}(\bar{u} + c) + b \sin \sqrt{K}(\bar{u} + c) \quad \text{čili}$$

$$p = (a \cos \sqrt{K}\, c + b \sin \sqrt{K}\, c) \cos \sqrt{K}\, \bar{u} +$$
$$+ (-a \sin \sqrt{K}\, c + b \cos \sqrt{K}\, c) \sin \sqrt{K}\, \bar{u}.$$

Konstantu c můžeme tak volit, že druhá závorka jest rovna nule, hledáme-li totiž

$$\operatorname{tg}\sqrt{K}\,c = \frac{b}{a}\,,\quad \text{tedy}$$

$$\cos\sqrt{K}\,c = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,\quad \sin\sqrt{K}\,c = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

Pak jest $$p = \sqrt{a^2+b^2}\cos\sqrt{K}\,u\,.$$

Píšeme-li jednoduše l místo u, λ místo $\sqrt{a^2+b^2}$, máme

$$p = \lambda\cos\sqrt{K}\,u \quad \dots\dots (5).$$

Pak dává rovnice (4)

$$v = \int \frac{m\,du}{\lambda\cos\sqrt{K}\,u\,\sqrt{l^2\cos^2\sqrt{K}\,u - m^2}} - u\,.$$

Za účelem provedení dalšího integrace zavedeme novou proměnnou t vztahem $\cos\sqrt{K}\,u = t$.

Pak jest $$\sin\sqrt{K}\,u = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,,\quad \cos\sqrt{K}\,u = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

a

$$du = -\frac{1}{\sqrt{K}}\sin^2\sqrt{K}\,u\cdot dt\,,$$ takže pro v plyne

$$v = -\frac{m}{\lambda\sqrt{K}}\int \frac{dt}{t\sqrt{l^2t^2 - m^2(1+t^2)}} - u$$

čili po integraci

$$v = \frac{1}{\lambda\sqrt{K}}\arcsin\left(\frac{m}{\sqrt{l^2-m^2}}\,\frac{1}{t}\right) - u$$

čili

$$\sin\left(\lambda\sqrt{K}\,v + u\right) = \frac{m}{\sqrt{l^2-m^2}}\cdot\frac{1}{t}\,,$$

tedy, zavedeme-li za t opět $\cos\sqrt{K}\,u$,

$$\sin\left(\lambda\sqrt{K}\,v + u\right) = \frac{m}{\sqrt{l^2-m^2}}\operatorname{tg}\sqrt{K}\,u \quad \dots\dots (6).$$

Tato rovnice, která obsahuje kromě konstanty λ, závislé na K vztahem (5), dvě nezávislé konstanty m, n, vyjadřuje tedy ∞^2 křivek geodetických dané plochy. Rovnici tu

možno též psáti ve tvaru

$$\cos n \cdot \sin \lambda\sqrt{K}\, v \cdot \operatorname{cot}\sqrt{K}\, u + \sin n \cdot \cos \lambda\sqrt{K}\, v \cdot \operatorname{cot}\sqrt{K}\, u = \frac{m}{\sqrt{\lambda^2 - m^2}}.$$

Zavedme nyní nové parametry $\bar{u}$, $\bar{v}$ vztahy

$$\bar{u} = \sin \lambda\sqrt{K}\, v \cdot \operatorname{cot}\sqrt{K}\, u,$$

$$\bar{v} = \cos \lambda\sqrt{K}\, v \cdot \operatorname{cot}\sqrt{K}\, u,$$

čímž rovnice nabývá tvaru

$$\cos n \cdot \bar{u} + \sin n \cdot \bar{v} = \frac{m}{\sqrt{\lambda^2 - m^2}} \quad \ldots (71).$$

Možno tedy na rotační ploše konstantní křivosti zavésti takové parametry $\bar{u}$, $\bar{v}$, že geodetické křivky plochy jsou vyjádřeny lineární rovnicí

$$\text{konst.}\, \bar{u} + \text{konst.}\, \bar{v} = \text{konst.}$$

Stačí připomenouti si větu o možnosti vzájemné deformace každých dvou ploch téže konstantní křivosti, aby bylo nám zřejmo, že poslední věta platí pro plochy konstantní křivosti vůbec. V geometrii na ploše konstantní křivosti odpovídají tedy křivky geodetické přímkám geometrie rovinné.

Poznámky.

Pro nedostatek místa nutno ve příčině geodetického zobrazení ploch jen poukázati na knihy: Dr. Georg Scheffers, Einführung in die Theorie der Flächen, pro případě též: L. Bianchi (překladem M. Lukat-a), Vorlesungen über Differentialgeometrie. Totéž ve příčině geodetických parametrů na ploše. Ve příčině pak obálek soustav ploch budiž uvedena kniha: W. de Tannenberg, Leçons nouvelles sur les applications géométriques du calcul différentiel.

K úvaze o tečné rovině bodu plochy:
Z příslušné úvahy jest zřejmo, že bodu (x, y, z) plochy přísluší tehdy určitá rovina tečná, nejsou-li derivace jeho souřadnic dle u ani dle v rovny současně nule.

a) Budiž nyní ve zvláštním případě

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial v} = 0 .$$

Pak pro $dx, \dots$ platí rozvoje

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} du\, dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv^2\right) + \dots$$

— — —

Ježto du^2 a $du\,dv$ jsou nekonečně malé vyššího řádu nežli du a postup na ploše musí býti různý dle různého vztahu přírůstků du, dv, nutno předpokládati, že dv^2 jest nekonečně malou téhož řádu jako du, takže jest $\frac{(dv)^2}{du} = k$ hodnotou konečnou a zanedbáním veličin vyššího plyne $dx = \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} k\right) du$.

Jsou tedy rovnice tečny příslušné k postupu (k):

$$\xi = x + \frac{\partial x}{\partial u} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} k dt$$
$$\eta = y + \frac{\partial y}{\partial u} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} k dt$$
$$\zeta = z + \frac{\partial z}{\partial u} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} k dt,$$

kde t jest proměnlivý parametr charakterisující jednotlivé body na tečně. Jelikož tyto rovnice jsou lineární v dt a kdt, vyplňují i zde tečny bodu (x, y, z) určitou rovinu:

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ \eta - y & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \\ \zeta - z & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix} = 0.$$

b). Budiž však nyní současně

jak $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u} = 0$ tak i $\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial v} = 0$.

Tu jest

$$dx = \frac{1}{2}(x_{uu}\, du^2 + 2 x_{uv}\, du\, dv + x_{vv}\, dv^2) + \cdots$$

— — —

Je-li $\frac{dv}{du} = k$ hodnotou konečnou, obdržíváme zanedbáním veličin vyššího řádu

$$dx = \frac{1}{2}(x_{uu} + 2x_{uv} k + x_{vv} k^2)\, du^2, \ldots$$

a parametrické vyjádření pomocí parametru t jest pro tečnu (k) dáno rovnicemi

$$\xi = x + \frac{1}{2}(x_{uu} + 2x_{uv} k + x_{vv} k^2) t$$
$$\eta = y + \frac{1}{2}(y_{uu} + 2y_{uv} k + y_{vv} k^2) t$$
$$\zeta = z + \frac{1}{2}(z_{uu} + 2z_{uv} k + z_{vv} k^2) t.$$

Rovnice tyto jsou lineární v $1, 2kt, k^2 t$. Vyloučení $\underline{1}, \underline{k}$ z nich provedeme známým způsobem tím, že vypočteme

t, $2kt$, k^2t a užijeme vztahu $(2kt)^2 = 4.t.k^2t$

Tím dostáváme rovnici

$$4\begin{vmatrix} \xi-x & x_{uv} & x_{vv} \\ \eta-y & y_{uv} & y_{vv} \\ \zeta-z & z_{uv} & z_{vv} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi-x & x_{uu} & x_{uv} \\ \eta-y & y_{uu} & y_{uv} \\ \zeta-z & z_{uu} & z_{uv} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi-x & x_{uu} & x_{vv} \\ \eta-y & y_{uu} & y_{vv} \\ \zeta-z & z_{uu} & z_{vv} \end{vmatrix}^2 = 0$$

jako rovnici plochy tečnami našeho bodu vytvořené.

Jest to plocha kuželová 2. stupně. Bod, v němž by též všecky druhé parc. derivace vymizely, měl by pak kuželovou tečnovou plochu stupně vyššího než druhého.

= Body uvažované nazýváme singulárními body plochy. Jeznali jsme však v a), že tečny bodu tam uvažovaného ležely všecky v rovině tečné, jako tomu jest v obyčejném, čili regulárním bodě plochy. Přesvědčili bychom se skutečně snadno, že zavedením jiné soustavy parametrické singularita bodu toho přestává, čili že bod ten jest singulárním pouze k uvažované soustavě parametrů. (Srovnej se str. 300. II. díl)

Ve příčině bodu, v němž řezy normálné a jejich středy křivosti jsou ve vztahu projektivním, budiž zdůrazněno, že bod takový, je-li reálným bodem reálné plochy, jest bodem singulárním, v němž tečný kužel rozpadá se ve dva svazky paprskové ležící ve dvou rovinách navzájem kolmých.

(Viz: Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême, 1912: J. Sobotka, Konstrukzionen die Krümmung einer Fläche in einem Punkte betreffend.) (Str. 1–7.)

Část druhá.

Útvary přímkové.

Kapitola VII.

Přímky a útvary přímkové vůbec.

I. Analytické vyjádření.

121. Úvod. – Vyjadřujeme-li body na přímce čísly a nazýváme-li celou množinu bodovou jednoduchým nekonečným množstvím – čili ∞^1 – bodů, obsahuje rovina ∞^2 bodů, prostor ∞^3 bodů. Řada bodová přísluší jako duální útvar v rovině svazek paprskový, a pole bodové pole přímkové. Soustavě ∞^3 bodů odpovídá ∞^3 rovin v prostoru. Též předchozím útvarům přísluší duální útvary v prostoru. Jako sama k sobě duální existuje v prostoru soustava ∞^4 přímek.

Máme-li za základní útvary v rovině voliti buďto bod nebo přímku, při čemž jak první tak druhý prvek závisí na 2 parametrech. V prostoru můžeme obdobně bod nebo rovinu a 3 parametry, a-však nemůžeme za základní útvar v prostoru voliti

liž přímku, která jest útvarem sama k sobě duálním a závisí na 4 parametrech.

122. Útvary přímkové. – Přímku možno určiti jejími průsečíky se dvěma danými rovinami. A skutečně jest $\infty^2 . \infty^2 = \infty^4$ kombinací dvojic bodových pro dvě dvojice rovin.

Obecněji možno místo obou rovin zavésti libovolné plochy. Jsou-li

$$x = f(u,v),\ y = g(u,v),\ z = h(u,v) \ldots (1)$$

$$\bar{x} = \bar{f}(\bar{u},\bar{v}),\ \bar{y} = \bar{g}(\bar{u},\bar{v}),\ \bar{z} = \bar{h}(\bar{u},\bar{v}) \ldots (2)$$

rovnice obou ploch, jsou běžné souřadnice (ξ, η, ζ) bodu přímky, která spojuje body (x,y,z), $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, dány výrazy

$$\xi = \frac{x+\lambda\bar{x}}{1+\lambda},\ \eta = \frac{y+\lambda\bar{y}}{1+\lambda},\ \zeta = \frac{z+\lambda\bar{z}}{1+\lambda} \ldots (3),$$

kde λ jest dělicí poměr bodu P přímky k jejím bodům $A(x,y,z)$, $B(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

Zavedeme-li známými vztahy

$$x = \frac{x_1}{x_4},\ y = \frac{x_2}{x_4},\ z = \frac{x_3}{x_4}$$

souřadnice homogenní, jest krátce

$$\xi_i = x_i + \lambda\bar{x}_i,\ i = 1,2,3,4 \ldots (3').$$

Jelikož pak jest ∞^4 kombinací hodnot parametrů $u, v, \bar{u}, \bar{v}$, jest skutečně také ∞^4 dvojic bodů $A(u,v)$, $B(\bar{u},\bar{v})$, obdržíme tedy celkem ∞^4 přímek (AB).

a). Předpokládejme nyní, že parametry $u, v, \bar{u}, \bar{v}$

vázány jsou nějakým vztahem

$$\Phi(u, v, \bar{u}, \bar{v}) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{I}).$$

Tím vyskne z celé soustavy přímek určité menší množství přímek. A sice závisí přímky této množiny pouze na 3 parametrech, neboť rovnice (I) určuje jeden ze 4 parametrů $u, v, \bar{u}, \bar{v}$ jako funkci ostatních tří. Dostáváme tím t.zv. komplex přímek, jenž obsahuje ∞^3 prvků.

Zvolíme-li na př. na prvé ploše určitý bod A, tedy mají-li u, v stálou hodnotu, pak měníme-li $\bar{u}$, přísluší ke každému $\bar{u}$ obecně jedna hodnota nebo konečný počet hodnot parametru $\bar{v}$, prochází tedy bodem A ∞^1 přímek komplexu, které tvoří t.zv. komplexový kužel bodu A.

b). Připojíme-li ještě další podmínečnou rovnici

$$\Phi_1(u, v, \bar{u}, \bar{v}) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{II}),$$

pak přímky vyskmé tímto soustavy závisí pouze na 2 parametrech. Získáváme tím t.zv. kongruenci přímek, která obsahuje ∞^2 prvků.

Volíme-li opět určitý bod A, pak možno ze zvolených hodnot u, v vypočísti na základě rovnic (I), (II) hodnoty parametrů $\bar{u}, \bar{v}$, takže bodem A prochází obecně konečný počet přímek kongruence, po případě ovšem pro některé speciální polohy bodu A i nekonečný počet.

c). Připojme nyní ještě třetí rovnici

$$\Phi_2(u, v, \bar{u}, \bar{v}) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{III}).$$

Tím vyděcna jest plocha přímková, obsahující ∞^1 přímek, a tedy ovšem ∞^2 bodů.

Tu možno pouze jeden z parametrů $u, v, \bar{u}, \bar{v}$ libovolně vykonati, takže na př. parametrickou křivku (u = konst) plochy prvé proníná obecně konečný počet přímek přímkové plochy.

d) Přistoupí-li ještě čtvrtá rovnice

$$\Phi_3(u, v, \bar{u}, \bar{v}) = 0 \quad \ldots \quad (\overline{IV}),$$

nabýváme tím obecně konečného počtu přímek v prostoru, které jsou společny všem komplexům definovaným po řadě rovnicemi $\overline{I}, \overline{II}, \overline{III}, \overline{IV}$. Jest ovšem možno, že všechny tyto čtyři komplexy procházejí toutéž plochou přímkovou nebo toutéž kongruencí přímek.

123. Vyjádření kongruence. – Věnujme krátce pozornost analytickému vyjádření kongruence, jakožto množiny přímek, po přímkové ploše nejjednodušší. Použijeme-li opět známých nám z předchozího dvou ploch A, B, seznámíváme vzhledem k tomu, že každý prvek kongruence jest dán hodnotami dvou parametrů, že na obou plochách možno užíti dvou parametrů u, v:

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v)$$
$$\bar{x} = F(u, v), \quad \bar{y} = G(u, v), \quad \bar{z} = H(u, v)$$

takových, že každá přímka kongruence spojuje bod $A(u, v)$ plochy jedné s bodem $B(u, v)$ o téžchž parame-

trech u, v na ploše druhé.

Pak jsou

$$X = \frac{f(u,v) + \lambda F(u,v)}{1+\lambda}, \quad Y = \frac{g(u,v) + \lambda G(u,v)}{1+\lambda},$$

$$Z = \frac{h(u,v) + \lambda H(u,v)}{1+\lambda} \quad \ldots \quad (1)$$

souřadnice běžného bodu přímky $p(u,v)$ kongruence.

Kdybychom zde volili λ = konst, popíše bod (X, Y, Z) útvar závislý na dvou parametrech u, v, tedy určitou plochu P, danou rovnicemi (1). Plochy A, B možno pak nahraditi těmito plochami P.

Jednoduššího tvaru nabývá vyjádření kongruence, je-li obecná plocha B nahrazena nekonečně vzdálenou rovinou. Souřadnicemi bodu B_∞ jsou směrné kosiny přímky a, b, c násobené nějakým faktorem ϱ. Každému bodu $A(u,v)$ plochy prvé přísluší určitá přímka nebo obecně konečný počet přímek kongruence, takže směrné kosiny přímek těch jsou funkcemi parametrů u, v. Je-li tedy

$$\varrho a = F(u,v), \quad \varrho b = G(u,v), \quad \varrho c = H(u,v),$$

jsou souřadnice běžného bodu přímky p kongruence dány výrazy

$$\xi = f(u,v) + \lambda F(u,v), \quad \eta = g(u,v) + \lambda G(u,v),$$

$$\zeta = h(u,v) + \lambda H(u,v) \quad \ldots \quad (2).$$

Toto vyjádření kongruence jest nejobvyklejší, jsouc

analogické k vyjádření plochy přímkové na základě křivky řídicí.

124. Zavedení souřadnic přímky.*) – Přímku

možno jak známo vyjádřiti jejími průměty na roviny souřadné a to na kterékoli dvě z nich. Jsou-li

$$\left.\begin{aligned} x &= r z + \varrho \\ y &= s z + \sigma \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

rovnice dvou z těchto průmětů, a zároveň ovšem rovnice příslušných rovin promítacích, možno veličiny r, s, ϱ, σ pokládati za souřadnice přímky. Tyto souřadnice – jejichž geometrický význam jest zřejmý, nebyly by však pro naše úvahy výhodnými, jak snadno seznáme.

Provedme transformaci pravoúhlých souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 \bar{x} + \alpha_2 \bar{y} + \alpha_3 \bar{z} + a \\ y &= \beta_1 \bar{x} + \beta_2 \bar{y} + \beta_3 \bar{z} + b \\ z &= \gamma_1 \bar{x} + \gamma_2 \bar{y} + \gamma_3 \bar{z} + c, \end{aligned}$$

V této nové soustavě bude naše přímka dána rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{r} \bar{z} + \bar{\varrho} \\ \bar{y} &= \bar{s} \bar{z} + \bar{\sigma} \end{aligned}\right\} \quad (\bar{1}),$$

při čemž bude

$$\bar{r} = \frac{(\alpha_2 - r\gamma_2)(\beta_1 - s\gamma_1) - (\alpha_3 - r\gamma_3)(\beta_2 - s\gamma_2)}{(\alpha_1 - r\gamma_1)(\beta_2 - s\gamma_2) - (\alpha_2 - r\gamma_2)(\beta_1 - s\gamma_1)},$$

$$\bar{\varrho} = \frac{\varrho(\beta_2 + s\gamma_2) - \sigma(\alpha_2 - r\gamma_2)}{(\alpha_1 - r\gamma_1)(\beta_2 - s\gamma_2) - (\alpha_2 - r\gamma_2)(\beta_1 - s\gamma_1)},$$

*) Srovnej: Poznámky, Souřadnice kružnice a zobrazování cyklografické.

a podobně pro $\bar{s}, \bar{S}$. Vidíme tedy, že objevují se nám zde kvadratické funkce původních souřadnic, poněvadž není dáno volbou souřadnic vhodná.

125. Plückerovy souřadnice přímky. – Z uvedeného důvodu nevžívá se pro přímku souřadnic v předchozím uvedených, nýbrž užívá se souřadnic zavedených Plückerem. Za příčinou zavedení těchto souřadnic uvažujme přímku

a) jako průsečnici libovolných dvou rovin

$A(u_1, u_2, u_3, u_4)$, $B(v_1, v_2, v_3, v_4)$ jí jdoucích. Roviny tyto dány jsou rovnicemi

$$\sum u_i \xi_i = 0$$
$$\sum v_i \xi_i = 0,$$

takže jest

$$\sum (u_i + \lambda v_i) \xi_i = 0$$

rovnice libovolné roviny přímkou jdoucí.

Každou naší přímkou roviny jdoucí vrcholy souřadného tetraedru – jenž jest omezen rovinami souřadnými naší pravoúhlé soustavy a rovinou nekonečně vzdálenou. Rovnice těchto rovin mají tu vlastnost, že vždy jeden koeficient na levé straně vymizí.

Vymizí-li na př. první koefficient:

$$u_1 + \lambda v_1 = 0,$$

jest příslušné λ rovno $\lambda_1 = -\frac{u_1}{v_1}$

a obdobně pro vymizení jednotlivých dalších koefficientů, takže rovnice našich rovin jsou:

$$(u_2v_1 - u_1v_2)\,\xi_2 + (u_3v_1 - u_1v_3)\,\xi_3 + (u_4v_1 - u_1v_4)\,\xi_4 = 0$$
$$(u_1v_2 - u_2v_1)\,\xi_1 + (u_3v_2 - u_2v_3)\,\xi_3 + (u_4v_2 - u_2v_4)\,\xi_4 = 0$$
$$(u_1v_3 - u_3v_1)\,\xi_1 + (u_2v_3 - u_3v_2)\,\xi_2 + (u_4v_3 - u_3v_4)\,\xi_4 = 0$$
$$(u_1v_4 - u_4v_1)\,\xi_1 + (u_2v_4 - u_4v_2)\,\xi_2 + (u_3v_4 - u_4v_3)\,\xi_3 = 0.$$

Koeficienty těchto rovnic nemění se, nahradíme-li původní roviny A, B jinými rovinami přímkou jdoucími.*) Mají celkem 6 hodnot a jsou-li dány — patrně vůbec nikoli nezávisle navzájem — jest tím přímka rovněž dána.

Z toho důvodu zavádíme tyto koeficienty za souřadnice přímky; kladou se — jelikož záleží pouze na poměru veličin těch —

a) $\dots\dots \varrho\, q_{ik} = u_i v_k - u_k v_i$, kde $i \neq k$; $i = 1,\dots 4$, $k = 1,\dots 4$.

Jelikož jest $q_{ik} + q_{ki} = 0$,

prohlasme hodnoty

$$q_{12},\ q_{23},\ q_{31},\ q_{14},\ q_{24},\ q_{34}$$

za tyto souřadnice.

Uvažované čtyři roviny dány jsou pak rovnicemi

$$\left.\begin{aligned}
R &\equiv\ *\ + q_{12}\xi_2 + \underbrace{q_{13}}_{-q_{31}}\xi_3 + q_{14}\xi_4 = 0\\
S &\equiv -q_{12}\xi_1 + *\ + q_{23}\xi_3 + q_{24}\xi_4 = 0\\
T &\equiv\ q_{31}\xi_1 - q_{23}\xi_2 + *\ + q_{34}\xi_4 = 0\\
U &\equiv +q_{14}\xi_1 + q_{24}\xi_2 + q_{34}\xi_3 + *\ = 0
\end{aligned}\right\} \dots (I)$$

Naše veličiny q_{ik} stanoví pouze 5 veličin podkladných. Jelikož však přímka závisí pouze na 4 parametrech, musí veličiny ty býti vázány jedinou podmínkou.

*) jak plyne z geometrického významu rovin jimi určených

Abychom ji sestrojili, vyjděme z determinantu

$$\begin{vmatrix} [+] & u_1 & v_1 & u_1 & v_1 \\ [-] & u_2 & v_2 & u_2 & v_2 \\ [+] & u_3 & v_3 & u_3 & v_3 \\ [-] & u_4 & v_4 & u_4 & v_4 \end{vmatrix} = 0$$

a vyčíslíme jej dle prvních dvou sloupců:

$$(u_1v_2 - u_2v_1)(u_3v_4 - u_4v_3) - (u_1v_3 - u_3v_1)(u_2v_4 - u_4v_2) +$$
$$+ (u_1v_4 - u_4v_1)(u_2v_3 - u_3v_2) + (u_2v_3 - u_3v_2)(u_1v_4 - u_4v_1) -$$
$$- (u_2v_4 - u_4v_2)(u_1v_3 - u_3v_1) + (u_3v_4 - u_4v_3)(u_1v_2 - u_2v_1) = 0;$$

tím nabýváme nerci Q_{ik} vztahu

$$\underline{\omega(Q) = 2(Q_{12}Q_{34} + Q_{23}Q_{14} + Q_{31}Q_{24}) = 0. \quad \cdots (Q)}$$

— Dejme si nyní naopak otázku, zdali libovolných čtveřic hodnot Q_{ik}, které vyhovují rovnici (Q), možno považovati za souřadnice nějaké přímky v prostoru. Má-li tomu být tak, musí rovnice (I), obsahující naše veličiny Q_{ik} jako koeficienty, představovati čtyři roviny jdoucí touž přímkou. Okolnost tu vyjadříme tím požadavkem, že každá rovina

$R + \lambda S = 0$, jdoucí průsečnicí rovin R, S, má procházeti průsečnicí rovin T, U, takže její rovnice dá se též psáti ve tvaru $T + \mu U = 0$.

Mají tedy rovnice

$$\lambda Q_{21}X_1 + Q_{12}X_2 + (Q_{13} + \lambda Q_{23})X_3 + (Q_{14} + \lambda Q_{24})X_4 = 0$$

a

$$(Q_{31} + \mu Q_{41})X_1 + (Q_{32} + \mu Q_{42})X_2 + \mu Q_{43}X_3 + Q_{34}X_4 = 0$$

být dotožny — až na určitý multiplikační faktor.

Dejme tomu, že druhou rovnici musíme násobiti faktorem α, abychom dostali první. Klademe $\beta = \mu \cdot \alpha$, obdržíme srovnáním koefficientů rovnice

$$\lambda q_{21} = \alpha q_{31} + \beta q_{41}\,, \quad q_{13} + \lambda q_{23} = \beta q_{43}$$
$$q_{12} = \alpha q_{32} + \beta q_{42}\,, \quad q_{14} + \lambda q_{24} = \alpha q_{34}\,.$$

Vyloučíme z rovnic první, druhé a čtvrté α, β tím, že první rovnici násobíme q_{34} a dosadíme za αq_{34}, βq_{34}. Tím obdržíme rovnici

$$\lambda q_{21} q_{34} = q_{31}(q_{14} + \lambda q_{24}) - q_{41}(q_{13} + \lambda q_{23}),$$

která uspořádáním dle λ nabývá tvaru

$$\lambda (q_{12} q_{34} + q_{23} q_{14} + q_{31} q_{24}) = 0 \quad \ldots\ (1').$$

Této rovnici vyhovuje vzhledem k učiněnému předpokladu o veličinách q_{ik} každá hodnota pro λ volená.

Obdobně rovnice třetí nabývá se zřetelem k rovnicím druhé a čtvrté tvaru

$$q_{12} q_{34} = q_{32}(q_{14} + \lambda q_{24}) + q_{24}(q_{13} + \lambda q_{23})$$

čili tvaru

$$q_{12} q_{34} + q_{23} q_{14} + q_{31} q_{24} = \lambda \overbrace{(q_{32} q_{24} + q_{23} q_{24})}^{\alpha} = 0 \ldots (2'),$$

kterážto rovnice jest za učiněného předpokladu rovněž splněna každým λ.

Seznáváme tedy, že vyhovující veličiny q_{ik} – jinak libovolné – rovnici (Q), procházejí skutečně rovinou R, S, T, U, dané na základě veličin těch, rov-

nicemi (I), jedinou a touž přímkou p, takže takové veličiny p_{ik} jsou skutečně souřadnicemi určité přímky p.

Obdobně uvažujme přímku

b) jako spojnici libovolných dvou bodů $A(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $B(y_1, y_2, y_3, y_4)$ na ní ležících. Postup bude zde úplně obdobný k případu a). Souřadnice libovolného bodu C naší přímky budou

$$z_i = x_i + \lambda y_i \,, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Vyhledejme průsečíky přímky se stěnami souřadného tetraedru. Vhodnou pak

6) .... $\sigma p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$

považujme analogicky veličiny

$p_{12}, p_{23}, p_{31}, p_{14}, p_{24}, p_{34}$, které jsou hodnotami koefficientů v rovnicích oněch bodů průsečných, za souřadnice přímky.

Způsobem opět zcela analogickým ke str. 273 seznáme, že mezi šestinásobnými souřadnicemi p_{ik} platí vztah

$$\omega(p) = 2(p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24}) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (p)$$

Zcela analogicky bychom rovněž seznali, že libovolných 6 veličin, které splňují rovnici (p), jsou souřadnicemi určité přímky.

Půjde ovšem nyní o

c) souvislost obou druhů souřadnic přímky.

Rovina R (str. 272) musí obsahovati oba body A, B naší přímky, což vede k rovnicím

$$q_{12}x_2 + q_{13}x_3 + q_{14}x_4 = 0$$
$$q_{12}y_2 + q_{13}y_3 + q_{14}y_4 = 0 .$$

Odtud plyne:

$$q_{12} : q_{13} : q_{14} = (x_3y_4 - x_4y_3) : (x_4y_2 - x_2y_4) : (x_2y_3 - x_3y_2)$$

čili

$$q_{12} : q_{13} : q_{14} = p_{34} : p_{42} : p_{23},$$

což lze též psáti ve tvaru

$$\frac{q_{12}}{p_{34}} = \frac{q_{31}}{p_{24}} = \frac{q_{14}}{p_{23}} \quad \dots\dots \quad (\alpha).$$

Také však rovina S musí obsahovati body A, B, tedy

$$q_{21}x_1 + q_{23}x_3 + q_{24}x_4 = 0$$
$$q_{21}y_1 + q_{23}y_3 + q_{24}y_4 = 0,$$

odkud plyne

$$q_{21} : q_{23} : q_{24} = p_{34} : p_{41} : p_{13}$$

čili

$$\frac{q_{12}}{p_{34}} = \frac{q_{23}}{p_{14}} = \frac{q_{24}}{p_{31}} \quad \dots\dots \quad (\beta)$$

Spojením rovnic $(\alpha), (\beta)$ pak návěrne tedy, že

$$\frac{q_{12}}{p_{34}} = \frac{q_{23}}{p_{14}} = \frac{q_{31}}{p_{24}} = \frac{q_{14}}{p_{23}} = \frac{q_{24}}{p_{31}},$$

načež z rovnic $(\gamma), (\varrho)$ plyne, že poměr ten rovná se též

$$\frac{q_{34}}{p_{12}}.$$

Platí tedy rovnice

$$\left\{\begin{array}{l|l} \varrho\, q_{12} = \sigma\, p_{34} & \varrho\, q_{14} = \sigma\, p_{23} \\ \varrho\, q_{23} = \sigma\, p_{14} & \varrho\, q_{24} = \sigma\, p_{31} \\ \varrho\, q_{31} = \sigma\, p_{24} & \varrho\, q_{34} = \sigma\, p_{12}. \end{array}\right.$$

Ježto záleží pouze na poměru souřadnic těch, jsou tedy obojí souřadnice totožné, až na to, že jsou indescy při nich určitým způsobem zaměněny.

Vzhledem k tomu možno provésti

d) zavedení jednotných souřadnic přímkových.

Zavedeme za souřadnice přímky 6 veličin

$$r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6,$$

– při čemž vzhledem k rovnicím (p) a (q) jest lhostejno, béřeme-li

$$r_1 : r_2 : r_3 : r_4 : r_5 : r_6 = q_{12} : q_{23} : q_{31} : q_{34} : q_{14} : q_{24}$$

anebo béřeme-li

$$r_1 : r_2 : r_3 : r_4 : r_5 : r_6 = p_{12} : p_{23} : p_{31} : p_{34} : p_{14} : p_{24},$$

– vázaných vztahem

$$\omega(r) = 2(r_1 r_4 + r_2 r_5 + r_3 r_6) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (r)$$

Záměna první a druhé volby geometrického významu veličin r má totiž pouze za následek záměnu indescu $i, \; i+3$ při veličinách r, kdežto rovnice (r), kterou lze psáti ve tvaru

$$\overset{3}{\underset{1}{S}} r_i \, r_{i+3} = 0,$$

zůstává při tom v platnosti.

126. Přechod k nehomogenním souřadnicím.*) – Za tím účelem klademe $x_4 = y_4 = 1$, $u_4 = v_4 = 1$. Značme

u, v, w resp. u', v', w' souřadnice rovin A resp. B

a obdobně,

x, y, z resp. x', y', z' souřadnice bodů A resp. B.

Pak jest pro souřadnice q_{ik} resp. p_{ik}

*) bodů a rovin a mechanický význam souřadnic Plückerových.

$$\begin{aligned} \S q_{12} &= uv' - u'v \\ \S q_{23} &= vw' - v'w \\ \S q_{31} &= wu' - w'u \end{aligned} \quad \Big| \quad \begin{aligned} \S q_{14} &= u - u' \\ \S q_{24} &= v - v' \\ \S q_{34} &= w - w' \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \S p_{12} &= xy' - x'y \\ \S p_{23} &= yz' - y'z \\ \S p_{31} &= zx' - z'x \end{aligned} \quad \Big| \quad \begin{aligned} \S p_{14} &= x - x' \\ \S p_{24} &= y - y' \\ \S p_{34} &= z - z' . \end{aligned}$$

Užijeme-li tedy <u>prvé volby</u> pro označení souřadnic r_i, máme

$$\begin{aligned} \S r_1 &= x - x' \\ \S r_2 &= x - x' \\ \S r_3 &= y - y' \end{aligned} \quad \Big| \quad \begin{aligned} \S r_4 &= xy' - x'y \\ \S r_5 &= yz' - y'z \\ \S r_6 &= zx' - z'x , \end{aligned}$$

odkud plyne <u>jednoduchý geometrický význam</u> těchto souřadnic r_i: <u>(volíme-li libovolný faktor $\S$ rovný 1)</u>

Je-li složky na přímce zvolen vektor AB, jsou r_1, r_2, r_3 složky tohoto vektoru do souřadných os resp. z, x, y, – kdežto r_4, r_5, r_6 jsou momenty otáčení průmětu tohoto vektoru do rovin souřadných (xy) resp. (yz) resp. (zx) kolem počátku O*). (Jsou to složky dvojnásobné obsahy příslušných trojúhelníků o jednom vrcholu v počátku v oněch rovinách souřadných, vzaté s příslušným znaménkem daným směrem postupu od A ku B.)

<u>127. Souvislost s veličinami $r, s, \S, T$.</u> – Okolnost, že

*) Tím nabýváme mechanického významu našich homogenních souřadnic r_i; homog. souřadnice vůbec vzaly původ v mechanice.

body A, B leží na přímce, vyjádřena jest pomocí veličin r, s, ϱ, σ rovnicemi

$$x = r\,x + \varrho\,, \qquad x' = r\,x' + \varrho$$
$$y = s\,x + \sigma\,, \qquad y' = s\,x' + \sigma\,.$$

Odtud plyne

$$x - x' = r(x - x')\,, \qquad y - y' = s(x - x')$$

takže

$$r = \frac{r_2}{r_1}\,, \qquad s = \frac{r_3}{r_1}$$

Pro veličinu ϱ máme pak

$$\varrho = \frac{x\,x' - x'\,x}{x' - x} \quad \text{čili} \quad \varrho = \frac{r_4}{r_1}\,,$$

a obdobně pro σ:

$$\sigma = \frac{y\,x' - y'\,x}{x' - x} \quad \text{čili} \quad \sigma = -\frac{r_5}{r_1}\,.$$

Píšeme-li nyní rovnici (r) ve tvaru

$$\frac{r_4}{r_1} + \frac{r_2}{r_1}\,\frac{r_5}{r_1} + \frac{r_3}{r_1}\,\frac{r_6}{r_1} = 0\,,$$

čili: $\dfrac{r_4}{r_1} - r\sigma + s\varrho = 0\,,$

a klademe-li $r\sigma - s\varrho = \eta$, vidíme, že homogenní soustavou přímkových $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ nelze nahradit nehomogenními

$$r = \frac{r_2}{r_1}\,, \quad s = \frac{r_3}{r_1}\,, \quad \varrho = \frac{r_4}{r_1}\,, \quad \sigma = -\frac{r_5}{r_1}\,, \quad \eta = \frac{r_4}{r_1}\,,$$

při čemž r, s, ϱ, σ mají známý geometrický význam a kde jest vztah

$$\eta = r\sigma - s\varrho$$

rovnicí nahrazující rovnici (r)

128. Podmínka, aby se 2 přímky protínaly. – Přímka první budiž dána, jako průsečnice rovin R, S, (viz str. 272) rovnicemi

$$R\dots\quad q_{12}\xi_2 + q_{13}\xi_3 + q_{14}\xi_4 = 0$$
$$S\dots\quad q_{21}\xi_1 + q_{23}\xi_3 + q_{24}\xi_4 = 0$$

a obdobně přímka druhá rovnicemi

$$R'\dots\quad q'_{12}\xi_2 + q'_{13}\xi_3 + q'_{14}\xi_4 = 0$$
$$S'\dots\quad q'_{21}\xi_1 + q'_{23}\xi_3 + q'_{24}\xi_4 = 0.$$

Mají-li se protínati, musí průsečík jejich náležeti všem čtyřem navzájem rovinám, takže musí platiti vztah

$$\begin{vmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & 0 & q_{23} & q_{24} \\ 0 & q'_{12} & q'_{13} & q'_{14} \\ q'_{21} & 0 & q'_{23} & q'_{24} \end{vmatrix} = 0$$

čili (viz str. 272 1. volba pro r)

$$\begin{vmatrix} + & 0 & r_1 & -r_3 & r_5 \\ - & -r_1 & 0 & r_2 & r_6 \\ + & 0 & r'_1 & -r'_3 & r'_5 \\ - & -r'_1 & 0 & r'_2 & r'_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Vyčíslíme dle prvních dvou sloupců:

$$-r_1^2(r'_3r'_6 + r'_2r'_5) + r_1r'_1(r_2r'_5 + r'_3r_6) + r_1r''_1(r_3r'_6 + r'_2r_5) - r'^2_1(r_3r_6 + r_2r_5) = 0.$$

Vzhledem ke vztahům

$$r'_3r'_6 + r'_2r'_5 = -r'_1r'_4,$$
$$r_3r_6 + r_2r_5 = -r_1r_4$$

nabývá poslední rovnice tvaru

$$r_1r'_1(r_1r'_4 + r_2r'_5 + r_3r'_6 + r_4r'_1 + r_5r'_2 + r_6r'_3) = 0.$$

Tato rovnice bude splněna, bude-li buďto výraz v závorce roven nule anebo jeden z faktorů r_1, r_1' roven nule. Snadno seznáme, že první možnost jest nutnou a postačující podmínkou průseku obou přímek uvažovaných.

Vyjdeme-li dotýž od jiných dvou zrovnic R, S, T, V, nabudeme podmínečné rovnice obdobné k poslední, až na to, že před závorkou objeví se činitele $r_2 r_2', \ldots$ atd. Předpokládejme na př., že je $r_1 = 0$, avšak že $r_2, \ldots r_6$ jsou různé od nuly. Má-li pak býti výraz v závorce různý od nuly, musí $r_2', r_3', \ldots r_6'$ vesměs rovnati se nule, načež z podmínky (r) plyne, že též $r_1' = 0$. Anuluje se tedy v tomto případě též výraz v závorce, což jest proti předpokladu, nehledě ani k tomu, že není vůbec možno, aby všechny souřadnicové přímky byly rovny nule, neboť rovná-li jedna z nich nule, protíná přímka jednu hranu souřadného tetraedru. Rovněž v dalších případech, že totiž jedna z obou přímek protíná buďto dvě mimoběžné hrany tetraedru nebo prochází jedním jeho vrcholem nebo leží v jedné jeho stěně, není možno naši rovnici a rovnicím k ní analogickým vyhověti jinak, než že výraz v závorce jest roven nule.

Jest tedy rovnice

$$w(r, r') = 2(r_1 r_4' + r_2 r_5' + r_3 r_6' + r_4 r_1' + r_5 r_2' + r_6 r_3') = 0$$

nutnou a postačující podmínkou pro to, aby dvě přímky $(r), (r')$ se protínaly.

Forma $w(r, r')$ jest polární formou formy $w(r)$.

S III 36.

Možno ji totiž psáti ve tvaru

$$w(r, r') = S r_i' \frac{\partial w(r)}{r_i} \quad , \quad i = 1, \dots 6 .$$

129. Průsečík dvou různoběžek. – Buďte dány dvě různoběžky $p(r_1 \dots r_6)$, $p'(r_1' \dots r_6')$ a budiž úlohou stanoviti souřadnice jejich průsečíku. Bod ten určíme jako průsečík rovin $\mathbb{R}, S, \mathbb{R}'$ (viz str. 280). Máme tedy pro jeho souřadnice poměr

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = \begin{vmatrix} r_1 & -r_3 & r_5 \\ 0 & r_2 & r_6 \\ r_1' & -r_3' & r_5' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -r_3 & r_5 & 0 \\ r_2 & r_6 & -r_1 \\ -r_3' & r_5' & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} r_5 & 0 & r_1 \\ r_6 & -r_1 & 0 \\ r_5' & 0 & r_1' \end{vmatrix} :$$

takže provedeme-li a krátíme r_1, máme

$$: \begin{vmatrix} 0 & r_1 & -r_3 \\ -r_1 & 0 & r_2 \\ 0 & r_1' & -r_3' \end{vmatrix}$$

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = (r_1' r_4 + r_2 r_5' + r_3' r_6) : (-r_3 r_5' + r_3' r_5) :$$
$$: (r_1 r_5' - r_1' r_5) : (-r_1 r_3' + r_1' r_3) \dots . \quad (1).$$

Zcela obdobně obdržíme souřadnice

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = \dots . \quad (2)$$

roviny obou různoběžek. Vzhledem k souvislosti veličin q_{ik}, p_{ik}, r (viz str. 276, 277) nutno na pravé straně rovnice (1) zaměniti pouze indexy $i, i+3$.

130. Svazek přímek. – Buďte dány dvě přímky $a(a_1 \dots a_6)$, $b(b_1 \dots b_6)$. Řekneme se, když můžeme veličiny $x_1 \dots x_6$ dané vztahem

$$(S) \dots \quad x_i = \lambda a_i + \mu b_i \qquad i = 1, \dots 6 ,$$

kde λ, μ jsou parametry libovolně zvolené, pokládáli za souřadnice nové přímky x.

Vztah $\omega(x) = 0$ možno psáti ve tvaru

$$\omega(x) = \sum_1^3 (\lambda a_i + \mu b_i)(\lambda a_{i+3} + \mu b_{i+3})$$

$$= \lambda^2 \sum_1^3 a_i a_{i+3} + \lambda\mu \sum_1^3 (a_i b_{i+3} + b_i a_{i+3}) + \mu^2 \sum_1^3 b_i b_{i+3}$$

$$\omega(x) = \lambda^2 \omega(a) + 2\lambda\mu\, \omega(a,b) + \mu^2 \omega(b) = 0,$$

kterážto podmínka vzhledem k předpokladům

$$\omega(a) = 0, \quad \omega(b) = 0$$ nabývá tvaru

$$2\mu\, \omega(a,b) = 0,$$

čili, ježto λ, μ mají býti libovolné, musí

$$\omega(a,b) = 0.$$

Pouze tedy v tom případě, že přímky a, b jsou různoběžné, jsou vztahem (5) dány souřadnice soustavy ∞^1 přímek x.

Tážme se, jaký útvar budou tyto přímky x tvořiti. Uvažujme libovolnou přímku d, která protíná obě přímky a, b, takže platí

$$\omega(a,d) = 0, \quad \omega(b,d) = 0.$$

Pak snadno seznáme, že tato přímka d protíná vždy také přímku x. Jest totiž

$$\omega(x,d) = \omega[(\lambda a + \mu b), d] =$$

$$\omega(x,d) = \lambda\, \omega(a,d) + \mu\, \omega(b,d) = 0,$$

čímž důkaz proveden.

Přímka d leží však buďto v rovině (ab) anebo prochází průsečíkem (a,b). K každou takovou přímku d,

ať prvého druhu nebo druhého druhu protíná přímku x, což jest možno jen tak, že přímka x náleží svazku stanoveném přímkami a, b.

Dána-li pak přímka e taková, že neprotíná ani přímku a ani přímku b, existuje jediná přímka x, protínající přímku e. Z podmínky

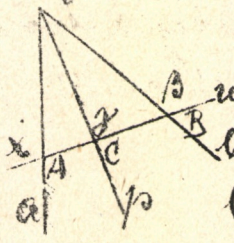
$$w(x,e) = \lambda w(a,e) + \mu w(b,e) = 0$$

plyne totiž pro poměr koefficientů λ, μ ve výrazech (S) pro souřadnice oné přímky x vztah

$$\lambda : \mu = -[w(b,e) : w(a,e)].$$

Poměr tedy pak při homogenních souřadnicích x záleží pouze na jejich poměru, jest skutečně poměrem $\lambda : \mu$ dána jediná přímka našeho svazku (S).

Snadno získáme si též geometrický význam koefficientů λ, μ v rovnici našeho svazku (S).



Je-li $V(v_1, v_2, v_3, v_4)$ vrchol svazku přímek ps stanoveného přímkami a, b a protíná-li přímka u přímky a resp b resp běžnou přímku svazku ps v bodech $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ resp $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ resp $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, pak možno jak známo psáti

$$\gamma_i = \lambda \alpha_i + \mu \beta_i \qquad i = 1, \ldots 4.$$

Souřadnice p_{ik} přímek a, b, ps jsou pak:

$$a_{ik} = v_i \alpha_k - \alpha_i v_k, \quad b_{ik} = v_i \beta_k - \beta_i v_k,$$

$$p_{ik} = v_i \gamma_k - \gamma_i v_k = v_i(\lambda \alpha_k + \mu \beta_k) - v_k(\lambda \alpha_i + \mu \beta_i),$$

čili

$$p_{ik} = \lambda a_{ik} + \mu b_{ik}.$$

Označíme-li φ poměr $\varphi = \frac{u}{x}$

možno lze klásti (jestliže máme souřadnice homogenní)

$$y_i = x_i + \varphi p_i \quad \dots \quad (1)$$

načež

$$p_{ik} = a_{ik} + \varphi b_{ik} \quad \dots \quad (2).$$

Jest však známo, že ve výrazu (1) jest koefficient φ dělicím poměrem bodu Q k bodům A, B a že dvojpoměr koefficientů $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \varphi^{(4)}$ jest dvojpoměrem bodů příslušných $Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}, Q^{(4)}$.

Odtud plyne, že paprsky $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$ svazku (3) mají dvojpoměr rovný dvojpoměru hodnot $\frac{u^{(1)}}{x^{(1)}}, \frac{u^{(2)}}{x^{(2)}}, \frac{u^{(3)}}{x^{(3)}}, \frac{u^{(4)}}{x^{(4)}}$, takže specielně přímky x, y:

$$x_i = \lambda a_i + \mu b_i, \quad y_i = \lambda a_i - \mu b_i$$

oddělují harmonicky přímky a, b.

Krátce můžeme výsledek předchozí úvahy shrnouti ve tvaru: Je-li matice

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \dots & a_6 \\ b_1 & b_2 \dots & b_6 \\ x_1 & x_2 \dots & x_6 \end{vmatrix}$$

řádu 2., t.j. jsou-li všecky z ní utvořené determinanty 3. řádu rovny nule, pak prvky jeho jejího řádku značí souřadnice přímky, obsažené ve svazku stanoveném přímkami dvěma jinými dvěma řádky.

131. Tři přímky a soustavy jimi dané. — Buďte dány tři přímky a, b, c a přejme se po přímkách, jejichž souřadnice by byly dány výrazy:

$(\pi) \dots \quad x_i = \lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i \,, \qquad i = 1,..6.$

Není nevhodno připomenouti si, že kdyby $a_i, b_i, c_i \dots$ $\dots i = 1,..4$ byly souřadnice bodů A, B, C, náležel by bod $X(x_1 .. x_4)$ rovině ABC, takže by rovnice (π) definovala pole rovinné. Duálně třemi rovinami dáno jest svazek prostorový.

Mají-li veličiny x_i, $i = 1,..6$, znamenati souřadnice přímky, musí

$$\omega(x) = 0 \qquad \text{což dá}$$

$$\omega(\lambda a + \mu b + \nu c) = \sum_1^3 (\lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i)(\lambda a_{i+3} + \mu b_{i+3} + \nu c_{i+3})$$

$$0 = \lambda^2 \omega(a) + \mu^2 \omega(b) + \nu^2 \omega(c) + 2\lambda\mu\, \omega(a,b) + 2\mu\nu\, \omega(b,c) + 2\nu\lambda\, \omega(c,a)$$

čili musí

$(\varkappa) \dots \quad \lambda\mu\, \omega(a,b) + \mu\nu\, \omega(b,c) + \nu\lambda\, \omega(c,a) = 0$

Mají-li nyní

a) koefficienty λ, μ, ν býti zcela libovolné, možno rovnici $(\varkappa)$ splniti jen tak, že

$$\omega(a,b) = 0, \quad \omega(b,c) = 0, \quad \omega(c,a) = 0,$$

t. j. přímky a, b, c musí buď to ležeti v jedné rovině anebo procházeli jedním bodem.

Pak jest na př.

$$\omega(x,a) = \omega(\lambda a + \mu b + \nu c, a) = \lambda\omega(a) + \mu\omega(b,a) + \nu\omega(c,a) = 0$$

a obdobně $\omega(x,b) = 0$, $\omega(x,c) = 0$.

Rovnice (π) definuje tedy v tomto případě buď pole přímkové nebo svazek prostorový.

Mějme nyní dány dvě přímky d, f, které neprotí-

mají současně přímek a, b, c t.j. neleží v rovině pole resp. neprocházejí vrcholem svazku. Pak možno v naší soustavě (π) stanoviti takovou přímku x, která protíná přímky d, f.

Musí totiž býti

$$w(x, d) = 0, \quad w(x, f) = 0, \quad \text{t.j.}$$

$$w(\lambda a + \mu b + \nu c, d) = 0, \quad w(\lambda a + \mu b + \nu c, f) = 0$$

čili po rozvedení

$$\lambda w(a, d) + \mu w(b, d) + \nu w(c, d) = 0$$

$$\lambda w(a, f) + \mu w(b, f) + \nu w(c, f) = 0$$

Těmito dvěma rovnicemi jest skutečně dáno – za řečeného předpokladu – určitý poměr $\lambda : \mu : \nu$, jímž, vzhledem k homogenitě souřadnic, dána jest jediná přímka naší soustavy (π).

Přímka ta jest spojnicí průsečíků přímek d, f s rovinou pole resp průsečnicí rovin daných přímkami d, f a vrcholem svazku.

Tím nabyli jsme příkladu pro tu okolnost, že rovnice v souřadnicích přímkových jsou samy k sobě duální, připouštějíce vždy dvě navzájem duální interpretace prostorové.

Úkonem možno opět říci:

Je-li ze souřadnic 4 přímek utvořená matice

$$\begin{vmatrix} a_1, a_2 \dots a_6 \\ b_1, b_2 \dots b_6 \\ c_1, c_2 \dots c_6 \\ x_1, x_2 \dots x_6 \end{vmatrix}$$

maticí řádu 3., pak přímka odpovídající jednomu řádku náleží soustavě 2. řádu dané přímkami ostatních 3 řádků.

b) Uvažujme nyní případ, že

$$\omega(a,b) \neq 0, \quad \omega(b,c) \neq 0, \quad \omega(c,a) \neq 0,$$

t. j., že přímky a, b, c jsou navzájem mimoběžné.

Mají-li v tomto případě výrazy

$$(\pi) \dots x_i = \lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i \qquad i = 1,\dots 6$$

dávati souřadnice další přímky x, nemohou koeficienty λ, μ, ν býti zcela libovolné, nýbrž musí splňovati podmínku (viz str. 286)

$$(\varkappa) \dots \lambda\mu\,\omega(a,b) + \mu\nu\,\omega(b,c) + \nu\lambda\,\omega(c,a) = 0.$$

Jest tedy v tomto případě výrazy (π) dáno ∞^1 přímek x. Snadno seznáme, že přímky x tvoří řadu přímek.

Protíná-li totiž nějaká přímka y všecky tři přímky a, b, c, t. j. je-li

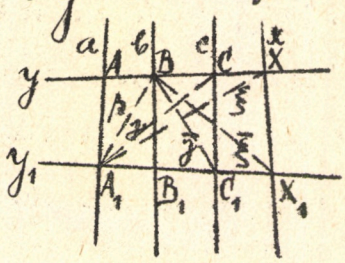
$$\omega(a,y) = 0, \quad \omega(b,y) = 0, \quad \omega(c,y) = 0,$$

jest též $\omega(x,y) = 0$,

t. j. přímka y protíná též přímku x. Tvoří tedy skutečně přímky x jednu soustavu přímek na ploše 2. stupně, kteréžto soustavě náleží též přímky a, b, c.

Možno zcela též dokázati větu, že transversály y protínají přímky a, b, c, x ve čtveřině bodů o stálém dvojpoměru. Stanovme tento dvojpoměr.

Vyberme si 2 takovéto transversály y, y_1, protínající přímky a, b, c, x v bodech A, B, C, X resp. A_1, B_1, C_1, X_1, a promíněme body B, C, X z A_1 papršky β, γ, ξ a body C_1, X_1 z B papršky γ_1, ξ_1.



Pak možno psáti (viz 130.)

$$\gamma_i = a_i + \lambda \beta_i$$
$$\xi_i = a_i + \mu \beta_i ,$$

při čemž bude dvojpoměr

$$(ABCX) = (\alpha\beta\gamma\xi) = \frac{\mu}{\lambda} .$$

Avšak γ, c a ξ, x musí se protínati, tedy musí

$$\omega(c, \gamma) = 0 , \quad \omega(\xi, x) = 0$$

čili musí

$$\omega(c, a) + \lambda\, \omega(c, \beta) = 0$$
$$\omega(x, a) + \mu\, \omega(x, \beta) = 0 ,$$

odkud plyne

$$\lambda = -\frac{\omega(c, a)}{\omega(c, \beta)} , \quad \mu = -\frac{\omega(x, a)}{\omega(x, \beta)} ,$$

takže jest

$$(1) \ldots \underline{(ABCX)} = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\omega(x, a)}{\omega(x, \beta)} \cdot \frac{\omega(c, \beta)}{\omega(c, a)} .$$

Touž hodnotu bude míti též dvojpoměr (A_1, B_1, C_1, X_1): Zde jest obdobně

$$\bar{\gamma}_i = b_i + \bar{\lambda} \beta_i$$
$$\bar{\xi}_i = b_i + \bar{\mu} \beta_i .$$

Vztahy

$$\omega(c, \bar{\gamma}) = 0 , \quad \omega(x, \bar{\xi}) = 0$$

dávají

$$\omega(c, b) + \bar{\lambda}\, \omega(c, \beta) = 0$$
$$\omega(x, b) + \bar{\mu}\, \omega(x, \beta) = 0 ,$$

odkud

$$\bar{\lambda} = -\frac{\omega(c, b)}{\omega(c, \beta)} , \quad \bar{\mu} = -\frac{\omega(x, b)}{\omega(x, \beta)} ,$$ takže

(2)... $(B_1 A_1 C_1 X_1) = (b\beta\gamma\xi) = \frac{\bar{u}}{\bar{\lambda}} = \frac{\omega(x,b)}{\omega(x,\beta)} \cdot \frac{\omega(c,\beta)}{\omega(c,b)}$.

Předpokládáme-li větu o stálosti řečeného dvojpoměru za známou, můžeme psáti

$$(ABCX) = (A_1 B_1 C_1 X_1) = (a,b,c,x),$$

vyjadřující toto dvojpoměr dvojpoměrem našich 4 přímek a,b,c,x.

Vzhledem k tomu pak, že

$$(B_1 A_1 C_1 X_1) = (b,a,c,x) = \frac{1}{(a,b,c,x)},$$

můžeme vyloučiti z výrazu pro náš dvojpoměr souřadnice přímky β. Jest totiž

z rovnice (1): $$\frac{\omega(c,\beta)}{\omega(x,\beta)} = \frac{\omega(c,a)}{\omega(x,a)} (a,b,c,x)$$

a z rovnice (2): $$\frac{\omega(c,\beta)}{\omega(x,\beta)} = \frac{\omega(c,b)}{\omega(x,b)} \cdot \frac{1}{(a,b,c,x)}.$$

Porovnáním obdržíme

$$(abcx)^2 = \frac{\omega(c,b)}{\omega(x,b)} \cdot \frac{\omega(x,a)}{\omega(c,a)}.$$

Píšeme-li pro zkrácení:

$$\frac{\omega(a,c)}{\omega(b,c)} : \frac{\omega(a,x)}{\omega(b,x)} = \omega(a,b,c,x),$$

máme $$(abcx) = \sqrt{\frac{1}{\omega(abcx)}}.$$

Znaménko jest obšem závislé na pořadu, v jakém body X, A, B, C přímky y za sebou následují. A jelikož musí býti $(abcx) + (acbx) = 1$, nemohou znaménka těchto dvou dvojpoměrů nikdy býti současně záporná.

132. Transformace souřadnic přímkových. – Provedme transformaci pravoúhlé soustavy souřadné rovnicemi

(1) ... $\varrho x_i = a_{i1}\bar{x}_1 + a_{i2}\bar{x}_2 + a_{i3}\bar{x}_3 + a_{i4}\bar{x}_4$, $i = 1,..4$.

– Význam koefficientů a při tom snadno seznáme, uvážíme-li, že $x_i = 0$ čili $S\, a_{ik}\bar{x}_k = 0$, $k = 1,..4$ jest rovnicí základní souřadné roviny R_i v nové soustavě. Jsou tedy a_{ik}, $k = 1,..4$ souřadnice tělo roviny v nové soustavě. –

Kromě bodu (x_i) uvažujme bod (y_i). Pro jeho souřadnice platí obdobně transformační vzorce

$$\sigma y_i = a_{i1}\bar{y}_1 + a_{i2}\bar{y}_2 + a_{i3}\bar{y}_3 + a_{i4}\bar{y}_4 \,, \quad i = 1,..4.$$

Pro přímku $p \equiv (xy)$ máme pak souřadnice:

$$\varrho\sigma p_{ik} = \varrho\sigma (x_i y_k - y_i x_k)$$

$$= S(a_{i\lambda}\bar{x}_\lambda \cdot a_{k\mu}\bar{y}_\mu - a_{k\lambda}\bar{x}_\lambda \cdot a_{i\mu}\bar{y}_\mu)$$

$$\varrho\sigma p_{ik} = \underset{(\lambda\mu)}{S}\underbrace{(a_{i\lambda}a_{k\mu} - a_{k\lambda}a_{i\mu})}_{P_{ik,\lambda\mu}}\underbrace{(\bar{x}_\lambda\bar{y}_\mu - \bar{x}_\mu\bar{y}_\lambda)}_{\bar{p}_{\lambda\mu}}$$

čili, rozepsáno,

$$\omega\, p_{ik} = P_{ik,12}\bar{p}_{12} + P_{ik,23}\bar{p}_{23} + P_{ik,31}\bar{p}_{31} + P_{ik,14}\bar{p}_{14} + P_{ik,24}\bar{p}_{24} + P_{ik,34}\bar{p}_{34} \quad \text{... (2),}$$

kde $P_{ik,\lambda\mu}$ jsou souřadnice přímky průsečné rovin R_i, R_k v nové soustavě souřadné. Čili, obecně řečeno, jsou koefficienty P souřadnice hran původního čtyřstěnu vzhledem k novému a $\bar{p}$ jsou souřadnice uvažované přímky vzhledem k novému čtyřstěnu.

Transformační vzorce (2) jsou zde tedy lineární

rovnice obdobné rovnicím (1) pro souřadnice bodu. Přes to však jest mezi oběma vzorci značný rozdíl, spočívající v tom, že koefficienty a ve vzorci (1) jsou navzájem úplně nezávislé, čemuž není tak při koefficientech P vzorce (2).

Nejprve platí zde totiž 6 podmínek tvaru $\omega(P)=0$ pro 6 hran původního čtyřstěnu. Další 4 podmínky plynou odtud, že vždy tři hrany leží v jedné stěně, a další 4 odtud, že vždy tři hrany procházejí jedním vrcholem. Koefficienty P vzorců (2) vyhovují tedy celkem 14 podmínkám.

133. Vyjádření útvarů přímkových. - Souřadnice $r_1, r_2, \dots r_6$ přímky, jsouce homogenní, nabývají celkem 5 podstatných veličin. Jsouce pak vázány podmínkou $(r) \dots \omega(r)=0$, položení námi známou okolnost, že přímka jest dána 4mi nezávislými parametry, čili že prostor obsahuje ∞^4 přímek.

Připojíme-li nyní k podmínce (r) další rovnici

$$F(r_1, r_2, \dots r_6)=0 \dots (1)$$

mezi souřadnicemi přímky, vyskytne se nám z celého počtu přímek soustava ∞^3 přímek čili komplex přímek. Vyjádříme souřadnice přímky pomocí souřadnic dvou jejích bodů X, Y, čímž rovnice (1) nabude tvaru

$$F(\overline{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \dots \overline{x_3 y_4 - x_4 y_3})=0 \dots (1'),$$

a uvažujme všechny přímky našeho komplexu, které procházejí bodem X. Rovnice (1') jest pak rovnicí plochy

kuželové, vytvořené uvažovanou přímkou. Kužel tento má vrchol v bodě X a rovnice jeho (1') jest v souřadnicích běžného bodu Y plochy téhož stupně, kterého jest forma $F(r_1, \dots r_6)$, kterýžto stupeň udává nám řád uvažované plochy kuželové. Budiž n příslušné číslo. Pak náleží obecnému svazku paprsků n přímek komplexu a číslo n udává nám současně řád komplexového kužele i třídu komplexové křivky, totiž křivky rovinné, obalené přímkami komplexu. Z té příčiny nazýváme číslo n stupněm komplexu a pravíme: „Rovnicí (1) stupně n-tého dán jest komplex n-tého stupně."

Budiž nyní mimo rovnici (1) dána ještě další rovnice

$$G(r_1, r_2, \dots r_6) = 0 \quad \dots \quad (2).$$

Pak jest tím vytčena soustava ∞^2 přímek, čili kongruence přímek. Ježto rovnicí (2) samou o sobě jest rovněž jako rovnicí (1) dán komplex přímek, jest uvažovaná kongruence pronikem obou komplexů, t.j. souhrnem přímek, náležejících současně oběma komplexům. Je-li jejich úplným pronikem a je-li komplex (2) stupně n', prochází bodem $n \cdot n'$ přímek kongruence a v rovině leží tolikéž jejích přímek, z kteréhož důvodu nazýváme číslo $n \cdot n'$ stupněm kongruence. Pronik obou komplexů může se však rozložiti. A je-li tudíž nějaká kongruence pouze částečným pronikem dvou komplexů, jest řád kongruence, t.j. počet přímek je-

jích jdoucích bodem, obecně různý od třídy kongruence, t.j. počtu jejích přímek ležících v rovině.

Připojením třetí rovnice

$$\mathcal{H}(r_1, r_2, \dots r_6) = 0 \quad \dots (3)$$

vyjmeme*) soustavu ∞^1 přímek čili přímkovou plochu. Je-li dána plocha úplným průsekem komplexů (1), (2), (3) o stupních n, n', n'', stanovme stupeň plochy přímkové, t.j. počet jejích přímek, protínajících přímku libovolnou. Podmínka průseku přímky (r_i) s přímkou danou (l_i) jest lineární v souřadnicích p_i rovnice $\mathcal{L} = 0$. Touto rovnicí a rovnicemi (1), (2), (3), (r) jsou hledané přímky stanoveny. A jelikož rovnice $\omega(r) = 0$ jest kvadratická, jest

$$2nn'n''$$

počet hledaných přímek čili stupeň naší přímkové plochy.

II. Differenciální rovnice některých ploch.

134. Plocha válcová. — a) Budiž úlohou, stanoviti podmínku, za které rovnice $z = f(x, y) \dots (1)$ plochu válcovou.

Rovnice roviny dotčné ku ploše (1) v bodě (x_0, y_0, z_0) jest

$$Z - z_0 = p(X - x_0) + q(Y - y_0) \dots (2)$$

Plocha válcová pak obsahuje soustavu přímek rovnoběžných. Jsou-li a, b, c cosiny směrné těchto pří-

*) předpokládáme ovšem mlčky, že rovnice (1), (2), (3) jsou nezávislé

mek, jsou rovnice přímky povrchové jdoucí bodem (x_0, y_0, z_0) plochy:

$$x = x_0 + al, \quad y = y_0 + bl, \quad z = z_0 + cl \quad \dots (3),$$

a rovina tečná (2) musí celou řadu přímek (3) obsahovati, což vede ke vztahu

$$cl = p\,al + q\,bl \qquad \text{čili}$$

$$\underline{ap + bq = c} \quad \dots\dots (4)$$

jako diferenciální rovnici plochy válcové pro tvar (1).

b) Jiný postup. – Vyjděme z rovnic

$$\left.\begin{aligned} x &= rz + \varrho \\ y &= sz + \sigma \end{aligned}\right\} (1)$$

přímky. Jsou-li veličiny r, s, ϱ, σ závislé na jednom parametru τ, jest rovnicemi (1) dána soustava ∞^1 přímek, tedy obecně plocha přímková.

Prochází-li přímka (1) bodem (x_0, y_0, z_0), možno její rovnice psáti ve tvaru

$$\frac{x - x_0}{r} = \frac{y - y_0}{s} = \frac{z - z_0}{1} \quad \dots (1').$$

Jde-li pak o plochu válcovou, jejíž povšechny mají směr. cosiny a, b, c, tedy rovnice

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad \dots (2),$$

plyne srovnáním rovnic (1'), (2)

$$r = \frac{a}{c}, \quad s = \frac{b}{c}.$$

Dosazením do (1) máme pak

$$cx - az = c\varrho, \quad cy - bz = c\sigma \quad \dots (3).$$

Jestliže pak jsou ϱ, σ funkcemi téhož parametru t, platí mezi nimi vztah

$$F(\varrho, \sigma) = 0,$$

takže dosazením z (3) nabýváme rovnice

$$F[(cx - az), (cy - bz)] = 0 \quad \ldots (4)$$

jako obecného tvaru <u>rovnice plochy válcové</u>. – Při tom konstanty a, b, c jsou rovny nebo úměrny směr. cosinům přímek plochy.

Z této rovnice dospějeme rovněž k diff. rovnici plochy pro případ, že z pokládáme za funkci x, y. Jest totiž

$$\frac{\partial [(cx - az), (cy - bz)]}{\partial (x, y)} = 0$$

čili

$$\begin{vmatrix} c - ap & -bp \\ -aq & c - bq \end{vmatrix} = c(c - ap - bq) = 0.$$

Rovnice tato rozpadá se ve dvě:

$$(\alpha) \quad c = 0$$

$$(\beta) \quad \underline{ap + bq = c}.$$

Vyloučíme-li speciální případ (α), který možno zmíněnou souřadnici odstraniti, zbývá nám zase známá diff. rovnice obecné plochy válcové.

135. <u>Plocha kuželová</u>. – Všechny přímky povrchové a tedy i tečné roviny této plochy procházejí pevným bodem.

a) Jde-li opět o to, stanoviti podmínky, za které rovnice $z = f(x, y)$ zmíněí plochu kuželovou, uvažme, že rovnice

rečná

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

bodu (x, y, z) plochy musí procházeti vrcholem (A, B, C). Jest tedy

$$C - z = p(A - x) + q(B - y)$$

čili

$$\underline{z - px - qy = C - pA - qB}$$

žádaná dif. rovnice plochy kuželové.

b.) Jiný postup. – Rovnice přímky povrchové

$$x = rz + \varrho$$
$$y = sz + \sigma$$

píšme ve tvaru

$$x - x_0 = r(z - z_0), \quad y - y_0 = s(z - z_0),$$

kde (x_0, y_0, z_0) nechť značí vrchol. Jelikož pak jsou r, s funkcemi téhož parametru, jest

$$\varphi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0 \quad \ldots (1)$$

obecná rovnice plochy kuželové.

Její funkcionální determinant vzhledem k proměnným x, y povede nás opět k rovnici differenciální:

$$\begin{vmatrix} z - z_0 - (x - x_0)p, & -(y - y_0)p \\ -(x - x_0)q, & (z - z_0) - (y - y_0)q \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$(z - z_0)[z - z_0 - (x - x_0)p - (y - y_0)q] = 0.$$

A jelikož jest pro obecný bod plochy $z - z_0 \geq 0$, máme opět

$$z - z_0 - (x - x_0)p - (y - y_0)q = 0$$ jako dif. rovnici.

136. Konoid. – Jest to plocha vytvořená pohybem přímky, která zůstává stále rovnoběžna k pevné rovině a protíná pevnou přímku.

Budiž
$$\left.\begin{aligned} x &= rz+\varrho \\ y &= sz+\sigma \end{aligned}\right\} (1)$$
ona pevná přímka čili přímka řídící a
$$Ax+By+Cz+D=0 \ldots (2)$$
řečená pevná rovina.

Rovina tečná bodu (x, y, z) plochy jest dána rovnicí
$$Z-z = p(X-x)+q(Y-y) \ldots (3)$$
Sestrojíme-li bodem (x, y, z) rovinu rovnoběžnou s rovinou řídící (2):
$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0 \ldots (4)$$
jest její průsečnicí s rovinou tečnou (3) přímka povrchová protínající přímku řídící (1) v bodě (X, Y, Z), takže souřadnice tohoto bodu splňují rovnice (3), (4) a rovnice
$$\left.\begin{aligned} X &= rZ+\varrho \\ Y &= sZ+\sigma \end{aligned}\right\} (1').$$

Vyloučíme-li z rovnic těch souřadnice X, Y, Z, obdržíme rovnici mezi souřadnicemi x, y, z bodu plochy a derivacemi p, q, tedy diff. rovnici plochy:
$$\left.\begin{aligned} Z-z-p(rZ+\varrho-x)-q(sZ+\sigma-y)&=0 \\ A(RZ+\varrho-x)+B(sZ+\sigma-y)+C(Z-z)&=0 \end{aligned}\right\}$$
čili, uspořádáno dle Z,
$$\left.\begin{aligned} Z(1-rp-sq)-z+p(x-\varrho)+q(y-\sigma)&=0 \\ Z(Ar+Bs+C)-A(x-\varrho)-B(y-\sigma)-Cz&=0 \end{aligned}\right\},$$
takže vyloučením Z obdržíváme diferenciální rov-

nící konoidu:

$$\begin{vmatrix} 1-rp-sq, & z-p(x-\xi)-q(y-\sigma) \\ \lambda r+\beta s+\gamma, & \lambda(x-\xi)+\beta(y-\sigma)+\gamma z \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (5).$$

Je-li přímka řídící kolmá k rovině řídící, nazýváme konoid konoidem přímým.

Za příčinou jednoduchého jeho vyjádření volme přímku řídící za osu z, roviny řídící za roviny xy. Pak jest $\lambda = 0$, $\beta = 0$, $r = 0$, $s = 0$, takže rovnice (5) nabývá tvaru

$$\begin{vmatrix} 1, & z-px-qy \\ q, & qz \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$px+qy = 0 \quad \dots . (5').$$

Tuto diff. rovnici přímého konoidu vyvodíme kratší přímým postupem. – Souřadnice z plochy konoidu jest funkcí úhlu svíraného s rovinou (xz), takže jest

$$F\left(z, \frac{y}{x}\right) = 0 \quad \dots (6)$$

obecnou rovnicí přímého konoidu o řídící přímce z. Její funkc. determinand dle x, y:

$$\begin{vmatrix} p, & -\frac{y}{x^2} \\ q, & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 0$$

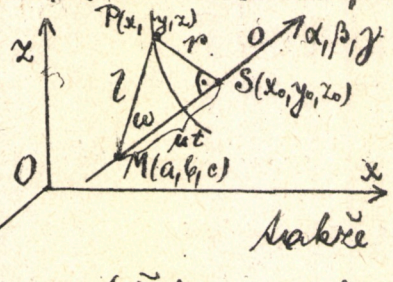
vede nás opět k diff. rovnici (5').

Pro konoid přímý v obecné poloze obdržíme obecnou rovnici transformací souřadnic z rovnice (6):

$$F\left(\gamma x+\gamma_1 y+\gamma_2 z, \frac{\beta x+\beta_1 y+\beta_2 z}{\alpha x+\alpha_1 y+\alpha_2 z}\right) = 0 \quad \dots (6')$$

a odtud obdrželi bychom opět diff. rovnici.

137. Plocha rotační. – Věnujme při tělo příležitosti také krátce pozornost obecné ploše rotační.



Budiž osa rotace dána rovnicemi

$$x = a+\alpha t,\quad y = b+\beta t,\quad z = c+\gamma t \ldots (1),$$

takže $M(a,b,c)$ jest jeden bod osy a veličiny α,β,γ jsou úměrny směr. cosinům osy. Bod $P(x,y,z)$ plochy vytvořuje rotací kružnici o poloměru r a o středu S. Spojnice jeho s bodem M nechť svírá s osou úhel ω. Pak platí mezi úhlem ω a délkou $l = MP$ určitá závislost, takže rovnice

$$(2) \ldots \mathfrak{F}\left[\{(x-a)\alpha+(y-b)\beta+(z-c)\gamma\},\ \{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\}\right] = 0$$

jest jedním tvarem obecné rovnice plochy rotační. –

Z ní vyvodíme opět differenciální rovnici rotační plochy:

$$\begin{vmatrix} \alpha+\gamma p, & (x-a)+(z-c)p \\ \beta+\gamma q, & (y-b)+(z-c)q \end{vmatrix} = 0 \ \ldots - (3)$$

O ploše rotační jest známo, že normály její protínají vesměs osu rotace, což vede nás k další úloze.

138. Plochy, jejichž normály protínají pevnou přímku. – Budiž úlohou vyhledati všecky takovéto plochy. Již předem víme, že plochy rotační k nim náležejí.

Rovina dotčná bodu (x,y,z) plochy má rovnici

$$Z-z = p(X-x)+q(Y-y),$$

takže jsou

$$\xi = x + pt,\ \eta = y + qt,\ \zeta = z - t \quad \dots \quad (1)$$

rovnice normály plochy. Budiž

$$\xi = a + \alpha h,\ \eta = b + \beta h,\ \zeta = c + \gamma h \quad \dots (2)$$

pevná přímka, jež má všechny plošné normály protínati.

Pak společným řešením rovnic (1), (2) nabýváme rovnic

$$x + pt = a + \alpha h$$
$$y + qt = b + \beta h$$
$$z - t = c + \gamma h .$$

Vylučme z nich t, h, čímž nabudeme dif. rovnice ploch vytčených

$$\begin{vmatrix} x-a, & p, & \alpha \\ y-b, & q, & \beta \\ z-c, & -1, & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (3).$$

Rovnici tuto lze upraviti na tvar (3) str. 300. Obdržíme postupně:

$$\begin{vmatrix} x-a & p & \alpha+\gamma p \\ y-b & q & \beta+\gamma q \\ z-c & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a+p(z-c), & p, & \alpha+\gamma p \\ y-b+q(z-c), & q, & \beta+\gamma q \\ 0, & -1, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x-a+p(z-c), & \alpha+\gamma p \\ y-b+q(z-c), & \beta+\gamma q \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \quad (3').$$

„Jedinými plochami, které mají nadepsanou vlastnost, jsou tedy plochy rotační. Ona pevná přímka jest osa rotace."

136. Plocha rotační o ose z. – Dosazením hodnot $a = b = 0$, (bod M libovolný bod osy z, tedy $c \neq 0$), $x = y = 0$, $j = 1$ do dif. rovnice obecné plochy rot. obdržíme

$$\begin{vmatrix} x + p(z-c), & p \\ y + q(z-c), & q \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$xq - yp = 0$$

jako dif. rovnici naší plochy.

K rovnici té dospějeme též přímo z obecné rovnice

$$z = f(x^2 + y^2)$$

plochy rotační o ose z.

140. Plocha rozvinutelná. – Plocha taková jest jak známo obálkou soustavy ∞^1 rovin. Uvažujme opět její rovnici v obecném tvaru $z = f(x, y)$. Je-li

$$u x + v y + w z + 1 = 0$$

rovnice roviny soustavy, jsou u, v, w funkcemi jednoho parametru τ. Charakteristika plána jest pak rovnicemi

$$u x + v y + w f + 1 = 0 \quad \dots (1)$$

$$u' x + v' y + w' f = 0 \quad \dots (2)$$

kde značí u', .. derivace dle parametru τ.

Na této charakteristice leží bod sousedný k bodu (x, y, z), jemuž příslušné přírůstky dx, dy, dle plané rovnicí

$$u\,dx + v\,dy + w\,df + (x u' + y v' + f w')\,d\tau = 0 \dots (1').$$

Srovnáním s rovnicí (2) a dosazením: $df = p\,dx + q\,dy$

nabude rovnice (1') tvaru

$$u\,dx + v\,dy + w p\,dx + w q\,dy = 0$$

čili

$$(u + wp)\,dx + (v + wq)\,dy = 0$$

kteréžto rovnice má platiti nezávisle na velikosti přírůstků dx, dy, takže rozpadá se ve dvě:

$$p = -\frac{u}{w}, \quad q = -\frac{v}{w} \quad \ldots (3).$$

Musí tedy p a q býti funkcemi pouze parametru t. Vyloučíme-li jej z rovnic (3), nabýváme rovnice

$$\underline{\varphi(p, q) = 0} \quad \ldots (4)$$

jako differenciální rovnice obecné plochy rozvinutelné.

<u>Naopak</u> můžeme též dokázati, že differenciální rovnice tvaru (4) značí plochu rozvinutelnou. Uvažujme plochu, pro kterou rovnice (4) platí, a vyskuěme na ní křivku $p = \text{konst} = k$; pak z rovnice (4) plyne též $q = \text{konst} = k_1$.

Pro křivku takto definovanou jest

$$dz = k\,dx + k_1\,dy$$

čili $$z = kx + k_1 y + C \quad \ldots (5).$$

Jest tedy křivka $p = k$ křivkou rovinnou ležící v rovině (5). A sice jest to <u>přímka</u> dvěma rovnicemi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = k, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = k_1 \quad \text{čili}$$

$$z = kx + c_1, \quad z = k_1 y + c_2 \quad \ldots (6).$$

Rovnici roviny dotčené v libovolném bodě přímky (5)

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

možno vzhledem k rovnici (5) psáti ve tvaru

$$Z - kX - k_1 Y = z - kx - k_1 y = c, \text{ čili}$$
$$Z = kX + k_1 Y + c \dots (Z).$$

Z totožnosti této rovnice pro všecky body plochy přímky $p = k$ plyne, že uvažovaná plocha obsahující ∞^1 přímek povrchových má tu vlastnost, že každá rovina tečná dotýká se jí podél celé přímky povrchové. Plocha o rovnici (4) jest tedy skutečně vždy plochou rozvinutelnou.

Rovnici (4) můžeme nahraditi též diff. rovnicí řádu druhého:

$$\begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = rt - s^2 = 0 \dots (4').$$

Vzhledem k známým vzorcům z theorie ploch praví nám tato rovnice, že plochy rozvinutelné jsou jedinými plochami, jejichž všecky body jsou parabolické.

141. Plocha přímková vůbec. – Jsou-li v rovnicích

$$\left.\begin{aligned} x &= rz + \varrho \\ y &= sz + \sigma \end{aligned}\right\} (1)$$

veličiny r, s, ϱ, σ funkcemi jednoho parametru τ, jest tím dána obecná plocha přímková.

Derivací těchto rovnic dle x resp. y plyne

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} 1 &= rp + z\frac{\partial r}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \varrho}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} = rp + \left(z\frac{\partial r}{\partial \tau} + \frac{\partial \varrho}{\partial \tau}\right)\frac{\partial \tau}{\partial x} \\ 0 &= sp + \left(z\frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial \tau}\right)\frac{\partial \tau}{\partial x} \\ 0 &= rq + \left(z\frac{\partial r}{\partial \tau} + \frac{\partial \varrho}{\partial \tau}\right)\frac{\partial \tau}{\partial y} \\ 1 &= sq + \left(z\frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial \tau}\right)\frac{\partial \tau}{\partial y} \end{aligned}\right.$$

Z těchto rovnic (2) vypočtěme $\frac{\partial \tau}{\partial x}$, $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ a srovnejme:

$$\frac{\partial\tau}{\partial x} = -\frac{rp-1}{2r'+\varphi'} = -\frac{sp}{2s'+\sigma'}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = -\frac{rq}{2r'+\varphi'} = -\frac{sq-1}{2s'+\sigma'}.$$

Odtud plyne (píšme pro zvětšenost R místo r, S místo s)

$$\frac{\partial\tau}{\partial x} : \frac{\partial\tau}{\partial y} = (Rp-1) : Rq = Sp : (Sq-1) \dots (3)$$

čili

$$RSpq = RSpq - Sq - Rp + 1$$

čili

$$Rp + Sq - 1 = 0 \dots (4).$$

Mimo to dávají nám rovnice (3) a (4) též:

$$\frac{\partial\tau}{\partial x} : \frac{\partial\tau}{\partial y} = -S : R$$

čili

$$R\frac{\partial\tau}{\partial x} + S\frac{\partial\tau}{\partial y} = 0 \dots (5).$$

Nyní uvažujme rovnice (4) a (5). Jelikož rovnice (4) obsahuje veličiny R, S, které jsou funkcemi parametrů, derivujme ji:

$$(4') \begin{cases} Rr + Ss + (pR' + qS')\frac{\partial\tau}{\partial x} = 0 & |\cdot R \\ Rs + St + (pR' + qS')\frac{\partial\tau}{\partial y} = 0 & |\cdot S \end{cases}$$

Rovnice (4') dávají pak vzhledem k rovnici (5) rovnici

$$R^2r + 2RSs + S^2t = 0 \dots (6).$$

Jejím dalším derivováním, klademe-li pro krátkost psaní:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \alpha,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \beta,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \gamma,\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \delta,$$ máme

$$(6') \begin{cases} R^2\alpha + 2RS\beta + S^2\gamma + \frac{\partial(R^2r+\dots)}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial x} = 0 & |\cdot R \\ R^2\beta + 2RS\gamma + S^2\delta + \frac{\partial(R^2r+\dots)}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial y} = 0 & |\cdot S, \end{cases}$$

odkud opět vzhledem k rovnici (5) obdržíme

$$R^3\alpha + 3R^2S\beta + 3RS^2\gamma + S^3\delta = 0 \dots (7).$$

Zkrácením $\frac{s}{t} = \mu$ můžeme rovnici (6) psáti

$$\mu^2 + 2\frac{s}{t}\mu + \frac{r}{t} = 0$$

a rovnici (7):

$$\alpha + 3\mu\beta + 3\mu^2\gamma + \mu^3\delta = 0$$

čili

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3\mu\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3\mu^2\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + \mu^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0$$

takže, použijeme-li obvyklého symbolického označení, vyhovuje obecná přímková plocha diferenciální rovnici

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 z = 0 \quad \ldots (8)$$

kde $\mu = \dfrac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t}$

— — — — — — .

Možno tuto dif. rovnici upraviti ještě na jiný tvar, takže vyloučíme odmocninu vyskytující se v μ. Z rovnic (6)... $t\mu^2 + 2s\mu + r = 0$ ... {rovnice (6)}

$\delta\mu^3 + 3\gamma\mu^2 + 3\beta\mu + \alpha = 0$ .... {rovnice (7)}

získáme si totiž vyloučením μ^3 resp. prostého členu další dvě kvadratické rovnice

(9) $(2s\delta - 3\gamma t)\mu^2 + (r\delta - 3\beta t)\mu - \alpha t = 0$

(10) $r\delta\mu^2 + (3r\gamma - \alpha t)\mu + (3r\beta - 2\alpha s) = 0$

a vyloučením μ z rovnic (6'), (9), (10) obdržíme žádanou dif. rovnici plochy přímkové ve tvaru:

$$\begin{vmatrix} t, & 2s, & r \\ 2s\delta - 3\gamma t, & r\delta - 3\beta t, & -\alpha t \\ r\delta, & 3r\gamma - \alpha t, & 3r\beta - 2\alpha s \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots . (11)$$

Dáno-li rovnice plochy ve tvaru $z = f(x, y)$, vypočteme z ní parc. derivace z řádu druhého a třetího a dosadíme do rovnice (11). Nabudeme-li identity, jest plochou přímkovou.

Kapitola VIII.

Plochy přímkové.

I. Základní vlastnosti.

142. Rovnice plochy přímkové. — 1) Dána-li křivka v prostoru a přísluší-li každému jejímu bodu určitá přímka jím jdoucí, jest souhrnem těchto přímek dána určitá plocha přímková, křivku obsahující. Křivku tu nazýváme pak při této definici plochy přímkové křivkou řídicí plochy.

Tento způsob vytvoření přímkové plochy vede k jejímu parametrickému vyjádření ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} X &= x(v) + u\,l(v) \\ Y &= y(v) + u\,m(v) \\ Z &= z(v) + u\,n(v) \end{aligned}\right\} (1),$$

značí-li l, m, n veličiny úměrné směr. cosinům povrchové přímky a u veličinu úměrnou ke vzdálenosti bodu (X, Y, Z) této přímky od bodu (x, y, z) křivky řídicí.

2) Jiný způsob vyjádření plochy přímkové plávají rovnice

$$\left.\begin{aligned} x &= Rz + \varrho \\ y &= Sz + \sigma \end{aligned}\right\} (2),$$

jsou-li v nich veličiny R, S, ϱ, σ funkcemi jednoho parametru t.

Uvažme souvislost obou vyjádření.

Označme parametr t druhého způsobu znakem v a klaďme $Z = u$, takže jest

$$x(v) = 0, \quad u(v) = 1.$$

Pro $Z = u = 0$ dostaneme křivku řídicí vyjádřenou rovnicemi

$$X = \varrho, \quad Y = \sigma,$$

z čehož jest patrno, že křivka řídicí jest křivkou rovinnou, obsaženou v rovině (XY).

Tím přecházíme od vyjádření (2) ke zvláštnímu případu vyjádření (1).

143. Rovina dečná. – Rovnice roviny dečné v obyčejném bodě (X, Y, Z) plochy dána jest jak známo ve tvaru

$$\begin{vmatrix} \xi - X & \eta - Y & \zeta - Z \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} = 0,$$

která dosazením z rovnic (1) uvažované plochy přímkové nabývá tvaru

$$\begin{vmatrix} \xi - x - lu & \cdots & \cdots \\ l & \cdots & \cdots \\ x_v + u l_v & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi - x & \cdots & \cdots \\ l & \cdots & \cdots \\ x_v + u l_v & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \cdots & \cdots \\ l & \cdots & \cdots \\ x_v & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + u \begin{vmatrix} \xi - x & \cdots & \cdots \\ l & \cdots & \cdots \\ l_v & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots (3).$$

čili krátce

$$P + u\,Q = 0 \quad \ldots \quad (3'),$$

kde $P = 0$ značí rovinu tečnou v bodě $u = 0$, t. j. v bodě křivky řídící na naší přímce povrchové a $Q = 0$ rovinu tečnou v úběžném bodě naší přímky čili t. zv. asymptotickou rovinu uvažované přímky povrchové.

Z rovnice této plyne, že roviny tečné v bodech povrchové přímky plochy přímkové tvoří svazek rovin jdoucích přímkou tou, a sice že svazek těchto rovin jest projektivný s řadou bodů dotyčných, jejímž nositelem jest rovněž přímka ta.

144. Řídící kužel plochy. – Sestrojíme-li počátkem souřadnic rovnoběžky k povrchovým přímkám plochy přímkové, obdržíme t. zv. řídící kužel její, jenž dán jest rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} \bar{X} &= u\,l(v) \\ \bar{Y} &= u\,m(v) \\ \bar{Z} &= u\,n(v) \end{aligned}\right\} (4).$$

Rovina tečná k tomuto kuželi podél povrchové přímky $\bar{p}$ rovnoběžna jest k rovině jdoucí přímkou p s plochy rovnoběžně k přímce soumezné p_1 (jak plyne odtud že tečná rovina kužele obsahuje dvě soumezné přímky povrchové).

Rovnice roviny tečné našeho kužele dána jest však ve tvaru

$$\begin{vmatrix} \xi - \bar{X} & \vdots & \vdots \\ l & \vdots & \vdots \\ u\,l_v & & \end{vmatrix} = u \begin{vmatrix} \xi - \bar{X} & \vdots & \vdots \\ l & \vdots & \vdots \\ l_v & & \end{vmatrix} = 0,$$

čili $k + Q = 0$ (viz (3')). (k = konst pro touž přímku v = konst)

Seznáváme tudíž, že asymptotická rovina povrchové přímky p plochy přímkové jest rovnoběžna k souměrné přímce p_1.

Důležitý význam má dále rovina jdoucí přímkou p kolmo k rovině asymptotické. Rovina tato obsahuje totiž osu mimoběžek p, p_1. Nazýváme ji rovinou centrálnou pro površku p, a to ze zřejmého důvodu:

Z projektivního vztahu tečných rovin plochy přímkou p jdoucích s jejich body dotyčnými plyne, že involuci kolmých navzájem tečných rovin svazku p odpovídá involuce dotyčných bodů na přímce p. Poněvadž pak jest centrálná rovina kolma k rovině asymptotické, přísluší dotyčný její bod C v této bodové involuci bodu úběžnému, čili jest centrálným bodem involuce.

Bod C nazýváme krátce centrálným bodem přímky p. Jeho vzdálenost U od křivky řídící snadno určíme.

Značí-li totiž pro jednoduchost l, m, n v rovnici (1) plochy přímo cosiny směrné pro přímku povrchovou, takže $Sl^2 = 1$,

značí u přímo vzdálenost bodu (X, Y, Z) plochy od bodu (x, y, z) křivky řídící.

Jde-li pak o takovou tečnou rovinu (3) plochy, která jest kolma k rovině asymptotické $Q = 0$, musí normály obou rovin býti navzájem kolmé. Poněvadž

směr. cosiny normál rovin těch jsou úměrny minorům matice

$$\left\| \begin{matrix} l & , & m & , & n \\ x_\nu + u l_\nu & , & y_\nu + u m_\nu & , & z_\nu + u n_\nu \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \begin{matrix} l & , & m & , & n \\ l_\nu & , & m_\nu & , & n_\nu \end{matrix} \right\|.$$

musí součin těchto matic býti roven nule, což dá pro $u = U$ centrálného bodu podmínku

$$\left| \begin{matrix} S l^2 & , & S l l_\nu \\ S l x_\nu + u S l l_\nu & , & S l_\nu x_\nu + u S l_\nu^2 \end{matrix} \right| = 0 .$$

A ježto dle předpokladu jest $S l^2 = 1$, $S l l_\nu = 0$, máme pro U: $S l_\nu x_\nu + U S l_\nu^2 = 0$

odkud $$U = - \frac{S l' x'}{S l'^2} \quad \ldots (5)$$

značíme-li čárou derivace dle ν.

Řídící kužel plochy přímkové vede nás též snadno ke <u>sférickému obrazu plochy</u>. Jsou-li totiž vrcholem jeho vedeny polopaprsky o témž kladném smyslu, který vyšetřen na povrchových přímkách plochy a je-li kolem jeho vrcholu opsána jednotková plocha kulová, přísluší na této ploše kulové každé přímce p plochy bod P o souřadnicích (l, m, n) rovných směr. cosinům přímky p.

Křivka spojující tyto body P nazývá se sférickým obrazem přímkové plochy. Element oblouku této křiv-

kyž rovná se úhlu sevřenému sousedními přímkami p, p_1. Nazveme jej $d\varphi$, takže jest

$$d\varphi^2 = S\,dl^2. \quad (= dl^2 + dm^2 + dn^2)$$

Výraz (5) možno tedy též prvé tvaru

$$U = -\frac{S\,dx\,dl}{d\varphi^2} \quad \dots \quad (5').$$

Pozn. – Výraz (5) pozbývá významu v případě, v předchozím vyloučovaném, že jest $Sl^2 = 0$. Pak jest též $d\varphi = 0$, tedy sférickým obrazem takové plochy jest minimální křivka plochy kulové, t. j. přímka isotropická a řídící kužel přechází v rovinu isotropickou. – Případem takové plochy jest rotační paraboloid, při němž řídící kužele jedné resp. druhé soustavy imaginárních přímek povrchových přecházejí v jednu resp. druhou rovinu isotropickou jdoucí osou plochy.

145. Osa dvou sousedních površek. – Přímková plocha budiž opět dána rovnicemi (1), v nichž opět předpokládejme že l, m, n značí přímo cosiny směrné, takže jest $Sl'^2 = 1$.

Budiž naší úlohou stanoviti osu sousedních přímek povrchových p, p_1 naší plochy. Paty její budiž $M(\xi, \eta, \zeta)$, $M_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ takže jest

$$\xi = x + Ul, \quad \dots \quad ; \quad \xi_1 = (x + dx) + (U + dU)(l + dl) \dots$$

Poněvadž hledaná osa má býti kolmá k oběma povrchovým přímkám (l, m, n), $(l + dl, \dots)$, musí platiti

současně vztahy:

$$S(\xi_1 - \xi)\, l = 0\,, \qquad S(\xi_1 - \xi)\, dl = 0$$

t.j., po dosazení,

$$S[dx + l\,dU + dl(U + dU)]\, l = 0$$
$$S[dx + l\,dU + dl(U + dU)]\, dl = 0\,,$$

čili, vzhledem ku: $S\,l^2 = 1$, $S\,l\,dl = 0$,

$$S\,l\,dx + dU = 0$$
$$S\,dx\,dl + (U + dU)\,S\,dl^2 = 0\,,$$

z nichž druhý dává nám

$$(5'') \ldots U = -\frac{S\,dx\,dl}{S\,dl^2} = -\frac{Sx'l'}{Sl'^2} = -\frac{Sx'l'}{\varphi'^2}\,,$$

známý to výraz pro parametr (vzdálenost od kř. řídící) centrálného bodu C naší přímky p, takže přicházíme k věci, z názoru patrné:

Centrální bod C přímky p jest současně patou osy δ přímek p, p_1 a dotyčným bodem centrálné roviny přímky p.

Pro délku δ uvažované osy obou přímek p, p_1 obdržíme $\delta = d_1 - d$, kde

$$d_1 = \frac{|x + dx,\, l',\, l''|}{\sqrt{\left\| \begin{matrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{matrix} \right\|^2}}\,, \qquad d = \frac{|x\, l\, l'|}{\sqrt{\left\| \begin{matrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{matrix} \right\|^2}}\,,$$

takže

$$\delta = \frac{|x'\, l\, l'|\, dw}{\varphi'} \quad \ldots\ldots (6).$$

Pro směr. cosiny $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ tělo osy jest tak

$$l\,\delta_1 + m\,\delta_2 + n\,\delta_3 = 0$$
$$l'\,\delta_1 + m'\,\delta_2 + n'\,\delta_3 = 0\,,$$

takže lze je odtud snadno stanoviti.

Místo toho stanovme raději geometrický význam derivací l', m', n'. Ze vztahů

$$l l' + m m' + n n' = 0$$
$$\delta_1 l' + \delta_2 m' + \delta_3 n' = 0$$

plyne, uvážíme-li že rovina $p\delta$ jest centrálná rovina přímky p, že derivace l', m', n' jsou úměrny směr. cosinům $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ normály k rovině centrálné:

$$l' : m' : n' = \mathcal{L} : \mathcal{M} : \mathcal{N},$$

takže jest

$$\mathcal{L} = \frac{l'}{\varphi'}, \quad \mathcal{M} = \frac{m'}{\varphi'}, \quad \mathcal{N} = \frac{n'}{\varphi'} \quad \ldots \quad (7).$$

<u>146. Distribuční parametr přímky povrchové.</u> – Jak již řečeno jest centrálný bod přímky p centrálným bodem involuce dotyčných bodů kolmých rovin tečných přímkou p jdoucích. Vyšetřme vztah mezi vzdáleností $d = -U$ bodu plochy (jejž volíme právě na křivce řídící) od bodu centrálného C a úhlem γ, který svírá tečná rovina bodu s rovinou centrálnou.

Výraz (5) nám dává vztah

$$d = \frac{S x' l'}{\varphi'^2}.$$

Za křivku řídící volme orthogonální trajektorii površek plochy, jdoucí uvažovaným bodem A přímky p, a za parametr v volme právě oblouk s této křivky. Poslední výraz píšeme pak, vzhledem ku (7), ve tvaru

$$d = \frac{1}{\varphi'} S x' \mathcal{L} = \frac{ds}{d\varphi} S \frac{dx}{ds} \mathcal{L}.$$

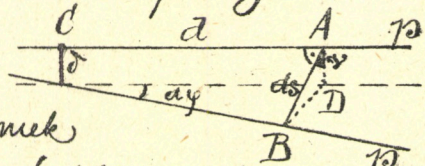
Součet po pravé straně jest roven cosinu úhlu, který

svírá naše rovina řečná s normálou roviny centrální, čili jest, nehledíme-li k znaménka*), rovna $\sin\varepsilon$, takže máme

$$d = \frac{ds}{d\varphi}\,\sin\varepsilon .$$

Zavedeme, jak jest ve zvyku obvyklo, $\operatorname{tg}\varepsilon$:

$$d = \frac{d s\cdot\cos\varepsilon}{d\varphi}\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\delta}{d\varphi}\operatorname{tg}\varepsilon ,$$



neboť průmět elementu ds orthogonální trajektorie přímek povrchových do roviny centrální ($AD = AB\cos\varepsilon$) rovná se ose δ. Platí tedy

$$d = \frac{\delta}{d\varphi}\operatorname{tg}\varepsilon .^{**})$$

Výraz

$$\kappa = \frac{\delta}{d\varphi} \quad \ldots\ldots (8),$$

který má pro každou plochu určitou hodnotu, nazýváme distribučním parametrem této přímky povrchové, takže jest

$$d = \kappa \operatorname{tg}\varepsilon \quad \ldots\ldots (9).$$

Jelikož pak $\operatorname{tg} 45° = 1$, jest

$$\kappa = d_{45°}.$$

Distribuční parametr přímky povrchové rovná se číselné hodnotě vzdálenosti $d_{45°}$ bodu roviny jdoucí přímkou a svírající s rovinou centrální úhel $\frac{\pi}{4}$.

Píšeme-li poslední vztah ve tvaru $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{d}{d_{45°}}$, seznamujeme, že $\operatorname{tg}\varepsilon$ rovná se poměrnému číslu vzdálenosti d pro $d_{45°}$ jako jednotku míry.

*) neboť jeho změna znamená pouze, že úhel ε nutno měřiti v opačném smyslu; x.

Analytický výraz pro distribuční parametr plyne z výrazů (6), (8) ve tvaru

$$\kappa = \frac{|x' l l'|}{\varphi'^2} \quad \ldots\ldots \quad (10).$$

Jsou-li pak γ, γ_1 úhly příslušné dvěma navzájem kolmým rovinám, pak ze vztahu

$$\operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\gamma_1 = -1$$

plyne na základě (9)

$$(11) \ldots\ldots \quad d \cdot d_1 = -\kappa^2,$$

takže $-\kappa^2$ jest potencí elliptické involuce dotyčných bodů kolmých navzájem rovin tečných.

147. Zavedení momentu souměrných površek. — Dány-li dvě libovolné přímky a, b a sestrojena-li k nim libovolná příčka t, pak má výraz

$$M = t \cdot \sin(a b t)$$

stálou hodnotu, ať příčka t byla volena jakkoli [t znamená délku příčky a $\sin(a b t)$ značí sinus rožný trojhranu o hranách k a, b, t rovnoběžných].

Jest tedy také

$$M = o \cdot \sin\omega,$$

značí-li o délku osy přímek a, b a ω úhel přímek těch.

Pro naše souměrné přímky p, p_1 jest tedy

$$M = \delta \sin(d\varphi) = \delta\, d\varphi,$$

xx) Výraz ten plyne ostatně též přímo z vyznačeného obrazce, neboť jest $BD = d \cdot d\varphi = \underbrace{AD}_{\delta} \operatorname{tg}\gamma$

takže zavedením výrazu (6) dostáváme

$$M = | dx \; l \; dl | \; \ldots \; (11)$$

a výrazy pro δ, κ možno psáti ve tvaru

$$\delta = \frac{M}{d\varphi} \; \ldots \; (6'),$$

$$\kappa = \frac{M}{d\varphi^2} \; \ldots \; (10').$$

148. Plocha normál podél povrchové přímky. — Z rovnice (9) seznáváme opět projektivní vztah rovin přímkou p jdoucích a jejich bodů dotyčných. Přímo z rovnice té plyne rovnost dvojpoměrů

$$(d_1, d_2, d_3, d_4) = (\operatorname{tg} \gamma_1, \operatorname{tg} \gamma_2, \operatorname{tg} \gamma_3, \operatorname{tg} \gamma_4).$$

Odtud plyne, že sestrojíme-li jednotlivými body přímky p přímky t kolmé ku p a ležící v příslušných rovinách tečných, čili tečny t plochy, ku p kolmé, jest souhrnem těchto tečen t plocha druhého stupně mající přímku p za přímku povrchovou. Jest to orthogonální hyperbolický paraboloid, jehož jedna rovina řídící jest kolma ku p, takže skutečně obě řídící roviny jsou navzájem kolmé.

Plochu tu možno též definovati jako plochu přímek protínajících přímky p, p_1 a rovnoběžných k rovině ku p kolmé.

Otočíme-li nyní tečnu t kolem osy p o pravý úhel, dostáváme normálu n plochy přímkové. Děje-li se tím způsobem otočení všech přímek t, obdržíme plochu normál plochy přímkové podél površky p. Seznáváme tudíž větu:

Plocha normál přímkové plochy podél povrchové

přímky jest orthogonální hyperbolický paraboloid, jehož jedinou rovinou řídicí jest centrální rovina přímky."

(Nebo přímky p, p_1 paraboloidu přímek t byly rovnoběžny k asymptotické rovině přímky p.).

149. Dvě přímkové plochy o společné površce. – Je-li přímka p společnou površkou dvou přímkových ploch P, P', jest řada bodů na přímce p projektivní k oběma svazkům příslušných rovin řečených ploch prvé resp. druhé, odkud plyne:

Dvě přímkové plochy o společné přímce dotýkají se obecně ve dvou bodech této přímky.

Dotýkají-li se ve třech bodech této přímky, dotýkají se ve všech jejích bodech, čili dotýkají se podél celé přímky.

Odtud plyne, že zvolíme-li na přímce p dané sborcené (přímkové nerozvinutelné) plochy libovolné tři body A, B, C a sestrojíme v nich libovolné řečny t_1, t_2, t_3, jest jimi dána přímková plocha 2. stupně (obecně hyperboloid jednodílný) dotýkající se dané plochy podél celé přímky p, takže existuje ∞^3 ploch 2. stupně, které dotýkají se dané plochy sborcené podél celé přímky p.

150. Podmínka rozvinutelnosti plochy přímkové. – Na ploše rozvinutelné jsou jak známo každé dvě nekonver-

né přímky povrchové navzájem různoběžny určující rovinu dotýkající se plochy podél celé přímky povrchové.

Jsou zde tedy veličiny δ, M souměrných přímek p, p_1 rovny nule, takže podmínka rozvinutelnosti plochy přímkové dána jest ve tvaru

$$|dx\ l\ dl| = 0 \quad \ldots\ldots (12).$$

V případě, že plocha přímková vyjádřena jest rovnicemi (2), klademe

$$u = \sigma,\ R = l,\ S = m,\ n = 1,\ \varrho = x,\ \sigma = y,\ z = 0,$$

takže rovnice (12) nabývá zde tvaru

$$\begin{vmatrix} dR & dS \\ dS & d\sigma \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots (12').$$

— Podmínku nalezenou možno též snadno určiti přímo. Každá površka rozvinutelné plochy jest tečnou hrany vratu, odkud plyne pro bod hrany vratu:

$$dX = l\,d\sigma,\ dY = m\,d\sigma,\ dZ = n\,d\sigma,$$

značí-li σ oblouk této hrany.

Dosadíme-li sem z rovnic (1) plochy přímkové, obdržíme rovnice

$$\begin{aligned} dx + l(du - d\sigma) + u\,dl &= 0 \\ dy + m(du - d\sigma) + u\,dm &= 0 \\ dz + n(du - d\sigma) + u\,dn &= 0, \end{aligned}$$

které dávají nám skutečně opět podmínku (12).

Vědouce dále, že rovina tečná v bodě hrany vratu plochy rozvinutelné jest neurčitá, tažme se obecně, kdy

vůbec může býti tečná rovina přímkové plochy neurčitou.

Směr. cosiny normály jsou úměrny minorům matice

$$\| l \quad m \quad n \;\; dx+u\,dl,\; dy+u\,dm,\; dz+u\,dn \|$$

a jsou tedy neurčité, je-li

$$\frac{dx+u\,dl}{l} = \frac{dy+u\,dm}{m} = \frac{dz+u\,dn}{n} \quad (=-\varrho)$$

čili platí-li rovnice

$$dx + u\,dl + \varrho\, l = 0 \quad |\cdot dl$$
$$dy + u\,dm + \varrho\, m = 0 \quad |\cdot dm$$
$$dz + u\,dn + \varrho\, n = 0 \quad |\cdot dn$$

nebot' pak jsou všecky minory matice té řady nulové a pro ony směr. cosiny obdržíváme neurčité výrazy.

Z posledních rovnic plyne jednak

$$| dx \;\; l \;\; dl | = 0,$$

jednak

$$S\,dx\,dl + u\,S\,dl^2 + \varrho \underbrace{S\, l\, dl}_{0} = 0$$

odkud

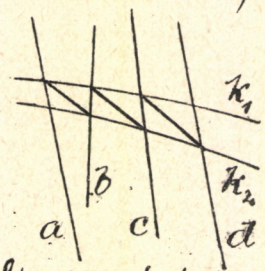
$$u = -\frac{S\,dx\,dl}{S\,dl^2}.$$

Srovnáním s výrazy (12), (5) plyne, že přímková plocha uvažovaného druhu jest plochou rozvinutelnou a bodem žádané vlastnosti jest centrální bod površky této plochy. Tím docházíme zároveň k výsledku, geometricky zřejmému, že hrana vratu plochy rozvinutelné jest místem bodů centrálních této přímkové plochy.

S II. 41.

151. Strikční křivka plochy přímkové. — Křivku, která jest místem bodů centrálných jednotlivých površek plochy, nazýváme strikční křivkou přímkové plochy.

Dána-li soustava přímek (mimoběžných) v konečných vzdálenostech, obdržíme spojením patních bodů os vždy dvou sousedních přímek křivky dvě, které v případě přiblížení přímek a, b, c, d,... splynou v jednu křivku*), strikční křivku přímkové plochy.



Strikční křivka není však obecně orthogonální trajektorií přímek povrchových, neboť z výrazu pro U plyne, učiníme-li křivku strikční řídící křivkou,

$$S \frac{dx}{ds} L = 0,$$

což pouze praví, že tečna křivky strikční leží v centrálné rovině.

Je-li pak mimo $S x' l' = 0$ pro křivku strikční též $S x' l = 0$, t.j. je-li křivka strikční orthogonální trajektorií povrchových přímek, pak derivací druhé a srovnáním s prvou z rovnic plyne též $S x'' l = 0$,

(za parametr v budiž brán oblouk s křivky strikční T brané za křivku řídící)

t.j. povrchová přímka p jest kolma též ke hlavní normále křivky T, splývajíc tedy s její binormálou.

Přímková plocha takovéhoto druhu jest tedy plocha speciální, jsouc plochou binormál křivky.

Křivka T jest v tomto případě takovou křivkou plo-

*) Z dalšího plyne, že správnější jest, říci, že se k sobě přiblíží na vzdálenost nekonečně malou.

chy přímkové, že její hlavní normála jest normálou plochy, t.j. křivkou geodetickou.

Ježto pak ze dvou z rovnic

$$S x' l = \text{konst}, \quad S x' l' = 0, \quad S x'' l = 0$$

plyne vždy také třetí, platí věta Bonnetova:

Má-li křivka na ploše dvě ze tří vlastností: aby byla a) křivkou strikční b) křivkou geodetickou c) isogonální trajektorií površek, – má též vlastnost třetí.

Jiný důkaz věty Bonnetovy seznáme později.

II. Příklady.

152. Plocha binormál křivky. – Uvažujme přímo plochu tohoto druhu. Výsledek musí býti ve shodě s úvahou právě předchozí.

Křivka c budiž dána rovnicemi

$$x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s);$$

kde s značí oblouk křivky. Libovolný její bod mějtečnu $t(a, b, c)$, hlavní normálu $n_n(a_1, b_1, c_1)$, binormálu $b_n(a_2, b_2, c_2)$.

Oskulační rovina křivky c bude normálnou rovinou plochy binormál, takže křivka c bude geodetickou křivkou plochy.

Určeme parametr distribuce a bod centrálný porchové přímky. Bude

$$K = \frac{1}{\varphi'^2} \begin{vmatrix} f' & g' & h' \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ \frac{a_1}{T}, & \frac{b_1}{T}, & \frac{c_1}{T} \end{vmatrix} = -\frac{1}{T\varphi'^2},$$

neboť $a_2' = \frac{a_1}{T}$, $f' = a$, $\sin(t\, n_n\, b_n) = 1$.

Avšak $d\varphi = d\beta$ jest úhel kosse,

takže $\varphi' = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{T}$,

takže $\underline{\kappa = -\frac{1}{T}}$, kde T jest poloměr kosse.

Béřeme-li pak naši křivku za řídící křivku plochy, jest centrální bod povšky dán vzdáleností

$$\underline{U = -\frac{S f' a_2'}{\varphi'^2} = -\frac{S a a_1}{T \varphi'^2} = 0}$$

od křivky té, takže skutečně seznáváme:

Plocha binormál křivky má tu vlastnost, že křivka ta jest orthogonální trajektorií přímek povrchových, křivkou geodetickou a křivkou stykovou.

153. Plocha hlavních normál křivky. – Béřeme-li křivku za řídící křivku plochy, máme pro bod centrální (označení totéž jako v předch. příkladě)

$$U = -\frac{S f' a_1'}{S a_1'^2} = \frac{S a_1 \left(\frac{a}{R} + \frac{a_2}{T}\right)}{S \left(\frac{a}{R} + \frac{a_2}{T}\right)^2} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}},$$

$$U = \frac{R T^2}{R^2 + T^2}.$$

Pro parametr distribuční jest

$$\kappa = \frac{1}{\varphi'^2} \left| f' a_1 a_1' \right| = \frac{1}{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}} \left| a_1, a_1, -\frac{a}{T} - \frac{a_2}{T} \right| =$$

$$\kappa = -\frac{R^2 T}{R^2 + T^2}.$$

Uvažujme dále na hlavní normále křivky střed křivosti S. Jeho vzdálenost u od bodu centrálního C jest

$$u = CS = CA + AS = R - U$$

je-li A bod křivky.

Máme tedy $$-U = -\frac{RT^2}{R^2+T^2} = K \operatorname{tg} \gamma$$

$$u = R - U = R - \frac{RT^2}{R^2+T^2} = +\frac{R^3}{R^2+T^2} = \frac{R^2}{T^2} U = K \operatorname{tg} \gamma_1$$

kde γ, γ_1 značí úhly, které svírají s rovinou centrálnou roviny tečné v bodech A, S.

Znásobením posledních obou výrazů dostáváme

$$-\frac{R^2}{T^2} U^2 = K^2 \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \gamma_1,$$

odkud po dosazení za U a K plyne

$$\operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \gamma_1 = -1.$$

Skutečně vypočteme též snadno, že

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{T}{R}, \quad \operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{R}{T}.$$

Seznáváme tudíž, že pro plochu hlavních normál křivky jsou rovina tečná v bodě křivky a rovina tečná v příslušném středu křivosti navzájem kolmy.

154. Křivka strikční jednopl. hyperboloidu. —

Plocha jest dána rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad \dots (1).$$

Za křivku řídicí zvolme právě křivku strikční. Buď její měj souřadnice (x_0, y_0, z_0), takže rovnice naší plochy jako plochy přímek jedné z obou soustav mají tvar

$$x = x_0 + \alpha u, \quad y = y_0 + \beta u, \quad z = z_0 + \gamma u \quad \dots (2).$$

Musí pak platiti rovnice

$$\frac{(x_0+\alpha u)^2}{a^2}+\frac{(y_0+\beta u)^2}{b^2}+\frac{(z_0+\gamma u)^2}{c^2}-1=0$$

pro každé u, což vede (volme $u=0$ resp. $u=\infty$) k rovnicím

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}=0 \quad \dots(3)$$

z nichž druhá je rovnicí kužele asymptotického, píšeme-li místo α, β, γ úměrné k nim souřadnice ξ, η, ζ bodu přímky povrchové:

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}=0.$$

Rovina dotýká v bodě centrálním (x_0, y_0, z_0) plochy musí však být kolmá k rovině dotyčné ke kuželi asymptotickému (jež je zároveň řídícím kuželem plochy). Rovnice těchto rovin dotyčných jsou

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}-\frac{z_0 z}{c^2}=1$$

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-\frac{\gamma z}{c^2}=0 \quad \dots(4)$$

(píšeme-li ve druhé α, β, γ místo ξ_1, η_1, ζ_1), kdy podmínka jejich kolmosti dána je ve tvaru

$$\frac{\alpha x_0}{a^2}+\frac{\beta y_0}{b^2}+\frac{\gamma z_0}{c^2}=0 \quad \dots(5)$$

Vyjádříme-li si relaci mezi x_0, y_0, z_0, obdržíme tím rovnici plochy, která plochu danou protne v hledané křivce dvojnásobné. Mezi $x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma$ platí nyní rovnice

$$\frac{\alpha x_0}{a^2}+\frac{\beta y_0}{b^2}-\frac{\gamma z_0}{c^2}=0 \quad \dots(4'),$$

plynoucí z (4), a rovnice (5). Z nich plyne:

$$\alpha : \beta : \gamma = \begin{vmatrix} \frac{y_0}{b^4} & \frac{z_0}{c^4} \\ \frac{y_0}{b^2} & -\frac{z_0}{c^2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{x_0}{c^4} & \frac{x_0}{a^4} \\ -\frac{z_0}{c^2} & \frac{x_0}{a^2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{x_0}{a^4} & \frac{y_0}{b^4} \\ \frac{x_0}{a^2} & \frac{y_0}{b^2} \end{vmatrix}$$

Dosazením do (3) nabýváme žádané rovnice mezi x_0, y_0, z_0: (píšeme x, y, z místo x_0, y_0, z_0)

$$\frac{y^2 z^2}{a^2 b^4 c^4} \frac{(b^2+c^2)^2}{b^4 c^4} + \dots = 0 \quad \text{čili}$$

$$(6) \dots \frac{y^2 z^2}{b^6 c^6} (b^2+c^2)^2 + \frac{z^2 x^2}{c^6 a^6} (c^2+a^2)^2 - \frac{x^2 y^2}{a^6 b^6} (a^2-b^2)^2 = 0$$

Tato plocha prodíná tedy hyperboloid v křivce stykové. Jest homogenní 4. stupně, tedy jest to kužel 4. řádu, promítající křivku styková z počátku souřadnic.

Rovnici kužele toho můžeme též psáti ve tvaru

$$\frac{(b^2+c^2)^2}{b^6 c^6 x^2} + \frac{(c^2+a^2)^2}{c^6 a^6 y^2} - \frac{(b^2-a^2)^2}{a^6 b^6 z^2} = 0 \dots (6')$$

155. Konstrukce křivky. – Abychom se vyhnuli sestrojování kužele 4. řádu, provedeme následující úvahu: Opíšeme kolem počátku plochu kulovou o poloměru r a sestrojme ke každému bodu $A(x, y, z)$ plochy (6) rovinu polární $\left(-\frac{1}{\xi}, -\frac{1}{\eta}, -\frac{1}{\zeta}\right)$ vzhledem ke ploše kulové. Platí pak vztahy

$$\xi x = r^2, \quad \eta y = r^2, \quad \zeta z = r^2 \quad \text{čili}$$

$$x = \frac{r^2}{\xi}, \quad y = \frac{r^2}{\eta}, \quad z = \frac{r^2}{\zeta} \dots (7)$$

neboť průsečíky polární roviny s osami jsou póly rovin bodem A kolmo k osám vedených.

Každému bodu $A(x, y, z)$ přiřadíme pak bod $A_1(\xi, \eta, \zeta)$.

místem bodů A_1 jest pak plocha, jež jest rovněž plochou kuželovou o vrcholu v počátku. Nebot z úměrnosti (zde ovšem zvratné) souřadnic $x, \dots, \xi \dots$ plyne, že bodům A na přímce počátkem odpovídají body A_1 rovněž na přímce počátkem.

Rovnice této nové plochy kuželové jest

$$\frac{(b^2+c^2)^2}{b^6c^6}\xi^2+\frac{(c^2+a^2)^2}{c^6a^6}\eta^2-\frac{(a^2-b^2)^2}{a^6b^6}\zeta^2=0 \quad \dots (Z).$$

Jest to tedy kužel 2. stupně, mající osy souřadné za osy souměrnosti. Jeho řezy s rovinami kolmými k ose z jsou ellipsy, jejichž poloosy A, B jsou v poměru

$$A:B=\frac{b^2}{b^2+c^2}:\frac{a^2}{a^2+c^2}.$$

Sestrojíme-li tedy k libovolnému bodu A kužele (b) příslušný bod A_1*), sestrojíme jím v rovině $\parallel xy$ ellipsu homothetickou k ellipse o poloosách $\frac{b^2}{b^2+c^2}$, $\frac{a^2}{a^2+c^2}$, čímž máme kužel (Z) stanoven. Z něho sestrojíme naopak kužel (b), protínající hyperboloid v hledané křivce styčné.

Budiž na př. úlohou, sestrojiti tečnu křivky styčné v bodě A. Sestrojme kolmou tečnou poloh OA_1 ke kuželi (Z) a sestrojme v této rovině na př. libovolnou přímku $p \parallel xy$. Je-li A_1' bod souměrný na p k bodu A_1, protínají se roviny $R(\xi, \eta, \zeta)$, $R'(\xi', \eta', \zeta')$

*) Jelikož poloměrná rovina bodu A jest kolmá k průvodiči OA, sestrojme libovolnou rovinu k OA kolmou a bod o souřadnicích rovných jejím úsekům. Bod takový leží na povrchu OA_1 a užijeme ho místo samého bodu A_1.

v přímce s, jest tečná rovina T kužele (6) podél přímky OA kolmá ku přímce s. (Neboť $R \perp OA$, $R' \perp OA'$, tedy je-li $s = RR'$, jest $s \perp AOA'$).

Přímku s snadno sestrojíme. Roviny R, R' mají předně společný bod S na ose z. Za druhé stopy rovin příslušných bodům přímky p obalují v rovině xy parabolu (výtvor dvou podobných řad bodových na osách x, y), která dotýká se os x, y v průsečících s průmětem přímky p. Přísluší-li tedy rovině R stopa r, najděme (užitím věty Brianchonovy) dotyčný bod R této tečny paraboly.

Pak přímka $SR = s$ jest hledanou průsečnicí rovin R, R' a rovina jdoucí počátkem kolmo ku s jest tečnou rovinou plochy (6) a protíná tedy tečnou rovinu hyperboloidu v bodě A v žádané tečně bodu A – křivky strikční.

156. Strikční křivka hyperb. paraboloidu. – Z provedené úvahy plyne, že kdybychom místo prvé soustavy površek jednopl. hyperboloidu vycházeli od druhé, obdržíme touž křivku strikční, jež jest tedy oběma soustavám společna. Není tomu tak při hyp. paraboloidu. Zde asymptotický kužel rozpadne se ve dvě roviny řídící. Jelikož rovina centrálná jest kolmá k rovině asymptotické bodou zde roviny centrálné kolmy k rovinám řídícím. Roviny centrálné obalí zde tedy dva parabolické válce a každé soustavě površek přísluší jedna parabola jako křiv-

ka strikční. Při tom mlčky předpokládáno, že roviny řídící nejsou k sobě kolmé.

Jsou-li řídící roviny hyp. paraboloidu navzájem kolmé, čili jde-li o t.zv. orthogonální hyp. paraboloid, pak osy všech souměrných přímek téže soustavy leží na téže přímce plochy. Ony parabolické válce přecházejí zde ve svazky rovin a křivka strikční skládá se ze dvou přímek navzájem kolmých. Rovina jimi určená jest kolma k průsečnici obou rovin řídících, tedy též k ose paraboloidu, jsouc tečnou rovinou v jeho vrcholu.

<u>137. Strikční křivka plochy $f(x,y,z)=0$.</u> — Postup užitý při jednoplochém hyperboloidu možno zevšeobecniti. Dána-li plocha přímková rovnicí (1)... $f(x,y,z)=0$, dosaďme do rovnice (1) výrazy

$$x = x_0 + \alpha u, \quad y = y_0 + \beta u, \quad z = z_0 + \gamma u,$$

kde (x_0, y_0, z_0) budiž bod křivky strikční. Dosazením $u=0$ resp $u=\infty$ obdržíme z této rovnice rovnice dvě, z nichž druhá značí řídící kužel plochy.

Podmínka orthogonality roviny asymptotické

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_\alpha x_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_\alpha y_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_\alpha z_0 = 0$$

a roviny tečné bodu (x_0, y_0, z_0) vede nás k rovnici

$$S\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0} = 0.$$

Z posledních dvou rovnic a z rovnice řídícího kužele vylučme nyní α, β, γ, čímž nabudeme rovnici plochy vytínající křivku strikční.

III. Užití základních veličin.

158. Lineární element přím. plochy. – Přímková plocha budiž opět dána rovnicemi

(1) .... $x = f(v) + u\,l(v),\ y = g(v) + u\,m(v),\ z = h(v) + u\,n(v).$

Pak pro lineární element máme výraz:

$$ds^2 = S(f' + u l')^2 dv^2 + 2S(f' + u l')\,l\,du\,dv + S l^2 du^2.$$

Budiž l, m, n rovny právě směr. cosinům povšky, takže u jest vzdálenost bod. křivky řídící, pak máme (tedy $Sl^2 = 1,\ S\,l\,l' = 0$)

(2) ... $ds^2 = du^2 + 2S\,l\,f'\,du\,dv + (Sf'^2 + 2u\,S\,f'l' + u^2 Sl'^2)dv^2.$

Bčíme-li pak ještě za parametr v oblouk křivky řídící Γ, jest nutno konečně práti

(3) .. $ds^2 = du^2 + 2\cos\vartheta\,du\,dv + (1 - 2uU\varphi'^2 + u^2\varphi'^2)dv^2,$

kde ϑ značí úhel, který svírá povrchová přímka s křivkou řídící Γ a kde veličiny U, φ' mají známý význam.

Je-li nyní křivka řídící Γ orthogonální trajektorií přímek povrchových, jest stále $\cos\vartheta = 0$, takže jest

(4) ... $ds^2 = du^2 + (1 - 2uU\varphi'^2 + u^2\varphi'^2)\,dv^2.$

Zavedme nyní pro tohoto výrazu též parametr distribuční K. Odvoďme za tím účelem vztah mezi K, U, φ'.

Z výrazu (10) str. 317 plyne umocněním:

$$\varphi'^4 K^2 = [-(Sx'l')^2 + \varphi'^2(1 - \cos^2\vartheta)]$$

a vzhledem ke vzorci (5) (str. 314)

$$\varphi'^4 K^2 = [-U^2\varphi'^4 + \varphi'^2(1-\cos^2\vartheta)] .$$

Předpokládáme-li opět křivku řídicí jako vrch. trajektorii povšech, máme tedy vztah

$$\varphi'^2[K^2+U^2] = 1 \quad \dots (5)$$

Ke vztahu (5) dospějeme též přímo z definice parametru distribučního:

Mají-li tečné roviny v bodech u resp. u_1 dané přímky býti navzájem kolmy, musí býti splněna podmínka

$$\begin{vmatrix} l & \vdots & \vdots \\ f'+ul', & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l & \vdots & \vdots \\ f'+u_1 l', & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0 ,$$

jež v případě, že $l..$ jsou cosiny směr. a že $\cos\vartheta = 0$, nabývá tvaru

$$1 + (u+u_1) S f'l' + u u_1 \varphi'^2 = 0$$

čili, zavedeme-li sem U,

$$1 - (u+u_1) U \varphi'^2 + u u_1 \varphi'^2 = 0 \quad \dots (\alpha)$$

Vzdálenosti těchto bodů obdélníkových od bodu centrálního jsou pak $u-U$, u_1-U a součin těchto vzdáleností rovná se $-K^2$, což vede ke vztahu

$$(u-U)(u_1-U) = -K^2 \quad \text{čili}$$

$$U^2 - (u+u_1)U + u u_1 = -K^2 \dots (\beta)$$

takže z rovnic (α), (β) ihned plyne vztah (5).

Základní veličinu G píšeme nyní ve tvaru:

$$G = 1 + \varphi'^2(u^2 - 2uU) = 1 + \varphi'^2(u-U)^2 - U^2\varphi'^2$$

takže vzhledem ku (5) jest

$$G = \varphi'^2[(u-U)^2 + K^2] , \text{ tedy}$$

$$ds^2 = du^2 + [(u-U)^2 + K^2]\varphi'^2 dv^2 \dots (6) .$$

Takového tvaru nabývá tedy lin. element plochy přímkové, je-li u vzdálenost od křivky řídicí a je-li $\mathcal{J} = \frac{\pi}{2}$. Parametr v nemusí při tom být obloukem křivky řídicí, jak patrno z toho, že veličiny zde se vyskytující mají vesměs geometrický význam.

Zavedeme-li tedy za parametr v oblouk sférického obrazu plochy, takže jest $\varphi' = 1$, máme

$$ds^2 = du^2 + [(u-U)^2 + K^2]\, dv^2 \dots (7)$$

čímž nabýváme nejjednoduššího výrazu pro lineární element

15g. Dvě plochy přímkové. – Budiž naopak dána přímková plocha o lineárním elementu (7) a ptejme se, zdali existují přímkové plochy na ni deformovatelné tak, aby přímkám odpovídaly zase přímky. Prvky žádané plochy musí (viz výraz (2)) vyhovovati podmínkám

$$Sl^2 = 1,\quad Sl f' = 0,\quad Sl'^2 = 1,\quad Sl' f' = -U,\quad Sf'^2 = U^2 + K^2.$$

Místo posledních z nich píšme podmínku

$$Sf'(mn' - nm') = -K.$$

Plochu přímkovou, která by splňovala tyto podmínky, možno nyní sestrojiti tak, že její kužel řídicí zvolíme si jedním z ∞^1 způsobů vyhovujících podmínkám $Sl^2 = 1,\ Sl'^2 = 1$. Pro f, g, h obdržíme pak tři lineární rovnice takové, že determinant jejich soustavy jest různý od nuly.*)

*) Viz ke konci odstavce.

Jsou tedy f', g', h' jednoznačně určeny, f, g, h pak až na additivní konstantu, jež značí pouhou translaci plochy. Seznáváme tudíž:

Je-li dána plocha přímková, existuje nekonečně mnoho přímkových ploch, které lze na ni deformovati. Řídicí kuželi jejich lze totiž libovolně (až na dvě podmínky) voliti.

Jelikož však náš liniový element obsahuje pouze K^2, nikoli K, seznáváme, že existují dvě přímkové plochy o téměž řídicími kuželi, které jsou rozvinutelny na plochu danou. Jejich distribuční parametry liší se pouze znaménkem, jsouce co do absolutních hodnoty rovny distrib. parametru plochy dané.

Křivce stykové plochy dané odpovídá křivka stykové plochy odvozené a distribuční parametry příslušných povrchových přímek obou ploch jsou co do absolutní hodnoty sobě rovny.

Provedme ještě konečný výpočet f', g', h'. V rovnicích

$$S l f' = X \quad , \quad S l' f' = -U \quad , \quad S(mn' - nm') f' = -K$$

jsou l, m, n; l', m', n' směr. cosiny dvou směrů navzájem kolmých (jest totiž $\varphi' = 1$!). Pak jsou

$$l_2 = mK - nm' \quad , \quad m_2 = nl' - ln' \quad , \quad n_2 = lm' - ml'$$

směr. cosiny pro směr kolmý k oběma prvým. Sinus rozný úhlu dvou směrů jest $+1$, takže z posledních tří rovnic plynou pro orthogonální trajektorii přímek povrchových plochy přímkové výrazy

$$(8) \ldots\ldots \quad f' = -Ul' - K(mn' - nm') \, , \ldots\ldots .$$

160. Křivky asymptotické na ploše přímkové.-

Diferenciální rovnice křivky asymptotické má jak známo tvar

$$F(du, dv) = \begin{vmatrix} d^2x \\ x_u & \vdots & \vdots \\ x_v \end{vmatrix} = 0$$

vyjadřující okolnost, že tečná normála křivky asymptotické leží v tečné rovině plochy.

Pro plochu přímkovou (1) obdržíme

$$(1_0) \ldots F(du, dv) = \begin{vmatrix} (f''+ul'')\,dv^2 + 2l'\,du\,dv & \vdots & \vdots \\ l & \vdots & \vdots \\ f'+ul' \end{vmatrix} = 0,$$

takže naše dif. rovnice má tvar

$$2A\,du\,dv + B\,dv^2 = 0,$$ *)

kde A jest funkce v a B výraz 2. stupně v u.

Rovnice tato rozpadá se ve dvě. Jedna jest

$dv = 0$ čili $v =$ konst. Stanoví povrchové přímky plochy.

Druhá soustava křivek asymptotických dána jest pak diferenciální rovnicí tvaru

$$\frac{du}{dv} = Au^2 + 2Bu + C \quad \ldots\ldots (1),$$

t.j. rovnicí Ricattiho.

161. Speciální případy.

- Má-li přímková plocha přímku řídicí, jest tato přímka jednou z asymptotických křivek druhé soustavy, dávající tedy jeden partikulární integrál rovnice Ricattiho. Integrace této rovnice provede se v tomto případě (dokázáno v II. díle)

*) K jejímuž výsledku vedl by nás ovšem tvar $L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$ dif. rovnice kř. as.

člověna kvadraturami.

Mají-li pak plocha dvě řídící přímky, jak tomu jest při konoidu, máme dva particulární integrály rovnice Ricciatiho, takže její integrace vyžaduje pouze jedné kvadratury.

Asymptotické křivky konoidu možno však stanoviti též bez kvadratury. Provedme pro tento případ přímou úvahu. Kdyby šlo o plochu, jejíž obě řídící přímky jsou v konečnu, užijme na plochu takové kollineární transformace, že jedna z řídících přímek stane se úběžnou.

Budiž

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \ldots (\gamma)$$

rovnice konoidu. Položme

$$x = u, \quad y = uv, \quad z = \varphi(v) \quad \ldots (a)$$

Užijme té okolnosti, že rovina oskulační křivky asymptotické splývá s tečnou rovinou plochy, takže koefficienty její rovnice: $Ax + By + Cz + D = 0$

splňují vztahy

$$\left.\begin{aligned} Ax_u + By_u + Cz_u &= 0 \\ Ax_v + By_v + Cz_v &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (6)$$

kde derivace vypočteny z rovnice plochy. V našem případě dostáváme tak vztahy

$$A + Bv = 0, \quad Bu + C\varphi(v) = 0,$$

které jsou na př. splněny, je-li

$$C = -u, \quad B = \varphi'(v), \quad A = -v\varphi'(v) \quad \ldots (c)$$

Differenciální rovnice křivek asymptotických jest

$$(d) \ldots A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0,$$

kde A, B, C jsou koeficienty rovnice roviny dotečné, které, vzhledem k rovnicím (b) splňují též rovnici

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0,$$

takže diferenciální rovnici křivek asymptotických možno též psáti ve tvaru

(c) ..... $$d A \cdot dx + d B \cdot dy + d C \cdot dz = 0,$$

takže rovnice (d), (c) jsou ekvivalentní.

Rovnice (c) nabývá pro náš případ (viz (a)) tvaru

$$u\,\varphi''(v)\cdot dv^2 - 2\varphi'(v)\,du\,dv = 0$$

dávající opět jednak přímky povrchové v-konst, jednak rovnici

$$2\frac{du}{u} = \frac{\varphi''(v)}{\varphi'(v)}\,dv, \quad \text{odkud plyne}$$

$$\underline{u^2 = C\,\varphi'(v)} \quad \ldots \quad (1')$$

jako konečná rovnice asymptotických křivek konoidu.

Pozn. Má-li přímková plocha tři přímky řídící, jest plochou 2. stupně, jež má dvě soustavy přímek povrchových, jež jsou křivkami asymptotickými.

162. Obecný případ. – Uvažujme nyní obecnou plochu přímkovou, vyjádřenou zvolenými parametry u, v. Věnujme pozornost Serretovu trojhranu sférického obrazu Σ plochy:

tečna	a, b, c
hlav. norm.	a_1, b_1, c_1
binorm.	a_2, b_2, c_2.

Površka (l, m, n) řídícího kužele leží v normálné rovině křivky Σ. Svírá-li s její hlavní normálou úhel θ,

jest
$$\left.\begin{aligned} l &= a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta \\ m &= b_1 \cos\theta + b_2 \sin\theta \\ n &= c_1 \cos\theta + c_2 \sin\theta \end{aligned}\right\} (2.)$$

odkud plyne (jest-li v oblouk křivky Σ)
$$l' = \alpha = (-a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta)\,\theta' - \cos\theta\left(\frac{a}{R} + \frac{a_2}{T}\right) + \\ + \sin\theta\,\frac{a_1}{T}$$
a rovnice obdobné, takže obdržíme (mís. $a_1 \ldots$ resp $a_2 \ldots$)
$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos\theta}{R} &= -1 \\ \theta' &= \frac{1}{T} \end{aligned}\right\} (2).$$

Chtíce nyní vyvoditi rovnici (1.) str. 335, vypočítejme nejdříve (viz (8) str. 334) výrazy $mn' - nm', \ldots$:
$$mn' - nm' = mc - nb = \text{(dosazením z (2.))}$$
$$= (cb_1 - c_1 b)\cos\theta + (cb_2 - c_2 b)\sin\theta,$$
čili, vzhledem k tomu, že $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 1$,
$$mn' - nm' = a_1 \sin\theta - a_2 \cos\theta,$$
a obdobně další výrazy.

Pak jest levý
$$f' + ul' = (u - U)a + K(a_2 \cos\theta - a_1 \sin\theta)$$
$$\ldots\ldots$$

Derivací dle v pak, vzhledem ke (2), plyne
$$f'' + ul'' = a\left(\frac{K \sin\theta}{R} - U'\right) + a_1\left(\frac{u - U}{R} - K' \sin\theta\right) + a_2 K' \cos\theta.$$
Dosazením do (1.) máme levý
$$\mathfrak{R} = \begin{vmatrix} 2a\,du\,dv + dv^2\left[a\left(\frac{K \sin\theta}{R} - U'\right) + a_1\left(\frac{u - U}{R} - K' \sin\theta\right) + a_2 K' \cos\theta, \ldots \\ (u - U)a - K \sin\theta \cdot a_1 + K \cos\theta \cdot a_2, \\ a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta, \end{vmatrix}$$

čili, dle známých pravidel o determinantech,

$$\theta = \begin{vmatrix} 2\,du\,dv + \left(\frac{K\sin\theta}{R} - U'\right)dv^2, & \left(\frac{u-U}{R} - K'\sin\theta\right)dv^2, & K'\cos\theta\cdot dv^2 \\ u-U & -K\sin\theta & K\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}$$

čili

$$\theta = -\left[2\,du\,dv + \left(\frac{K\sin\theta}{R} - U'\right)dv^2\right]K - (u-U)\left[-K' + (u-U)\frac{\sin\theta}{R}\right]dv^2,$$

nebo konečně

$$(3)\quad \theta = -2K\,du\,dv + \left\{(u-U)K' + KU' - \frac{\sin\theta}{R}\left[(u-U)^2 + K^2\right]\right\}dv^2.$$

V rovnici této vyskytuje zkromě veličin u, U, K výraz $\frac{\sin\theta}{R}$, t.j. křivost geodetické křivky Σ.

Geodetickou tuto křivost můžeme v každém bodě křivky Σ stanoviti. Avšak též naopak, známe-li ji, jest tím křivka Σ určena:

Budiž dáno
$$\frac{\sin\theta}{R} = \Phi(v).$$

Pak z rovnic (2) str. 338 plyne

$$\operatorname{tg}\theta = -\Phi(v), \quad R = -\cos\theta, \quad T = \frac{dv}{d\theta}.$$

$$R = -\frac{1}{\sqrt{1+\Phi^2}}, \quad \frac{1}{T} = \frac{d\,\operatorname{arctg}(-\Phi)}{dv}$$

Možno tedy odvoditi přirozené rovnice křivky Σ, čímž jest dána.

163. Dif. rovnice křivek křivosti. — Obecně lze ji jak známo psáti ve tvaru

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv, & F\,du + G\,dv \\ L\,du + M\,dv, & M\,du + N\,dv \end{vmatrix} = 0$$

Užijeme-li vyjádření, jemuž přísluší lin. element (7) str. 333 $[\cos\vartheta = 0,\ \varphi' = 1]$, jest

$$\mathcal{E} = 1,\quad \mathcal{F} = 0,\quad \mathcal{G} = (u-U)^2 + K^2;\quad \Delta^2 = \mathcal{G}$$

$$\frac{1}{\Delta}|x_{uu}\, x_u\, x_v| = \mathcal{L} = 0,\quad \frac{1}{\Delta}|x_{uv}, x_u, x_v| = M = -\frac{1}{\Delta}|f'\, l\, l'| = \frac{-1}{\Delta} K \underbrace{\varphi'}_{1},$$

$$\frac{1}{\Delta}|x_{vv}\, x_u\, x_v| = N = \frac{1}{\Delta}|f''+ul'',\ l,\ f'+ul'|.$$

Dosazením do naší dif. rovnice obdržíme

$$\begin{vmatrix} du, & [(u-U)^2+K^2]\,dv \\ -K\,dv, & -K\,du + \underbrace{|f''+ul'',\ l,\ f'+ul'|}_{\mathfrak{D}}\,dv \end{vmatrix} = 0$$

Jde jěště pouze o hodnotu determinantu $\mathfrak{D} = |f''+ul'',\ l,\ f'+ul'|$.

Jest však, viz (1.) str. 335,

$$\mathcal{F}(du, dv) = \mathfrak{D}\,dv^2 + 2\,du\,dv\,\underbrace{|l',\ l,\ f'|}_{-K \text{ (je-li } \varphi' = 1)},$$ odkud

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathcal{F} + 2K\,du\,dv}{dv^2},$$

takže, dosadíme-li sem za $\mathcal{F}$ výraz (3) str. 339, jest

$$\mathfrak{D} = (u-U)K' + KU' - \frac{\sin\theta}{R}[(u-U)^2+K^2]$$

a dosazením nabývá naše dif. rovnice tvaru

$$\begin{vmatrix} du, & [(u-U)^2+K^2] \\ -K\,dv, & -K\,du + (u-U)K' + KU' - \frac{\sin\theta}{R}[(u-U)^2+K^2] \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$-K\,du^2 + \left\{(u-U)K' + KU' - \frac{\sin\theta}{R}[(u-U)^2+K^2]\right\} du\,dv + K[(u-U)^2+K^2]\,dv^2 = 0 \quad \dots (4)$$

Tím vyjádřena jest diferenciální rovnice křivosti křivek plochy přímkové pomocí veličin u, U, K a geodetické křivosti $\frac{\sin\theta}{R}$ sférického obrazu Σ, která jest funkcí v: $\frac{\sin\theta}{R} = \Phi(v)$.

164. Geod. křivost orth. trajektorie površek. – Budiž tato křivka T křivkou řídící $u=0$ čili

(1) … $x=f(v)$, $y=g(v)$, $z=h(v)$ plochy přímkové.

Střed křivosti geodetické pro křivku na ploše jest jak známo bod, v němž osa křivosti křivky protíná rovinu tečnou. Ježto pak povrchová přímka jest kolmá ke křivce T, jest hledaný bod průsečíkem osy křivosti s přímkou povrchovou.

Normálná rovina křivky má rovnici

$$S(x-f)f'=0 \quad \dots (2).$$

Povrchová přímka plochy jest pak dána rovnicí (2) a rovnicí

(3) … $x=f(v)+u\,l(v)$, $y=g(v)+u\,m(v)$, $z=h(v)+u\,n(v)$,

jež mění rovnici (2) v identitu. Osa křivosti pak, jako karakteristika soustavy normálných rovin křivky, dána jest rovnicí (2) a rovnicí

$$S(x-f)f''-Sf'^2=0 \quad \dots (2'),$$

takže hledaný střed jest průsečíkem roviny (2') s přímkou (3). Řešením rovnic těch plyne

$$u\,Slf''-Sf'^2=0 \quad \dots (4)$$

Jest však $Slf'=0$, odkud

$$Sl'f'+Slf''=0,$$

takže rovnice (4), vedoucí k souřadnici u hledaného bodu, nabývá tvaru

$$u\,Sl'f'+Sf'^2=0 \quad \dots (4')$$

čili $-uU+U^2+K^2=0$ (jest $\varphi'=1$, $Sf'^2=U^2+K^2$ (str. 333)

čili konečně $U(u-U)=K^2 \quad \dots (4'')$.

Je-li A bod křivky T, S její hledaný střed geod. křivosti, C centrální bod přímky povrchové, možno poslední rovnici psáti ve tvaru

$$CA \cdot CS = -k^2$$

kdež, vzhledem k známé souvislosti parametru distribučního s involucí dotyčných bodů dvojic kolmých rovin dečních, máme větu:

Střed S geodetické křivosti bodu A orthogonální trajektorie přímek povrchových plochy přímkové jest bod povrchové přímky, v níž dečná rovina její kolmá k dečné rovině bodu A.

Je-li nyní dána libovolná křivka c na libovolné ploše P, užijeme poslední věty níže ke stanovení středu S geodetické křivosti bodu A křivky c. Opišme totiž ploše P přímkovou plochu P_1 dečen kolmých ku křivce c, podél dělo křivky. Křivka c jest pak orthogonální trajektorií povrchových přímek plochy P_1, majíc na obou plochách býti střed křivosti geodetické.

165. Věta Bonnetova o deformaci. zní: Jsou-li dvě přímkové plochy, které nevznikly deformací dělitelné plochy 2. stupně, navzájem rozvinutelny, musí površky jedné přecházeti v površky druhé.

Že plochy vzniklé deformací plochy 2. stupně, činí v dělo větě výjimku, plyne z toho, že plocha 2. stupně obsahuje dvě soustavy přímek povrchových, může býti deformována tak, že přímky prvé soustavy

zůstávají přímkami a druhé nikoli, nebo naopak.

Větu uvedenou dokážeme snadno tímto způsobem. Buďtež P, P_1 dvě přímkové plochy, navzájem rozvinutelné tak, že při rozvinutí přímkám u = konst plochy jedné neodpovídají přímky v = konst plochy druhé. Béřeme-li pak na obou plochách křivky u, v za křivky parametrické, takže přiřazujeme deformací navzájem body o těchže parametrech, jsou základní veličiny prvého řádu navzájem rovny

$$\mathcal{E} = \bar{\mathcal{E}}, \quad \mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}}, \quad \mathcal{G} = \bar{\mathcal{G}} \quad \ldots (1)$$

Pokud se týče pak veličin druhého řádu, uvažme, že differenciální rovnice křivek asymptotických

$$\mathcal{L}\, du^2 + 2\mathcal{M}\, du\, dv + \mathcal{N}\, dv^2 = 0$$

musí nám dávati jako jedno řešení

a) pro plochu prvou přímky u = konst ; jest tudíž $\mathcal{N} = 0$
b) " druhou " v = konst ; " $\bar{\mathcal{L}} = 0$ } (2)

Dále musí míra křivosti

$$K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}$$

příslušných bodů obou ploch býti stejná, což vede k rovnici

$$\mathcal{M}^2 = \bar{\mathcal{M}}^2$$

čili

$$\bar{\mathcal{M}} = \pm \mathcal{M} \quad \ldots (3).$$

Přímka však jest nejen křivkou asymptotickou, ale též křivkou geodetickou. Podmínky, že křivky u = konst plochy prvé a křivky v = konst plochy druhé jsou křivkami geodetickými, vedou vzhledem ke známým vzorcům z theorie ploch k tomu, že

platí relace $-G_v F - G_u G + 2F_v G = 0 \ldots (r)$

$-E_u F - E_v E + 2F_u E = 0 \ldots (r_1)$

Použijme nyní toho, že základní veličiny obou ploch musí splňovati tři základní rovnice theorie ploch.

Rovnice Codazziho nabývají, vzhledem k předchozímu,

pro plochu prvou tvaru

$$(\mathrm{I}) \ldots \mathcal{L}_v - \mathcal{M}_u = \frac{1}{2\Delta^2}\left[E_v G - G_u F\right]\mathcal{L} - \frac{1}{2\Delta^2}\left[E_u G - G_u E + 2(E_v - F_u)F\right]\mathcal{M}$$

$$(\mathrm{III}) \ldots -\mathcal{M}_v = \frac{-1}{2\Delta^2}\left[G_v E - E_v G + 2(G_u - F_v)F\right]\mathcal{M}$$

a pro plochu druhou tvaru

$$(\bar{\mathrm{I}}) \ldots -\bar{\mathcal{M}}_u = \frac{-1}{2\Delta^2}\left[E_u G - G_u E + 2(E_v - F_u)F\right]\bar{\mathcal{M}}$$

$$(\bar{\mathrm{III}}) \ldots \bar{\mathcal{N}}_u - \bar{\mathcal{M}}_v = \frac{1}{2\Delta^2}\left[G_u E - E_v F\right]\bar{\mathcal{N}} - \frac{1}{2\Delta^2}\left[G_v E - E_v G + 2(G_u - F_v)F\right]\bar{\mathcal{M}}.$$

Rovnice $(\bar{\mathrm{I}})$ vede však vzhledem ku (3) k rovnici

$$(\mathrm{I}_1) \ldots -\mathcal{M}_u = \frac{-1}{2\Delta^2}\left[E_u G - G_u E + 2(E_v - F_u)F\right]\mathcal{M}$$

Ježto pak rovnice Gaussova má pro obě plochy tvar

$$\mathcal{M}^2 = f(E, F, G) \quad \ldots (\mathrm{II}),$$

jsou základní rovnice všechny splněny takovými veličinami $E_1, F_1, G_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1, \mathcal{N}_1$, že

$$E_1 = E, \quad F_1 = F, \quad G_1 = G, \quad \mathcal{L}_1 = \mathcal{N}_1 = 0, \quad \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}.$$

Veličiny tyto stanoví takovou plochu, rozvinutelnou na obě plochy dané, že [vzhledem ku $\mathcal{L}_1 = \mathcal{N}_1 = 0$ a relacím r, r_1] obsahuje dvě soustavy přímek povrchových $u = \text{konst}$, $v = \text{konst}$, jest tedy plochou 2. stupně.

Nevznikly-li tedy naše plochy deformací téže plochy

2. skupině, není možno je tedy navzájem deformovati tak, že přímky povrchové obou ploch se nepřísluší. Tím důkaz Bonnetovy věty proveden.

166. Věta Bonnetova v obecnějším tvaru. — Obdobně k předchozímu postupu dokážeme větu: Není možno deformovati jednu plochu na druhou tak, aby soustava křivek asymptotických přecházela zase v soustavu křivek asymptotických, nejsou-li plochy ty plochami přímkovými, v kterémžto případě ony asymptotické křivky přecházejí v přímky.

Za příčinou důkazu zavedeme na prvé ploše obě soustavy křivek asymptotických za křivky parametrické. — Rovnice

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$$

musí tedy býti splněna jak křivkami $du=0$, tak i křivkami $dv=0$, jest tedy

$$L = N = 0 \quad \ldots (1)$$

Ploše té budiž přiřazena plocha druhou deformací tak, že křivky $u=$ konst. jsou rovněž křivkami asympt. Jest tedy též $\bar{N} = 0 \quad \ldots (2)$

A poněvadž obě plochy přiřazené soustavě u, v jsou navzájem rozvinutelny, mají veličiny E, F, G společné a jest $K = \bar{K}$

čili $LN - M^2 = \bar{L}\bar{N} - \bar{M}^2$

čili konečně $\bar{M} = \pm M \ldots (3)$

Aplikujme nyní známou rovnici Bertrandovu na obě plochy.

Tím nabudeme rovnic

$$\mathcal{M}_v = \frac{1}{2\Delta^2}\left[\mathcal{G}_v\mathcal{E} - \mathcal{E}_v\mathcal{G} + 2(\mathcal{G}_u - \mathcal{F}_v)\mathcal{F}\right]\mathcal{M},$$

$$\bar{\mathcal{M}}_v = \frac{1}{2\Delta^2}\left[\mathcal{G}_v\mathcal{E} - \mathcal{E}_v\mathcal{G} + 2(\mathcal{G}_u - \mathcal{F}_v)\mathcal{F}\right]\bar{\mathcal{M}} + \frac{1}{2\Delta^2}\left[-\mathcal{G}_v\mathcal{F} - \mathcal{G}_u\mathcal{G} + 2\mathcal{F}_v\mathcal{G}\right]\bar{\mathcal{L}}$$

Prvou z nich možno však vzhledem ke vztahu (3) psáti též ve tvaru

$$\bar{\mathcal{M}}_v = \frac{1}{2\Delta^2}\left[\mathcal{G}_v\mathcal{E} - \mathcal{E}_v\mathcal{G} + 2(\mathcal{G}_u - \mathcal{F}_v)\mathcal{F}\right]\bar{\mathcal{M}},$$

takže srovnáním se druhou plyne

$$\left[-\mathcal{G}_v\mathcal{F} - \mathcal{G}_u\mathcal{G} + 2\mathcal{F}_v\mathcal{G}\right]\bar{\mathcal{L}} = 0$$

Kdyby však bylo $\bar{\mathcal{L}} = 0$, t.j.

$$\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}}, \quad \mathcal{N} = \bar{\mathcal{N}}, \quad \mathcal{M} = \pm\bar{\mathcal{M}},$$

byly by obě plochy shodné nebo souměrné*), kterýžto případ možno vzhledem k žádané vzájemné rozvinutelnosti obou ploch zamítnouti.

Pro skutečnou deformaci jest tedy nutně

$$\left[-\mathcal{G}_v\mathcal{F} - \mathcal{G}_u\mathcal{G} + 2\mathcal{F}_v\mathcal{G}\right] = 0,$$

t.j. křivky u = konst jsou nejen křivkami asymptotickými, ale též geodetickými, jsou to tedy přímky, jak bylo dokázati.

Že pak jest nekonečně mnoha způsoby možno, přímkovou plochu deformovati tak, že přímky zůstávají přímkami, jsme již seznali (str. 333) a také zde snadno vyvodíme:

Věnujme nyní pozornost první Codazziho rovnici a applikujme ji na druhou plochu, čímž dostáváme:

$$\bar{\mathcal{L}}_v - \bar{\mathcal{M}}_u = \frac{1}{2\Delta^2}(\mathcal{E}_v\mathcal{G} - \mathcal{G}_u\mathcal{F})\bar{\mathcal{L}} - \frac{1}{2\Delta^2}\left[\mathcal{E}_u\mathcal{G} - \mathcal{G}_u\mathcal{E} + 2(\mathcal{E}_v - \mathcal{F}_u)\mathcal{F}\right]\bar{\mathcal{M}},$$

*) viz pozn. str. 351.

neboť její aplikace na plochu první dá

$$M_u = \frac{1}{2\Delta^2}\left[\mathcal{E}_u G - G_u \mathcal{E} + 2(\mathcal{E}_v - F_u)\mathcal{F}\right] M,$$

čili též

$$\bar{M}_u = \frac{1}{2\Delta^2}\left[\mathcal{E}_u G - G_u \mathcal{E} + 2(\mathcal{E}_v - F_u)\mathcal{F}\right] \bar{M},$$

takže srovnáním obou plyne pro $\bar{\mathcal{L}}$ podmínka

$$\bar{\mathcal{L}}_v = \frac{1}{2\Delta^2}\left(\mathcal{E}_v G - G_u \mathcal{F}\right) \bar{\mathcal{L}} \quad \text{čili}$$

$$\frac{\bar{\mathcal{L}}_v}{\bar{\mathcal{L}}} = \frac{1}{2\Delta^2}\left(\mathcal{E}_v G - G_u \mathcal{F}\right),$$

jejíž integrací plyne, že pro $\bar{\mathcal{L}}$ obdržíme nekonečně mnoho hodnot a je-li $\bar{\mathcal{L}}_0$ jedna z nich, že všechny možno vyjádřiti výrazem

$$\bar{\mathcal{L}} = \varphi(u) \cdot \bar{\mathcal{L}}_0 \; ^{*)}$$

Též rovnice Gaussova jest veličinami odvozených ploch splněna, takže tím provedeno důkaz druhé části naší věty.

<u>16 z. Věta Enneperova</u>, které bude možno užíti s výhodou k doplnění předchozí úvahy, zní:

Pro libovolný bod obecné plochy jest čtverec torse křivky asymptotické roven záporně vzaté míře křivosti plochy.

Předpokládajíce, že plocha má zápornou míru křivosti, takže křivky asymptotické jsou reálné, klademe

$$S = \pm\sqrt{-\frac{1}{K}}, \quad \text{kde} \quad K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{\mathcal{E}G - \mathcal{F}^2}.$$

<u>Obecná diff. rovnice křivek asymptotických jest:</u>

*) Jsou-li tedy na dané ploše nyní křivky (v = konst.) obecnými, tedy $\mathcal{L} \neq 0$, možno položiti $\bar{\mathcal{L}}_0 = \mathcal{L}$, neboť plocha jest též jednou ze svých deformací.

$$\mathfrak{L}\,du^2 + 2\mathfrak{M}\,du\,dv + \mathfrak{N}\,dv^2 = 0 \quad \dots (1)$$

a možno ji psáti jednak ve tvaru

$$(\mathfrak{L}\,du + \mathfrak{M}\,dv)^2 = \mathfrak{L}\left[\mathfrak{L}\,du^2 + 2\mathfrak{M}\,du\,dv\right] + \mathfrak{M}^2 dv^2 =$$

$$= \mathfrak{L}\left[-\mathfrak{N}\,dv^2\right] + \mathfrak{M}^2 dv^2 = (-\mathfrak{L}\mathfrak{N} + \mathfrak{M}^2)\,dv^2 = (-EG + F^2)K\,dv^2 =$$

$$= -\Delta^2 K\,dv^2 = \frac{\Delta^2}{\varrho^2}\,dv^2$$

t.j.

$$\mathfrak{L}\,du + \mathfrak{M}\,dv = \pm\frac{\Delta}{\varrho}\,dv \quad \dots (2)$$

a jednak obdobně ve tvaru

$$\mathfrak{M}\,du + \mathfrak{N}\,dv = \mp\frac{\Delta}{\varrho}\,du \dots (3),$$

kde platí současně buď znaménka horní nebo znaménka dolní, jak patrno odtud, že násobíme-li rovnice (2) resp (3) du resp dv a sečteme, musíme obdržeti rovnici (1). Tím máme obě soustavy asymptotických křivek navzájem rozlišeny.

Ježto nyní splývá binormála křivky asymptotické s normálou plochy, takže jest

(a) .... $\lambda = \varepsilon X$, $\mu = \varepsilon Y$, $\nu = \varepsilon Z$ $\quad (\varepsilon = \pm 1)$

Pro torsi $\frac{1}{T}$ křivky platí nyní

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{l}{T}, \quad \text{čili} \quad \mathfrak{S}\, l\,\frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{T},$$

což vzhledem ku: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 1$ lze psáti ve tvaru

$$\frac{1}{T} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{d\lambda}{ds} & \frac{du}{ds} & \frac{d\nu}{ds} \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} \quad \dots . (4)$$

Do výrazu toho nutno zavésti vyjádření parametrické. Jest:

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = x_u\frac{du}{ds} + x_v\frac{dv}{ds};$$

z podmínek (a) pro křivku asymptotickou plyne

$$\frac{d\lambda}{ds} = \varepsilon X_u \frac{du}{ds} + \varepsilon X_v \frac{dv}{ds}, \ldots \quad ; \text{ jest tedy,}$$

píšeme-li:

$$X_u = \frac{FM - GL}{\Delta^2} x_u + \frac{FL - EM}{\Delta^2} x_v = A x_u + B x_v$$

$$X_v = \frac{FN - GM}{\Delta^2} x_u + \frac{FM - EN}{\Delta^2} x_v = A_1 x_u + B_1 x_v,$$

$$\frac{1}{T} = \begin{vmatrix} x_u u' + x_v v', & \vdots & \vdots \\ (A x_u + B x_v) u' + (A_1 x_u + B_1 x_v) v', & \vdots & \vdots \\ X, & & \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_u & x_v & X \\ y_u & y_v & Y \\ z_u & z_v & Z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u', & v', & 0 \\ Au' + A_1 v', & Bu' + B_1 v', & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta \begin{vmatrix} u', & v' \\ \frac{FM - GL}{\Delta^2} u' + \frac{FN - GM}{\Delta^2} v', & \frac{FL - EM}{\Delta^2} u' + \frac{FM - EN}{\Delta^2} v' \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} u' & v' \\ F(Mu' + Nv') - G(Lu' + Mv'), & F(Lu' + Mv') - E(Mu' + Nv') \end{vmatrix},$$

čili, vzhledem ku (2), (3),

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\varrho} \begin{vmatrix} u' & v' \\ F\left(\mp \frac{du}{ds}\right) \mp G \frac{dv}{ds}, & \pm F \frac{dv}{ds} \pm E \frac{du}{ds} \end{vmatrix} =$$

$$= \pm \frac{1}{\varrho} \underbrace{\left[E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \right]}_{1}$$

t.j. $\quad \frac{1}{T} = \pm \frac{1}{\varrho}$

čili

$$\frac{1}{T} = \pm \sqrt{-K} \quad \ldots . (5),$$

čímž jest věta Ennepserova dokázána.

Zároveň vidíme, že znamení torse jest kladné nebo záporné dle toho, náleží-li asymptotická křivka k první nebo druhé soustavě. Z toho pak soudíme dále, že v rovnicích (2), (3) příslušejí horní znaménka asymptotickým křivkám kladné torse nebo první soustavy (levotočivým), dolní znaménka pak křivkám záporné torse čili druhé soustavy (pravotočivým).

168. Aplikace pro větu Bonnetovu. – Věnujme v důsledku předchozího pozornost významu znaménka při M (viz (3) str. 345) uvažované plochy přímkové. Vzhledem ku (1) str. 345 nabývá zde rovnice (2) str. 348 tvaru

$$M = \pm \frac{\Delta}{\varepsilon} \quad (\text{pro asympt. křivky } u = \text{konst})$$

Tato rovnice praví tedy, že M jest kladné nebo záporné dle toho, jsou-li přímé asymptotické křivky $u = \text{konst}$ levotočivé nebo pravotočivé. Totiž pohybuje-li se (v jednom nebo druhém smyslu) v prvním případě bod na přímce povrchové, otáčí se rovina dečná od prava na levo, v druhém případě pak naopak.

Můžeme tedy rozeznávati přímkové plochy levotočivé a pravotočivé; na prvních jsou křivočaré křivky asymptotické pravotočivými, na druhých levotočivými. Platí věta: Hodnota M jest kladná nebo záporná dle toho, je-li přímková plocha levotočivou nebo pravotočivou.

Vraťme se nyní k výsledkům získaným Bonnetovou větou (druhý způsob) pro plochu přímkovou vzniklou ob-

formací vlnné. Vzhledem ku $\bar{M} = \pm M$, $\bar{N} = N = 0$ platí nám rovnice (3) str. 348 užitá na obě plochy:

Je-li $\bar{M} = +M$ mají obě plochy tyž smysl otáčení přímek povrchových, čili jsou současně buď levotočivé nebo pravotočivé, takže možno od jedné ke druhé přejíti spojitou deformací.

Je-li však $\bar{M} = -M$, není tomu tak a nutno za účelem spojitého přechodu k ploše druhé nahraditi plochu prvou plochou k ní souměrnou. (Tím se totiž změní levotočivá plocha v pravotočivou a naopak, tedy M změní znaménko)*).

169. Věta Beltramiho. – Zní: Dána-li na přímkové ploše libovolná křivka c, existuje jedna a jen jedna spojitá deformace plochy, kterou povrchy zůstávají přímkami a křivka c přechází v křivku asymptotickou.

Za příčinou důkazu uvažme, že pro plochu deformací vzniklou (má-li býti možna spojitá deformace) jest

$$\bar{L} = L\varphi(u), \quad \bar{M} = +M, \quad \bar{N} = N = 0$$

(jsou-li přímky křivkami $u = \text{konst}$).

Jsou tedy asymptotické křivky na vzniklé ploše dány rovnicí (myšleny křivočaré kř. asymptot.)

$$du\, L\varphi(u) + 2M\, dv = 0 \quad \ldots\ (6)$$

Je-li pak $v = f(u)$ rovnice křivky c, musí rovnice (6) býti touto křivkou splněna, což vede jednoznačně k hodnotě

$$\varphi(u) = -\frac{2M}{L} f_u,$$

*) Viz pozn. str. 346.

čímž jest důkaz proveden.

Jako opak věty Beltramiho snadno plyne věta, jejíž správnost jest zřejmá též z věty Bonnetovy:

Deformujeme-li plochu přímkovou tak, že jedna její povrchová přímka zůstává přímou, jest touto tak též se všemi ostatními povrchovými.

170. Věta o křivkách geodetických. – V theorii ploch odvodili jsme výraz pro geodetickou křivost křivky na ploše, specielně též pro případ, že křivka jest křivkou parametrickou. Jelikož pak geodetická křivost křivky geodetické jest rovna nule, nabýváme tím též rovnic křivek geodetických.

Vzorce ty vedou nás snadno k větě: Na obecné ploše neexistují dvě soustavy orthogonálních navzájem křivek geodetických. Výjimku činí toliko plochy rozvinutelné.

Za příčinou důkazu beřme na ploše libovolně dvě soustavy – předpokládajíce, že jsou možny – za křivky parametrické.

Jelikož jsou kolmé, jest $F = 0$

a podmínky pro to, aby parametrické křivky byly křivkami geodetickými, nabývají tvaru

$$G_u = 0, \qquad E_v = 0,$$

takže $G = \varphi(v), \quad E = \psi(u),$ takžeže

$$ds^2 = \psi(u)\,du^2 + \varphi(v)\,dv^2.$$

Zaveďme nové parametry křivkám těm příslušné vztahy

$$dU^2 = \varphi(u)\,du^2, \quad dV^2 = \psi(v)\,dv^2,$$

takže

$$ds^2 = dU^2 + dV^2.$$

Lineární element plochy lze tedy za předpokladu existence řečených soustav uvésti na týž tvar, jaký má lineární element roviny. Plocha jest tedy plochou rozvinutelnou. (Dosazením $E = G = 1$, $F = 0$ do rovnice Gaussovy obdržíme ovšem $K = 0$).

Tím jest důkaz proveden. – Rovnice obecné křivky geodetické na naší ploše vztažené k řečeným křivkám parametrickým, jest lineární rovnice

$$u = av + b,$$

jak jest opět v souhlase s tím, že geodetické křivky na ploše rozvinutelné přecházejí v rovině v přímky.

171. Křivost křivky strikční. – Volme křivku strikční T za křivku řídící plochy přímkové. Pak jest $U = 0$ a základní veličiny jsou:

$E = 1$, $F = \cos J$ (J = úhel, který svírá přímka povrchová s křivkou řídící), $G = 1 + u^2\varphi'^2$,

$$L = 0, \quad M = \frac{K\varphi'^2}{\Delta}, \quad N = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} f''+ul'' & \vdots & \vdots \\ f'+ul' & \vdots & \vdots \\ l & & \end{vmatrix}$$

Pro bod křivky strikční samé jest též $u = 0$, tedy též $G = 1$, takže pro její oblouk jest $ds^2 = dv^2$, a dále $\Delta = \sqrt{1-\cos^2 J} = \sin J$, tudíž pro N:

$$\sin \mathfrak{J} . N = - \begin{vmatrix} f'' & \vdots & \vdots \\ f' & \vdots & \vdots \\ f & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = - \frac{1}{\varrho} \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \end{vmatrix} ,$$

jsou-li $l_1 \ldots$ směr. cosiny hlavní normály a $\alpha, \ldots$ směr. cosiny tečny křivky strikční, $\frac{1}{\varrho}$ = k. křivost kř. sk.

Determinant na pravo jest sinus rožný trojhranu $n_n t p$ (p jest poloha), jenž rovná se jak známo obsahu jednotkového rovnoběžnostěnu, jehož tři hrany leží na přímkách těch. Jelikož jest $t \perp n_n$, jest obsah V tohoto rovnoběžnostěnu:

$$V = \sin \Theta \sin \mathfrak{J} ,$$

je-li Θ stěnový úhel při hraně t, čili úhel roviny centrální s oskulační rovinou křivky strikční.

Jest tudíž

$$N \sin \mathfrak{J} = - \frac{\sin \Theta \sin \mathfrak{J}}{\varrho}$$

čili

$$N = - \frac{\sin \Theta}{\varrho} \quad \ldots \quad (1).$$

Veličina N rovná se tedy v tomto případě, co do absolutní hodnoty, normální křivosti křivky strikční.

Vyjádříme si nyní geodetickou křivost křivky strikční. Pro křivku $u = \text{konst}$ platí pro geod. křivost výraz

$$\Delta . \frac{\cos \Theta}{\varrho} = \frac{F G_v - G F_u + 2 G G_u}{2 G \sqrt{G}} ,$$

který pro bod naší křivky strikční $u = 0$ nabývá tvaru

$$\sin \mathfrak{J} \frac{\cos \Theta}{\varrho} = \sin \mathfrak{J} \frac{d \mathfrak{J}}{dv} ,$$

takže hledaná geod. křivost jest

$$\frac{\cos\theta}{\varrho} = \frac{d\vartheta}{dv} \quad \dots\dots (2).$$

Tato relace, zvaná relací Bonnetovou, vede nás opět k větě Bonnetově o křivce strikční. (Viz str. 323).

Vyjadřme si dále geodetickou torsi křivky strikční. Jak známe platí pro torsi geodetickou křivky na ploše výraz

$$\frac{1}{T_g} = -\frac{1}{ds^2} \,|\, X\, dX\, dx \,|\,,$$

dosadíme $dx = x_u du + x_v dv$, $dX = X_u du + X_v dv$ a násobíme rovnicí

$$\Delta = |\, X\ x_u\ x_v \,|$$

Dle známých pravidel o násobení determinantů a vzhledem k tomu, že $\mathfrak{L} = -S X_u x_u, \dots$, obdržíme

$$\frac{\Delta}{T_g} = \frac{1}{ds^2} \begin{vmatrix} \mathfrak{L}\,du + M\,dv, & \mathfrak{E}\,du + \mathfrak{F}\,dv \\ M\,du + N\,dv, & \mathfrak{F}\,du + \mathfrak{G}\,dv \end{vmatrix}.$$

Pro naši křivku strikční musíme klásti

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{G} = 1,\ \mathfrak{F} = \cos\vartheta,\ \mathfrak{L} = 0,\ M = \frac{K\varphi'^2}{\Delta},\ N = -\frac{\sin\theta}{\varrho},$$

$dv^2 = ds^2$, takže jest

$$\frac{\Delta}{T_g} = \frac{K\varphi'^2}{\Delta} + \frac{\sin\theta\cos\vartheta}{\varrho}.$$

Jest však dle známých vzorců

$$K = \frac{|\,\mathfrak{f}'\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{l}'\,|}{\varphi'^2} = \frac{|\,\alpha\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{L}_1\,|}{\varphi'},$$

kde $\lambda_1 \dots$ jsou směr. cosiny přímky g kolmé k rovině centrální, určené přímkami t, p.

Determinant v pravo jest

$$\sin(tpg) = \sin\vartheta \quad (\vartheta = \text{úhel } tp),$$

takže

$$\kappa = \frac{\sin\vartheta}{\varphi'}, \quad \text{odkud} \quad \varphi' = \frac{\sin\vartheta}{\kappa},$$

takže vyloučením φ' obdržíváme

$$\frac{\Delta}{T_g} = \frac{\sin^2\vartheta}{\kappa\,\Delta} + \frac{\sin\theta}{\varrho}\cos\vartheta,$$

čili, ježto $\Delta = \sin\vartheta$,

$$\frac{\sin\vartheta}{T_g} = \frac{\sin\vartheta}{\kappa} + \frac{\cos\vartheta}{\varrho_1} \quad \dots\dots (3),$$

značí-li $\frac{1}{T_g}$ geod. torsi a $\frac{1}{\varrho_1}$ normální křivost křivky stykové.

Z těchto relací vyvodil Laguerre zajímavou větu, kterou v dalším seznáme.

IV. Aplikace.

172. Plochy přímkové rozvinutelné na plochy rotační. — Tážeme se po takových plochách přímkových. Každá taková plocha musí se dáti spojitě deformovati sama v sebe, při čemž musí se (dle věty Bonnetovy) celá soustava přímek povrchových posouvati sama v sobě. Při tom, následkem spojitosti deformace, není třeba vyjímati ani ploch rozvinutelných na plochy 2. stupně.

Za křivku řídicí bereme orthogonální trajektorii přímek

nek povrchových a za parametr v oblouk křivky sférické, takže $\varphi' = 1$ a lin. element má tvar

$$ds^2 = du^2 + [(u-U)^2 + K^2]\, dw^2,$$

což píšme všeobecněji v označení:

$$ds^2 = du^2 + [(u-\alpha(v))^2 + \beta^2(v)]\, dw^2 \ldots (1).$$

Při zmíněné spojité deformaci posunuje se křivka striktční sama v sobě, protíná tedy přímky povrchové pod konstantním úhlem a jest tudíž křivkou geodetickou. Dále jest podél ní míra křivosti konstantní, rovna K_0.

Avšak pro míru křivosti plyne, na př. z relace Gaussovy, nebo z výrazu $K = \frac{LN - M^2}{\Delta^2}$,

$$K = -\frac{\beta^2}{[(u-\alpha)^2 + \beta^2]^2},$$

a ježto pro křivku striktční jest $u = U = \alpha$, jest

$$K_0 = -\frac{1}{\beta^2}$$

což má býti konstanta! Odtud plyne:

$$\kappa = \beta = \text{konst} \ldots (2),$$

tedy parametr distribuční má stálou hodnotu.

Označíme-li nyní ω konstantní úhel, který tvoří tečna křivky striktční s přímkou povrchovou, pak z pravoúhlého trojúhelníku, v němž dU, $d\delta$ (délka osy sousedních površek) jsou odvěsnami, plyne

$$\operatorname{cotg}\omega = \frac{dU}{d\delta} = \frac{d[\alpha(v)]}{d\delta},$$

čili, ježto $d\delta = \kappa\, dw$,

$$\operatorname{cotg}\omega = \frac{1}{\kappa}\alpha'(v), \quad \text{odkud integrací}$$

$$x(v) = K v \cos\omega \quad \dots \quad (3),$$

možno lesky lineární element hledané plochy vyjádřiti ve tvaru

$$ds^2 = du^2 + [(u - Kv\cos\omega)^2 + K^2]\,dw^2 \quad \dots \quad (4),$$

kde $\omega = \text{konst}$, $K = \text{konst}$.

173. Dvě kategorie hledaných ploch. – Z vyvozeného tvaru (4) jest patrno, že lineární element uvažovaných ploch může míti dvojího různého tvaru dle toho, jest $\cos\omega = 0$ nebo $\cos\omega \neq 0$.

1) Budiž $\omega = \frac{\pi}{2}$. Pak jest

$$ds^2 = du^2 + [u^2 + K^2]\,dw^2.$$

Tímto výrazem jest však dán lineární element pravoúhlé plochy šroubové:

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = q\,v,$$

je-li $q = K$, takže seznáváme zároveň, že parametr q jest distribučním parametrem této plochy, jak ostatně plyne též ze vztahu (pro úhel w tečny křivky šroubové poloměru $r = u$) $\operatorname{tg} w = \frac{u}{q}$ čili $u = q \operatorname{tg} w$ (šroubová osa jest zde křivkou stikční).

Že přímkové plochy šroubové jsou rozvinutelny na rotační, jest nám ostatně již známo.

Seznáváme tudíž: Jednou kategorií přímkových ploch rozvinutelných na rotační jsou plochy vzniklé deformacemi orthogonálních ploch šroubových.

2). Budiž $\omega \geq \frac{\pi}{2}$. – Lineární element má

tvar (4).

Ve příčině těchto ploch užijme relace (3) str. 356, která dává nám, jestliže křivka striková jest křivkou geodetickou (věta Bonnetova) a jestliže geodetická torse jest pro křivku geodetickou rovna její torsi a její normální křivost její křivostí, vztah lineární $\frac{A}{\varrho} + \frac{B}{r} = \mathcal{C}$ mezi torsí a křivostí striková křivky uvažovaných ploch.

Jsou tedy křivky striková tohoto druhu ploch křivkami Bertrandovými. Uvažujme z nich specielně onu plochu, jejíž křivka striková jest rovinná. Pak z poslední relace plyne, že křivost této křivky jest konstantní, křivka jest kružnicí. Příslušná plocha vytvořena jest tedy přímkami svírajícími s pevnou kružnicí plochy stálý úhel, při čemž kružnice ta jest geodetickou křivkou plochy. Tuto vlastnost má však rotační hyperboloid mající kružnici za kružnici hrdelní. Poloměr této kružnice jest

$$\varrho = K \operatorname{cot} w.$$

Značíme-li tedy a, b poloosy hyperboly, jejíž rotací naše plocha vzniká, jest

$$a = \varrho, \quad b = a \operatorname{tg} w = \varrho \operatorname{tg} w = K,$$

tedy distribuční parametr rotačního hyperboloidu rovná se délce imaginární poloosy b, takže jeho lineární element dán jest výrazem

$$ds^2 = du^2 + [(u - bv \operatorname{cot} w)^2 + b^2]\, dv^2.$$

Seznáváme tedy dále:

Uvažované plochy druhého typu jsou plochy vzniklé deformací rotačního hyperboloidu. Jejich křivky strikční jsou křivky Bertrandovy.

Tím nabýváme věty Laguerre-ovy: Deformujeme-li rotační hyperboloid tak, že přímky zůstávají přímkami, přechází hrdelní kružnice v křivku Bertrandovu.

O plochách prvého typu platí pak (viz str. 322) věta: Plochy vzniklé deformací orthogonální plochy šroubové jsou plochy binormál křivek prostorových.

Šikmá sborcená plocha šroubová patří k plochám druhého typu, dá se tedy deformovati na rotační hyperboloid. Její křivkou strikční jest nejmenší šroubovice (skutečně křivka geodetická i křivka Bertrandova).

V. Hlavní poloměry křivosti.

174. Hlavní poloměry v bodě centrálném. – Je-li křivka strikční I' řídící křivkou plochy, jsou základní veličiny dána výrazy (viz odst. 171)

$$\mathcal{E}=1,\quad \mathcal{F}=\cos\mathcal{J},\quad \mathcal{G}=1+u^2\varphi'^2$$

$$\mathcal{L}=0,\quad \mathcal{M}=\frac{K\varphi'^2}{\Delta},$$

odkud pro míru křivosti plyne výraz

$$K=-\frac{K^2\varphi'^4}{(1+u^2\varphi'^2-\cos^2\mathcal{J})}$$

čili

$$K=\frac{-K^2}{\left(\frac{\sin^2\mathcal{J}}{\varphi'^2}+u^2\right)^2},$$

čili, ježto $\varphi'=\frac{\sin\mathcal{J}}{K}$ (str. 356),

$$K=\frac{-K^2}{(K^2+u^2)^2}\quad\ldots\quad(1),$$

čímž nabýváme vzorce Bonnetova (též se připisuje Lamarleovi).

Pro bod centrálný $u=0$ plyne odtud opět

$$K_0=-\frac{1}{K^2}.$$

Pro hlavní poloměry křivosti v bodě centrálním máme tedy:

$$R_1R_2=-K^2\quad\ldots\quad(2)$$

a dále (ježto proň jest $N=-\frac{\sin\theta}{\rho}$, – odst. 171)

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=H=\frac{\mathcal{E}N-2\mathcal{F}\mathcal{M}+\mathcal{G}\mathcal{L}}{\Delta^2}$$ dává dosazením

$$R_1+R_2=\frac{\sin\theta}{K^2\rho\sin^2\mathcal{J}}+\frac{2\sin\mathcal{J}\cos\mathcal{J}}{K^3}\quad\ldots(3).$$

Rovnice (2), (3) vedou nás ke dvěma výrazům tvaru:

$R_1 = f_1(\theta, \varphi, \vartheta)$, $R_2 = f_2(\theta, \varphi, \vartheta)$.

Vždyť jsme, že známe-li R_1, R_2 a známe-li jednu z veličin $\theta, \varphi, \vartheta$, možno druhé dvě vždy stanoviti. Tak známe-li na př. tečnu křivky striktční, můžem stanoviti oskulační rovinu a poloměr křivosti křivky té.

175. Oskulační hyperboloid. – K přímce povrchové p plochy zborcené myslíme si dvě povrchy sousední. Pak tyto tři přímky vždy určují určitou přímkovou plochu 2. stupně, náležící jednou ze soustav jejích povrchů. Plocha ta jest obecně hyperboloidem (vyjímku činí případ, kdy přímky ty jsou rovnoběžny k jedné rovině). Každá rovina protíná tento hyperboloid v křivce mající s příslušným řezem s plochou zborcenou tři sousedné body společné, čili oskulující jej (oskulací myšlen zde dotyk 2. řádu). Proto nazýváme náš hyperboloid H oskulačním hyperboloidem naší plochy zborcené podél přímky p. Přímky povrchové druhé soustavy hyperboloidu H jsou inflexními tečnami plochy, čili tečnami ke křivkám asymptotickým druhé soustavy.

Vyvodíme na základě předchozího konstrukci hyperboloidu H. Uvažujme plochu zborcenou libovolnými křivkami řídícími $k_\alpha, k_\beta, k_\gamma$, jež budiž povrchovou p prodány v bodech A, B, C, v nichž tečny křivek těch nechť jsou $t_\alpha, t_\beta, t_\gamma$. Známy křivosti křivek $k_\alpha, k_\beta, k_\gamma$ vedou nás určitým větám Meusnierovým ke středním křivosti i poloměrům $r_\alpha, r_\beta, r_\gamma$ nor-

málních řezů jakoukoli dečnami $t_\alpha, t_\beta, t_\gamma$.

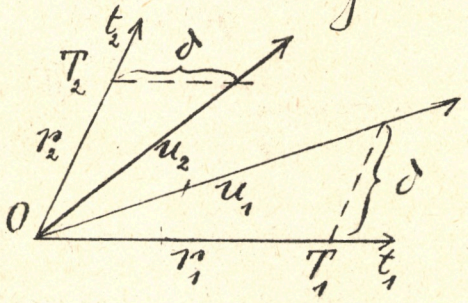
Jsou-li r_1, r_2 poloměry 2 sdružených normálních řezů a α úhel těchto, jest (viz str. 361)

$$r_1 r_2 \sin^2\alpha = R_1 R_2 = -\frac{(\kappa^2+u^2)^2}{\kappa^2} \quad \dots (4)$$

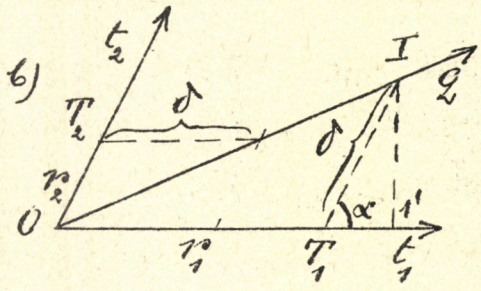
Budiž naší úlohou, sestrojiti v bodě A oblouku dečnou asymptotickou. Připomeňme si konstrukci, kterou jsme na základě dvou sdružených normálních řezů a jejich poloměrů křivosti r_1, r_2 sestrojili ke daném řezu řez sdružený: (Případ bodu hyperbol.)

(Konstrukce analogická ke konstr. na str. 353 dílu II.)

a)



b)



(Viz obr. a)). Odtud pro stopu Q řezu asymptotického (viz obr. b)) plyne

$$r_2 : \delta = \delta : r_1 \qquad \text{(uvažujeme pouze absol. hodnoty úseček)}$$

čili $$r_1 r_2 = \delta^2,$$

což vzhledem ku (4) dá

$$\delta^2 \sin^2\alpha = \frac{(\kappa^2+u^2)^2}{\kappa^2} = C^2, \quad \dots (5)$$

klademe-li

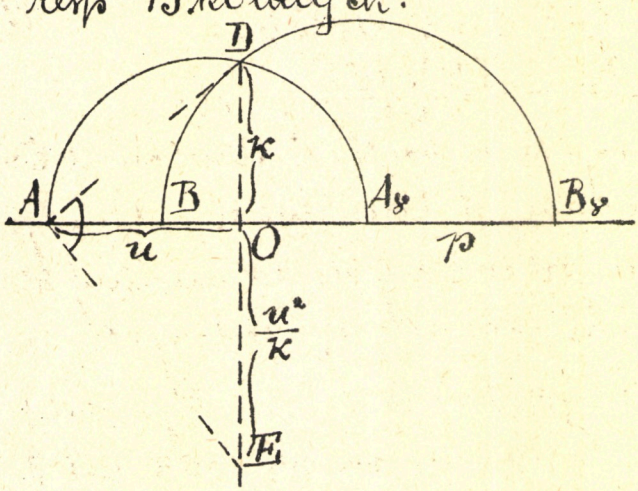
$$\overline{I1'} = \delta \sin\alpha - C.$$

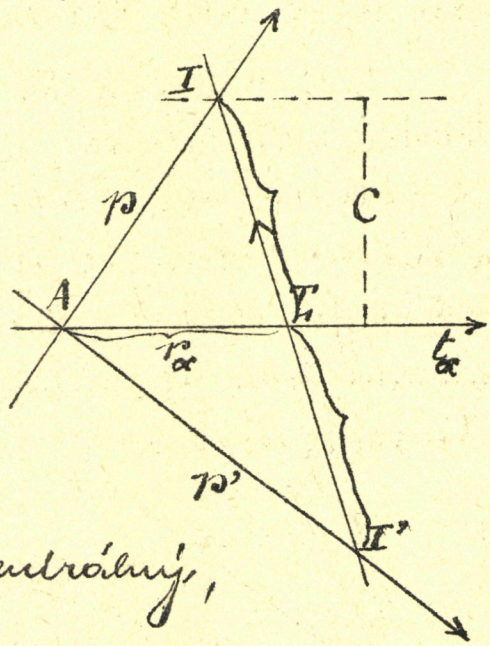
Jest tedy

$$C = \kappa + \frac{u^2}{\kappa} \quad \dots (5'),$$

kteroužto úsečku snadno sestrojíme: Povšku p položíme do nákresny a bodě A_y resp. B_y dotyčné

body tečných rovin, k tečným rovinám bodů A resp B kuželových.





Pak jest $DO = \kappa$, O bod centrální,
$DE = \kappa + \frac{u^2}{\kappa} = C$.

Sestrojíme-li pak (viz druhý obr.) na přímce p bod I ve vzdálenosti C od t_α a spojíme s T_1, máme tím sdružený směr ke t_α. A jelikož sdružené směry tvoří s asymptotickými harmonickou čtveřinu, stačí učiniti $IT_1 = T_1I'$, aby spojnice $AI' = p'$ určila nám druhou hledanou tečnou asymptotickou bodu A.

Totiž učiňme pro body B a C, čímž hledaný oskulační hyperboloid bude dostatečně stanoven.

Smysl úsečky AI může býti ovšem dvojí a pouze jeden vede nás správně k cíli. Záleží na tom, je-li plocha v okolí přímky p pravotočná nebo levotočná.

176. Důsledky a jiný postup. – Hodnota C v předchozím záleží pouze na u a κ. Dotýkají-li se však dvě plochy podél společné površky, mají na

ní společný distribuční parameter k, odkud plyne, že mají ve všech bodech přímky p společnou míru křivosti.

Pokud se pak týče přímky p' v předchozí konstrukci, vidíme, že její poloha závisí pak pouze ještě na r_α. Jsou-li tedy naše dvě plochy mají stejné r_α, mají též společnou druhou tečnu asymptotickou p'. Tím mají však ve 3 normálových řezech bodu A stejné poloměry křivosti $(\alpha, \alpha, r_\alpha)$, odkud ze známé věty plyne, že jest pak tomu tak pro všechny řezy; plochy se v bodě A oskulují.

Sexnáváme tedy větu:

„Dotýkají-li se dvě plochy přímkové podél společné povrsky p a můžeme-li na obou plochách bodem A přímky vésti křivky, které se oskulují v bodě tom, pak plochy ty se v bodě A vůbec oskulují."

A z toho vyplývá další konstrukce oskulačního hyperboloidu H k naší ploše sbrcené stanovené třemi křivkami. Abychom totiž stanovili druhou asymptotickou tečnu p' bodu A, sestrojme ke křivce k_α kružnici křivosti $\varkappa$ (stejně bylo by možno užíti kterékoli oskulační kuželosečky), čímž stanoven jest jeden hyperboloid dotýkající se naší plochy podél přímky p a oskulující ji v bodě A. Jeho druhá površka p' jdoucí bodem A jest přímkou hledanou. — Stejně pak pokračujeme pro body B a C, takže výsledný oskulační hyperboloid H bude pak opět dán třemi přímkami téže soustavy.

177. Rovnice pro hlavní poloměry a její aplikace.

– Jsou-li R_1, R_2 hlavní poloměry křivosti obecné plochy, jest jak známo

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = H = \frac{\mathcal{E}N - 2\mathcal{F}M + \mathcal{G}\mathcal{L}}{\Delta^2}$$

$$\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = K = \frac{\mathcal{L}N - M^2}{\Delta^2},$$

odkud plyne, že R_1, R_2 jsou kořeny kvadratické rovnice

$$(\mathcal{L}N - M^2)\varrho^2 - (\mathcal{E}N - 2\mathcal{F}M + \mathcal{G}\mathcal{L})\varrho + (\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2) = 0,$$

kterou po rozepsání a úpravě lze psáti též ve tvaru:

$$(M\varrho - \mathcal{F})^2 = (\mathcal{L}\varrho - \mathcal{E})(N\varrho - \mathcal{G}) \quad \ldots \quad (1)$$

Aplikujme tuto rovnici pro případ plochy přímkové a nechť budiž křivka řídící ortogonální trajektorií přímek povrchových. Pak platí totéž o všech křivkách $u = \text{konst}$ (plyne ze známé věty o křivkách geodetických na ploše), takže jest nejen $\mathcal{L} = 0$, ale též $\mathcal{F} = 0$, takže rovnice (1) nabývá tvaru

$$M^2\varrho^2 = -\mathcal{E}(N\varrho - \mathcal{G}) \quad \ldots \quad (2).$$

Odtud plyne, že vyskytne-li na ploše křivku

$$N = 0,$$

jest pro její body

$$R_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}{M} \quad \text{čili} \quad R_1 + R_2 = 0$$

t. j., jelikož $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = H = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$, křivka $N = 0$

jest místem bodů, v nichž střední křivost jest rovna nule. –

Poněvadž pak jest

$$\Delta \cdot N = -\,|\,f''+ul'',\ f'+ul',\ l\,|\,,$$

jest rovnice $N=0$ kvadratickou rovnicí v proměnné u, seznáváme větu:

„Na každé povrchové přímce sborcené plochy existují 2 body té vlastnosti, že střední křivost v nich rovná se nule".

Existují v této příčině ovšem případy speciální, z nichž některým věnujme pozornost.

a) Je-li

$$(3)\ldots\ |\,l''\ \ l'\ \ l\,| = 0\,,$$

jest $u=\infty$ jedním kořenem rovnice $N=0$, takže jeden z obou zmíněných bodů přímky povrchové padá do nekonečna a pouze jeden jest v konečnu. Jednou částí křivky $N=0$ jest zde tedy nekonečně vzdálená křivka plochy.

Geometrický význam podmínky (3) snadno seznáme. Víme totiž, že dána-li křivka rovnicemi

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t)\,,$$

jest vztah

$$|\,x'''\ \ x''\ \ x'\,| = 0$$

podmínkou pro to, aby křivka byla rovinnou.

Vzhledem k tomu značí podmínka (3), že existuje taková křivka rovinná, jejíž tečny jsou rovnoběžny k povrchovým přímkám plochy přímkové, t.j. plocha přímková má řídící rovinu, jest konoidem.

178. Stanoviti přímkové plochy minimální. —

6). Případem ještě specielnějším jest, jestliže rovnice $N=0$ jest splněna pro každé u, takže plocha jest plochou minimální. Stanovme takovéto plochy přímkové.

Píšeme-li zrovna $\Delta . N$ ve tvaru

$$\Delta . N = A + Bv + Cv^2,$$

musí v našem případě býti současně

$$A=0,\ B=0,\ C=0$$

pro všechna v. Podmínka $C=0$ čili $|l''\ l'\ l|=0$ praví nám vzhledem k předchozímu, že plocha jest konoidem.

Křivky asymptotické druhé soustavy dány jsou rovnicí $2M\,du + N\,dv = 0$ čili $du = -\frac{N\,dv}{2M}$ a ježto zde $N=0$, jsou to křivky parametrické $du=0$ t.j. orthogonální trajektorie přímek povrchových.

Řídící rovinu plochy zvolme za (xy), takže $n=0$ a podmínky $A=0$, $B=0$ možno psáti ve tvaru

$$(1)\ldots \begin{vmatrix} x'' & x' & l \\ y'' & y' & m \\ z'' & z' & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} l'' & x' & l \\ m'' & y' & m \\ 0 & z' & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x'' & l' & l \\ y'' & m' & m \\ z'' & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

druhá z nich dává

$$\frac{z''}{z'} = \frac{l''m - m''l}{l'm - m'l} = \frac{(l'm - m'l)'}{l'm - m'l}$$

čili integrací:

$$l'm - m'l = C z' \qquad (C = \text{konst}).$$

Položíme-li nyní $l = \cos\theta$, $m = \sin\theta$, máme

$$-\sin^2\theta \cdot \theta' - \cos^2\theta \cdot \theta' = C z', \text{ t.j. } \theta' = -C z',$$

odkud $\theta = -Cz + C_1$

čili, obočíme-li soustavu souřadnou v C_1,

$$\theta = -Cz \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Pravou z rovnic (1) možno psáti

$$\cos\theta\,(y''z' - z''y') + \sin\theta\,(z''x' - x''z') = 0 \quad \ldots (3)$$

Připojme k ní rovnici

$$lx' + my' + nz' = 0$$

čili $$\cos\theta \cdot x' + \sin\theta \cdot y' = 0, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

takže z obou plyne

$$(y''z' - z''y')y' + (x''z' - z''x')x' = 0$$

čili $$\underbrace{(x'x'' + y'y'')}_{-z'z''}z' - \underbrace{(x'^2 + y'^2)}_{1-z'^2}z'' = 0$$

čili, ježto $\underline{v}$ značí oblouk,

$$-z'^2z'' - (1 - z'^2)z'' = 0,$$

t.j. $$z'' = 0.$$

Odtud plyne

$$z' = a, \quad z = av + b$$

a posuneme-li soustavu souřadnou o $\underline{b}$, máme

$$z = av \quad \ldots (5)$$

a srovnáním s (2) máme

$$z = \frac{\theta}{\mathfrak{D}} = av.$$

Rovnice (4) dává pak

$$x'\cos a\mathfrak{D}v + y'\sin a\mathfrak{D}v = 0 \quad \ldots (4')$$

Dále jest $$x'^2 + y'^2 = 1 - a^2 \quad (\text{neboť } z' = a)$$

odkud vzhledem ku (4') plyne

$$y'^2(1 + \operatorname{tg}^2 a\mathfrak{D}v) = 1 - a^2,$$

$$y' = \sqrt{1-a^2}\cos a\mathfrak{D}v$$

neboť

$$y = \sqrt{1-a^2}\,\frac{\sin a\vartheta v}{a\vartheta} + k$$

$$x = \sqrt{1-a^2}\,\frac{\cos a\vartheta v}{a\vartheta} + k_1$$

$$z = av.$$

Řídící křivka naší plochy, která jest orthogonální trajektorií přímek povrchových, jest tedy kruhová šroubovice. Plocha má povšky rovnoběžné s rovinou xy a protínající onu šroubovou, jest to tedy orthogonální plocha šroubová. (ovšem zavřená).

Poznáváme tedy:

„Orthogonální plocha šroubová jest jedinou minimální plochou přímkovou".

Kapitola IX.

Kongruence přímek.

I. Základní úvahy.

179. Vyjádření a příklady kongruencí. — Prohlásíme-li kongruenci přímek plochou

(1) ... $x_0 = f(v, w)$, $y_0 = g(v, w)$, $z_0 = h(v, w)$,

možno, jak již uvedeno, pssáti bodové rovnice kongruence pssáti ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} x &= f(v, w) + u\, a(v, w) \\ y &= g(v, w) + u\, b(v, w) \\ z &= h(v, w) + u\, c(v, w) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

kde a, b, c jsou úměrny nebo rovny směr. cosinům přímek kongruence.

Plocha (1) nazývá se řídicí plochou kongruence. Může se však státi ve speciálním případě, že funkce f, g, h závisí pouze na jediném parametru, definují tedy křivku, jejímž každým bodem prochází nekonečně mnoho přímek kongruence, které tvoří kužel. Konečně funkce f, g, h mohou se redukovati na konstanty a kongruence přechází ve svazek přímkový.

Kongruence přímek jest jedním z případů kongru-

nce křivek vůbec. Ježí-li křivku stanovíme nejsnáze jako průsečnici dvou ploch, jest rovnicemi

$$f(x, y, z, a, b) = 0$$
$$g(x, y, z, a, b) = 0,$$

kde a, b jsou parametry, dána v nejobecnějším tvaru soustava ∞^2 křivek čili kongruence křivek, které jsou průsečnicemi ploch příslušných témuže parametrům a, b.

Přímka speciálně jest dána jako průsečnice dvou rovin, takže kongruence přímek dána jest obecně rovnicemi

$$Ax + By + Cz + D = 0$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

kde $A, \ldots D$, $A', \ldots D'$ jsou funkcemi dvou parametrů a, b. Obalují-li roviny každé z obou těchto soustav rovin plochu, jsou sečné roviny těchto ploch navzájem přiřazeny a průsečnice příslušných rovin jsou paprsky kongruence, čímž nabýváme dřívějšího případu k onomu, když jsme paprsky kongruence definovali jako spojnice příslušných bodů dvou ploch.

Pozn. Navrcholíme-li jedním nebo obě ze soustav rovin soustavou ∞^2 ploch kulových, nabýváme kongruence kružnic. Pro soustavu ∞^2 ploch kulových jest též obvyklý název kongruence ploch kulových a obdržíme ji obecně proníkem dvou komplexů ploch kulových. (Komplex tvoří na př. plochy kulové jdoucí pevným bodem nebo plochy kulové ortogonální ke kouli dané.)

180. Přímkové plochy v kongruenci. – Protíná-li paprsek p kongruence (2) řídicí plochu (1) v bodě M, vedme tímto nebo na ploše (1) libovolnou křivku k a uvažujme přímkovou plochu P paprsků kongruence, které protínají křivku k. Půjde nám o rovinu tečnou plochy P v libovolném bodě N přímky p.

Je-li $Ax+By+Cz+D=0$

rovnice této roviny tečné, musí být splněny vztahy

$$Af+Bg+Ch+D=0 \quad \text{(rovina obsahuje bod } M\text{)}$$
$$Aa+Bb+Cc=0 \quad \text{(obsahuje přímku } p\text{)},$$

konečně protíná-li tato rovina tečná přímku p_1 mají plochy přímkové, kterými p souměrnou, v bodě $N_1(x+dx,\dots)$ takže, odpovídají-li přechodu po křivce k přírůstky df, dg, dh, da, db, dc, jest splněna též rovnice

$$0 = S A(x+dx)+D = S A(f+ua+df+u\,da+a\,du)+D$$
$$= \underbrace{SAf+D}_{0} + u\underbrace{SAa}_{0} + SA\,df + u\,SA\,da + du\underbrace{SAa}_{0},$$

která vzhledem k předchozímu nabývá tvaru

$$A(df+u\,da)+B(dg+u\,db)+C(dh+u\,dc)=0.$$

Vyloučením A, B, C, D ze všech 4 rovnic obdržíme pro naši rovinu tečnou rovnici

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ f & g & h & 1 \\ a & b & c & 0 \\ df+u\,da & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-f, & y-g, & z-h & \\ a & b & c & \\ df & dg & dh & \end{vmatrix} + u \begin{vmatrix} x-f & \vdots & \vdots \\ a & \vdots & \vdots \\ da & & \end{vmatrix}$$

Dosadíme sem

$$df = dw\left(f_v + f_w \frac{dw}{dv}\right), \quad da = dw\left(a_v + a_w \frac{dw}{dv}\right),$$

načež rovnici naší roviny upravíme ve tvar

$$\left[|x-f,\ a,\ f_v| + u|x-f,\ a,\ a_v|\right] + \left[|x-f,\ a,\ f_w| + u|x-f,\ a,\ a_w|\right]\frac{dw}{dv} = 0 \quad \ldots(3)$$

Značí-li jednotlivé determinanty roviny P, Q, R, S, píšeme kratšeji

$$[P+uQ] + [R+uS]\frac{dw}{dv} = 0 \quad \ldots(3')$$

Sestrojíme-li nyní bodem M čtyři křivky $k_1 \ldots k_4$ a uvažujeme-li v bodě N roviny dotčné ke všem čtyřem uvedeným plochám, pak vidíme, z rovnice (3'), že dvojpoměr těchto 4 rovin roven se dvojpoměru příslušných hodnot $\left(\frac{dw}{dv}\right)_i$, $i = 1, \ldots 4$. Tak tomu jest pro každý bod N, takže dvojpoměr ten jest týž pro všechny body přímky p, můžeme jej tedy zváti dvojpoměrem naších 4 ploch přímkových.

Svazek přímkových ploch kongruence jdoucích paprskem p jest projektivní se svazkem jejich dotčných rovin v libovolném bodě přímky p.

181. Ohnisko paprsku kongruence. – Uvažovaný bod N byl bodem obecným, mají-li se vlastnosti, že roviny dotčné v něm k různým plochám paprskem p jdoucím byly různé. Přejme se, existují-li na paprsku dva body, pro něž by dotčné roviny ty splývaly. K otázce té přivádí nás okolnost, že dvě přímkové plochy o společné povrchu dotýkají se ve dvou jejich bodech. A z věty právě předchozí

již plyne, že v bodech těch dotýkají se pak všecky přímkové plochy jdoucí paprskem p.

Stanovení těchto bodů provedeme snadno též počtem. Musí-li rovnice roviny dotěcné v bodě o souřadnici u na přímce p býti nezávislou na $\frac{dw}{dw}$, musí tomu tak býti pro rovnici (viz str. 373)

$$A(df + u\,da) + B(dg + u\,db) + C(dh + u\,dc) = 0,$$

která tedy musí býti příslušnou hodnotou u splněna, když jest $\frac{du}{dw}$ jakékoli, takže musí býti současně

$$A(f_v + u\,a_v) + B(g_v + u\,b_v) + C(h_v + u\,c_v) = 0$$
$$A(f_w + u\,a_w) + B(g_w + u\,b_w) + C(h_w + u\,c_w) = 0.$$

Vyloučíme-li z těchto rovnic a z rovnice

$$Aa + Bb + Cc = 0$$

koefficienty A, B, C, dostáváme pro hledané u podmínku

$$(6) \ldots \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ f_v + u\,a_v & g_v + u\,b_v & h_v + u\,c_v \\ f_w + u\,a_w & g_w + u\,b_w & h_w + u\,c_w \end{vmatrix} = 0,$$

rovnici to kvadratickou, jejíž kořeny vedou nás ke dvěma bodům F_1, F_2 žádané vlastnosti. Body ty nazýváme <u>ohniska</u> paprsku p a jejich roviny dotěcné <u>rovinami ohniskovými</u>. Rovnici roviny ohniskové možno psáti ve tvaru

$$\begin{vmatrix} x - f & y - g & z - h \\ f_v + u\,a_v, & g_v + u\,b_v, & h_v + u\,c_v \\ f_w + u\,a_w, & g_w + u\,b_w, & h_w + u\,c_w \end{vmatrix} = 0 \ \ldots (4),$$

kam místo u z předchozí rovnice vypočtenou hodnotu u dosazovati.

182. Plocha ohnisková. – Uvažujme místo ohnisek paprsků kongruence, které skládá se ze dvou částí různých v okolí přímky p, pro kterou obecně jsou body F_1, F_2 různé. Uvažujme jednu z obou částí; může býti plochou, kterou nazýváme plochou ohniskovou, nebo křivkou, křivkou ohniskovou nebo může se redukovati na bod. Vyloučíme-li případ poslední (tu jde totiž o svazek paprsků), vidíme, že místo ohnisek může se skládati ze 2 ploch nebo z křivky a plochy nebo ze dvou křivek.

1) Budiž jedna z obou částí místa ohnisek plochou. Beřme tuto plochu za plochu řídící. Její rovina tečná v bodě (v, w) jest dána rovnicí

$$\begin{vmatrix} x-f, & y-g, & z-h \\ f_v & g_v & h_v \\ f_w & g_w & h_w \end{vmatrix} = 0,$$

avšak téhož tvaru nabývá rovnice (4) roviny ohniskové pro $u=0$. Odtud plyne:

Rovina ohnisková příslušná ohnisku F přímky p dotýká se v bodě F plochy ohniskové.

V bodě tom dotýkají se plochy ohniskové tedy též všecky přímkové plochy kongruence, paprskem p jdoucí.

Jsou-li obě části místa ohnisek plochami, dotýkají se tedy přímky kongruence obou těchto ploch. Ohniska jsou body dotyku a roviny ohniskové jsou tečnými rovinami ploch ohniskových v příslušných ohniskách, takže místo ohnisek a obálka rovin oh-

niskových spolu splývají.

Naopak jsou-li dány dvě plochy Φ_1, Φ_2 sestrojme v bodě F_1 plochy prvé rovinu tečnou, najděme její průsek $\varkappa$ s plochou Φ_2 a veďme z bodu F_1 tečny ke křivce $\varkappa$. Tím způsobem nabýváme ∞^2 společných tečen obou ploch, t.j. kongruence paprskové, jejímiž plochami ohniskovými jsou plochy dané. – Tvoří-li plochy Φ, Φ' dva pláště téže plochy, jak tomu jest obecně, jest kongruence tvořena dvojnými tečnami plochy té.

2). Budiž křivka k jednou částí místa ohnisek. Pak f, g, h nechť náleží bodům křivky, závisíce pouze na jednom parametru. Jest tedy na př. $f_w = g_w = h_w = 0$ a jedním kořenem rovnice (o) (str. 375) jest $u = 0$. Vidíme tedy, že protínají-li všecky paprsky kongruence pevnou křivku, jsou body této křivky ohnisky paprsků jimi jdoucích.

Vyhledejme příslušnou rovinu ohniskovou. Vztahy příslušné (str. 375) nabývají zde tvaru

$$Aa + Bb + Cc = 0$$

$$A f_v + B g_v + C h_v = 0$$

takže rovina ohnisková žádaná má rovnici

$$|x - f, a, f_v| = 0.$$

Jest to tedy rovina jdoucí přímkou p a tečná ke křivce fokální. Všecky přímkové plochy kongruence procházejí zde křivkou k a v každém jejím bodě dotýkají se její roviny tečné jdoucí příslušným paprskem kongruence.

§ III. 48.

V případě jedné plochy pokolní Φ a jedné křivky pokolní k paprsky protínají k a dotýkají se Φ. Z předchozího plyne jejich ohnisko.

Dále mějme případ dvou křivek pokolních k, k'. Kongruence jest tvořena jejich společnými sečnami. Jestliže obě křivky splynou, jsou paprsky kongruence dvojnými sečnami křivky.

183. Případ splynutí ohnisek. — 1) Uvažujme nejprve případ ploch ohniskových a tažme se, kdy obě ohniska každého paprsku splynou. Splynutím obou ohniskových ploch vznikne plocha Φ kterou za plochu říditelnou. V každém bodě plochy dotýká se jí jedna přímka kongruence, takže možno na ploše nalézti soustavu křivek obalených paprsky kongruence:

Směr. cosiny a, b, c tečny naší plochy (o parametrech v, w) dány jsou výrazy

$$a = \lambda f_v + \mu f_w, \quad b = \lambda g_v + \mu g_w, \quad c = \lambda h_v + \mu h_w$$

a jelikož přírůstky souřadnic x, y, z bodů hledané křivky:

$$dx = f_v dv + f_w dw, \quad \dots$$

jsou úměrny směr. cosinům její tečny, jest

$$\frac{dv}{\lambda} = \frac{dw}{\mu}.$$

Abychom tedy stanovili rovnici $\varphi(v, w, C) = \alpha$ hledané soustavy křivek, musíme integrovati dif. rovnici 1. řádu. — Zavedme hledané křivky za křivky parametrické, na př. $w = \text{konst.}$ Pak jest

.....

$$a = \varrho f_v,\ b = \varrho g_v,\ c = \varrho h_v \ldots (1^r)$$

Rovnice (o) pro souřadnice ohnisek má zde tvar

$$u\,|\,a,\ a_v,\ f_w + u\,a_w\,| = 0,$$

tedy jeden její kořen jest $u_1 = 0$, kdežto druhý jest dán rovnicí

$$|\,a,\ a_v,\ f_w\,| + u_2\,|\,a,\ a_v,\ a_w\,| = 0$$

má-li též $u_2 = 0$, musí

$$|\,a,\ a_v,\ f_w\,| = 0$$

čili, vzhledem ku (1r),

$$|\,f_v,\ f_w,\ f_{vv}\,| = 0$$

nebo, píšeme-li $x, \ldots$ místo $f, \ldots$,

$$|\,x_{vv},\ x_v,\ x_w\,| = 0$$

t. j. (nahradíme-li v/u, w/v)

$$\mathcal{L} = 0,$$

což nám praví, že naše křivky w = konst jsou asymptotickými křivkami plochy Φ.

Kongruence o dvojné ploše ohniskové jest tedy dána tečnami asymptotických křivek plochy.

2) Kongruence mějž dvě křivky fokální, jež splývají. Křivku tuto k učiňme křivkou řídící. Může mi tedy předpokládati, že funkce f, g, h nezávisí na w. Rovnice (o), majíc míti dvojný kořen $u = 0$, vede k podmínce

$$|\,a\ \ f_v\ \ a_w\,| = 0.$$

Nyní paprsky kongruence jdoucí bodem F křivky k tvoří kužel a jeho rovina tečna (obsahujíc přímku $a, \ldots$ i souměrnou přímku $a + a_w\,dw, \ldots$) má normálu o směr. cosinech daných minory matice

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ a_w & b_w & c_w \end{matrix} \right\|$$

takže poslední rovnice praví, že tečna Ft ($\rho f_v, \ldots$) křivky K leží v této rovině tečné našeho kužele. Poněvadž má tomu tak býti pro všecky površky kužele toho, kužel ten redukuje se na rovinu. Tedy:

Kongruence o dvojné křivce fokální jest vytvořena přímkami, které jsou pro každý bod F křivky obsaženy v rovině jdoucí tečnou křivky.

Zde obálka rovin ohniskových nesplývá s místem bodů ohniskových, jsouc libovolnou plochou rozvinutelnou, na které křivka K leží.

184. Rozvinutelné plochy v kongruenci. – Představa paprsků kongruence jako tečen ku plochám ohniskovým vede nás k otázce po rozvinutelných plochách v kongruenci obsažených. – Obecnou plochu přímkovou v kongruenci (2) obsaženou vytkneme rovnicí $\omega(v, w) = 0$. Má-li plocha ta býti rozvinutelnou, musí (viz plochy přímk.)

$$|a \quad da \quad df| = 0$$

čili

$$|a, \; a_v dv + a_w dw, \; f_v dv + f_w dw| = 0 \quad \ldots (5)$$

což jest dif. rovnice vyjadřující, že paprsek p vytvořuje plochu rozvinutelnou. Jest tvaru

$$A\, dv^2 + B\, dv\, dw + C\, dw^2 = 0,$$

dává nám tedy 2 hodnoty $\frac{dv}{dw}$: $\left(\frac{dv}{dw}\right)_{1,2} = \varphi_{1,2}(v, w)$, takže, seznáváme:

V kongruenci obsaženy jsou 2 soustavy ploch rozvinutelných, takže každým paprskem procházejí dvě plochy rozvinutelné.

Půjde nám o dotyčné body paprsku, t. j. s oběma hranami vratu. Pro takový bod jest (klademe-li $\frac{dx}{a} = d\varrho$)

$$dx = a\,d\varrho = df + u\,da + a\,du$$

čili, položíme-li $du - d\varrho = d\sigma$,

$$df + u\,da + a\,d\sigma = 0$$

čili

$$(f_v + u a_v)\,dv + (f_w + u a_w)\,dw + a\,d\sigma = 0$$

takže vyloučením dv, dw, $d\sigma$ dostáváme pro určení souřadnice u bodu dotyčného touž rovnici jako pro ohniska. Seznáváme tedy:

Hrany vratu rozvinutelných ploch v kongruenci leží na ploše ohniskové.

Je-li jednou částí místa ohnisk plocha Φ, bereme ji za plochu řídící. Každým bodem plochy prochází jeden paprsek kongruence a na ploše existuje soustava křivek obalených paprsky kongruence. Bereme tuto soustavu za křivky $w = \text{konst}$, takže $a = \varrho f_v, \ldots$ a podmínka (5) rozvinutelnosti příslušných ploch přímkových nabývá tvaru

$$|f_v,\ f_{vv}\,dv + f_{vw}\,dw,\ f_w|\,dw = 0$$

Jedna soustava jest tedy $dw = 0$, jak bylo předpokládáno; pro druhou soustavu křivek na ploše vedoucích k plochám rozvinutelným máme pak dif. rovnici

$$|f_{vv}\, f_v\, f_w|\, dv + |f_{vw}\, f_v\, f_w|\, dw = 0$$

čili, násobíme-li $\frac{1}{\Delta}$, rovnici

$$\mathcal{L}\, dv + \mathcal{M}\, dw = 0$$

Povážíme-li pak, že křivky $d_1 v, d_1 w$; $d_2 v, d_2 w$ jsou spolu sdruženy, platí-li

$$\mathcal{L}\, d_1 v\, d_2 v + \mathcal{M}(d_1 v\, d_2 w + d_2 v\, d_1 w) + \mathcal{N}\, d_1 w\, d_2 w = 0,$$

seznáváme že obě soustavy křivek na ploše Φ vedoucí k plochám rozvinutelným jsou spolu sdruženy.

Stačí připomenouti si větu známou z theorie ploch, že opíšeme-li ploše P podél křivky c plochu rozvinutelnou, mají površky rozvinutelné plochy směry sdružené k tečnám křivky c plochy P, abychom si utvořili jasný obraz kongruence o ohniskových plochách Φ, Φ':

Na ploše Φ existuje soustava křivek (c) takových, že roviny tečné podél nich tvoří plochy rozvinutelné v kongruenci, jejichž hrany vratu (c') leží na ploše Φ'. Roviny tečné podél křivek (c') tvoří naopak plochy rozvinutelné, jejichž hrany vratu (c_1) leží na Φ a jsou sdruženy k soustavě (c), určujíce zase svými tečnými rovinami hrany vratu (c_1') na Φ', sdružené ku (c') a vedoucí naopak svými tečnými rovinami ke hranám vratu (c) na ploše Φ. Existují tedy na plochách Φ, Φ' dvojice sdružených soustav vázaných navzájem paprsky kongruence.*)

Uvažujme nyní případ, kdy částí místa ohnisek jest křivka K. Beřme ji za křivku řídící, takže jest $f_w = \ldots = 0$ a rovnice (5) dává

*) Budiž zdůrazněno, že rovina ohnisková prvá (oskul. rovina křivky (c_1)) dotýká se druhé plochy ohniskové Φ' v ohnisku F', nikoli však prvé plochy Φ v ohnisku F. ./.

$$|a,\ a_v dv + a_w dw,\ f_v| dv = 0 .$$

Tedy soustava ploch rozvinutelných jest tedy dána rovnicí $v = \text{konst}$; jsou to kužele o vrcholech na křivce K.

II. Vzorce pro kongruenci.

185. Paprsek soumezný k danému. – Kongruence budiž vyjádřena rovnicemi

$$\xi = x(v,w) + u\,X(v,w), \ldots \qquad (1),$$

kde X, Y, Z buďte na př. přímo směr. cosiny, takže

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 .$$

Uvažujme paprsek soumezný danému paprsku p a uvažujme osu, dp, obou těchto přímek. Vzhledem ke známým vzorcům jest

$$dp = \frac{1}{d\varphi} \left| dx \ \underline{X} \ dX \right| ,$$

značí-li $d\varphi$ úhel obou paprsků. Pro cosiny směrné l, m, n osy dp jest

$$l = \frac{Y dZ - Z dY}{d\varphi}, \ldots$$

Vyčíslením determinantu pro dp máme tedy

$$dp = \frac{S\,dx\,(Y dZ - Z dY)}{d\varphi} \quad \text{čili}$$

$$dp = l\,dx + m\,dy + n\,dz \quad \ldots (2)$$

Pro vzdálenost r paty osy dp od plochy řídící, tedy souřadnici u bodu toho jest

$$r = -\frac{S\,dX\,dx}{d\varphi^2} .$$

---

1. Příč tak ohnisková rovina druhá, obkul. to rovina křivky (c'), dotýká u tvoří plochy ohniskové Φ v ohnisku F paprsku p, u nikoli plochy Φ'

Zobrazme naši kongruenci na jednotkovou plochu kulovou. Přihlížíme-li též k orientaci paprsků, odpovídá každému paprsku jeden bod plochy kulové jako sférický obraz a sférickým obrazem celé kongruence bude obecně jistá část plochy kulové. (Výjimku činí případ t. zv. kongruence cylindrické, jež má v nekonečnu křivku ohniskovou a jejíž sférickým obrazem jest křivka.) Pak jsou X, Y, Z souřadnice bodu plochy kulové, $d\varphi$ el. oblouku sfér. obrazu plochy přímkové procházející našimi dvěma paprsky souměrnými takže

$$d\varphi^2 = S\,dX^2 = \bar{\mathcal{E}}\,dv^2 + 2\bar{\mathcal{F}}\,dv\,dw + \bar{\mathcal{G}}\,dw^2,$$

značí-li

$$\bar{\mathcal{E}} = S X_v^2, \quad \bar{\mathcal{F}} = S X_v X_w, \quad \bar{\mathcal{G}} = S X_w^2$$

základní veličiny 1. řádu vzhledem ku ploše kulové.

Pro výraz $S\,dX\,dx$ máme obdobně

$$S\,dX\,dx = S X_v x_v\,dv^2 + S(X_v x_w + X_w x_v)\,dv\,dw + S X_w x_w\,dw^2.$$

Zavedeme-li tedy základní veličiny:

$$\mathcal{L} = -S X_v x_v, \quad \mathcal{M}_1 = -S X_v x_w, \quad \mathcal{M}_2 = -S X_w x_v, \quad \mathcal{N} = -S X_w x_w$$

máme

$$-S\,dX\,dx = \mathcal{L}\,dv^2 + (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)\,dv\,dw + \mathcal{N}\,dw^2,$$

takže pro r dostáváme výraz

$$r = \frac{\mathcal{L}\,dv^2 + (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)\,dv\,dw + \mathcal{N}\,dw^2}{\bar{\mathcal{E}}\,dv^2 + 2\bar{\mathcal{F}}\,dv\,dw + \bar{\mathcal{G}}\,dw^2} \quad \ldots\ldots (3)$$

Nutno ještě upraviti výraz pro $d\varphi$; X, Y, Z jsou též směr. cosiny pro normálu plochy kulové, takže že

známých vzorců z theorie ploch plyne

$$X = \frac{Y_v Z_w - Z_v Y_w}{\Delta} \qquad \text{kde} \quad \bar{\Delta}^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2$$

Jest snadno po dosazení a úpravě:

$$Y Z_v - Z Y_v = \frac{\bar{E} X_w - \bar{F} X_v}{\bar{\Delta}}$$

$$\cdots\cdots$$

a obdobně

$$Y Z_w - Z Y_w = \frac{\bar{F} X_w - \bar{G} X_v}{\bar{\Delta}},$$

takže nejprve

$$l = \frac{(\bar{E} X_w - \bar{F} X_v)\,dw + (\bar{F} X_w - \bar{G} X_v)\,dw}{\sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}\,\sqrt{\bar{E}\,dw^2 + 2\bar{F}\,dw\,dw + G\,dw^2}}, \quad \cdots (4)$$

a odtud dosazením do (2):

$$dp = \frac{1}{d\varphi\sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}}\, S\big[(\bar{E} X_w - \bar{F} X_v)\,dw + (\bar{F} X_w - \bar{G} X_v)\,dw\big] \cdot (X_v\,dw + X_w\,dw)$$

načež provedením a úpravou plyne

$$dp = \frac{1}{d\varphi\sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}} \begin{vmatrix} L\,dw + M_1\,dw & M_2\,dw + N\,dw \\ \bar{E}\,dw + \bar{F}\,dw & \bar{F}\,dw + \bar{G}\,dw \end{vmatrix} \quad \cdots (5).$$

Jako application odvozeného vzorce stanovme sdružené paprsky, které daný paprsek prodírají.

Pro tyto jest $dp = 0$, takže rovnice

$$\begin{vmatrix} L\,dw + M_1\,dw, & M_2\,dw + N\,dw \\ \bar{E}\,dw + \bar{F}\,dw, & \bar{F}\,dw + \bar{G}\,dw \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots (6)$$

jest differenciální rovnicí obou soustav křivek na ploše řídící, které vedou k rozvinutelným plochám v kongruenci.

Vzhledem k těmto možno pro směry křivek těch psáti

$$L\,dw + M_1\,dw = \varrho\,(\bar{E}\,dw + \bar{F}\,dw),$$

$$M_2\,dv + N\,dw = \varrho(\bar{F}\,dv + \bar{G}\,dw),$$

takže píšeme-li výraz pro r (viz (3)) ve tvaru

$$(3')\ldots\ r = \frac{(L\,dv + M_1\,dw)\,dv + (M_2\,dv + N\,dw)\,dw}{(\bar{E}\,dv + \bar{F}\,dw)\,dv + (\bar{F}\,dv + \bar{G}\,dw)\,dw},$$

máme $r = \varrho$,

načež vyloučením dv, dw z posledních obou rovnic plyne, že souřadnice ϱ_1, ϱ_2 obou ohniseků paprsku p jsou kořeny rovnice

$$\begin{vmatrix} L - \varrho\bar{E}, & M_1 - \varrho\bar{F} \\ M_2 - \varrho\bar{F}, & N - \varrho\bar{G} \end{vmatrix} = 0$$

čili rovnice

$$(4)\ldots\ \varrho^2(\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2) - \varrho[L\bar{G} + N\bar{E} - (M_1 + M_2)\bar{F}] + LN - M_1M_2 = 0$$

186. Body hlavní. — Stanovme dále t. zv. hlavní body paprsku p, pro které vzdálenosti r_1 resp. r_2 jsou extremními hodnotami souřadnice r, takže body ty jsou koncovými body úsečky, na které leží centrální body průmětných ploch, paprskem p v kongruenci jdoucích.

Z rovnic (3) nabýváme derivací dle v resp. w rovnic

$$(7)\ldots\begin{cases} (\bar{E}\,dv + \bar{F}\,dw)\,r - \left[L\,dv + \dfrac{M_1 + M_2}{2}\,dw\right] = 0 \\ (\bar{F}\,dv + \bar{G}\,dw)\,r - \left[\dfrac{M_1 + M_2}{2}\,dv + N\,dw\right] = 0, \end{cases}$$

pro extremní hodnoty souřadnice r a příslušné míry dv, dw plochových.

Vyloučením dv, dw z těchto rovnic nabýváme rovnice

$$\begin{vmatrix} \bar{E}r - L, & \bar{F}r - \dfrac{M_1 + M_2}{2} \\ \bar{F}r - \dfrac{M_1 + M_2}{2}, & \bar{G}r - N \end{vmatrix} = 0$$

čili rovnice

$$(8)\ldots r^2(\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2)-[\mathcal{L}\bar{G}+\mathcal{N}\bar{E}-(M_1+M_2)\bar{F}]r+\mathcal{L}\mathcal{N}-\left(\frac{M_1+M_2}{2}\right)^2=0$$

Srovnáním této rovnice s rovnicí (7) pro souřadnice ohnisek plyne, že

$$\frac{r_1+r_2}{2}=\frac{\varrho_1+\varrho_2}{2}\quad, \text{ t. j.}$$

vzdálenost bodů hlavních H_1, H_2 jest půlena týmž bodem S jako vzdálenost ohnisek F_1, F_2. Bod S nazýváme <u>středem</u> paprsku p.

Křivky vedoucí svými soumeznými body k přímkám jejichž osy s paprskem p dávají hlavní body tohoto paprsku, nazýváme <u>křivky hlavní</u>. Z rovnic (1) plyne differenciální rovnice těchto dvou soustav křivek plochy řídící ve tvaru

$$\begin{vmatrix} \bar{E}\,dv+\bar{F}\,dw, & \mathcal{L}\,dv+\frac{M_1+M_2}{2}\,dw \\ \bar{F}\,dv+\bar{G}\,dw, & \frac{M_1+M_2}{2}\,dv+\mathcal{N}\,dv \end{vmatrix}=0\ \ldots(9).$$

<u>187. Křivky hlavní jako parametrické.</u> — Rovnice (9) dá se psáti též ve tvaru

$$\left(\frac{M_1+M_2}{2}\bar{E}-\mathcal{L}\bar{F}\right)dv^2+(\bar{E}\mathcal{N}-\mathcal{L}\bar{G})\,dv\,dw+$$
$$+\left(\bar{F}\mathcal{N}-\bar{G}\,\frac{M_1+M_2}{2}\right)dw^2=0,\ \ldots(9)$$

takže, mají-li křivky hlavní býti křivkami parametrickými $dv=0$, $dw=0$, musí býti současně

$$\frac{M_1+M_2}{2}\bar{E}-\mathcal{L}\bar{F}=0$$
$$\frac{M_1+M_2}{2}\bar{G}-\mathcal{N}\bar{F}=0.$$

Předpokládejme při tom nejprve, že determinant soustavy těchto dvou rovnic jest různý od nuly:

a) $\underline{\bar{E}N - \bar{L}\bar{G} \neq 0}$,

což jest nutno, nemá-li rovnice (9') býti identitou.

Pak mohou poslední dvě rovnice býti splněny jen tak, že jest současně

$$\bar{F} = 0, \quad \frac{M_1 + M_2}{2} = 0.$$

Seznáváme tudíž: Dvě soustavy křivek hlavních odpovídají jen tehdy, je-li $\bar{E}N - \bar{L}\bar{G} \neq 0$. Zvolíme-li je v tomto případě za křivky parametrické, jest současně $\bar{F} = 0$, $M_1 + M_2 = 0$. – Odtud plyne, že sférické obrazy křivek hlavních jsou dvě navzájem kolmé soustavy křivek.

Za předpokladu a) zvolme tedy křivky hlavní za křivky parametrické. Pak výraz pro ϱ nabývá tvaru

$$(3'')\ldots \quad \varrho = \frac{\bar{L}\,dv^2 + \bar{N}\,du^2}{\bar{E}\,dv^2 + \bar{G}\,du^2},$$

odkud pro $du = 0$ resp $dv = 0$ odvozujeme pro vzdálenosti r_1 resp r_2 bodů hlavních výrazy

$$r_2 = \frac{N}{\bar{G}}, \quad r_1 = \frac{L}{\bar{E}} \quad \ldots (10).$$

Za téhož předpokladu stanovme nyní směr. cosiny l_1, m_1, n_1 a l_2, m_2, n_2 os v bodech hlavních. Pro $du = 0$ resp. $dv = 0$ plyne

$$l_1 = \frac{x_u}{\sqrt{\bar{E}}}, \ldots ; \quad l_2 = -\frac{x_v}{\sqrt{\bar{E}}}, \ldots,$$

takže $S\, l_1 l_2 = -\frac{1}{\sqrt{\bar{E}\bar{G}}}\,\bar{F} = 0$. Tím seznáváme:

Osy sestrojené v hlavních bodech paprsku p jsou navzájem kolmé. – Roviny položené paprskem p a těmito osami nazýváme rovinami hlavními paprsku p, takže též hlavní roviny jsou navzájem kolmé.

Značí-li nyní w úhel, který svírá osa dp paprsku (v, w) a paprsku $(v+dv, w+dw)$ s osou v prvním bodě hlavním ($dw = 0$), jest

$$\cos w = ll_1 + mm_1 + nn_1,$$

odkud plyne po dosazení

$$\cos^2 w = \frac{\bar{E}\,dv^2}{\bar{E}\,dv^2 + \bar{G}\,dw^2}, \quad \sin^2 w = \frac{\bar{G}\,dw^2}{\bar{E}\,dv^2 + \bar{G}\,dw^2},$$

načež výraz (3″) dává nám

<u>relaci Hamiltonovu</u>

$$r = r_1 \cos^2 w + r_2 \sin^2 w \quad \ldots\ldots (11).$$

<u>Pozn.</u> Budiž $2d$ vzdálenost bodů hlavních a 2δ vzdálenost ohnisek. Pak lze snadno dokázati, že v reálném případě jest vždy $d > \delta$, takže ohniska leží na úsečce omezené body hlavními. Jest totiž

$$(r_2 - r_1)^2 - (\varrho_2 - \varrho_1)^2 = (r_2 + r_1)^2 - 4r_1 r_2 - (\varrho_2 + \varrho_1)^2 + 4\varrho_1\varrho_2 =$$
$$4(d^2 - \delta^2) \qquad = 4(\varrho_1\varrho_2 - r_1 r_2),$$

takže z rovnic (7), (8) plyne

$$d^2 - \delta^2 = \frac{\mathfrak{L}\mathfrak{N} - M_1 M_2}{\Delta^2} - \frac{\mathfrak{L}\mathfrak{N} - \left(\frac{M_1 + M_2}{2}\right)^2}{\Delta^2} = \frac{(M_1 - M_2)^2}{4\Delta^2},$$

hodnota to stále kladná, takže skutečně $d > \delta$.

– Porovnáme-li vzorce zde odvozené pro r, r_1, r_2 se vzorci pro poloměry normálního řezu a obou hlavních

řezů na obecné ploše, seznáváme značnou analogii, v níž hlavní body paprsku zastupují hlavní středy křivosti bodu plochy.

188. Plocha střední jako řídící. – Pro jednoduchost volme plochu střední, t. j. místo středových bodů S paprsků kongruence za plochu řídící. Podržíme-li značky d, δ, ω v témž významu jako v předchozím, jest zde

$$r_1 = d, \quad r_2 = -d, \quad \varrho_1 = \delta, \quad \varrho_2 = -\delta \quad \dots (12)$$

a Hamiltonova relace zní

$$r = d \cos 2\omega \quad \dots (13).$$

Též při ohniskách můžeme mluviti o směru osy, neboť tato nerovná se přímo nule, nýbrž jest nekonečně malou řádu 2.; směr osy jest zde kolmý k rovině ohniskové. Jsou-li tedy ω_1, ω_2 úhly odpovídající ohniskům, jest

$$\frac{\delta}{d} = \cos 2\omega_1, \quad -\frac{\delta}{d} = \cos 2\omega_2 \quad \dots (14),$$

odkud plyne, že úhly rovin ohniskových jsou rovinami hlavními půleny a že úhel Ω rovin ohniskových dán jest vztahem

$$\sin \Omega = \frac{\delta}{d} \quad \dots (15).$$

189. Výjimečný případ. – Uvažujme nyní druhý případ (viz str. 388), že b) $\bar{E}N - L\bar{G} = 0$.

Pak jest $\bar{E} : \bar{G} = \mathcal{L} : \mathcal{N}$

a srovnáním s příslušnými dvěma rovnicemi plyne:

$$\bar{E} : \bar{F} : \bar{G} = \mathcal{L} : \frac{M_1 + M_2}{2} : \mathcal{N}.$$

Klademe-li pak $\mathcal{L} = \alpha \bar{E}, \ldots,$ dostáváme z výrazu (3) pro r: $r = \alpha$.

Kongruence tohoto druhu, zvané isotropickými (Ribaucour), mají tedy tu vlastnost, že paty všech nejkratších vzdáleností paprsku pode všech sousedních splývají v jediném bodě.

III. Jiný způsob vyjádření.

190. Užití směr. cosinů. – Vycházejíce z vyjádření

$$\xi = x + u X, \quad \ldots \quad \ldots (1)$$

kongruence, můžeme bráti souřadnice x, y, z za funkce směr. cosinů X, Y, Z, které jsou vázány vztahem

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Značí-li pak $d\varphi$ opět úhel dvou sousezených paprsků, takže $d\varphi^2 = S\, dX^2$, kladme

$$\frac{dX}{d\varphi} = X', \quad \frac{dY}{d\varphi} = Y', \quad \frac{dZ}{d\varphi} = Z',$$

načež hodnoty X', Y', Z', vázané vztahem

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 1,$$

značí jak známo směr. cosiny přímky kolmé k centrálné rovině přímkové plochy našimi dvěma sousezným paprsky jdoucí.

Známý výraz pro vzdálenost paty nejkratší vzdále-

nosti obou souměrných paprsků (od bodu x, y, z)

$$r = -\frac{S\,dX\,dx}{d\varphi^2}$$

nabývá pak tvaru:

$$r = -\frac{S\,dX\left(\frac{\partial x}{\partial X}dX + \frac{\partial x}{\partial Y}dY + \frac{\partial x}{\partial Z}dZ\right)}{d\varphi^2}$$

čili

$$-r = \frac{\partial x}{\partial X}X'^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial y}{\partial X}\right)X'Y' + \dots \qquad \dots (2)$$

Hledejme nyní maximum a minimum tohoto výrazu, mění-li se X', Y', Z', kteréžto proměnné vázány jsou vztahy

$$S\,X'^2 = 1, \qquad S\,XX' = 0 \quad \dots (3).$$

Za tím účelem kladme derivace výrazu:

$$\frac{1}{2}\left[-r + \rho(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) + \sigma(XX' + YY' + ZZ')\right]$$

rovny nule, t.j.:

$$(4)\begin{cases} X'\left(\rho + \frac{\partial x}{\partial X}\right) + \frac{1}{2}Y'\left(\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial y}{\partial X}\right) + \frac{1}{2}Z'\left(\frac{\partial x}{\partial Z} + \frac{\partial z}{\partial X}\right) + \frac{1}{2}\sigma X = 0 \\ \frac{1}{2}X'\left(\frac{\partial y}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial Y}\right) + Y'\left(\rho + \frac{\partial y}{\partial Y}\right) + \frac{1}{2}Z'\left(\frac{\partial y}{\partial Z} + \frac{\partial z}{\partial Y}\right) + \frac{1}{2}\sigma Y = 0 \\ \frac{1}{2}X'\left(\frac{\partial z}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial Z}\right) + \frac{1}{2}Y'\left(\frac{\partial y}{\partial Z} + \frac{\partial z}{\partial Y}\right) + Z'\left(\rho + \frac{\partial z}{\partial Z}\right) + \frac{1}{2}\sigma Z = 0 \end{cases}$$

Násobíme-li prvou z těchto rovnic X', atd. a sečteme, obdržíme, vzhledem ku (2), (3), $\rho = +r$, takže rovnice

$$(5)\dots \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} + r, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial y}{\partial X}\right), & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial Z} + \frac{\partial z}{\partial X}\right), & X \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial Y}\right), & \frac{\partial y}{\partial Y} + r, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial Z} + \frac{\partial z}{\partial Y}\right), & Y \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial Z}\right), & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial Y} + \frac{\partial y}{\partial Z}\right), & \frac{\partial z}{\partial Z} + r, & Z \\ X, & Y, & Z, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

určuje nám dvě hodnoty r_1, r_2, které stanoví body hlavní.

191. Speciální souřadnice. – Pro zjednodušení volme nyní paprsek p za osu x, bod střelový za počátek O a roviny hlavní za roviny xz, yz. Pak jest

$$X=Y=0,\quad Z=1,$$

načež (z $SXX'=0$) jest $Z'=0$ a dále

$$X'^2+Y'^2=1.$$

Při tom jest $r'_{1,2}=\pm a$, takže první dvě z rovnic (4) nabývají tvaru

$$X'\left(\frac{\partial x}{\partial X}\pm a\right)+\frac{1}{2}Y'\left(\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial y}{\partial X}\right)=0$$

$$\frac{1}{2}X'\left(\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial y}{\partial X}\right)+Y'\left(\frac{\partial y}{\partial Y}\pm a\right)=0.$$

Při tom jsou X', Y', Z' směr. cosiny rovin hlavních. A jelikož tyto roviny jsou nyní souřadnicovými, musí poslední rovnice býti splněny pro $X'=0, Y'=1$ a pro $X'=1, Y'=0$, což dává

$$\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial y}{\partial X}=0,\quad \frac{\partial x}{\partial X}=\pm a,\quad \frac{\partial y}{\partial Y}=\pm a.$$

Rovnice (5) nabývá tvaru

$$r'^2+r'\left(\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial y}{\partial Y}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial y}{\partial X}\right)^2+\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y}=0,$$

při čemž její kořeny musí býti stejné což na znaménko takže musí též $\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial y}{\partial Y}=0$; pak jest $r'_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y}}$

Možno tedy klásti

$$\frac{\partial x}{\partial X}=-\frac{\partial y}{\partial Y}=a,\quad \frac{\partial x}{\partial Y}=-\frac{\partial y}{\partial X}=g \quad \dots (6).$$

192. Souvislost s ohniskou. – Nejkratší vzdálenost obou sousedních paprsků dána jest jak známo výrazem

$$dp=\frac{1}{d\gamma}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ X & Y & Z \\ dX & dY & dZ \end{vmatrix}.$$

Pro případ našich speciálních souřadnic nabývá podmínka $dp = 0$ pro ohniska paprsků tvaru

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} X' + \frac{\partial x}{\partial Y} Y' , & \frac{\partial y}{\partial X} X' + \frac{\partial y}{\partial Y} Y' \\ X' , & Y' \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$-\frac{\partial y}{\partial X} X'^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial X} - \frac{\partial y}{\partial Y}\right) X'Y' + \frac{\partial x}{\partial Y} Y'^2 = 0$$

čili

$$2d\, X'Y' + g\, X'^2 + g(1 - X'^2) = 0$$

čili

$$g = -2d\, X'Y' \quad \dots \quad (7)$$

Ze vzorce

$$-r = S X' \left(\frac{\partial x}{\partial X} X' + \frac{\partial x}{\partial Y} Y' + \frac{\partial x}{\partial Z} Z'\right)$$

stanovíme nyní vzdálenost δ ohniska od bodu středového. Bude pro naše speciální souřadnice

$$-r = X'(d \cdot X' + g \cdot Y') + Y'(-g\, X' - d\, Y')$$

$$-r = d(X'^2 - Y'^2).$$

Vyloučíme nyní z této rovnice užitím rovnice (7) a rovnice $X'^2 + Y'^2 = 1$ veličiny X', Y', čímž pro žádanou vzdálenost δ obdržíme vztah

$$\delta^2 = d^2 - g^2 \quad \dots \quad (8).$$

193. Věta Sturmova. – Uvažujme t. zv. elementární kus kongruence, t. j. soubor jejích paprsků sousedních k paprsku p. Užijme téhož vyjádření a téže speciální soustavy souřadnic jako v předchozím. Paprsek p jest dán rovnicemi

$$\xi = x + u X, \quad \eta = y + u Y, \quad \zeta = z + u Z,$$

tedy paprsek soumezný rovnicemi

$$\xi = x + dx + u(X + dX), \ldots$$

čili

$$\frac{\xi - x - dx}{X + dX} = \ldots.$$

což zde, pro $X = Y = 0$, $Z = 1$, $x = y = z = 0$ dává

$$\frac{\xi - dx}{dX} = \frac{\eta - dy}{dY} = \frac{\zeta - dz}{1}$$

čili

$$\frac{\xi - \left(\frac{\partial x}{\partial X} X' + \frac{\partial x}{\partial Y} Y'\right) d\varphi}{X' d\varphi} = \frac{\eta - \left(\frac{\partial y}{\partial X} X' + \frac{\partial y}{\partial Y} Y'\right) d\varphi}{Y' d\varphi} = \frac{(\zeta - dz) d\varphi}{d\varphi}$$

Zanedbáme-li tedy veličiny nekon. malé řádu 2., máme

$$\xi = \left(\frac{\partial x}{\partial X} X' + \frac{\partial x}{\partial Y} Y'\right) d\varphi + X' \zeta \, d\varphi$$

$$\eta = \left(\frac{\partial y}{\partial X} X' + \frac{\partial y}{\partial Y} Y'\right) d\varphi + Y' \zeta \, d\varphi,$$

odkud

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{-g X' + (\zeta - d) Y'}{+g Y' + (\zeta + d) X'} \quad \ldots (9).$$

Zvolíme-li tedy $\zeta = \zeta_0$ tak, aby

$$\frac{-g}{\zeta_0 + d} = \frac{\zeta_0 - d}{g}, \quad \ldots (9')$$

čili $-g^2 = \zeta_0^2 - d^2$ čili $\zeta_0^2 = d^2 - g^2$

t. j., vzhledem ku (8),

$$(10) \ldots \quad \zeta_0 = \pm \delta,$$

pak rovnicí (9) spolu s rovnicí (10) dány jsou dvě přímky, které protínají všecky paprsky soumezné k paprsku p. – Tím nabýváme věty Sturmovy:

„Sousedné paprsky kongruence protínají dvě pevné přímky".

Paprsky protínající dvě pevné přímky tvoří však kongruenci 1. stupně – neboť bodem prochází jeden její paprsek a v rovině leží rovněž jeden její paprsek.

Jako tudy bylo možno nahraditi plochu v okolí jejího bodu rovinou tečnou, t. j. plochou 1. stupně, tak možno kongruenci v okolí jejího paprsku nahraditi kongruencí 1. stupně.

Vyvozené dvě přímky f_1, f_2 nazýváme přímkami ohniskovými. Snadno v nich dokážeme, že leží v rovinách ohniskových. (Že procházejí ohniskyami jsou k paprsku po kolmé, plyne z rovnic (9), (10)).

Rovina ohnisková jest dána rovnicí

$$(11)\ldots \begin{vmatrix} \xi, & \eta, & \zeta \\ X, & Y, & Z \\ dX, & dY, & dZ \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(leží-li počátek na paprsku)}.$$

Jest-to v případě naší soustavy souřadné jest $X=\alpha$, $Y=\alpha$, $Z=1$, nabývá rovnice tvaru

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{Y'}{X'} \ldots (11')$$

Vyloučíme-li X', Y' z této rovnice rovnicí $X'^2+Y'^2=1$ a rovnice (7) str. 394, obdržíme

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{\pm\sqrt{\varepsilon}-\alpha}{\beta} \ldots (11'')$$

jako rovnici obrazů resp. první roviny ohniskové. Tím jest úloha provedena. A sice srovnáním s (9') plyne,

že přímka fokální jdoucí prvým ohniskem leží v druhé rovině ohniskové a naopak.

Poněvadž pak rovina ohnisková druhá (obsahující souměrný paprsek jdoucí ohniskem F_2) dotýká se v bodě F_1 plochy ohniskové prvé (obsahuje totiž kromě paprsku p tečnu ke křivce, která má směr sdružený k tečně p) a naopak,*) seznáváme, že přímky fokální jsou tečnami ploch ohniskových, kolmými k příslušnému paprsku p.

Pozn. Normály ku ploše tvoří též kongruenci. Věta Sturmova tam uvedená jest obsažena v této. (přímkami fokálními jsou tam hlavní osy křivosti).

IV. Kongruence pseudosferické.

194. Jejich plochy ohniskové jsou záporné konstantní míry křivosti. — Uvažujme takové paprskové kongruence, pro které jest δ = konst, d = konst pro všecky paprsky. Ze vzorce (15) str. 390 plyne již, že též úhel obou rovin ohniskových jest pro všecky paprsky stálý.

Za účelem jednoduchého vyjádření bereme plochu středovou (x, y, z) za plochu řídící; parametrické křivky její nechť odpovídají rozvinutelným plochám kongruence. Plochy ohniskové P_1, P_2 vyjádřeny jsou rovnicemi

1)... $\xi_1 = x + \delta X$, ...

2) $\xi_2 = x - \delta X$, ...

Uvažujme sferický obraz naší kongruence. Budiž ob-

*) Srovnej pozn. na str. 382, 383.

louk tohoto dán jako obvykle výrazem

$$d\varphi^2 = \bar{\mathcal{E}}\, dv^2 + 2\bar{\mathcal{F}}\, dv\, dw + \bar{\mathcal{G}}\, dw^2 .$$

Křivky parametrické na kouli budou též sferickými obrazy křivek ohniskových a úhel těchto křivek parametrických rovná se tudíž úhlu Ω obou rovin ohniskových, takže jest, dle známých vzorců z theorie ploch,

$$\cos\Omega = \frac{\bar{\mathcal{F}}}{\sqrt{\bar{\mathcal{E}}\bar{\mathcal{G}}}}, \quad \sin\Omega = \frac{\sqrt{\bar{\mathcal{E}}\bar{\mathcal{G}} - \bar{\mathcal{F}}^2}}{\sqrt{\bar{\mathcal{E}}\bar{\mathcal{G}}}} \quad \ldots \quad (3).$$

Paprsek p dotýkej se křivky w = konst na ploše P_1 a křivky v = konst na ploše P_2. Pak musí platiti:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial v} + \delta \frac{\partial X}{\partial v} = \lambda X \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial w} &= \frac{\partial x}{\partial w} - \delta \frac{\partial X}{\partial w} = \mu X \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Derivací odtud plyne

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial v \partial w} = \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} + \delta \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial w} = \lambda X_w + \lambda_w X$$

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial v \partial w} = \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} - \delta \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial w} = \mu X_v + \mu_v X$$

a odečtením dostáváme relaci

$$2\delta \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial w} = \lambda X_w - \mu X_v + X(\lambda_w - \mu_v) \quad \ldots \quad (4)$$

a analogické relace záměnou Y resp Z za X.

Připomeňme si nyní známou rovnici

$$x_{uv} = \mathcal{M} X + \frac{1}{2\Delta^2}(\mathcal{E}_v \mathcal{G} - \mathcal{G}_u \mathcal{F})\, x_u + \frac{1}{2\Delta^2}(-\mathcal{E}_v \mathcal{F} + \mathcal{G}_u \mathcal{E})\, x_v ,$$

kterou pišme kratšeji ve tvaru

$$x_{uv} = \mathcal{M} X + \mu' x_u + \gamma' x_v .$$

Pro sferický obraz, kdy $X, \ldots$ jsou souřadnice bodu i směr. cosiny normály a kdy $\bar{\mathcal{L}} = -\bar{\mathcal{E}}$, $\bar{\mathcal{M}} = -\bar{\mathcal{F}}$, $\bar{\mathcal{N}} = -\bar{\mathcal{G}}$, máme

$$X_{vw} = -\bar{\mathcal{F}} X + \bar{\mu}' X_v + \bar{\gamma}' X_w , \quad \ldots$$ takže srovnáním

s rovnicí (4) plyne

$$\lambda X_w - \mu X_v + X(\lambda_w - \mu_v) = 2\delta(-\bar{\mathcal{F}}X + \bar{\mu}' X_v + \bar{\gamma}' X_w)$$

- - - -

Násobme tyto rovnice po řadě $X_{v_1}\ldots$ resp. $X_{w_1}\ldots$ a sečteme, čímž dostáváme

$$\lambda \bar{\mathcal{F}} - \mu \bar{\mathcal{E}} = 2\delta(\bar{\mu}' \bar{\mathcal{E}} + \bar{\gamma}' \bar{\mathcal{F}})$$
$$\lambda \bar{\mathcal{G}} - \mu \bar{\mathcal{F}} = 2\delta(\bar{\mu}' \bar{\mathcal{F}} + \bar{\gamma}' \bar{\mathcal{G}}),$$

takže srovnáváme, že jest

$$\lambda = 2\delta\bar{\gamma}', \quad \mu = -2\delta\bar{\mu}' \quad \ldots\ldots (5)$$

Z rovnice (1') plyne nyní

$$x_v = \lambda X - \delta X_v, \quad x_w = \mu X + \delta X_w,$$

z nichž vzhledem ku (5) máme

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial v} = 2\delta\bar{\gamma}' X, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial w} = 2\delta(X_w - \bar{\mu}' X) \quad \ldots (6)$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial v} = 2\delta(\bar{\gamma}' X - X_v), \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial w} = -2\delta\bar{\mu}' X \quad \ldots (7)$$

a obdobně ostatní.

Jsou-li tedy $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{L}_1 \ldots$ resp. $\mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{L}_2 \ldots$ základní veličiny pro plochu P_1 resp. P_2, jest

$$(8)\ldots \begin{cases} \mathcal{E}_1 = 4\delta^2\bar{\gamma}'^2, \quad \mathcal{F}_1 = -4\delta^2\bar{\mu}'\bar{\gamma}', \quad \mathcal{G}_1 = 4\delta^2(\bar{\mu}'^2 + \bar{\mathcal{G}}), \\ \Delta_1 = 4\delta^2\bar{\gamma}'\sqrt{\bar{\mathcal{G}}} \end{cases}$$

$$(9)\ldots \begin{cases} \mathcal{E}_2 = 4\delta^2(\bar{\gamma}'^2 + \bar{\mathcal{E}}), \quad \mathcal{F}_2 = -4\delta^2\bar{\mu}'\bar{\gamma}', \quad \mathcal{G}_2 = 4\delta^2\bar{\mu}'^2, \\ \Delta_2 = 4\delta^2\bar{\mu}'\sqrt{\bar{\mathcal{E}}} \end{cases}$$

Jde ještě o základní veličiny druhého řádu. Tu uvažme, že normála (a_1, b_1, c_1) plochy P_1 jest kolmá ke dvěma rozmezným tečnám $p, p_{(w)}$ křivky $v = \text{konst}$ plochy P_2, takže jest

$$SXa_1 = 0, \quad SX_w a_1 = 0, \quad \text{takže, jelikož jest}$$

$$S\begin{vmatrix} X & Y \\ X_w & Y_w \end{vmatrix}^2 = \begin{Vmatrix} X & Y & Z \\ X_w & Y_w & Z_w \end{Vmatrix}^2 = \bar{G}\,, \text{ máme}$$

$$a_1 = \frac{Y Z_w - Z Y_w}{\sqrt{\bar{G}}}\,, \quad \ldots \quad (10).$$

Z rovnice (1') jest dále

$$(\xi_1)_{vv} = 2\delta(\bar{\gamma}' X_v + X \bar{\gamma}'_v)$$

$$(\xi_1)_{vw} = 2\delta(X_{vw} - \bar{\alpha}' X_w - X\bar{\alpha}'_w)$$

$$\underbrace{\bar{\alpha}'' X_v + \bar{\gamma}'' X_w - \bar{G} X}$$ (analogicky ku (4)),

značí-li základní veličiny 2. řádu jinou

$$(11)\begin{cases} \mathcal{L}_1 = S a_1 (\xi_1)_{vv} = -2\delta \dfrac{\bar{\gamma}' \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}}{\sqrt{\bar{G}}}\,, \\ M_1 = 0 \quad \text{(neboť křivky parametrické jsou sdružené)} \\ N_1 = \dfrac{-2\delta \bar{\alpha}'' \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}}{\sqrt{\bar{G}}}\,, \end{cases}$$

– zde snadno seznáme, že jest $\bar{\alpha}'' = -\bar{\gamma}' \dfrac{\bar{G}}{\bar{E}}$. Uvažujme rovnici

$$\cos\Omega = \frac{\bar{F}}{\sqrt{\bar{E}\bar{G}}} = \text{konst} \quad \text{parciálně dle } w;$$

dáv obdržíme rovnici

$$2\bar{F}_w \bar{E}\bar{G} - \bar{F}(\bar{E}_w \bar{G} + \bar{G}_w \bar{E}) = 0\,,$$

kterou třeba psáti ve tvaru

$$(-\bar{G}_w \bar{F} - \bar{G}_v \bar{G} + 2\bar{F}_w \bar{G})\bar{E} + (-\bar{E}_w \bar{F} + \bar{G}_v \bar{E})\bar{G} = 0,$$

aby vzhledem k tomu, že

$$\bar{\gamma}' = \frac{1}{2\bar{\Delta}^2}(\bar{G}_w \bar{E} - \bar{E}_w \bar{F})\,, \quad \bar{\alpha}'' = \frac{1}{2\bar{\Delta}^2}(-\bar{G}_w \bar{F} - \bar{G}_v \bar{G} + 2\bar{F}_w \bar{G})$$

skutečně vyplynul vztah

$$\bar{\alpha}'' = -\bar{\gamma}' \frac{\bar{G}}{\bar{E}}\,.$$

Dosadíme-li pak odtud za $\bar{\alpha}''$ do N_1, máme

$$(12) \cdots \quad N_1 = \frac{2\delta\bar{\gamma}'\bar{\Delta}}{\bar{\mathcal{E}}}\sqrt{\bar{\mathcal{G}}}\,.$$

Stejnou cestou obdržíme pro plochu P_2

$$L_2 = -\frac{2\delta\bar{\mu}'\bar{\Delta}}{\bar{\mathcal{G}}}\sqrt{\bar{\mathcal{E}}}\,,\quad M_2 = 0\,,\quad N_2 = \frac{2\delta\bar{\mu}'\bar{\Delta}}{\sqrt{\bar{\mathcal{E}}}} \quad \cdots (13).$$

Pro míru křivosti plochy P_1 resp P_2 máme tedy po dosazení do výrazu $K = \dfrac{LN - M^2}{\Delta^2}$ hodnoty

$$K_1 = -\frac{\bar{\Delta}^2}{4\delta^2\bar{\mathcal{E}}\bar{\mathcal{G}}}\,,\quad K_2 = -\frac{\bar{\Delta}^2}{4\delta^2\bar{\mathcal{E}}\bar{\mathcal{G}}}\,,\quad \text{t. j.}$$

(vzhledem k výrazu pro $\sin\Omega$)

$$K_1 = K_2 = -\frac{\sin^2\Omega}{4\delta^2} \qquad \text{čili}$$

$$K_1 = K_2 = -\frac{1}{(2d)^2} \quad \cdots (14).$$

Nabýváme tedy výsledku:

„Obě ohniskové plochy uvažované kongruence pseudosferické mají touž konstantní negativní míru křivosti, rovnou záporně vzaté recipoké hodnotě čtverce vzdálenosti hlavních bodů paprsku."

<u>195. Další vlastnosti.</u> – Uvažujme křivky křivosti ploch P_1, P_2. Dosadíme-li do obecného tvaru differenciální rovnice

$$\begin{vmatrix} dw^2 & \mathcal{E} & L \\ -dv\,dw & \mathcal{F} & M \\ dv^2 & \mathcal{G} & N \end{vmatrix} = 0$$

základní veličiny ohniskové plochy P_1, resp P_2, obdr-

žíme pro křivky křivosti obou ploch touž differenciální rovnici

$$(15)\ldots \bar{\mu}'\bar{\nu}'\,(\bar{E}\,dv^2+\bar{G}\,dw^2)-dv\,dw\,(\bar{E}\bar{\mu}'^2+\bar{E}\bar{G}+\bar{G}\bar{\nu}'^2)=0,$$

takže máme větu:

„Křivky křivosti obou ohniskových ploch kongruence pseudosferické jsou kongruencí navzájem přiřazeny".

Uvažujme dále dif. rovnici křivek asymptotických $\quad L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2=0.$

Dosazením základních veličin dostáváme opět pro obě plochy P_1, P_2 touž dif. rovnici asymptotických křivek ve tvaru

$$\bar{E}\,dv^2-\bar{G}\,dw^2=0 \quad \ldots (16).$$

Utvořme nyní výrazy pro lineární elementy obou ploch:

$$ds_1^2=4\delta^2\{(\bar{\nu}'dv-\bar{\mu}'dw)^2+\bar{G}\,dw^2\}$$

$$ds_2^2=4\delta^2\{(\bar{\nu}'dv-\bar{\mu}'dw)^2+\bar{E}\,dv^2\},$$

kteréžto výrazy jsou totožné v případě, že platí rovnice (16). Máme tedy další větu:

„Křivky asymptotické obou ohniskových ploch kongruence pseudosferické si odpovídají a příslušné jejich oblouky jsou si rovny".

Konečně možno vzhledem k tomu, že oskulační rovina ohniskové křivky jedné plochy ohniskové jest rovinou tečnou druhé plochy ohniskové, vysloviti větu:

„Ohniskové křivky ohniskových ploch pseudosferické kongruence mají tu vlastnost, že jejich roviny oskulač-

ní svírají s tečnými rovinami plochy konstantní úhel Ω.

Je-li tedy speciálně $\Omega = \frac{\pi}{2}$, jsou křivky ohniskové geodetickými křivkami ploch ohniskových.

Pozn. Řekli jsme, že je-li $\Omega = \frac{\pi}{2}$, jde o kongruenci normálovou; ohniska jsou zde hlavními středy křivosti bodu plochy kolmé k paprskům kongruence. Pseudosférická kongruence, pro kterou $\Omega = \frac{\pi}{2}$, jest tedy kongruencí normál plochy Weingartenovy, pro kterou $R_1 - R_2 = 2\delta$. (=konst).

196. Bäcklundova transformace pseudosférických ploch.

– Jelikož obě ohniskové plochy kongruence pseudosférické jsou záporné konstantní křivosti čili plochami pseudosférickými, lze snadno říci, že z jedné pseudosférické plochy odvodit lze plochu jinou pseudosférickou tím způsobem, že na určité řečny bodů plochy naneseme konstantní délku (2δ). Tato transformace jedné pseudosférické plochy v druhou nese své jméno po Bäcklundovi.

Budiž dána pseudosférická plocha, jejíž míra křivosti předpokládejme pro jednoduchost rovna -1, takže

$$K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{\Delta^2} = -1 \ldots (1)$$

Za parametrické křivky volme vzhledem k předchozímu křivky asymptotické. Pak jest

$$\mathcal{L} = \mathcal{N} = 0 \quad \text{a budiž (viz (9))} \quad \mathcal{M} = \Delta \ldots (2)$$

kdež volme, nerozlišujíce případů ploch sdružených,

znaménko kladné.

Rovnice Codazziho nabývají zde tvaru

$$-M_u = -\frac{1}{2\Delta}\left[\mathcal{E}_u G - G_u \mathcal{E} + 2(\mathcal{E}_v - \mathcal{F}_u)\mathcal{F}\right]$$
$$-M_v = -\frac{1}{2\Delta}\left[G_v \mathcal{E} - \mathcal{E}_v G + 2(G_u - \mathcal{F}_v)\mathcal{F}\right].$$

Vypočteme-li prak M_u a M_v ze vztahu $M = \sqrt{\mathcal{E}G - \mathcal{F}^2}$ a dosadíme sem, nabýváme rovnic

$$G_u \mathcal{E} - \mathcal{E}_v \mathcal{F} = 0$$
$$G_u \mathcal{F} - \mathcal{E}_v G = 0$$

které, vzhledem k tomu, že $\mathcal{E}G - \mathcal{F}^2 \neq 0$ (což předpokládáme), vedou k

$$G_u = 0, \quad \mathcal{E}_v = 0 \quad ; \quad G = g(v), \quad \mathcal{E} = e(u),$$

takže můžeme na naší pseudosferické ploše zavésti parametry u, v tak, že lineární element jest tvaru

$$ds^2 = du^2 + 2\mathcal{F}\,du\,dv + dv^2,$$

t.j. že $\mathcal{E} = 1$, $G = 1$. Při tom značí u, v obvody křivek asymptotických a, jak ze známého vzorce z theorie ploch plyne, $\mathcal{F} = \cos 2\omega$, kde 2ω jest úhel křivek asymptotických (zde parametrických).

Rovnice Gaussova má zde tvar

$$-1 + \mathcal{F}^2 = \mathcal{F}_{uv} + \frac{\mathcal{F}\mathcal{F}_u\mathcal{F}_v}{1-\mathcal{F}^2} \qquad \text{čili}$$

$$-1 + \cos^2 2\omega = \left(-2\sin 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial u}\right)_v + \frac{4\cos 2\omega \sin^2 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial \omega}{\partial v}}{1-\cos^2 2\omega}$$

čili

$$-\sin^2 2\omega = -2\sin 2\omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} - 4\cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial \omega}{\partial v} + 4\cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial \omega}{\partial v}$$

čili

$$\frac{\partial^2 2\omega}{\partial u \partial v} = \sin 2\omega \quad \ldots (3).$$

Jelikož konečně jest $K=-1$, dostáváme vzhledem ke (14) (str. 401)

$$2\alpha = 1, \qquad 2\delta = \sin\Omega \quad \dots \quad (4).$$

Křivky křivosti pak dány jsou dif. rovnicí

$$du^2 - dv^2 = 0 \quad \text{čili}$$

$$du = \pm dv \quad \dots \quad (5),$$

takže leží na $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ resp $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ křivky křivosti první resp druhé soustavy mají cosiny směrné:

$$(6)\begin{cases} x_1 = \dfrac{dx}{ds_1} = \dfrac{x_u\,du + x_v\,dv}{\sqrt{du^2+dv^2+2\cos 2w\,du\,dv}} \overset{du=dv}{=} \dfrac{x_u + x_v}{2\cos w} \,/\beta_1 \dots \\ x_2 = \dfrac{dx}{ds_2} = \quad " \quad \overset{du=-dv}{=} \dfrac{x_v - x_u}{2\sin w} \,/\beta_2 \dots \end{cases}$$

(zde na znaménka zde by znamenala pouze záměnu u a v).

Z toho plyne

$$\left.\begin{aligned} x_u &= \alpha_1 \cos w - \alpha_2 \sin w \\ x_v &= \alpha_1 \cos w + \alpha_2 \sin w \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Známé nám z theorie ploch vzorce pro $x_{uu}, \dots$ redukují se zde na tvar

$$(8)\begin{cases} x_{uu} = 2\cos 2w \dfrac{\partial w}{\partial u} x_u - \dfrac{2}{\sin 2w} \dfrac{\partial w}{\partial w} x_v \\ x_{uv} = \sin 2w \cdot X \\ x_{vv} = 2\cos 2w \dfrac{\partial w}{\partial v} x_v - \dfrac{2}{\sin 2w} \dfrac{\partial w}{\partial v} x_w . \end{cases}$$

Dosadíme-li nyní rovnice (6) a dosadíme do nich $x_u, \dots, x_{uu} \dots$ z rovnic (7) resp (8), obdržíme

$$(9)\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial u} = X\sin w - \alpha_2 \dfrac{\partial w}{\partial u}, \quad \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial w} = X\sin w + \alpha_2 \dfrac{\partial w}{\partial w}, \\ \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial u} = X\cos w + \alpha_1 \dfrac{\partial w}{\partial u}, \quad \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial v} = -X\cos w - \alpha_1 \dfrac{\partial w}{\partial w} \end{cases}$$

Přistupme nyní k vlastnímu řešení našeho problému. Svírá-li papírek se hledanou kongruencí s první křivkou křivosti úhel θ, jsou souřadnice (x_1, y_1, z_1) bodu plochy druhé dány výrazy

$$x_1 = x + 2\delta(\alpha_1 \cos\theta + \alpha_2 \sin\theta), \quad \ldots \quad (10).$$

Úhel θ mimo, vzhledem k tomu že parametrickým main-im křivkám asymptotickým plochy dané odpovídají zase křivky asymptotické, a to v téměž obloučku, na ploše druhé, zvoliti tak, aby též

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{G}_1 = 1 \quad \ldots \quad (11).$$

Jest však

$$(x_1)_u = x_u + 2\delta(-\alpha_1 \sin\theta + \alpha_2 \cos\theta)\frac{\partial\theta}{\partial u} + 2\delta\left(\cos\theta\frac{\partial\alpha_1}{\partial u} + \sin\theta\frac{\partial\alpha_2}{\partial u}\right)$$

t.j., po dosazení z (9),

$$(x_1)_u = \left[\cos\omega - 2\delta\sin\theta\frac{\partial(\theta-\omega)}{\partial u}\right]\alpha_1 + \left[-\sin\omega + 2\delta\cos\theta\frac{\partial(\theta-\omega)}{\partial u}\right]\alpha_2 + 2\delta X\sin(\theta+\omega)$$

a obdobně

$$(x_1)_v = \left[\cos\omega - 2\delta\sin\theta\frac{\partial(\theta+\omega)}{\partial v}\right]\alpha_1 + \left[\sin\omega + 2\delta\cos\theta\frac{\partial(\theta+\omega)}{\partial v}\right]\alpha_2 - 2\delta X\sin(\theta-\omega),$$

odkud obdržíme

$$\mathcal{E}_1 = 1 - 4\delta\sin(\theta+\omega)\frac{\partial(\theta-\omega)}{\partial u} + 4\delta^2\left[\left(\frac{\partial(\theta-\omega)}{\partial u}\right)^2 + \sin^2(\theta+\omega)\right]$$

$$\mathcal{G}_1 = 1 - 4\delta\sin(\theta-\omega)\frac{\partial(\theta+\omega)}{\partial v} + 4\delta^2\left[\left(\frac{\partial(\theta+\omega)}{\partial v}\right)^2 + \sin^2(\theta-\omega)\right],$$

takže požadavek (11) vede nás k podmínkám

$$(12)\quad \begin{cases} \sin(\theta+\omega)\dfrac{\partial(\theta-\omega)}{\partial u} - \delta\left[\left(\dfrac{\partial(\theta-\omega)}{\partial u}\right)^2 + \sin^2(\theta+\omega)\right] = 0 \\ \sin(\theta-\omega)\dfrac{\partial(\theta+\omega)}{\partial v} - \delta\left[\left(\dfrac{\partial(\theta+\omega)}{\partial v}\right)^2 + \sin^2(\theta-\omega)\right] = 0. \end{cases}$$

To jsou opět differenciální rovnice pro θ. Půjde o je-

jich podmínku integrability.
Z první z nich plyne, vzhledem ku (4),

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta-\omega)}{\partial u} = \dfrac{1+\varepsilon\cos\Omega}{\sin\Omega}\sin(\theta+\omega) \quad , \varepsilon=\pm 1 \text{ ; z druhé} \\ \dfrac{\partial(\theta+\omega)}{\partial v} = \dfrac{1+\varepsilon_1\cos\Omega}{\sin\Omega}\sin(\theta-\omega) \quad , \varepsilon_1=\pm 1, \end{cases}$$

odkud derivací za vzájemným obrazením

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v} - \frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v} = \frac{1+\varepsilon\cos\Omega}{\sin\Omega}\cos(\theta+\omega)\sin(\theta-\omega)\frac{1+\varepsilon_1\cos\Omega}{\sin\Omega}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v} = \frac{1+\varepsilon_1\cos\Omega}{\sin\Omega}\cos(\theta-\omega)\sin(\theta+\omega)\frac{1+\varepsilon\cos\Omega}{\sin\Omega}.$$

Odečtením obdržíme, vzhledem ku (3),

$$\sin 2\omega = \frac{1+\varepsilon\cos\Omega}{\sin\Omega}\,\frac{1+\varepsilon_1\cos\Omega}{\sin\Omega}\sin 2\omega \quad \text{čili}$$

$$(1+\varepsilon\cos\Omega)(1+\varepsilon_1\cos\Omega) = \sin^2\Omega.$$

Vidíme tedy, že platí současně

$$\varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon_1 = \mp 1$$

a je-li tomu tak, že jest podmínka integrability rovnic (12) splněna.
Béřeme-li $\varepsilon=+1$, $\varepsilon_1=-1$, dávají rovnice (13)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(\theta-\omega)}{\partial u} &= \operatorname{cot}\frac{\Omega}{2}\sin(\theta+\omega) \\ \frac{\partial(\theta+\omega)}{\partial v} &= \operatorname{tg}\frac{\Omega}{2}\sin(\theta-\omega) \end{aligned}\right\} (14),$$

jakožto dvě integrabilní rovnice pro θ.
Známena znamének ε a ε_1 značí jen jednu známenu $\cos\Omega$ a $-\cos\Omega$, možno ji tedy zaměnit.
Stanovíme-li nyní θ na základě rovnic (14), pak

rovnice (10) dávají nám transformovanou plochu pseudosferickou. Abychom se o tom přesvědčili, vypočteme veličinu $F_1 = S(x_1)_u (x_1)_v$ a dosaďme sem za derivace $\frac{\partial(\theta-\omega)}{\partial u}$, $\frac{\partial(\theta+\omega)}{\partial v}$ výrazy (14), tím obdržíme

$$F_1 = \cos 2\theta \,, \quad \text{kdežto} \quad E_1 = G_1 = 1 \quad \dots \quad (15).$$

Derivujeme-li nyní prvou z rovnic (14) dle v a druhou dle u a sečteme, obdržíme

$$\frac{\partial^2 2\theta}{\partial u \partial v} = \sin 2\theta \quad \dots \quad (16).$$

A dosadíme-li veličiny (15) do rovnice Gaussovy, obdržíme, vzhledem ku (16),

$$K_1 = -1 \quad \dots \quad (17).$$

Z (15) a (16) jest patrno, že úhel 2θ má pro transformovanou plochu týž význam jako 2ω pro plochu danou. Jest tedy 2θ úhel asymptotických křivek plochy P_1 a u, v jsou také pro ni oblouky křivek asymptotických. Ježto, jak z (17) patrno, jest plocha P_1 skutečně plochou pseudosferickou, jest tím náš úkol řešen.

<u>197. Riccattiho rovnice.</u> – Věnujme ještě pozornost integraci rovnic (14). Místo nich možno psáti:

$$(18) \dots d\theta = \left[\cot\frac{\Omega}{2}\sin(\theta+\omega) + \frac{\partial\omega}{\partial u}\right]du + \left[\operatorname{tg}\frac{\Omega}{2}\sin(\theta-\omega) - \frac{\partial\omega}{\partial v}\right]dv.$$

Zavedeme-li $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \xi$ za novou proměnnou, obdržíme odtud dif. rovnici Riccatiho

$$d\xi = (A\xi^2 + B\xi + C)\,du + (A_1\xi^2 + B_1\xi + C_1)\,dv \dots (19),$$

kde $A_1 \dots C_1$ jsou dané funkce u, v. Ježto pak stačí

znáti jeden partikulární integrál Riccatiho rovnice, aby obecný integrál bylo možno stanoviti kvadraturami, známe větu:

„Známe-li k dané ploše P jen jednu plochu odvozenou P_1, vyplynou všecky ostatní plochy, příslušící témuž Ω, kvadraturami."

Jelikož pak plocha P jest naopak jednou plochou vzniklou transformací každé plochy P_1, obdržíme pak pouhými kvadraturami celkem ∞^2 transformovaných ploch pro zvolený úhel Ω.

Pozn. Je-li $\Omega = \frac{\pi}{2}$, jest naše kongruence kongruencí normálovou (viz později) a plochy ohniskové tvoří plášť evolutové plochy pro orthogonální plochy kongruence. Vzhledem k pozn. na str. 403 vidíme, že dotkali plocha pseudosferická a na ní soustava křivek geodetických, pak naneseme-li na tečny těchto křivek konstantní délku 2δ, pak přímky ty tvoří pseudosferickou kongruenci normál plochy Weingartenovy $R_1 - R_2 = 2\delta$.

V. Rozvinutelné plochy v kongruenci ve speciálních případech.

198. Případ dvojné plochy ohniskové. – Jevnali jsme (viz str. 379), že v tomto případě jest kongruence vytvořena tečnami k jedné soustavě asymptotických křivek této plochy. Plyne pak dále, že existuje zde pouze jed-

na soustavu ploch rozvinutelných, a to těch, jež mají hranami vratu ony křivky asymptotické.

Za příčinou duálnosti běžíme naší plochu za plochu řídící a ony křivky asymptotické za křivky $w = \text{konst.}$ Differenciální rovnice, která určuje plochy rozvinutelné, jest zde (viz str. 381, 382)

$$\delta w (L\,\delta w + M\,\delta w) = 0.$$

Differenciální rovnice křivek asymptotických

$$L\,\delta w^2 + 2M\,\delta w\,\delta w + N\,\delta w^2 = 0$$

má však býti splněna křivkami $\delta w = 0$, odkud plyne $L = 0$ takže rovnice určující rozvinutelné plochy nabývá tvaru

$$\delta w^2 = 0,$$

čímž výrok řečený dokázán.

146. Dvojná křivka obalová (φ). — Kongruence tvořena jest přímkami ležícími v určitých tečných rovinách bodů křivky (φ). (Viz str. 380.). Soustava soustava rozvinutelných ploch jest tedy tvořena těmito rovinami. Mimo to objevují se dvě další rozvinutelné plochy, totiž obálka oněch tečných rovin a rozvinutelná plocha mající hranou vratu křivku (φ). Snadno seznáme, že jiné rozvinutelné plochy zde neexistují. Křivka (φ) budiž dána rovnicemi

$$x = f(v),\quad y = g(v),\quad z = h(v);$$

v budiž oblouk. Její tečna má směr. cosiny f', g', h'. Budte $\alpha(v), \beta(v), \gamma(v)$ směr. cosiny jedné přímky kongruence. Pak obecná

přímka kongruence má směr. cosiny

$$a = f' + w.\alpha(v), \quad b = g' + w.\beta(v), \quad c = h' + w.\gamma(v).$$

Rovnice ploch rozvinutelných jest

$$|f' + w\alpha, (f'' + w\alpha')dv + \alpha\, dw, f'\, dv| = 0$$

čili

$$w\, dv^2 |\alpha, f'' + w\alpha', f'| = 0,$$

kterážto rovnice rozpadá se ve tři.

Rovnice $dv = 0$ vede k řečeným rovinám tečným.

Rovnice $w = 0$ dává rozvinutelnou plochu, jejíž hranou vratu jest křivka (φ).

Konečně třetí rovnice jest

$$|\alpha\ f''\ f'| + w|\alpha\ \alpha'\ f'| = 0 \ldots (1^r).$$

Avšak naší tečná rovina bodu křivky (φ) má rovnici:

$$|x - f, f', \alpha| = 0.$$

Hledejme její obálku. Charakteristika leží v rovině

$$|x - f, f'', \alpha| + |x - f, f', \alpha'| = 0.$$

Vzjádříme-li okolnost, že paprsek

$$x = f + u(f' + w\alpha), \ldots$$

v této rovině leží, máme vztah

$$|f' + w\alpha, f'', \alpha| + |f' + w\alpha, f', \alpha'| = 0$$

čili vztah

$$|f', f'', \alpha| + |\alpha, f', \alpha'| = 0$$

který jest týž jako rovnice (1^r) definující třetí plochu rozvinutelnou. Tato plocha jest tedy obálkou

rovin obsahujících přímky kongruence.

200. Jedna ohnisková plocha jest rozvinutelná. – Uvažovali jsme případ, kdy jedním místem ohnisek jest křivka. Případ k němu duální jest, obalují-li roviny ohniskové plochy rozvinutelnou. Budiž to plocha Φ a budiž Φ_1 druhým pláštěm plochy ohniskové. Paprsky kongruence dotýkají se obou ploch, jsou tedy tečnami plochy Φ_1 ležícími v tečných rovinách plochy Φ čili jsou tečnami řezů plochy Φ_1 tečnými rovinami plochy Φ. V tomto případě jsou tedy hrany vratu ležící na ploše Φ_1 křivky rovinné a příslušné rozvinutelné plochy jsou roviny těchto křivek. Ohnisko paprsku p jsou jednak dotykový bod s plochou Φ_1 a jednak průsečík s charakteristikou tečné roviny rozvinutelné plochy Φ. Abychom sestrojili druhou soustavu rozvinutelných ploch, vytkněme si na ploše Φ_1 křivky sdružené k oněm křivkám rovinným. Ze protínající paprsky obalí na ploše Φ příslušné hrany vratu.

Jestliže naopak hrany vratu rozvinutelných ploch ležící na jednom plášti Φ_1 plochy ohniskové jsou křivky rovinné, pak rozvinutelná plocha Φ obalená rovinami těchto křivek jest druhým pláštěm ohniskové plochy kongruence.

Abychom obdrželi kongruenci tohoto druhu, můžeme zvolili rozvinutelnou plochu Φ a na ní libovolnou soustavu ∞^1 křivek (tyto jsou totiž vždy sdružený k

površkám plochy). Tečny těchto křivek vytvoří tečkovou kongruenci. Křivky obalené přímkami ležícími vždy v téže tečné rovině rozvinutelné plochy vyplní druhý plášť Φ_1 plochy ohniskové.

201. Obě ohniskové plochy jsou rozvinutelné. – Případ, kdy též druhý plášť Φ_1 jest rozvinutelný, jest nasnadě. Vyjděme z rozvinutelné plochy Φ a protněme ji soustavou ∞^1 rovin. Obálkou těchto rovin jest druhý plášť Φ_1. Máme zde dvě soustavy rovin o jednom parametru a paprsky kongruence jsou průsečnicemi každé roviny jedné soustavy s každou rovinou druhé soustavy.

Případ tento jest duální k případu dvou křivek ohniskových.

Pozn. Případ dvojné plochy ohniskové jest duální sám k sobě, neboť prostorovou dualitou dvou křivek přechází bod jedné v oskulační rovinu druhé a křivka asymptotická má tu vlastnost, že její rovina oskulační jest tečnou rovinou plochy. – Obdobně případ dvojné křivky ohniskové jest sám k sobě duální.

202. Kongruence Kőnigsovy. – Jak známo nazýváme soustavu, tvořenou bodem a rovinou jím jdoucí, složkovým elementem. Tu jest patrno, že jak plocha tak i křivka (ať již křivočará nebo přímka) a tak i bod určují množinu ∞^2 elementů složkových. V paprskové kon-

gruenci pak tvoří ohnisko a jeho ohniskova rovina
t.zv. fokální dotykový element, takže místa ohnisek
a ohniskových rovin jeví se nám takto jako množi-
ny fokálních elementů dotykových. Zanedbáme-li pří-
pad, kdy kongruence jest svazkem, zbývá nám ještě
uvažovati případ, kdy jednou z množin ohniskových
jest přímka.

Přímku můžeme považovati jak za místo ∞^1 bodů
tak i za obálku ∞^1 rovin, tedy současně za křivku i
za plochu rozvinutelnou; z toho plyne, že v uvažova-
ném případě tvoří jednu soustavu rozvinutelných
ploch v kongruenci plochy kuželové o vrcholech na přím-
ce a druhou soustavu roviny jdoucí přímkou.

Je-li kromě přímky Δ množinou ohniskovou plocha
Φ, tvoří první soustavu kužele opsané ploše Φ z bodů přím-
ky Δ, jejichž křivky styčné na ploše Φ musí býti sbru-
ženy k řezům plochy s rovinami jdoucími přímkou
Δ, jako hranám vratu rozvinutelných ploch druhé sou-
stavy. Tím nabýváme

věty Königsovy: Křivky styčné kuželů opsaných plo-
še z bodů přímky jsou sbruženy k průsečným křivkám
s rovinami jdoucími přímkou.

Je-li též druhá multiplicita ohniskovou přímkou,
máme kongruenci lineární.

Je-li konečně přímka dvojnou přímkou fokální, při-
slušeje každému bodu přímky rovina přímkou jdoucí a
kongruence jest tvořena definovanými takto svazky přímek.

203. Aplikace. Plochy Goachinusthalovy. – Uvažujme speciální případ, kdy naše rovinné řezy jsou křivkami křivosti. Jsou tedy o plochy takového druhu, že křivky křivosti jedné soustavy leží v rovinách jdoucích jednou přímkou Δ.

Budiž tedy P plocha uvažovaného druhu a uvažujme kongruenci tečen řečené soustavy křivek křivosti. Styčné kružnice kuželů opsaných ploše P z bodů přímky Δ jsou sdruženy ke křivkám křivosti prvé soustavy, jsou tedy křivkami křivosti druhé soustavy. Jelikož pak opsaný kužel protíná plochu pod stálým úhlem nula, jest dle známé věty Goachinusthalovy křivka křivosti druhé soustavy též křivkou křivosti opsaného kužele, jest tedy – jak plyne aplikací Goach. věty na kužel ten a na soustředěnou s ním, tedy orthogonální k němu, plochu kulovou – křivkou sférickou a orthogonální trajektorií povšech kužele. – Vidíme tedy, že naše plocha jest orthogonální trajektorií soustavy ploch kulových majících středy na přímce Δ. – Jest patrno, že nyní skutečně jsou tyto křivky křivosti druhé soustavy styčnými křivkami kuželů opsaných ploše z bodů přímky Δ.

Vedeni jsme tedy k úloze stanoviti plochu, jež jest orthogonální trajektorií soustavy ploch kulových majících středy na přímce Δ. Uvažujme křivky křivosti 1. soustavy. Každá z nich dotýká se příslušného paprsku ps, jest tedy kolmá ku ploše kulové, jejíž střed leží na ps, a jelikož leží v rovině jdoucí přímkou Δ, jest orthogonální trajekto-

rií příslušné největší kružnice, ležící v její rovině. Totéž platí pro sousední křivku, takže vidíme, že naši plochu P vytvoříme nejjednodušeji takto:

V rovině dána jest soustava kružnic mající středy na přímce Δ. Sestrojme jejich orthogonální trajektorie a otočme každou z těchto trajektorií o příslušný úhel, který mění se spojitě, přecházíme-li od jedné trajektorie k trajektorii sousední.

Mějme tedy úlohu stanoviti orthogonální trajektorie soustavy kružnic mající středy na přímce Δ. Vyhledejme obecněji orthogonální trajektorie libovolné soustavy kružnic, kterou stanovíme středem (a, b) a poloměrem R jako funkcemi jednoho parametru u. Uvažujme orthogonální trajektorii protínající jednu z kružnic v bodě M. Bod M má souřadnice

$$\left.\begin{aligned} x &= a + R\cos\varphi, \\ y &= b + R\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \dots (1)$$

kde úhel φ jest rovněž nějakou funkcí parametru u, kterouž to funkci nutno tak stanoviti, aby křivka daná rovnicemi (1) byla kolmá ke všem kružnicím (a, b, R). Poloměr kružnice jest tečnou křivky, takže

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y-b} \quad \dots (2)$$

Jest však

$$dx = da + dR\cos\varphi - R\sin\varphi\, d\varphi, \quad x - a = R\cos\varphi$$
$$dy = db + dR\sin\varphi + R\cos\varphi\, d\varphi, \quad y - b = R\sin\varphi,$$

takže dosazením nabývá rovnice (2) tvaru

$$\begin{vmatrix} da + dR\cdot\cos\varphi - R\sin\varphi\cdot d\varphi, & R\cos\varphi \\ db + dR\sin\varphi + R\cos\varphi\cdot d\varphi, & R\sin\varphi \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$da\sin\varphi - db\cos\varphi - R\,d\varphi = 0$$

čili

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{a'}{R}\sin\varphi - \frac{b'}{R}\cos\varphi \quad \dots (3).$$

Položíme-li $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = w$, odkud $d\varphi = \frac{2\,dw}{1+w^2}$, $\sin\varphi = \frac{2w}{1+w^2}$, $\cos\varphi = \frac{1-w^2}{1+w^2}$, máme rovnici

$$\frac{1}{du}\cdot\frac{2\,dw}{1+w^2} = \frac{a'}{R}\,\frac{2w}{1+w^2} - \frac{b'}{R}\,\frac{1-w^2}{1+w^2},$$

která jest tvaru

$$\frac{dw}{du} = A\,w + \frac{B}{2}(1-w^2),$$

při čemž A, B jsou funkce u. Jest to rovnice Riccatiho, o které víme, že dvojpoměr čtyř jejích integrálů jest konstantou. Spojíme-li však bod M kružnice s jejím průsečíkem A s osou střední x, jest směrnice této spojnice rovna $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ čili w a svazek $A(M_1\dots)$ jest projektivní s řadou $M_1\dots$ na kružnici. Z toho plyne, že 4 orthogonální trajektorie soustavy kružnic protínají všecky kružnice soustavy ve čtveřicích téhož dvojpoměru.

Ve speciálním případě, kdy kružnice soustavy mají středy na přímce Δ, jsou průsečíky A, B kružnice s Δ příslušnými dvěma orthogonálními trajektoriemi, které zde splývají v přímce Δ; máme zde tedy dva integrály Riccatiho rovnice a její obecný integrál stanovíme jednou kvadraturou.

Místo abychom vyšli veličiny a, b, R jako funkce u,

můžeme tedy si dáti jednu orthogonální trajektorii Γ, čímž máme dány tři integrály rovnice Riccatiho a obecný integrál vyplyne nám vyjádřením okolnosti, že jeho dvojpoměr ke třem daným jest stálý. Za příčinou analytického vyjádření učiňme přímku Δ osou x. Úhel tečny křivky Γ s osou x zaveďme za parametr u. Pak tato tečna jest dána rovnicemi

$$x = a + \varrho \cos u$$

$$y = \varrho \sin u$$

kde $\underline{a}$ jest funkcí $\underline{u}$. K určení dotyčného bodu této tečny máme tedy rovnice $dx = 0$, $dy = 0$ t.j.

$$da - \varrho \sin u \, du + \cos u \, d\varphi = 0$$

$$\varrho \cos u \, du + \sin u \, d\varrho = 0 ,$$

z nichž

$$R = \varrho = \frac{da}{du} \sin u .$$

Obecná orthogonální trajektorie jest tedy dána rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \frac{da}{du} \sin u \cos\varphi \\ y &= \frac{da}{du} \sin u \cdot \sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

při čemž amplituda φ příslušná bodu M libovolné trajektorie vázána jest k úhlu u trajektorie Γ tou okolností, že dvojpoměr uvedený jest stálý, což jest vyjádřeno krátce vztahem

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = m \cdot \operatorname{tg}\frac{u}{2} ,$$ kde $\underline{m}$ má podél celé každé trajektorie stálou hodnotu, jsou tedy nezávislé na $\underline{u}$ a závislé pouze na úhlu $\underline{v}$, o který jest nutno trajektorii (4) kolem Δ otočiti.*) Píšeme-li tedy

*) vzhledem k rovině (xy).

$a = f(u)$, $m = g(v)$, jest obecná trajektorie naší soustavy ploch kulových dána rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} x &= f(u) + f'(u) \sin u \cos\varphi \\ y &= f'(u) \sin u \sin\varphi \cos v \\ z &= f'(u) \sin u \sin\varphi \sin v \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

při čemž

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = g(v) \operatorname{tg}\frac{u}{2}.$$

Rovnice (5) jest tedy též parametrickým vyjádřením (na základě parametrů u, v) plochy uvažovaného druhu, t. zv. plochy Joachimsthalovy.

204. Řešení dif. rovnice ploch rozvinutelných ve spec. případech kongruence. – Rozvinutelné plochy obsažené v kongruenci stanovíme bez kvadratury v případě dvou křivek fokálních anebo v duálním případě dvou rozvinutelných ploch fokálních. V prvním případě jsou to kužele, v druhém roviny.

Máme-li jednu křivku fokální nebo duálně jednu rozvinutelnou plochu fokální, známe jednu ze soustav rozvinutelných ploch kongruence. Pro soustavu druhou máme dif. rovnici 1. řádu a 1. stupně.

Věnujme pozornost této rovnici v případě jedné křivky fokální a jedné rozvinutelné plochy fokální. Paprsky kongruence protínají křivku φ a leží v tečných rovinách plochy Φ. Protíná-li tečná rovina plochy Φ křivku φ v bodě F, pak všecky přímky v této rovině ležící a bodem F jdoucí náleží kongruenci. Druhým ohnis-

kem přímkou p jest průsečík T_1 s charakteristikou u plochy Φ. Jednou rozvinutelnou plochou procházející přímkou p jest dečná rovina plochy Φ, kteréžto druhá rozvinutelná plocha jí jdoucí má hranou vratu takovou křivku $\varkappa$ plochy Φ, jejíž dečny protínají křivku φ. Máme tedy úlohu najíti na rozvinutelné ploše Φ takovéto křivky $\varkappa$.

Budiž křivka φ dána rovnicemi

$$x = f(v), \quad y = g(v), \quad z = h(v).$$

Bodem jejím T nechť prochází rovina A daná dvěma směry $[\alpha(v), \beta(v), \gamma(v)]$, $[\alpha_1(v), \beta_1(v), \gamma_1(v)]$ přímek v ní ležících a každá přímka svazku (TA) nechť náleží kongruenci. Směr. cosiny takovéto přímky jsou

$$a = \alpha + w\alpha_1, \quad b = \beta + w\beta_1, \quad c = \gamma + w\gamma_1,$$

takže dif. rovnice rozvinutelných ploch kongruence

$$|a \; da \; df| = 0$$

nabývá zde tvaru

$$dw\,|\alpha + w\alpha_1, \; (\alpha' + w\alpha_1')\,dw + \alpha_1\,dw, \; f'(v)\,| = 0$$

dávající jednak rovnici $dw = 0$ roviny A a jednak rovnici rozvinutelné plochy druhé soustavy

$$|\alpha + w\alpha_1, \; \alpha' + w\alpha_1', \; f'|\,dw^2 + |\alpha \; \alpha_1 \; f'|\,dw = 0,$$

která má patrně tvar

$$\frac{dw}{dv} = Pw^2 + Qw + R,$$

kde P, Q, R jsou funkce pouze v, jest tedy rovnicí Riccatiho.

Tažme se, v kterých případech lze si zjednodušiti particulární integrál této rovnice. Je-li křivka φ rovinná, vede k

takovému integrálu křivka ve které obrysovou plochu Φ protíná rovina křivky φ, takže obecný integrál stanovíme zde dvěma kvadraturami.

Budiž speciálně křivka φ kružnicí kulovou; pak křivky se jsou minimální křivky plochy Φ. Seznámíváme tedy větu: Úlohu stanoviti minimální křivky na ploše rozvinutelné možno převésti na 2 kvadratury.

Speciálně je-li plocha Φ kuželem jest soustředný s ní kužel obsahující křivka φ jednou rozvinutelnou plochou druhé souřadnicové, takže třeba opět ještě pouze 2 kvadratur.

Je-li Φ kužel a φ křivka rovinná, máme 2 particulární integrály, takže jest třeba pouze jedné kvadratury.

Budiž speciálně roviny A kolmé ku křivce φ. Pak máme kongruenci normál křivky φ. Stanovení rozvinutelných ploch této kongruence vede nás k evolutám křivky φ. Rovina A svazku (TA) jest kolma ku tečně Tt křivky φ čili jest polární rovinou této tečny k isotropickému kuželi o vrcholu T. Roviny tečné vedené přímkou t ke kuželi tomu obdélníkají se po dvou podél isotropických přímek g, g_1 svazku (TA). Uvažujme plochu vytvořenou přímkou g. Rovina tečná tohoto kužele J jest tečnou rovinou této přímkové plochy v bodě F přímky g. Rovina ta však obsahuje též tečnu kružnice kulové (která právě tak jako křivka φ leží na naší přímkové ploše), jest tedy též rovinou tečnou v bodě N_∞ přímky g, t.j. dotýká se naší přímkové plochy ve dvou bodech povšky g, t.j. podél celé této povšky. Odtud plyne věta:

Isotropické přímky normálných rovin prostorové přímky φ popisují dvě plochy rozvinutelné normál křivky. Tím známe hrany dvě evoluty křivky φ a obecné řešení úlohy vyžaduje jediné kvadratury.

Výpočet jest na základě předchozího patrný. Za přímky (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ zvolme zde hlavní normálu (a', b', c') a binormálu (a'', b'', c''); je-li pak v oblouk s křivky a $d(a, b, c)$ řečna křivky, nabývá rovnice na str. 420 tvaru

$$|a' + w a', -\underbrace{\frac{a}{R}}_{\cdots\cdots} - \frac{a'}{T} + w\frac{a'}{T}, a|\,ds + \underbrace{|a'\ a''\ a|}_{1}\,dw = 0$$

čili

$$dw + |a' + w a', -a'' + w a', a|\,\frac{ds}{T} = 0$$

čili $\quad dw - (1 + w^2)\frac{ds}{T} = 0$

nebo $\quad \frac{ds}{T} = \frac{dw}{1 + w^2}$

odkud integrací plyne

$$w = tg\left[\int \frac{ds}{T} + \varphi\right],$$

čímž jest skutečně řešení našeho problému převedeno na jedinou kvadraturu.

VI. Kongruence normálové.

205. Plochy rozvinutelné. – Aplikujme předchozí úvahy na kongruenci normál ku ploše řídící. Jsouli

$$\xi = x(v,w) + u\,X(v,w) \quad \ldots \quad (1)$$

rovnice této kongruence, značí (X,Y,Z) směr. cosiny normály plochy řídící, takže jest mimo

$$S\,x_v x_w = S\,X_w x_v = M,$$

kde M značí zákl. veličinu 2. řádu pro plochu řídící. Vidíme tedy že zde (viz I.)

$$M_1 = M_2 = M \quad \ldots \quad (2).$$

Hledejme rozvinutelné plochy naší kongruence normálové. Podmínka odp. =0 (viz str. 385) má zde tvar

$$\begin{vmatrix} L\,dv + M\,dw, & M\,dv + N\,dw \\ \bar{E}\,dv + \bar{F}\,dw, & \bar{F}\,dv + \bar{G}\,dw \end{vmatrix} = 0,$$

kde L, M, N jsou základní veličiny 2. řádu pro plochu řídící. Pro veličiny $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ příslušící sférickému obrazu řídící plochy máme jak známo

$$\bar{E} = S\,X_v^2 = H\,L - K\,E, \quad \bar{F} = S\,X_v X_w = H\,M - K\,F,$$
$$\bar{G} = H\,N - K\,G,$$

takže dosazením plyne podmínka

$$\begin{vmatrix} L\,dv + M\,dw & M\,dv + N\,dw \\ H(L\,dv + M\,dw) - K(E\,dv + F\,dw) & H(M\,dv + N\,dw) - K(F\,dv + G\,dw) \end{vmatrix} = 0$$

čili, dle známých pravidel o determinantech,

$$\begin{vmatrix} L\,dv + M\,du\,dv , & M\,dv + N\,du\,dv \\ E\,dv + F\,du\,dv , & F\,dv + G\,du\,dv \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (3)$$

což jest známá nám diff. rovnice křivek křivosti naší plochy řídící, takže nalézáme známého výsledku: Normály plochy podél křivek křivosti tvoří plochy rozvinutelné.

206. Podmínka pro kongruenci normálovou. – Tážeme se, za jakých podmínek jest obraz kongruence kongruencí normálovou. Kongruence budiž vyjádřena na základě libovolné plochy řídící a ptáme se, kdy existuje plocha normálová ke všem jejím paprskům. Je-li (ξ, η, ζ) bod této plochy na paprsku $p(X, Y, Z)$ (viz rovnice (1)), jest

$$S\,X\,d\xi = 0 \qquad \text{čili}$$

$$S\,X\,(dx + u\,dX + X\,du) = S\,X\,dx + u\,S\,X\,dX + du\,S\,X^2 = 0$$

odkud plyne (jelikož $S\,X^2 = 1$, $S\,X\,dX = 0$);

$$du = -S\,X\,dx \quad \dots (4) \qquad \text{čili}$$

$$du = -S\,X\,[X_v\,dv + X_w\,dw].$$

Pravá strana jest dosti úplným differenciálem, což dává podmínku

$$\frac{\partial\, S\,X\,X_w}{\partial v} = \frac{\partial\, S\,X\,X_v}{\partial w} \quad \dots (5)$$

čili

$$S(X_v X_w + X X_{vw}) = S(X_w X_v + X X_{vw})$$

t. j.

$$M_1 = M_2 \quad \dots (5),$$

což plocha řídící jest kterákoli. Plocha normálová

naší kongruence jest pak dána rovnicí

$$u = -\int (S X x_v \, dv + S X x_w \, dw) \quad \ldots (n)$$

Seznali jsme tedy, že podmínka $M_1 = M_2$ jest pro kongruenci normálovou nutná, ať plocha řídící jest kterákoli.

Povšimněme si nyní toho, že hlavní řezy plochy normálné, které jsou ohniskovými rovinami normálové kongruence, jsou k sobě kolmé, z čeho plyne, jak již řečeno, že křivky ohniskové, které jsou hranami vratu rozvinutelných ploch normálové kongruence, jsou geodetickými křivkami ohniskové plochy (a naopak, viz též str. 403 a 409).

Vyjděme naopak z podmínky, že ohniskové roviny paprsků kongruence svírají pravý úhel, a vyjadřme ji počtem. Buďte

$$A x + B y + C z + D = 0$$

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

rovnice ohniskových rovin. Ježto jsou k sobě kolmé, jest

$$A A_1 + B B_1 + C C_1 = 0 .$$

Rovina ohnisková obsahuje paprsek (X, Y, Z), tedy

$$(6) \ldots A X + B Y + C Z = 0 ,$$

a poněvadž rovina ohnisková dotýká se v ohnisku (u) všech přímkových ploch paprskem p jdoucích, tedy též ploch příslušných parametrickým křivkám $w = \text{konst}$ a $v = \text{konst}$, platí současně

$$A(x_v + u X_v) + B(y_v + u Y_v) + C(z_v + u Z_v) = 0$$

$$A(x_w + u X_w) + B(y_w + u Y_w) + C(z_w + u Z_w) = 0 ,$$

odkud vyloučením u plyne

$$\begin{vmatrix} S\,A\,x_v\,, & S\,A\,X_v \\ S\,A\,x_w\,, & S\,A\,X_w \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \quad (7)$$

Koeficienty A, B, C plynou tedy z rovnic (6), (7). Pokládáme-li A, B, C za běžné souřadnice, pak (6) značí rovinu jdoucí počátkem a (7) značí kužel 2. stupně o vrcholu v počátku, a přímky průsečné obou ploch jsou kolmé k jedné resp. druhé rovině ohniskové. Jak plyne z rovnice (6), jsou tyto průsečné přímky kolmé ku paprsku $p\,(X, Y, Z)$; tudíž paprsek leží též na kuželi (7), neboť jest

$$S\,X\,X_v = 0, \quad S\,X\,X_w = 0,$$

tudíž dosadíme-li X, Y, Z za A, B, C do rovnice (7), nabýváme identity. Přímky (A, B, C), (A_1, B_1, C_1), (X, Y, Z) tvoří tedy pravoúhlý trojhran nepsaný kuželi (7). Kužel tudíž jest tedy t. zv. kuželem rombstranným, do něhož se dá vepsati mnoho pravoúhlých trojhranů a jehož rovnice se vyznačuje tím, že součet koeficientů při členech 2. stupně jest nula, t. j.

$$S\,(x_v X_w - x_w X_v) = 0 \quad \text{čili}$$

$$M_1 = M_2 \quad \dots \quad (8).$$

Z totožnosti rovnic (5), (8) plyne: Nutná a postačující podmínka pro to, aby kongruence byla kongruencí normálovou, jest, aby roviny ohniskové byly navzájem kolmy. Početně vyjádřena jest vzta-hem $M_1 = M_2$.

Je-li tato podmínka splněna a je-li řídicí plocha

naklonění k paprskům kongruence, pak rovnice (u) (str. 425) vyjadřuje plochy normálné. Jsou to t. zv. plochy paralleln í, neboť kolmá vzdálenost každých dvou z nich jest stálá ($u_1 - u_2 = \text{konst.}$). Ohniskové plocha normálové kongruence jest pak společnou evolutovou plochou všech těchto ∞^1 ploch parallelních. —

— Budiž konečně poukázáno k tomu, že vzorec

$$\sin \Omega = \frac{\delta}{d}$$

vede nás v případě $\Omega = \frac{\pi}{2}$ ke vztahu

$$\delta = d,$$

odkud plyne, že při kongruenci normálové splývají body hlavní s ohniskami paprsků kongruence. První rovina hlavní splývá tedy s druhou rovinou ohniskovou a naopak. Jsou-li pak roviny hlavní jsou k sobě kolmé, možno též vysloviti větu:

Splynutí bodů hlavních s ohniskami jest rovněž nutnou a postačující podmínkou pro to, aby kongruence byla normálovou. —

207. Věta Taylorova od Beltramiho. — Nejme kongruenci normálovou vztažennou k obecné ploše řídicí. Přímky kongruence budiž s touto plochou pevně spojeny. Nově psaná věta praví nám pak, že deformací řídicí plochy přejde naše kongruence opět v kongruenci normálovou.

Poprsek po vůli s tečnami parametrických křivek

úhly φ resp. ψ, takže jest

$$\cos\varphi = \Sigma X \left(\frac{dx}{ds}\right)_v, \quad \cos\psi = \Sigma X \left(\frac{dx}{ds}\right)_w$$

kde

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_w = x_w \frac{dw}{ds_w}, \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)_v = x_v \frac{dv}{ds_v}$$

a je-li pro plochu řídicí lineární element dán výrazem $ds^2 = E\,dv^2 + 2F\,dv\,dw + G\,dw^2$, takže $ds_v = \sqrt{E}\,dv$, $ds_w = \sqrt{G}\,dw$, jest po dosazení

$$\cos\varphi = \frac{\Sigma X x_v}{\sqrt{E}}, \quad \cos\psi = \frac{\Sigma X x_w}{\sqrt{G}} \quad \ldots (1)$$

Tyto úhly φ, ψ se dle předpokladu při deformaci řídicí plochy nemění.

Podmínka (15_0) str. 424) pro to, aby naše kongruence byla normálovou, nabývá zde vzhledem k (1) tvaru

$$\frac{\partial}{\partial w}\sqrt{E}\cos\varphi = \frac{\partial}{\partial v}\sqrt{G}\cos\psi \quad \ldots (2)$$

a jelikož veličiny E, G, φ, ψ se deformací nemění, zůstává tato rovnice (2) v platnosti i pro kongruenci vzniklou po deformaci, čímž důkaz řečené věty proveden.

Píšeme-li pak rovnici (n) (str. 425) normálné plochy kongruence ve tvaru

$$u = -\int \{\sqrt{E}\cos\varphi\,dv + \sqrt{G}\cos\psi\,dw\},$$

seznáváme že plochy orthogonální pro původní kongruenci přecházejí deformací v orthogonální plochy kongruence odvozené.

218. Věta Malus–Dupinova. – „Tvoří-li světelné pa-

} paprsky normálovou kongruenci a odrážejí-li nebo lámou-li se na libovolné ploše (jako rozhraní dvou prostředí), vzniká zase kongruence normálová."

Důkaz snadno provedeme. Paprsek $p(X, Y, Z)$ dopadejž v bodě $A(x, y, z)$ na naši plochu, svíraje s normálou (a, b, c) bodu A úhel ε. Lomem přechází v paprsek $p_1(X_1, Y_1, Z_1)$ svírající s normálou úhel ε_1. Pak zákon lomu jest dán rovnicí (n = t.zv. index lomu)

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon_1} = n = \text{konst} \quad \dots \quad (1),$$

při čemž paprsky p, p_1 a normála (a, b, c) leží v jedné rovině, takže lze psáti

$$\lambda a = X + \mu X_1, \quad \lambda b = Y + \mu Y_1, \quad \lambda c = Z + \mu Z_1 \quad \dots \quad (2).$$

Z těchto rovnic (2) plyne jednak

$$\lambda = S a X + \mu S a X_1$$

čili $$\lambda = \cos \varepsilon + \mu \cos \varepsilon_1 \quad \dots \quad (3),$$

jednak

$$\lambda S a X = 1 + \mu S X X_1$$

čili $$\lambda \cos \varepsilon = 1 + \mu \cos (\varepsilon - \varepsilon_1) \quad \dots \quad (4).$$

Násobme rovnici (3) $\cos \varepsilon$ a srovnejme s rovnicí (4), čímž obdržíme

$$\cos^2 \varepsilon + \mu \cos \varepsilon \cos \varepsilon_1 = 1 + \mu \cos \varepsilon \cos \varepsilon_1 + \mu \sin \varepsilon \sin \varepsilon_1$$

čili $$\mu \sin \varepsilon \sin \varepsilon_1 = -\sin^2 \varepsilon$$

t.j. $$\mu = -\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon_1} = -n \quad (= \text{konst}) \quad \dots \quad (5),$$

takže vzhledem ke (5) mají rovnice (2) tvar

$$\lambda a = X - n X_1, \quad \dots \quad (6), \text{ kde } \lambda \text{ plyne z (3).}$$

Berme naši plochu lomu za řídící plochu obou kongruencí. Rovnice (6) platí pro každý paprsek, tedy též pro paprsky sousezné ve směru křivek parametrických (w), (v), takže derivací jich plyne

$$a_v \lambda + a \lambda_v = \frac{\partial X}{\partial v} - n \frac{\partial X_1}{\partial v} \quad | \cdot x_w$$

$$a_w \lambda + a \lambda_w = \frac{\partial X}{\partial w} - n \frac{\partial X_1}{\partial w} \quad | \cdot x_v$$

odkud

$$\lambda S a_v x_w + \lambda_v S a x_w = S x_w \frac{\partial X}{\partial v} - n S x_w \frac{\partial X_1}{\partial v}$$

$$\lambda S a_w x_v + \lambda_w S a x_v = S x_v \frac{\partial X}{\partial w} - n S x_v \frac{\partial X_1}{\partial w}.$$

Jest však $S a_v x_w = S a_w x_v = M$ (pro plochu řídící),

$$S a x_w = S a x_v = 0,$$

$$S X_v x_w = S X_w x_v$$

(neboť pro kongruenci prvou jest dle předpokladu $M_1 = M_2$), takže odečtením posledních dvou rovnic plyne

$$S \frac{\partial X_1}{\partial v} x_w = S \frac{\partial X_1}{\partial w} x_v \quad \ldots \quad (7),$$

t. j. odvozená kongruence jest rovněž normálová, čímž důkaz věty proveden.

Orthogonální plocha odvozené kongruence jest pak dána rovnicí (viz (n) str. 425)

$$u_1 = -\int (S X_1 x_v \, dv + S X_1 x_w \, dw)$$

čili, po dosazení z (6) a vzhledem ku: $S a x_v = S a x_w = 0$,

$$u_1 = \frac{u}{n} + \text{konst} \quad \ldots \quad (8).$$

Značí-li nyní v resp v_1 rychlost světla v obou prostředích, jest jak známo $n = \frac{v}{v_1}$,

takže rovnici (8) lze psáti:

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u}{v} + \text{konst} \quad \text{čili} \quad \frac{u_1}{v_1} - \frac{u}{v} = \text{konst}.$$

Jestliže pak při pohybu rovnoměrném jest dráha rovna rychlosti násobené časem, máme větu:

„Orthogonální plochy normálových kongruencí světelných paprsků odpovídajících si lomených jsou navzájem přiřazeny jednoznačně tím způsobem, že každý paprsek dospěje od první plochy k rozhraní v téže době jako od rozhraní ke ploše druhé".

– Nejjednodušším případem normálové kongruence paprskové jsou paprsky vycházející z jediného bodu. Na tento případ nutno tedy obě předchozí věty aplikovati.

209. Plocha kaustická. – Předpokládejme, že jeden z plášťů ohniskové plochy normálové kongruence čili evolutové plochy plochy orthogonální ke kongruenci se redukuje v křivku φ. Jedno ohnisko paprsku p jest v průsečíku F s křivkou φ, takže jedna křivka se křivosti plochy orthogonální P, procházející bodem M paprsku p leží na kuželi o vrcholu F, jenž jest jednou z ploch rozvinutelných, paprskem p jdoucích. Křivka ta jest orthogonální trajektorií povřšek kužele čili průsečnou křivkou kužele s plochou kulovou o středu F. Tato plocha kulová má v každém bodě křivky ta příslušný paprsek za normálu, dotýká se tedy plochy P podél křivky ta. Každému bodu F křivky φ přísluší plocha kulová o středu F, která dotýká se plochy P podél příslušné křivky křivosti,

takže „plocha P jest obálkou soustavy ploch kulových závislé na jednom parametru; nazýváme ji plochou kanálovou".

Křivka $\varkappa$ jest tedy průsekem plochy kulové s koulí souměznou; jest to kružnice. Kužel o vrcholu F a basi $\varkappa$ jest rotační, jeho osa jest spojnicí středů obou soumězných koulí, tedy tečna Fu křivky φ. Tečna Mt křivky $\varkappa$ jest kolmá k této tečně Fu, takže tečna Fu leží v rovině druhého hlavního řezu bodu M. Seznáváme tudíž:

„Uvažované kongruence jsou vyplněny površkami soustavy ∞^1 kuželů rotačních, jejichž osy jsou tečnami křivky, která jest místem vrcholů kuželů těch. – A naopak každá kongruence takto definovaná jest kongruencí normálovou", neboť roviny ohniskové jsou roviny tečné a roviny meridiánové těchto rotačních kuželů, jsou tedy navzájem kolmy.

<u>210. Dupinova cyklida.</u> – Položme si otázku, mohou-li oba pláště evolutové plochy redukovati se na křivky φ, φ_1. Rozvinutelné plochy takovéto kongruence jsou kužele mající vrchol na jedné z obou křivek a procházející druhou. Kužele tyto mají býti rotační, takže každou z křivek φ, φ_1 musí býti možno položiti ∞^1 kuželů rotačních. Křivky ty jsou tedy křivky algebraické stupně nejvýše 4. Avšak stupně 4. býti nemohou, neboť křivkou (prostorovou) stupně čtvrtého procházejí

nejvýše 4 kužele 2. stupně. Též stupně 3. nemohou býti, mají-li křivky φ, φ_1 býti různé, neboť kužele 2. stupně procházející kubickou křivkou prostorovou mají vrcholy na křivce. Uvažujme i tento případ, kdy křivky φ, φ_1 splynou. Snadno seznáme, že nemůže existovati taková křivka kubická, aby kužele 2. stupně jí jdoucí byly rotační. Kužel takový musel by totiž míti tečné křivky současně osou a současně přímkou povrchovou, rozpadl by se tedy ve dvě roviny, což jest proti předpokladu, že má býti rotačním.

Křivky φ, φ_1 jsou tedy kuželosečky, a to v takové soustavě že jedna jest místem vrcholů kuželů rotačních procházejících druhou. Jsou to tedy dvě kuželosečky v soustavě fokální. Seznáváme tedy, že „přímky protínají dvě kuželosečky navzájem fokální tvoří kongruenci normálovou. Orthogonální plochu této kongruence nazýváme Dupinovou cyklidou. Seznali jsme, že obě soustavy křivek křivosti této plochy jsou kružnice."

Fokální kuželosečky leží v rovinách navzájem kolmých a ohniska jedné jsou vrcholy druhé. Jsou to jednak ellipsa a hyperbola, jednak dvě paraboly. Přechází-li ellipsa v kružnici, přechází hyperbola φ_1 v osu této kružnice a orthogonální plochy kongruence jsou plochy rotační o ose φ_1, jejichž meridiánovými křivkami jsou kružnice o středu na φ, t.j. plochy trubicové. — Je-li naopak křivka φ přímkou, jest orthogonální plocha obalovou plochou ploch kulových na-

jících středy na této přímce. Jest to plocha rotační o ose φ; jeden plášť plochy evolutové resolvuje se na přímku φ; druhý plášť vytvořen jest rotací evolvty meridiánu, aby se také resolvoval na křivku, musí evolvta meridiánu býti bodem, tedy meridián jest kružnice, takže máme opět případ plochy prstencové.

Pozn. Plyne se konečně, mohou-li oba pláště evolutové plochy splynouti. Pak musí splynouti obě soustavy křivek křivosti plochy P, přecházejí tedy v křivky minimální. Kongruence skládá se zde z přímkových ploch isotropických a oba pláště redukují se na touž křivku, jak v dalším seznáme.

211. Obalové plochy ploch kulových. — Dospěli jsme v předchozím k plochám tohoto druhu jako orthogonálním plochám určitých kongruencí. Uvažujme nyní přímo obálku P kulových ploch K. Každá koule protne kouli sousedící v kružnici a normály plochy P ve všech bodech této kružnice procházejí středem koule. Všechny normály plochy P protínají tedy určitou křivku φ, která jest místem středů kulových ploch K a jest jedním pláštěm plochy evolutové. Jelikož pak koule K dotýkají se plochy P podél celé kružnice, jest, dle věty Joachimsthalovy, tato kružnice křivkou křivosti plochy P. Seznáváme tedy, že plochy obalové ploch kulových mají jednu soustavu kruhových křivek křivosti.

Také platí věta obrácená: „Každá plocha mající sou-

stavu kruhových křivek křivosti jest obálkou ploch kulových". Uvažujme jednu kruhovou křivku křivosti k; každá koule jí jdoucí protíná, dle věty Joachimsthalovy, plochu pod stálým úhlem. Tudíž plocha kulová jdoucí kružnicí k a dotýkající se plochy v jednom bodě kružnice k, dotýká se plochy podél celé této křivky, takže každá kruhová křivka křivosti jest dotykovou křivkou určité koule s plochou, t. j. plocha jest obálkou koulí takto definovaných.

Snadno obdržíme analytické vyjádření. Plocha kulová mějž střed o souřadnicích a, b, c a poloměr r, při čemž tyto veličiny buďte funkcemi jednoho parametru, takže jest dána rovnicí

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0.$$

Pak její karakteristika jest mimo to dána rovnicí

$$(x-a)\,da+(y-b)\,db+(z-c)\,dc+r\,dr=0,$$

jest to tedy skutečně kružnice ležící v rovině kolmé k tečně (da, db, dc) křivky, která jest místem středů kulových ploch soustavy.

V důsledku toho obsahuje Dupinova cyklida dvě soustavy kruhových křivek křivosti a jest obálkou dvou soustav ploch kulových o středech na obou kuželosečkách fokálních.

212. Analogie geometrie přímkové a geometrie ploch kulových. — Plocha kulová závisí na veličinách a, b, c, r, tedy na čtyřech parametrech, právě tak jako přímka,

takže možno předvídati určitou příbuznost obou geometrií. Tato příbuznost vyjádřena jest analytický transformací, kterou určil Sophus Lie a kterou uvedeme později. Základní vztahy však jsou přímo patrny.

Máme-li totiž nějaký útvar přímkový dán rovnicemi mezi Plückerovými souřadnicemi přímek, interpretujme tyto souřadnice jako souřadnice a, b, c, r plochy kulové načež danému přímkovému útvaru odpovídá v geometrii ploch kulových určitý útvar rovnicemi těmi definovaný. Tak soustavě ∞^1 přímek odpovídá soustava ∞^1 ploch kulových a místu přímek těch, t. j. ploše přímkové, obálka těchto ploch kulových. – V důsledku toho odpovídá Dupinova cyklida plochám dvojnásobně přímkovým, t. j. přímkovým plochám 2. stupně, kteréžto okolnosti možno při theorii této plochy s prospěchem užiti.

213. Vytvoření a rovnice Dupinovy cyklidy. – Budiž K plocha kulová 1. soustavy, K_1 plocha druhé soustavy, plochy P dotýkejtež se podél kružnic k resp k_1. Ježto plocha P dá se vytvořiti proměnlivou kružnicí k resp k_1, mají tyto 2 kružnice společný alespoň jeden bod M. Buďte O, O_1 středy koulí K, K_1; pak jsou spojnice OM, O_1M normálami kulových ploch K resp K_1, tedy normálami plochy P; splývají tudíž v jedné přímce OMO_1, t. j. plochy K, K_1 dotýkají se v bodě M. Tedy každá koule jedné soustavy dotýká se každé koule druhé soustavy. (Sro-

nej s větou: Každá površka jedné soustavy na ploše 2. stupně protíná každou povrchu druhé soustavy).

Jako pak dále plocha 2. stupně jest místem přímky protínající tři pevné přímky, jest Dup. cyklida obálkou ploch kulových dotýkajících se tří pevných koulí (druhé soustavy). Tyto tři koule K, K', K'' protínají se ve dvou bodech, které možno považovati za koule polo měru nula dotýkající se koulí K, K', K''; jsou totiž v každé z obou soustav ploch kulových 2 koule polo měru nula. Koule druhé soustavy musí se dotýkati těchto koulí nulových, které jsou zároveň svými středy, tedy leží na kuželosečkách fokálních.

Vycházíme-li tedy od obou kuželoseček fokálních, mají koule jedné soustavy své středy na jedné z obou křivek a procházejí dvěma pevnými body druhé, ležícími souměrně k rovině její křivky.

Odtud snadno vyvodíme rovnici Dup. cyklidy.

1) Předpokládejme nejprve, že jedna z obou kuželoseček jest ellipsa, druhá tedy hyperbola. Osy ellipsy berme za osy x, y. Pak tato křivka má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ při čemž } z = 0 \ldots (1).$$

Fokální hyperbola má pak rovnici

$$\frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ pro } y = 0 \ldots \quad (2)$$

Souřadnice bodu M ellipsy možno též psáti

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi, \quad z = 0.$$

Budiž nyní $A(x_0, y_0, z_0)$ pevný bod hyperboly, při čemž

$y_0 = 0$, $z_0^2 = b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2-b^2} - 1\right)$.

Plocha kulová o středu M jdoucí bodem A má rovnici

$$(x - a\cos\varphi)^2 + (y - b\sin\varphi)^2 + z^2 = (x_0 - a\cos\varphi)^2 + b^2\sin^2\varphi + b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2-b^2} - 1\right)$$

čili

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax\cos\varphi - 2by\sin\varphi = x_0^2 + b^2\frac{x_0^2}{a^2-b^2} - b^2 - 2ax_0\cos\varphi$$

čili

$$2a(x - x_0)\cos\varphi + 2by\sin\varphi = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - \frac{a^2x_0^2}{c^2} \quad \ldots(3)$$

je-li $c^2 = a^2 - b^2$.

Rovnice plochy kulové jest tedy tvaru

$$A\cos\varphi + B\sin\varphi = C.$$

Abychom obdrželi obálku, derivujme dle φ:

$$-A\sin\varphi + B\cos\varphi = 0$$

a z obou rovnic vylučme φ, čímž obdržíme rovnici

$$A^2 + B^2 = C^2,$$

takže naše cyklida má rovnici

$$4a^2(x - x_0)^2 + 4b^2y^2 = \left(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - \frac{a^2}{c^2}x_0^2\right)^2 \quad \ldots(4).$$

2). Uvažujme případ dvou fokálních parabol, tyto budiž dány rovnicemi

$$z = 0, \quad y^2 = 2px \quad \ldots\ (1)$$

$$y = 0, \quad x^2 + z^2 = (x - p)^2 \quad \ldots\ (2)$$

(druhá rovnice jest složena z rovnic $z^2 = -2p\left(x - \frac{p}{2}\right)$)

Souřadnice bodu M křivky (1) píšme

$$x = 2p\lambda^2, \quad y = 2p\lambda, \quad z = 0.$$

Pevný bod A křivky (2) měj pak souřadnice

$$x_0, \quad y_0 = 0, \quad z_0, \quad \text{kde } z_0^2 = (x_0 - p)^2 - x_0^2.$$

Koule o středu M jdoucí A má rovnici

$$(x-2p\lambda^2)^2+(y-2p\lambda)^2+z^2=(x_0-2p\lambda^2)^2+4p^2\lambda^2+$$
$$+(x_0-p)^2-x_0^2$$

čili

$$x^2+y^2+z^2-(x_0-p)^2-4p\lambda y-4p(x-x_0)\lambda^2=0,$$

má tedy tvar

$$A\lambda^2+B\lambda=C$$

odkud derivací dle λ

$$2A\lambda+B=0, \text{ načež vyloučením } \lambda:$$

$$4AC=-B^2,$$

takže rovnice naší cyklidy jest

$$(x-x_0)\left[x^2+y^2+z^2-(x_0-p)^2\right]+py^2=0 \dots (3).$$

Vidíme tedy, že Dupinova cyklida jest obecně řádu čtvrtého, v případě obou fokálních parabol však řádu třetího.

214. Isotropická plocha kruhová. – Mezi plochami přímkovými zaujímají speciální místo plochy rozvinutelné, na nichž každá poloha prostírá sousměrnou. Analogický případ mezi obalovými plochami ploch kulových jest ten, kdy každá koule dotýká se sousměrné. Je-li tedy plocha kulová dána rovnicí

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0, \dots (1)$$

takže karakteristika jest obsažena v rovině

$$(x-a)da+(y-b)db+(z-c)dc+r\,dr=0 \dots (2),$$

musí v našem případě vzdálenost této roviny od středu (a, b, c) býti rovna $\pm r$, t. j.

$$\frac{r\,dr}{\sqrt{da^2+db^2+dc^2}} = \pm r \qquad \text{čili}$$

$$da^2+db^2+dc^2 = dr^2 \quad \dots (3).$$

Jest tedy r obloukem s křivky c, která jest místem středů kulových ploch soustavy. Stanovme dotyčný bod D koule s koulí soumeznou. Ježto leží na tečně křivky c, vyhovují jeho souřadnice rovnicím

$$\frac{x-a}{da} = \frac{y-b}{db} = \frac{z-c}{dc},$$

kterýžto poměr rovná se, vzhledem ku (2),

$$= -\frac{r}{dr} = -\frac{s}{ds}, \qquad \text{takže}$$

$$(4) \dots x = a - s\frac{da}{ds} = a - s\alpha, \quad y = b - s\beta, \quad z = c - s\gamma,$$

kde α, β, γ jsou směr. cosiny tečny. Bod D popíše evolventu K křivky c.

Průsek koule naší soustavy s koulí soumeznou jest průsekem jejím s tečnou rovinou bodu D, jest to tedy dvojice přímek isotropických jdoucích bodem D. Vidíme tedy: „Obálka naší soustavy ploch kulových skládá se ze dvou přímkových ploch o površkách isotropických. Plochu takovou nazýváme kanálovou plochou isotropickou."

– Naopak každá přímková plocha P o površkách isotropických jest jedním pláštěm obálky koulí. Uvažujme jednu její površku i a kružnici kulovou $\varkappa$. Přímkou i prochází nekonečně mnoho ploch kulových; tyto koule obsahují přímku i a kružnici $\varkappa$, což dá-

ví 7 podmínek, takže jest jich ∞^2. Stanovme, že plocha kulová tohoto systému má se dotýkati plochy P ve dvou bodech přímky i; tím jest vytčena jediná plocha kulová. Tato koule dotýká se však naší plochy P nejen ve vytčených dvou bodech přímky i, ale též v jejím nekonečně vzdáleném bodě J, dotýká se tedy plochy P podél celé přímky i, takže plocha P dotýká se skutečně soustavy ∞^1 ploch kulových, tvoříc jednu část jejich obálky. –

Na naší ploše P splývají obě soustavy křivek křivosti s površkami isotropickými, následkem čehož splývají oba pláště evolutové plochy s křivkou c. Křivka k má zde podobnou úlohu jako hrana vratu rozvinutelné plochy v kongruenci normál. Neboť (Srovnej pozn. na str. 434.)

215. Křivky asymptotické a křivky křivosti. – Budiž dána plocha a na ní křivka asymptotická. Tečny této křivky vytvořují plochu rozvinutelnou, která jest obálkou tečných rovin ku ploše sestrojených v bodech křivky, při čemž roviny této soustavy jsou oskulačními rovinami křivky, čili rovinami majícími v bodech křivky s křivkou styk řádu druhého.

Za druhé budiž dána plocha a na ní křivka křivosti k. Normály sestrojené ku ploše v bodech křivky vytvořují rozvinutelnou plochu. Sestrojme hranu vratu c této plochy a uvažujme soustavu ploch kulových majících stře-

dy na křivce c a dotýkajících se plochy v bodech křivky křivosti k, mějících tedy v bodech křivky k s křivkou styk řádu druhého. Oblouk křivky c rovná se poloměru kulové plochy naší soustavy, takže vidíme, že obálkou soustavy ploch kulových mějících s křivkou křivosti plochy styk řádu druhého jest isotropická plocha kanálová, ploše podél křivky opsaná.

Rozvinutelné ploše v geometrii přímkové odpovídá isotropická plocha kanálová v geometrii ploch kulových. Vidíme tedy, že k této souvislosti přistupuje další souvislost, vyjádřená větou:

„Asymptotické křivce nějaké plochy, v geometrii přímkové, odpovídá na základě příbuznosti obou geometrií křivka křivosti nějaké plochy, v geometrii ploch kulových."

<u>216. Křivky křivosti na obalové ploše koulí.</u> – Jednu soustavu křivek křivosti takovéto plochy tvoří jak známo kružnice karakteristické. Jde nám o druhou soustavu. Budiž křivka <u>c</u> místem středů koulí; budiž dána rovnicemi

$$x = \varphi(s),\ y = \psi(s),\ z = \chi(s) \quad \dots\ (1),$$

kde s značí oblouk. Jedna z koulí o středu A protínej kouli souměrnou v kružnici k, jejíž rovina jest kolmá k tečně At. Vytkněme si Serretův trojhran bodu A a stanovme vzhledem k němu souřadnice bodu P kružni-

ce k. Budiž θ úhel PAt, r poloměr koule (tedy $r = AP$), a φ úhel, který svírá poloměr SP kružnice k s hlavní normálou bodu A křivky c. Pak jsou řečené souřadnice (ξ, η, ζ) bodu P dány výrazy

(2)... $\xi = r \cos\theta$, $\eta = r \sin\theta \cos\varphi$, $\zeta = r \sin\theta \sin\varphi$,

načež jeho obecné pravoúhlé souřadnice (X, Y, Z) jsou

$$X = x + a\xi + a_1\eta + a_2\zeta, \quad \ldots \quad \ldots (3);$$

značí-li $a, \ldots, a_1, \ldots, a_2, \ldots$ směr. cosiny tečny, hlav. normály a binormály bodu A.

Rovnice (3) jsou též parametrickým vyjádřením naší obalové plochy, a to na základě parametrů s, φ, neboť veličiny r, θ jsou rovněž funkcemi oblouku s.

Jejich souvislost snadno obdržíme. Vztah $\overline{AP} = r$ dán jest rovnicí

$$S(X-x)^2 - r^2 = 0,$$

jejíž derivací dle s plyne

$$S\,a(X-x) + r\frac{dr}{ds} = 0,$$

kterážto rovnice nabývá za předpokladu, že pravoúhlé souřadnice (X, Y, Z) nahradíme souřadnicemi (ξ, η, ζ), dajíce jejich trojhranu splynouti s trojhranem Serretovým, tvaru

$$\xi + r\frac{dr}{ds} = 0 \qquad \text{čili}$$

$$r\cos\theta + r\frac{dr}{ds} = 0$$

odkud plyne žádaná souvislost

$$\cos\theta = -\frac{dr}{ds} \quad \ldots \quad (4).$$

Hledaná soustava křivek křivosti jest tvořena orthogonálními trajektoriemi kružnic k, jakožto para-

metrických křivek $s = konst.$ Tečna bodu P plochy (3) dána jest přírůstky

$$dX = \alpha\, ds + \frac{a_1}{R}\xi\, ds - \left(\frac{a}{R} + \frac{a_2}{T}\right)\eta\, ds + \frac{a_1}{T}\zeta\, ds + a\, d\xi + a_1\, d\eta + a_2\, d\zeta, \ldots$$

Bereme-li opět Serretův trojhran za trojhran souřadný, nabývají tyto výrazy tvaru (jest-li $a = b_1 = c_2 = 1, b = c_1 = 0$)

$$dX = \left(1 - \frac{\eta}{R}\right) ds + d\xi, \quad dY = \left(\frac{\xi}{R} + \frac{\zeta}{T}\right) ds + d\eta,$$

$$dZ = -\frac{\eta}{T}\, ds + d\zeta.$$

Pro tečnu kružnice k jest speciálně (jelikož $ds = 0$)

$$dX_1 = d\xi = 0, \quad dY_1 = d\eta = -r \sin\theta \sin\varphi\, d\varphi,$$

$$dZ_1 = r \sin\theta \cos\varphi\, d\varphi.$$

Má-li pak tečna (dX, dY, dZ) křivky hledané býti kolmá ke kružnici k, musí

$$S\, dX_1\, dX = 0,$$

čímž nabýváme diferenciální rovnice hledaných křivek křivosti v tvaru

$$-\left[\left(\frac{\xi}{R} + \frac{\zeta}{T}\right) ds + d\eta\right] \sin\varphi + \left[-\frac{\eta}{T}\, ds + d\zeta\right] \cos\varphi = 0$$

čili

$$-\frac{r\cos\theta}{R} \sin\varphi\, ds - \frac{ds}{T}(\xi \sin\varphi + \eta\cos\varphi) - d\eta \sin\varphi + d\zeta \cos\varphi = 0$$

čili (vložením z (2))

$$-\frac{r\cos\theta}{R} \sin\varphi\, ds - \frac{r\sin\theta}{T} ds - \sin\varphi\left[d(r\sin\theta)\cdot\cos\varphi - r\sin\theta \sin\varphi\, d\varphi\right] + \cos\varphi\left[d(r\sin\theta)\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi\, d\varphi\right] = 0$$

čili

$$-\frac{r\cos\theta}{R} ds \sin\varphi - \frac{r\sin\theta}{T} ds + r\sin\theta\, d\varphi = 0,$$

odtud

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{T} + \frac{\cot\theta}{R} \sin\varphi \quad \ldots \quad (5).$$

Diferenciální rovnice žádaných křivek křivosti

mají tedy tvar

$$\frac{d\varphi}{ds} = A \sin\varphi + B,$$

kde A, B jsou funkce oblouku s, takže zavedeme-li $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = w$ za novou neznámou, obdržíme pro w rovnici Riccatiho.

Ze známých vlastností této rovnice plyne tedy věta:

„Některé křivky křivosti na obalové ploše konků mají tu vlastnost, že libovolné 4 z nich protínají všecky kruhové křivky křivosti v témž dvojpoměru".

Připomeneme-li si známou okolnost, že mají obecné obalové plochy v geometrii kulové odpovídá známé nové analogii v geometrii přímkové plocha sborcená, můžeme paralleně k uvedené větě klásti větu:

„Křivočaré křivky asymptotické na ploše sborcené mají tu vlastnost, že libovolné 4 z nich protínají všecky přímky povrchové v témž dvojpoměru".

(Správnost této věty jest patrna odtud, že sečny křivek asymptotických 2. soustavy v bodech povšky p plochy sborcené jsou povškami hyperboloidu oskulačního ku ploše podél povšky p.)

Pozn. Je-li speciálně křivka c křivkou rovinnou jest řez plochy s touto rovinou jednou z hledaných křivek křivosti, takže řešení mají Riccatiho rovnice přechází ve 2 kvadratury.

217. Jeden z pláštů evolutové plochy jest plochou rozvinutelnou. – Případ tento jest obdobný k případu,

kdy jsem z těchto plášťů přicházel v křivku. V našem případě tvoří tečné roviny naší rozvinutelné plochy jednu soustavu rozvinutelných ploch kongruence normálové. Takováto tečná rovina R protíná tedy orthogonální plochu v křivce uzavřené ke všem paprskům kongruence ležícím v rovině R, při čemž křivka ta musí být křivkou křivosti. Protíná-li tedy rovina R plochu orthogonální P podél celé křivky je pod úhlem pravým.

Naopak protíná-li plocha P orthogonálně soustavu rovin, jsou dle věty Joachimsthalovy její řezy s těmito rovinami křivkami křivosti a roviny tyto, tvoříce jednu soustavu rozvinutelných ploch kongruence normálové, obalují rozvinutelnou plochu tvořící jeden plášť plochy evolutové.

Jest dále patrno, že křivky křivosti druhé soustavy naší plochy P jsou orthogonálními trajektoriemi rovin R. Platí tedy věta: „Všechny křivky křivosti druhé soustavy naší plochy P mají společnou plochu polární, jejíž hrana vratu jest místem středů oskulačních kruhů křivek těch."

Jelikož křivka $\mathfrak{K}_1$ jest křivkou křivosti plochy P, tvoří normály v jejích bodech plochu rozvinutelnou, tudíž obalují jednu z evolut křivky $\mathfrak{K}_1$, tedy geodetickou křivku její plochy polární. Vycházíme-li tedy opět z roviny R a hledáme křivky $\mathfrak{K}_1$, máme úlohu stanoviti geodetické křivky plochy rozvinutelné, kteráž to úlo-

hra řeší se kvadraturami.— Jest nám ostatně známo, že rovněž úloha tomu jest s úlohou stanoviti plošnou evolventy dané křivky.— K řešení našeho problému dospějeme tedy kvadraturami.

Úlohu stanoviti plošnou evolventy dané křivky řešili jsme v II. dílu (str. 260 – 268), čímž jsme tedy též řešili problém stanoviti plochu P uvažovaného druhu. Povšimněme si ještě křivek křivosti $\varkappa$ rovinných, ležících v rovinách R.

Nejme v rovině R libovolnou přímku q. Každým bodem (M resp. N) této přímky prochází jedna z křivek $\varkappa_1$, orthogonálních k trajektorii soustavy rovin R, takže souhrnem těchto křivek $\varkappa_1$ jest přímková plocha, kterou možno též vytvořiti přímkou q náležící kolálející se rovině R. (Srovnej II str. 261). Křivky $\varkappa_1$ této přímkové plochy Q jsou orthogonálními trajektoriemi povšech q, každé dvě z nich vyjímají tedy na všech povškách q úsečku stálé délky. (Plyne ze známé věty o orthogonálních trajektoriích soustavy geodetických křivek na ploše). Je-li tedy R' jiná poloha roviny R a M', N' body odpovídající bodům M, N, jest $\overline{M'N'} = \overline{MN}$. Odtud plyne, že křivky $\varkappa, \varkappa'$ jsou shodné. Máme tedy větu:

„Plochy P uvažovaného druhu, zvané plochami Mongeovými, vytvořeny jsou pohybem neproměnlivé křivky $\varkappa$."

Plochu Mongeovu vytvoříme tedy libovolnou křivkou

$\varkappa$ vytknutou v rovině R, která kotálí se po křivce prostorové, zůstávajíc stále oskulační rovinou této křivky.

O evolutové ploše plochy Mongeovy platí pak věta: „Jeden plášť evolutové plochy plochy Mongeovy jest plochou rozvinutelnou, druhý plášť jest rovněž plochou Mongeovou".

Druhý plášť vytvořen jest totiž pohybem nepromĕnlivé evoluty křivky $\varkappa$.

218. Speciální případy. – 1) Jeden plášť budiž válcem. Obalují-li roviny R válec, jsou orthogonální trajektorie $\varkappa_1$ křivkami rovinnými a jejich roviny jsou kolmy k površkám válce. Plocha P má tedy obě soustavy křivek křivosti křivky rovinné. Jest t. zv. plochou rourovou. Vytvoříme ji buďto pohybem křivky rovinné $\varkappa$, jejíž rovina R kotálí se po válci, nebo tím že vytkneme v rovině soustavu parallelních křivek $\varkappa_1$ (společná jejich evoluta jest totiž normálním řezem válce) a každou z těchto křivek posuneme dle libovolného zákona ve směru k rovině kolmém.

2) Jeden plášť budiž kuželem. Tečna křivky $\varkappa_1$ jest kolmá k rovině R, tudíž též k površce kužele, podél které se ho rovina R dotýká. Odtud plyne, že křivka $\varkappa_1$ jest křivkou sferickou, ležící na kouli soustředné s kuželem. Protněme tudíž kužel soustřednou plochou kulovou o poloměru ρ v křivce $\underline{c}$ a uvažuj-

me v rovině R kružnici k o středu ve vrcholu kužele a o poloměru ρ. Kotálí-li se pak rovina R po kuželi tak, že kružnice k stálého poloměru kotálí se po sférické křivce c, vytvoří křivka x (libovolná) roviny R plochu Mongeovu uvažovaného druhu.

3). Zabývejme se nyní otázkou, mohou-li obě plášte evolutové plochy býti plochami rozvinutelnými. Plocha ortogonální P jest pak plochou Mongeovou dvojím způsobem, obě soustavy křivek křivosti jsou křivky rovinné. Ortogonální trajektorie x, rovin R obalujících jeden z plášťů, musí býti rovinnými křivkami křivosti plochy P. Budiž R_1 rovina jedné z nich. Roviny R jsou všecky kolmé ke křivce x_1, tedy též k rovině R_1. Odtud plyne, že nejsou-li roviny R všecky navzájem rovnoběžné, jest tomu tak pro všecky roviny R_1; roviny R obalují válec a roviny R_1 jsou kolmé k površkám tohoto válce. Jeden z plášťů přechází zde tedy v přímku, takže případ obou plášťů jako ploch rozvinutelných jest nemožný.

4.) Jeden plášť evolutové plochy budiž plochou rozvinutelnou a druhý křivkou. Plocha P vznikne opět pohybem křivky x ležící v rovině R, která obaluje plochu rozvinutelnou. Evoluta křivky x vytvoří při tomto pohybu druhý plášť evolutové plochy. Má-li tento plášť býti křivkou, musí křivka x býti kružnicí. Jde tedy zde v případě plochy kanálové.

Pozn. Je-li jeden plášť přímkou o, jest plocha P rotační kol o.

VII. Elementární kres kongruence.

219. Zavedení „pomocné přímky". – Dána-li povrchová přímka p plochy sbrcené, jest jak známo svazek sečných rovin ku ploše přímkou p jdoucích projektivní k řadě bodů dotyčných, ležících na přímce p. Tento vztah vede nás k jednoduché souvislosti konstruktivní. Vyskněme si libovolný bod O přímky p a jeho sečnou rovinu O ku ploše. Pak jest bod A přímky p dán vzdáleností $y = OA$ od bodu O a jeho rovinná sečná A tangentou úhlu γ, který svírá s rovinou O, takže náš projektivní vztah jest dán rovnicí

$$y \operatorname{tg}\gamma + \lambda y + \mu \operatorname{tg}\gamma + \nu = 0 \quad \dots \quad (1),$$

kde λ, μ, ν značí konstanty.

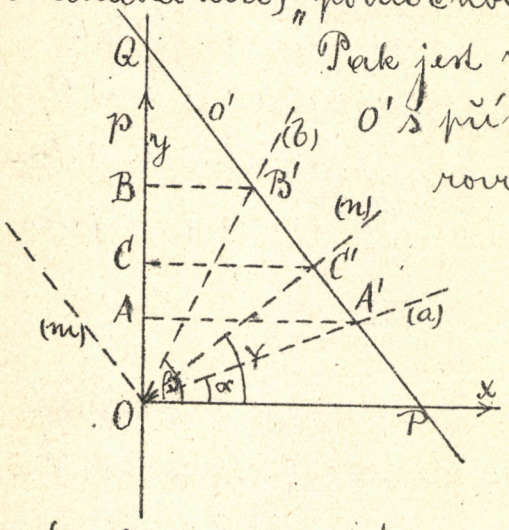
Protněme nyní náš svazek rovin rovinou P_I, jdoucí bodem O kolmo ku přímce p a rovinu P_I sklopme do roviny O jako roviny nákresné. Pak osa x, kolmá ku ose $y \equiv p$, značí stopu roviny O, kdežto stopou (a) roviny A jest přímka jdoucí O a svírající s osou x úhel γ. Sestrojme nyní (viz obrazec) bodem A rovnoběžku s osou x a její průsečík A' se stopou (a). Pak místem bodu A' jest přímka. Neboť v rovnici (1) vymizí člen ν, jelikož pro $y = 0$ jest též $\gamma = 0$, rovnice má tedy tvar

$$y + \lambda \frac{y}{\operatorname{tg}\gamma} + \mu = 0$$

a jelikož bod A' má souřadnice $\frac{y}{\operatorname{tg}\gamma}$, y, jest rovnice

$$y + \lambda x + \mu = 0 \quad \dots \quad (2)$$

rovnicí místa bodu A'. Přímku tuto, o', nazývejme (dle Mannheima) „pomocnou přímkou vzhledem k bodu O."



Pak jest zřejmo, že průsečík $Q \equiv Q'$ přímky o' s přímkou p jest dotyčným bodem roviny kolmé ku O a dále že přímka $(m) \parallel o'$ jest stopou roviny asymptotické. Přímka $(n) \perp (m)$ jest tudíž stopou roviny centrálné a její průsečík C' s přímkou o' vede nás k centrálnímu bodu C površky p dané plochy sborcené.

220. Representační bod pro element přímkové plochy.

– Z pravoúhlého trojúhelníka OC'Q a ze známé souvislosti distribučního parametru κ površky p s involucí orthogonálních tečných rovin površkou p plyne, že $CC' = \kappa$. Poloha bodu C' ku přímce p (na níž jest dána řada bodů dotyčných) nezáleží tedy na tom, od kterého bodu O přímky p jsme vycházeli, takže všecky pomocné přímky o' příslušné jednotlivým bodům O přímky p procházejí bodem C'. Bod C', stanovící nám jak centrálný bod C, tak i distribuční parametr κ površky p, nazývejme representačním bodem površky p naší přímkové plochy, anebo, správněji – přihlížíme-li ke všem přímkovým plochám dotýkajícím se podél přímky p – representačním bodem plošného elementu při přímce p.

– Jako důsledek předchozí souvislosti jest z obrazce přímo patrno konstruktivní řešení úlohy: Dány jsou tři body O, A, B površky p plochy sbočené a jejich roviny tečné; sestrojiti přímku pomocnou o' pro bod O, úhel, který svírá s rovinou tečnou O tečná rovina libovolného bodu přímky p, jakož i bod centrální a parametr distribuční površky p.

221. Analytické vyjádření. – Místo abychom sestrojovali bod centrální a parametr distribuční, můžeme již vyjádřiti délky CO a CC' jako funkce délek AO, BO a úhlů, které tvoří roviny A resp. B s rovinou O.

Běžnou přímku p za osu y a kolmici v bodě O za osu x a označme a, b pořadnice bodů A', B' (délky OA, OB), α, β úhly (OA), (OB). Úsečky bodů A', B' jsou pak $\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}, \frac{b}{\operatorname{tg}\beta}$. Rovnice přímky o' jest

$$y = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a\operatorname{tg}\beta} - \frac{1}{b\operatorname{tg}\alpha}}\, x - \frac{\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{b}{\operatorname{tg}\beta}}{\frac{1}{a\operatorname{tg}\beta} - \frac{1}{b\operatorname{tg}\alpha}}.$$

Kolmice OC' pak dána jest rovnicí

$$y = -\frac{\frac{1}{a\operatorname{tg}\beta} - \frac{1}{b\operatorname{tg}\alpha}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

takže společným řešením těchto rovnic obdržíváme

$$x = CC' = \kappa = \frac{\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{a\operatorname{tg}\beta} - \frac{1}{b\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2} \quad \dots (1)$$

$$y = OC = \frac{\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right)\left(\frac{1}{b\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{a\operatorname{tg}\beta}\right)}{\left(\frac{1}{a\operatorname{tg}\beta} - \frac{1}{b\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2} \quad \dots (2).$$

Přímku O' určíme nejjednodušeji jejími úseky OP, OQ, které jsou dány výrazy

$$OQ = \frac{\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}{\frac{1}{a\operatorname{tg}\beta} - \frac{1}{b\operatorname{tg}\alpha}} \quad \dots\dots (3)$$

$$OP = \frac{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad \dots\dots (4).$$

K jednodušším výsledkům vede případ, kdy body A, B jsou dány tak, že jejich roviny řečné jsou navzájem kolmé. Pravíž tedy

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = -1.$$

Pak dostáváme

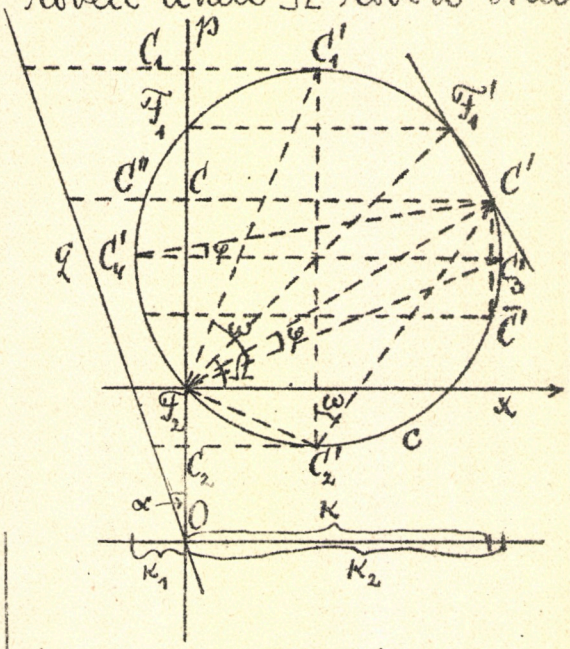
$$\frac{1}{OQ} = \frac{\sin^2\alpha}{a} + \frac{\cos^2\alpha}{b} \quad \dots (5),$$

$$\frac{1}{OP} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\sin 2\alpha \dots (6).$$

222. Representační kruh trsu kongruence. — Souhrn paprsků kongruence souměrných k paprsku p nazýváme jak známo elementárním trsem kongruence. V něm obsaženo jest nekonečné množství elementů přímkových ploch paprskem p jdoucích, t. zv. „elementárních ploch" našeho trsu. Každá z těchto elementárních ploch dána jest jedním paprskem ku p souměrným a všecky tyto plochy obalují se v ohniskách F_1, F_2 paprsku p.

Béřeme-li bod F_2 za počátek (bod O v předchozím), procházejí pomocné přímky všech elementárních ploch jiným bodem F_1', neboť plochy ty mají v bodech F_1, F_2 stej-

tečné roviny tečné – representačním to bodem rozvinutelné plochy elementární dané soumezným paprskem jdoucím bodem F_1. Budiž $F_1'C'$ pomocná přímka příslušná jedné z elementárních ploch trsu; její centrální bod C na přímce p jest kolmo s C'. Bod C' obdržíme kolmicí spuštěnou k pomocné přímce s bodu F_2. Ježto tedy úhel $F_2C'F_1'$ jest pravý, jest místem representačních bodů C' všech elementárních ploch našeho trsu kružnice o poloměru $\frac{1}{2}F_2F_1'$ a procházející body F_1, F_2, jejíž obvodový úhel nad tetivou $F_1F_2 = 2\delta$ jest roven úhlu Ω rovin ohniskových. Tím nabýváme t.zv.



representační kružnice našeho trsu. Koncové body C_1', C_2' průměru rovnoběžného ku p vedou ke hlavním bodům C_1, C_2 paprsku p. Ježto vzdálenost $2d$ bodů hlavních jest průměrem kružnice c, dostáváme opět známý vztah

$$\sin\Omega = \frac{\delta}{d} \quad \ldots \quad (1).$$

Z obrazce jest též patrno, že roviny hlavní (stopy F_2C_1', F_2C_2') jsou navzájem kolmé, jsouce symmetrálnými rovinami obou rovin ohniskových.

Vytkneme-li si dále takové dvě z našich elementárních ploch, jejichž distribuční parametry jsou si rovny (centrální body $C, \bar{C}$), vidíme, že jejich centrální

body mají stejné vzdálenosti od bodů středového S a jejich centrální roviny mají s rovinami hlavními společné roviny symetrálné — jež jsou centrálními rovinami (stopy F_2C_3', F_2C_4') dotkových ploch elementárních, jimž přísluší extremní hodnoty parametru distribučního parametru. - Rovněž jest patrno, že každý bod C úsečky C_1C_2 jest centrálním bodem dvou elementárních ploch těsn a že centrální roviny těchto ploch mají roviny hlavní rovinami symetrálními.

Vidíme tedy, že obdržíme takto snadným způsobem celou řadu vlastností kongruencí týkajících se okolí jejího paprsku p. Tak dospějeme též na př. ke známé námi relaci Hamiltonově.

Označme r, r_1, r_2 souřadnice bodu C a hlavních bodů C_1, C_2 vzhledem k libovolnému počátku O a budiž w úhel, který svírá centrální rovina příslušná centrálnímu bodu C s rovinou hlavní příslušnou bodu C_1. Pak jest

$$w = \sphericalangle C'F_2C_1' = \sphericalangle C'C_2'C_1'.$$

a z trojúhelníka $C_2'C'C_1'$ plyne

$$C_2C = C_2C_1 \cos^2 w$$

čili

$$r - r_2 = (r_1 - r_2)\cos^2 w,$$

odkud skutečně nabýváme Hamiltonovy relace

$$r = r_1 \cos^2 w + r_2 \sin^2 w \quad \ldots\ldots (2).$$

Pozn. Okolnost, že representační body C' vyplňují kružnici c, zůstává v platnosti i v případě, že ohniska splývají nebo jsou imaginárná. Kružnice c dotýká se zde resp. neprotíná přímky p.

223. Další souvislost. – Veďme bodem O libovolnou přímku q svírající s přímkou p úhel α. Přímky $C_1'C_1$, $C'C$, $C_2'C_2$ protínejte ji v bodech, jejichž vzdálenosti od O buďte l_1, l, l_2. Pak jest

$$r = l\cos\alpha,\quad r_1 = l_1\cos\alpha,\quad r_2 = l_2\cos\alpha$$

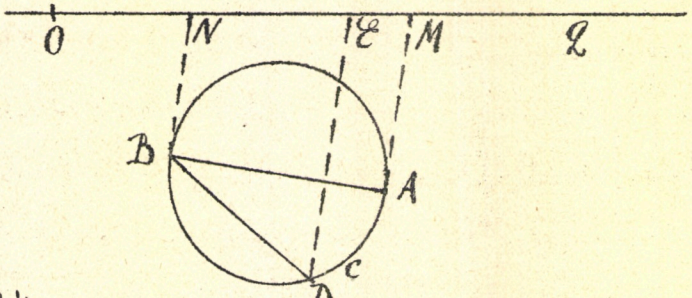
a z relace (2) plyne relace

$$l = l_1\cos^2\omega + l_2\sin^2\omega,$$

odkud možno vyčísti známou větu planimetrickou:

„Jest dána přímka q, kružnice c a dvě její rovnoběžné tečny AM, BN. Sestrojíme-li k nim rovnoběžku ED a je-li O bod přímky q, jest

$$OM\cos^2 DBA + ON\sin^2 DBA = OE."$$



Věta tato vede nás k výrazu pro distribuční parametr K jedné z elementárních ploch trsu na základě extremních hodnot K_1, K_2, distribučního parametru, a úhlu φ, který tvoří centrální rovina plochy té s centrální rovinou příslušnou ploše, jejíž distribuční parametr jest maximem. Uvažujme za tím účelem tečny rovnoběžné ku p a rovnoběžku bodem C' a protněme tyto přímky přímkou k nim kolmou jdoucí bodem O. Tím obdržíme relaci

$$\underline{K = K_1 \cos^2\varphi + K_2 \sin^2\varphi} \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

obdobnou relaci Hamiltonově.

Pozn. Na předchozích základech možno vyvoditi celou theorii trsu kongruence a snadným způsobem získati výsledky nabyté Hamiltonem, Kummerem a Sturmem. Pro nedostatek místa budiž pouze poukázáno na knihu: Mannheim, Géométrie cinématique. (Str. 270–312.)

224. Trs normál plochy. – Jde-li specielně o elementární trs normál plochy, jest $\delta = d$, ohniska paprsku p (jenž jest normálou bodu A plochy P) splývají s body hlavními v hlavních středech křivosti plochy a roviny ohniskové s rovinami hlavními v hlavních normálných řezech plochy, jsouce vždy reálné.

Representační kružnice c má zde střed na přímce p majíc hlavní středy křivosti C_1, C_2 koncovými body průměru, takže platí věta:

„Sestrojíme-li normálou p plochy rovinu a v ní naneseme na kolmice ku p, vztyčené v centrálných bodech normálových ploch normálou p jdoucích, délky rovné distribučním parametrům těchto normálových ploch, jsou koncové body těchto délek na kružnici, jež má hlavní středy křivosti na normále p koncovými body průměru."

Připomeňme si dále okolnost seznanou při ploše sborcené, že dána-li površka p plochy a souměrná površka p_1,

pak příčky těchto přímek kolmé ku p, tvoří orthogonální hyperbolický paraboloid, jenž se dotýká plochy podél površky p (jest otočením paraboloidu normál). Dána-li tudíž normála p bodu A plochy P a souměrná k ní normála p_1 bodu A_1 plochy, jest rovina pA_1 rovinou tečnou v bodě A normálové plochy jdoucí normálami p, p_1 plochy P. Rovina pA_1 budiž kolmá ku tečné rovině normálové plochy v bodě B přímky p. Příčka BB_1 jest pak kolmá ku rovině pA_1, bodem B prochází tedy průmět p_1^0 normály p_1 do roviny pA_1. Přímka p_1^0 jest však souměrnou ku p normálou řezu plochy P s rovinou pA_1, takže máme větu:

„Libovolná křivka bodem A na ploše P vedená určuje normálovou plochu N té vlastnosti, že její rovina tečná v bodě A jest normálnou rovinou pro bod B, jenž jest středem křivosti řezu, jejž vytíná z plochy P."

Uvažme dále známou vlastnost směrů sdružených v bodě A plochy P, že totiž tečna t' sdružená k tečně $t \equiv AA_1$ jest průsečnicí tečných rovin bodů A, A_1. Odtud plyne, že tečna t' jest kolmá jak ku p tak i ku p_1, takže rovina pt' jest centrálnou rovinou normálové plochy N. Máme tedy další větu:

„Centrálná rovina normálové plochy N protíná rovinu tečnou bodu A plochy P v tečně sdružené ku tečně řídící křivky plochy N."

Je-li pak tato řídící křivka specielně křivkou asymptotickou plochy P, splývá tečna t' s tečnou

$t \equiv AA_1$, takže platí věta:

„Asymptotická křivka na ploše jest strikční křivkou normálové plochy jí určené."

A stačí představiti si representační kružnici pro přímku p (normálu bodu A plochy P) této normálové plochy N, abychom seznali větu další:

„Distribuční parametr normálové plochy bodu A plochy P jest roven geometrickému průměru hlavních poloměrů křivosti bodu A plochy P, jestliže řídící křivkou normálové plochy jest asymptotická křivka plochy P."

Elementární trs normál plochy jest v jednoduché souvislosti s theorií okolí bodu plochy (na př. s Dupinovou indikatrií, jak jest již z předchozího patrno), takže studium obou útvarů se navzájem doplňuje a usnadňuje. Kdybychom tedy pokračujíce v předchozím vyvodili podrobnou theorii trsu toho, dospěli bychom odtud snadno k známým souvislostem a relacím differenciální geometrie ploch.

Kapitola X.
Dotykové transformace.

225. Elementy a multiplicity dotykové. — Dotykovým elementem rozumíme jak známo soustavu bodu a jimi jdoucí roviny. Jsou-li x, y, z resp. $p, q, -1$ souřadnice bodu a směr. cosiny normály k rovině, rozumíme x, y, z, p, q souřadnicemi dotykového elementu.

Bod jest nositelem ∞^2 dotykových elementů, pro něž souřadnice x, y, z jsou pevné. Rovněž křivka jest nositelem ∞^2 dot. elementů. Body jejich leží na křivce a jejich roviny se jí dotýkají, takže jejich souřadnice x, y, z jsou funkcemi jednoho parametru a mezi všemi souřadnicemi platí relace

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0 \quad \ldots (1)$$

Zbývají tedy rovněž dva parametry nezávislé, jak z geometrického názoru bylo předem patrno. Též plocha určuje svými body a tečnými rovinami ∞^2 dot. elementů; je-li $z = f(x, y)$ její rovnice, jsou $x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ jejich souřadnice a máme opět 2 parametry nezávislé, x, y. Možno zde též, že p, q závisí na jednom parametru. To jest případ plochy

rozvinutelné, mající ∞^2 bodů a ∞^1 rovin tečných, duálně k případu křivky, jež má ∞^1 bodů a ∞^2 rovin tečných.

Bod, křivka i plocha určují tedy ∞^2 dotyk. elementů [a souřadnice těchto splňují ve všech těch případech rovnici (1). (V případě bodu přechází tato rovnice v identitu).]. Možno je tedy označiti společným názvem jako multiplicity řádu 2.

Obecně nazýváme multiplicitou řádu 2. souhrn dotykových elementů, jejichž souřadnice jsou vázány relací (1), závisíce na dvou parametrech. Závisí-li pouze na jednom parametru, máme multiplicitu řádu 1.

Hledejme všechny možné multiplicity řádu 2. Souřadnice x, y, z, p, q jsou funkcemi 2 parametrů:

$$x = f(u,v),\ y = g(u,v),\ z = h(u,v),\ p = k(u,v),\ q = l(u,v).$$

Uvažujme 3 první relace. Z nich možno vyloučiti u, v, čímž obdržíme buď 1 nebo 2 nebo 3 relace mezi x, y, z.

Uvažujme nejprve případ jedné relace

$$F(x,y,z) = 0.$$

Tu možno z považovati za funkci x, y. A má-li dle definice býti relace (1) splněna, což jest x, y jakékoli, musí $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Máme tedy případ plochy jako nositele dot. elementů.

Obdržíme-li dále 2 relace

$$F(x,y,z) = 0,\quad G(x,y,z) = 0,$$

můžeme x a y pokládati za funkce z

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z) \quad \ldots\ldots \quad (c)$$

a rovnice (1) nabývá tvaru

$$p\varphi' + q\psi' - 1 = 0.$$

Body vyplňují tedy křivku (c) a roviny se jí dotýkají. Křivka (c) jest nositelem dot. elementů.

Obdržíme-li konečně 3 relace $F=0$, $G=0$, $H=0$, jsou x, y, z konstantami (neboť plochy F, G, H protínají se obecně v konečném počtu bodů). Relace (1) jest splněna každým p, q, jež jsou tedy nezávislými parametry. Máme případ bodu jako nositele dot. elementů. – Ale jsou případy všecky.

Uvažujme nyní multiplicity 1. řádu. Tu jest $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $p = k(t)$, $q = l(t)$. Vyloučíme-li t z prvních 3 rovnic, obdržíme buďto 2 relace nebo 3 relace mezi x, y, z.

V případě 2 relací jest nositelem křivka a každému jejímu bodu odpovídá jediná rovina dotčná. Máme tedy pouzdro dotykových elementů.

Máme-li 3 relace, jsou x, y, z konstanty; nositelem jest bod, jímž prochází ∞^1 rovin. Máme t. zv. elementární kužel.

226. Dvě multiplicity 2. řádu mohou míti buďto žádný nebo 1 nebo ∞ společných elementů dotykových.

Uvažujme případ 1 společného dot. elementu. Jestliže obě multiplicity jsou body, A, A_1, nemohou míti spo-

lečného dot. elementu, kromě případu, kdy splývají a kdy jest tedy ∞^2 společných elementů. Máme-li bod a křivku, musí bod ležeti na křivce, společných dot. elementů jest ∞^1. Máme-li bod a plochu jím jdoucí, máme 1 společný element. Rovněž tak tomu jest pro 2 křivky protínající se a pro křivku a plochu dotýkající se navzájem i pro dvě plochy dotýkající se v 1 bodě.

∞^1 společných dot. elementů jest pro bod na křivce, pro 2 křivky dotýkající se v 1 bodě, pro křivku ležící na ploše a dvě plochy dotýkající se podél křivky).

227. Transformace dotykové. – Dotykovou transformací nazýváme každou takovou transformaci elementů dotykových, ve které multiplicitě 2. řádu odpovídá opět multiplicita 2. řádu. Jsou-li $\bar{x}, \ldots \bar{q}$ nové souřadnice, máme 5 transformačních rovnic

$$(1) \ldots \bar{x} = f(x, y, z, p, q),\ \bar{y} = g(\ ),\ \bar{z} = h(\ ),\ \bar{p} = k(\ ),\ \bar{q} = l(\ ).$$

Jestliže element (x, y, z, p, q) náleží multiplicitě, máme

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0 \quad \ldots (1),$$

a aby element $(\bar{x}, \ldots \bar{q})$ náležel také multiplicitě, musí

$$d\bar{z} - \bar{p}\,d\bar{x} - \bar{q}\,d\bar{y} = 0.$$

Vylučme z rovnic (1) p a q. Tím obdržíme buďto 3 relace nebo 2 nebo 1 relaci mezi $x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

Obdržíme-li 3 relace

$$(2) \ldots \bar{x} = f(x, y, z),\ \bar{y} = g(x, y, z),\ \bar{z} = h(x, y, z),$$

jest v této dotykové transformaci zahrnuta transfor-

mace bodová. Tato převádí totiž bod v bod, křivku v křivku, plochu v plochu – a tudíž 2 křivky se protínající ve 2 křivky se protínající, 2 plochy dotýkající se ve 2 plochy dotýkající se. Dotykovému elementu, jenž jest společný dvěma multiplicitám, odpovídá dotykový element společný dvěma příslušným multiplicitám. Pokládáme-li $\bar{z}$ za funkci x, y a $\bar{z}$ za funkci $\bar{x}, \bar{y}$, máme

$$d\bar{x} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z}(p\,dx + q\,dy), \quad d\bar{y} = \ldots;$$

a eliminací dx, dy z těchto 3 rovnic obdržíme

$$d\bar{z} = k(x, y, z, p, q)\,d\bar{x} + l(x, y, z, p, q)\,d\bar{y},$$

odkud jest

$$\bar{p} = k(x, y, z, p, q), \quad \bar{q} = l(x, y, z, p, q);$$

a jelikož x, y, tudíž i z, možno vyjádřiti jako funkce p, q, možno na základě posledních dvou rovnic vyjádřiti $\bar{p}, \bar{q}$ jako funkce p a q.

Předpokládejme dále, že obdržíme 1 relaci

$$\Omega(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0 \ldots\ (3).$$

Uvažujme bod $A(x, y, z)$ prvého prostoru a hledejme multiplicitu, která mu odpovídá ve druhém prostoru. Tato multiplicita jest tvořena dotykovými elementy, jejichž body jsou vázány s bodem A relací (3), jež značí v souřadnicích $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ určitou plochu $\bar{P}_A$. Multiplicita odpovídající bodu jest tedy plocha. Křivce, jež jest místem bodů A, odpovídá soustava ∞^1 ploch a multiplicita tvořená jimi plochami, t. j. obálka jejich, odpovídá křivce dané. Konečně máme-li plochu

jako místo ∞^2 bodů A, odpovídá jí obálka ∞^2 ploch bodům A příslušných.

228. Speciální případ. – Nejjednodušší případ mnohoznačného případu 1 relace jest, je-li relace (3) bilineární v $x, y, z; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Tu každému bodu 1. prostoru odpovídá rovina 2. prostoru a naopak. Píšeme

$$\Omega = \mathcal{A}\bar{x} + \mathcal{B}\bar{y} + \mathcal{C}\bar{z} + \mathcal{D},$$

kde $\mathcal{A} = u_1 x + u_2 y + u_3 z + u_4$, $\mathcal{B} = u_1' x + \dots$,
$\mathcal{C} = u_1'' x + \dots$, $\mathcal{D} = u_1''' x + \dots$.

Hledejme útvar odpovídající ploše

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0.$$

Bude to plocha obalená rovinami $\Omega = 0$, kde proměnné $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ jsou vázány poslední rovnicí, odkud plyne

$$\mathcal{A} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \dots \quad \text{čili}$$

$$\frac{\mathcal{A}}{\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}} = \frac{\mathcal{B}}{\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}} = \frac{\mathcal{C}}{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} = \frac{\mathcal{D}}{\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}}.$$

To jsou tedy rovnice naší transformace. Z nich musí býti snadno možno vyjádřiti x, y, z, tedy formy $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ musí býti nezávislé t. j. roviny

$\mathcal{A} = 0$, $\mathcal{B} = 0$, $\mathcal{C} = 0$, $\mathcal{D} = 0$ musí býti 4 obecné roviny, tvořící 4 stěn, takže roviny dávají soubor všech rovin prostoru. Prostoru bodovému odpovídá tedy naší transformací prostor rovinový a naopak, transformace naše jest <u>duální transformací</u> obou prostorů.

§ II. 59.

Dány-li 4 roviny $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$, tvořící 4stěn, možno je bráti za roviny souřadné a každá rovina prostoru jest na základě nich vyjádřena lineární rovnicí $\Omega=0$, čehož v právě předchozím již užito. Transformujeme-li nyní tento 4stěn v pravoúhlý 4stěn souřadný, kladouce

$$A=X,\quad B=Y,\quad C=Z,\quad D=W,$$

provedeme tím projektivní transformaci našeho prvého prostoru P v prostor P'.

Uvažujme vztah tohoto prostoru P' k prostoru $\bar{P}$, jejž jsme z prostoru P obdrželi v předchozím uvažovaném transformací duální. Rovnice $\Omega=0$ nabývá zde tvaru

$$X\bar{x}+Y\bar{y}+Z\bar{z}+W\bar{w}=0$$

čili

$$X\bar{x}+Y\bar{y}+Z\bar{z}+1=0,$$

což jest polární forma rovnice

$$x^2+y^2+z^2+1=0$$

plochy kulové, značíc polaritu k této ploše. Vztah prostorů P', $\bar{P}$ jest tedy polarita k ploše kulové, takže máme větu:

„Duální transformace obou prostorů dá se rozložiti ve 2 jednoduché transformace, totiž v projektivnost (obvyklým jest též název kollineace) a v polaritu ku ploše kulové."

224. Transformace involutorní. – Sledujíce ještě případ 1 relace uvažujme transformace involutorní,

t. j. takové, v nichž bodu odpovídá táž rovina, ať bod čítáme k prostoru 1. nebo 2. V tomto případě musí rovnice

$$\Omega(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = 0, \quad \Omega(\bar{x},\bar{y},\bar{z},x,y,z) = 0$$

býti ekvivalentní, takže, značí-li $\underline{k}$ konstantní faktor, musí

$$\Omega(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = k\,\Omega(\bar{x},\bar{y},\bar{z},x,y,z)$$

Tato rovnice musí platiti pro všecky hodnoty souřadnic. Klademe-li tedy $x=\bar{x}$, $y=\bar{y}$, $z=\bar{z}$, máme rovnici

$$\Omega(x,y,z,x,y,z) = k\,\Omega(x,y,z,x,y,z),$$

takže

$$\text{buďto} \quad \Omega' = \Omega(x,y,z,x,y,z) = 0 \quad \text{nebo} \quad k=1.$$

Uvažujme speciálně transformaci duální.

1) Je-li $\underline{\Omega'=0}$, pak rovina odpovídající bodu prochází jím. Podmínka $\Omega'=0$ dává rovnici

$$(u_1x+u_2y+u_3z+u_4)x+(u_1'x+\cdots)y+(u_1''x+\cdots)z+u_1'''x+\cdots=0,$$

která musí platiti identicky, takže

$$u_1'+u_2=0,\ u_1''+u_3=0,\ u_1'''+u_4=0,\ u_2''+u_3'=0,\ u_2'''+u_4'=0,$$
$$u_3'''+u_4''=0\ ; \quad u_1=u_2'=u_3''=u_4'''=0,$$

t. j. determinant

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' & u_4'' \\ u_1''' & u_2''' & u_3''' & u_4''' \end{vmatrix} \cdots\cdots \begin{vmatrix} 0 & C & -B & P \\ -C & 0 & A & Q \\ B & -A & 0 & R \\ -P & -Q & -R & 0 \end{vmatrix}$$

jest determinantem zvratně symmetrickým, takže jest možno jej psáti ve tvaru vedle vyznačeném.

Rovnice $\Omega = 0$ má zde tedy tvar

$$\bar{x}(Cy - Bz + P) + \bar{y}(-Cx + Az + Q) + \bar{z}(Bx - Ay + R) - Px - Ay - Rz = 0$$

čili $A(y\bar{z} - z\bar{y}) + B(z\bar{x} - x\bar{z}) + C(x\bar{y} - y\bar{x}) + P(\bar{x} - x) + Q(\bar{y} - y) + R(\bar{z} - z) = 0.$

Zavedeme-li zde známé nám homogenní Plückerovy souřadnice přímky, má poslední rovnice tvar

$$A p_{23} + B p_{31} + C p_{12} + P p_{14} + Q p_{24} + R p_{34} = 0,$$

značíc lineární komplex stanovený spojnicemi bodů (x, y, z), $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Místem bodů $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ příslušných bodu (x, y, z) jest tedy polárná rovina bodu (x, y, z) k lineárnímu komplexu. Takovéto přiřazení bodů a rovin jimi jdoucích nazýváme krátce nullovým systemem. Body a roviny navzájem incidentní odpovídají se zde jednoznačně a involutorně. Přímce l jako řadě bodů odpovídá přímka $\bar{l}$ jako osa svazku rovin a naopak. Přímky $l, \bar{l}$ jsou „sdruženy" k lineárnímu komplexu, jsouce osami lineární kongruence v komplexu obsažené. Paprsek komplexu jest sdružen sám sobě, takže lineární komplex jest souhrnem přímek samodružných v systemu nullovém.

Křivce odpovídá plocha rozvinutelná a naopak; křivce komplexové (t. j. takové křivce, jejíž tečny jsou paprsky lin. komplexu čili jejíž body a oskulační roviny si v nullovém systemu přísluší) odpovídá rozvinutelná plocha jejích rovin oskulačních. Plochy $P, \bar{P}$, nul. systemem přiřazené, jsou fokálními plochami kongruence v komplexu obsažené; to platí i když plocha přechází v křivku.

2) Je-li $k = 1$, jest

$$\bar{x}(u_1 x + u_2 y + u_3 z + u_4 t) + \dots = x(u_1 \bar{x} + u_1' \bar{y} + u_1'' \bar{z} + u_1''' \bar{t}) + \dots,$$

forma Ω jest symmetrická ku $x, \dots, \bar{x}, \dots$, takže ji lze psáti ve tvaru

$$\Omega = a x \bar{x} + b y \bar{y} + c z \bar{z} + m(y \bar{z} + z \bar{y}) + n(z \bar{x} + x \bar{z}) +$$
$$+ p(x \bar{y} + y \bar{x}) + r(x + \bar{x}) + s(y + \bar{y}) + t(z + \bar{z}) + u = 0$$

což jest polární forma rovnice

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2 m y z + 2 n z x + 2 p x y + 2 r x + 2 s y +$$
$$+ 2 t z + u = 0$$

jež značí plochu druhého stupně.

Tato involutorní jest tedy polaritou, t.j. bodu odpovídá rovina polárná k ploše 2. stupně a naopak.

230. Obecný případ 1 relace. – Abychom obecně obdrželi transformační vzorce pro případ jedné relace $\Omega = 0$, uvažme, že rovnice

$$d\bar{z} - \bar{p}\, d\bar{x} - \bar{q}\, d\bar{y} = 0$$

musí býti důsledkem rovnic

$$dz - p\, dx - q\, dy = 0, \quad d\Omega = 0,$$

což dává rovnici

$$d\bar{z} - \bar{p}\, d\bar{x} - \bar{q}\, d\bar{y} = \lambda(dz - p\, dx - q\, dy) + \mu\, d\Omega,$$

která musí platiti identicky.

Srovnáním koefficientů*) obdržíme 6 rovnic mezi $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}, \lambda, \mu$ a veličinami původními. Z těchto rovnic vylučme λ, μ, takže zbývají 4 rovnice. K těmto připojme rovnici $\Omega = 0$ jako patou, načež vypočtěme $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}$ jako funkce x, y, z, p, q.

*) při dx, dy, p, q, dp, dq

231. Případ 2 relací. – Uvažujme nyní konečně další možný případ transformace dotykové, kdy tedy obdržíme 2 relace

$$\Omega(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0, \quad \Theta(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0. \quad (4)$$

Zde bodu A 1. prostoru odpovídá v prostoru 2. křivka (c) průsečná ploch Ω, Θ. Křivce jako místu bodů A příslušší plocha jako místo křivky (c). Ploše jako místu ∞^2 bodů A odpovídá kongruence křivek (c). Obalová plocha této křivkové kongruence (t. j. plocha, které se všecky křivky dotýkají, viz poznámky v závodu –) jest tedy též útvarem odpovídajícím vyšetřované ploše bodů A.

Abychom obdrželi rovnice takovéto transformace, uvažme, že rovnice

$$d\bar{z} - \bar{p}\, d\bar{x} - \bar{q}\, d\bar{y} = 0$$

jest zde důsledkem rovnic

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \quad d\Omega = 0, \quad d\Theta = 0,$$

což dává vždy

$$d\bar{z} - \bar{p}\, d\bar{x} - \bar{q}\, d\bar{y} = \lambda(dz - p\,dx - q\,dy) + \mu\, d\Omega + \nu\, d\Theta.$$

Srovnáním koefficientů obdržíme 6 rovnic, vyloučíme-li z nich λ, μ, ν, máme 3 rovnice, které spolu s rovnicemi (4) vedou k žádaným vzorcům transformačním.

232. Speciální případ. – Předpokládejme speciálně, že rovnice (4) jsou bilineární. Pak bodu A příslušší přímka $\bar{p}$ jako průsečnice rovin Ω, Θ. Prostoru bodů A odpovídá tedy komplexe přímek $\bar{p}$. Též naopak odpovídá prostoru bodů A určitý komplexe přímek p.

Uvažujeme-li pouze jednu z relací (4), odpovídá každému bodu A rovina Ω; na základě druhé relace odpovídá mu rovina Θ. Prostor rovin Ω, jakož i prostor rovin Θ, jsou reciproké (duální nebo korrelativní) k prostoru bodů A, jsou tudíž mezi sebou projektivní (kollineární). Komplex $(\bar{p})$ jest tedy pronikem dvou kollineárních prostorů rovin.

Jest to tedy t. zv. Reye-ův komplex čili komplex tetraedrální. Základem jeho jest určitý tetraedr a paprsky komplexu protínají stěny tetraedru ve čtveřinách stálého dvojpoměru vysílajíce k vrcholům tetraedru čtveřiny téhož dvojpoměru. Komplex jest kvadratický a tetraedr jest jeho singularitní plochou [t. j. místem takových bodů a rovin, jejichž komplexové kužele resp komplexové křivky degenerují ve dva svazky paprskové].

Křivce (c) jako místu bodů A odpovídá přímková plocha obsažená v komplexu $(\bar{p})$. Ploše (P) bodů A odpovídá kongruence paprsků $\bar{p}$; a ježto tato kongruence má dvě multiplicity fokální, odpovídá každému dotykovému elementu prostoru jednoho dvojice dotykových elementů prostoru druhého.

Stanovme si rovnice obou tetraedrálních komplexů $(\bar{p})$, (p). Relace (4) buďte dány vztahy

$$\Omega = A\bar{x} + B\bar{y} + C\bar{z} + D, \quad \Theta = L\bar{x} + M\bar{y} + N\bar{z} + P.$$

Budiž $\bar{A}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ bod druhého prostoru a budiž p přímka mu odpovídající. Jsou-li (x, y, z), (x_0, y_0, z_0)

2 body tého přímky jest

$$\mathcal{A}\bar{x}+\mathcal{B}\bar{y}+\mathcal{C}\bar{z}+\mathcal{D}=0, \quad \mathcal{L}\bar{x}+\mathcal{M}\bar{y}+\mathcal{N}\bar{z}+\mathcal{P}=0,$$
$$\mathcal{A}_0\bar{x}+\mathcal{B}_0\bar{y}+\mathcal{C}_0\bar{z}+\mathcal{D}_0=0, \quad \mathcal{L}_0\bar{x}+\mathcal{M}_0\bar{y}+\mathcal{N}_0\bar{z}+\mathcal{P}_0=0.$$

Vyloučíme-li $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ z těchto 4 rovnic, máme rovnici

$$(p)\ldots \begin{vmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} & \mathcal{C} & \mathcal{D} \\ \mathcal{A}_0 & \mathcal{B}_0 & \mathcal{C}_0 & \mathcal{D}_0 \\ \mathcal{L} & \mathcal{M} & \mathcal{N} & \mathcal{P} \\ \mathcal{L}_0 & \mathcal{M}_0 & \mathcal{N}_0 & \mathcal{P}_0 \end{vmatrix} = 0,$$

která vede nás již k rovnici komplexu (p). Rozvedeme determinant levé strany dle pravidla Laplace-ova dle prvních dvou sloupců, takže máme

$$(\mathcal{A}\mathcal{B}_0)(\mathcal{N}\mathcal{P}_0)+\ldots = 0,$$

kde

$$(\mathcal{A}\mathcal{B}_0)=(ux+vy+wz+h)(u'x_0+v'y_0+w'z_0+h')-$$
$$-(ux_0+vy_0+wz_0+h)(u'x+v'y+w'z+h'),$$
$$(\mathcal{A}\mathcal{B}_0)=uw'(xy_0-x_0y)+uw'(xz_0-x_0z)+vu'(yx_0-y_0x)$$
$$+wu'(zx_0-xz_0)+uh'(x-x_0)+\ldots.$$

V závorkách máme zde přímkové souřadnice přímky p. Obdobně jest $(\mathcal{N}\mathcal{P}_0),\ldots$ lineární funkcí těchto souřadnic, takže rovnice našeho komplexu jest kvadratická v přímkových souřadnicích (Plückerových) přímky p. Komplex (p) a jeho obdobný komplex $(\bar{p})$ jest tedy kvadratický.

Křivce (c) bodů A odpovídá plocha přímková přímek $\bar{p}$. Tážeme se, může-li tato plocha býti rozvinutelná. Přímky $\bar{p}$ mají plochy dány jsou rovnicemi

$$\mathcal{A}\bar{x}+\mathcal{B}\bar{y}+\mathcal{C}\bar{z}+\mathcal{D}=0, \quad \mathcal{L}\bar{x}+\mathcal{M}\bar{y}+\mathcal{N}\bar{z}+\mathcal{P}=0,$$

při čemž $\mathcal{A}, \dots, \mathcal{L}, \dots$, závisíce na souřadnicích x, y, z bodů křivky (c), jsou funkcemi jednoho parametru t. Vyjadřme, že přímka $\bar{p}$ protíná souměrnou přímku naší plochy přímkové. K rovnicím napsaným nutno připojiti rovnice

$$dA \cdot \bar{x} + dB \cdot \bar{y} + dC \cdot \bar{z} + dD = 0, \quad dL \cdot \bar{x} + dM \cdot \bar{y} + dN \cdot \bar{z} + dP = 0$$

načež vyloučením $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ z těchto 4 rovnic plyne podmínka

$$(p) \dots \quad \begin{vmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} & \mathcal{C} & \mathcal{D} \\ \mathcal{L} & \mathcal{M} & \mathcal{N} & \mathcal{P} \\ dA & dB & dC & dD \\ dL & dM & dN & dP \end{vmatrix} = 0.$$

Uvažme, že je-li $\mathcal{A} - \mathcal{A}_0 = \Delta A, \dots$ možno rovnici (p) psáti ve tvaru

$$\begin{vmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} & \mathcal{C} & \mathcal{D} \\ \mathcal{L} & \mathcal{M} & \mathcal{N} & \mathcal{P} \\ \Delta A & \Delta B & \Delta C & \Delta D \\ \Delta L & \Delta M & \Delta N & \Delta P \end{vmatrix} = 0,$$

kde přírůstky $\Delta A, \dots$ budou úměrny differenciálům $dA, \dots$. Jest tedy křivka (c) té vlastnosti, že její tečny náleží komplescu (p), jak plyne z ekvivalence posledních dvou rovnic.

Křivkám (c) prvního komplescu (p) odpovídají tedy rozvinutelné plochy komplescu druhého ($\bar{p}$), obalující jisté křivky ($\bar{c}$) jako hrany vratu. Bodu A komplescové křivky (c) odpovídá tedy jistá tečna $\bar{p}$ křivky ($\bar{c}$). Je-li $\bar{A}$ její bod dotyčný, odpovídá naopak bodu $\bar{A}$ tečna

p bodu A křivky (c), takže komplexové křivky obou naších tetraedrálních komplexů odpovídající si navzájem svými body se sečnami v naší transformaci.

Uvažujme nyní plochu P bodu A. Bodu A plochy této přísluší v komplexu (p) určitý kužel komplexový, jenž jest 2. stupně podle sečnou rovinou T plochy P ve dvou přímkách, takže plochy P dotýkají se v bodě A dvě přímky p, p_1 komplexu (p). Každým bodem A plochy P procházejí tedy dvě komplexové křivky komplexu (p) ležící na ploše P. Bodu A odpovídá přímka $\bar{p}$ komplexu $(\bar{p})$. Přímce p komplexu (p) odpovídá bod $\bar{A}$ přímky $\bar{p}$ a obdobně přímce p_1 bod $\bar{A}_1$ přímky $\bar{p}$. Křivkám y, y_1 komplexu (p) odpovídají křivky $\bar{y}, \bar{y}_1$ komplexu $(\bar{p})$, dotýkající se v bodech $\bar{A}$ resp $\bar{A}_1$ přímky $\bar{p}$. Popíše-li bod A křivku y, obalí přímka $\bar{p}$ křivku $\bar{y}$ a popíše-li bod A křivku y_1, obalí přímka $\bar{p}$ křivku $\bar{y}_1$. Uvažujeme-li pak kongruenci přímek $\bar{p}$ odpovídajících bodům A plochy P, jsou křivky $\bar{y}$ resp $\bar{y}_1$ hranami vratu jednou resp dvakrát prostorově rozvinutelných ploch této kongruence. Křivky $\bar{y}$ vytvořují jednu plášť plochy ohniskové a křivky $\bar{y}_1$ druhý plášť. Rovina sečná v bodě $\bar{A}$ ku ploše ohniskové jest oskulační rovinou bodu $\bar{A}_1$ křivky $\bar{y}_1$, totiž sečnou rovinou ke komplexovému kuželi bodu $\bar{A}_1$ ke komplexu $(\bar{p})$. Dotykovému elementu (A, T) odpovídá tedy dotykový element tvořený bodem $\bar{A}_1$ a rovinou sečnou ke komplexovému kuželi ku $(\bar{p})$ bodu $\bar{A}_1$ a mimo to zce-

ka obdobně dotykový element tvořený bodem $\bar{A}$ a jeho tečnou rovinou ke komplescovému kuželi ke komplescu $(\bar{p})$.

Jestliže plocha P dotýká se v každém bodě A komplescového kužele bodu A ke komplescu (p), nazýváme ji komplescovou plochou komplescu (p). V tom případě splývají pro každý její bod přímky p a p_1, tudíž splývají též oba dotykové elementy odpovídající elementu (AT) a plocha $\bar{P}$ stanovená těmito elementy jest plochou komplescu $(\bar{p})$, které zase naopak odpovídá komplescová plocha P.

Dodatek. – Předchozí úvaha týkala se vesměs obecného případu, kdy oba komplescy (p), $(\bar{p})$ jsou kvadratické. Pak jsou skutečně, jak vyvozeno, oba tetraedrální. – Jest však pro speciální druhy uvažované transformace též možna degenerace jednoho nebo obou těchto komplesců v komplesc lineární. A lze dokázati, že je-li jeden z obou komplesců lineární, jest druhý tvořen přímkami, které protínají určitou kuželosečku, – a jsou-li oba lineární, že jsou oba „speciální" (t. j. jsou tvořeny přímkami protínajícími pevnou přímku).

233. Transformace Lie-ova. – Rovnice (4) (str. 470) mějte speciálně tvar

$$\Omega = x + iy + \bar{x}z + \bar{z} = 0, \quad \Theta = \bar{x}(x-iy) - z - \bar{y} = 0,$$

jsou tedy zvláštními druhy bilineárních relací v předchozím uvažovaných.

V tomto případě má rovnice komplescu (p) tvar

(užijeme-li na př. vyjádření $|A_0, \Delta A, \mathfrak{A}, \Delta\mathfrak{A}| = 0$)

$$\begin{vmatrix} z_0 & 0 & 1 & x_0+iy_0 \\ z-z_0 & 0 & 0 & x-x_0+i(y-y_0) \\ x-iy & -1 & 0 & -z \\ x-x_0-i(y-y_0) & 0 & 0 & -(z-z_0) \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$\begin{vmatrix} z-z_0 & x-x_0+i(y-y_0) \\ x-x_0-i(y-y_0) & -(z-z_0) \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = 0 \quad \dots \quad (p).$$

Jsou-li tedy a, b, c směr. cosiny přímek p tohoto komplexu, jest

$$a^2+b^2+c^2 = 0.$$

Komplex (p) jest tedy komplexem přímek isotropických.

Hledáme nyní rovnici komplexu $(\bar{p})$. Uvažujme dva body $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ odpovídající témuž bodu (x, y, z). Obdržíme rovnici

$$\begin{vmatrix} 1 & i & \bar{x} & \bar{z} \\ 0 & 0 & \bar{x}-\bar{x}_0 & \bar{z}-\bar{z}_0 \\ \bar{x} & -i\bar{x} & -1 & -\bar{y} \\ \bar{x}-\bar{x}_0 & -i(\bar{x}-\bar{x}_0) & 0 & -(\bar{y}-\bar{y}_0) \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$(\bar{x}-\bar{x}_0)(\bar{x}\bar{y}_0-\bar{y}\bar{x}_0)-(\bar{z}-\bar{z}_0)(\bar{x}-\bar{x}_0) = 0$$

Jsou-li tedy

$\bar{x}-\bar{x}_0 = a$, $\bar{y}-\bar{y}_0 = b$, $\bar{z}-\bar{z}_0 = c$, $\bar{y}\bar{x}_0-\bar{x}\bar{y}_0 = l$,
$\bar{z}\bar{y}_0-\bar{y}\bar{z}_0 = p$, $\bar{x}\bar{z}_0-\bar{z}\bar{x}_0 = q$ souřadnice přímek $\bar{p}$,

má komplex $(\bar{p})$ rovnici

$$a(r+c) = 0$$

čili, ježto případ $a = 0$ jako singulární lze zanedbati, rovnici

$$r + c = 0 \quad \dots \quad (\bar{p}).$$

Komplex $(\bar{p})$ jest tedy komplexem lineárním a naše transformace přiřazuje navzájem speciální komplex kvadratický a obecný komplex lineární.

Kužel komplexu (p) jest kuželem isotropickým. Každému dotykovému elementu prvého prostoru odpovídají opět dva dotykové elementy v prostoru druhém, a sice jsou sdruženy vzhledem ke komplexu lineárnému $(\bar{p})$, neboť rovina přidružená bodu $\bar{A}$ (str. 474) jest zde polární rovinou bodu $\bar{A}_1$ k lineárnímu komplexu $(\bar{p})$ a naopak.

Uvažujme nyní <u>plochu kulovou</u> v 1. prostoru a její dvě povrchové přímky (minimální), téže soustavy, p, p_1. Pak druhá soustava površek dána jest příčkami přímek p, p_1 a kružnice kulové $\varkappa$. Přímkám p, p_1 odpovídají body $\bar{A}, \bar{A}_1$. Uvažujme isotropickou přímku Δ protínající p, p_1 (tedy náležející druhé soustavě površek plochy kulové. Přímce Δ odpovídá jistý bod $\bar{u}$. Ježto pak Δ protíná paprsek p, jest přímka $\bar{A}\bar{u}$ paprskem lineárního komplexu $(\bar{p})$, a totéž platí o přímce $\bar{A}_1\bar{u}$, takže bod $\bar{u}$ jest pólem (vzhledem ku $(\bar{p})$) určité roviny jdoucí body $\bar{A}, \bar{A}_1$. Jestliže přímka Δ popíše plochu kulovou, otáčí se rovina

$\bar{A}\bar{u}\bar{A}_1$ kolem přímky $\bar{A}\bar{A}_1$ a místem bodu $\bar{u}$ jest polára přímky $\bar{A}\bar{A}_1$ vzhledem ke komplexu $(\bar{p})$. Tato polára odpovídá tedy v naší transformaci soustavě přímek Δ plochy kulové. Druhé soustavě poveršek plochy kulové (k níž patří přímky p, p_1) odpovídá obdobně přímka $\bar{A}\bar{A}_1$. Seznáváme tudíž větu: Ploše kulové prvého prostoru odpovídají naší transformací dvě přímky sdružené (čili vzájemné poláry) vzhledem k lineárnímu komplexu $(\bar{p})$.

K tomuto výsledku dospějeme též počtem. Ponecháme-li označení veličin $a, \ldots, p, \ldots$ zavedené na str. 476 a klademe-li pro zjednodušení $\bar{z} - \bar{z}_0 = c = 1$, platí pro přímku $\bar{m}$ prostoru druhého rovnice

$$\bar{x} = a\bar{z} - q, \quad \bar{y} = b\bar{z} + p,$$

při čemž jest

$c = 1$ a dále (jak snadno vypočteme) $r = -(ap + bq)$.

Hledejme nyní přímkovou plochu, která v naší transformaci odpovídá přímce $\bar{m}$.

Plocha ta vytvořena jest přímkou danou rovnicemi

$$x + iy + z(a\bar{z} - q) + \bar{z} = 0$$

$$(a\bar{z} - q)(x - iy) - z - b\bar{z} - p = 0.$$

Vyloučíme-li odtud $\bar{z}$, dostaneme rovnici hledané plochy přímkové:

$$(x + iy - qz)[a(x - iy) - b] + (az + 1)[q(x - iy) + z + p] = 0$$

čili (píšeme-li opět c místo 1)

$$(\mu) \cdots a(x^2 + y^2 + z^2) - b(x + iy) + q(x - iy) + (c - r)z + p = 0.$$

Přímce $\bar{m}$ prostoru druhého odpovídá tedy kulová plocha (μ) v prostoru prvém. Uvažujme nyní poláru $\bar{m}_1$ přímky $\bar{m}$ ke komplexu $(\bar{p})$. Přímka $\bar{m}$ stanoví specielní lineární komplex daný jejími sečnami (koefficienty v jeho rovnici jsou souřadnice přímky $\bar{m}$, splňují tedy rovnici $\omega = 0$). Rovněž přímka $\bar{m}_1$, jejíž souřadnice buďte $a_1, \ldots p_1, \ldots$, stanoví specielní komplex. Tyto dva specielní komplexy stanoví svazek komplexů procházejících kongruencí sečen přímek $\bar{m}$, $\bar{m}_1$. Ježto tyto přímky jsou polárami ke komplexu $(\bar{p})$, patří tento komplex svazku tomu.

Okolnost, že oba specielní komplexy a komplex $(\bar{p})$ náleží témuž svazku, vede k lineárním relacím koefficientů rovnic těchto komplexů:

$$\lambda a + \lambda_1 a_1 = 0, \quad \lambda b + \lambda_1 b_1 = 0, \quad \lambda p + \lambda_1 p_1 = 0, \quad \lambda q + \lambda_1 q_1 = 0,$$
$$\lambda c + \lambda_1 c_1 + 1 = 0, \quad \lambda r + \lambda_1 r_1 + 1 = 0.$$

Zvolíme-li $\lambda_1 = -\lambda$, obdržíme odtud pro souřadnice $a_1, \ldots$ hodnoty

$$a_1 = a, \; b_1 = b, \; p_1 = p, \; q_1 = q, \; c_1 = c + \frac{1}{\lambda}, \; r_1 = r + \frac{1}{\lambda}.$$

Zvolíme-li pak $\lambda = -\dfrac{1}{c+r}$, máme

$$c_1 = -r, \quad r_1 = -c,$$

takže $c_1 - r_1 = c - r$ a rovnice (μ) stanoví nám zároveň plochu kulovou příslušnou přímce $\bar{m}_1$. Tím jest početní důkaz hořejší věty proveden.

Přímkám různoběžným čili přímkám majícím společný element dotykový odpovídají touto Lieovou

transformací plochy kulové dotýkající se.

Lieova transformace definovaná uvedenými rovnicemi realisuje tedy příbuznost, v předchozích odstavcích uvažovanou, geometrie přímkové a geometrie ploch kulových. Transformuje tedy plochu přímkovou v plochu kanálovou, přímkovou plochu 2. stupně v cyklidu Dupinovu, plochu rozvinutelnou v izotropickou plochu kanálovou, dotykový proužek asymptotický v dotykový proužek křivosti. Možno tedy říci, že transformuje křivky asymptotické v křivky křivosti.

Snadno lze vyvoditi, že touto transformací přechází lineární komplex přímek v lineární komplex ploch kulových, t. j. v souhrn ploch kulových protínajících pevnou kouli pod stálým úhlem.

Vzorce transformační vypočítáme užitím obecné methody ve tvaru

$$x = -\frac{\bar{x}}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\bar{x}(\bar{x}p+\bar{y}q)+\bar{y}-p}{\bar{q}+\bar{x}}\,,\quad y = \frac{i\bar{x}}{2} - \frac{i}{2}\,\frac{\bar{x}(\bar{x}p+\bar{y}q)-\bar{y}+p}{\bar{q}+\bar{x}}$$

$$z = -\,\frac{\bar{x}p+\bar{y}q}{\bar{q}+\bar{x}}\,,$$

$$p = \frac{\bar{x}\bar{q}+1}{\bar{q}-\bar{x}}\,,\quad q = -i\,\frac{\bar{x}\bar{q}-1}{\bar{q}-\bar{x}}\,.$$

Konec části obecné.

Dodatek.

I. Trojnásobně orthogonální soustavy ploch.

234. Definice. – V theorii ploch užívali jsme soustav parametrických závislých na dvou parametrech. Jak již zmíněno možno obdobně i v prostoru zavésti místo souřadných rovin rovnoběžných s pravoúhlými osami zavésti tři obecné soustavy ploch za plochy souřadné. Tvoří-li specielně všecky plochy jedné z těchto tří soustav orthogonální ke všem plochám druhých dvou soustav, mluvíme takovýto systém ploch trojnásobně orthogonálním systémem ploch.

Analyticky jsou tři soustavy ploch vyjádřeny rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v, t) \\ y &= y(u, v, t) \\ z &= z(u, v, t) \end{aligned}\right\} \ldots (1),$$

značí-li u, v, t tři nezávislé parametry. Zvolíme-li totiž pro jeden z těchto tří parametrů konstantní hodnotu, značí rovnice (1) parametrické vyjádření plochy jedné ze tří soustav. Vyškrtneme-li pro dva ze tří parametrů konstantní hodnoty, stano-

víme tím v prostoru určitou křivku jako průsečnici příslušných dvou ploch. Konečně konstantním hodnotám všech tří parametrů stanoví určitý počet bodů, průsečíků to všech tří ploch souřadnicových.

Myslete si, že bychom z rovnic (1) mohli u, v, t vypočítali:

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad t = t(x, y, z) \quad \dots (2).$$

Pak dostáváme odtud dosazením určitých hodnot za u, v, t rovnice ploch souřadnicových vyjádřeny v souřadnicích x, y, z. Dán-li pak v prostoru bod (x, y, z), plynou odtud jeho souřadnice u, v, t. Z rovnic (2) jest konečně též patrno, že též rovnice $F(u, v, t) = 0$ značí obecně plochu; je-li na př. t konstantní, značí tato rovnice křivku.

Věnujme nyní pozornost trojnásobně orthogonálnímu systému ploch. Procházejí-li bodem $A(x, y, z)$ v prostoru souřadné plochy $(u), (v), (t)$ jsou průsečnice dvou a dvou z nich v bodě A navzájem kolmy a směr. cosiny jejich tečen v bodě A jsou úměrny veličinám

$$x_u, y_u, z_u; \quad x_v, y_v, z_v; \quad x_t, y_t, z_t,$$

odkud plyne podmínka orthogonality naší soustavy dána rovnicemi

$$S x_u x_v = 0, \quad S x_u x_t = 0, \quad S x_v x_t = 0 \quad \dots (3)$$

Jest to podmínka nutná a postačující.

235. Jiný způsob podmínky orthogonality. – Předpokládáme-li rovnice ploch systému dány ve tvaru (2), jest patrno, že derivace u_x, u_y, u_z jsou úměrny co-

sinům směrným normály ku ploše (u), atd, takže podmínky orthogonality možno též psáti ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z &= 0 \\ u_x t_x + u_y t_y + u_z t_z &= 0 \\ v_x t_x + v_y t_y + v_z t_z &= 0 \end{aligned}\right\} \dots (4).$$

Mějme nyní dány dvě soustavy ploch

$$u(x, y, z) = u, \quad v(x, y, z) = v \quad \dots (5)$$

navzájem orthogonální a hledejme podmínku pro to, aby existovala 3. soustava ploch orthogonální k oběma.

Pak musí existovati funkce

$$t(x, y, z) = t \quad \dots (6)$$

taková, aby splňovala současně druhou a třetí z rovnic (4), takže jest

$$t_x : t_y : t_z = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_z & u_x \\ v_z & v_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \dots (7)$$

Každá z ploch hledaných dána jest pak rovnicí

$$t_x\, dx + t_y\, dy + t_z\, dz = 0 \quad \dots (8).$$

Rovnice (8) musí tudíž býti neomezeně integrabilní. Stanovme její podmínky integrability.

Dána-li obecně rovnice

$$f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz = 0,$$

pišme ji nejprve ve tvaru

$$dz = -\frac{f_1}{f_3}\, dx - \frac{f_2}{f_3}\, dy$$

a uvažme, že musí pro pravou stranu této rovnice býti derivace koefficientu při dx dle y rovna derivaci dle x

koefficientu při dy, což dává podmínku

$$-f_3\frac{\partial f_1}{\partial y}+f_1\frac{\partial f_3}{\partial y}+f_3\frac{\partial f_2}{\partial x}-f_2\frac{\partial f_3}{\partial x}=0$$

a vypočteme-li obdobně dx a dy, dostáváme analogické podmínky

$$-f_1\frac{\partial f_2}{\partial z}+f_2\frac{\partial f_1}{\partial z}+f_1\frac{\partial f_3}{\partial y}-f_3\frac{\partial f_1}{\partial y}=0$$

$$-f_2\frac{\partial f_3}{\partial x}+f_3\frac{\partial f_2}{\partial x}+f_2\frac{\partial f_1}{\partial z}-f_1\frac{\partial f_2}{\partial z}=0.$$

Sečtením těchto tří rovnic obdržíme novou podmínku:

$$f_1\frac{\partial f_3}{\partial y}+f_2\frac{\partial f_1}{\partial z}+f_3\frac{\partial f_2}{\partial x}=f_1\frac{\partial f_2}{\partial z}+f_2\frac{\partial f_3}{\partial x}+f_3\frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

A vzhledem k tomu, že členy levé strany jakož i pravé strany plynou jeden ze druhého cyklickou záměnou, možno tuto rovnici symbolicky psáti

$$S\, f_1\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)=0.$$

Zavedeme-li sem označení z rovnice (8) a použijeme rovnice (7), objeví se nám tato podmínka integrability ve tvaru

$$S\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\begin{vmatrix} u_z & u_x \\ v_z & v_x \end{vmatrix}-\frac{\partial}{\partial y}\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}\right\}=0 \quad \dots (9)$$

jako nutná a postačující podmínka pro to, aby k daným dvěma orthogonálním soustavám ploch existovala třetí soustava k oběma orthogonální.

Rovnici (9) možno užitím jistých identit zjednodušiti. Tak druhé dvě rovnice (4) pišme ve tvaru

$$S(t_x u_x S v_{xx})=0, \quad S(t_x v_x S u_{xx})=0,$$

takže vzhledem k rovnici (7) platí identita

$$S\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}(u_x S v_{xx} - v_x S u_{xx}) = 0 .$$

Odečteme-li tuto rovnici od rovnice (9), v níž jsme derivace provedli, nabudeme rovnice

$$(9')\ldots S\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}\{(u_x v_{xx} + u_y v_{xy} + u_z v_{xz}) - (v_x u_{xx} + v_y u_{xy} + v_z u_{xz})\} = 0$$

Tato rovnice se ještě dále zjednoduší. Derivací dle x rovnice $S u_x v_x = 0$ plyne totiž vztah

$$u_x v_{xx} + u_y v_{xy} + u_z v_{xz} = v_x u_{xx} + v_y u_{xy} + v_z u_{xz},$$

takže rovnice (9') dává rovnici

$$S\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}(u_x v_{xx} + u_y v_{xy} + u_z v_{xz}) = 0 \ldots (10).$$

Buďtež nyní $\delta x, \delta y, \delta z$ přírůstky na křivce (c) průsečné ploch (u), (v). Pak jest

$$u_x \delta x + u_y \delta y + u_z \delta z = 0$$
$$v_x \delta x + v_y \delta y + v_z \delta z = 0,$$

takže

$$(v)\ldots \delta x : \delta y : \delta z = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} : \ldots$$

Vložme tuto relaci do rovnice (10), čímž obdržíme rovnici

$$\underline{u_x \delta(v_x) + u_y \delta(v_y) + u_z \delta(v_z) = 0} \ldots (11)$$

(kde δ.. značí přírůstek podél křivky (c)) jako naši podmínku integrability.

Geometrický význam této rovnice snadno stanovíme. Mysleme si normálu (X, Y, Z) na př. ku ploše (v)

takže jest

$$X : Y : Z = v_x : v_y : v_z .$$

Pak z rovnice (11) plyne

$$S u_x \delta X = 0$$

a z rovnice $S X^2 = 1$ plyne

$$S v_x \delta X = 0 ,$$

takže jest též

$$\delta X : \delta Y : \delta Z = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} : \dots$$

a srovnáním s rovnicí (r) obdržíváme konečně naší podmínku integrability ve tvaru

$$\delta X : \delta Y : \delta Z = \delta x : \delta y : \delta z \quad \dots \quad (12)$$

Tato rovnice vyjadřuje, že křivka (c) jest křivkou křivosti na ploše (k).

-(Dvě sousední normály podél křivky křivosti se totiž protínají, takže jest $x + r X = (x + \delta x) + r (X + \delta X), \dots$ odkud (v) $\dots \frac{\delta x}{\delta X} = \frac{\delta y}{\delta Y} = \frac{\delta z}{\delta Z} = -r$. -A platí-li naopak tento poslední vztah uvažujme křivku $x_1 = x + r X, \dots$; pak máme $\delta x_1 = \delta x + r \delta X + X \delta r, \dots$ takže ze vztahu toho plyne $\delta x_1 = \delta r . X, \delta y_1 = \delta r . Y, \dots$, t.j. křivka (x_1, y_1, z_1) dotýkací se normály (X, Y, Z), jest tedy hranou vratu rozvinutelné plochy normál ku ploše podél křivky uvažované, takže křivka uvažovaná vztahem (v) jest křivkou křivosti.) -

Zcela obdobně by plynulo, že křivka (c) jest křivkou křivosti plochy (k). Tím nabýváme

věty Darbouxovy: Nutná a postačující pod-

mínka pro to, aby dvěma soustavám ploch, orthogonálním navzájem, mohla býti přiřazena třetí soustava ploch orthogonální k oběma, záleží v tom, že průsečnice každé plochy první soustavy s každou plochou druhé soustavy musí býti křivkou křivosti na obou plochách.

Z věty Darbouscovy ihned plyne známá nám věta Dupinova a sice jest Darbouscova věta obecnější této.

236. Podmínka pro soustavu ploch náležející k systemu. — Má-li daná soustava ploch býti součástí trojnásobně orthogonálního systemu ploch, musí býti možná taková druhá soustava, aby protínala plochy dané orthogonálně podél křivek křivosti, čili aby byla orthogonální ke sdruženým křivkám křivosti. Musí býti tedy možno sestrojiti soustavu orthogonálních ploch k těmto ∞^2 křivkám křivosti.

Soustava ∞^2 křivek v prostoru dána jest nejjednodušeji rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v, t) \\ y &= y(u, v, t) \\ z &= z(u, v, t), \end{aligned}\right\} \quad (13).$$

je-li t proměnná a jsou-li u, v parametry, jichž ∞^2 kombinací vede k jednotlivým křivkám soustavy.

Jestliže $\frac{\partial x}{\partial t}, \ldots$ jsou derivace podél křivky soustavy a $dx, \ldots$ přírůstky na hledané ploše orthogonální, platí vztah $S \frac{\partial x}{\partial t} dx = 0$ čili

$$S\left[\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u}\,du+\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial v}\,dv+\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 dt\right]=0\ ,$$

čili, klademe-li

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2=T,\quad S\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u}=U,\quad S\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial v}=V,$$

vzdah

$$T\,dt+U\,du+V\,dv=0\ \ldots\ (14),$$

jenž jest tedy podmínkou pro to, aby exciso vala plocha orthogonální ku křivkám (13). Ploch takových má býti nekonečně mnoho, tudíž rovnice (14) musí býti neomezeně integrabilní. Její podmínka integrability jest (viz str. 484)

(15) $$T\left(\frac{\partial U}{\partial v}-\frac{\partial V}{\partial u}\right)+U\left(\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial T}{\partial v}\right)+V\left(\frac{\partial T}{\partial u}-\frac{\partial U}{\partial t}\right)=0$$

Této rovnici musí tedy vyhověti funkce x, y, z v (13).

Aplikujme tento výsledek vyvozený pro ∞^2 křivek vůbec na případ, kdy křivky jsou křivkami křivosti. Vyznačme si na ploše (u) křivku křivosti (x) a myslemo si orthogonální trajektorie ke všem plochám (u), které vycházejí od této křivky křivosti. Tyto orthogonální trajektorie vytvoří určitou plochu, totiž to plocha (t), jež jest tedy kolmá ku křivkám křivosti (v) ploch (u), pro které žto křivky jest tudíž t proměnnou. Ustrojení nyní plochou (t) musí protínati všechny plochy (u) v křivkách křivosti. Jsou-li tedy X_1, Y_1, Z_1 cosiny směrné pro teč nu vyšetřené křivky křivosti (x) a jsou-li dx, dy, dz průvodiče na sestrojené ploše (t), musí rovnice

$$X_1\,dx+Y_1\,dy+Z_1\,dz=0\ \ldots\ (14')$$

býti neomezeně integrabilní, musí tedy rovnice

$$X_1\left(\frac{\partial Y_1}{\partial z}-\frac{\partial Z_1}{\partial y}\right)+Y_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x}-\frac{\partial X_1}{\partial z}\right)+Z_1\left(\frac{\partial X_1}{\partial y}-\frac{\partial Y_1}{\partial x}\right)=0 \quad .. (15')$$

býti identicky splněna.

Povážíme-li, že rovnice

$$\begin{vmatrix} E\,du+F\,dv, & F\,du+G\,dv \\ L\,du+M\,dv, & M\,du+N\,dv \end{vmatrix}=0$$

stanoví koefficient $\frac{dv}{du}$ pro naše křivky křivosti(x), takže měř. cosiny X_1, Y_1, Z_1 záviší na veličinách $E_1 .. L_1 ..$, tedy obsahují derivace, řádu nejvýše 2., vidíme, že rovnice (15') jest řádu třetího.

Nabýváme tedy věty:

„Libovolnou soustavu ploch není možno pokládati za soustavu trojnásobně orthogonálního systému. Má-li to býti možno, musí soustava ta splňovati určitou differenciální rovnici řádu třetího."

237. Systém obsahující danou plochu. — Je-li dána libovolná plocha, nakreslíme na ní křivky křivosti a sestrojíme normály ku ploše podél těchto křivek. Tím obdržíme dvě soustavy rozvinutelných ploch orthogonálních ku ploše i navzájem. Připojíme-li pak ku ploše plochy k ní rovnoběžné, nabýváme systému trojnásobně orthogonálního.

Pozn. Plocha paralelní ku ploše jest obálkou soustavy ploch kulových konstantního poloměru o středech na ploše. Přechod od plochy ku ploše paralelní jest dosti kovná transformace zvaná dilatací.

238. Systemy obsahující danou soustavu rovin. –

Každá křivka v rovině jest jak známo křivkou křivosti. Sestrojme tudíž v rovině R dvě orthogonální navzájem soustavy křivek dané rovnicemi

$$\psi(x, y) = a,$$

resp.
$$\frac{dx}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial \psi}{\partial y}}$$

a vedme jejich body orthogonální trajektorie k dané soustavě rovin R. Tyto křivky (jež jsou planárními evolventami hrany vratu rozvinutelné plochy obalené rovinami R) vytvoří dvě soustavy ploch Mongeových, jež spolu s danou soustavou rovin R tvoří systém trojnásobně orthogonální.

239. Systemy obsahující soustavu ploch kulových. –

Též plocha kulová má tu vlastnost, že každá její křivka jest křivkou křivosti. Obsahuje-li tedy soustava kulových ploch (K), zvolme na jedné z těchto ploch dvě navzájem orthogonální soustavy křivek (c), (c$_1$) a sestrojme body těchto křivek orthogonální trajektorie (γ), (γ$_1$) ploch kulových. Křivky (γ) resp. (γ$_1$) vytvoří soustavy ploch tvořících s danými plochami kulovými systém trojnásobně orthogonální.

Úlohu stanoviti na ploše kulové dvě navzájem orthogonální soustavy křivek možno stereografickou projekcí převésti na úlohu stanoviti takové dvě soustavy křivek v rovině. Zabývejme se tudíž úlohou stanoviti

orthogonální trajektorie soustavy ploch kulových.

Uvažujeme-li 2 koule soustavy, stanoví orthogonální trajektorie mezi nimi určitou příbuznost, v níž bodu odpovídá bod, a to příbuznost takového druhu, že orthogonálnímu systemu na jedné ploše odpovídá orthogonální system na druhé. Dva kolmé směry jsou však sdruženy ke směrům isotropickým a v bodové příbuznosti (jednoznačné) jest dvojpoměr tečen invariantem, tudíž isotropickým směrům odpovídají zde zase směry isotropické, površky jedné koule přecházejí v površky druhé koule. Ježto pak dvojpoměr libovolných 2 směrů ke směrům isotropickým se zachovává, zachovávají se úhly, transformace jest konformní.

Budiž

$$S(x-x_0)^2 - R^2 = 0$$

rovnice kulových ploch soustavy, kde x_0, y_0, z_0, R závisí na parametru t. Vzhledem k předchozímu zaveďme površky koule, za kterýmž účelem kladme

$$x - x_0 + i(y-y_0) = \lambda[(z-z_0)+R]$$

$$x - x_0 - i(y-y_0) = -\frac{1}{\lambda}[(z-z_0)-R] = \mu[(z-z_0)+R],$$

odkud plyne

$$(z-z_0)\left(\mu+\frac{1}{\lambda}\right) = R\left(\frac{1}{\lambda}-\mu\right), \text{ tedy}$$

$$z-z_0 = R\,\frac{1-\lambda\mu}{1+\lambda\mu}, \quad x-x_0+i(y-y_0) = \frac{2R}{1+\lambda\mu}\lambda$$

$$x-x_0-i(y-y_0) = \frac{2R}{1+\lambda\mu}\mu.$$

Differenciální rovnice orthogonálních trajektorií našich ploch kulových (tečna splývá s poloměrem)

jsou pak

$$\frac{dx}{x-x_0} = \frac{dy}{y-y_0} = \frac{dz}{z-z_0} = \frac{d(x+iy)}{x-x_0+i(y-y_0)} = \frac{d(x-iy)}{x-x_0-i(y-y_0)}$$

Plynoucí odtud rovnice

$$\frac{dz}{z-z_0} = \frac{d(x+iy)}{x-x_0+i(y-y_0)}, \quad \frac{dz}{z-z_0} = \frac{d(x-iy)}{x-x_0-i(y-y_0)}$$

dávají dosazením předchozích výrazů differenciální rovnice Riccatiho

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\mathcal{B}}{dt}\lambda^2 - 2\frac{d\mathcal{C}}{dt}\lambda - \frac{d\mathcal{A}}{dt}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{d\mathcal{A}}{dt}\mu^2 - 2\frac{d\mathcal{C}}{dt}\mu - \frac{d\mathcal{B}}{dt},$$

jestliže jsme položili

$$d\mathcal{A} = \frac{d(x_0+iy_0)}{2R}, \quad d\mathcal{B} = \frac{d(x_0-iy_0)}{2R}, \quad d\mathcal{C} = \frac{dz_0}{2R}.$$

Známe-li tedy jednu orthogonální trajektorii, převádí se náš problém na dvě kvadratury atd. Jsou-li dále $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ resp λ a $\lambda_1^\circ, \lambda_2^\circ, \lambda_3^\circ$ resp λ° tři partikulární integrály resp obecný integrál rovnice prvé a sice jejich hodnoty pro hodnotu t a t° parametru t, platí rovnice

$$\frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda-\lambda_2} : \frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2} = \frac{\lambda^\circ-\lambda_1^\circ}{\lambda^\circ-\lambda_2^\circ} : \frac{\lambda_3^\circ-\lambda_1^\circ}{\lambda_3^\circ-\lambda_2^\circ},$$

která dává relaci tvaru

$$\lambda = \frac{M\lambda^\circ + N}{P\lambda^\circ + Q}$$

Obdobně platí relace

$$\mu = \frac{R\mu^\circ + S}{T\mu^\circ + U}$$

a tyto dva vzorce definují příbuznost určenou orthogonálními trajektoriemi mezi plochou kulovou příslušící

hodnotě t parametru a plochou příslušnou jeho hodnotě t^0.

Transformace tato (viz konformní zobrazení plochy kulové) převádí kružnice jedné koule v kružnice druhé koule a stereografickou projekcí přechází v transformaci, která jest obecnou inversí.

240. Základní veličiny a rovnice Lamého.–

Pro lineární element mezi dvěma body v prostoru (u, v, w), $(u+du, v+dv, w+dw)$*) platí výraz

$$ds^2 = S\,dx^2 = S\,(x_u\,du + x_v\,dv + x_w\,dw)^2.$$

Pro zjednodušení zaveďme veličiny

$$\mathcal{H}_1^2 = S\,x_u^2,\quad \mathcal{H}_2^2 = S\,x_v^2,\quad \mathcal{H}_3^2 = S\,x_w^2 \;\ldots\; (1).$$

Je-li pak náš trojnásobný systém ploch souřadných systemem orthogonálním, jest $S\,x_u x_v = \ldots = 0$, takže pro lineární element máme výraz

$$ds^2 = \mathcal{H}_1^2\,du^2 + \mathcal{H}_2^2\,dv^2 + \mathcal{H}_3^2\,dw^2 \;\ldots\; (2).$$

Snadno nyní vyvodíme, že veličinami $\mathcal{H}$ dají se vyjádřiti všecky základní veličiny všech ploch systemu. Základní rovnice mezi těmito základními veličinami platné vedou nás zde pak k t. zv. rovnicím Lamého, jež musí býti splněny, má-li systém ploch býti orthogonálním.

Uvažujme normály $(X_1, Y_1, Z_1), \ldots$ ku plochám $(u), \ldots$. Jest pak $X_1 : Y_1 : Z_1 = x_u : y_u : z_u, \ldots$. Pro základní veličiny prvního řádu $\mathcal{E}^{(u)}, \ldots$ resp $\mathcal{E}^{(v)}, \ldots$ resp $\mathcal{E}^{w}, \ldots$ plochy (u) resp (v) resp (w) plyne přímo z výrazu (2):

*) místo t pišme nyní w.

$$(3)\quad \begin{cases} E^{(u)} = \mathcal{H}_2^2, & F^{(u)} = 0, & G^{(u)} = \mathcal{H}_3^2, & \Delta^{(u)} = \mathcal{H}_2\mathcal{H}_3 \\ E^{(v)} = \mathcal{H}_3^2, & F^{(v)} = 0, & G^{(v)} = \mathcal{H}_1^2, & \Delta^{(v)} = \mathcal{H}_3\mathcal{H}_1 \\ E^{(w)} = \mathcal{H}_1^2, & F^{(w)} = 0, & G^{(w)} = \mathcal{H}_2^2, & \Delta^{(w)} = \mathcal{H}_1\mathcal{H}_2. \end{cases}$$

Abychom stanovili veličiny 2. řádu, odvoďme nejprve určité relace:

Derivací rovnice $S x_u x_v = 0, \ldots$ dle $w, \ldots$ plyne

$$S x_u x_{vw} + S x_v x_{uw} = 0$$
$$S x_v x_{wu} + S x_w x_{vu} = 0$$
$$S x_w x_{uv} + S x_u x_{vw} = 0.$$

Sečteme-li pak od poloviční součtu těchto rovnic odečteme kružítkem z nich, obdržíme

$$S x_u x_{vw} = 0, \quad S x_v x_{wu} = 0, \quad S x_w x_{uv} = 0 \ldots (4).$$

Derivujeme-li nyní rovnice (1) druhou a třetí dle u a rovnice

$$S x_u x_v = 0, \quad S x_v x_w = 0, \quad S x_w x_u = 0$$

první a třetí dle v a w, obdržíme vztahy

$$(5)\quad \begin{cases} S x_u x_{uv} = -S x_u x_{uv} = \mathcal{H}_2 \dfrac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial u} \\ S x_w x_{uw} = -S x_u x_{uw} = \mathcal{H}_3 \dfrac{\partial \mathcal{H}_3}{\partial u} \ldots \end{cases}$$

Z rovnic (1) plyne nyní

$$(5')\quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{dx}{ds_{(u)}} = \dfrac{1}{\mathcal{H}_1} x_u, & Y_1 = \dfrac{1}{\mathcal{H}_1} y_u, & Z_1 = \dfrac{1}{\mathcal{H}_1} z_u \\ X_2 = \dfrac{1}{\mathcal{H}_2} x_v, & Y_2 = \dfrac{1}{\mathcal{H}_2} y_v, & Z_2 = \dfrac{1}{\mathcal{H}_2} z_v \\ X_3 = \dfrac{1}{\mathcal{H}_3} x_w, & Y_3 = \dfrac{1}{\mathcal{H}_3} y_w, & Z_3 = \dfrac{1}{\mathcal{H}_3} z_w \end{cases}$$

odkud pro základní veličiny 2. řádu dostáváme

$$\mathcal{L}^{(u)} = S X_1 x_{vv}, \quad \ldots \text{ (neboť plocha } (u) \text{ má parametry } v, w)$$

$$\mathcal{L}^{(u)} = \frac{1}{\mathcal{H}_1} S x_u x_{vv} \quad \ldots \text{ a dosazením z (4), (5):}$$

(6)... $\mathcal{L}^{(u)} = -\frac{\mathcal{H}_2}{\mathcal{H}_1}\frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial w}$, $M^{(u)} = 0$, $N^{(u)} = -\frac{\mathcal{H}_3}{\mathcal{H}_1}\frac{\partial \mathcal{H}_3}{\partial w}$;

pro druhé dvě plochy obdržíme veličiny 2. řádu plynnou cestou anebo přímo cyklickou záměnou z předchozích:

(6) $\begin{cases} \mathcal{L}^{(v)} = -\frac{\mathcal{H}_3}{\mathcal{H}_2}\frac{\partial \mathcal{H}_3}{\partial v}, & M^{(v)} = 0, & N^{(v)} = -\frac{\mathcal{H}_1}{\mathcal{H}_2}\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial v}, \\ \mathcal{L}^{(w)} = -\frac{\mathcal{H}_1}{\mathcal{H}_3}\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial w}, & M^{(w)} = 0, & N^{(w)} = -\frac{\mathcal{H}_2}{\mathcal{H}_3}\frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial w}. \end{cases}$

Jelikož pak jest pro všechny plochy $F = M = 0$, jsou křivky parametrické křivkami křivosti, čímž analyticky vyjadřujeme analytickou cestou větu Dupinovu.

Pro hlavní poloměry křivosti plochy (w), R_{uw}, R_{vw}, obdržíme ze vzorce: $R = \frac{\mathcal{E}\,du^2 + 2\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2}{\mathcal{L}\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}$:

$$\frac{1}{R_{uw}} = -\frac{1}{\mathcal{H}_1\mathcal{H}_3}\frac{\partial \mathcal{H}_3}{\partial u}, \quad \frac{1}{R_{vw}} = -\frac{1}{\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2}\frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial w} \quad \ldots (7),$$

kde R_{uw} jest poloměr křivosti pro křivku křivosti $v = \text{konst.}$, R_{vw} ... pro .. $w = \text{konst.}$ Obdobné výrazy pro druhé plochy plynnou cyklickou záměnou.

Užijme nyní rovnic Codazziho (ve tvaru příslušném křivkám křivosti jako parametrickým) na plochy všech tří soustav. Vzniklých tím 6 rovnic redukuje, jak snadno poznáme, na tři:

(8).. $\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_1}{\partial w\,\partial w} = \frac{1}{\mathcal{H}_2}\frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial w}\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial v} + \frac{1}{\mathcal{H}_3}\frac{\partial \mathcal{H}_3}{\partial v}\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}_2}{\partial w\,\partial u} = \frac{1}{\mathcal{H}_3}\frac{\partial \mathcal{H}_3}{\partial u}\frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial w} + \frac{1}{\mathcal{H}_1}\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial w}\frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}_3}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\mathcal{H}_1}\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial v}\frac{\partial \mathcal{H}_3}{\partial u} + \frac{1}{\mathcal{H}_2}\frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial u}\frac{\partial \mathcal{H}_3}{\partial w}. \end{cases}$

Z rovnice Gaussovy nabýváme pak rovnice

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\right)+\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial u}=0 \\ \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\right)+\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial v}=0 \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right)+\frac{1}{H_3^2}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial w}=0 . \end{cases}$$

Rovnice (8), (9) jsou hledané rovnice Lamého.

241. Systém o daných veličinách H_i. – Nechť nyní úlohou stanoviti orthogonální systém odpovídající daným veličinám H_1, H_2, H_3. Veličiny tyto, jak plyne z předchozího, nemohou býti libovolné, nýbrž musí býti jakýmisi funkcemi parametrů u, v, w, aby splňovaly rovnice (8), (9).

Dosadíme-li nyní hodnoty (3), (6) do známých nám z theorie ploch vzorců pro derivace směr. cosinů normály a dosadíme-li pak za $x_{u_1}\dots$ z rovnic (5'), obdržíme:

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial u}=-\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}X_2-\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}X_3, & \frac{\partial X_2}{\partial u}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}X_1, & \frac{\partial X_3}{\partial u}=\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}X_1 \\ \frac{\partial X_1}{\partial v}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}X_2, & \frac{\partial X_2}{\partial v}=-\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}X_3-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}X_1, & \frac{\partial X_3}{\partial v}=\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}X_2 \\ \frac{\partial X_1}{\partial w}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}X_3, & \frac{\partial X_2}{\partial w}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}X_3, & \frac{\partial X_3}{\partial w}=-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}X_1-\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}X_2 \end{cases}$$

Tyto rovnice zůstávají v platnosti, píšeme-li Y resp. Z místo X. Vyjádříme-li nyní podmínky integrability této soustavy differenciálních rovnic [kladouce na př. $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial X_1}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial X_1}{\partial v}\right)$, atpd.], snadno seznáme, že podmínky ty vedou právě k rovnicím Lamého.

Dány-li tedy funkce $\mathcal{H}$ tak, aby splňovaly rovnice Lamého, což předpokládáme, jest možno rovnice (10) integrovati. Známe-li pak jejich integrály X_1, X_2, X_3, jest z rovnic (5')

$$x_u = \mathcal{H}_1 X_1, \quad x_v = \mathcal{H}_2 X_2, \quad x_w = \mathcal{H}_3 X_3,$$

tedy

$$x = \int (\mathcal{H}_1 X_1 du + \mathcal{H}_2 X_2 dv + \mathcal{H}_3 X_3 dw) \quad \ldots (11).$$

Obdobně obdržíme výrazy pro y, z, tedy rovnice obecného trojnásobně orthogonálního systému ploch, jenž odpovídá daným veličinám H_1, H_2, H_3. Z věty o integraci základních rovnic theorie ploch plyne, že stanovený takto systém jest až na svou polohu v prostoru jednoznačně určen.

II. Zobrazování cyklografické.

242. Definice. – Uvažujme souhru kružnic v rovině; rovnice jeho jest

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Každé trojici hodnot a, b, r odpovídá určitá kružnice, takže veličiny a, b, r možno považovati za souřadnice kružnic naší roviny. Přiřaďme pak kružnici (a, b, r) bod v prostoru o pravoúhlých souřadnicích

1) $\xi=a, \eta=b, \zeta=r$

nebo, v druhém případě, bod o souřadnicích

2) $\xi=a, \eta=b, \zeta=ir$.

V prvním případě odpovídá každé reálné kružnici reálný bod a naopak, kdežto ve druhém případě reálné kružnici odpovídá imaginární bod a kružnici o reálném středu a imaginárním poloměru odpovídá reálný bod. Obě zobrazení se navzájem doplňují a jest výhodno užívati jich současně.

Bod A zobrazující kružnici danou leží na kolmici ve středu kružnice k rovině $(\xi, \eta) \equiv (x, y)$. Pokud se týče znamení poloměru r a tedy též souřadnice ζ, mějme zřetel k tomu, že kružnici možno opsati ve dvojím smyslu. Kladným smyslem otáčení (= od $+x$ ku $+y$ nejkratší cestou) vytvoří se kladný cyklus a naopak, takže kružnice obsahuje dva souměstné cykly. Pak posta-

čí již úmluva, že polomíru kladného cyklu bereme kladně a polomíru záporného cyklu záporně, aby definice zobrazování cyklografického byla úplná.

243. Obraz svazku kružnic. – Budiž osa x centrálou svazku kružnic, jenž jest dán kružnicemi

$$K_1 \equiv (x-a_1)^2 + y^2 - r_1^2 = 0$$
$$K_2 \equiv (x-a_2)^2 + y^2 - r_2^2 = 0,$$

má tedy rovnici

$$K_1 + \lambda K_2 = 0 \qquad \text{čili}$$

$$(3)\ldots x^2 + y^2 - 2\frac{a_1+\lambda a_2}{1+\lambda}x + \frac{(a_1^2-r_1^2)+\lambda(a_2^2-r_2^2)}{1+\lambda} = 0.$$

Střed kružnice svazku má tedy souřadnice

$$a = \frac{a_1+\lambda a_2}{1+\lambda}, \quad b = 0,$$

takže její rovnici lze též psáti

$$(4)\quad \left(x - \frac{a_1+\lambda a_2}{1+\lambda}\right)^2 + y^2 - r^2 = 0$$

a srovnáním rovnic (3), (4) plyne

$$(5)\ldots (a_1+\lambda a_2)^2 - R^2(1+\lambda)^2 = (1+\lambda)(a_1^2-r_1^2) + \lambda(1+\lambda)(a_2^2-r_2^2).$$

Naše zobrazení svazku dáno jest pak vztahy

$$\xi = \frac{a_1+\lambda a_2}{1+\lambda}, \quad \eta = 0, \quad \xi^2 = R^2 \ldots (6).$$

Vyloučme odtud a z rovnice (5) veličinu λ. Nejprve jest $(6')\ldots 1+\lambda = \frac{a_1+\lambda a_2}{\xi}$,

takže dosadíme-li tuto hodnotu za $1+\lambda$ do rovnice (5) a dělíme celou rovnici $a_1+\lambda a_2$, předpokládajíce $a_1+\lambda a_2 \geq 0$, obdržíme, násobíce ještě ξ^2, rovnici tu ve tvaru

$$(a_1+\lambda a_2)(\xi^2 - R^2) - \xi[a_1^2 - r_1^2 - \lambda(a_2^2 - r_2^2)] = 0.$$

Tím jsme vyloučili $1+\lambda$ a zbývá ještě vyloučiti λ samo. Tu plyne z rovnice (6') dále

$$\xi - a_1 = \lambda(a_2 - \xi)$$

takže $$\lambda = \frac{\xi - a_1}{a_2 - \xi}.$$

Dosadíme-li toto hodnotu do získané rovnice a píšeme ξ místo R, obdržíme po krátké úpravě rovnici

$$(a_2 - a_1)(\xi^2 - \xi^2) = a_1^2 a_2 - a_1 a_2^2 - a_2 r_1^2 + a_1 r_2^2 + \\ + \xi(r_1^2 - a_1^2 + r_2^2 - a_2^2)$$

levý rovnice tvaru

$$\xi^2 - \xi^2 = \alpha + \beta\xi \quad \dots (7).$$

Seznámíváme tudíž, že obrazem svazku kružnic jest rovnoramenná hyperbola.

Transformujeme-li souřadnici ξ tak, aby počátek splynul se středem našeho svazku, nabývá rovnice (7) tvaru

$$\xi^2 - \xi^2 = k^2 \quad \dots (7').$$

Výsledku toho nabudeme snadno též geometricky. Uvažujme

a) svazek o reálných průsečících L, M. Pak jsou body vzniklé otočením bodů L, M do roviny $\xi\xi$ kol osy $\xi = x$ vrcholy hlavní osy rovnoramenné hyperboly, jež prochází konsorvními body průměrů rovnoběžných se ξ kružnic otočeného svazku.

b). Uvažujme svazek kružnic o imaginárních průsečících, a nice budiž k kružnice jimi orthogonálně protínání. Je-li pak O střed této kružnice a L, M koncové body jejího průměru ležícího na centrále $x = \xi$,

jsou L, M vrcholy hlavní osy rovnoramenné hyperboly, která prochází konc. vými body průměrů rovnoběžných s osou $O\xi$ kružnic svazku kol. ξ obecného.

Poznámka. Současné užití obojího druhu zobrazení cyklografického vede nás k doplnění plochy o část imaginárními (jest totiž patrno, že plocha obsahuje jednak body reálné jednak imaginárné).

Na př. budiž dána plocha kulová o poloměru ϱ:

$$x^2+y^2+z^2-\varrho^2=0.$$

Pak cyklografickými obrazy jejích bodů jsou kružnice

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2=r^2$$

a sice, jelikož $z^2=\varrho^2-x^2-y^2$

jest toto zobrazení reálné (případ (1)) nebo imaginárné (případ (2)) dle toho, je-li

$$r^2=\varrho^2-x^2-y^2 \quad \dots (1)$$

nebo $$-r^2=\varrho^2-x^2-y^2 \quad \dots (2).$$

V případě (2) odpovídá reálná kružnice takovému bodu, pro nějž jest $x^2+y^2>\varrho^2$, t. j. imaginárnímu bodu plochy kulové, takže imaginárná část plochy kulové jest tímto způsobem reálně zobrazena. Tyto kružnice jsou však reálným zobrazením plochy

$$x^2+y^2-z^2-\varrho^2=0,$$

jež jest jednodílným rotačním hyperboloidem, takže tyto dvě plochy se tímto způsobem navzájem doplňují, tak, že reálná část jedné zobrazuje imaginárnou část druhé.

III. Kongruence křivek.

Místo kongruence přímek možno obecněji uvažovati soustavu o 2 parametrech čili kongruenci křivek vůbec. Dána jest obecně dvěma rovnicemi

$$(1)\quad \begin{cases} f(x, y, z, a, b) = 0 \quad \cdots (1) \\ g(x, y, z, a, b) = 0 \quad \cdots (1') \end{cases}$$

kde a, b jsou parametry.

Dán-li v prostoru bod (x_0, y_0, z_0), prochází jím obecně jen konečný počet křivek kongruence, neboť dosazením jeho souřadnic do rovnic (1) obdržíme dvě relace mezi parametry a, b.

Uvažujme nyní jednu relaci mezi oběma parametry, na př. tvaru

$$b = F(a) \quad \cdots \quad (2).$$

Tím vyloučí se nám z naší kongruence soustava křivek, ∞^1, a vyloučíme-li z rovnic (1), (2) parametry a, b, obdržíme rovnici

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

plochy křivkami sečmi vytvořené. Uvažujme rovinu tečnou v bodě (x_0, y_0, z_0) této plochy. Její rovnici

$$\Phi_x(\xi - x_0) + \Phi_y(\eta - y_0) + \Phi_z(\zeta - z_0) = 0$$

můžeme, omezujíce se jen na okolí bodu (x_0, y_0, z_0), psáti symbolicky ve tvaru

$$\Phi_x dx + \Phi_y dy + \Phi_z dz = 0 \quad \cdots (3).$$

Pokládajíce b za funkci a a obojí za funkci proměnné (x, y, z), máme možnost stanoviti tyto funkce z rovnice (2) resp. (1') a pokládajíce pak rovnici (1), do níž funkce ty dosazeny, za rovnici plochy Φ.

Máme-li pak

$$\Phi_x \equiv f_x + f_a \frac{\partial a}{\partial x} + f_b \frac{db}{da} \frac{\partial a}{\partial x},$$

při čemž $$\frac{db}{da} = F'(a),$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_a + \varphi_b F'(a)},$$

takže rovnice (3) nabývá tvaru

$$\int f_x [\varphi_a + \varphi_b F'(a)]\,dx - \int \varphi_x [f_a + f_b F'(a)]\,dx = 0$$

čili

$$\frac{f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz}{\varphi_x\,dx + \varphi_y\,dy + \varphi_z\,dz} = \frac{f_a + f_b F'(a)}{\varphi_a + \varphi_b F'(a)} \quad \dots (4)$$

Z této rovnice jest patrno (třeba ji jen psáti v příslušné úpravě), že roviny tečné ke všem plochám (2) kongruence, určitou křivkou její jdoucím, v určitém bodě křivky té, tvoří svazek (bo jest všem tečna v bodě tom ke křivce) projektivní s řadou hodnot $F'(a)$.

„Tou tudíž svazky tečných rovin ploch (2) v jednotlivých bodech křivky kongruence navzájem projektivní." – Tato věta jest zobecněním příslušné věty pro kongruenci přímek.

Obrácená. Pravá strana rovnice (4), tudíž celá rovnice ta, stane se nezávislou na $F(a)$, je-li

$$\frac{f_a}{\varphi_a} = \frac{f_b}{\varphi_b} = k \quad \dots \quad (5).$$

Body křivky naší, které vyhovují rovnici (5), mají tedy tu vlastnost, že v nich roviny řečné ke všem plochám (2) křivkou jdoucím splývají. Nazýváme je ohniska naší křivky a plochu (5), jež jest místem jejich, ohniskovou plochou kongruence.

Rovinu, jež obálká se ohnisku všech příslušných ploch (2) kongruence, nazýváme rovinou ohniskovou. Platí pak věta, že rovina ohnisková obálká se v ohnisku plochy ohniskové.

Analytický důkaz této věty snadno plyne. Z rovnice (4) dostáváme totiž rovnici roviny ohniskové (správněji řečeno rovnici jejího elementu v okolí ohniska) ve tvaru

$$(f_x - k\varphi_x)\,dx + \dots = 0 \quad \dots \quad (6).$$

Píšeme-li pak rovnice (5) plochy ohniskové ve tvaru

$$f_a - k\varphi_a = 0, \qquad f_b - k\varphi_b = 0 \quad \dots \quad (5')$$

a rovnice (1), jež spolu s těmito rovnicemi plochu ohniskovou určují, spojíme ve tvar

$$f - k\varphi = 0 \quad \dots \quad (1''),$$

obdržíme derivací této rovnice rovnici

$$(f_x - k\varphi_x)\,dx + \dots + (f_a - k\varphi_a)\,da + (f_b - k\varphi_b)\,db = 0,$$

čili, vzhledem ku (5'), rovnici

$$(f_x - k\varphi_x)\,dx + \dots = 0$$

jako rovnici elementu plochy ohniskové. Její totožnost s rovnicí (6) jest důkazem naší věty.

Důsledkem této věty jest poznatek, že každá křivka kongruence dotýká se ve svých ohniskách plochy ohniskové. Lze tedy křivky kongruence seskupiti po ∞^1 křivkách tak, že obalují vždy jednu křivku na ploše ohniskové.

A skutečně z rovnic pro obalové křivky křivek kongruence (1), které jsou obalovými křivkami jsou dány rovnicemi (1) a rovnicemi

$$f_a + f_b \frac{db}{da} = 0, \quad \varphi_a + \varphi_b \frac{db}{da} = 0 \quad \dots (7),$$

plyne, že obalové křivky leží na ploše ohniskové [(19),(5)]. Zároveň pak vyloučením x, y, z z rovnic (1), (7) obdržíme vztah

$$\Psi\left(a, b, \frac{db}{da}\right) = 0,$$

jenž stanoví skupiny po ∞^1 křivkách mající obálku.

Poznámka 1. Uvažujme speciálně případ, že funkce f jest ku x, y, z stupně n-tého a funkce φ stupně 1, takže jde o kongruenci rovinných křivek n-tého řádu. Pak jest rovnice (5) stupně $n+1$, tedy plocha ohnisková stupně $n(n+1)$. Na každé křivce kongruence jest $n(n+1)$ ohnisek. — Rovinná křivka n-tého řádu jak známo určena $\frac{n(n+3)}{2}$ podmínkami. Abychom tak obdrželi elementární prvek plochy (2) kongruence, t.j. mohli sestrojiti roviny tečné ve všech bodech křivky kongruence ku ploše jí jdoucí, potřebujeme znáti roviny tečné v $\frac{n(n+3)}{2} + 2$ bodech, jak plyne z toho,

že tímto počtem podmínek dána jest přímka, v níž rovina souměrné křivky protíná rovinu dané křivky, a křivka souměrná sama sebe. Tomu vadí však na každé křivce jest $n(n+1)$ ohnisek, mimo kromě roviny ohniskových odpovídajících současně všem plochám kongruence, danou křivkou jdoucím, zmáli pro každou z těchto ploch jiště $\left[\frac{n(n+3)}{2}+2-n(n+1)\right]$ rovin tečných.

Nejjednodušším příkladem jest kongruence kruželosečka, kdy řády $n=2$. Zde zabýváme se řády 1. zv. plochami kruželosečkovými. (Viz: Ed. Weyr, Theorii ploch, 1891).

Poznámka II. — Procházejí-li všecky křivky kongruence pevným bodem, jest tento bod ohniskem alespoň 2-násobným.

Za příčinou zkrácení učiňme bod tento počátkem souřadnic. Pak plochy (1), (1') procházejí počátkem, v jejich rovnicích odpadají prosté členy, takže nejnižší člen má stupeň alespoň 2. V důsledku toho má nejnižší člen v rovnici (5) stupeň alespoň 2, takže počátek jest alespoň dvojnásobným bodem plochy ohniskové. Tím jest důkaz proveden.

Konec dílu třetího.