624.04

5204

BAŽANT

STAVEBNÁ MECHANIKA

DÍL II.

Třetí vydání.

SEZNAM SPISŮ ČESKÉ MATICE TECHNICKÉ

A) SPISY VYDANÉ MATICÍ:

TECHNICKÝ PRŮVODCE

	Číslo spisu		Člen. cena Kčs
Matematika 2. vydání	196	brož.	60,—
		váz.	80,—
Nauka o pružnosti a pevnosti 3. vydání	210	brož.	72,—
Statika stavebních konstrukcí 6. vyd.	216	brož.	110,—
		váz.	130,—
Elektrotechnika I., 3. vyd.	231	brož.	100,—
Jeřáby, 2. vydání — dotisk (t. č. v tisku)	208	brož.	90,—
Matematické tabulky 2. vydání	211	brož.	20,—
Statické tabulky 2. vydání	212	brož.	60,—
Slévárenství I. část	201	v tiskn	50,—
Ústřední vytápění a větrání	218	v tisku	
Svařování	219	v tisku	

UČEBNICE A JINÉ SPISY:

Bašta, Mechanika vlak. dopravy, jen 3. díl	126	brož.	5,—
Bažant, Stavebná mechanika I. díl, 4. vyd.	230	v tisku	
„ „ „ II. díl, 3. vyd.	229	v tisku	
„ „ „ III. díl, 2. vyd.	232	v tisku	
Čuřík, Počet vyrovnávací	173	brož.	76,—
Dusl, Přehled theorie funkcí jedné komplexní proměnné	203		22,—
Hájek, Skalní práce I. díl.	220		90,—
„ „ „ II. díl.	221	v tisku	
Hýbl, Pístová čerpadla		v tisku	
Jareš, Lehké kovy, 2. vydání	213	brož.	36,—
Jůva, Závlaha zemědělských půd	233	v tisku	
Klouček, Přesné řešení souměrného Vierendeelova nosníku		v tisku	
Kouba, Stručné základy rozb. a doběhu el. pohonů	199		20,—
Kratochvíl, Měření na betonových přehradách		v tisku	
Krouza-Machek, Strojnický slovník všeobecný, něm.-česko-slovenský			
svazek 1 písm. A—F	172		76,—
„ 2 „ G—M	185		60,—
„ 3 „ N—S	192		60,—
„ 4 „ S—Z	226	v tisku	
Krouza, Parní kotle	217		60,—
„ Odstředivá čerpadla, 2. vyd.		v tisku	
Kukač, Železový beton, dotisk 2. vyd.	206	v tisku	
„ Statika pozemních staveb, I. díl.	215		70,—
List, Základy elektrotechniky	224	v tisku	
Lossmann, Zakládání gravitačních přehrad		v tisku	
Mikulík, Elektrot. slovník německo-česko-slovenský			
1. svazek písmeno A—K	150		30,—
2. „ „ L—Z	160		
Miškovský, Tabulky z parních turbin		v tisku	
Navrátil, Rtuťový usměrňovač	143		5,—
Nechleba, Theorie indirektní regulace rychlosti	209	rozebráno	
Rádl, Učebnice matematiky, 2. vydání	228		195,—
Ryšavý, Nižší geodesie - prakt. geometrie, 2. vyd.	222	v tisku	
„ Vyšší geodesie	223	v tisku	

5204

624.04

ČESKÁ MATICE TECHNICKÁ

ROČNÍK LI. (1946). SPISŮ ČÍSLO 229.

STAVEBNÁ MECHANIKA

NAPSAL

ING. DR. ZDENĚK BAŽANT,

PROFESOR STAVEBNÉ MECHANIKY PŘI ČESKÉM VYSOKÉM UČENÍ TECHNICKÉM V PRAZE

DÍL DRUHÝ

PLNOSTĚNNÝ NOSNÍK PROSTÝ ZA POHYBLIVÉHO ZATÍŽENÍ A JEHO ČÁRA OHYBOVÁ — THEORIE SPOJITÉHO NOSNÍKU STÁLÉHO PRŮŘEZU — STATICKY URČITÉ SOUSTAVY PRUTOVÉ ZA POHYBLIVÉHO ZATÍŽENÍ A JEJICH PŘETVOŘENÍ

(SE 217 OBRAZCI V TEXTU A NA 3 TABULKÁCH)

TŘETÍ OPRAVENÉ A DOPLNĚNÉ VYDÁNÍ

V PRAZE

NÁKLADEM ČESKÉ MATICE TECHNICKÉ — V KOMISI KNIHKUPECTVÍ FRANT. ŘIVNÁČE V PRAZE

1946

TISKEM „PRÁCE“ V PRAZE

Předmluva k prvému vydání.

Tato kniha obsahuje prvou část výkladů spisovatelových o „stavebné mechanice druhého běhu“ na české vysoké škole technické v Praze. Probrán je v ní prostý nosník plnostěnný za pohyblivého zatížení, ohybová čára přímého nosníku, theorie spojitého nosníku stálého průřezu a staticky určité soustavy prutové za pohyblivého zatížení i jejich přetvoření. Ve všech případech je podáno řešení počtářské i grafické.

Řešení prostého nosníku za pohyblivého zatížení, jeho ohybové čáry i spojitého nosníku stálého průřezu podává již *Jos. Šolín* v „Theorii zevnitřních sil trámů přímých“, seš. I., II., III. (Praha 1878, 1879, 1883); odvozuje tu ryze měřicky řešení počtářské i grafické. Theorii spojitého nosníku v této knize vyvinuje podepsaný z počátků, jež obsahují *Šolínovy* „Základy technické nauky o pružnosti a pevnosti“ (Praha 1904), kdež jsou odvozeny obecné výminky přetvárné (rovnice třímomentové) a z nich počtářské řešení spojitého nosníku pro stálé zatížení. Toto řešení je zde doplněno řešením grafickým a dále je probráno počtářské i grafické řešení za pohyblivého zatížení; k tomu je též připojena theorie spojitého nosníku kloubového.

Celou látku této knihy obsahují Šolínovy výklady stavebné mechaniky, jež doplnil podepsaný tak, aby bylo podáno ve všech případech úplné řešení pro zatížení stálé i pohyblivé. Proto jsou připojeny příčinkové čáry u nosníku spojitého i u soustav prutových, z nichž je tu probrán nejen příhradový nosník prostý, nýbrž i spojitý nosník kloubový a oblouk o třech kloubech. Mimo četné jiné menší doplňky je uvedeno též v oddílu, jednajícím o přetvoření soustav prutových, řešení ohybových čar jakožto výslednicových čar k ideálným břemenům, velmi výhodné jak pro řešení ohybu samotného, tak i pro řešení soustav staticky neurčitých, o nichž bude pojednáno ve třetím dílu tohoto spisu. Látka výkladů je v této knize namnoze ovšem rozšířena a doplněna příklady. Prameny, po případě spisy, jež jinak řeší probíranou látku, jsou na příslušných místech citovány.

Spisovatel pracoval na této knize v nejhorší snad době hrozné války, hledaje i nacházeje v práci té zapomenutí na nesnáze i úzkosti doby. Přál by si jen, aby jeho práce nebyla marná, aby byla k hojnému užitku českým technikům, jimž jest určena.

K dokončení obrazců vydatně přispěli a vydání knihy urychlili svou ochotnou pomocí pp. asistenti Ing. *Fr. Košek* a Ing. *Ant. Zvolský*; budiž jim za to vzdán povinný dík.

V Praze v červnu 1918.

Zdeněk Bažant.

NÁRODNÍ KNIHOVNA
1004093241
1004093241
Rezervní fond
Národní knihovna ČR
RF A 3499

Předmluva k třetímu vydání.

Za druhé světové války, jež byla pro náš národ nejtěžší zkouškou, podjal se spisovatel práce na třetím vydání tohoto spisu. Pro uzavření českých vysokých škol byla tato práce přípravou pro lepší budoucnost, v níž se jedině mohly uplatniti vysokoškolské učebnice, jejichž vydání nebylo za okupace dovoleno. Spis dokončený v říjnu 1943 mohl býti dán do tisku až po opětném našem osvobození v květnu 1945.

Druhé vydání se od prvého lišilo jen nepatrně, třetí vydání je však podstatně rozšířeno. U prostého nosníku je m. j. přidán výpočet největšího průhybu při pohyblivé soustavě břemen. V theorii spojitého nosníku je nově uvedeno početní i grafické řešení čtyř dalších případů zatížení jediného pole, dále výpočet příčinkových pořadnic M, T, A, příčinková čára průhybu, přímý výpočet krajních hodnot M, T, A i průhybu při pohyblivé soustavě břemen a přímé řešení krajních hodnot statických veličin u spojitého nosníku kloubového s pohyblivým zatížením rovnoměrným. U soustav prutových je připojeno řešení příčinkových čar trojúhelníkové soustavy s podružnými polovičními pruty a soustavy polopříčkové.

Text i obrazce v dodatcích zpracoval spisovatel sám. Tato práce byla mu v těžké době útěchou a posilou. Nechť její výsledky poslouží našim technikům k lepšímu vyzbrojení pro praktický život a inženýrům k prohloubení jejich vzdělání v theorii, tím pak ke zvýšení soutěživosti pro očekávané velké úkoly.

V Praze v květnu 1945.

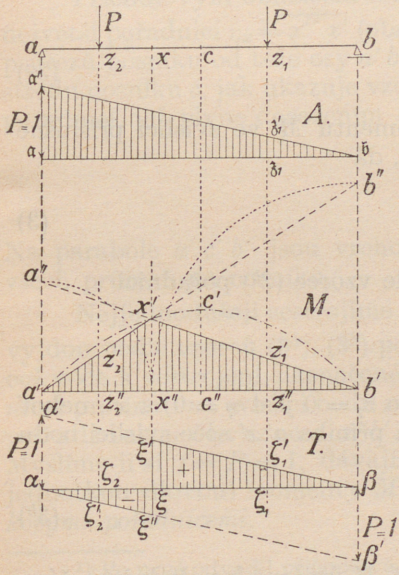
Zdeněk Bažant.

A) Plnostěnný nosník prostý za pohyblivého zatížení a jeho čára ohybová.

I. Zatížení pohyblivé.

1. Změny zatížení. Působí-li na prostý nosník jakékoli zatížení stálé, t. j. zatížení složené z břemen, jejichž poloha ani velikost se nemění, má moment ohybový M a posouvající síla T průřezu x určitou hodnotu. Také průřez přechodný pro spojité zatížení a průřezy obratníkové u nosníků spojitých mají stálou plolohu, je-li zatížení stálé. Zatížení se však může různě měniti. Mění-li se pouze velikost břemen, poloha jejich zůstává však stálou, nazýváme *zatížení proměnným*. Mění-li se poloha břemen za stálé jejich velikosti, vzniká *zatížení pohyblivé*. Konečně se může měniti velikost i poloha břemen. Prakticky nejčastější je případ zatížení pohyblivého, jímž se budeme podrobněji obírati.

Pohybuje-li se zatížení po nosníku, mění se moment ohybový i síla posouvající v určitém průřezu; také se mění poloha průřezu přechodného, jde-li o zatížení spojité, a poloha průřezů obratníkových u nosníků spojitých. Půjde o to vyšetřiti, jak se mění s pohybem zatížení moment ohybový a síla posouvající určitého průřezu x, zejména pak určiti krajní hodnoty (maxima a minima) těchto veličin. Dále bude třeba určiti meze, v nichž se pohybuje průřez přechodný a u nosníků spojitých též průřezy obratníkové.



Obr. 1.

a) Jediné břímě osamělé.

2. Příčinkové čáry reakcí podporových, momentů ohybových a sil posouvajících. Na prostý nosník ab nechť působí břímě P, jež se po nosníku pohybuje od podpory b k podpoře a (nebo naopak). Působí-li břímě P v poloze z, vyvodí v podporách a, b reakce

$$A = P\frac{z'}{l}, \qquad B = P\frac{z}{l}, \tag{1}$$

znamenáme-li $\overline{ab} = l$, $\overline{az} = z$, $\overline{zb} = z'$. Mění-li se poloha břemene, tedy úsečky z, z', velikost jeho P však zůstává stálá, mění se reakce A přímo úměrně k úsečce z'. Přenesme v poloze z_1 břemene P příslušnou reakci jakožto pořadnici $A = \overline{\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_1'}$ (obr. 1) od osy $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$; body $\mathfrak{z}_1'$ pro všechny polohy břemene jsou pak na přímce, dané ve svislici bodu b ($z' = 0$) pořadnicí $A = 0$ a ve svislici bodu a ($z' = l$) pořadnicí $A = P = \overline{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}$. Pohybuje-li se břímě P po nosníku, mění se reakce A jako pořadnice přímky $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$, měřená

v paprsku břemene. Vyvodí tedy břímě P v bodě a tím větší reakci, čímž blíže k podpoře a působí; prochází-li paprsek P bodem a, vzniká tu reakce rovná a protivná břemeni.

Obdobně by se měnila reakce B, vyvozená pohyblivým břemenem P, po zákonu přímky, jež by měla ve svislici podpory a $(z = 0)$ pořadnici $B = 0$ a ve svislici podpory b $(z = l)$ pořadnici $B = P$.

Vyšetřme podobně, jak se mění ohybový moment M určitého průřezu x, pohybuje-li se břímě P stálé velikosti po nosníku. Je-li břímě v poloze z_1 vpravo od průřezu x, jehož úsečky znamenejme $\overline{ax} = x$, $\overline{xb} = x'$, je v průřezu x moment ohybový

$$M = A\,x = P\frac{z_1'}{l}\,x\,. \tag{2a}$$

Působí-li břímě v poloze z_2 vlevo od x, je v tomto bodě moment

$$M = B\,x' = P\frac{z_2}{l}\,x'\,. \tag{2b}$$

Pohybuje-li se břímě P po nosníku, mění se moment ohybový M průřezu x úměrně k úsečce z_1', pokud je břímě vpravo od průřezu, a úměrně k úsečce z_2, je-li břímě vlevo od průřezu.

Znázorněme proměnu momentu M opět graficky, přenášejíce od osy $a'\,b'$ momentovou pořadnici η ve svislici té polohy břemene, jež vyvozuje příslušný moment; pořadnici η stanovme jako obyčejně tak, aby platilo $M = f\,\eta$, znamená-li f příslušnou vzdálenost pólovou. Pro polohu z_1 vpravo od x vychází ze vzorce (2^a) momentová pořadnice

$$\eta = \frac{M}{f} = \frac{P}{f}\cdot\frac{x}{l}\cdot z_1'\,.$$

S úsečkou z_1' mění se η po zákonu přímky, jež má ve svislici bodu b $(z_1' = 0)$ pořadnici $\eta = 0$, ve svislici bodu a $(z_1' = l)$ pak pořadnici

$$\eta_a = \frac{P}{f}\,x = \overline{a'\,a''}\,. \tag{3a}$$

Přímka $a''\,b'$ dává vpravo od průřezu x pořadnici momentu M ve svislici příslušné polohy břemene. Působí-li břímě P v bodě x samotném, dá

$$\eta_x = \frac{P}{f}\,\frac{x\,x'}{l} = \overline{x''\,x'}\,. \tag{3}$$

Je-li břímě P v poloze z_2 vlevo od průřezu, vyvodí podle vzorce (2^b) pořadnici

$$\eta = \frac{P}{f}\,\frac{x'}{l}\,z_2\,,$$

jež se mění zase po zákonu přímky, dané bodem a' (pro $z_2 = 0$ jest $\eta = 0$) a x', neboť pro $z_2 = x$ vychází již určená pořadnice η_x. Prodloužená přímka $a'\,x'$ seče svislici bodu b $(z_2 = l)$ v bodě b'', jenž má pořadnici

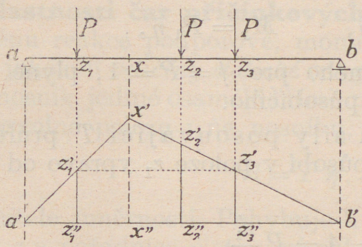
$$\eta_b = \frac{P}{f}\,x' = \overline{b'\,b''}\,. \tag{3b}$$

Za pohybu břemene P po nosníku mění se moment M úměrně k pořadnicím čáry $a'\,x'\,b'$. Pořadnice této čáry naznačují, jak přičiňují příslušné polohy břemene k momentu M; podle toho slove čára $a'\,x'\,b'$ *příčinkovou čarou*[1]) momentu M. Od momentové čáry liší se příčinková čára tím, že momentová čára dává mometové pořadnice všecb

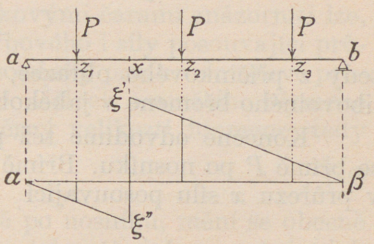
Poznámku [1]) *viz str. 7.*

průřezů nosníku ve svislicích těchto průřezů, příčinková čára stanoví pak pořadnice momentu M jediného průřezu x pro různé polohy jediného pohyblivého břemene P ve svislicích příslušných poloh břemene. Z tvaru příčinkové čáry momentu M a z hodnoty pořadnice $\eta_x = \overline{x''\,x'}$ plyne, že **příčinková čára momentu pro průřez x je shodná s momentovou čarou prostého nosníku $a\,b$, zatíženého břemenem P v bodě x působícím.**

Z *příčinkového obrazce* $a'\,x'\,b'$ plyne, že břímě P v libovolné poloze na nosníku $a\,b$ působící vyvodí v průřezu x moment kladný, jenž je tím větší, čím blíže je břímě k průřezu; největší moment v průřezu x vyvodí břímě, jež působí v průřezu x samém. Z břemen P, jež působí po obou stranách průřezu x v rovných vzdálenostech $\overline{z_1\,x} = \overline{x\,z_2}$ (obr. 2), vyvodí větší moment břímě, jež působí na větším z dílů $\overline{a\,x}$, $\overline{x\,b}$. Má-li břímě P, jež působí v poloze z_1 vlevo od x, vyvoditi v x týž moment jako břímě P, jež působí v poloze z_3 vpravo od x, musí býti příčinkové pořadnice $\overline{z_1''\,z_1'}$, $\overline{z_3''\,z_3'}$ rovny, z čehož plyne



Obr. 2.



Obr. 3.

$$\frac{\overline{a\,z_1}}{\overline{a\,x}} = \frac{\overline{z_1''\,z_1'}}{\overline{x''\,x'}} = \frac{\overline{z_3''\,z_3'}}{\overline{x''\,x'}} = \frac{\overline{b\,z_3}}{\overline{b\,x}},$$

tedy bod z_1 musí rozdělovati úsek $\overline{a\,x}$ v témž poměru jako bod z_3 úsek $\overline{b\,x}$.

Příčinkovým obrazcem momentu pro průřez x je trojúhelník $a'\,x'\,b'$, daný svou největší pořadnicí $\eta_x = \overline{x''\,x'}$ (obr. 1). Kdybychom sestrojili příčinkové obrazce různých průřezů nosníku od téže osy $a'\,b'$, byly by vrcholy x' na parabole souměrné ke svislici středu nosníku c, jak ukazuje vzorec (3). Parabola ta jest určena body a', b' a prostřední pořadnicí, jež plyne dosazením $x = x' = \frac{1}{2}\,l$ ze vzorce (3); vyjde tu

$$\eta_c = \frac{P\,l}{4\,f} = \overline{c''\,c'}.$$

Na parabole $a'\,c'\,b'$ jsou vrcholy příčinkových trojúhelníků pro momenty ohybové všech průřezů na nosníku.

Nejjednodušeji sestrojíme příčinkový obrazec momentu M, zvolíme-li $f = P$; pak vyjdou podle vzorců (3^a), (3^b) pořadnice $\eta_a = x$, $\eta_b = x'$, tedy $\overline{a'\,a''} = \overline{a'\,x''}$, $\overline{b'\,b''} = \overline{x''\,b'}$, což vede k sestrojení, naznačenému v obr. 1. Kontrolou je tu, že se spojnice $a''\,b'$, $a'\,b''$ musí protínati na svislici bodu x. Jelikož vzdálenost f má zde význam síly, **znamenají pořadnice η obrazce $a'\,x'\,b'$ délky a odměřovaly by se tedy na měřidle délkovém.** Myslíme-li si $f = P = 1$, dávají pořadnice η obrazce $a'\,x'\,b'$ (násobeny ovšem f, tedy jednotkou silovou) momenty M, vyvozené břemenem $P = 1$; nazýváme pak η *příčinkovými pořadnicemi*.

---

[1]) Po prvé odvodil příčinkové čáry *E. Winkler* pro osové síly příhradových nosníků obloukových (ve Zprávách Spolku architektů a inženýrů v Praze r. 1868, str. 6 a r. 1869, str. 1) a *O. Mohr* graficky pro plnostěnné nosníky spojité (v Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereines zu Hannover r. 1868, str. 19). *E. Winkler* použil jich též po prvé pro pohyblivé zatížení rovnoměrné. Název čar a použití pro pohyblivé soustavy břemen pochází od *J. J. Weyraucha*, který odvozuje počtem příčinkové čáry plnostěnného nosníku spojitého ve spise „Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger" (Lipsko 1873, str. 50).

Budiž nyní poloha z břemene P stálá, velikost však proměnná. Působí-li v poloze z břímě P, vyvodí v průřezu x moment M; působí-li v téže poloze z břímě P_1, vyvodí v témž průřezu x moment M_1. Podle vzorců (2) je patrně

$$\frac{M}{M_1} = \frac{P}{P_1} \quad \text{aneb} \quad \frac{M}{P} = \frac{M_1}{P_1} = \eta ,$$

znamená-li η moment, vyvozený v průřezu x břemenem $P = 1$, jež působí v poloze z; je tedy η rovno příčinkové pořadnici, t. j. pořadnici obrazce $a' x' b'$ sestrojeného podle obr. 1. Pak jest

$$M = P \eta , \qquad M_1 = P_1 \eta , \tag{4a}$$

tedy z příčinkového obrazce, sestrojeného pro $f = P = 1$, plyne jednoduše účinek libovolného břemene v jakékoli poloze působícího.

Konečně odvodíme též proměnu síly posouvající T průřezu x, pohybuje-li se břímě P po nosníku. Břímě P, jež působí v poloze z_1 vpravo od průřezu x, vyvodí v průřezu x sílu posouvající

$$T = A = P \frac{z_1'}{l} , \tag{5a}$$

jež se mění za pohybu břemene po zákonu přímky, dané ve svislici bodu b ($z_1' = 0$) pořadnicí $T = 0$ a ve svislici bodu a ($z_1' = l$) pořadnicí $T_a = P = \overline{\alpha \alpha'}$ (obr. 1). Přímka $\alpha' \beta$ platí ovšem staticky pouze pro pravé polohy břemene, tedy vpravo od průřezu x. Působí-li břímě P v poloze z_2 vlevo od průřezu x, je v průřezu x síla posouvající

$$T = -B = -P \frac{z_2}{l} ; \tag{5b}$$

pohybuje-li se břímě P po nosníku, mění se síla T po zákonu přímky, jež má ve svislici bodu a ($z_2 = 0$) pořadnici $T = 0$ a ve svislici bodu b ($z_2 = l$) pořadnici $T_b = -P = \overline{\beta \beta'}$. Přímka $\alpha \beta'$, jež má statickou platnost pouze vlevo od průřezu, je patrně rovnoběžná s přímkou $\alpha' \beta$. Tím jest určena příčinková čára posouvající síly T; skládá se z přímek $\alpha \xi'' \parallel \xi' \beta$, jejichž svislá vzdálenost jest $\overline{\alpha \alpha'} = \overline{\xi'' \xi'} = \overline{\beta' \beta} = P$. K témuž výsledku bychom dospěli, kdybychom užili přímo příčinkových čar reakcí podporových; příčinkovou čarou reakce A je přímka $a' b$ (obr. 1).

Z příčinkového obrazce plyne, že břemena pravá (vpravo od průřezu x působící) vyvozují kladné, břemena levá záporné síly posouvající, jejichž prostá hodnota je tím větší, čím blíže je břímě k průřezu. Působí-li břímě P v průřezu x, vyvodí v něm dvě hodnoty síly posouvající různého znaménka, jež se liší o hodnotu břemene P. Z břemen P, jež působí po obou stranách průřezu v rovných vzdálenostech $\overline{z_1 x} = \overline{x z_2}$ (obr. 3) a vyvozují tedy posouvající síly protivných znamének, dá větší prostou hodnotu síly posouvající patrně břímě, jež působí na větším z dílů $\overline{a x}$, $\overline{x b}$. Působí-li břímě P v poloze z_1 vlevo od x a totéž břímě v poloze z_3 vpravo od x, vzniknou v průřezu x posouvající síly téže prosté hodnoty, je-li $\overline{a z_1} = \overline{z_3 b}$.

Mysleme si v téže poloze z postupně břemena různé velikosti P, P_1, P_0; v průřezu x dají tato břemena posouvající síly T, T_1, T_0, pro něž patrně platí

$$\frac{T}{T_1} = \frac{P}{P_1} \quad \text{aneb} \quad \frac{T}{P} = \frac{T_1}{P_1} = \frac{T_0}{P_0} = \eta .$$

Stálý podíl η znamená posouvající sílu, vyvozenou břemenem $P = 1$. Sestrojíme-li příčinkový obrazec pro břímě $P = 1$ (viz obr. 1), určíme z příslušných pořadnic příčinkových η účinek libovolných břemen podle vzorců

$$T = P \eta , \qquad T_1 = P_1 \eta . \tag{4b}$$

Pořadnice η mají tu význam pouhých čísel (nepojmenovaných) a odměřují se na měřidle, jehož jednotkou je pořadnice $\overline{\alpha\alpha'} = P = 1$. Je-li příčinkový obrazec rýsován pro libovolné břímě P_0, platí

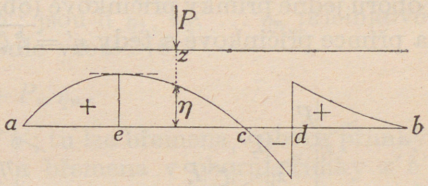
$$T = P\frac{T_0}{P_0};$$

T_0 je tu pořadnice příčinkového obrazce v paprsku břemene P a znamená sílu, jež se měří na témž měřidle jako síla P_0.

3. Obecné vlastnosti čar příčinkových. Příčinkovými čarami znázorniti lze, jak ukázáno, proměnu reakce podporové, momentu ohybového i síly posouvající průřezu x aneb obecně jakékoli *veličiny statické* (na př. též osové síly prutu v soustavě prutové), působí-li na nosník jediné osamělé břímě pohyblivé. Účinek osamělého břemene P, jež působí v libovolné poloze z na nosníku, jest úměrný velikosti břemene, tedy

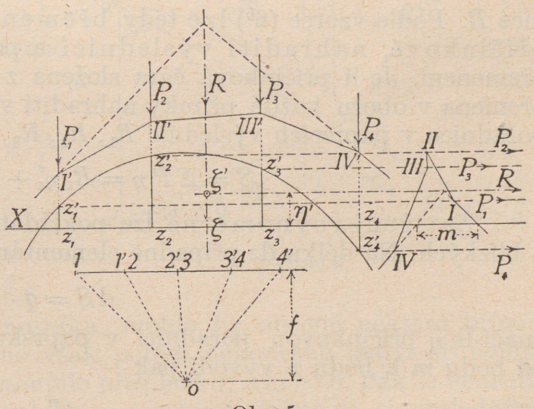
$$S = P\eta, \tag{4c}$$

znamená-li η součinitele úměrnosti. Pohybuje-li se břímě po nosníku, mění se obecně součinitel η; úsečka z a pořadnice η stanoví pak bod čáry (obr. 4), jež naznačuje, jak přičiňují jednotlivé polohy břemene k veličině S, a slove proto čarou příčinkovou. Její pořadnice η nazýváme příčinkovými pořadnicemi. Příčinková čára takto definovaná dává proměnu hledané veličiny S pro břímě $P = 1$, jež se pohybuje po nosníku. Poskytuje nejlepší přehled, jak působí břímě, a lze z ní stanoviti účinek libovolného zatížení, je tedy nejobecnějším řešením hledané statické veličiny.



Obr. 4.

Tvar příčinkové čáry může býti různý; obecně se i znaménka příčinkových pořadnic mohou měniti, tedy některé polohy břemene P přičiňují k veličině S kladně, jiné záporně. Polohy břemene a, b (obr. 4), v nichž příčinková čára končí, majíc tu pořadnice nulové, nazývejme *polohami nulovými*. Poloha c, v níž se mění nenáhle znaménko příčinkových pořadnic a v níž je též nulová pořadnice, slove *polohou obojetnou* čili *neutrálnou*. Břímě, působící v poloze nulové nebo obojetné, dá veličinu $S = 0$. Polohu d, v níž se mění náhle znaménko příčinkových pořadnic, nazveme *polohou přechodnou*; břímě, jež působí v této poloze, vyvodí dvě hodnoty veličiny S, jež se liší znaménkem. Polohy břemene, k nimž náleží největší pořadnice příčinkové, slovou *polohami největšího příčinku*, a to *kladného* (poloha e v obr. 4) nebo *záporného*.



Obr. 5.

Z příčinkové čáry určíme účinek jediného osamělého břemene podle vzorce (4c). Určíme-li podle toho účinek každého břemene soustavy břemen P_1, P_2, P_3, ..., je podle zásady superposice účinek celé soustavy

$$S = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + P_3\eta_3 + \ldots = \Sigma P\eta; \tag{6}$$

$\eta_1 = \overline{z_1 z_1'}$, $\eta_2 = \overline{z_2 z_2'}$, $\eta_3 = \overline{z_3 z_3'}$, ... jsou příčinkové pořadnice v paprscích břemen P_1, P_2, P_3, ... (obr. 5). Graficky určíme S podle vzorce (6) jakožto součet statických

momentů sil P, působících na ramenech η, tedy v koncových bodech příčinkových pořadnic rovnoběžně s osou X příčinkového obrazce. Rýsujeme-li k těmto silám pólovou vzdáleností f výslednicovou čáru $I\ II\ III\ldots$, jejíž krajní strany omezí na ose X úsek m, jest

$$S = \Sigma P\eta = fm\,. \tag{6a}$$

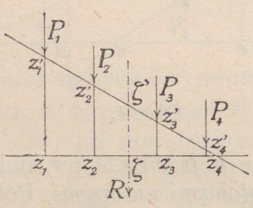
Z obou výsledních úseků f, m měřiti jest jeden na měřidle sil, druhý na měřidle příčinkových pořadnic. Volíme-li $f = 1$ (na př. v měřidle příčinkových pořadnic), určuje úsek m přímo hledanou veličinu S (v měřidle sil).

Jinak je též

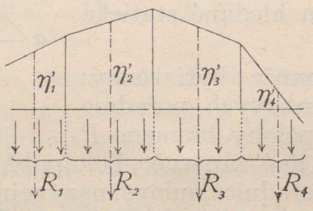
$$S = \Sigma P\eta = R\eta'\,, \tag{6b}$$

je-li η' svislá vzdálenost od osy X paprsku R výslednice sil P rovnoběžných s osou X; paprsek R jde průsečíkem krajních stran výslednicové čáry $I\ II\ III\ldots$ Stanovme také výslednici svislých sil $P_1, P_2, P_3, \ldots$; paprsek její jde průsečíkem krajních stran výslednicové čáry $I'\ II'\ III'\ldots$, rýsované ke svislým silám $P_1, P_2, P_3, \ldots$, a seče paprsek vodorovné výslednice R v bodě ζ', který je statickým středem soustavy bodů $z_1', z_2', z_3', \ldots$, jimž přisuzujeme síly $P_1, P_2, P_3, \ldots$; $\eta' = \overline{\zeta\,\zeta'}$ je pak pořadnicí tohoto statického středu.

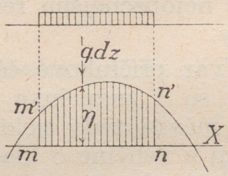
Skládá-li se příčinková čára z přímek, nazývejme délku nosníku, pro kterou platí jedna přímka, *oborem* této přímky příčinkové. Pro břemena $P_1, P_2, P_3, \ldots$, jež působí v oboru jedné přímky příčinkové (obr. 6), je statický střed ζ' soustavy bodů $z_1', z_2', z_3', \ldots$ na přímce příčinkové a tedy $\eta' = \overline{\zeta\,\zeta'}$ je pořadnicí přímky příčinkové v paprsku výsled-



Obr. 6.



Obr. 7.



Obr. 8.

nice R. Podle vzorce (6b) lze tedy břemena, jež působí v oboru jedné přímky příčinkové, nahraditi výslednicí a počítati s touto výslednicí jako s jediným břemenem. Je-li příčinková čára složena z několika přímek (obr. 7), lze podle toho břemena v oboru každé přímky nahraditi výslednicí; jsou-li $\eta_1', \eta_2', \eta_3', \ldots$ příčinkové pořadnice v paprscích výslednic $R_1, R_2, R_3, \ldots$, jest

$$S = \Sigma P\eta = R_1\eta_1' + R_2\eta_2' + R_3\eta_3' + \ldots \tag{6c}$$

Zatížení rovnoměrné lze pokládati za soustavu břemen nekonečně malých a blízkých. Na délku dz připadne elementární břímě $q \cdot dz$, jehož účinek jest

$$dS = q \cdot dz \cdot \eta\,,$$

značí-li η příčinkovou pořadnici v paprsku břemene (obr. 8). Zatížení rovnoměrné od bodu m k bodu n vyvodí pak

$$S = q\int_m^n \eta\,dz = q\,\mathfrak{U}_{mn}\,, \tag{7}$$

znamená-li

$$\mathfrak{U}_{mn} = \int_m^n \eta\,dz = \text{pl. } m\,m'\,n'\,n$$

obsah obrazce, omezeného osou X, příčinkovou čarou a svislicemi mezí zatížení m, n.

Podle předešlých způsobů určíme z příčinkového obrazce účinek libovolného zatížení stálého.

b) Pohyblivá soustava osamělých břemen.

4. Největší moment v daném průřezu. *α) Řešení početářské.* Příkladem pohyblivé soustavy osamělých břemen je vlak pojíždějící po mostě železničním. Vlak obsahuje obyčejně více břemen, než se vejde na nosník; pohybuje-li se vlak po nosníku, vystupují některá břemena s nosníku a jiná přistupují, velikost jednotlivých břemen a jejich vzájemná poloha se však nemění. V tom případě mluvíme o *řadě osamělých břemen*. Z řady vybíráme pak *soustavu osamělých břemen*, u níž se i počet břemen průběhem vyšetřování nemění.

Pohybuje-li se soustava osamělých břemen po prostém nosníku $a\,b$, mění se moment ohybový určitého průřezu x; půjde o maximum tohoto momentu. Především jest vybrati z dané řady břemen *nejúčinnější soustavu*, což provedeme podle pravidel odvozených pro změnu momentu za pohybu jediného břemene. Největší moment v průřezu x vyvodí patrně soustava břemen, jež obsahuje v *nejúčinnější poloze*, t. j. poblíž průřezu x, největší a nejhustější břemena; jedno z těchto břemen jest umístiti do průřezu x. Přesnou polohu soustavy odvodíme.

Soustava břemen měj na nosníku $a\,b$ libovolnou polohu (obr. 9); břemena P_1, P_2, ... P_n působí v bodech z_1, z_2, ... z_n. Moment ohybový v průřezu x vyšetříme za této polohy soustavy z příčinkového obrazce $a'\,x'\,b'$; jsou-li η_1, η_2, ... η_n příčinkové pořadnice v paprscích břemen P_1, P_2, ... P_n, je podle vzorce (6)

$$M = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + \ldots + P_n\eta_n.$$

Příčinková čára se tu skládá ze dvou přímek $a'\,x'$, $x'\,b'$; tu lze břemena v oboru přímky $a'\,x'$ (vlevo od průřezu x) nahraditi výslednicí R_1 a břemena v oboru přímky $x'\,b'$ (vpravo od průřezu x) výslednicí R_2. Jsou-li η_1', η_2' příčinkové pořadnice v paprscích výslednic R_1, R_2, platí podle vzorce (6c)

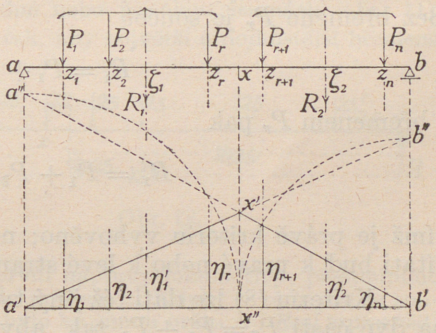
$$M = R_1\eta_1' + R_2\eta_2'.$$

Působiště výslednic R_1, R_2 znamenejme ζ_1, ζ_2 a jejich úsečky $\overline{a\,\zeta_1} = \zeta_1$, $\overline{\zeta_1\,b} = \zeta_1' = l - \zeta_1$; $\overline{a\,\zeta_2} = \zeta_2$, $\overline{\zeta_2\,b} = \zeta_2' = l - \zeta_2$. Pak plyne z příčinkového obrazce

$$\eta_1' = \overline{b'\,b''}\cdot\frac{\overline{a\,\zeta_1}}{\overline{a\,b}} = x'\frac{\zeta_1}{l}, \qquad \eta_2' = \overline{a'\,a''}\cdot\frac{\overline{\zeta_2\,b}}{\overline{a\,b}} = x\frac{\zeta_2'}{l},$$

tedy

$$M = R_1\frac{x'}{l}\zeta_1 + R_2\frac{x}{l}\zeta_2'.$$



Obr. 9.

Pohybuje-li se soustava břemen po nosníku, mohlo by obecně některé břímě přestoupiti přes bod a, x, b. Předpokládejme však pohyb nekonečně malý, při němž můžeme vyloučiti, že by některé břímě přestoupilo přes bod a, x nebo b. Pak se nemění soustava ani výslednice R_1, R_2 i jejich poloha v soustavě; mění se v posledním vzorci pouze úsečky ζ_1, ζ_2' působišť obou výslednic. Nekonečně malému pohybu soustavy odpovídá nekonečně malý přírůst momentu, jejž dostaneme, diferencujeme-li poslední vzorec, tedy

$$\mathrm{d}\,M = R_1\frac{x'}{l}\,\mathrm{d}\,\zeta_1 + R_2\frac{x}{l}\,\mathrm{d}\,\zeta_2'.$$

Poněvadž se vzdálenost výslednic R_1, R_2 za předpokládaného pohybu soustavy nemění, pohybují se působiště ζ_1, ζ_2 obou výslednic stejně, pročež platí

$$\mathrm{d}\,\zeta_1 = \mathrm{d}\,\zeta_2;$$

jelikož je dále $\zeta_2' = l - \zeta_2$, vyjde

$$\mathrm{d}\,\zeta_2' = -\mathrm{d}\,\zeta_2 = -\mathrm{d}\,\zeta_1,$$

což dá

$$\frac{\mathrm{d}\,M}{\mathrm{d}\,\zeta_1} = R_1\frac{x'}{l} - R_2\frac{x}{l} = R_1 - (R_1 + R_2)\frac{x}{l} = R_1 - R\frac{x}{l},$$

znamená-li $R = R_1 + R_2$ výslednici všech břemen na nosníku.

Maximum jakékoli funkce určujeme z výminky, že se první derivace funkce podle nezávisle proměnné rovná nule. Tato výminka předpokládá, že se první derivace dané funkce mění spojitě. V tomto případě se však mění $\mathrm{d}\,M/\mathrm{d}\,\zeta_1$ pouze přestoupením některého břemene přes průřez x, a to vždy náhle. Tu soudíme: pokud je $\mathrm{d}\,M/\mathrm{d}\,\zeta_1$ kladná, roste M, jakmile se stane $\mathrm{d}\,M/\mathrm{d}\,\zeta_1$ zápornou, klesá M; moment M přestává pak vzrůstati a počíná klesati, tedy má největší hodnotu, když jeho prvá derivace mění znaménko. Žádá tedy $\max M$, aby bylo $\mathrm{d}\,M/\mathrm{d}\,\zeta_1 \leqq 0$ čili

$$R_1 \leqq R\frac{x}{l}. \tag{8}$$

Nerovnicí (8) je dáno *kriterium Winklerovo*,[1]) jež stanoví nejúčinnější polohu pohyblivé soustavy osamělých břemen, pokud jde o moment průřezu x. Vytkneme-li z dané řady břemen nejúčinnější soustavu, známe její výslednici R a můžeme vypočísti $R\frac{x}{l}$. Na levé straně kriteria znamená R_1 součet břemen po levé straně průřezu x. Sčítáme tedy břemena od levého konce soustavy, až přestoupíme hodnotu pravé strany; poslední břímě P_r, jehož přičtením se právě pravá strana přestoupí, položiti jest do průřezu x, čímž je dána poloha soustavy, jež vyvodí největší moment v průřezu x. Bez břemene P_r je součet

$$R_1' = P_1 + P_2 + \ldots + P_{r-1} < R\frac{x}{l},$$

s břemenem P_r pak

$$R_1'' = P_1 + P_2 + \ldots + P_{r-1} + P_r > R\frac{x}{l},$$

čímž je právě kriteriu vyhověno; neboť břímě P_r, jež klademe do průřezu x, můžeme čítati buď k pravé nebo k levé straně průřezu.

Kriteriu (8) lze dáti též jiný tvar. Rozdělme břímě P_r, jež je položiti do průřezu x, na dvě části $P_r = P_r' + P_r''$ tak, aby platilo

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_{r-1} + P_r' = R\frac{x}{l},$$

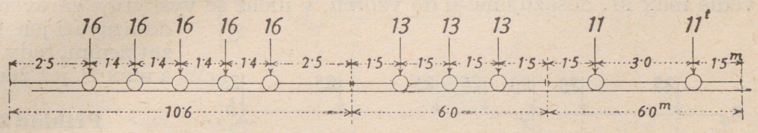
a pokládejme součet na levé straně rovnice za zatížení délky $\overline{a\,x}$, znamenajíce jej krátce Q_{ax}. Zatížení celého nosníku R znamenejme Q_{ab}; poslední rovnici lze pak psáti

$$Q_{ax} = Q_{ab}\cdot\frac{\overline{a\,x}}{\overline{a\,b}} \text{ nebo } \frac{Q_{ax}}{\overline{a\,x}} = \frac{Q_{ab}}{\overline{a\,b}} = \frac{Q_{ab} - Q_{ax}}{\overline{a\,b} - \overline{a\,x}} = \frac{Q_{xb}}{\overline{x\,b}}. \tag{8a}$$

[1]) Viz *E. Winkler* „Vorträge über Brückenbau. Theorie der Brücken", H. I. (Vídeň 1873), str. 18. Po prvé uveřejnil *E. Winkler* své kriterium v „Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines", r. 1870, str. 33.

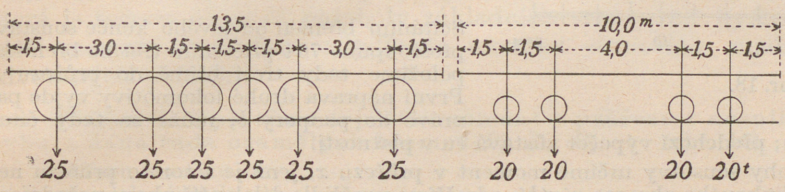
Podíly $\frac{Q_{ax}}{\overline{ax}}, \frac{Q_{ab}}{\overline{ab}}, \frac{Q_{xb}}{\overline{xb}}$ lze nazvati *průměrnými zatíženími* délek $\overline{ax}$, $\overline{ab}$, $\overline{xb}$. Podle poslední rovnice vyvodí největší moment ohybový v průřezu x ona poloha soustavy, za které se průměrná zatížení dílů $\overline{ax}$, $\overline{xb}$ a celého nosníku $\overline{ab}$ rovnají. V tomto tvaru lze užívati kriteria pro pohyblivé zatížení spojité.

Příklad 1. Vypočísti jest největší moment ohybový v průřezu x o úsečce $\overline{ax}=x=4$ m na nosníku prostém délky $\overline{ab}=l=15$ m, po němž se pohybuje vlak I podle jednotného mostního řádu (ČSN 1230-1937).



Obr. 10.

Zatížení mostů železničních bylo do r. 1937 předepsáno ministerským nařízením z 28. srpna 1904, zvaným krátce *mostním řádem*.[1]) Pro hlavní dráhy byla předepsána *norma* I, jež obsahuje lokomotivy délky 10,6 m o pěti nápravách po 16 t tlaku, tendry délky 6 m o třech nápravách po 13 t a nákladní vozy délky 6 m o dvou nápravách po 11 t (obr. 10). Počítati jest s vlakem, složeným ze dvou lokomotiv s komíny za sebou (pořadí: lokomotiva, tendr, lokomotiva, tendr) nebo s komíny proti sobě (pořadí: tendr, lokomotiva, lokomotiva, tendr) a z tolika nákladních vozů, kolik se na most vejde.

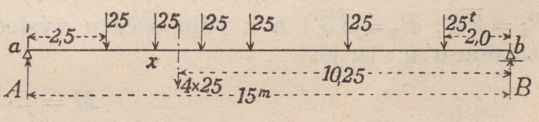


Obr. 11.

Nový jednotný mostní řád[2]) (ČSN 1230-1937) předpisuje pro mosty I. třídy vlak I, složený ze dvou tendrových lokomotiv délky po 13,5 m se šesti nápravami po 25 t tlaku a z nákladních vozů po 10 m délky se čtyřmi nápravami po 20 t tlaku, připojených k lokomotivám po jedné nebo po obou stranách (obr. 11).

Z dané řady břemen volíme nejúčinnější soustavu tak, aby největší a nejhustější břemena přišla k průřezu x. Nosníkem délky $l=15$ m obsáhneme vedle čtyř prostředních a krajní nápravy prvé lokomotivy jednu nápravu z druhé lokomotivy. Tu jest výslednice břemen na nosníku $R=6.25=150$ t a hodnota pravé strany kriteria (8)

$$R\frac{x}{l}=150\frac{4}{15}=40\text{ t.}$$



Obr. 12.

Sčítáme-li břemena od levého konce soustavy, t. j. od první nápravy lokomotivy, přestoupíme 40 t přičtením druhé nápravy, kterou je třeba umístiti do průřezu x. Kdyby v této poloze soustavy vyšlo některé z uvažovaných břemen mimo nosník, bylo by znovu určiti R i Rx/l a přesvědčiti se podle kriteria (8) o správné poloze soustavy. V našem případě zůstane za stanovené polohy všech šest předpokládaných břemen na nosníku.

Známe-li polohu soustavy (obr. 12), určíme nejprve levou reakci A, dělíme-li součet momentů všech břemen k bodu b délkou nosníku l; čtyři prostřední tlaky náprav prvé lokomotivy můžeme při tom nahraditi výslednicí $4\times 25=100$ t, jež působí uprostřed těchto břemen, tedy ve vzdálenosti $15-4-{}^1/_2\cdot 1{,}5=10{,}25$ m od pravé podpory. Tak dostaneme

$$A=\frac{100\cdot 10{,}25+25\,(2+5)}{15}=80\text{ t.}$$

V průřezu x je pak ohybový moment roven algebraickému součtu momentů vnějších sil po levé straně průřezu, tedy

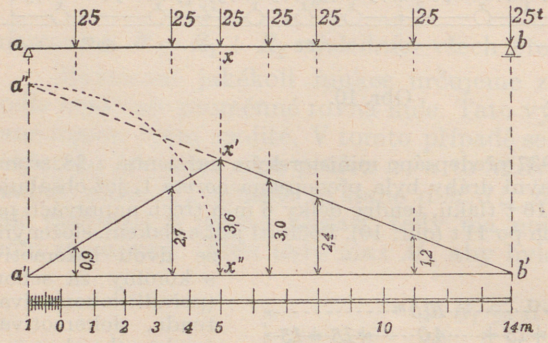
$$\max M=A\cdot 4-25\cdot 1{,}5=282{,}5\text{ mt.}$$

[1]) Viz „Technický průvodce“, sešit 4 (4. vyd. 1931), str. 44.
[2]) Viz „Technický průvodce“, sešit 4 (6. vyd. 1946), str. 23.

Současně vzniká v průřezu x posouvající síla $T_{(m)}$ (nikoliv max T), jež se rovná algebraickému součtu vnějších sil po levé straně průřezu a má dvě hodnoty podle toho, čítáme-li břímě v průřezu x k pravé nebo k levé straně:

$$T_{(m)} = A - \left\{ \begin{matrix} 25 \\ 50 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 55\,\text{t}, \\ 30\,\text{t}. \end{matrix} \right.$$

Mají-li obě hodnoty $T_{(m)}$ totéž znaménko, počítáme se silou, jež má větší prostou hodnotu; jsou-li znaménka obou hodnot $T_{(m)}$ různá, uvažují se po případě obě hodnoty. Sílu $T_{(m)}$ potřebujeme vedle max M, dosazujeme-li do vzorců, v nichž se vyskytuje zároveň M i T; pak je ovšem nutno dosazovati jen hodnoty, jež se vyvodí týmž zatížením, tedy max M a $T_{(m)}$ (nikoli max M a max T, jež žádají obecně různého zatížení).



Obr. 13.

Příklad 2. Pro nosník délky $l = 15\,\text{m}$ jest určiti z příčinkové čáry největší moment v průřezu o úsečce $x = 6\,\text{m}$ pro pohyblivé zatížení vlakem I podle jednotného mostního řádu (obr. 13).

Délkou nosníku obsáhneme celou první lokomotivu a jednu nápravu druhé lokomotivy; tu jest

$$R = 7.25 = 175\,t, \quad R\,\frac{x}{l} = 175 \cdot \frac{6}{15} = 70\,t.$$

Sčítáním břemen od levého konce soustavy přestoupíme 70 t přičtením třetího břemene, položíme tedy třetí břímě do průřezu x. První náprava druhé lokomotivy vyjde pak právě do podpory b, může se tedy čítati k břemenům na nosníku; předchozí výpočet zůstává tu v platnosti.

Za stanovené polohy soustavy určíme moment v průřezu x, jenž je v tomto průřezu největším momentem, z příčinkového obrazce $a'x'b'$; odměříme v měřidle délek příčinkové pořadnice η v paprscích břemen (hodnoty jejich jsou připsány v obr. 13) a vypočteme podle vzorce (12)

$$\max M = \Sigma P\eta = 25 \cdot (0{,}9 + 2{,}7 + 3{,}6 + 3{,}0 + 2{,}4 + 1{,}2) = 345\,\text{mt}.$$

β) ***Řešení grafické.*** Graficky můžeme snadno sledovati, jak se mění moment průřezu x, pohybuje-li se soustava břemen po nosníku $a\,b$. Pro určitou polohu soustavy stanovíme moment v průřezu x, narýsujeme-li (obr. 14) čáru složkovou ($P_1 = \overline{1\,1'}$, $P_2 = \overline{2\,2'}$, $P_3 = \overline{3\,3'}$) a z pólu o čáru výslednicovou $I\,II\,III$, již uzavřeme základní stranou $a'\,b'$; tu jest

$$M = f \cdot \overline{x''\,x'}\,.$$

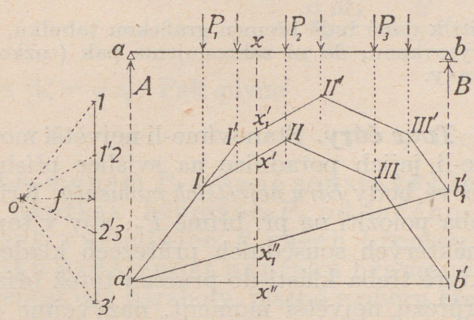
Pohybuje-li se soustava na př. vpravo, pohybují se všechna břemena o touž délku; pro novou polohu soustavy bude první stranou výslednicové čáry prodloužená strana $a'\,I$, ostatní strany se rovnoběžně posunou a základní stranou nové čáry výslednicové bude $a'\,b'_1$. Moment v průřezu x má pak hodnotu

$$M = f \cdot \overline{x''_1\,x'_1}\,.$$

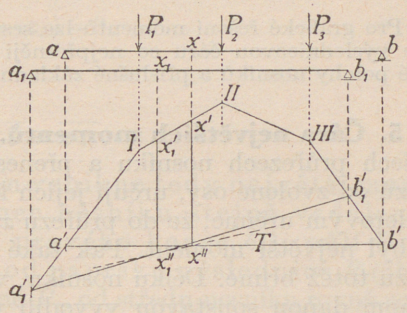
Momentové pořadnice $\overline{x''\,x'}$, $\overline{x''_1\,x'_1}$ mohli bychom srovnávati a určiti, zvětšuje-li se moment nebo zmenšuje-li se.

Záleží však jen na relativní poloze; lze si proto mysliti, že se poloha soustavy nemění a nosník $a\,b$ se pohybuje i s průřezem x v opačném směru než soustava o touž délku $\overline{a\,a_1} = \overline{x\,x_1} = \overline{b\,b_1}$. Pak se čára výslednicová $I\,II\,III$ (obr. 15) nemění; k různým polohám nosníku $a\,b$ a průřezu x určíme snadno základní stranu ($a'\,b'$, $a'_1\,b'_1$) i momentovou pořadnici ($\overline{x''\,x'}$, $\overline{x''_1\,x'_1}$) v průřezu x. Myslíme-li si posloupné polohy bodů podporových na téže přímce, vytvoří řady bodové $(a\,a_1 \ldots) \overline{\wedge} (b\,b_1 \ldots)$; promítáme-li tyto řady svislicemi na krajní strany $a'\,I$, $III\,b'$ výslednicové čáry,

obdržíme na nich řady s původními řadami a tedy i vzájemně podobné: $(a'\ a_1' \ldots) \infty (b'\ b_1' \ldots)$. Základní strany $a'\,b'$, $a_1'\,b_1'$ jsou spojnicemi sdružených bodů obou podobných řad, jejichž osami jsou dvě různoběžky; pokud žádné břímě s nosníku nevystoupí nebo na nosník nepřibude, obalují základní strany pro různé polohy nosníku



Obr. 14.

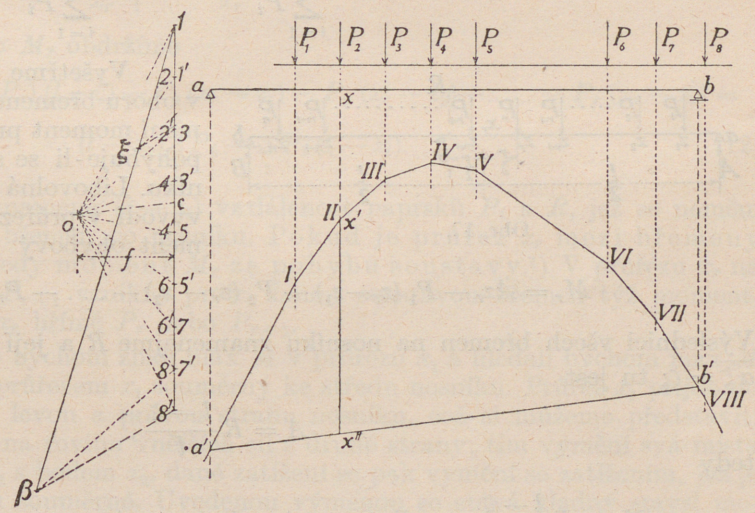


Obr. 15.

parabolu. Lze též dokázati, že počátky x'', x_1'' momentových pořadnic jsou na přímce T, která je tečnou obalové paraboly základních stran; tak bychom snadno určili největší moment v průřezu x.[1]) Tento moment stanovíme snadno užívajíce pravidel odvozených počtem.

Příklad 3. Vyšetřme největší moment v průřezu x nosníku $a\,b$, po němž se pohybuje daná řada osamělých břemen P_1, P_2, P_3, ... (obr. 16).

Délkou nosníku obsáhneme z dané řady co nejvíce a největších břemen $P_1, P_2, P_3, \ldots P_8$, hledíce, aby největší a nejhustější břemena byla u průřezu x. Narýsujeme-li k soustavě břemen takto určené čáru složkovou, známe výslednici všech břemen $R = \overline{1\ 8'}$. Snadno stanovíme $R\frac{x}{l}$ graficky, vedeme-li bodem *1* libovolnou přímku, na niž přeneseme úseky $\overline{1\ \xi} = x = \overline{a\ x}$, $\overline{1\ \beta} = l = \overline{a\ b}$; rovnoběžka se spojnicí $\beta\ 8'$, vedená bodem ξ, oddělí v čáře složkové úsek $R\frac{x}{l}$ (od bodu *1*) a rozděluje určovací úsek břemene (P_2), jež jest položiti do průřezu x. Tím je dána poloha nosníku, myslíme-li si soustavu pevnou.



Obr. 16.

Vyjde-li za této polohy některé břímě (P_8) mimo nosník, vynecháme jeho úsek v čáře složkové a vedeme opět bodem ξ rovnoběžku se spojnicí $\beta\,7'$; břímě, jehož úsek je touto rovnoběžkou rozdělen, má býti v průřezu x. K soustavě břemen narýsujeme pak z pólu o výslednicovou čáru $I\ II\ III \ldots$, promítneme na ni svisle podpory a, b a průměty spojíme základní stranou $a'\,b'$, od níž měříme v průřezu x pořadnici $\overline{x''\ x'}$ největšího momentu

$$\max M = f \cdot \overline{x''\ x'};$$

[1]) Viz *Jos. Šolín* „Theorie zevnitřních sil v rámů přímých", sešit I (Praha 1878), strana 44 a d.

úsek f bychom odměřili na př. v měřidle délkovém, $\overline{x'' x'}$ v měřidle silovém nebo naopak. Chceme-li znáti též sílu posouvající $T_{(m)}$, jež vzniká v průřezu x současně s max M, vedeme pólem o základní paprsek $o\,c \parallel a'\,b'$; břímě (P_2) působící v průřezu x můžeme čítati buď k pravé nebo k levé straně, čímž dostaneme dvě hodnoty síly posouvající

$$T_{(m)} = \overline{c\,1'} \text{ a } T_{(m)} = \overline{c\,2'}.$$

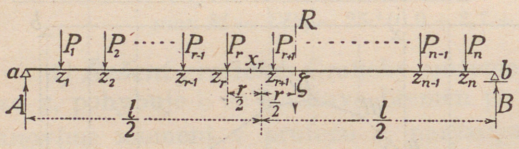
Pro grafické řešení momentů lze sestrojiti k dané řadě břemen grafickou tabulku, jež obsahuje výslednicovou čáru co nejpřesněji narýsovanou; do ní zakreslujeme pak (tužkou) jednotlivé polohy nosníků a příslušné základní strany.

5. Čára největších momentů. *α) Tvar čáry.* Stanovíme-li největší momenty ve všech průřezech nosníku a přeneseme-li jejich pořadnice na svislice příslušných průřezů od zvolené osy, určují jejich koncové body *čáru největších momentů*. Kriteriem Winklerovým určíme, že do průřezu x třeba položiti na př. břímě P_r, aby v tom průřezu byl největší moment. Pak také v některých sousedních průřezech klademe do průřezu totéž břímě. Délku nosníku, ve které třeba klásti do průřezu totéž břímě P_r, abychom danou soustavou vyvodili v průřezu největší moment, nazývejme *oborem břemene* P_r; jeho meze jsou dány úsečkami x_{r-1}, x_r, pro něž platí rovnice

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_{r-1} = R\frac{x_{r-1}}{l}, \quad P_1 + P_2 + \ldots + P_{r-1} + P_r = R\frac{x_r}{l},$$

tedy

$$x_{r-1} = l\frac{\sum_{i=1}^{i=r-1} P_i}{\sum_{i=1}^{i=n} P_i}, \qquad x_r = l\frac{\sum_{i=1}^{i=r} P_i}{\sum_{i=1}^{i=n} P_i}. \tag{9}$$



Obr. 17.

Vyšetřme nyní tvar čáry max M v oboru břemene P_r, t. j. odvoďme, jak se mění moment průřezu pod břemenem P_r, pohybuje-li se soustava břemen po nosníku. Libovolná poloha soustavy (obr. 17) vyvodí v průřezu pod břemenem P_r moment ohybový

$$M_r = Az_r - P_1(z_r - z_1) - P_2(z_r - z_2) - \ldots - P_{r-1}(z_r - z_{r-1}).$$

Výslednici všech břemen na nosníku znamenejme R a její působiště ζ, úsečku pak $\overline{a\,\zeta} = \zeta$; tu jest

$$A = R\frac{l-\zeta}{l},$$

tedy

$$M_r = R\frac{l-\zeta}{l}z_r - P_1(z_r - z_1) - P_2(z_r - z_2) - \ldots - P_{r-1}(z_r - z_{r-1}). \tag{10}$$

Pohybuje-li se soustava břemen po nosníku, nemění se ani velikosti břemen ani jejich vzdálenosti; členy $P_1(z_r - z_1)$, $P_2(z_r - z_2)$, ... jsou proto stálé. Mění se pouze prvý člen výrazu pro M_r, v němž jsou proměnnými úseky ζ a z_r; označímeli $\overline{z_r\,\zeta} = r$, jest $z_r = \zeta - r$, čímž je zavedena jediná proměnná ζ, jelikož se úsek r nemění. Přenášíme-li pak pořadnici momentu M ve svislici příslušné polohy břemene od přímé osy vzhůru, vytvoří koncové body v oboru břemene P_r čáru největších momentů, jež je podle vzorce pro M_r kvadratickou parabolou o svislé ose, obracející dutou stranu dolů, poněvadž je součinitel při ζ^2 záporný.

V ose paraboly max M, platné v oboru břemene P_r, je největší pořadnice; je v ní tedy max M_r, t. j. největší moment pod břemenem P_r. Derivace momentu M_r se mění spojitě, pohybuje-li se soustava břemen po nosníku; určíme tedy polohu soustavy, při které je M_r největší, z výminky

$$\frac{\mathrm{d}\, M_r}{\mathrm{d}\, \zeta} = \frac{R}{l}(l - \zeta - z_r) = 0,$$

jelikož $\mathrm{d}\zeta = \mathrm{d}\, z_r$. Pak plyne

$$l - \zeta = z_r \text{ aneb } \overline{\zeta b} = \overline{a z_r}. \tag{11}$$

Pod břemenem P_r v dané soustavě břemen vznikne tedy největší moment, je-li paprsek břemene P_r od levého konce nosníku stejně vzdálen jako paprsek výslednice R všech břemen od pravého konce čili půlí-li střed nosníku vzdálenost paprsku břemene P_r od paprsku výslednice R (obr. 17). Vzdálenost osy paraboly, platné v oboru břemene P_r, od středu nosníku rovná se podle toho poloviční vzdálenosti paprsků P_r a R.

Budiž x_r mez oborů břemen P_r, P_{r+1} a soustava měj na nosníku takovou polohu, že je bod x_r mezi paprsky P_r, P_{r+1} (obr. 17). Pak je v bodě x_r moment

$$M_r = R\frac{l - \zeta}{l} x_r - P_1(x_r - z_1) - P_2(x_r - z_2) - \ldots - P_r(x_r - z_r).$$

Ze vzorců (9) plyne

$$\sum_1^n P_i = R = \frac{l}{x_r}\sum_1^r P_i = \frac{l}{x_r}(P_1 + P_2 + \ldots + P_r);$$

dosazením do vzorce pro M_r obdržíme

$$M_r = (P_1 + P_2 + \ldots + P_r)(l - \zeta) - P_1(x_r - z_1) - P_2(x_r - z_2) - \ldots - P_r(x_r - z_r) =$$
$$= (l - x_r)\sum_1^r P_i - \sum_1^r P_i(\zeta - z_i). \tag{12}$$

Pro libovolnou sílu P_i znamená $(\zeta - z_i)$ vzdálenost paprsků P_i a R, jež se nemění pohybuje-li se soustava břemen po nosníku. Pokud je průřez x_r mezi břemeny P_r a P_{r+1}, nemění se tedy moment M_r za pohybu soustavy.[1]) V průřezu x_r na mezi oborů břemen P_r, P_{r+1} vznikne proto danou soustavou břemen týž moment, umístíme-li do průřezu x_r břímě P_r nebo P_{r+1}.

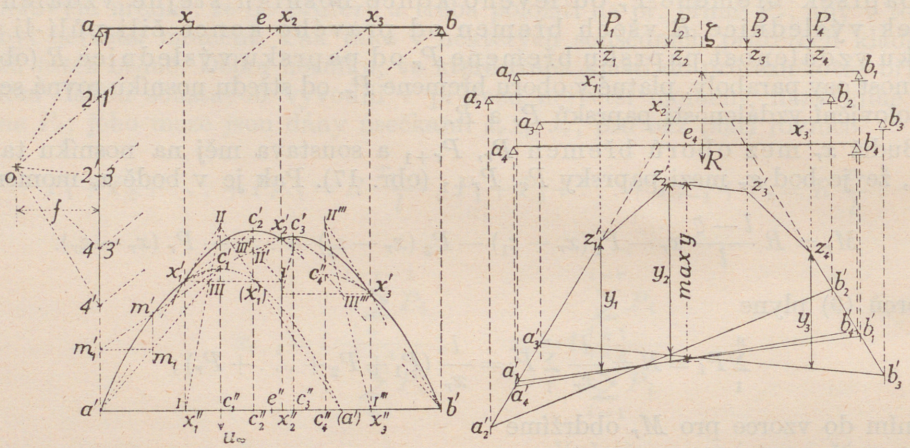
Mysleme si dále, že bychom znali max M v průřezu x_1 a hledali bychom max M v průřezu x_2, který je s průřezem x_1 souměrný ke středu nosníku. Průřez x_1 přijde do průřezu x_2, vyměníme-li levou a pravou stranu nosníku, což si můžeme představiti na př. tak, že pohlížíme na rovinu vnějších sil s druhé strany; tím vymění svá místa bod a s bodem b a bod x_1 s bodem x_2, dané zatížení se pak vymění se zatížením, jež je s ním ke středu nosníku souměrné. Uvedenou výměnou se stává kladný smysl momentový záporným, současně se však vyměňuje levá strana nosníku za pravou; vrátíme-li se pak ke straně levé, musíme znaménko momentu ještě jednou obrátiti. Z toho plyne, že souměrná zatížení vyvodí v souměrných průřezech tytéž momenty. Hledíme-li též k síle posouvající, tu se výměnou levé a pravé strany nosníku a současnou výměnou daného zatížení za zatížení souměrné nemění hodnota síly posouvající; také se směr síly nemění, určujeme-li v prvém případě sílu posouvající ze sil vnějších po levé straně průřezu, ve druhém případě ze sil vnějších po pravé straně průřezu. Znaménko síly posouvající, určené ze sil vnějších po pravé straně průřezu, musíme však změniti, vracejíce se ke straně levé; z toho plyne, že v souměr-

[1]) Srovnej *M. Lévy* „La Statique graphique", I (Paříž 1886), str. 330.

ných průřezech vyvodí souměrná zatížení síly posouvající téže prosté hodnoty, avšak protivného znaménka.

Zatížení, jež dá max M v průřezu x_1, vyvodí též max M v souměrném průřezu x_2, myslíme-li si levou a pravou stranu nosníku vyměněnu. Jsou tedy největší momenty v souměrných průřezech rovny čili čára největších momentů je souměrná ke svislici středu nosníku.

β) ***Grafické stanovení.*** Pokud se soustava břemen nemění, potud je čarou max M v oboru každého břemene táž parabola o svislé ose, jak plyne ze vzorce (10). Polohu osy paraboly, platné v oboru libovolného břemene, jsme již odvodili. Pro parabolu třeba mimo osu určiti dva body, stačí tedy, určíme-li max M na mezích



Obr. 18.

oborů jednotlivých břemen. Obory břemen určíme podle vzorců (9), rozdělíme-li délku nosníku v poměru úseků břemen. Jde-li na př. o soustavu břemen P_1, P_2, P_3, P_4, přeneseme jejich úseky $P_1 = \overline{1\,1'}$, $P_2 = \overline{2\,2'}$, $P_3 = \overline{3\,3'}$, $P_4 = \overline{4\,4'}$ od bodu a na jeho svislici a vedeme pak $1' x_1 \parallel 2' x_2 \parallel 3' x_3 \parallel 4' b$, čímž sestrojíme meze oborů břemen (obr. 18).

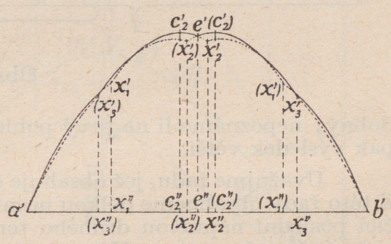
Pak narýsujeme z pólu o výslednicovou čáru $z_1' z_2' z_3' z_4'$ k daným břemenům P_1, P_2, P_3, P_4 a určíme největší momenty na mezích x_1, x_2, x_3 oborů břemen. V průřezu x_1 vyvodíme max M, položíme-li bod x_1 pod břímě P_1 (nebo P_2). Tím dostaneme polohu nosníku $a_1 b_1$, k níž náleží základní strana $a_1' b_1'$; od strany $a_1' b_1'$ měříme pořadnici y_1 největšího momentu v bodě x_1. Položíme-li bod x_2 pod břímě P_2 (nebo P_3), dostaneme polohu nosníku $a_2 b_2$, základní stranu $a_2' b_2'$ a na svislici bodu x_2 pořadnici y_2, měřenou od strany $a_2' b_2'$. Konečně umístíme bod x_3 pod břímě P_4 (nebo P_3); tomu odpovídá poloha nosníku $a_3 b_3$, základní strana $a_3' b_3'$ a pořadnice y_3, měřená ve svislici bodu x_3 od strany $a_3' b_3'$. Stanovené pořadnice přeneseme ve svislicích bodů x_1, x_2, x_3 od osy $a' b' : y_1 = \overline{x_1'' x_1'}$, $y_2 = \overline{x_2'' x_2'}$, $y_3 = \overline{x_3'' x_3'}$. V oboru $\overline{a\,x_1}$ břemene P_1 je čarou max M parabola, jež jde body a', x_1' a má svislou osu ve vzdálenosti $\overline{c_1'' e''} = \frac{1}{2}\overline{z_1\,\zeta}$ od středu nosníku e, jak bylo dokázáno; ζ je působiště výslednice R všech břemen, jejíž paprsek jde průsečíkem krajních stran výslednicové čáry. Podobně jde svislá osa paraboly max M, platné v oboru $\overline{x_1\,x_2}$ břemene P_2, bodem c_2'' ve vzdálenosti $\overline{c_2'' e''} = \frac{1}{2}\overline{z_2\,\zeta}$ od středu nosníku. Přeneseme-li též $\overline{e'' c_3''} = \frac{1}{2}\overline{\zeta\,z_3}$, $\overline{e'' c_4''} = \frac{1}{2}\overline{\zeta\,z_4}$, určíme osy parabol max M, jež platí v oboru $\overline{x_2\,x_3}$ břemene P_3 a v oboru $\overline{x_4\,b}$ břemene P_4.

Parabola max M v oboru prvého břemene jde body a', x_1' a body (a'), (x_1'), jež jsou s předešlými souměrné k ose $c_1'' c_1'$, mimo to úběžným bodem u_∞ svislé osy. Ne-

známý vrchol c_1' určíme použitím Pascalova šestiúhelníka $a'\,(a')\,(x_1')\,x_1\,u_\infty\,c_1'$: spojnice $a'\,(a')$ seče spojnici $x_1'\,u_\infty$ v bodě I, spojnice $(a')\,(x_1')$ osu paraboly $u_\infty\,c_1'$ v bodě II a spojnice $(x_1')\,x_1'$ neznámou spojnici $c_1'\,a'$ v bodě III, jenž je na spojnici $I\,II$; bod III je dán průsečíkem přímek $(x_1')\,x_1'$ a $I\,II$, spojnice $a'\,III$ určí pak na ose paraboly vrchol c_1'. Ze souměrnosti plyne, že také spojnice $a'\,x_1'$ seče osu paraboly v bodě II, nepotřebujeme tedy bodů (a'), (x_1'), hledáme-li vrchol c_1'. Vrcholem c_1', osou $c_1'\,c_1''$ a bodem a' je parabola jednoduše stanovena; průsečík její se zvolenou svislicí $m_1\,m'$ určíme na př., protneme-li tuto svislici se spojnicí $a'\,c_1'$ v bodě m_1, jímž vedeme $m_1\,m_1' \parallel a'\,b'$, a spojnice $m_1'\,c_1'$ stanoví bod m' paraboly $a'\,m'\,x_1'$, jejíž pokračování mimo úsek $a\,x_1$ nemá statické platnosti.

Obdobně sestrojíme parabolu $x_1'\,c_2'\,x_2'$: přímka $x_1'\,I' \parallel a'\,b'$ seče svislici bodu x_2' v bodě I', přímka $x_1'\,x_2'$ osu paraboly $c_2'\,c_2'$ v bodě II'; spojnice $I'\,II'$ určuje na vodorovnici bodu x_2' bod III' a spojnice $x_1'\,III'$ seče osu paraboly ve vrcholu c_2'. Také vrcholy c_3', c_4' dalších parabol určíme týmž způsobem. Pořadnici $c_2'\,c_2$ lze kontrolovati přímým sestrojením; je to pořadnice max M pod břemenem P_2. Určíme ji, umístíme-li nosník tak, aby jeho střed e_4 půlil vzdálenost paprsků P_2 a R; obdržíme tak polohu nosníku $a_4\,b_4$, jíž odpovídá základní strana $a_4'\,b_4'$, dávající v paprsku P_2 počátek pořadnice max $y = c_2'\,c_2$. Pro danou soustavu břemen jsou paraboly max M, platné v oborech jednotlivých břemen, podle předešlého shodné; lze tedy též paraboly ostatní snadno určiti z narýsované paraboly první, známe-li pro každou další parabolu osu a jeden bod.

Kdyby byla soustava břemen P_1, P_2, P_3, P_4 obrácena, dala by za čáru max M čáru $a'\,(x_3')\,(x_2')\,(x_1')\,b'$, jež plyne ze stanovené čáry $a'\,x_1'\,x_2'\,x_3'\,b'$, vyměníme-li pravou a levou stranu nosníku, tedy sestrojíme-li k čáře stanovené čáru souměrnou ke svislici středu nosníku (obr. 19). Obě čáry takto určené dávají pro danou soustavu břemen skutečná max M ve všech průřezech; třeba jen bráti v každém průřezu větší z pořadnic obou čar. Tím obdržíme čáru největších momentů $a'\,c_2\,e'\,(c_2')\,b'$, jež je souměrná ke svislici středu nosníku. Největší moment vůbec je ve dvou průřezech c_2 a (c_2), jež jsou ke středu nosníku souměrné.



Obr. 19.

Jestliže se za pohybu soustavy na př. v oboru břemene P_r změní soustava tím, že některé krajní břímě vystoupí s nosníku, platí parabola v oboru břemene P_r, již bychom určili podle předešlého (promítajíce podpory nosníku na krajní strany výslednicové čáry příslušné ke všem břemenům), pouze potud, pokud všechna břemena jsou na nosníku, tedy až do oné polohy, za které krajní břímě přijde do podpory. Pro další polohy máme soustavu změněnou, i určili bychom pro ni jako předešle obory břemene P_r a břemen sousedních; dále bychom stejným způsobem jako dříve stanovili paraboly max M platné v těchto oborech.

Různé průřezy na nosníku žádají někdy pro max M různých soustav břemen; v průřezech poblíž podpor vyvodíme max M soustavou, která začíná největšími břemeny, v průřezech uprostřed nosníku pak soustavou, která má uprostřed velká břemena. Pro každou takovou soustavu bychom určili čáru max M zvláště a z těchto čar bychom pak vyhledali skutečné největší momenty ohybové v jednotlivých průřezech.

Jiný způsob grafického stanovení čáry max M uveden bude dále v odst. 11, β).

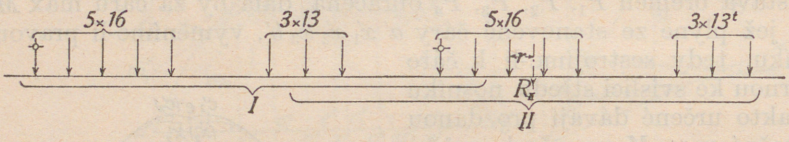
6. Největší moment vůbec. α) ***Řešení počtářské.*** Zvláště důležité jest max max M, t. j. největší moment vůbec, jaký daná řada břemen může v určitém nosníku vyvoditi; dán je největší pořadnicí čáry max M. Největší moment vůbec vyskytne se (viz obr. 19) poblíže středu nosníku, a to obyčejně v oboru toho

břemene, jež by dávalo max M též ve středu nosníku. Toto břímě vyšetříme z kriteria Winklerova; je-li $x = \frac{1}{2} l$, vychází z nerovnice (8) výminka $R_1 \gtrless \frac{1}{2} R$, čemuž vyhovuje ono břímě, jehož přičtením se přestupuje právě $\frac{1}{2} R$, sčítáme-li břemena od levého konce soustavy. Nazývejme toto břímě *břemenem aritmeticky středním*. Známe-li břímě, pod nímž třeba hledati max max M, určíme polohu soustavy podle věty dané rovnicí (11).

Z toho plyne již, jak třeba postupovati, jde-li o výpočet největšího momentu vůbec. Z dané řady břemen vybereme nejúčinnější soustavu tak, aby břemena největší a nejhustější byla poblíž středu nosníku. V této soustavě určíme pak břímě aritmeticky střední, t. j. břímě, jehož přičtením se přestupuje právě polovina součtu všech břemen na nosníku, sčítáme-li břemena po řadě od kteréhokoli konce soustavy. Pak umístíme soustavu na nosníku tak, aby střed nosníku půlil vzdálenost paprsků břemene aritmeticky středního a výslednice všech břemen. Za této polohy soustavy určíme moment pod břemenem aritmeticky středním, jenž bude pravidlem největším momentem vůbec.

Dostupuje-li se polovina součtu břemen právě přičtením některého břemene, je max max M pod tímto nebo pod následujícím břemenem, což ukáže kriterium dále odvozené.

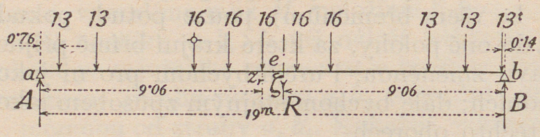
Příklad 4. Stanovíme největší moment vůbec pro nosník prostý o délce $\overline{ab} = l = 19\,\text{m}$, jenž je zatížen vlakem podle normy I (mostního řádu z r. 1904).



Obr. 20.

Vlak začíná dvěma lokomotivami s tendry; lokomotivy mohou míti komíny za sebou nebo proti sobě, čímž vznikají dvě různé řady břemen. Bylo by ovšem uvažovati onu řadu, jež dá více. Postup u obou řad by byl obdobný; nepoznáme-li na prvý pohled, která řada jest účinnější, musíme počítati s oběma a vzíti pak výsledek větší.

Uvažujme řadu, jež obsahuje dvě lokomotivy s komíny za sebou a příslušné tendry (obr. 20). Z této řady obsáhneme délkou nosníku soustavu I (začínající od levého konce řady) nebo II (končící poslední nápravou druhého tendru). Ačkoli je v soustavě I součet břemen větší, je přímo patrná, že má soustava II v tomto případě větší účinek, neboť obsahuje největší břemena (tlaky náprav lokomotivy) poblíž středu nosníku, tedy v nejúčinnější poloze. Součet břemen v soustavě II, s níž budeme počítati, jest $R_{II} = 5 \cdot 16 + 5 \cdot 13 = 145$ t; pak vyjde $\frac{1}{2} R_{II} = 72{,}5$ t, i je břemenem aritmeticky středním tlak prostřední nápravy lokomotivy, neboť $2 \cdot 13 + 2 \cdot 16 < 72{,}5$, $2 \cdot 13 + 3 \cdot 16 > 72{,}5$.



Obr. 21.

Paprsek výslednice určíme vzdáleností jeho r od paprsku břemene aritmeticky středního. K počtářskému řešení užijeme věty, že se součet statických momentů složek k libovolnému bodu rovná statickému momentu výslednice k témuž bodu; za střed momentový zvolíme nejlépe působiště břemene aritmeticky středního a nahradíme, sčítajíce statické momenty sil, tlaky náprav lokomotivy výslednicí $5 \cdot 16 = 80$ t, jež působí v prostřední nápravě, a tlaky náprav pravého tendru výslednicí $3 \cdot 13 = 39$ t rovněž v prostřední nápravě tendru působící. Pak jest

$$R_{II} \cdot r = -13 \cdot (8{,}3 + 6{,}8) + 80 \cdot 0 + 39 \cdot 8{,}3 = 127{,}4\,\text{mt},$$

bereme-li za kladný moment, jenž otáčí jako ručičky na hodinách; tu je kladné rámě vpravo směřující, dosazujeme-li břemena prostými hodnotami. Z toho vychází

$$r = \frac{127{,}4}{R_{II}} = \frac{127{,}4}{145} = 0{,}88\,\text{m}.$$

Střed nosníku e položíme nyní doprostřed úseku $r = \overline{z_r \zeta}$; je tedy $\overline{z_r e} = \overline{e \zeta} = \frac{1}{2} r = 0{,}44$ m, $\overline{a z_r} = \overline{\zeta b} = \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} r = 9{,}5 - 0{,}44 = 9{,}06$ m, čímž je dána poloha soustavy, naznačená v obr. 21. Touto polohou se vyvodí v levé podpoře reakce

$$A = R \cdot \frac{9{,}06}{19} = 69{,}14 \text{ t}$$

a pod břemenem aritmeticky středním (v bodě z_r) hledaný největší moment vůbec

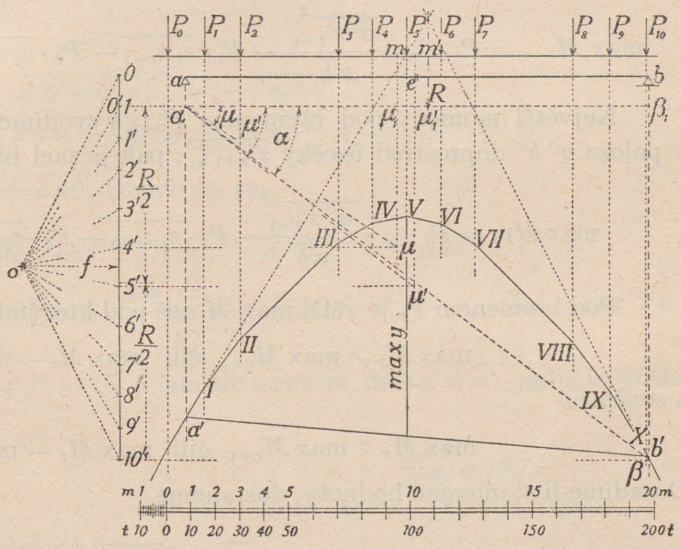
$$\max \max M = A \cdot 9{,}06 - 13 \cdot (8{,}3 + 6{,}8) - 16 \cdot (2{,}8 + 1{,}4) = 362{,}91 \text{ mt}.$$

β) ***Řešení grafické*** lze provésti velmi prostě způsobem uvedeným při počtářském řešení. Vybereme-li z dané řady břemen určitou soustavu, je tím dán již součet břemen R součtem jejich určovacích úseků v čáře složkové. Břemenem aritmeticky středním je pak ono břímě, do jehož určovacího úseku padne půlící bod úseku R. Paprsek výslednice R jde konečně průsečíkem krajních stran příslušné čáry výslednicové. Vyjde-li ve správné poloze soustavy některé z břemen uvažovaných mimo nosník, provedeme opravu řešení graficky velmi snadno.

Příklad 5. Budiž graficky řešen příklad 4.

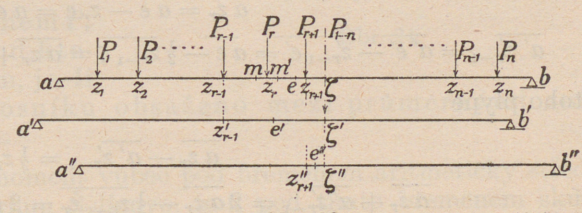
Z dané řady břemen (obr. 20) vybrali bychom nejúčinnější soustavu, jak uvedeno v příkladě 4; soustava začíná druhou nápravou levého tendru a končí poslední nápravou pravého tendru. Určovací úseky břemen sečteme v čáře složkové (obr. 22), čímž dostaneme úsek výslednice $R = \overline{1\,10'}$; polovina tohoto úseku rozděluje určovací úsek břemene P_5, jež je tedy břemenem aritmeticky středním. V obrazci složkovém zvolme nyní pól o ve vzdálenosti $f = 4$ m od čáry složkové a rýsujme výslednicovou čáru; krajní strany výslednicové čáry, jež náleží k uvažovaným břemenům $P_1, P_2, P_3, \ldots P_{10}$, sekou se v bodě, jímž prochází paprsek výslednice R. Nosník $a\,b$ umístíme pak tak, aby jeho střed e půlil vzdálenost paprsků P_5, R, a určíme k této poloze nosníku základní stranu $a'\,b'$. Od strany $a'\,b'$ měříme (v měřidle sil) v paprsku břemene aritmeticky středního pořadnici max $y = 90{,}5$ t a vypočteme pak

$$\max \max M = f \cdot \max y = 4 \cdot 90{,}5 = 362 \text{ mt}.$$



Obr. 22.

γ) ***Případ výjimkový.*** Výjimkou může vzniknouti největší moment vůbec pod některým jiným břemenem než pod břemenem aritmeticky středním, jestliže se součet břemen od jednoho konce soustavy k břemeni aritmeticky střednímu málo liší od polovice součtu všech břemen; tu může býti největší moment vůbec pod oním břemenem vlevo (vpravo) od břemene aritmeticky středního, jehož přičtením se při sčítání břemen od levého (pravého) konce soustavy nejvíce přiblížíme polovici součtu všech břemen. Abychom takové případy poznali, odvoďme



Obr. 23.

si obecné kriterium, jež rozhodne, kdy vznikne pod břemenem P_r větší max M než pod kterýmkoli břemenem sousedním P_{r-1} nebo P_{r+1}.[1])

Pod břemenem P_r vznikne největší moment, půlí-li střed nosníku e vzdálenost působiště z_r břemene P_r a působiště ζ výslednice $P_{1\,..\,n}$ všech břemen na nosníku (obr. 23); pak jest $\overline{a\,z_r} = \overline{\zeta\,b}$. Vypočteme za této polohy soustavy nejprve reakci

$$A = P_{1\,..\,n} \cdot \frac{\overline{\zeta\,b}}{\overline{a\,b}} = P_{1\,..\,n} \cdot \frac{\overline{a\,z_r}}{\overline{a\,b}},$$

dále určíme pod břemenem P_r moment

$$\max M_r = A \cdot \overline{a\,z_r} - P_1 \cdot \overline{z_1\,z_r} - P_2 \cdot \overline{z_2\,z_r} - \ldots - P_{r-1} \cdot \overline{z_{r-1}\,z_r} =$$

$$= P_{1\,..\,n} \cdot \frac{\overline{a\,z_r}^2}{\overline{a\,b}} - P_1 \cdot \overline{z_1\,z_r} - P_2 \cdot \overline{z_2\,z_r} - \ldots - P_{r-1} \cdot \overline{z_{r-1}\,z_r}.$$

Pod břemenem P_{r-1} dostaneme největší moment, když střed e' nosníku v poloze $a'\,b'$ půlí úsečku $\overline{z'_{r-1}\,\zeta'}$. Obdobně k předešlému momentu má nyní moment pod břemenem P_{r-1} hodnotu

$$\max M_{r-1} = P_{1\,..\,n} \cdot \frac{\overline{a'\,z'_{r-1}}^2}{\overline{a\,b}} - P_1 \cdot \overline{z_1\,z_{r-1}} - P_2 \cdot \overline{z_2\,z_{r-1}} - \ldots - P_{r-2} \cdot \overline{z_{r-2}\,z_{r-1}}.$$

Největší moment pod břemenem P_{r+1} vyvodíme, umístíme-li střed e'' nosníku v poloze $a''\,b''$ doprostřed úsečky $\overline{z''_{r+1}\,\zeta''}$; pak je pod břemenem P_{r+1} moment

$$\max M_{r+1} = P_{1\,..\,n} \cdot \frac{\overline{a''\,z''_{r+1}}^2}{\overline{a\,b}} - P_1 \cdot \overline{z_1\,z_{r+1}} - P_2 \cdot \overline{z_2\,z_{r+1}} - \ldots - P_r \cdot \overline{z_r\,z_{r+1}}.$$

Pod břemenem P_r je větší max M než pod kterýmkoli břemenem sousedním, je-li

$$\max M_r > \max M_{r-1} \quad \text{čili} \quad \max M_r - \max M_{r-1} > 0$$

a současně

$$\max M_r > \max M_{r+1} \quad \text{čili} \quad \max M_r - \max M_{r+1} > 0\,.$$

Dosadíme-li stanovené hodnoty, dostaneme

$$\max M_r - \max M_{r-1} = P_{1\,..\,n} \cdot \frac{\overline{a\,z_r} - \overline{a'\,z'_{r-1}}}{\overline{a\,b}} - (P_1 + P_2 + \ldots + P_{r-1}) \cdot \overline{z_{r-1}\,z_r}\,.$$

Vyjádříme úsečky

$$\overline{a\,z_r} = \overline{a\,e} - \overline{z_r\,e} = \overline{a\,e} - \tfrac{1}{2}\,\overline{z_r\,\zeta},$$

$$\overline{a'\,z'_{r-1}} = \overline{a'\,e'} - \overline{z'_{r-1}\,e'} = \overline{a\,e} - \tfrac{1}{2}\,\overline{z_{r-1}\,\zeta} = \overline{a\,z_r} + \tfrac{1}{2}\,\overline{z_r\,\zeta} - \tfrac{1}{2}\,\overline{z_{r-1}\,\zeta} = \overline{a\,z_r} - \tfrac{1}{2}\,\overline{z_{r-1}\,z_r}\,;$$

z toho plyne

$$\overline{a\,z_r} - \overline{a'\,z'_{r-1}} = \tfrac{1}{2}\,\overline{z_{r-1}\,z_r},$$

$$\overline{a\,z_r} + \overline{a'\,z'_{r-1}} = 2\,\overline{a\,z_r} - \tfrac{1}{2}\,\overline{z_{r-1}\,z_r} = 2\,(\overline{a\,z_r} - \tfrac{1}{4}\,\overline{z_{r-1}\,z_r}) = 2\,\overline{a\,m},$$

[1]) Viz *Jos. Šolín* „Theorie zevnitřních sil trámů přímých", seš. I (Praha 1878), str. 51 a d.

je-li $\overline{a\,m} = \overline{a\,z_r} - \frac{1}{4}\overline{z_{r-1}\,z_r}$. Pak vyjde

$$\overline{a\,z_r}^2 - \overline{a'\,z'_{r-1}}^2 = (\overline{a\,z_r} + \overline{a'\,z'_{r-1}})\,(\overline{a\,z_r} - \overline{a'\,z'_{r-1}}) = \overline{a\,m}\cdot\overline{z_{r-1}\,z_r},$$

$$\max M_r - \max M_{r-1} = P_{1\,..\,n}\cdot\frac{\overline{a\,m}\cdot\overline{z_{r-1}\,z_r}}{\overline{a\,b}} - (P_1 + P_2 + \ldots + P_{r-1})\,\overline{z_{r-1}\,z_r} > 0.$$

Znamenejme $P_{1\,..\,n} = Q_{ab}$, $P_1 + P_2 + \ldots + P_{r-1} = Q_{am}$ jakožto zatížení délek $\overline{a\,b}$, $\overline{a\,m}$; poslední nerovnici lze pak psáti

$$\frac{Q_{ab}}{\overline{a\,b}} > \frac{Q_{am}}{\overline{a\,m}}.$$

Z určených hodnot vychází dále

$$\max M_r - \max M_{r+1} = P_{1\,..\,n}\cdot\frac{\overline{a\,z_r}^2 - \overline{a''\,z''_{r+1}}^2}{\overline{a\,b}} + (P_1 + P_2 + \ldots + P_r)\,\overline{z_r\,z_{r+1}}.$$

Určíme zase

$$\overline{a''\,z''_{r+1}} = \overline{a''e''} - \overline{z''_{r+1}e''} = \overline{a\,e} - \tfrac{1}{2}\overline{z_{r+1}\,\zeta} = \overline{a\,z_r} + \tfrac{1}{2}\overline{z_r\,\zeta} - \tfrac{1}{2}\overline{z_{r+1}\,\zeta} = \overline{a\,z_r} + \tfrac{1}{2}\overline{z_r\,z_{r+1}};$$

pak plyne

$$\overline{a\,z_r} - \overline{a''\,z'_{r+1}} = -\tfrac{1}{2}\overline{z_r\,z_{r+1}},$$

$$\overline{a\,z_r} + \overline{a''\,z''_{r+1}} = 2\,\overline{a\,z_r} + \tfrac{1}{2}\overline{z_r\,z_{r+1}} = 2\,(\overline{a\,z_r} + \tfrac{1}{4}\overline{z_r\,z_{r+1}}) = 2\,\overline{a\,m'},$$

znamenáme-li $\overline{a\,z_r} + \frac{1}{4}\overline{z_r\,z_{r+1}} = \overline{a\,m'}$. Obdržíme tu

$$\overline{a\,z_l}^2 - \overline{a''\,z''_{r+1}}^2 = (\overline{a\,z_r} + \overline{a''\,z''_{r+1}})\,(\overline{a\,z_r} - \overline{a'\,z''_{r+1}}) = -\,\overline{a\,m'}\cdot\overline{z_r\,z_{r+1}},$$

$$\max M_r - \max M_{r+1} = -\,P_{1\,..\,n}\cdot\frac{\overline{a\,m'}\cdot\overline{z_r\,z_{r+1}}}{\overline{a\,b}} + (P_1 + P_2 + \ldots + P_r)\,\overline{z_r\,z_{r+1}} > 0.$$

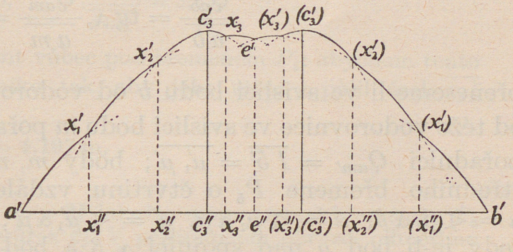
Poznačíme-li $P_1 + P_2 + \ldots + P_r = Q_{a\,m'}$ jakožto zatížení délky $\overline{a\,m'}$, nabude poslední výminka tvaru

$$\frac{Q_{ab}}{\overline{a\,b}} < \frac{Q_{am'}}{\overline{a\,m'}};$$

tato výminka spojena s předchozí dá *kriterium Šolínovo*

$$\frac{Q_{am}}{\overline{a\,m}} < \frac{Q_{ab}}{\overline{a\,b}} < \frac{Q_{am'}}{\overline{a\,m'}}, \qquad (13)$$

jež lze vyslovitivětou: Pod břemenem P_r vznikne větší max M než pod kterýmkoli břemenem sousedním, je-li průměrné zatížení celého nosníku obsaženo mezi průměrnými zatíženími dílů $\overline{a\,m}$, $\overline{a\,m'}$.



Obr. 24.

Obyčejně vychází největší moment vůbec pod břemenem aritmeticky středním; znamenáme-li je P_r, ukáže kriterium Šolínovo, je-li pod tímto břemenem skutečně větší max M než pod kterýmkoli břemenem sousedním. Čára největších momentů může však ve výjimkovém případě míti tvar naznačený v obr. 24, což se může státi,

je-li vedle břemene aritmeticky středního břímě značně větší. Pak je největší moment vůbec v bodě c_3 v oboru třetího břemene, do něhož nenáleží střed nosníku e. V takovém případě nebude vyhověno kriteriu Šolínovu. Vyjde-li tu

$$\frac{Q_{am}}{\overline{am}} < \frac{Q_{ab}}{\overline{ab}} \text{ a současně } \frac{Q_{am'}}{\overline{am'}} < \frac{Q_{ab}}{\overline{ab}},$$

třeba zvětšiti $Q_{am'}$, aby bylo kriteriu (13) vyhověno; v tom případě je pod břemenem P_{r+1} větší $\max M$ než pod břemenem P_r. Jest ovšem třeba znovu se přesvědčiti, je-li vyhověno kriteriu (13). Místo břemene P_r máme tu břímě P_{r+1}, tedy místo $\overline{am}$ dosaditi jest

$$\overline{a''z''_{r+1}} - \tfrac{1}{4}\overline{z_r z_{r+1}} = \overline{a z_r} + \tfrac{1}{2}\overline{z_r z_{r+1}} - \tfrac{1}{4}\overline{z_r z_{r+1}} = \overline{a z_r} + \tfrac{1}{4}\overline{z_r z_{r+1}} = \overline{am'}$$

a místo $Q_{am} = P_1 + P_2 + \ldots + P_{r-1}$ zatížení $P_1 + P_2 + \ldots + P_r = Q_{am'}$. Třetí člen kriteria (13), psaného pro břímě P_r, stává se tedy prvým členem téhož kriteria, užitého pro břímě P_{r+1}. Úsečku $\overline{am'} = \overline{am} + \overline{mm'} = \overline{am} + \tfrac{1}{4}\overline{z_{r-1} z_{r+1}}$ nahradíme pak úsečkou $\overline{am'} + \tfrac{1}{4}\overline{z_r z_{r+2}}$, která plyne, píšeme-li na pravé straně $\overline{am'}$ místo $\overline{am}$ a $r+1$ místo r.

Je-li naopak

$$\frac{Q_{am'}}{\overline{am'}} > \frac{Q_{ab}}{\overline{ab}} \text{ a zároveň } \frac{Q_{am}}{\overline{am}} > \frac{Q_{ab}}{\overline{ab}},$$

musíme zmenšiti Q_{am}, abychom kriteriu (13) vyhověli; pak je pod břemenem P_{r-1} větší $\max M$ než pod břemenem P_r. Chceme-li se přesvědčiti, je-li pro břímě P_{r-1} vyhověno kriteriu (13), musíme místo $\overline{am'}$ dosaditi

$$\overline{a'z'_{r-1}} + \tfrac{1}{4}\overline{z_{r-1} z_r} = \overline{a z_r} - \tfrac{1}{2}\overline{z_{r-1} z_r} + \tfrac{1}{4}\overline{z_{r-1} z_r} = \overline{a z_r} - \tfrac{1}{4}\overline{z_{r-1} z_r} = \overline{am},$$

místo $Q_{am'} = P_1 + P_2 + \ldots + P_r$ vezmeme pak zatížení $P_1 + P_2 + \ldots + P_{r-1} = Q_{am}$. Prvý člen kriteria (13), užitého pro břímě P_r, stává se tedy třetím členem téhož kriteria pro břímě P_{r-1}. Prvý člen tohoto kriteria odvodíme nyní snadno; místo úsečky $\overline{am} = \overline{am'} - \tfrac{1}{4}\overline{z_{r-1} z_{r+1}}$ dosadíme úsečku $\overline{am} - \tfrac{1}{4}\overline{z_{r-2} z_r}$, jež plyne z předešlé, nahradíme-li na pravé straně $\overline{am'}$ úsečkou $\overline{am}$ a index r indexem $r-1$.

Kriteria Šolínova lze užívati velmi prostě graficky. Tu určíme (obr. 22)

$$\frac{Q_{ab}}{\overline{ab}} = \operatorname{tg}\alpha, \frac{Q_{am}}{\overline{am}} = \operatorname{tg}\mu, \frac{Q_{am'}}{\overline{am'}} = \operatorname{tg}\mu',$$

přeneseme-li ve svislici bodu b od vodorovnice $\alpha\beta_1$ pořadnici $Q_{ab} = \overline{1\,10'} = \overline{\beta_1\beta}$, dále od téže vodorovnice ve svislici bodu m pořadnici $Q_{am} = \overline{1\,4} = \overline{\mu_1\mu}$ a ve svislici bodu m' pořadnici $Q_{am'} = \overline{1\,5'} = \overline{\mu'_1\mu'}$; body m, m' jsou vzdáleny od působiště aritmeticky středního břemene P_5 o čtvrtinu vzdálenosti paprsků P_5, P_4 a P_5, P_6. Pak jest $\alpha = \sphericalangle\beta_1\alpha\beta$, $\mu = \sphericalangle\mu_1\alpha\mu$, $\mu' = \sphericalangle\mu'_1\alpha\mu'$; kriteriu (13) je vyhověno, je-li $\mu < \alpha < \mu'$, tedy je-li bod μ nad spojnicí α β a bod μ' pod ní.

Příklad 6. Stanovíme největší moment vůbec pro nosník délky $l = 10$ m, po němž se pohybuje soustava břemen naznačená v obr. 25.

Součet všech břemen jest $P_{1..5} = 33$ t, aritmeticky střední je břímě P_3. Vzdálenost r paprsku výslednice $P_{1..5}$ od paprsku P_3 určíme z momentové rovnice

$$P_{1..5} \cdot r = -8 \cdot (4{,}0 + 2{,}2) + 6 \cdot (1{,}6 + 3{,}4) = -19{,}6 \text{ mt},$$

jež dá

$$r = -\frac{19{,}6}{33} = -0{,}594 \text{ m}.$$

Pod břemenem P_3 vznikne max M, je-li střed nosníku e uprostřed úsečky $\overline{\zeta z_3}$. Pak jest

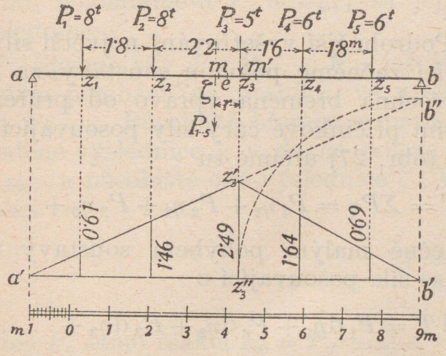
$$\overline{a z_3} = \frac{1}{2}\, l + \frac{1}{2}\, r = 5{,}297 \text{ m},$$

$$\overline{am} = \overline{a z_3} - \frac{1}{4}\overline{z_2 z_3} = 4{,}747 \text{ m}, \qquad \overline{am'} = \overline{a z_3} + \frac{1}{4}\overline{z_3 z_4} = 5{,}697 \text{ m},$$

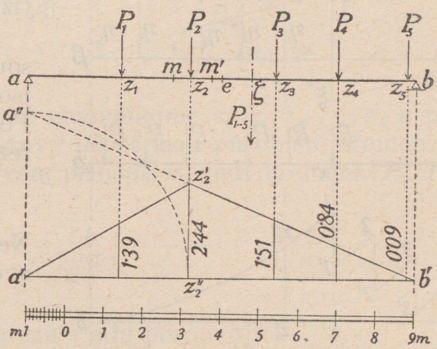
$$Q_{am} = 16 \text{ t}, \qquad Q_{ab} = 33 \text{ t}, \qquad Q_{am'} = 21 \text{ t}.$$

Dělením vyjde

$$\frac{Q_{am}}{\overline{am}} = 3{,}37, \qquad \frac{Q_{ab}}{\overline{ab}} = 3{,}30, \qquad \frac{Q_{am'}}{\overline{am'}} = 3{,}69.$$



Obr. 25.



Obr. 26.

Kriteriu Šolínovu není tedy vyhověno a poněvadž $\frac{Q_{am}}{\overline{am}} > \frac{Q_{ab}}{\overline{ab}}$, třeba zmenšiti Q_{am}, aby se kriteriu vyhovělo. Největší moment vůbec jest pak hledati pod břemenem P_2. Pro toto břímě se stává předešlá hodnota $\frac{Q_{am}}{\overline{am}}$ (prvý člen kriteria) třetím členem kriteria, tedy $\frac{Q_{am'}}{\overline{am'}} = 3{,}37$. Původní délka $\overline{am}$ je rovna nynější délce $\overline{am'} = 4{,}747$ m, z níž určíme

$$\overline{am} = \overline{am'} - \frac{1}{4}\overline{z_1 z_3} = 3{,}747 \text{ m}.$$

Píšeme-li kriterium (13) pro břímě P_2, jest $Q_{am} = P_1 = 8$ t, tedy

$$\frac{Q_{am}}{\overline{am}} = 2{,}14, \qquad \frac{Q_{ab}}{\overline{ab}} = 3{,}30, \qquad \frac{Q_{am'}}{\overline{am'}} = 3{,}37.$$

Kriteriu je tu vyhověno, vznikne tedy největší moment vůbec pod břemenem P_2; abychom tento moment určili, umístíme soustavu břemen na nosníku tak, aby jeho střed e půlil úsek $\overline{z_2 \zeta}$ (obr. 26). Pak jest

$$\overline{a z_2} = \frac{1}{2}\overline{ab} - \frac{1}{2}\overline{z_2 \zeta} = 4{,}197 \text{ m},$$

čímž je poloha soustavy dána.

Známe-li polohu soustavy břemen, určíme max max M jakožto moment pod břemenem P_2 na př. z příčinkového obrazce, jejž sestrojíme pro průřez z_2. V příčinkovém obrazci odměříme v měřidle délkovém příčinkové pořadnice η v paprscích břemen (hodnoty jsou v obr. 26 připsány) a vypočteme

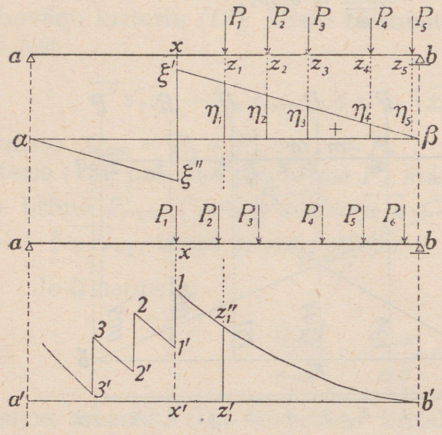
$$\max \max M = \Sigma P \eta = 8 \cdot (1{,}39 + 2{,}44) + 5 \cdot 1{,}51 + 6 \cdot (0{,}84 + 0{,}09) = 43{,}77 \text{ mt}.$$

Pro srovnání vypočteme největší moment pod břemenem aritmeticky středním P_3, jenž žádá polohy soustavy, naznačené v obr. 25. Užijme tu opět příčinkového obrazce, jejž sestrojíme pro moment k bodu z_3; v něm odměříme na měřidle délkovém příčinkové pořadnice η v paprscích břemen a stanovíme

$$\max M_3 = \Sigma P \eta = 8 \cdot (0{,}61 + 1{,}46) + 5 \cdot 2{,}49 + 6 \cdot (1{,}64 + 0{,}69) = 42{,}99 \text{ mt}.$$

Tento moment je skutečně menší než max M pod břemenem P_2, jenž je tedy max max M.

7. Největší síla posouvající. *α) Řešení počtářské.* Pohybuje-li se soustava břemen po nosníku, mění se posouvající síla T průřezu x; půjde o max T (největší hodnotu kladnou) a min T (největší prostou hodnotu záporné síly posouvající). Podle toho, co bylo odvozeno v odst. 2 o proměně síly posouvající, pohybuje-li se po nosníku jediné břímě osamělé, soudíme, že v průřezu x vyvodíme max T, zatížíme-li co nejvíce díl $\overline{x\,b}$, kladouce největší a nejhustější břemena k průřezu x; díl $\overline{a\,x}$ buď vůbec nezatížíme anebo jen co nejméně. Obdobně vyvodíme v průřezu x min T, zatížíme-li co nejvíce díl $\overline{a\,x}$, hledíce k tomu, aby největší a nejhustější břemena byla u průřezu x; díl $\overline{x\,b}$ zatížíme co nejméně, nejčastěji jej vůbec nezatížíme.



Obr. 27.

Podrobnější vyšetřování největší síly posouvající začněme polohou soustavy, za které jsou všechna břemena vpravo od průřezu x. Použitím příčinkové čáry síly posouvající průřezu x (obr. 27) určíme tu

$$T = \Sigma P\eta = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + P_3\eta_3 + \dots$$

Nekonečně malým pohybem soustavy vlevo zvětší se síla posouvající o

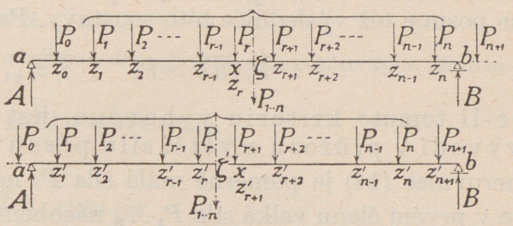
$$\mathrm{d}T = P_1\,\mathrm{d}\eta_1 + P_2\,\mathrm{d}\eta_2 + P_3\,\mathrm{d}\eta_3 + \dots,$$

tedy o hodnotu nekonečně malou. Příčinkové pořadnice $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$ mění se po zákonu přímky; pohybuje-li se soustava břemen vlevo, roste i T po zákonu přímky, pokud žádné břímě nepřestoupí přes body b, x. Proměnu síly T za pohybu soustavy břemen znázorníme graficky, přeneseme-li na př. posouvající sílu T, vyvozenou určitou polohou soustavy, jakožto pořadnici $\overline{z_1'\,z_1''}$ v paprsku břemene P_1. Měřickým místem bodů z_1'' je čára, jejíž pořadnice v paprsku břemene P_1 dávají součet účinků všech břemen soustavy; nazývejme ji *součtovou čarou* posouvající síly pro danou soustavu břemen. Jak bylo dovozeno, je tato čára přímá, pokud jsou táž břemena mezi body x, b. Přistupují-li na nosník za pohybu soustavy vlevo nová břemena, stává se součtová čára síly T lomenou; je spojitá, pokud žádné břímě nepřestoupí přes průřez x. Přestoupí-li nekonečně malým pohybem soustavy břímě P_1 přes průřez x, změní se jeho účinek o konečnou hodnotu $-P_1$; účinky ostatních břemen se mění o hodnoty nekonečně malé, jež lze vynechati proti konečné hodnotě, čímž plyne celkový přírůst síly posouvající $\Delta T = -P_1$. Přestupuje-li břímě P_1 přes průřez x, zmenší se tedy celková síla posouvající o hodnotu toho břemene $P_1 = \overline{1\,1'}$.

Pohybuje-li se soustava břemen dále vlevo, zvětšuje se opět celková síla posouvající, poněvadž účinek pravých břemen roste, prostá hodnota účinku břemene P_1, jež přičiňuje záporně, se pak zmenšuje; celkem roste síla T dále spojitě po zákonu přímky (nebo čáry lomené, přistupují-li na nosník nová břemena), až přijde další břímě P_2 do průřezu. Přestoupením břemene P_2 přes průřez x zmenšuje se zase celková síla posouvající o hodnotu $P_2 = \overline{2\,2'}$. Je tedy celkem součtovou čarou síly posouvající vpravo od průřezu x čára lomená, vlevo od průřezu x čára stupňovitá, složená z přímek šikmých a svislých; svislé přímky $1\,1'$, $2\,2'$, $3\,3'$, ... odpovídají polohám soustavy, za nichž je v průřezu x břímě P_1, P_2, P_3, ...

Součtová čára síly posouvající má několik vrcholů, tedy síla posouvající několik maxim. Nejčastěji bývá největší prvé maximum, t. j. maximum vyvozené polohou soustavy, za které je břímě P_1 v bodě x, ostatní břemena vpravo; toto zatížení nazývejme *krajním zatížením pravé strany* průřezu x. Pravidlem vede tedy k max T v průřezu x krajní zatížení pravé strany průřezu.

Jsou však případy, kdy je třeba klásti do průřezu x břímě druhé neb i některé další. Odvoďme si proto obecné kriterium, jež stanoví, vyvodí-li se větší síla posouvající v průřezu x za polohy soustavy, kdy je v průřezu x břímě P_r nebo břímě P_{r+1}. Pro úplnou obecnost mysleme si pak, že za prvé polohy soustavy je na nosníku břímě P_0, jež za druhé polohy vystoupí, a mimo nosník břímě P_{n+1}, jež za druhé polohy vstoupí na nosník (obr. 28). V tom jsou zahrnuty i případy, v nichž by vystoupilo nebo vstoupilo více břemen než jedno, pokládáme-li P_0 a P_{n+1} za jejich výslednice.



Obr. 28.

Složme síly $P_1, P_2, \ldots P_n$, jež jsou v obou polohách na nosníku, ve výslednici $P_{1\ldots n}$. Působiště břemen v prvé poloze znamenejme $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$ a působiště uvedené výslednice ζ; v druhé poloze soustavy nechť jsou působiště břemen $z'_1, z'_2, \ldots z'_n, z'_{n+1}$ a působiště oné výslednice ζ'. V prvém případě vyvodí břemena $P_1, P_2, \ldots P_n$ reakci

$$A = P_{1\ldots n} \cdot \frac{\overline{\zeta b}}{\overline{a b}},$$

břímě P_0 samo reakci $B_0 = P_0 \cdot \frac{\overline{a z_0}}{\overline{a b}}$ a v průřezu x sílu posouvající

$$T_0 = -B_0 = -P_0 \cdot \frac{\overline{a z_0}}{\overline{a b}}.$$

Celkem dá prvá poloha soustavy v průřezu x sílu posouvající:

$$T_r = A - \sum_1^{r-1} P + T_0 = P_{1\ldots n} \cdot \frac{\overline{\zeta b}}{\overline{a b}} - P_1 - P_2 - \ldots - P_{r-1} - P_0 \cdot \frac{\overline{a z_0}}{\overline{a b}};$$

břímě P_r, jež působí v průřezu x, čítáme tu k pravé straně, abychom dostali větší sílu posouvající, neboť jde o $\max T$, jež je kladné. Za druhé polohy soustavy vyvodí břemena $P_1, P_2, \ldots P_n$ reakci

$$A = P_{1\ldots n} \cdot \frac{\overline{\zeta' b}}{\overline{a b}},$$

břímě P_{n+1} samo reakci $A_{n+1} = P_{n+1} \cdot \frac{\overline{z'_{n+1} b}}{\overline{a b}}$ a v průřezu x sílu posouvající

$$T_{n+1} = A_{n+1} = P_{n+1} \cdot \frac{\overline{z'_{n+1} b}}{\overline{a b}}.$$

Pro druhou polohu soustavy dostaneme tedy v průřezu x, čítajíce opět břímě P_{r+1} k pravé straně, sílu posouvající

$$T_{r+1} = A - \sum_1^r P + T_{n+1} = P_{1\ldots n} \cdot \frac{\overline{\zeta' b}}{\overline{a b}} - P_1 - P_2 - \ldots - P_{r-1} - P_r + P_{n+1} \cdot \frac{\overline{z'_{n+1} b}}{\overline{a b}}.$$

Vyšetřme nyní, kdy je $T_r > T_{r+1}$, tedy $T_r - T_{r+1} > 0$. Dosazením hodnot plyne výminka

$$P_{1\ldots n} \cdot \frac{\overline{\zeta b} - \overline{\zeta' b}}{\overline{a b}} + P_r - P_0 \cdot \frac{\overline{a z_0}}{\overline{a b}} - P_{n+1} \cdot \frac{\overline{z'_{n+1} b}}{\overline{a b}} > 0.$$

Myslíme-li si obě polohy soustavy na téže ose $a\,b$, jest

$$\overline{\zeta b} - \overline{\zeta' b} = \overline{\zeta\,\zeta'} = \overline{z_{r+1}\,z_r} = -\overline{z_r\,z_{r+1}},$$

neboť soustava $P_1, P_2, \ldots P_n$ se posouvá z prvé polohy do druhé o délku $\overline{z_{r+1}\,z_r}$, o niž se posune též výslednice této soustavy. Pak vychází kriterium

$$P_r \cdot \overline{a\,b} > P_{1\ldots n} \cdot \overline{z_r\,z_{r+1}} + P_0 \cdot \overline{a\,z_0} + P_{n+1} \cdot \overline{z'_{n+1}\,b}\,; \tag{14}$$

je-li tomuto kriteriu vyhověno, jest $T_r > T_{r+1}$, t. j. prvá poloha soustavy vyvodí v průřezu x větší sílu posouvající než poloha druhá. Na levé straně nerovnice (14) je poměrně malá síla P_r násobena velkou délkou $\overline{a\,b}$; na pravé straně je v prvém členu velká síla $P_{1\ldots n}$ násobena malou délkou $\overline{z_r\,z_{r+1}}$, v dalších členech jsou pak součiny malé síly a malé délky. Je-li levá strana kriteria značně větší než prvý člen pravé strany, nemusíme k dalším členům hleděti a stačí psáti výminku (14) ve tvaru

$$P_r \cdot \overline{a\,b} > P_{1\ldots n} \cdot \overline{z_r\,z_{r+1}}\,. \tag{14a}$$

Jen není-li mezi oběma stranami poslední nerovnice velkého rozdílu, užijeme původní výminky (14).

Obyčejně začínáme krajním zatížením pravé strany; tu jest $r = 1$ a výminka ve zkráceném tvaru (14a) zní zde

$$P_1 \cdot \overline{a\,b} > P_{1\ldots n} \cdot \overline{z_1\,z_2}\,. \tag{14b}$$

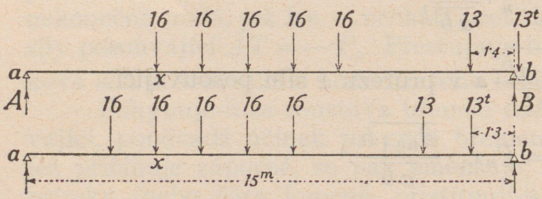
Pravidlem bude této výmince vyhověno. Jen je-li prvé břímě P_1 malé proti ostatním nebo od nich značně vzdáleno, může $\max T$ v průřezu x žádati, aby do průřezu x přišlo břímě druhé neb některé další.

Obecný tvar kriteria (14) platí také, je-li průřez x tak blízko podpory a, že břímě, jež klademe v prvé poloze soustavy do průřezu, za druhé polohy soustavy je již mimo nosník. Toto břímě označíme podle předešlého P_0 a kriterium pro tento případ plyne z nerovnice (14), klademe-li $r = 0$; pak platí

$$P_0 \cdot \overline{a\,b} > P_{1\ldots n} \cdot \overline{z_0\,z_1} + P_0 \cdot \overline{a\,z_0} + P_{n+1} \cdot \overline{z'_{n+1}\,b},$$

což lze upraviti na tvar

$$P_0 \cdot \overline{z_0\,b} > P_{1\ldots n} \cdot \overline{z_0\,z_1} + P_{n+1} \cdot \overline{z'_{n+1}\,b}\,. \tag{14c}$$



Obr. 29.

Příklad 7. Vyvoditi jest vlakem podle normy I (mostního řádu z r. 1904) $\max T$ v průřezu x prostého nosníku o délce $l = 15$ m; průřez má od levé podpory vzdálenost $x = 4$ m.

Nejúčinnější soustavou bude tu soustava, jež začíná největšími břemeny; uvažujeme tedy lokomotivu a tendr. Největší břemena mají býti poblíž průřezu; $\max T$ vyvodí pak pravidlem krajní zatížení pravé strany průřezu (poloha prvá v obr. 29). Naznačme si též polohu (druhou v obr. 29), při níž je druhé břímě v průřezu x, a užijme kriteria v obecném tvaru (14), abychom rozhodli, která z obou poloh soustavy vyvodí větší sílu posouvající. Zde jest $P_0 = 0$, dále

$$P_r = P_1 = 16\,\text{t},\ P_{1\ldots n} = 5 \cdot 16 + 13 = 93\,\text{t},\ P_{n+1} = 13\,\text{t},$$
$$\overline{a\,b} = 15\,\text{m},\ \overline{z_r\,z_{r+1}} = \overline{z_1\,z_2} = 1{,}4\,\text{m},\ \overline{z'_{n+1}\,b} = 1{,}3\,\text{m}.$$

Vypočteme nyní

$$P_r \cdot \overline{a\,b} = 16 \cdot 15 = 240\,\text{mt},$$

$$P_{1\ldots n} \cdot \overline{z_1\,z_2} = 93 \cdot 1{,}4 = 130{,}2\,\text{mt},\ P_{n+1} \cdot \overline{z'_{n+1}\,b} = 13 \cdot 1{,}3 = 16{,}9\,\text{mt}.$$

Jelikož je $240 > 130{,}2 + 16{,}9$, je kriteriu (14) vyhověno; levá strana nerovnice je značně větší než prvý člen na pravé straně, proti němuž je druhý člen poměrně malý, nebylo by tedy zde ani třeba uvažovati druhý člen na pravé straně.

Největší sílu posouvající v průřezu x vyvodí tedy prvá poloha soustavy, t. j. krajní zatížení pravé strany průřezu. Pak jest

$$\max T = A,$$

čítáme-li břímě působící v průřezu k pravé straně, abychom dostali větší sílu posouvající. Momentová výminka rovnováhy vnějších sil k bodu b dá

$$15 \cdot A = 5 \cdot 16 \cdot 8{,}2 + 13 \cdot 1{,}4 = 674{,}2 \text{ mt};$$

z toho plyne

$$\max T = A = \frac{674{,}2}{15} = 44{,}95 \text{ mt}.$$

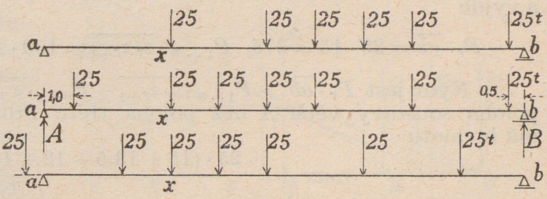
Současně vzniká v průřezu x moment ohybový

$$M_{(m)} = A \cdot x = 179{,}80 \text{ mt}.$$

Příklad 8. Vyšetříme $\max T$ v průřezu o úsečce $x = 4$ m na prostém nosníku o délce $l = 15$ m při zatížení vlakem I podle jednotného mostního řádu.

Umístíme první nápravu lokomotivy do průřezu x, ostatní vpravo (obr. 30). Jako druhou polohu soustavy mějme druhé břímě v x; tu přistoupí napravo na nosník první náprava druhé lokomotivy. V tomto případě jest

$$P_0 = 0,\ P_r = P_1 = 25,\ P_{1\ldots n} = 6 \cdot 25 = 150,$$
$$P_{n+1} = 25 \text{ t},$$
$$\overline{ab} = 15,\ \overline{z_r z_{r+1}} = \overline{z_1 z_2} = 3,\ \overline{z'_{n+1} b} = 0{,}5 \text{ m}.$$



Obr. 30.

Vychází tedy

$$P_r \cdot \overline{ab} = 25 \cdot 15 = 375,\ P_{1\ldots n} \cdot \overline{z_r z_{r+1}} = 150 \cdot 3 = 450,\ P_{n+1} \cdot \overline{z'_{n+1} b} = 25 \cdot 0{,}5 = 12{,}5 \text{ mt}.$$

Jelikož jsme dostali $P_r \cdot \overline{ab} < P_{1\ldots n} \cdot \overline{z_r z_{r+1}} + P_{n+1} \cdot \overline{z'_{n+1} b}$, není kriteriu vyhověno, dá tedy druhá poloha soustavy větší T než poloha prvá. Posuneme-li soustavu tak, aby třetí břímě přišlo do x, vyjde již prvá náprava lokomotivy mimo nosník. Tu jest

$$P_0 = 25,\ P_{1\ldots n} = 6 \cdot 25 = 150,\ P_{n+1} = 0,\ P_r = P_2 = 25 \text{ t},$$
$$\overline{a z_0} = 1,\ \overline{z_r z_{r+1}} = \overline{z_2 z_3} = 1{,}5,\ \overline{ab} = 15 \text{ m},$$

takže vyjde

$$P_r \cdot \overline{ab} = 25 \cdot 15 = 375,\ P_0 \cdot \overline{az_0} = 25,\ P_{1\ldots n} \cdot \overline{z_r z_{r+1}} = 150 \cdot 1{,}5 = 225 \text{ mt},$$

což vyhovuje kriteriu (14). Dá tedy druhá poloha soustavy větší T než poloha třetí. Za druhé polohy soustavy je reakce

$$A = \frac{25 \,.\, (14 + 11 + 9{,}5 + 8 + 6{,}5 + 3{,}5 + 0{,}5)}{15} = 88{,}33 \text{ t}$$

a posouvající síla

$$\max T = A - P_1 = 63{,}33 \text{ t}.$$

Příslušný ohybový moment má hodnotu

$$M_{(m)} = A \cdot x - 25 \cdot 3 = 278{,}33 \text{ mt}.$$

Oba předchozí příklady ukazují, že je-li vzdálenost prvých dvou břemen malá a prvé břímě velké, dá $\max T$ krajní zatížení pravé strany; je-li však vzdálenost prvých dvou břemen větší než vzdálenosti dalších břemen, vede k $\max T$ poloha soustavy, při které je druhé břímě v průřezu x.

Kriteria (14) pro posouvající sílu lze užíti též při výpočtu podporové reakce, jež se rovná posouvající síle při podpoře.

Příklad 9. Určíme největší reakci v levé podpoře nosníku o délce $l = 15$ m při zatížení vlakem I podle jednotného mostního řádu.

Rozhodneme nejprve mezi polohami, kdy je prvé nebo druhé břímě v podpoře a (obr. 31).

Tu jest

$$P_0 = P_r = 25,\ P_{1\,..\,n} = 6 \cdot 25 = 150,\ P_{n+1} = 25 \text{ t},$$
$$\overline{az_0} = 0,\ \overline{ab} = 15,\ \overline{z_r z_{r+1}} = 3,\ \overline{z'_{n+1} b} = 1{,}5 \text{ m},$$

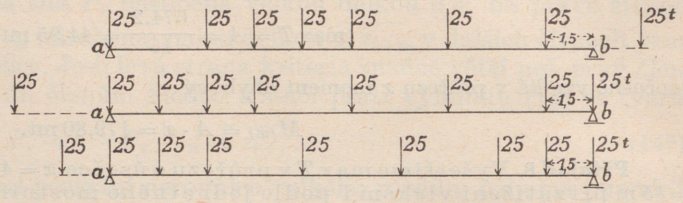
což dá

$$P_r \cdot \overline{ab} = 25 \cdot 15 = 375,\ P_{1\,..\,n} \cdot \overline{z_r z_{r+1}} = 150 \cdot 3 = 450,\ P_{n+1} \cdot \overline{z'_{n+1} b} = 25 \cdot 1{,}5 = 37{,}5 \text{ mt}.$$

Kriteriu (14) není vyhověno, dá tedy druhá poloha soustavy větší reakci A než poloha prvá. Posuneme-li soustavu ještě o jedno břemeno, bude

$$P_0 = P_r = 25,\ P_{1\,..\,n} = 150,\ P_{n+1} = 25 \text{ t};\ \overline{az_0} = 0,$$
$$\overline{z_r z_{r+1}} = 1{,}5,\ \overline{z'_{n+1} b} = 1{,}5 \text{ m}$$

a vyjde



Obr. 31.

$$P_r \cdot \overline{ab} = 25 \cdot 15 = 375,\ P_{1\,..\,n} \cdot \overline{z_r z_{r+1}} = 150 \cdot 1{,}5 = 225,\ P_{n+1} \cdot \overline{z'_{n+1} b} = 25 \cdot 1{,}5 = 37{,}5 \text{ mt}.$$

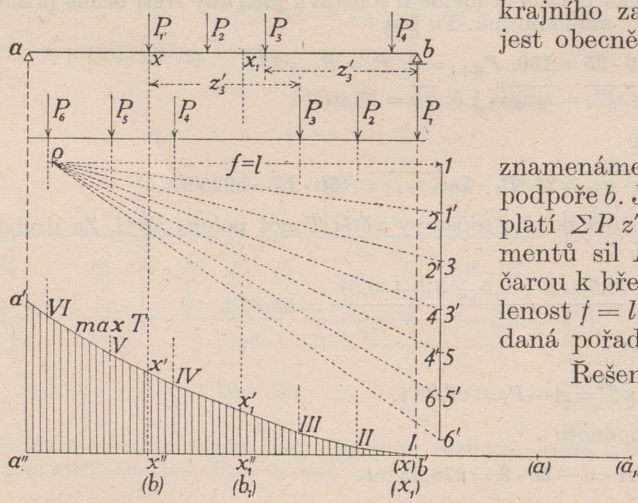
Nyní jest $P_r \cdot \overline{ab} > P_{1\,..\,n} \cdot \overline{z_r z_{r+1}} + P_{n+1} \cdot \overline{z'_{n+1} b}$, což vyhovuje kriteriu (14); dá tedy druhá poloha soustavy větší A než poloha třetí. Proto vychází max A při druhé poloze soustavy a má hodnotu

$$\max A = \frac{25 \cdot (15 + 13{,}5 + 12 + 10{,}5 + 7{,}5 + 4{,}5 + 1{,}5)}{15} = 107{,}5 \text{ t}.$$

β) ***Řešení grafické.*** Stanovíme-li max T ve všech průřezech nosníku a přeneseme je jakožto pořadnice ve svislicích průřezů od libovolné osy, vytvoří koncové body pořadnic *čáru největších sil posouvajících*. Tuto čáru lze graficky jednoduše určiti, vyžadují-li všechny průřezy nosníku pro max T krajního zatížení pravé strany průřezu. Pak jest obecně

$$\max T = A = \frac{\Sigma P z'}{l}, \qquad (15)$$

znamenáme-li písmenem z' ramena sil P k pravé podpoře b. Je-li max $T = \eta$ pořadnice jisté čáry, platí $\Sigma P z' = l\eta$. Součet $\Sigma P z'$ statických momentů sil P k bodu b určíme výslednicovou čarou k břemenům P; volíme-li pólovou vzdálenost $f = l$, bude momentovou pořadnicí hledaná pořadnice η.

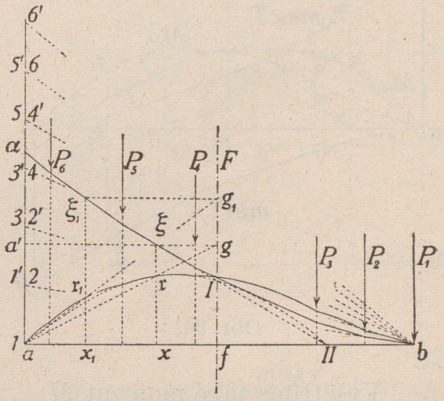


Obr. 32.

Řešení lze upraviti tak, že čáru max T obdržíme jedním rázem jakožto výslednicovou čáru. Obraťme soustavu tak, aby byl paprsek břemene P_1 ve svislici podpory b, ostatní břemena vlevo. K této soustavě rýsujeme pak v pořadí od pravé strany k levé pólovou vzdáleností $f = l$ výslednicovou čáru $I\ II\ III\ \ldots$ tak, aby její pravá krajní strana byla vodorovná (obr. 32); třeba tu jen zvoliti pól o na vodorovnici bodu I. Obrátíme-li též nosník, přenesouce $\overline{ax} = \overline{(x)(a)}$, $\overline{xb} = \overline{(b)(x)}$ a kladouce (x) do bodu I, dostaneme v této poloze vzdálenosti z' mezi paprsky břemen a svislicí průřezu x na

původním nosníku, s níž se ztotožňuje svislice bodu (b). Pak jest $\Sigma P z' = l\,\eta$, znamená-li η pořadnici ve svislici bodu x výslednicové čáry $I\ II\ III\ \ldots$, vztažené k prodloužené pravé krajní straně; je tedy $\max T = \eta = \overline{x''\,x'}$ dáno pořadnicí rýsované čáry výslednicové ve svislici bodu x. Vede-li také v průřezu x_1 k $\max T_1$ krajní zatížení pravé strany, jest opět $\max T_1 = \eta_1 = \overline{x_1''\,x_1'}$ určeno pořadnicí téže výslednicové čáry ve svislici průřezu x_1. Neboť přeneseme-li $\overline{a\,x_1} = \overline{I\,(a_1)}$, $\overline{x_1\,b} = \overline{(b_1)\,I}$, obdržíme k soustavě v obráceném pořadu též nosník obrácený; bod (b_1) je tu na svislici bodu x_1. Pak je součet statických momentů sil po pravé straně k bodu (b_1) dán hodnotou $\Sigma P z' = l \cdot \eta_1$, je-li $\eta_1 = \overline{x_1''\,x_1'}$ pořadnice ve svislici bodu x_1 výslednicové čáry $I\ II\ III\ \ldots$, vztažené k prodloužené pravé krajní straně; podle vzorce (15) je též $\max T_1 = \eta_1$.

Obdobně ve všech průřezech, jež žádají pro $\max T$ krajního zatížení pravé strany, je $\max T$ v měřidle sil dáno pořadnicí obrazce $I\,II\,III\,\ldots a'\,a''$ ve svislici průřezu. Čarou $\max T$ je tedy výslednicová čára k dané soustavě břemen, rýsovaná pólovou vzdáleností $f = l$ k soustavě obrácené a umístěné tak, že břímě P_1 působí ve svislici bodu b; čáru tu vztahujeme k prodloužené pravé krajní straně, kterou je nejlépe rýsovati vodorovně. Pořadnice této čáry v paprsku břemene P_1 dávají pro různé polohy soustavy zároveň levou reakci, vyvozenou příslušnou polohou soustavy; čára $\max T$ je pak zároveň součtovou čarou reakce A. Rýsujíce tuto čáru, můžeme výhodně sčítati úseky břemen $P_1 = \overline{1\,1'}$, $P_2 = \overline{2\,2'}$, $P_3 = \overline{3\,3'}$, ... ve svislici bodu $a \equiv 1$, berouce úseky břemen ve směru obráceném; pól volíme pak v bodě b (obr. 33).



Obr. 33.

V průřezech, v nichž $\max T$ žádá krajního zatížení pravé strany, je příslušný moment ohybový

$$M_{(m)} = A \cdot x = \max T \cdot x. \tag{16}$$

Znázorníme-li graficky $\max T = \eta = \overline{x\,\xi}$ (obr. 30), jest

$$M_{(m)} = \eta \cdot x = \overline{a\,x} \cdot \overline{x\,\xi} = \text{pl. } a\,a'\,\xi\,x.$$

Vyjádřeme jako obvykle $M_{(m)} = f \cdot \mathfrak{y}$, zvolivše přiměřeně pólovou vzdálenost f; pak vyjde

$$\mathfrak{y} = \eta \frac{x}{f},$$

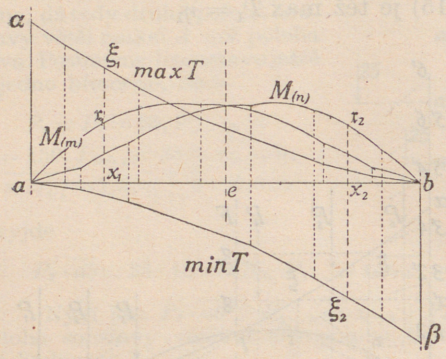
což sestrojíme, přeneseme-li $\overline{a\,f} = f$, vedeme-li bodem f svislici F, dále přímku $\xi\,g \parallel a\,b$ a spojíme-li $a\,g$. Ve svislici bodu x obdržíme tak pořadnici

$$\overline{x\,\mathfrak{x}} = \overline{f\,g} \cdot \frac{\overline{a\,x}}{\overline{a\,f}} = \eta \frac{x}{f} = \mathfrak{y}.$$

Libovolná přímka čáry $\max T$ má rovnici tvaru $\eta = m\,x + n$, jejíž směrnice m je záporná, poněvadž jest úhel každé přímky čáry $\max T$ s osou úseček záporný. Pak vychází $\mathfrak{y} = \eta \frac{x}{f} = \frac{m}{f} x^2 + \frac{n}{f} x$, odpovídá tedy každé přímce čáry $\max T$ v čáře $M_{(m)}$ parabola, jež má osu svislou a obrací dutou stranu dolů, poněvadž je součinitel při x^2 záporný. Z grafického řešení pořadnice $\mathfrak{y}$ plyne, že parabola, odpovídající libovolné

přímce čáry max T, jde bodem a a průsečíky I, II oné přímky s přímkou F a s osou $a\,b$; svislá osa této paraboly půlila by pak vodorovnou tětivu $a\,II$. Čára $M_{(m)}$ skládá se z oblouků parabolických, z nichž každý odpovídá jedné přímce čáry max T.

8. Nejmenší síla posouvající v průřezu x vznikne, zatížíme-li co nejvíce levou stranu a co nejméně stranu pravou. Platí tu pak obdobná pravidla jako pro max T, zaměníme-li pravou a levou stranu průřezu. Pravidlem vyvodí min T krajní zatížení levé strany průřezu; nejúčinnější soustava břemen musí míti nyní u průřezu x, tedy po své pravé straně největší a nejhustější břemena.



Obr. 34.

Mějme průřezy x_1, x_2 souměrné ke středu nosníku; krajní zatížení pravé strany průřezu x_1, jež vyvozuje v něm max T_1, bude souměrné s krajním zatížením levé strany průřezu x_2, jež tu dá min T_2. Poněvadž pak v souměrných průřezech vyvozují souměrná zatížení síly posouvající téže prosté hodnoty, avšak protivného znaménka (jak bylo dovozeno v odst. 5, α), jest min $T_2 = -\max T_1$. Známe-li max T ve všech průřezech, jsou tím dána i min T, neboť min T v libovolném průřezu se rovná záporně vzatému max T v průřezu souměrném. Čára min T plyne pak z čáry max T (obr. 34) záměnou pravé strany za levou (přenesením $\overline{a\,x_1} = \overline{x_2\,b}$) a horní za dolní ($\overline{x_1\,\xi_1} = -\overline{x_2\,\xi_2}$); čarou min T je tedy dvakrát obrácená čára max T.

Vyšetříme také moment $M_{(n)}$, vyvozený v průřezu x týmž zatížením jako min T. Souměrná zatížení dávají v souměrných průřezech x_1, x_2 rovné momenty, pročež jest $M_{2(n)} = M_{1(m)}$. Z čáry $M_{(m)}$ odvodíme čáru $M_{(n)}$, přeneseme-li pořadnici $\overline{x_1\,\xi_1}$ čáry $M_{(m)}$ do souměrného průřezu x_2 jakožto pořadnici $\overline{x_2\,\xi_2}$ čáry $M_{(n)}$; čáru $M_{(m)}$ obracíme tedy jen jednou, vyměňujíce levou stranu s pravou, abychom dostali čáru $M_{(n)}$.

c) *Pohyblivé zatížení rovnoměrné.*

9. Krajní hodnoty momentů ohybových a sil posouvajících. Pohyblivost zatížení rovnoměrného záleží v tom, že je větší nebo menší díl nosníku zatížen.

*α) **Největší moment ohybový a příslušná síla posouvající.*** Zatížení rovnoměrné lze si mysliti jako soustavu břemen nekonečně malých a blízkých. Jde-li o nosník prostý, přičiňuje osamělé břímě ve všech polohách na nosníku k momentu každého průřezu kladně. Každá část zatížení rovnoměrného, jež na nosníku přibude, zvětšuje tedy moment v každém průřezu; největší moment ve všech průřezech nosníku vznikne, je-li celý nosník plně zatížen. K tomu vede i kriterium Winklerovo, jež lze psáti pro zatížení spojité ve způsobu rovnice (8^a) žádající, aby byla průměrná zatížení dílů $\overline{a\,x}$, $\overline{x\,b}$ i celého nosníku rovna; tomu vyhoví jedině zatížení celého nosníku, pro něž se ona průměrná zatížení rovnají vesměs poměrnému zatížení q.

Plné zatížení rovnoměrné lze řešiti jako zatížení stálé;[1]) tu jest $A = \frac{1}{2}\,q\,l$, moment ohybový v průřezu x má hodnotu

$$\max M = \tfrac{1}{2}\,q\,x\,(l - x) = \tfrac{1}{2}\,q\,x\,x' \qquad (17)$$

a příslušná síla posouvající

$$T_{(m)} = q\left(\frac{l}{2} - x\right). \qquad (18)$$

[1]) Viz *Jos. Šolín* „Základy technické nauky o pružnosti a pevnosti“ (Praha 1904), str. 113 a d.

Největší moment vůbec jest uprostřed nosníku; jeho hodnota jest

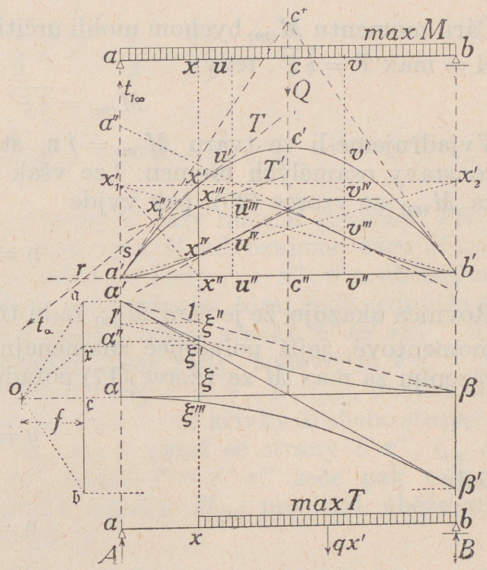
$$\max \max M = \tfrac{1}{8}\, q\, l^2.$$

Graficky (obr. 35) určíme čáry $\max M$ a $T_{(m)}$ jakožto čáry pro plné zatížení rovnoměrné. Celé zatížení nahradíme osamělým břemenem $Q = q\,l$, jež působí ve středu c nosníku $a\,b$; přeneseme určovací úsek $Q = \overline{a\,b}$ do čáry složkové, zvolíme pól o nejlépe na vodorovnici středu c složkové čáry a sestrojíme k břemeni Q výslednicovou čáru $a'\,c^+\,b'$, již uzavřeme základní stranou $a'b' \parallel o\,c$. Čarou momentovou pro rovnoměrné zatížení je parabola, jež se dotýká stran $a'\,c^+$, $c^+\,b'$ v bodech a', b'; je-li základní strana vodorovná, jest osou paraboly svislice středu c a vrchol paraboly c' půlí úsek $\overline{c''\,c^+}$. Parabolu $a'\,c'\,b'$, jež je čarou $\max M$, nazývejme *hlavní parabolou momentovou*. V průřezu x dostaneme

$$\max M = f \cdot \overline{x''\,x'};$$

největší moment vůbec je v průřezu c, kdež jest

$$\max \max M = f \cdot \overline{c''\,c'}.$$



Obr. 35.

Čarou příslušné síly posouvající $T_{(m)}$ je přímka $\alpha'\,\beta'$, stanovená pořadnicemi $\overline{\alpha\,\alpha'} = A = \overline{c\,a}$, $\overline{\beta\,\beta'} = -B = \overline{c\,b}$. V průřezu x je pak síla posouvající $T_{(m)} = \overline{\xi\,\xi'}$ dána pořadnicí přímky $\alpha'\,\beta'$. Přímo bychom určili sílu posouvající v průřezu x, kdybychom vedli pólový paprsek $o\,\xi$ rovnoběžně s tečnou T hlavní momentové paraboly v bodě x'; pak vyjde $T_{(m)} = \overline{c\,\xi}$, v čemž je kontrola řešení.

β) Největší síla posouvající a příslušný moment ohybový. K posouvající síle průřezu x přičiňují pravá břemena kladně, levá záporně. Abychom vyvodili největší kladnou sílu posouvající, zatížíme pravou stranu průřezu $x\,b$ co nejvíce, tedy plně, a levou stranu $a\,x$ co nejméně, t. j. vůbec ji nezatížíme. Z toho plyne, že $\max T$ v průřezu x vyvodí bez výjimky krajní zatížení pravé strany $x\,b$ průřezu x (obr. 35). Za tohoto zatížení, jež má výslednici $q\,x'$ působící uprostřed zatížené délky $\overline{x\,b} = x'$, je v podpoře a reakce

$$A = \frac{1}{l}\, q\, x' \cdot \frac{x'}{2} = \frac{q\, x'^2}{2\, l}$$

a v průřezu x síla posouvající

$$\max T = A = \frac{q\, x'^2}{2\, l}. \tag{19}$$

Odvoďme ze vzorce čáru $\max T$. Z tvaru rovnice plyne, že je čarou $\max T$ parabola, jež má osu svislou a vrchol v počátku souřadnic β. V bodě a jest $x' = l$, což dá

$$\max T_a = \tfrac{1}{2}\, q\, l = \overline{\alpha\,\alpha'};$$

parabola $\max T$ jde tedy bodem α', v němž je její tečnou přímka $\alpha'\,\beta'$, poněvadž $\overline{\alpha\,\alpha'} = \overline{\beta'\,\beta}$. Parabola $\max T$ je tím již určena. Pořadnici její ve svislici průřezu x sestrojíme graficky, protneme-li spojnici $\alpha'\,\beta$ svislicí bodu x v bodě 1, vedeme-li $1\,1' \parallel \alpha\,\beta$; spojnice $\beta\,1'$ určí bod ξ'' čáry $\max T$, neboť z obrazce plyne

$$\overline{\xi\,\xi'} : \overline{\alpha\,1'} = x' : l,\ \overline{\xi\,1} : \overline{\alpha\,\alpha'} = x' : l,$$

z čehož obdržíme dále, jelikož $\overline{\alpha\, 1'} = \overline{\xi\, 1}$,

$$\overline{\xi\,\xi''} : \overline{\alpha\,\alpha'} = x'^2 : l^2, \text{ tedy } \overline{\xi\,\xi'} = \overline{\alpha\,\alpha'} \cdot \frac{x'^2}{l^2} = \frac{q\,l}{2} \cdot \frac{x'^2}{l^2} = \max T.$$

Totéž zatížení vyvodí v průřezu x moment

$$M_{(m)} = A \cdot x = \frac{q\,x\,x'^2}{2\,l}. \tag{20}$$

Čáru momentu $M_{(m)}$ bychom mohli určiti jako při soustavě osamělých břemen. Je totiž $A = \max T = \overline{\xi\,\xi''}$, tedy

$$M_{(m)} = \overline{\xi\,\xi''} \cdot \overline{\alpha\,\xi} = \mathrm{pl} \cdot \alpha\,\alpha''\,\xi''\,\xi.$$

Vyjadřujeme-li ve tvaru $M_{(m)} = f\,\mathfrak{y}$, stanovili bychom $\mathfrak{y}$, jak ukázáno u pohyblivé soustavy osamělých břemen. Lze však též vyjádřiti $\mathfrak{y}$ jakožto funkci x, dosadíme-li za $M_{(m)}$ ze vzorce (20); pak vyjde

$$\mathfrak{y} = \frac{q\,x\,x'^2}{2\,f\,l}. \tag{20a}$$

Rovnice ukazuje, že je čára $M_{(m)}$ řádu třetího. Sestrojíme ji (obr. 35) z hlavní paraboly momentové, jejíž pořadnice znamenejme $\overline{x''\,x'} = y$; jelikož $\max M = f\,y$, vychází dosazením za $\max M$ ze vzorce (17) pořadnice

$$y = \frac{q\,x\,x'}{2\,f},$$

tedy

$$\mathfrak{y} = y\,\frac{x'}{l}.$$

Vedeme-li $x'\,x_1' \parallel a'\,b'$ a spojíme-li body x_1', b', sestrojíme pořadnici

$$\overline{x''\,x'''} = \overline{a'\,x_1'} \cdot \frac{\overline{x''\,b'}}{\overline{a'\,b'}} = y\,\frac{x'}{l} = \mathfrak{y}.$$

Vyšetřme zvláštní body čáry $M_{(m)}$. Z rovnice (20a) odvodíme

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{y}}{\mathrm{d}\,x} = \frac{q}{2f\,l}\,(x'^2 - 2\,x\,x') = \frac{q\,x'}{2\,f\,l}\,(l - 3\,x),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\mathfrak{y}}{\mathrm{d}\,x^2} = \frac{q}{2\,f\,l}\,(-l + 3\,x - 3\,x') = \frac{q}{f\,l}\,(l - 3\,x').$$

Vrchové (kulminační) body čáry $M_{(m)}$ plynou z výminky $\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{y}}{\mathrm{d}\,x} = 0$, tedy

$$x'\,(l - 3\,x) = 0;$$

tomu hoví jednak $x' = 0$, jednak $x = \frac{1}{3}\,l$. Má tedy čára $M_{(m)}$ vodorovnou tečnu v bodě b' a na svislici bodu u, je-li $\overline{a\,u} = \overline{u\,v} = \overline{v\,b}$; pořadnice čáry $M_{(m}$ ve svislici bodu u jest

$$\overline{u''\,u'''} = y\,\frac{x'}{l} = \frac{2}{3}\,\overline{u''\,u}.$$

Obratový bod čáry $M_{(m)}$ stanoven je výminkou $\frac{\mathrm{d}^2\,\mathfrak{y}}{\mathrm{d}\,x^2} = 0$, tedy $l - 3\,x' = 0$; z toho plyne $x' = \frac{1}{3}\,l$, je tedy obratový bod na svislici bodu v, maje pořadnici

$$\overline{v''\,v'''} = y\,\frac{x'}{l} = \frac{1}{3}\,\overline{v''\,v'}.$$

Bod v''' je zároveň středem křivky.

Tečna čáry $M_{(m)}$ v bodě a' ($x = 0$, $x' = l$) má směrnici $\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} = \frac{q\,l}{2\,f}$; touž směrnici má tečna k parabole max M v bodě a', jak plyne z obrazce složkového. Čára $M_{(m)}$ se tedy dotýká v bodě a' hlavní paraboly momentové. Tečna čáry $M_{(m)}$ v bodě v''' ($x = \frac{2}{3}\,l$, $x' = \frac{1}{3}\,l$) má směrnici

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} = -\frac{q\,l}{6\,f};$$

tato tečna protne svislici bodu a v bodě a'', jenž má pořadnici

$$\overline{a'\,a''} = \overline{v''\,v'''} - \overline{a\,v}\cdot\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{3}\,\overline{v''\,v'} + \frac{2}{3}\,l\cdot\frac{q\,l}{6\,f}.$$

V bodě v plyne

$$\overline{v''\,v'} = y = \frac{q\,l^2}{9\,f}, \quad \text{tedy} \quad \overline{a'\,a''} = \frac{1}{3}\,\overline{v''\,v'} + \overline{v''\,v'} = \frac{4}{3}\,\overline{v''\,v'}.$$

Tečnu T' čáry $M_{(m)}$ v bodě x''' odvodíme z tečny T čáry max M graficky. Přetvořujeme-li tečnu T touž konstrukcí, jakou z čáry max M odvozujeme čáru $M_{(m)}$, obdržíme křivku druhého stupně (parabolu), jež prochází body r, s, x''', b' a úběžným bodem $t_{1\infty}$ svislic; neboť z tečny T vzniká tímto přetvořením čára, jejíž jednotlivé body dány jsou průsečíky sdružených paprsků paprskových svazků b' ($a'\,s\,x_1'\ldots$), $t_{1\infty}$ ($r\,s\,x'\ldots$) vzájemně projektivních, poněvadž jsou řady bodové ($a'\,s\,x_1'\ldots$) a ($r\,s\,x'\ldots$) podobny. Křivka druhého stupně, daná body r, s, x''', b', $t_{1\infty}$, dotýká se pak čáry $M_{(m)}$ v bodě x''', hledaná tečna T' je tedy též tečnou oné křivky druhého stupně. Sestrojí se z Pascalova šestiúhelníka $b'\,x'''\,x'''\,t_{1\infty}\,s\,r$, v němž se strany $b'\,x'''$, $t_{1\infty}\,s$ sekou v bodě x_1', strany $x'''\,t_{1\infty}$, $r\,b'$ v bodě x''; tečna $T' \equiv x'''\,x'''$ seče pak tečnu $T \equiv s\,r$ na spojnici $x_1'\,x''$ v bodě x_1''. Prodloužená křivka $M_{(m)}$ prochází úběžným bodem $t_{1\infty}$ svislic, jenž je jejím bodem vratovým.[1])

γ) ***Nejmenší síla posouvající a příslušný moment ohybový.*** Obdobně k max T plyne, že min T vyvozuje krajní zatížení levé strany průřezu, t. j. zatížení délky $\overline{a\,x}$. Toto zatížení je souměrné s krajním zatížením pravé strany průřezu souměrného, pročež se min T v libovolném průřezu rovná záporně vzatému max T v průřezu souměrném. Vzorec pro min T dostaneme pak ze vzorce (19) pro max T, vyměníme-li levou stranu s pravou (x s x') a obrátíme-li znaménko, tedy

$$\min T = -\frac{q\,x^2}{2\,l}. \tag{21}$$

Příslušný moment $M_{(n)}$ rovná se momentu $M_{(m)}$ v průřezu souměrném; tu jest vyměniti pouze x s x' a ze vzorce (20) plyne tím

$$M_{(n)} = \frac{q\,x^2\,x'}{2\,l}. \tag{22}$$

Graficky (obr. 35) plyne čára min T z čáry max T výměnou levé strany nosníku s pravou a horní strany s dolní. Čarou min T je pak parabola, jež se dotýká v bodě α osy $\alpha\,\beta$ a v bodě β' přímky $\alpha'\,\beta'$, čímž jest určena. Čára $M_{(n)}$ plyne z čáry $M_{(m)}$ pouhou výměnou pravé strany s levou, i je s čarou $M_{(m)}$ souměrná ke svislici středu nosníku. Čára $M_{(n)}$ je zase stupně třetího, dotýká se v bodě a' osy $a'\,b'$, v bodě b' hlavní paraboly momentové; na svislici bodu u má bod obratový ve výši $\overline{u''\,u^{IV}} = \frac{1}{3}\,\overline{u''\,u'}$, na svislici bodu v bod vrchový ve výši $\overline{v''\,v^{IV}} = \frac{2}{3}\,\overline{v''\,v'}$. Obecný bod x^{IV} čáry té sestrojíme, vedeme-li $x'\,x_2' \parallel a'\,b'$ a spojíme-li $a'\,x_2'$. Tečny čáry $M_{(n)}$ sestrojily by se obdobně jako tečny čáry $M_{(m)}$.

[1]) Viz *Jos. Šolín* „Theorie zevnitřních sil trámů přímých", seš. I (Praha 1878), str. 51 a d.

Krajní zatížení pravé strany průřezu x, jež vyvozuje $\max T$, a krajní zatížení levé strany téhož průřezu, jež dává $\min T$, doplňují se na plné zatížení nosníku, jež vyvodí v průřezu x sílu $T_{(m)}$. Pak platí

$$\max T + \min T = T_{(m)};$$

dosadíme-li pořadnice příslušných čar, dostaneme

$$\overline{\xi\xi''} + \overline{\xi\xi'''} = \overline{\xi\xi'},$$

z čehož plyne

$$\overline{\xi\,\xi''} = \overline{\xi\,\xi'} - \overline{\xi\,\xi''} = \overline{\xi''\,\xi'}.$$

Pořadnice $\min T$ jsou tedy obsaženy mezi čarou $\max T$ a čarou $T_{(m)}$, i nebylo by čáry $\min T$ potřebí. Obdobně platí o příslušných momentech

$$M_{(m)} + M_{(n)} = \max M$$

čili

$$f \cdot (\overline{x''\,x'''} + \overline{x''\,x^{IV}}) = f \cdot \overline{x''\,x'};$$

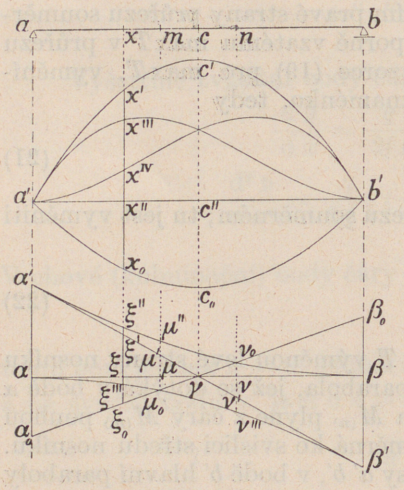
pak jest

$$\overline{x'\,x^{IV}} = \overline{x''\,x'} - \overline{x''\,x'''} = \overline{x'''\,x'}.$$

Pořadnice momentů $M_{(n)}$ jsou tedy též omezeny čarou $M_{(m)}$ a čarou $\max M$.

d) Současné zatížení stálé i pohyblivé.

10. Stálé i pohyblivé zatížení rovnoměrné. *α) Krajní hodnoty momentů ohybových i sil posouvajících.* Stálé i pohyblivé zatížení se vyskytuje v praxi současně u mostů, jejichž stálým zatížením je vlastní váha konstrukce mostové, pohyblivým neb *nahodilým zatížením* pak tlaky kol vozů po mostě pojíždějících (břemena osamělá) nebo tlačenice lidí (zatížení rovnoměrné). Stálé zatížení vyvodí v průřezu x určitý moment ohybový M_0 a sílu posouvající T_0. Pohyblivé zatížení dává v témž průřezu nesčíslné hodnoty momentu M' a síly posouvající T'. Moment M' se může měniti od nuly do $\max M'$, jemuž přísluší posouvající síla $T'_{(m)}$; posouvající síla T' má pak meze $\max T'$ a $\min T'$, jimž odpovídají momenty $M'_{(m)}$, $M'_{(n)}$. Působí-li stálé i pohyblivé zatížení současně, obdržíme krajní hodnoty celkového momentu M a celkové síly posouvající T, sečteme-li hodnoty vyvozené zatížením stálým s příslušnými krajními hodnotami, jež dá zatížení pohyblivé, tedy



Obr. 36.

$$\begin{aligned} \max M &= M_0 + \max M', & T_{(m)} &= T_0 + T'_{(m)}, \\ \min M &= M_0, & T_{(n)} &= T_0, \\ \max T &= T_0 + \max T', & M_{(m)} &= M_0 + M'_{(m)}, \\ \min T &= T_0 + \min T', & M_{(n)} &= M_0 + M'_{(n)}. \end{aligned}$$

Jde-li o pohyblivé zatížení rovnoměrné, žádá $\max M$ vedle stálého zatížení plného zatížení pohyblivého, $\min M$ vyvozuje se pouze zatížením stálým; pro $\max T$ třeba zatížiti nosník zatížením stálým a pravou stranu $\overline{x\,b}$ průřezu zatížením pohyblivým, $\min T$ dá pak zatížení stálé a zatížení pohyblivé po levé straně $\overline{a\,x}$ průřezu.

Sčítání momentů i sil posouvajících, vyvozených stálým i pohyblivým zatížením rovnoměrným, provedeme snadno graficky (obr. 36). Sestrojíme u osy $a'b'$ pro pohyblivé zatížení hlavní momentovou parabolu $a'c'b'$, čáru $a'x'''b'$ momentů $M'_{(m)}$ a čáru $a'x^{IV}b'$ momentů $M'_{(n)}$; po druhé straně osy $a'b'$ narýsujeme parabolu $a'c_0b'$ momentů M_0, jež vyvozuje zatížení stálé, užívajíce ovšem téže vzdálenosti pólové f jako pro zatížení pohyblivé. Pak se sčítají přímo momentové pořadnice, jež odpovídají zatížení stálému i pohyblivému, a vyjde podle hořejších vzorců

$$\max M = f \cdot (\overline{x_0 x''} + \overline{x'' x'}) = f \cdot \overline{x_0 x'}, \quad \min M = f \cdot \overline{x_0 x''},$$

$$M_{(m)} = f \cdot (\overline{x_0 x''} + \overline{x'' x'''}) = f \cdot \overline{x_0 x'''}, \quad M_{(n)} = f \cdot (\overline{x_0 x''} + \overline{x'' x^{IV}}) = f \cdot \overline{x_0 x^{IV}}.$$

Výslední pořadnice momentové jsou omezeny parabolou $a'c_0b'$ jakožto čarou základní a příslušnou čarou pro zatížení pohyblivé, u min M ovšem osou $a'b'$, poněvadž jest $\min M' = 0$.

Podobně postupujeme u sil posouvajících. Přeneseme-li $\overline{\alpha\alpha'} = \overline{\beta'\beta} = \frac{1}{2} q' l$, je přímka $\alpha'\beta'$ čarou $T'_{(m)}$ pro pohyblivé zatížení rovnoměrné, jehož poměrné zatížení je q'; parabola $\alpha'\xi''\beta$ je pak čarou $\max T'$ a parabola $\alpha\xi'''\beta'$ čarou $\min T'$. Čarou síly posouvající T_0 pro stálé zatížení rovnoměrné je přímka $\alpha_0\beta_0$, daná pořadnicemi $\overline{\alpha_0\alpha} = \overline{\beta\beta_0} = \frac{1}{2} q_0 l$, znamená-li q_0 příslušné zatížení poměrné. Sestrojíme-li přímku $\alpha_0\beta_0$ po opačné straně osy $\alpha\beta$, přenášejíce kladné pořadnice dolů, sčítají se přímo síly posouvající, odpovídající zatížení stálému i pohyblivému, a vyjde podle hořejších vzorců

$$T_{(m)} = \overline{\xi_0\xi} + \overline{\xi\xi'} = \overline{\xi_0\xi'}, \quad T_{(n)} = \overline{\xi_0\xi},$$

$$\max T = \overline{\xi_0\xi} + \overline{\xi\xi''} = \overline{\xi_0\xi''}, \quad \min T = \overline{\xi_0\xi} + \overline{\xi\xi'''} = \overline{\xi_0\xi'''}.$$

Celkové síly posouvající jsou omezeny přímkou $\alpha_0\beta_0$ jakožto čarou základní a příslušnou čarou pro zatížení pohyblivé.

β) ***Meze průřezů přechodných.*** Krajní hodnoty síly posouvající pro současné zatížení stálé i pohyblivé mají v některých průřezech stejná znaménka. Tak v průřezu x poblíž levé podpory (obr. 36) je $\max T = \overline{\xi_0\xi''} > 0$, $\min T = \overline{\xi_0\xi'''} > 0$; v průřezu blízkém pravé podpoře je $\max T$ i $\min T$ záporné. V obojích uvedených průřezech nemůže za žádné polohy zatížení pohyblivého vyjíti celková síla posouvající $T = 0$, poněvadž jsou všechny možné hodnoty síly T obsaženy v mezích daných maximem a minimem; v těchto průřezech nemůže tedy nikdy býti průřez přechodný. Poblíž středu nosníku c mají však obě krajní hodnoty síly T protivná znaménka, i může býti v příslušných průřezech za jisté polohy zatížení pohyblivého síla $T = 0$, tedy může tam přijíti průřez přechodný. *Meze průřezů přechodných* jsou dány průřezy, v nichž se jedna krajní hodnota síly posouvající rovná nule; jsou to průřez m, v němž je $\min T = 0$, a průřez n, ve kterém vychází $\max T = 0$.

Graficky jsou dány meze m, n průřezů přechodných průsečíky μ_0, ν_0 přímky $\alpha_0\beta_0$ sil T_0 s parabolou $\alpha\xi'''\beta'$ sil $\min T'$ a s parabolou $\alpha'\xi''\beta$ sil $\max T'$. V průřezu m jest $\max T = \overline{\mu_0\mu''} > 0$, $\min T = 0$; v něm je tedy průřez přechodný, má-li pohyblivé zatížení polohu, jež vyvozuje $\min T'$. V průřezu n vychází $\max T = 0$, $\min T = \overline{\nu_0\nu'''} < 0$; v tom průřezu je průřez přechodný za zatížení, jež vyvozuje $\max T$. Vlevo od m jsou obě krajní hodnoty síly posouvající kladné, vpravo od n pak záporné; mimo úsek $\overline{m\,n}$ nemůže tedy nikdy býti průřez přechodný.

Řešíme-li počtem, stačí určiti jednu mez průřezů přechodných, neboť jsou patrně obě meze ke středu nosníku souměrně položeny. Určíme bod m daný výminkou

$$\min T = T_0 + \min T' = 0.$$

Znamenáme-li $\overline{a\,m} = m$, vyvodí stálé zatížení q_0 podle vzorce (18) sílu

$$T_0 = q_0\left(\frac{l}{2} - m\right)$$

a pohyblivé zatížení rovnoměrné q' podle vzorce (21) sílu

$$\min T' = -\frac{q' m^2}{2 l}.$$

Celkem jest

$$\min T = q_0\left(\frac{l}{2} - m\right) - \frac{q' m^2}{2 l} = 0,$$

což upravíme na tvar

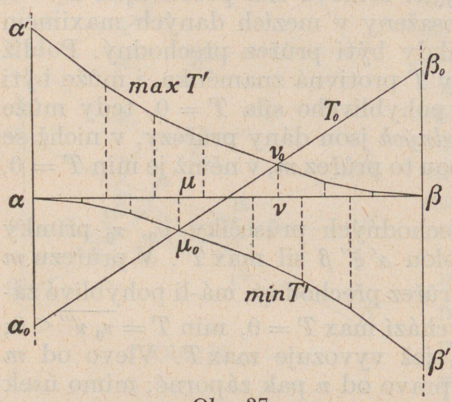
$$\left(\frac{m}{l}\right)^2 + 2\frac{q_0}{q'}\frac{m}{l} - \frac{q_0}{q'} = 0,$$

pokládajíce $\frac{m}{l}$ za neznámou. Řešením poslední rovnice plyne

$$\frac{m}{l} = -\frac{q_0}{q'} + \sqrt{\left(\frac{q_0}{q'}\right)^2 + \frac{q_0}{q'}} = -\frac{q_0}{q'} + \sqrt{\frac{q_0}{q'}\left(\frac{q_0}{q'} + 1\right)}; \qquad (23)$$

záporné znaménko před odmocnidlem zamítáme, poněvadž by dalo výsledek záporný, jenž nemá statického významu. Bod n je s bodem m souměrně položen vzhledem ke středu nosníku, pročež $\frac{m}{l} = \frac{n'}{l}$.

Meze, v nichž se pohybuje průřez přechodný, jsou poměrně tím užší, čím větší je poměr $\frac{m}{l}$; tento poměr závisí pak na poměru $\frac{q_0}{q'}$. Vynecháme-li pod odmocnidlem $\frac{q_0}{q'}$, vyjde $\frac{m}{l} = 0$; čím větší je $\frac{q_0}{q'}$, tím větší je $\frac{m}{l}$, tedy tím užší jsou poměrně meze průřezů přechodných. Poměr $\frac{q_0}{q'}$ se řídí m. j. rozpětím nosníku. U malých nosníků je poměr $\frac{q_0}{q'}$ malý; čím větší je nosník, tím větší je tento poměr a tedy tím užší jsou poměrně meze průřezů přechodných.



Obr. 37.

11. Stálé zatížení rovnoměrné a pohyblivá soustava osamělých břemen. ***α) Meze průřezů přechodných*** určíme nejlépe graficky; podstata řešení je táž jako pro pohyblivé zatížení rovnoměrné. Sestrojíme lomené čáry max T' ($\alpha'\,\nu_0\,\beta$) a min T' ($\alpha\,\mu_0\,\beta'$) vzájemně shodné jakožto čáry výslednicové (viz obr. 33, 34) a od jejich společné osy $\alpha\beta$ (obr. 37) přeneseme ve svislicích podporových pořadnice $\overline{\alpha_0\alpha} = \overline{\beta\,\beta_0} = \frac{1}{2}q_0 l$; body α_0, β_0 spojuje pak přímka posouvajících sil T_0, jež vyvozuje stálé zatížení rovnoměrné q_0. Jak bylo ukázáno v předešlém odstavci, je celkové max T dáno pořadnicemi od přímky $\alpha_0\beta_0$ k čáře $\alpha'\nu_0\beta$ a celkové min T pořadnicemi od přímky $\alpha_0\beta_0$ k čáře $\alpha\mu_0\beta'$. Meze m, n průřezů přechodných jsou zase stanoveny průsečíky μ_0, ν_0 přímky $\alpha_0\beta_0$ s čarami $\alpha\mu_0\beta'$ a $\alpha'\nu_0\beta$.

β) Čára největších momentů. Jako při pohyblivém zatížení rovnoměrném stanovili bychom i zde celkové největší momenty, kdybychom sestrojili čáru max M' pro

pohyblivou soustavu břemen (podle obr. 18, 19) a čáru momentů M_0, vyvozených zatížením stálým, po různých stranách téže osy. Lze však též přímo vyšetřiti čáru největších momentů, jež vyvodí současně zatížení stálé rovnoměrné i pohyblivá soustava osamělých břemen.[1])

Působí-li na nosník $a\,b$ současně plné zatížení rovnoměrné q a soustava osamělých břemen (obr. 38), je v průřezu x mezi břemenem P_r a P_{r+1} moment ohybový

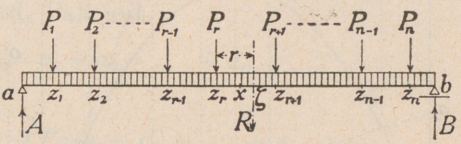
$$M = A\,x - P_1\,(x - z_1) - P_2\,(x - z_2) - \ldots - P_r\,(x - z_r) + \tfrac{1}{2}\,q\,x\,(l - x),$$

je-li $A = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{i=n} P_i\,z_i'$ reakce vyvozená osamělými břemeny. Pak jest

$$M = \frac{x}{l}\sum_{i=1}^{i=n} P_i\,z_i' - \sum_{i=1}^{i=r} P_i\,(x - z_i) + \frac{1}{2}\,q\,x\,(l - x),$$

V každém průřezu vznikne největší moment, je-li některé břímě v průřezu; je-li to pro průřez x břímě P_r, jest $x = z_r$ a tedy

$$\sum_1^r P_i\,(x - z_i) = \sum_1^r P_i\,(z_r - z_i);$$



Obr. 38.

tento součet se nemění, pohybuje-li se soustava břemen. Nahraďme dále

$$z_i' = l - z_i = l - z_r + z_r - z_i = l - x + z_r - z_i;$$

dostaneme tím

$$\sum_1^n P_i\,z_i' = (l - x)\sum_1^n P_i + \sum_1^n P_i\,(z_r - z_i) = (l - x)\sum_1^n P_i + \sum_1^r P_i\,(z_r - z_i) - \sum_{r+1}^n P_i\,(z_i - z_r).$$

Moment M_r pod břemenem P_r má pak hodnotu, jež plyne dosazením do hořejšího vzorce pro moment M; vyjde

$$\begin{aligned} M_r = {} & \frac{x\,(l - x)}{l}\sum_1^n P_i + \frac{x}{l}\sum_1^r P_i\,(z_r - z_i) - \frac{x}{l}\sum_{r+1}^n P_i\,(z_i - z_r) - \\ & - \sum_1^r P_i\,(z_r - z_i) + \frac{1}{2}\,q\,x\,(l - x) = \\ = {} & \frac{x(l - x)}{l}\left(\sum_1^n P_i + \frac{1}{2}\,q\,l\right) - \frac{x'}{l}\sum_1^r P_i\,(z_r - z_i) - \frac{x}{l}\sum_{r+1}^n P_i\,(z_i - z_r). \end{aligned}$$

Ve výsledním vzorci znamenají

$$\sum_1^r P_i\,(z_r - z_i) = \mathfrak{M}_r', \qquad \sum_{r+1}^n P_i\,(z_i - z_r) = \mathfrak{M}_r'' \tag{24a}$$

prosté hodnoty součtu momentů statických všech břemen vlevo a vpravo od P_r vzhledem k paprsku P_r, tedy pro určité břímě hodnoty stálé. Znamenejme kratčeji

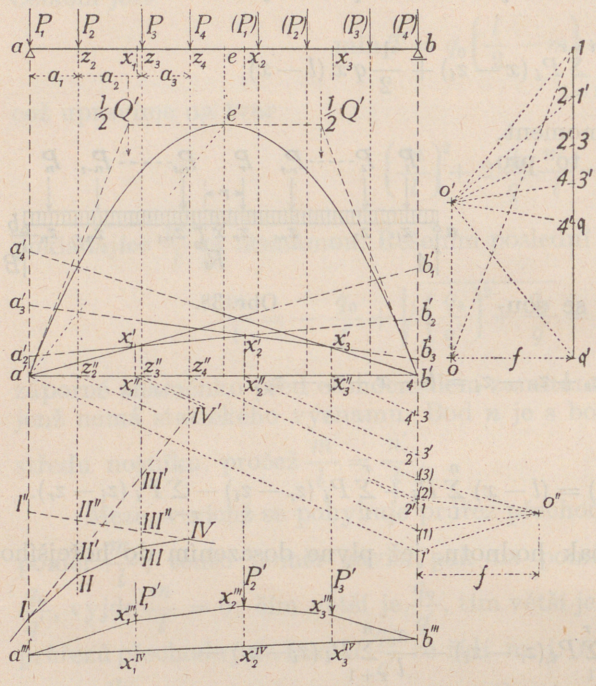
$$\frac{\mathfrak{M}_r'\,x' + \mathfrak{M}_r''\,x}{l} = \mathfrak{M}'; \tag{24b}$$

pak obdržíme

$$M_r = \frac{x\,(l - x)}{l}\left(\sum_1^n P_i + \frac{1}{2}\,q\,l\right) - \mathfrak{M}'. \tag{25}$$

[1]) Srovnej *M. Lévy* „La Statique graphique", I (Paříž 1886), str. 347 a d.; IV (Paříž 1888), str. 334 a d.

Prvý člen v posledním vzorci se mění po zákonu paraboly; lze jej vykládati jakožto moment k plnému zatížení rovnoměrnému celého nosníku, jehož poloviční výslednice jest $\frac{1}{2} Q' = \sum_1^n P_i + \frac{1}{2} q\, l$. Sečtěme v čáře složkové (obr. 39) určovací úseky $P_1 = \overline{1\,1'}$, $P_2 = \overline{2\,2'}$, $P_3 = \overline{3\,3'}$, $P_4 = \overline{4\,4'}$, $\frac{1}{2} q\, l = \overline{\mathrm{q}\,\mathrm{q}'}$, předpokládajíce pohyblivou soustavu břemen P_1, P_2, P_3, P_4, a zvolme pól o ve vzdálenosti f na vodorovnici bodu q'. Strany výslednicové čáry, rovnoběžné s pólovými paprsky $o\,1$, $o\,\mathrm{q}'$, sekou se na paprsku výslednice $\frac{1}{2} Q'$ myšleného rovnoměrného zatížení polovice nosníku $\overline{a\,e}$; paprsek $\frac{1}{2} Q'$ půlí ovšem úsek $\overline{a\,e}$. Tím jest určen vrchol e' paraboly $a'\,e'\,b'$, jejíž pořadnice, násobeny f, dají pro každý průřez prvý člen ve vzorci (25); vrchol e' určíme též přímo, zvolíme-li pól o' ve vzdálenosti f na vodorovnici středu úseku $\overline{1\,\mathrm{q}'}$ a vedeme-li $a'\,e' \parallel o'\,1$.



Obr. 39.

Od pořadnic paraboly $a'\,e'\,b'$ máme odčítati pořadnice momentů $\mathfrak{M}'$ daných vzorcem (24^b), jež se mění pro každé břímě po zákonu přímky. Jde-li o momenty vyvozené za pohybu soustavy pod břemenem P_r, určíme je, vztahujeme-li parabolu $a'\,e'\,b'$ k přímce, jež má ve svislici bodu a ($x = 0$, $x' = l$) pořadnici $\frac{\mathfrak{M}'_r}{f}$ a ve svislici bodu b ($x = l$, $x' = 0$) pořadnici $\frac{\mathfrak{M}''_r}{f}$. Znamená pak $\mathfrak{M}'_r$ ($\mathfrak{M}''_r$) součet statických momentů břemen vlevo (vpravo) od P_r vzhledem k paprsku P_r a určí se výslednicovou čarou k břemenům P_1, P_2, P_3, . . . Bereme-li tu vzdálenost pólovou f, tedy rýsujeme-li na př. z pólu o', sestrojíme výslednicovou čáru $I\ II\ III\ IV$ k daným břemenům P_1, P_2, P_3, P_4; mezi prodlouženou první stranou a čarou výslednicovou jsou na paprscích břemen P_1, P_2, P_3, P_4 pořadnice $\frac{\mathfrak{M}'_r}{f} = 0, \overline{II\ II'}, \overline{III\ III'}, \overline{IV\ IV'}$, mezi prodlouženou poslední stranou a čarou výslednicovou pak v týchž paprscích pořadnice $\frac{\mathfrak{M}''_r}{f} = \overline{I\ I''}, \overline{II\ II''}, \overline{III\ III''}$, 0. Přenesme $\overline{a'\,a'_2} = \overline{II\ II'}$, $\overline{a'\,a'_3} = \overline{III\ III'}$, $\overline{a'\,a'_4} = \overline{IV\ IV'}$; $\overline{b'\,b'_1} = \overline{I\ I''}$, $\overline{b'\,b'_2} = \overline{II\ II''}$, $\overline{b'\,b'_3} = \overline{III\ III''}$. Pak mezi přímkou $a'\,b'_1$ [$a'_2\,b'_2$, $a'_3\,b'_3$, $a'_4\,b'_4$] a parabolou $a'\,e'\,b'$ jsou pořadnice momentů M_r, jež se vyvozují za pohybu soustavy pod břemenem P_1 [P_2, P_3, P_4]. Staticky platí jednotlivé přímky potud, pokud je celá soustava břemen na nosníku. Krajní polohy soustavy jsou: P_1 (v bodě a), P_2, P_3, P_4 a (P_1), (P_2), (P_3), (P_4) (břímě P_4 v bodě b). Má-li býti celá soustava břemen na nosníku, musí býti břímě P_1 mezi paprsky P_1 a (P_1); v těch mezích má tedy přímka $a'\,b'_1$ statickou platnost. Podobně platí staticky přímka $a'_2\,b'_2$ mezi paprsky P_2 a (P_2), přímka $a'_3\,b'_3$ mezi paprsky P_3 a (P_3), přímka $a'_4\,b'$ mezi paprsky P_4 a (P_4).

Přímky $a'b'_1$, $a'_2b'_2$, $a'_3b'_3$, a'_4b' tvoří lomenou čáru $a'x'_1x'_2x'_3b'$, od níž k parabole $a'e'b'$ sahají pořadnice největších momentů. Pod břemenem P_1 vznikne $\max M$, pokud je břímě P_1 mezi podporou a a průřezem x_1, v jehož svislici se sekou přímky $a'b'_1$, $a'_2b'_2$; obdobně se vyvodí pod břemenem P_2 $[P_3, P_4]$ $\max M$, pokud toto břímě působí mezi body x_1 a x_2 $[x_2$ a x_3, x_3 a $b]$, je-li x_2 $[x_3]$ na svislici průsečíku x'_2 $[x'_3]$ přímek $a'_2b'_2$, $a'_3b'_3$ $[a'_3b'_3$, $a'_4b']$. Pod břemenem P_1 vzniká však $\max M$ v oboru tohoto břemene, jímž je tedy úsek $\overline{a\,x_1}$; obdobně je $\overline{x_1\,x_2}$ oborem břemene P_2, $\overline{x_2\,x_3}$ oborem břemene P_3 a $\overline{x_3\,b}$ oborem břemene P_4. Meze oboru břemene P_r dány jsou vzorci (9). Graficky je určíme, rozdělíme-li délku $\overline{a\,b}$ v poměru úseků břemen; přeneseme na př. na svislici bodu b od b' úseky $P_4 = \overline{4\,4'}$, $P_3 = \overline{3\,3'}$, $P_2 = \overline{2\,2'}$, $P_1 = \overline{1\,1'}$ a vedeme $3x''_3 \parallel 2x''_2 \parallel 1x''_1 \parallel 1'a'$. Na svislicích bodů x''_1, x''_2, x''_3 jsou pak vrcholy lomené čáry $a'x'_1x'_2x'_3b'$, čímž je dána kontrola obrazce.

Doplněk momentový $\mathfrak{M}'$ lze vyjádřiti též jinak. Znamenejme a_1 vzdálenost paprsků P_1 a P_2, a_2 vzdálenost paprsků P_2 a P_3 atd. Pak jest

$$z_r - z_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{r-1}, \qquad z_r - z_2 = a_2 + a_3 + \ldots + a_{r-1}, \ldots$$

tedy

$$\mathfrak{M}'_r = \sum_1^r P_i\,(z_r - z_i) = P_1\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_{r-1}) + P_2\,(a_2 + a_3 + \ldots + a_{r-1}) +$$
$$+ \ldots + P_{r-1}\,a_{r-1} = P_1\,a_1 + (P_1 + P_2)\,a_2 + \ldots + (P_1 + P_2 + \ldots + P_{r-1})\,a_{r-1}.$$

Ze vzorců (9) plynou úsečky mezí oborů břemen

$$x_1 = l\frac{P_1}{\sum_1^n P_i}, \qquad x_2 = l\frac{P_1 + P_2}{\sum_1^n P_i}, \ldots;$$

pak lze nahraditi

$$P_1 = \frac{x_1}{l}\sum_1^n P_i, \qquad P_1 + P_2 = \frac{x_2}{l}\sum_1^n P_i, \ldots$$

Dosazením vychází

$$\mathfrak{M}'_r = \frac{\sum_1^n P_i}{l}\,(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{r-1} x_{r-1}).$$

Mysleme si nyní, že v bodech $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ působí břemena

$$P'_1 = \frac{a_1}{l}\sum_1^n P_i, \qquad P'_2 = \frac{a_2}{l}\sum_1^n P_i, \ldots P'_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{l}\sum_1^n P_i; \tag{26}$$

použitím jich vyjde

$$\mathfrak{M}'_r = P'_1 x_1 + P'_2 x_2 + \ldots + P'_{r-1} x_{r-1} = \sum_1^{r-1} P'_i x_i.$$

Moment $\mathfrak{M}''_r$ se týká břemen po pravé straně břemene P_r; obdobně k momentu $\mathfrak{M}'_r$ odvodíme

$$\mathfrak{M}''_r = \sum_r^{n-1} P'_i\,(l - x_i) = \sum_r^{n-1} P'_i\,x'_i.$$

Podle vzorce (24^b) jest nyní

$$\mathfrak{M} = \frac{x'}{l}\sum_1^{r-1} P'_i\,x_i + \frac{x}{l}\sum_r^{n-1} P'_i\,x'_i. \tag{27}$$

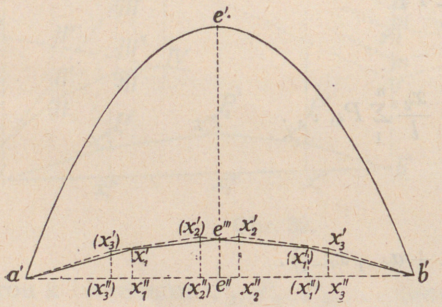
Poněvadž jde o $\max M$ pod břemenem P_r, jež nastane v oboru $\overline{x_{r-1}\, x_r}$ toho břemene, týká se pro každou polohu pohyblivé soustavy $\sum_{1}^{r-1}$ břemen P'_i, jež působí v bodech x_i vlevo od průřezu x, a $\sum_{r}^{n-1}$ břemen P'_i, jež působí v bodech x_i vpravo od x.

Podle vzorce (27) je $\mathfrak{M}'$ moment v průřezu $x \equiv z_r$ (mezi body x_{r-1}, x_r) prostého nosníku $a\,b$, zatíženého v bodech $x_1, x_2, x_3, \ldots$ břemeny $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$; ve vzorci je stanoven zvláště moment, vyvozený levými břemeny, z příslušné reakce pravé a moment, vyvozený pravými břemeny, z příslušné reakce levé. Určíme tedy lomenou čáru základní $a'\, x'_1\, x'_2\, x'_3\, b'$ jedním rázem jakožto výslednicovou čáru k břemenům $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$, jež působí v bodech $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Určovací úseky břemen P'_1, P'_2, P'_3 stanovíme podle vzorců (26), vedeme-li $z''_4\,(3) \parallel z''_3\,(2) \parallel z''_2\,(1) \parallel a'\,1'$; pak jest $P'_1 = \overline{(1)\,1'}$, $P'_2 = \overline{(2)\,(1)}$, $P'_3 = \overline{(3)\,(2)}$. Zvolíme-li pól o'' ve vzdálenosti f od složkové čáry, a to vpravo, jelikož jsou úseky břemen sestaveny v obráceném pořadu, a narýsujeme-li k břemenům P'_1, P'_2, P'_3, jež působí ve svislicích bodů x_1, x_2, x_3, výslednicovou čáru $a'''\, x'''_1\, x'''_2\, x'''_3\, b'''$, souvisí tato čára s čarou $a'\, x'_1\, x'_2\, x'_3\, b'$ po zákonu afinity rovnosti; neboť obě čáry mají býti výslednicovými čarami k týmž silám, rýsovanými touž vzdáleností pólovou.[1]) Přeneseme tedy

$$\overline{x_1^{IV}\, x'''_1} = \overline{x''_1\, x'_1},\quad \overline{x_2^{IV}\, x'''_2} = \overline{x''_2\, x'_2},\quad \overline{x_3^{IV}\, x'''_3} = \overline{x''_3\, x'_3}$$

a tím stanovíme přímo vrcholy čáry $a'\, x'_1\, x'_2\, x'_3\, b'$.

Kdybychom soustavu břemen P_1, P_2, P_3, P_4 obrátili, kladouce břímě P_4 vlevo, ostatní vpravo v pořadu P_3, P_2, P_1, zachovávajíce však vzdálenosti i velikosti břemen, obdrželi bychom patrně lomenou čáru $a'\,(x'_3)\,(x'_2)\,(x'_1)\,b'$ (obr. 40), jež je s čarou $a'\, x'_1\, x'_2\, x'_3\, b'$ souměrná vzhledem ke svislici $e''\,e'$ středu nosníku. Narýsujeme-li obě lomené čáry do téhož obrazce, pak jsou pro danou pohyblivou soustavu osamělých břemen skutečná $\max M$ v jednotlivých průřezech nosníku dána největšími pořadnicemi mezi některou z obou lomených čar a parabolou $a'\,e'\,b'$. Spodní díly obou lomených čar dávají tedy lomenou čáru základní $a'\,x'_1\,e'''\,(x'_1)\,b'$, souměrnou ke svislici středu nosníku, mezi níž a parabolou $a'\,e'\,b'$ jsou svislé pořadnice $\max M$ ve všech průřezech nosníku.



Obr. 40.

Změní-li se soustava tím, že některé břímě s nosníku vystoupí, pozmění se řešení. Vystoupí-li na př. břímě P_4, vynecháme jeho určovací úsek v čáře složkové a břímě samo ve výslednicové čáře *I II III* ... Pak se posune pól o, jenž je na vodorovnici bodu q', vzhůru o P_4 a tím se změní i výška paraboly $a'\,e'\,b'$. Poslední stranou výslednicové čáry *I II III* ... bude strana *III IV*. Pořadnice $\overline{a'\,a'_2}$, $\overline{a'\,a'_3}$ by zůstaly, ve svislici pravé podpory bylo by však přenésti pořadnice, stanovené na paprscích P_1, P_2 výslednicovou čarou *I II III* a prodlouženou stranou *III IV*. Podle toho bychom snadno sestrojili obrazec $\max M$ pro změněnou soustavu.

Odvozené sestrojení platí též, je-li $q = 0$, t. j. odpadne-li zatížení rovnoměrné; tu odpadne ve složkovém obrazci úsek $\overline{q\,q'}$, jinak se sestrojení podstatně nemění. Tímto způsobem určíme tedy též obrazec $\max M$ pro pohyblivou soustavu osamělých břemen, omezený jedinou parabolou a čarou lomenou.

[1]) Důkaz toho je podán dále v odst. 17, α).

γ) ***Největší moment vůbec*** za současného stálého zatížení rovnoměrného a pohyblivé soustavy osamělých břemen lze očekávati pod tím břemenem, pod nímž je $\max\max M$ za samotné pohyblivé soustavy břemen, tedy pravidlem pod břemenem aritmeticky středním. Vyšetříme obecně polohu soustavy, jež dá pod libovolným břemenem P_r největší moment, působí-li na nosník mimo pohyblivou soustavu břemen stálé zatížení rovnoměrné, určené poměrným zatížením q_0 (obr. 38).

Budiž R výslednice všech břemen $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ a ζ její působiště; úsečku $\overline{a\,\zeta}$ znamenáme krátce též ζ. Soustava břemen vyvodí reakci

$$A = R\,\frac{l-\zeta}{l},$$

soustava břemen i zatížení rovnoměrné dá pak v bodě z_r moment ohybový

$$M_r = R\,\frac{l-\zeta}{l}\,z_r - \sum_1^{r-1} P_i\,(z_r - z_i) + \frac{1}{2}\,q_0\,z_r\,(l - z_r)\,.$$

V tomto vzorci je člen $\sum_1^{r-1} P_i\,(z_r - z_i)$ stálý, pohybuje-li se soustava břemen, poněvadž se velikosti břemen i jejich vzdálenosti nemění. Všechna břemena i jejich výslednice se pohybují stejně; nekonečně malému pohybu soustavy odpovídá tedy pohyb výslednice $\mathrm{d}\,\zeta$ rovný pohybu $\mathrm{d}\,z_r$ břemene P_r. Pak jest

$$\frac{\mathrm{d}\,M_r}{\mathrm{d}\,\zeta} = \frac{R}{l}\,(l - \zeta - z_r) + \frac{1}{2}\,q_0\,(l - 2\,z_r)\,.$$

Výminkou $\max M$ jest $\dfrac{\mathrm{d}\,M_r}{\mathrm{d}\,\zeta} = 0$, tedy

$$\frac{R}{l}\,(l - \zeta - z_r) + \frac{1}{2}\,q_0\,(l - 2\,z_r) = 0.$$

Znamenejme $\overline{z_r\,\zeta} = r$; tu jest $\zeta = z_r + r$ a z poslední výminky plyne

$$\frac{R}{l}\,(l - 2\,z_r - r) + \frac{1}{2}\,q_0\,(l - 2\,z_r) = 0;$$

násobíme-li rovnici $-2\,l$, dostaneme

$$2\,z_r\,(2\,R + q_0\,l) = l\,(2\,R + q_0\,l) - 2\,R\,r,$$

z čehož vychází

$$z_r = \frac{l}{2} - \frac{R\,r}{2\,R + q_0\,l}\,. \tag{28}$$

Touto úsečkou je dána poloha břemene P_r a tím i celé soustavy, jež vyvodí spolu se stálým zatížením rovnoměrným $\max M$ pod břemenem P_r. Vynecháme-li zatížení stálé, tedy klademe-li $q_0 = 0$, vyjde

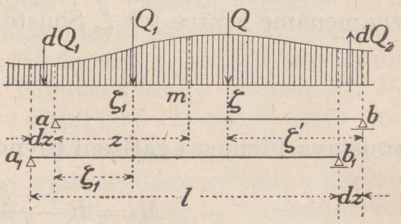
$$z_r = \frac{l}{2} - \frac{r}{2}\,,$$

což souhlasí s větou danou vzorcem (11), určující polohu soustavy břemen, za níž vzniká $\max M$ pod břemenem P_r. Je-li $q_0 > 0$, vyjde $z_r > \dfrac{l}{2} - \dfrac{r}{2}$, je tedy bod z_r blíže středu než za pouhé soustavy břemen.

Největší moment vůbec určíme pak pravidlem, berouce za P_r břímě aritmeticky střední.

12. Stálé zatížení rovnoměrné, pohyblivé zatížení složené ze soustavy osamělých břemen a částečných zatížení rovnoměrných vyšetříme, pokud se týče největšího momentu vůbec. Tento moment se vyskytne pravidlem pod břemenem aritmeticky středním, čítáme-li k pohyblivé soustavě břemen i částečná zatížení rovnoměrná, jež lze nahraditi výslednicemi. Půjde dále o polohu zatížení, při níž vzniká největší moment pod oním břemenem, tedy v určitém místě pohyblivého zatížení.

Předpokládejme obecně na nosníku $a\,b$ jakékoli zatížení pohyblivé, na př. spojité zatížení dané určovací plochou (obr. 41), a stanovme polohu zatížení, jež vede k $\max M$ v určitém místě m daného zatížení. Pro libovolnou polohu nosníku $a\,b$ budiž Q výslednice všeho zatížení na nosníku, Q_1 výslednice zatížení na délce $\overline{a\,m} = z$; působiště výslednic Q, Q_1 znamenejme ζ, ζ_1 a jejich úsečky $\overline{a\,\zeta} = \zeta$, $\overline{\zeta\,b} = \zeta' = l - \zeta$, $\overline{a\,\zeta_1} = \zeta_1$. V bodě m nosníku $a\,b$ je pak moment



Obr. 41.

$$M = Q\frac{\zeta'}{l}z - Q_1(z - \zeta_1).$$

Nekonečně malý pohyb zatížení o úsečku $\mathrm{d}z$ vpravo lze nahraditi pohybem nosníku $a\,b$ vlevo o touž délku $\mathrm{d}z$ do polohy $a_1\,b_1$, myslíme-li si, že zatížení své polohy nemění. Tu přibude k silám Q, Q_1 na části $a\,a_1$ zatížení $\mathrm{d}Q_1$ a ubude v části $b\,b_1$ zatížení $\mathrm{d}Q_2$, o němž si tedy mysleme, že působí vzhůru. Bod m, jenž nemění svého místa v daném zatížení, má nyní od bodu a_1 vzdálenost $z + \mathrm{d}z$. K bodu m na nosníku $a_1\,b_1$ určíme pak moment ohybový M_1 zvláště pro sílu $\mathrm{d}Q_1$ a pro síly Q, $-\mathrm{d}Q_2$. Moment vyvozený břemenem $\mathrm{d}Q_1$ určíme nejlépe, vycházejíce od pravé reakce $\frac{\mathrm{d}Q_1 \cdot \mathrm{d}z}{2l}$; pro břemena $Q, -\mathrm{d}Q_2$ řešíme moment s levé strany průřezu, na níž působí levá reakce

$$A_1 = \frac{Q(\zeta' - \mathrm{d}z) + \frac{1}{2}\mathrm{d}Q_2 \cdot \mathrm{d}z}{l}$$

a břímě Q_1. Celkem jest

$$M_1 = \frac{Q(\zeta' - \mathrm{d}z) + \frac{1}{2}\mathrm{d}Q_2 \cdot \mathrm{d}z}{l}(z + \mathrm{d}z) - Q_1(z - \zeta_1) + \frac{\mathrm{d}Q_1 \cdot \mathrm{d}z}{2l}(l - z - \mathrm{d}z).$$

Nekonečně malému pohybu zatížení vpravo o $\mathrm{d}z$ odpovídá přírůst momentu

$$\mathrm{d}M = M_1 - M = \frac{Q\zeta'\mathrm{d}z}{l} - \frac{Qz\,\mathrm{d}z}{l} - \frac{Q \cdot \mathrm{d}z^2}{l} + \frac{\mathrm{d}Q_2 \cdot (z + \mathrm{d}z)\,\mathrm{d}z}{2l} + \frac{\mathrm{d}Q_1 \cdot (l - z - \mathrm{d}z)\,\mathrm{d}z}{2l}.$$

Proti prvým dvěma členům na pravé straně, jež obsahují nekonečně malé veličiny řádu prvého, lze ostatní členy jakožto nekonečně malé vyšších řádů vynechati a psáti

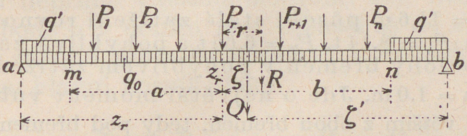
$$\mathrm{d}M = \frac{Q\zeta'\mathrm{d}z}{l} - \frac{Qz\,\mathrm{d}z}{l} \quad \text{nebo} \quad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z} = \frac{Q\zeta'}{l} - \frac{Qz}{l}.$$

Poněvadž se tu mění $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}$ spojitě, žádá $\max M$, aby bylo $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z} = 0$; z toho plyne

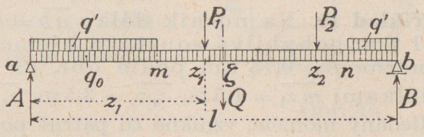
$$\zeta' = z \quad \text{nebo} \quad \overline{a\,m} = \overline{\zeta\,b}.$$

Výsledek, k němuž jsme takto dospěli, je totožný se vzorcem (11), jenž stanovil nejúčinnější polohu pohyblivé soustavy břemen, když šlo o největší moment pod určitým břemenem. Tato shoda plyne již z toho, že lze jakékoli zatížení složiti z osamělých břemen. Platí tedy věta: V určitém místě libovolného zatížení pohyblivého vznikne největší moment, je-li toto místo stejně vzdáleno od jednoho konce nosníku jako paprsek výslednice všeho zatížení na nosníku od druhého konce anebo půlí-li střed nosníku vzdálenost místa, v němž hledáme největší moment, od paprsku výslednice všeho zatížení na nosníku. Tato věta platí ovšem i pro současné zatížení stálé a pohyblivé, neboť lze i stálé zatížení uvažovati jakožto část zatížení pohyblivého, jež působí v celé délce nosníku. Pak znamená podle předchozího odvození Q výslednici všeho zatížení na nosníku, tedy zatížení stálého i pohyblivého dohromady.

Podle odvozené věty určíme obecně[1]) polohu pohyblivého zatížení složeného ze soustavy břemen $P_1, P_2, \ldots P_n$ a částečných zatížení rovnoměrných q' po obou stranách soustavy, jež vyvodí největší moment vůbec, působí-li na nosník mimo to stálé zatížení rovnoměrné q_0 v celé délce nosníku (obr. 42). Největší moment bude pravidlem pod



Obr. 42.



Obr. 43.

břemenem P_r, jež stanovíme jakožto aritmeticky střední břímě v dané soustavě; přesněji bychom měli k osamělým břemenům čítati i obě částečná zatížení rovnoměrná v délkách $\overline{am}$, $\overline{nb}$, jejichž velikostí však neznáme, dokud neurčíme polohu zatížení. Pod břemenem P_r vznikne největší moment, má-li zatížení takovou polohu, že jest $\overline{a\,z_r} = \overline{\zeta\,b}$; zde znamená ζ působiště výslednice Q všeho zatížení na nosníku. Osamělá břemena $P_1, P_2, \ldots P_n$ složme ve výslednici $R = \sum_1^n P$, jejíž paprsek má od paprsku P_r vzdálenost r. Všechno zatížení na nosníku má pak výslednici

$$Q = R + (q_0 + q')\,l - q'\,(a+b)\cdot$$

částečná rovnoměrná zatížení pohyblivá doplňujeme tu na plné zatížení a odčítáme zatížení q' v délce $\overline{mn} = a + b$ (obr. 42). Moment výslednice Q k bodu z_r rovná se součtu momentů všech složek k témuž bodu, tedy za označení $\overline{a\,z_r} = z_r$, $\overline{a\,\zeta} = \zeta$ platí vztah

$$Q\,(\zeta - z_r) = R\,r + (q_0 + q')\,l\left(\frac{l}{2} - z_r\right) - q'\,(a+b)\left(\frac{a+b}{2} - a\right) =$$

$$= R\,r + (q_0 + q')\,\frac{l^2}{2} + q'\,\frac{a^2 - b^2}{2} - (q_0 + q')\,l\,z_r\,.$$

Z výminky $z_r = l - \zeta$, jež stanoví nejúčinnější polohu zatížení, plyne

$$\zeta - z_r = l - 2\,z_r\,;$$

dosazením toho a hodnoty Q vyjde

$$[R + (q_0 + q')\,l - q'\,(a+b)]\,(l - 2\,z_r) = R\,r + (q_0 + q')\,\frac{l^2}{2} +$$
$$+ q'\,\frac{a^2 - b^2}{2} - (q_0 + q')\,l\,z_r.$$

[1]) Srovnej *O. Henkel* „Beitrag zur Ermittlung des grössten Biegungsmomentes...“ v časopise Der Brückenbau r. 1918, str. 189 a d.

Poslední rovnici lze upraviti na tvar

$$[2R + (q_0 + q')l - 2q'(a+b)]\,2z_r = 2Rl + (q_0+q')l^2 - \\ - 2q'(a+b)l - 2Rr - q'(a^2 - b^2),$$

z něhož vypočteme

$$z_r = \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2Rr + q'(a^2 - b^2)}{2R + (q_0+q')l - 2q'(a+b)}. \tag{29}$$

Odpadne-li pohyblivé zatížení rovnoměrné q' na jedné straně, vyjde týmž postupem pro z_r rovnice druhého stupně, jejíž kořen v mezích délky nosníku stanoví nejúčinnější polohu zatížení. Totéž platí, jsou-li částečná pohyblivá zatížení po obou stranách soustavy břemen různá. Vynecháme-li zatížení q', vyjde vzorec (28) pro pohyblivou soustavu břemen a stálé zatížení rovnoměrné.

Známe-li polohu zatížení, stanovíme moment pod břemenem P_r jakožto algebraický součet momentů vnějších sil po levé straně. Je to největší moment pro vypočtenou polohu zatížení, padne-li pod břímě P_r průřez přechodný.

V daném případě můžeme řešiti též přímo číselně, jak ukáže příklad.

Příklad 10. Na nosník délky $\overline{ab} = l = 11{,}6$ m působí stálé zatížení rovnoměrné $q_0 = 2{,}61$ t/m, pohyblivá soustava břemen $P_1 = 8{,}14$ t, $P_2 = 6{,}66$ t a pohyblivé zatížení rovnoměrné $q' = 0{,}75$ t/m podle obr. 43; polohy břemen v pohyblivém zatížení jsou dány délkami $\overline{mz_1} = 1{,}5$ m, $\overline{z_1 z_2} = 3{,}5$ m, $\overline{z_2 n} = 1{,}0$ m. Jde o největší moment vůbec.

Hledaný moment vznikne tu patrně pod větším z obou břemen, tedy pod břemenem P_1. Za libovolné polohy zatížení na nosníku je výslednice všeho zatížení

$$Q = q_0 \cdot \overline{ab} + q'(\overline{ab} - \overline{mn}) + P_1 + P_2 = \\ = 2{,}61 \cdot 11{,}6 + 0{,}75 \cdot 5{,}6 + 8{,}14 + 6{,}66 = 49{,}276 \text{ t}.$$

Nejúčinnější poloha zatížení jest ona, při níž platí

$$\overline{az_1} = \overline{\zeta b} \text{ nebo } \overline{z_1 \zeta} = \overline{ab} - 2 \cdot \overline{az_1} = l - 2z_1,$$

je-li ζ působiště výslednice Q všeho zatížení a $\overline{az_1} = z_1$. Moment výslednice Q k bodu z_1 rovná se součtu momentů všech složek k témuž bodu, tedy

$$Q \cdot \overline{z_1 \zeta} = P_2 \cdot \overline{z_1 z_2} + (q_0 + q') \cdot \overline{ab} \cdot \overline{z_1 e} - q' \cdot \overline{mn} \cdot \left(\frac{\overline{mn}}{2} - \overline{mz_1}\right),$$

je-li e střed nosníku; zatížení q' doplňujeme na plné a odčítáme pak zatížení délky $\overline{mn} = 6{,}0$ m. Dosazením hodnot vyjde

$$49{,}276 \cdot (11{,}6 - 2z_1) = 6{,}66 \cdot 3{,}5 + (2{,}61 + 0{,}75) \cdot 11{,}6 \cdot \left(\frac{11{,}6}{2} - z_1\right) - \\ - 0{,}75 \cdot 6{,}0 \cdot \left(\frac{6{,}0}{2} - 1{,}5\right) = 242{,}621 - 38{,}976\, z_1;$$

z toho plyne

$$(2 \cdot 49{,}276 - 38{,}976)\, z_1 = 49{,}276 \cdot 11{,}6 - 242{,}621 = 328{,}981$$

nebo

$$z_1 = \frac{328{,}981}{59{,}586} = 5{,}521 \text{ m}.$$

Je-li takto určena poloha zatížení, vypočteme úseky

$$\overline{z_1 b} = l - z_1 = 6{,}079 \text{ m}, \quad \overline{z_2 b} = \overline{z_1 b} - \overline{z_1 z_2} = 2{,}579 \text{ m}, \quad \overline{nb} = \overline{z_2 b} - \overline{z_2 n} = 1{,}579 \text{ m}, \\ \overline{am} = \overline{az_1} - \overline{mz_1} = 4{,}021 \text{ m}.$$

Pak vyjde levá reakce

$$A = \frac{q_0 \cdot \overline{ab}}{2} + \frac{q' \cdot \overline{am}}{\overline{ab}} \left(\overline{ab} - \frac{\overline{am}}{2}\right) + \frac{q' \cdot \overline{nb}^2}{2\,\overline{ab}} + \frac{P_1 \cdot \overline{z_1 b} + P_2 \cdot \overline{z_2 b}}{\overline{ab}} = \\ = \frac{2{,}61 \cdot 11{,}6}{2} + \frac{0{,}75 \cdot 4{,}021}{11{,}6} \cdot \left(11{,}6 - \frac{4{,}021}{2}\right) + \frac{0{,}75 \cdot 1{,}579^2}{2 \cdot 11{,}6} + \\ + \frac{8{,}14 \cdot 6{,}079 + 6{,}66 \cdot 2{,}579}{11{,}6} = 23{,}458 \text{ t}.$$

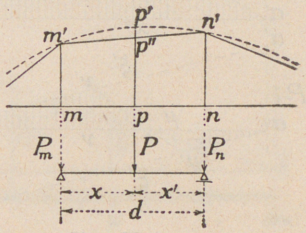
Největší moment vůbec je moment pod břemenem P_1 za stanovené polohy zatížení; jeho hodnota jest

$$\max M = A \cdot \overline{a z_1} - \frac{1}{2} q_0 \cdot \overline{a z_1}^2 - q' \cdot \overline{a m} \cdot \left(\overline{a z_1} - \frac{\overline{a m}}{2} \right) =$$

$$= 23{,}458 \cdot 5{,}521 - \frac{1}{2} 2{,}61 \cdot 5{,}521^2 - 0{,}75 \cdot 4{,}021 \cdot \left(5{,}521 - \frac{4{,}021}{2} \right) = 79{,}149 \text{ mt.}$$

e) Pohyblivé zatížení nepřímé.

13. Obecný tvar příčinkových čar. Z příčinkové čáry pro zatížení přímé odvoditi lze snadno příčinkovou čáru pro zatížení nepřímé, jež se přenáší v každém oddílu po zákonu prostého nosníku do styčných bodů omezujících oddíl. Budiž známa příčinková čára jakékoli statické veličiny S u libovolného nosníku za přímého zatížení, jež může býti obecně křivkou ... $m' p' n'$ ...; stanovíme příčinkovou čáru pro zatížení nepřímé v oddílu $m n$ (obr. 44). Břímě P, jež působí v bodě p v oddílu $m n$, přenáší se do styčných bodů m, n po zákonu prostého nosníku; v bodech m, n působí tedy na hlavní nosník tlaky



Obr. 44.

$$P_m = P \frac{x'}{d}, \qquad P_n = P \frac{x}{d},$$

značíme-li $\overline{m n} = d$, $\overline{m p} = x$, $\overline{p n} = x'$. Je-li $\overline{p p'} = \eta$ příčinková pořadnice pro přímé zatížení břemenem $P = 1$ v bodě p působícím, dá břímě P v témž bodě působící veličinu

$$S = P \eta.$$

Zatížení nepřímé týmž břemenem P v bodě p působí na hlavní nosník ve styčných bodech m, n tlaky P_m, P_n; jsou-li v bodech m, n příčinkové pořadnice $\overline{m m'} = \eta_m$, $\overline{n n'} = \eta_n$, dané příčinkovou čarou pro přímé zatížení, vyvodí patrně nepřímé zatížení veličinu

$$S' = P_m \eta_m + P_n \eta_n = P \frac{x'}{d} \eta_m + P \frac{x}{d} \eta_n.$$

Znázorněme však zase účinek břemene $P = 1$ v paprsku břemene pořadnicí $\overline{p p''} = \eta'$, jež odpovídá zatížení nepřímému; pak je též pro břímě P

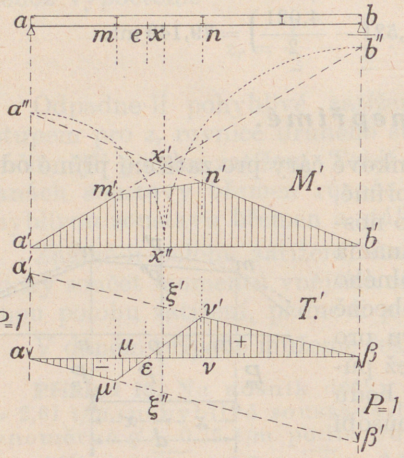
$$S' = P \eta'.$$

Porovnáním výsledků vychází rovnice příčinkové čáry pro zatížení nepřímé v oddílu $m n$

$$\eta' = \frac{x'}{d} \eta_m + \frac{x}{d} \eta_n. \tag{30}$$

Tato rovnice znamená přímku; v bodě m ($x = 0$, $x' = d$) vyjde $\eta' = \eta_m$, v bodě n ($x = d$, $x' = 0$) jest $\eta' = \eta_n$, i prochází příčinková přímka, platná v oddílu $m n$ pro nepřímé zatížení, body m', n' na příčinkové čáře pro přímé zatížení ve svislicích bodů styčných m, n. Totéž platí v každém oddílu. Příčinkovou čarou pro zatížení nepřímé je tedy vždy čára lomená, vepsaná do čáry pro zatížení přímé, s níž má společné body a pořadnice ve svislicích bodů styčných; v každém oddílu je příčinkovou čarou pro nepřímé zatížení přímka.

14. Moment ohybový v průřezu mimostyčném. *α) Příčinková čára* momentu ohybového v mimostyčném průřezu x sestrojí se snadno podle věty právě odvozené. Narýsujeme příčinkovou čáru pro přímé zatížení (obr. 45), jíž je lomená čára $a' x' b'$; příčinková čára pro nepřímé zatížení má s čarou $a' x' b'$ společné body ve svislicích všech bodů styčných a je v každém oddílu přímá. V oddílech, v nichž není průřez x obsažen, platí táž příčinková čára pro zatížení přímé i nepřímé; pouze v oddílu $m n$, kde je průřez x, liší se příčinková čára pro zatížení přímé $m' x' n'$ od čáry pro zatížení nepřímé, jíž je tu přímka $m' n'$.

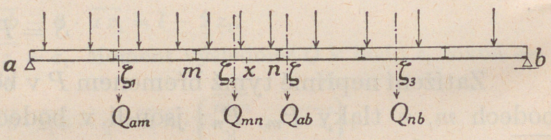


Obr. 45.

β) Největší moment. Příčinkovým obrazcem momentu ohybového k mimostyčnému průřezu x je za nepřímého zatížení čtyrúhelník $a' m' n' b'$, tedy obrazec podstatně jiný než za přímého zatížení. Proto je třeba odvoditi pro nepřímé zatížení nové kriterium, jímž se stanoví nejúčinnější poloha soustavy osamělých břemen. Z tvaru příčinkového obrazce plyne, že max M' v průřezu x vyvodíme, umístíme-li největší a nejhustější břemena poblíž bodů m a n, jedno z nich pak v bodě m nebo n, což ukáže kriterium.

Vyjděme od libovolné polohy soustavy břemen (obr. 46); složme tu břemena, jež působí na díl $\overline{a\,m}$, $\overline{m\,n}$, $\overline{n\,b}$ a celý nosník $\overline{a\,b}$, ve výslednice Q_{am}, Q_{mn}, Q_{nb} a Q_{ab}, jejichž působiště znamenejme $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ a ζ. Budiž dále $\overline{m\,n} = d$, $\overline{m\,x} = d_1$, $\overline{x\,n} = d_2$, $\overline{a\,x} = x$, $\overline{a\,\zeta} = \zeta$, $\overline{a\,\zeta_1} = \zeta_1$, $\overline{a\,n} = n$; v průřezu x v oddílu $m n$ je pak za nepřímého zatížení moment ohybový

$$M' = A\,x - Q_{am}\,(x - \zeta_1) - P_m\,d_1 .$$



Obr. 46.

Stanovíme po zákonu prostého nosníku

$$A = Q_{ab}\,\frac{l-\zeta}{l}, \qquad P_m = Q_{mn}\,\frac{n-\zeta_2}{d},$$

a dostaneme

$$M' = Q_{ab}\,\frac{l-\zeta}{l}\,x - Q_{am}\,(x-\zeta_1) - Q_{mn}\,\frac{n-\zeta_2}{d}\,d_1 . \tag{31}$$

Pohybuje-li se soustava břemen po nosníku, mění se M'. Předpokládejme pohyb nekonečně malý, při němž žádné břímě nepřestoupí přes body a, m, n, b; pak se pohybují všechna břemena i všechny výslednice stejně, tedy

$$\mathrm{d}\,\zeta = \mathrm{d}\,\zeta_1 = \mathrm{d}\,\zeta_2 .$$

Velikosti výslednic se nemění; proto plyne z rovnice (31)

$$\frac{\mathrm{d}\,M'}{\mathrm{d}\,\zeta} = -Q_{ab}\,\frac{x}{l} + Q_{am} + Q_{mn}\,\frac{d_1}{d} .$$

Tato prvá derivace se mění náhle, přestoupí-li některé břímě přes bod m nebo n. Pro max M' platí pak výminka $\dfrac{\mathrm{d}\,M'}{\mathrm{d}\,\zeta} \leqq 0$; dosazením hodnoty prvé derivace a označením úseček dvěma písmeny obdržíme kriterium

$$Q_{am} + Q_{mn} \cdot \frac{\overline{m\,x}}{\overline{m\,n}} \leqq Q_{ab} \cdot \frac{\overline{a\,x}}{\overline{a\,b}} . \tag{32}$$

Tohoto kriteria se užívá jako kriteria Winklerova, jež z něho ostatně plyne, ztotožní-li se průřez x se styčným bodem m.

Příklad 11. Nosník délky $l = 16$ m je dělen styčnými body na pět stejných oddílů po 3,2 m; jde o max M' pro průřez x ve vzdálenosti $\overline{ax} = 5$ m, působí-li na nosník vlak I podle jednotného mostního řádu (obr. 47).

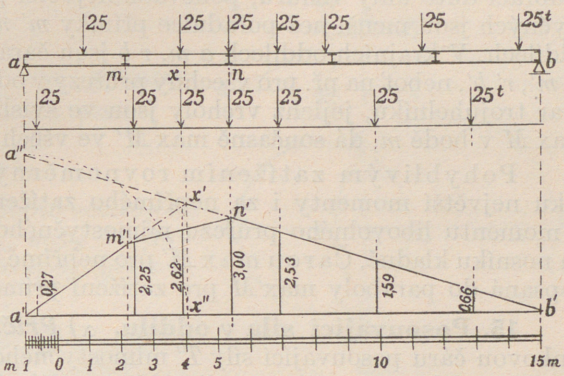
Vyjdeme z polohy soustavy, jež vyvodí max M ve styčném bodě n; je to, jak plyne z kriteria (8), poloha, při které třetí náprava lokomotivy je v bodě n a z druhé lokomotivy je na nosníku pouze jedna náprava. Za této polohy (obr. 47) jest

$$Q_{am} = 25,\ Q_{mn} = \begin{Bmatrix} 25 \\ 50 \end{Bmatrix},\ Q_{ab} = 7 \cdot 25 = 175 \text{ t},$$

čítáme-li břímě, jež působí v bodě n, jednou k pravé, po druhé k levé straně. Dále jest $\overline{mn} = 3{,}2$, $\overline{mx} = 1{,}8$ m, takže vychází

$$Q_{am} + Q_{mn} \cdot \frac{\overline{mx}}{\overline{mn}} = 25 + \begin{Bmatrix} 25 \\ 50 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1{,}8}{3{,}2} = \begin{Bmatrix} 39{,}1, \\ 53{,}1, \end{Bmatrix}$$

$$Q_{ab} \cdot \frac{\overline{ax}}{\overline{ab}} = 175 \cdot \frac{5}{16} = 54{,}7 \text{ t}.$$



Obr. 47.

Kriteriu (32) není vyhověno; soustavu musíme posunouti tak, aby se levá strana kriteria zvětšila, tedy vlevo. Položíme čtvrté břímě do bodu n a dostaneme

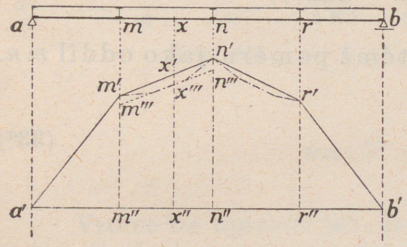
$$Q_{am} = 25,\ Q_{mn} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 75 \end{Bmatrix},\ Q_{ab} = 175 \text{ t},$$

$$Q_{am} + Q_{mn} \cdot \frac{\overline{mx}}{\overline{mn}} = 25 + \begin{Bmatrix} 50 \\ 75 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1{,}8}{3{,}2} = \begin{Bmatrix} 53{,}1, \\ 67{,}2, \end{Bmatrix} \qquad Q_{ab} \cdot \frac{\overline{ax}}{\overline{ab}} = 175 \cdot \frac{5}{16} = 54{,}7 \text{ t}.$$

Nyní je kriteriu vyhověno, tedy druhá poloha soustavy dá max M' v průřezu x. Hodnotu tohoto momentu určíme počtem podle obecné definice momentu, jež vede ke vzorci (31), nebo z příčinkového obrazce momentu M' v mimostyčném průřezu x; v něm odměříme na měřidle délek příčinkové pořadnice η v paprscích břemen za druhé polohy soustavy, jak jsou uvedeny v obr. 47. Potom vypočteme

$$\max M' = \Sigma P \eta = 25 \cdot (0{,}27 + 2{,}25 + 2{,}62 + 3{,}00 + 2{,}53 + 1{,}59 + 0{,}66) = 323{,}0 \text{ mt}.$$

γ) ***Čára největších momentů.*** Ve styčných bodech není rozdílu mezi zatížením přímým a nepřímým; v nich jsou tedy největší momenty pro zatížení přímé i nepřímé tytéž. Za čáru největších momentů pro zatížení nepřímé můžeme pak přibližně a bezpečně pokládati lomenou čáru, jejíž vrcholy jsou ve svislicích bodů styčných určeny pořadnicemi max M v těchto bodech. V bodech mimostyčných dá tato čára hodnoty větší, než skutečně nastanou.



Obr. 48.

Z příkladu 11 je patrno, že max M' v průřezu x žádá jiného zatížení než max M v průřezu n a ovšem též jiného zatížení než max M v průřezu m. Je-li tedy (obr. 48)

$$\max M_m = f \cdot \overline{m'' m'}, \qquad \max M_n = f \cdot \overline{n'' n'},$$

obdržíme při zatížení, jež vyvodí max M' v průřezu x, v průřezech m, n momentové pořadnice

$$\overline{m'' m'''} < \overline{m'' m'},\ \overline{n'' n'''} < \overline{n'' n'},$$

poněvadž toto zatížení nedá v bodech m, n největší momenty. Je-li nosník $a\ b$ zatížen nepřímo, je momentovou čarou v oddílu $m\ n$ přímka $m'''\ n'''$, jež dá v průřezu x moment

$$\max M' = f \cdot \overline{x'' x'''} < f \cdot \overline{x'' x'}.$$

Bereme-li za čáru max M' v oddílu $m\,n$ přibližně přímku $m'\,n'$, dostaneme v mimostyčných průřezech větší momenty, než v nich mohou vzniknouti.

Ve skutečnosti by pro řadu průřezů vlevo od bodu n platilo totéž nejúčinnější zatížení, jež vyvodí max M v bodě n; čarou max M' by byla pro tyto průřezy přímka, jež jde bodem n' a má pořadnice ostatní menší než přímka $m'\,n'$. Pro jinou řadu průřezů by platila jiná poloha soustavy, tedy by byla pro ně jiná přímka čarou max M'. Je proto přesnou čarou max M' v oddílu $m\,n$ čára lomená, jež prochází body m', n' a obrací duté úhly vzhůru, poněvadž největší pořadnice momentové v bodech mimostyčných jsou menší než pořadnice přímky $m'\,n'$. Podobně je tomu ve všech vnitřních oddílech. V krajních oddílech $a\,m$, $r\,b$ jsou čarami největších momentů přesně přímky $a'\,m'$, $r'\,b'$, neboť na př. pro všechny průřezy v oddílu $a\,m$ mají příčinkové čáry momentů tvar trojúhelníků, jejichž vrcholy jsou ve svislici bodu m. Pak zatížení, jež vyvozuje max M v bodě m, dá současně max M' ve všech průřezech oddílu $a\,m$.

Pohyblivým zatížením rovnoměrným vyvodíme ve všech průřezech nosníku největší momenty i za nepřímého zatížení, zatížíme-li plně celý nosník; neboť k momentu libovolného průřezu mimostyčného přičiňují břemena ve všech polohách na nosníku kladně. Čarou max M' pro nepřímé zatížení je pak přesně čára lomená, vepsaná do paraboly max M pro zatížení přímé.

15. Posouvající síla v oddílu. *α) Příčinková čára a poloha obojetná.* Příčinkovou čáru posouvající síly T' mimostyčného průřezu x v oddílu $m\,n$ za nepřímého zatížení obdržíme z čáry $\alpha\,\xi''\,\xi'\,\beta$ pro přímé zatížení (obr. 45), vepíšeme-li do ní v oddílu $m\,n$ přímku, stanovenou průsečíky μ', ν' čáry $\alpha\,\xi''\,\xi'\,\beta$ se svislicemi bodů m, n; v dílech nosníku $a\,m$, $n\,b$ platí táž příčinková čára pro přímé i nepřímé zatížení, neboť je v každém již příčinkovou čarou pro přímé zatížení přímka. Čarou síly posouvající průřezu x pro nepřímé zatížení je pak čára $\alpha\,\mu'\,\nu'\,\beta$; přímky $\alpha\,\mu' \parallel \nu'\,\beta$ mají svislou vzdálenost $\overline{\alpha\,\alpha'} = \overline{\beta'\,\beta} = P = 1$. Čára $\alpha\,\mu'\,\nu'\,\beta$ nezávisí na poloze průřezu x v oddílu $m\,n$, z čehož plyne, že je síla posouvající ve všech průřezech oddílu $m\,n$ za libovolného zatížení nepřímého táž; tento výsledek vychází i z toho, že se zatížení nepřímé přenáší na hlavní nosník osamělými břemeny ve styčných bodech. Lze tedy mluviti o *posouvající síle* celého *oddílu* $m\,n$.

V oddílu $m\,n$ jest obojetná (neutrálná) poloha břemene e, určená průsečíkem ε přímky $\mu'\,\nu'$ s osou $\alpha\,\beta$; působí-li břímě v bodě e, přenášejíc se na hlavní nosník nepřímo v bodech m, n, je v celém oddílu $m\,n$ posouvající síla $T' = 0$. Z podobnosti trojúhelníků $\alpha\,\mu'\,\varepsilon$, $\beta\,\nu'\,\varepsilon$ vychází

$$\frac{\overline{\alpha\,\varepsilon}}{\overline{\beta\,\varepsilon}} = \frac{\overline{\mu\,\mu'}}{\overline{\nu\,\nu'}} = \frac{\overline{\mu\,\varepsilon}}{\overline{\nu\,\varepsilon}} \quad \text{nebo} \quad \frac{\overline{a\,e}}{\overline{b\,e}} = \frac{\overline{m\,e}}{\overline{n\,e}};$$

rozděluje tedy obojetná poloha e nosník $a\,b$ v témž poměru jako oddíl $m\,n$. Z úměry

$$\frac{\overline{a\,e}}{\overline{e\,b}} = \frac{\overline{m\,e}}{\overline{e\,n}} \tag{33a}$$

plyne

$$\frac{\overline{a\,e}}{\overline{a\,e} + \overline{e\,b}} = \frac{\overline{m\,e}}{\overline{m\,e} + \overline{e\,n}},$$

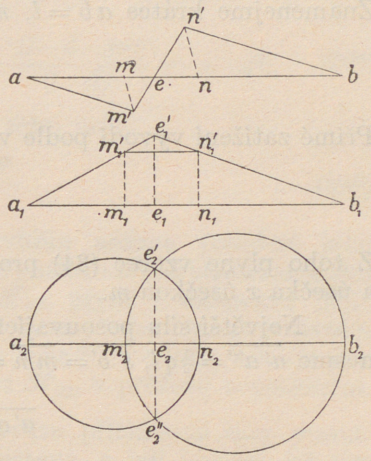
což dá

$$\frac{\overline{a\,e}}{\overline{a\,b}} = \frac{\overline{m\,e}}{\overline{m\,n}} = \frac{\overline{a\,e} - \overline{m\,e}}{\overline{a\,b} - \overline{m\,n}} = \frac{\overline{a\,m}}{\overline{a\,b} - \overline{m\,n}};$$

jest tedy

$$\overline{a\,e} = \frac{\overline{a\,b} \cdot \overline{a\,m}}{\overline{a\,b} - \overline{m\,n}}, \qquad \overline{m\,e} = \frac{\overline{m\,n} \cdot \overline{a\,m}}{\overline{a\,b} - \overline{m\,n}}. \tag{33b}$$

Grafické stanovení obojetné polohy e je dáno příčinkovou čarou; lze je provésti obecněji (obr. 49) tak, že vedeme body a, b libovolné rovnoběžky $a\,m' \parallel b\,n'$, jež protneme přímkami $m\,m' \parallel n\,n'$; spojnice $m'\,n'$ určuje polohu e. Jiné sestrojení (obr. 49) plyne z vlastnosti, že bod e_1 rozděluje délky $\overline{a_1 b_1}$, $\overline{m_1 n_1}$ v témž poměru; vedeme-li $m_1 m_1' \parallel n_1 n_1'$, $m_1' n_1' \parallel a_1 b_1$ a spojíme-li $a_1 m_1'$, $b_1 n_1'$, sekou se spojnice v bodě e_1', načež přímka $e_1' e_1 \parallel m_1' m_1$ stanoví obojetnou polohu e_1. Konečně plyne z rovnice (33^a)



Obr. 49.

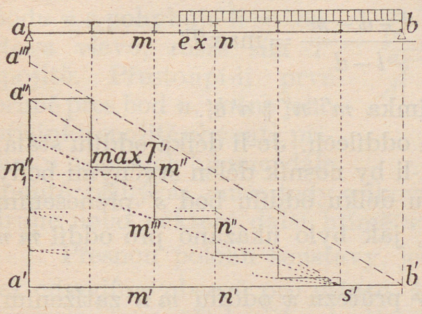
$$\overline{a\,e} \cdot \overline{e\,n} = \overline{m\,e} \cdot \overline{e\,b},$$

čemuž vyhovíme, opíšeme-li kružnice nad průměry $\overline{a_2 n_2}$, $\overline{m_2 b_2}$ a průsečíky e_2', e_2'' spojíme; pak platí

$$\overline{a_2 e_2} \cdot \overline{e_2 n_2} = \overline{e_2 e_2'}^2 = \overline{m_2 e_2} \cdot \overline{e_2 b_2},$$

je tedy v bodě e_2 poloha obojetná. Z tohoto sestrojení i z poslední rovnice plyne, že jsou $a_2 n_2$, $m_2 b_2$ dvojiny involuce eliptické, jejímž středem je bod e_2; potence této involuce jest $\overline{a_2 e_2} \cdot \overline{n_2 e_2} = -\overline{e_2 e_2'}^2$.

β) ***Pohyblivé zatížení rovnoměrné,*** jež působí nepřímo na hlavní nosník $a\,b$, vyvodí v oddílu $m\,n$ největší sílu posouvající, je-li plně zatížen díl $e\,b$, jenž přičiňuje k posouvající síle oddílu $m\,n$ kladně; díl $a\,e$, jenž přičiňuje k téže posouvající síle záporně, zůstane nezatížen (obr. 50). Uvedené zatížení, jehož výslednice $q \cdot \overline{e\,b}$ působí ve vzdálenosti $\frac{1}{2}\overline{e\,b}$ od pravé podpory, vyvodí v levé podpoře reakci



Obr. 50.

$$A = \frac{q \cdot \overline{e\,b}^2}{2\,\overline{a\,b}}.$$

Zatížení v oddílu $m\,n$ přenáší se na nosník $a\,b$ v bodech m, n osamělými břemeny P_m, P_n, jež se určí jako podporové tlaky prostého nosníku $m\,n$, zatíženého rovnoměrně v délce $\overline{e\,n}$. Obdobně k reakci A jest

$$P_m = \frac{q \cdot \overline{e\,n}^2}{2\,\overline{m\,n}}.$$

Ve všech průřezech oddílu $m\,n$ je pak síla posouvající

$$\max T' = A - P_m = \frac{q}{2}\left(\frac{\overline{e\,b}^2}{\overline{a\,b}} - \frac{\overline{e\,n}^2}{\overline{m\,n}}\right).$$

Vzorec lze upraviti tak, že neobsahuje obojetné polohy e, kterou pak není třeba určovati. Z vlastnosti obojetné polohy plyne

$$\frac{\overline{e\,b}}{\overline{a\,b}} = \frac{\overline{e\,n}}{\overline{m\,n}} = \frac{\overline{e\,b} - \overline{e\,n}}{\overline{a\,b} - \overline{m\,n}} = \frac{\overline{n\,b}}{\overline{a\,b} - \overline{m\,n}};$$

je tedy

$$\frac{\overline{e\,b}^2}{\overline{a\,b}} - \frac{\overline{e\,n}^2}{\overline{m\,n}} = \frac{\overline{e\,b}}{\overline{a\,b}}(\overline{e\,b} - \overline{e\,n}) = \frac{\overline{e\,b}}{\overline{a\,b}} \cdot \overline{n\,b} = \frac{\overline{n\,b}^2}{\overline{a\,b} - \overline{m\,n}},$$

Knihovna
Knižního oddělení
ministerstva informací

čímž vychází

$$\max T' = \frac{q}{2} \cdot \frac{\overline{n\,b}^2}{\overline{a\,b} - \overline{m\,n}}.$$

Znamenejme krátce $\overline{a\,b} = l$, $\overline{m\,n} = d$, $\overline{a\,m} = m$; tu jest $\overline{n\,b} = l - m - d$ a

$$\max T' = \frac{q}{2} \cdot \frac{(l-d-m)^2}{l-d}. \tag{34}$$

Přímé zatížení vyvodí podle vzorce (19) v průřezu x sílu

$$\max T = \frac{q\,(l-x)^2}{2\,l}.$$

Z toho plyne vzorec (34) pro zatížení nepřímé, nahradí-li se rozpětí l délkou $l-d$ a úsečka x úsečkou m.

Největší sílu posouvající lze stanoviti podle vzorce (34) graficky (obr. 50). Přenesme $\overline{a'\,a'''} = \frac{1}{2}q\,l$, $\overline{s'\,b'} = \overline{m\,n} = d$ a veďme $s'\,a'' \parallel b'\,a'''$; tu jest

$$\overline{a'\,a''} = \overline{a'\,a'''} \cdot \frac{\overline{a'\,s'}}{\overline{a'\,b'}} = \frac{1}{2}q\,(l-d),$$

což lze ovšem též přímo přenésti, je-li délka oddílu stálá. Přímka $s'\,a''$ utíná na svislici bodu m pořadnici

$$\overline{m'\,m''} = \overline{a'\,a''} \cdot \frac{\overline{m'\,s'}}{\overline{a'\,s'}} = \frac{q}{2}\,(l-d-m).$$

Vedeme-li pak $m'\,m_1'' \parallel a'\,b'$ a spojíme-li s' s m_1'', obdržíme ve svislici bodu m pořadnici

$$\overline{m'\,m'''} = \overline{a'\,m_1''} \cdot \frac{\overline{m'\,s'}}{\overline{a'\,s'}} = \frac{q}{2}(l-d-m) \cdot \frac{l-d-m}{l-d} = \max T'.$$

Čarou největší síly posouvající v oddílu $m\,n$ je přímka $m'''\,n'' \parallel a'\,b'$.

Obdobně sestrojíme $\max T'$ ve všech ostatních oddílech. Je-li délka oddílu stálá, platí bod s' a přímka $s'\,a''$ pro všechny oddíly. Byl-li by nosník dělen styčnými body v oddíly různé délky, sestrojili bychom pro každou délku oddílu bod s' přenesením $\overline{s'\,b'} = d$ a přímku $s'\,a'' \parallel b'\,a'''$; dále bychom řešili, jak bylo ukázáno pro oddíl $m\,n$ (obr. 50).

Stanovíme též moment $M'_{(m)}$, jenž vzniká v průřezu x oddílu $m\,n$ zatížením, které vyvozuje $\max T'$; platí tu

$$M'_{(m)} = A \cdot \overline{a\,x} - P_m \cdot \overline{m\,x} = \frac{q}{2}\left(\frac{\overline{e\,b}^2}{\overline{a\,b}} \cdot \overline{a\,x} - \frac{\overline{e\,n}^2}{\overline{m\,n}} \cdot \overline{m\,x}\right).$$

Použijeme-li stanovené již hodnoty poměrů $\frac{\overline{e\,b}}{\overline{a\,b}} = \frac{\overline{e\,n}}{\overline{m\,n}}$, dostaneme

$$M'_{(m)} = \frac{q}{2}\left(\frac{\overline{e\,b}}{\overline{a\,b}}\right)^2 (\overline{a\,b} \cdot \overline{a\,x} - \overline{m\,n} \cdot \overline{m\,x}) =$$

$$= \frac{q}{2} \cdot \frac{\overline{n\,b}^2}{(\overline{a\,b} - \overline{m\,n})^2} (\overline{a\,b} \cdot \overline{a\,x} - m\,n \cdot \overline{m\,x}). \tag{35}$$

Proměnný je tu pouze výraz

$$\overline{a\,b} \cdot \overline{a\,x} - \overline{m\,n} \cdot \overline{m\,x} = \overline{a\,b} \cdot \overline{a\,x} - \overline{m\,n} \cdot (\overline{a\,x} - \overline{a\,m}) = (\overline{a\,b} - \overline{m\,n}) \cdot \overline{a\,x} + \overline{a\,m} \cdot \overline{m\,n},$$

jenž je kladný, poněvadž jest $\overline{ab} > \overline{mn}$; hodnota proměnného výrazu je tím větší, čím je větší úsečka $\overline{ax}$. Moment $M'_{(m)}$ se tedy v oddílu mn mění po zákonu přímky a má největší hodnotu v pravém styčném bodě n; položíme-li $x \equiv n$, vyjde

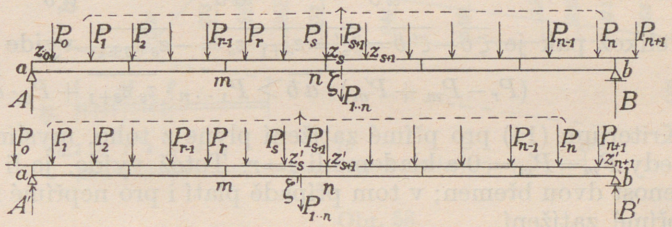
$$\max M'_{(m)} = \frac{q}{2} \cdot \frac{\overline{nb}^2}{(\overline{ab} - \overline{mn})^2} (\overline{ab} \cdot \overline{an} - \overline{mn}^2) = \frac{q}{2} \cdot \frac{(l-d-m)^2}{(l-d)^2} (l \cdot n - d^2). \quad (36^a)$$

Počítáme-li předem $\max T'$ ze vzorce (34), můžeme z toho určiti

$$\max M'_{(m)} = \max T' \cdot \frac{l \cdot n - d^2}{l-d}. \quad (36^b)$$

Nejmenší sílu posouvající v libovolném oddílu určíme podobně jako $\max T'$; třeba jen, jak bylo ukázáno u přímého zatížení, vyměniti levou stranu nosníku s pravou a změniti znaménko. Příslušný moment $M'_{(n)}$ plyne z momentu $M'_{(m)}$ pouhou výměnou veličin, které se týkají pravé a levé strany nosníku. Jest ovšem též $\min T'$ v libovolném oddílu rovno záporně vzatému $\max T'$ v oddílu souměrném a moment $M'_{(n)}$ v libovolném průřezu se rovná momentu $M'_{(m)}$ v průřezu souměrném.

*γ) **Pohyblivá soustava osamělých břemen.*** Z tvaru příčinkové čáry posouvající síly T' (obr. 45) plyne přibližně nejúčinnější soustava a její poloha, jež vyvodí v oddílu mn největší sílu posouvající. Délkou $\overline{eb}$ (případně $\overline{mb}$) třeba obsáhnouti co nejvíce břemen; břemena největší a nejhustější mají býti poblíž bodu n a jedno z těchto břemen v bodě n. Jsou-li všechna břemena vpravo od bodu n a pohybuje-li se soustava vlevo, roste síla T' spojitě. Přestoupí-li prvé břímě přes bod n, počne jeho příčinku spojitě ubývati, příčinku ostatních břemen dále spojitě přibývá; může tedy celková síla T' dále růsti. Vznikne pak $\max T'$, je-li prvé, druhé nebo některé další břímě v bodě n.



Obr. 51.

Přesnou polohu soustavy, jež vyvodí v oddílu mn $\max T'$, určíme z kriteria*), jež odvodíme obecně pro případ, že soustava přestoupí až do dílu am. V prvé poloze soustavy (obr. 51) budiž v bodě n břímě P_s a na nosníku břemena $P_0, P_1, P_2, \ldots P_n$. Rozhodneme, dá-li větší T' tato poloha nebo poloha druhá, za které je v bodě n břímě P_{s+1}; přitom je břímě P_0 již mimo nosník, napravo pak břímě P_{n+1} na nosník přistoupí. Další vývody platí, i když vystoupí z nosníku nebo na nosník přistoupí více břemen, je-li P_0 (P_n) výslednice břemen, která z nosníku vystoupí (na nosník přistoupí). Za druhé polohy přestoupí břímě P_r (nebo více břemen, jež mají výslednici P_r) z oddílu mn nalevo od bodu m. Břemena $P_1, P_2, \ldots P_n$, jež jsou v obou polohách na nosníku, mají výslednici $P_{1..n}$, jejíž působiště na nosníku v prvé poloze je ζ, v druhé poloze ζ'. Působiště břemen v prvé poloze jsou $z_0, \ldots z_s, z_{s+1} \ldots$, v druhé poloze $\ldots z'_s, z'_{s+1}, \ldots z'_{n+1}$,

Prvá poloha soustavy dá v oddílu mn posouvající sílu

$$T'_s = A - P_0 - P_1 - \ldots - P_{r-1} - P_m,$$

kde

$$A = P_{1..n} \cdot \frac{\overline{\zeta b}}{\overline{ab}} + P_0 \cdot \frac{\overline{z_0 b}}{\overline{ab}}$$

*) Viz *N. Zelený* „Obecné kriterium pro maximum posouvající síly při nepřímém obtížení“ (Technický obzor 1943, str. 49).

a P_m je složka zatížení v oddílu mn do bodu m, tedy $P_m = \frac{1}{a}\overset{n}{\underset{m}{\Sigma_1}}(P)_n$, znamená-li $(P)_n$ statický moment břemene P (v oddílu mn působícího) k bodu n. Dosazením vyjde

$$T'_s = P_{1\ldots n}\cdot\frac{\overline{\zeta b}}{\overline{a b}} - P_0\cdot\frac{\overline{a z_0}}{\overline{a b}} - P_1 - \ldots - P_{r-1} - P_m.$$

Pro druhou polohu soustavy dostaneme v oddílu mn posouvající sílu

$$T'_{s+1} = A' - P_1 - \ldots - P_{r-1} - P_r - P'_m,$$

při čemž jest

$$A' = P_{1\ldots n}\cdot\frac{\overline{\zeta' b}}{\overline{a b}} + P_{n+1}\cdot\frac{\overline{z'_{n+1} b}}{\overline{a b}},\quad P'_m = \frac{1}{a}\overset{n}{\underset{m}{\Sigma_2}}(P)_n;$$

Σ_2 se týká druhé polohy soustavy. Vyjde tu

$$T'_{s+1} = P_{1\ldots n}\cdot\frac{\overline{\zeta' b}}{\overline{a b}} + P_{n+1}\cdot\frac{\overline{z'_{n+1} b}}{\overline{a b}} - P_1 - \ldots - P_{r-1} - P_r - P'_m.$$

Vyšetříme podmínku, za které je $T'_s > T'_{s+1}$ neboli $T'_s - T'_{s+1} > 0$. Dosazením hodnot dostaneme

$$P_{1\ldots n}\cdot\frac{\overline{\zeta b} - \overline{\zeta' b}}{\overline{a b}} - P_0\cdot\frac{\overline{a z_0}}{\overline{a b}} - P_{n+1}\cdot\frac{\overline{z'_{n+1} b}}{\overline{a b}} + P_r - P_m + P'_m > 0.$$

Jelikož pak je $\overline{\zeta b} - \overline{\zeta' b} = \overline{\zeta\zeta'} = \overline{z_{s+1} z_s} = -\overline{z_s z_{s+1}}$, vyjde po úpravě kriterium

$$(P_r - P_m + P'_m)\cdot\overline{a b} > P_{1\ldots n}\cdot\overline{z_s z_{s+1}} + P_0\cdot\overline{a z_0} + P_{n+1}\cdot\overline{z'_{n+1} b}. \tag{37}$$

Kriterium (14) pro přímé zatížení plyne z toho, myslíme-li si oddíly nekonečně malé, tedy $P_m = P'_m = 0$ a klademe-li $s = r$. Totéž vyjde, je-li délka oddílu menší než vzdálenost dvou břemen; v tom případě platí i pro nepřímé zatížení kriterium (14) jako pro přímé zatížení.

Druhý a třetí člen na pravé straně kriteria jsou proti prvnímu členu malé; bude třeba je uvažovati jen tehdy, je-li levá strana jen o málo větší než prvý člen na pravé straně. Když levá strana značně převyšuje prvý člen pravé strany, není třeba další členy pravé strany uvažovati a stačí psáti výminku (37) ve zkráceném tvaru

$$(P_r - P_m + P'_m)\cdot\overline{a b} > P_{1\ldots n}\cdot\overline{z_s z_{s+1}}. \tag{37a}$$

Začínáme obyčejně polohou soustavy, v níž je břímě P_1 v bodě n, ostatní břemena vpravo; tu je $P_0 = 0$, $\overline{z_s z_{s+1}} = \overline{z_1 z_2}$, $P_m = 0$ a je-li vzdálenost $\overline{z_1 z_2} < \overline{mn}$, vyjde $P'_m = P_1\cdot\frac{\overline{z_1 z_2}}{\overline{m n}}$, takže platí kriterium

$$P_1\cdot\frac{\overline{z_1 z_2}}{\overline{m n}}\cdot\overline{a b} > P_{1\ldots n}\cdot\overline{z_1 z_2} + P_{n+1}\cdot\overline{z'_{n+1} b}. \tag{37b}$$

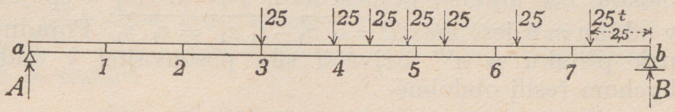
Je-li této nerovnici vyhověno, vyvodí se v oddílu mn větší posouvající síla, je-li P_1 v bodě n, než je-li P_2 v bodě n. Kdyby byla vzdálenost $\overline{z_1 z_2} > \overline{mn}$, platilo by kriterium (14) jako pro přímé zatížení. Poslední nerovnici lze též psáti

$$P_{1\ldots n} + P_{n+1}\cdot\frac{\overline{z'_{n+1} b}}{\overline{z_1 z_2}} < P_1\cdot\frac{\overline{a b}}{\overline{m n}}. \tag{37c}$$

Podle toho snadno určíme oddíly, pro které je třeba klásti P_1 do pravého styčného bodu n oddílu, aby vzniklo $\max T'$: součet břemen na nosníku v této poloze soustavy $P_{1\ldots n}$ musí být o něco menší než pravá strana nerovnice (37c).

Příklad 12. Zatížením vlakem I podle jednotného mostního řádu vyvodíme $\max T'$ v oddílech nosníku délky $\overline{a\,b} = 25{,}6$ m, rozděleného styčnými body v osm stejných oddílů po 3,2 m.

Zde jest $P_1 \cdot \frac{\overline{a\,b}}{mn} = 25 \cdot 8 = 200$ t. Podle rovnice (37c) je klásti do pravého styčného bodu oddílu mn břímě P_1, pokud délkou $\overline{n\,b}$ obsáhneme pouze tolik břemen, že jejich součet je o něco menší než 200 t, tedy pouze sedm břemen. To platí pro oddíl třetí a všechny oddíly napravo od něho. V oddílu $2-3$ vznikne proto $\max T'$, umístíme-li prvou nápravu lokomotivy do bodu 3, ostatní břemena vpravo (obr. 52). Za tohoto zatížení určíme přímo posouvající sílu



Obr. 52.

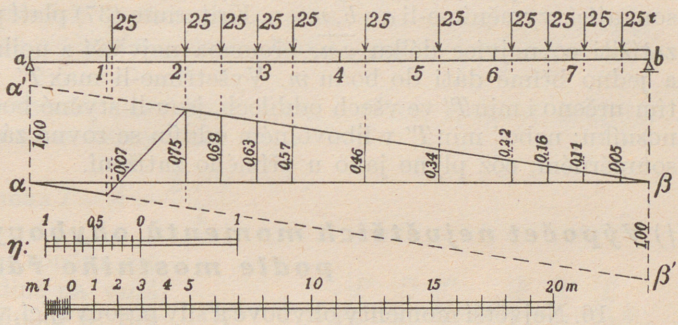
$$\max T'_{2-3} = A = \frac{25}{25{,}6}(2{,}5 + 5{,}5 + 8{,}5 + 10 + 11{,}5 + 13 + 16) = 65{,}43\text{ t}.$$

Pro oddíl $1-2$ žádá $\max T'$, aby druhé břímě přišlo do bodu 2 (obr. 53), jak ukáže kriterium, jehož užijeme v obecném tvaru (37). Zde jest

$$P_0 = 0, \qquad P_r = 0,$$
$$P_{1\,..\,n} = 9 \cdot 25 = 225\text{ t}.$$

Proti poloze, kde by bylo P_1 v bodě 2, přistupují napravo dvě břemena, je tedy za P_{n+1} bráti výslednici těchto břemen: $P_{n+1} = 2 \cdot 25 = 50$ t. Dále jest $P_m = 0$ (v prvé poloze není v oddílu břemen), $P'_m = \frac{25 \cdot 3}{3{,}2} = 23{,}4$ t. Délky jsou

$$\overline{a\,b} = 25{,}6, \qquad \overline{z_s\,z_{s+1}} = \overline{z_1\,z_2} = 3,$$
$$\overline{z'_{n+1}\,b} = 1{,}2 + \frac{1{,}5}{2} = 1{,}95\text{ m}.$$



Obr. 53.

Tím vychází

$$(P_r - P_m + P'_m) \cdot \overline{a\,b} = 23{,}4 \cdot 25{,}6 = 599\text{ mt},$$
$$P_{1\,..\,n} \cdot \overline{z_s\,z_{s+1}} + P_0 \cdot \overline{a\,z_0} + P_{n+1} \cdot \overline{z'_{n+1}\,b} = 225 \cdot 3 + 0 + 50 \cdot 1{,}95 = 675 + 97{,}5 = 772{,}5\text{ mt}.$$

Kriteriu (37) není vyhověno, což znamená, že druhá poloha soustavy (P_2 v bodě 2) dá větší posouvající sílu než prvá poloha (P_1 v bodě 2). Za stanovené polohy soustavy (obr. 53) určíme na př. příčinkové pořadnice v paprscích břemen, jež jsou v obrazci vepsány, a vypočteme

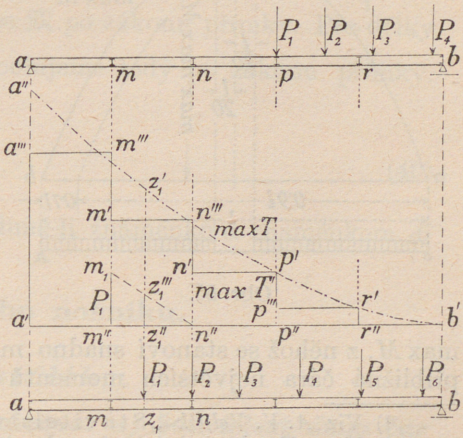
$$\max T'_{1-2} = \Sigma P \eta = 25 \cdot (-0{,}07 + 0{,}75 + 0{,}69 + 0{,}63 + 0{,}57 + 0{,}46 + 0{,}34 + 0{,}22 + 0{,}16 + 0{,}11 + 0{,}05) = 97{,}75\text{ t}.$$

Graficky určíme největší síly posouvající pro zatížení nepřímé snadno z čáry $\max T$ pro zatížení přímé. Žádá-li $\max T'$ v oddílu np, aby břímě P_1 přišlo do bodu p, ostatní břemena vpravo (obr. 54), vyjde v oddílu np

$$\max T' = A = \overline{p''\,p'}$$

dáno přímo pořadnicí čáry $a''\,p'\,b'$ pro $\max T$ za přímého zatížení. Čarou $\max T'$ v oddílu np je přímka $n'p' \parallel a'b'$. Klademe-li pro oddíl mn do bodu n břímě druhé, abychom vyvodili v oddílu tom $\max T'$, vyjde

$$\max T' = A - P_m,$$



Obr. 54.

kdež jest $A = \overline{z_1'' z_1'}$ dáno pořadnicí čáry $\max T$ pro zatížení přímé, měřenou v paprsku břemene P_1; P_m znamená pak složku břemene P_1 do bodu m po zákonu prostého nosníku, pro niž platí

$$P_m = P_1 \cdot \frac{\overline{z_1 n}}{\overline{m n}}.$$

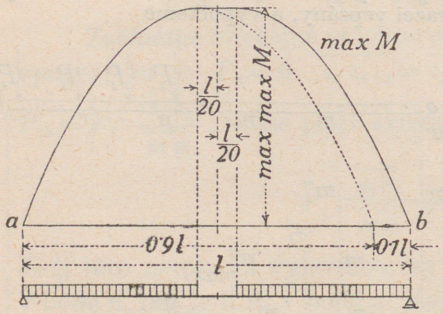
Složku P_m určíme, přeneseme-li $P_1 = \overline{m'' m_1}$ a spojíme-li $m_1 n''$, načež $P_m = \overline{z_1'' z_1'''}$ a v oddílu $m n$ jest $\max T' = \overline{z_1'' z_1} - \overline{z_1'' z_1'''} = \overline{z_1''' z_1}$. Pořadnice $\overline{m'' m'} = \overline{n'' n'''} = \overline{z_1''' z_1}$ určují pak přímku $m' n'''$ největší síly posouvající v oddílu $m n$. V ostatních oddílech bychom řešili obdobně.

Je-li v oddílu více než jedno břímě, určíme zase reakci A jakožto pořadnici čáry $\max T$ pro přímé zatížení v paprsku břemene P_1. Složku P_m zatížení oddílu $m n$ do bodu m stanovíme jako dříve, myslíme-li si místo břemene P_1 výslednici břemen v oddílu; přenesli bychom tedy do $\overline{m'' m_1}$ určovací úsek výslednice břemen v oddílu $m n$ a spojnicí $m_1 n''$ bychom sestrojili na paprsku této výslednice úsek složky P_m. Pak by bylo zase $\max T' = A - P_m$.

Pro nejmenší sílu posouvající platí obdobné věty jako pro největší sílu posouvající, vyměníme-li a s b, m s n. Kriterium (37) platí pak i pro $\min T'$; třeba tu ovšem zatížiti co nejvíce délku $\overline{a n}$, břemena největší a nejhustější umístiti poblíž bodu m a jedno břímě dáti do bodu m. Vyšetříme-li $\max T'$ pro všechny oddíly nosníku, je tím určeno i $\min T'$ ve všech oddílech, jsou-li styčné body položeny souměrně ke středu nosníku; neboť $\min T'$ v libovolném oddílu se rovná záporně vzatému $\max T'$ v oddílu souměrném, což plyne jako u přímého zatížení.

f) Výpočet největších momentů ohybových a sil posouvajících podle mostního řádu.

16. Největší momenty ohybové a síly posouvající, vyvozené zatížením pohyblivým, stanoví se snáze pro zatížení rovnoměrné než pro soustavu osamělých břemen. Namítá se tedy otázka, nemůžeme-li místo řady břemen zavésti do počtu *náhradné zatížení rovnoměrné*, jež by dalo týž účinek. Lze ovšem stanoviti takové zatížení rovnoměrné, jež vyvodí v daném průřezu totéž $\max M$ nebo totéž $\max T$ jako daná řada osamělých břemen. Obecně však jsou tato náhradná zatížení rovnoměrná pro momenty i síly posouvající v témž průřezu různá a každé to zatížení je též v každém průřezu daného nosníku jiné. S náhradným zatížením rovnoměrným se počítalo podle starších předpisů pro vypočítávání mostů železnicových;[1]) způsob ten vyžadoval ovšem tabulek, v nichž jsou pro různé nosníky uvedena ona náhradná zatížení jak pro momenty ohybové, tak i pro síly posouvající.



Obr. 55.

Nyní platný mostní řád[2]) (ČSN 1230—1937) nařizuje, aby se počítalo přímo s řadou břemen, kterou tvoří vlak ze dvou tendrových lokomotiv a libovolného počtu nákladních vozů. K usnadnění výpočtu jsou připojeny k mostnímu řádu tabulky $\max \max M$ pro nosníky prosté (při vlaku I i II pro rozpětí do 100 m) a zároveň je předepsán též jednotný přibližný tvar čáry $\max M$, z něhož se stanoví snadno $\max M$ v libovolném průřezu nosníku. Předepsaná přibližná čára největších momentů je souměrná ke svislici středu nosníku a obsa-

[1]) Viz *A. V. Velflík* „Stavitelství mostní“, díl I. (Praha 1896), Příloha, str. 31 a d.
[2]) Viz „Technický průvodce“ seš. 4 (6. vyd. 1946), str. 47 a d.

huje uprostřed v délce $\frac{1}{10}l$ přímku vodorovnou, která je vrcholovou tečnou dvou parabol procházejících body a, b (obr. 55). Největší momenty v různých průřezech nosníku vypočteme podle této čáry, odvodíme-li její rovnici. Lze však též výpočet $\max M$ v jednotlivých bodech nosníku podle předepsané čáry převésti na základ statický. Lze totiž tuto čáru pokládati za momentovou čáru pro zatížení rovnoměrné po celém nosníku vyjma střední díl o délce $\frac{1}{10}l$, jenž zůstane nezatížen. Příslušné poměrné zatížení určíme z daného $\max M$ uprostřed nosníku, prodloužíme-li levou parabolu, jež protne po druhé osu ab ve vzdálenosti $\frac{1}{10}l$ od bodu b; prodloužená levá parabola je pak momentovou čarou pro nosník délky $0{,}9\,l$, jenž by byl zatížen v celé délce rovnoměrně. Uprostřed tohoto nosníku vzniká moment

$$\max M = \frac{1}{8} q \cdot (0{,}9\,l)^2 = \frac{0{,}81}{8} q\, l^2;$$

z toho plyne

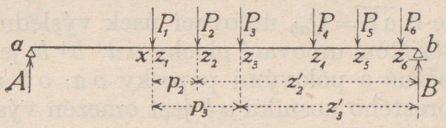
$$q = \frac{8 \cdot \max M}{0{,}81\, l^2} = \frac{\max M}{0{,}10125\, l^2}. \tag{38}$$

Pak vypočteme $\max M$ v jednotlivých průřezech nosníku jako momenty prostého nosníku ab, zatíženého rovnoměrně zatížením q v celé délce vyjma střední část o délce $\frac{1}{10}l$, jež zůstává nezatížena.

Největší síla posouvající se vyvodí pravidlem, jde-li o přímé zatížení, krajním zatížením pravé strany průřezu x (obr. 56), jež dá

$$\max T = A = \frac{\Sigma P z'}{l}.$$

Mostní řád obsahuje pak tabulku součtu momentů $\mathfrak{M} = \Sigma P z'$, jenž závisí jedině na vzdálenosti $z_1' = x'$ paprsku P_1 od podpory b; tuto vzdálenost můžeme nazvati *zatíženou délkou*. Pro libovolné břímě P_i jest $z_i' = x' - p_i$, znamená-li p_i vzdálenost paprsků P_1 a P_i; vyjde tedy



Obr. 56.

$$\mathfrak{M} = \sum_{i=1}^{i=n} P_i z_i' = \sum_{1}^{n} P_i (x' - p_i) = x' \cdot \sum_{1}^{n} P_i - \sum_{1}^{n} P_i p_i. \tag{39}$$

Pokud se soustava nemění přistoupením nových břemen na nosník, potud jsou $\sum_{1}^{n} P_i$ a $\sum_{1}^{n} P_i p_i$ stálé; mění-li se v těchto mezích x', mění se $\mathfrak{M}$ po zákonu přímky. Pro délky pro něž není moment $\mathfrak{M}$ v tabulce uveden, interpolujeme tedy po zákonu přímky. Přírůstu $\Delta x'$ délky x' odpovídá přírůst

$$\Delta \mathfrak{M} = \Delta x' \cdot \sum_{1}^{n} P_i, \tag{40}$$

jenž plyne ze vzorce (39), diferencujeme-li a nahradíme-li znaménko d znaménkem Δ.

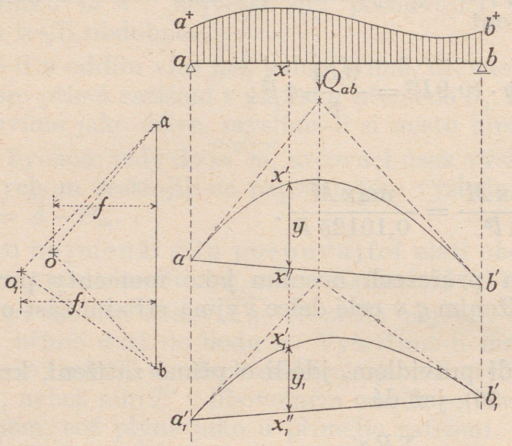
II. Ohybová čára přímého nosníku.

a) Nosník průřezu stálého.

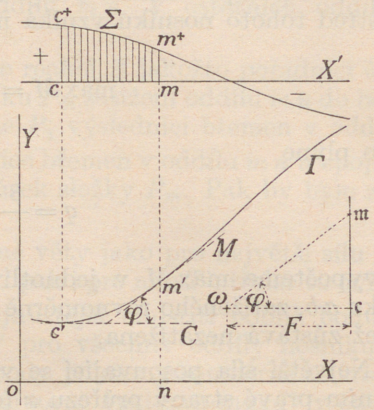
17. Ohybová čára jakožto čára výslednicová. *α) Souvislost dvou čar výslednicových.* *Ohybovou čarou* přímého nosníku je za každého zatížení spojitá křivka.

Každou křivku, tedy i ohybovou čáru lze pokládati za výslednicovou čáru k jisté spojité soustavě silové. Lze pak nejen k dané spojité soustavě silové stanoviti křivku výslednicovou, nýbrž i k dané křivce takovou spojitou soustavu silovou, aby byla daná křivka její čarou výslednicovou. Odvodíme si nejprve některé věty, jež se týkají čar výslednicových.

Nosník prostý $a\,b$ budiž zatížen na př. zatížením spojitým, jež je dáno určovací plochou $a\,a^+\,b^+\,b$ (obr. 57). K tomuto zatížení stanovme výslednicovou čáru $a'\,x'\,b'$ [1]);



Obr. 57.



Obr. 58.

je-li $\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}} = Q_{ab}$ určovací úsek výslednice veškerého zatížení, jejíž určovací paprsek jde těžištěm určovací plochy $a\,a^+\,b^+\,b$, jsou tečny výslednicové čáry v bodech a', b' rovnoběžné s pólovými paprsky $o\,\mathfrak{a}$, $o\,\mathfrak{b}$ a sekou se na paprsku Q_{ab}. Momentový obrazec prostého nosníku $a\,b$ jest omezen výslednicovou čarou $a'\,x'\,b'$ a základní stranou $a'\,b'$, od níž měříme momentovou pořadnici $\overline{x''\,x'} = y$. Znamená-li pak f vzdálenost pólu o od složkové čáry $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$, je v bodě x nosníku $a\,b$ ohybový moment

$$M = f \cdot y.$$

Rýsujeme-li z pólu o_1, jenž má od složkové čáry vzdálenost f_1, výslednicovou čáru $a_1'\,x_1'\,b_1'$, sekou se její krajní tečny, rovnoběžné s pólovými papisky $o_1\,\mathfrak{a}$, $o_1\,\mathfrak{b}$, opět na paprsku Q_{ab}. Základní stranou je tu spojnice $a_1'\,b_1'$; v bodě x dostaneme pak momentovou pořadnici $\overline{x_1''\,x_1'} = y_1$ a moment ohybový

$$M = f_1 \cdot y_1.$$

Srovnáním obou hodnot téhož momentu M plyne

$$f\,y = f_1\,y_1 \quad \text{nebo} \quad \frac{y}{y_1} = \frac{f_1}{f}. \tag{41}$$

Sestrojíme-li tedy k téže soustavě silové dva obrazce momentové z různých pólů, mají se sdružené pořadnice obou obrazců k sobě obráceně jako příslušné vzdálenosti pólové. Poněvadž je poměr sdružených pořadnic stálý a sdružené body jsou na svislicích, jsou oba obrazce momentové perspektivně afinní.

[1]) Viz prvý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1940), str. 97 a d.

Užijeme-li různých pólů o, o_1, avšak v téže vzdálenosti $f = f_1$ od složkové čáry zvolených, vyjde $y = y_1$. Jsou-li tedy oba póly v téže vzdálenosti od čáry složkové, jsou sdružené pořadnice stejné čili oba obrazce momentové souvisí po zákonu afinity rovnosti.

β) ***Věta Mohrova.*** Spojitá soustava silová budiž dána určovací plochou omezenou osou X' a čarou Σ (obr. 58). Připusťme obecně změnu znaménka: částem určovací plochy nad osou X', jež znamenejme kladně, nechť odpovídají síly vzhůru směřující a částem určovací plochy pod osou X', znamenaným záporně, síly dolů směřující. K této soustavě silové náleží výslednicová čára Γ, jež obrací dutou stranu tam, kam směřují síly, skládáme-li síly pořadem od levé strany k pravé a volíme-li pól ω vlevo od čáry složkové; pokud jest určovací plocha kladná (záporná), obrací čára Γ dutou stranu vzhůru (dolů), změně znaménka určovací plochy, tedy průsečíku čáry Σ s osou X' odpovídá pak obratový bod čáry Γ. Vztahujme čáru Γ k osám $X \parallel X'$ a $Y \perp X$ souřadnicemi $\overline{o\,n} = x$, $\overline{n\,m'} = y$. Veďme k čáře Γ obecnou tečnu M v bodě m' a tečnu $C \parallel X$, jež se dotýká čáry v bodě c'. Obě tečny svírají úhel φ, o němž platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}.$$

Týž úhel svírají též pólové paprsky $\omega\,\mathfrak{c} \parallel C$, $\omega\,\mathfrak{m} \parallel M$, jež omezují v čáře složkové určovací úsek síly Q, dané určovací plochou omezenou svislicemi bodů c', m', tedy

$$\overline{\mathfrak{c}\,\mathfrak{m}} = Q = \frac{\mathfrak{U}}{e}, \quad \text{kde} \quad \mathfrak{U} = \text{pl.}\, c\, c^{+}\, m^{+}\, m;$$

e znamená půdici, na niž uvádíme části určovací plochy, abychom dostali určovací úseky sil. Ze složkového obrazce plyne

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\overline{\mathfrak{c}\,\mathfrak{m}}}{\overline{\omega\,\mathfrak{c}}} = \frac{Q}{F}.$$

Srovnáme-li obě hodnoty tg φ, dostaneme

$$F \cdot \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = Q, \tag{42}$$

což jest diferenciální rovnice prvého řádu výslednicové čáry Γ.

Je-li dáno zatížení $Q = f(x)$, plyne z rovnice (42) integrací rovnice čáry výslednicové. Známe-li naopak rovnici výslednicové čáry $y = \psi(x)$, odvodíme z rovnice (42) příslušnou soustavu silovou

$$Q = F \cdot \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = F \cdot \psi'(x).$$

Příklad 13. Určíme počtem výslednicovou čáru k zatížení rovnoměrnému. Zatížení rovnoměrné od bodu c k bodu m (obr. 58) bylo by dáno rovnicí

$$Q = q\,(x - a),$$

je-li q zatížení poměrné a a úsečka bodu c. Pak jest podle rovnice (42)

$$F \cdot \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = Q = q\,(x - a);$$

z toho plyne integrací

$$F\,y = C + \frac{1}{2}\,q\,x^2 - q\,a\,x,$$

znamená-li C integrační stálou. Výslední rovnice ukazuje, že jest výslednicovou čarou k zatížení rovnoměrnému kvadratická parabola, jejíž osa má směr sil.

Ohybová čára má základní diferenciální rovnici druhého řádu[1])

$$\pm E J \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2} = M; \tag{43}$$

abychom s ní mohli porovnati rovnici výslednicové čáry, derivujme rovnici (42), čímž dostaneme

$$F \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2} = \frac{\mathrm{d} Q}{\mathrm{d} x} = \frac{1}{e} \cdot \frac{\mathrm{d} \mathfrak{U}}{\mathrm{d} x} = \frac{\mathfrak{y}}{e},$$

je-li $\mathfrak{y} = \overline{m m^+}$ obecná pořadnice určovací plochy. Srovnáme-li tuto rovnici se základní rovnicí ohybové čáry, vidíme částečnou shodu. Jde-li o homogenní nosník stálého průřezu, jest $E J$ stálé, pólová vzdálenost F rovněž; na pravé straně rovnic jsou pak M a $\mathfrak{y}$ funkcemi úsečky x.

Ohybový moment M vyjadřujeme graficky součinem pólové vzdálenosti f a momentové pořadnice η, tedy

$$M = f \eta.$$

Výslednicová čára má rovnici

$$F \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2} = \frac{\mathfrak{y}}{e}$$

a čára ohybová, nehledíme-li zatím ke znaménku,

$$E J \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2} = f \eta.$$

Obě rovnice jsou totožné, je-li

$$\frac{F}{E J} = \frac{\mathfrak{y}}{e f \eta}. \tag{44}$$

Rozměry čitatele i jmenovatele na obou stranách rovnice se shodují. Neboť F i $\mathfrak{y}$ jsou délky; E se vyjadřuje v kg/cm², J pak v cm⁴, tedy $E J$ má pojmenování kg cm², na pravé straně pak z činitelů f, η znamená jeden sílu, druhý délku a e je rovněž délka. Dělíme-li jmenovatele obou stran v poslední rovnici $e f$, dostaneme na obou stranách poměry délek, tedy pouhá čísla; zvolíme-li pak za hodnotu obou rovných poměrů jedničku, vyjde

$$\frac{F}{\left(\frac{E J}{e f}\right)} = \frac{\mathfrak{y}}{\eta} = 1.$$

Z toho plynou dvě rovnice

$$\mathfrak{y} = \eta, \tag{45a}$$

$$F = \frac{E J}{e f}. \tag{45b}$$

Podle rovnice (45ᵃ) pořadnice $\mathfrak{y}$ určovací plochy spojité soustavy silové, jejíž výslednicovou čarou Γ má býti čára ohybová, rovná se momentové pořadnici η daného nosníku. Z toho plyne *věta Mohrova*[2]): Ohybová čára je výslednicovou čarou ke

[1]) Viz *Jos. Šolín* „Základy technické nauky o pružnosti a pevnosti“ (Praha 1904), str. 93.

[2]) Viz *O. Mohr* „Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen“ v „Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur- Vereines zu Hannover“, r. 1868, str. 16 a d. Srovnej *O. Mohr* „Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik“ (Berlín 1906), str. 294 a d.

spojité soustavě silové, jejíž určovací plochou je plocha momentová. Vzorec (45^b) stanoví vzdálenost pólovou F, které je třeba užívati, aby ona čára výslednicová byla skutečně čarou ohybovou.

Vyhovíme-li rovnicím (45^a), (45^b), ztotožňují se druhé diferenciální rovnice čáry výslednicové a čáry ohybové; pak nemusí být však ještě obě čáry samy totožné, jak poznáme. Věty Mohrovy lze užívati k počtářskému i grafickému řešení úloh, jež se týkají ohybu.

Příklad 14. Vypočísti jest největší průhyb nosníku stálého průřezu, na levém konci a volného, na pravém konci b vetknutého a zatíženého v celé délce rovnoměrně.

Čára ohybová tohoto nosníku je výslednicovou čarou ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plochou je plocha momentová. Tato plocha (obr. 59) je doplňkem poloviční úseče parabolické do obdélníka a je dána momentem ohybovým

$$M_b = -\frac{1}{2} q l^2 = f \cdot \overline{b'' b'},$$

je-li $l = \overline{a b}$ rozpětí nosníku a f příslušná vzdálenost pólová. Největší průhyb nosníku přísluší k bodu a. Určujíce jej, můžeme celý obrazec momentový nahraditi výsledním břemenem

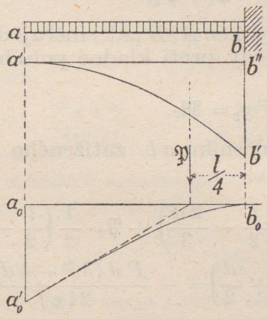
$$\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{U}}{e}, \qquad \text{kde} \qquad \mathfrak{U} = \text{pl. } a' b' b'' = \frac{1}{3} \overline{a b} \cdot \overline{b'' b'} = \frac{1}{3} \frac{M_b}{f} l,$$

tedy

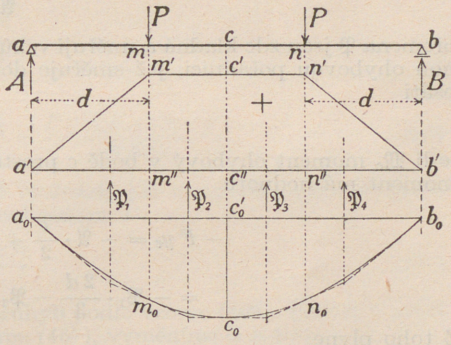
$$\mathfrak{U} = -\frac{q l^3}{6 f}, \qquad \mathfrak{P} = -\frac{q l^3}{6 e f}.$$

Břímě $\mathfrak{P}$ působí v tížnici plochy momentové, jež má od bodu a vzdálenost $\frac{3}{4} l$; kladné břímě $\mathfrak{P}$ by působilo vzhůru.

K tomuto břemeni si mysleme rýsovanou výslednicovou čáru pólovou vzdáleností F, určenou vzorcem (45^b); spojitá křivka ohybová by byla do této čáry vepsána a dotýkala by se jejích stran v bodech a'_0, b_0. Ohybová čára nosníku, jenž je v bodě b vetknut vodorovně a dokonale, dotýkala by se v tomto bodě původní přímé osy; křivku $a'_0 b_0$ třeba tedy vztahovati k tečně v bodě b_0 jakožto ose. Hledaný *největší průhyb* dá pořadnice $y_0 = \overline{a_0 a'_0}$, již určíme jako momentovou pořadnici nosníku, který by byl v bodě a vetknut, v bodě b volný a zatížen břemenem $\mathfrak{P}$. Kladné břímě $\mathfrak{P}$ (vzhůru směřující) dalo by k bodu a moment záporný; poněvadž tu jdeme s pravé strany, obrátíme znaménko, abychom mohli užívati pravidel platných pro momenty ohybové. Jest tedy



Obr. 59.



Obr. 60.

$$F \cdot \overline{a_0 a'_0} = \mathfrak{P} \cdot \frac{3}{4} l$$

nebo

$$F y_0 = -\frac{q l^3}{6 e f} \cdot \frac{3 l}{4} = -\frac{q l^4}{8 e f};$$

z toho vychází

$$y_0 = -\frac{q l^4}{8 e f F} = -\frac{q l^4}{8 E J},$$

dosadíme-li za F ze vzorce (45^b). Záporné znaménko ve výsledku znamená jako u pořadnic momentových, že ohybová pořadnice y_0 směřuje dolů. Hodnota pořadnice y_0 se srovnává s hodnotou,[1]) jež plyne integrací z rovnice (43).

[1]) Viz *Jos. Šolín*, „Základy technické nauky o pružnosti a pevnosti“ (Praha 1904), str. 105.

Příklad 15. Vypočteme největší průhyb prostého nosníku stálého průřezu, jenž je zatížen souměrně ke středu dvěma rovnými břemeny P.

Momentový i ohybový obrazec (obr. 60) jsou tu souměrné ke svislici středu nosníku c. Ze souměrnosti vnějších sil plyne

$$A = B = P.$$

V působišti m levého břemene P je pak, značíme-li $\overline{a\,m} = \overline{n\,b} = d$, moment

$$M_m = M_n = A\,d = P\,d = f \cdot \overline{m''\,m'}.$$

Ohybovou čáru určíme podle věty Mohrovy jakožto výslednicovou čáru ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plochou je plocha momentová. Ohybová čára prochází podporami a, b; křivku $a_0\,c_0\,b_0$ třeba tedy vztahovati ke spojnici $a_0\,b_0$ jakožto ose. Pak znamená ohybová čára zároveň momentovou čáru prostého nosníku $a\,b$, na nějž působí spojitá soustava silová, daná momentovou plochou $a'\,m'\,n'\,b'$ jakožto plochou určovací. Polovici této plochy rozdělme svislicí bodu m na trojúhelník $a'\,m'\,m''$, jejž nahradíme osamělým břemenem

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{\mathrm{pl} \cdot a'\,m'\,m''}{e} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_m\,d}{e\,f} = \frac{P\,d^2}{2\,e\,f},$$

a obdélník $m''\,m'\,c'\,c''$, jemuž přísluší osamělé břímě

$$\mathfrak{P}_2 = \frac{\mathrm{pl} \cdot m''\,m'\,c'\,c''}{e} = \frac{\overline{m\,c} \cdot \overline{m''\,m'}}{e} = \frac{P\,d}{e\,f}\left(\frac{l}{2} - d\right).$$

Paprsek břemene $\mathfrak{P}_1$ je tížnicí trojúhelníka $a'\,m'\,m''$, má tedy od bodu a vzdálenost $\frac{2}{3}\,d$; paprsek $\mathfrak{P}_2$ půlí úsek $\overline{m\,c} = \frac{1}{2}\,l - d$. Na pravé polovici nosníku dostali bychom břemena $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$ souměrná k břemenům $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$. Ohybovou čarou je křivka vepsaná do lomené čáry výslednicové k břemenům $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ...; za vzdálenost pólovou voliti jest délku F danou vzorcem (45^b). Křivku ohybovou $a_0\,c_0\,b_0$ vztahujeme k tětivě $a_0\,b_0$, od níž měříme pořadnice ohybové.

Největší průhyb $y_c = \overline{c_0'\,c_0}$ namítne se uprostřed nosníku a určí se jako momentová pořadnice nosníku $a\,b$, zatíženého břemeny $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$. Tato břemena, jsouce souměrná, vyvodí reakce

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2;$$

břemena $\mathfrak{P}$ jsou zde kladná a směřují vzhůru, reakce A, B pak směřují dolů. Pokládejme tu za kladnou ohybovou pořadnici, jež směřuje dolů, tedy proti kladné pořadnici momentové; pak třeba psáti

$$-F\,y_c = \mathfrak{M}_c,$$

je-li $\mathfrak{M}_c$ moment ohybový v bodě c prostého nosníku $a\,b$, zatíženého břemeny $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ... Tento moment má hodnotu

$$-F\,y_c = -\mathfrak{A} \cdot \frac{l}{2} + \mathfrak{P}_1\left(\frac{l}{2} - \frac{2\,d}{3}\right) + \mathfrak{P}_2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2} - d\right) =$$

$$= -\mathfrak{P}_1 \cdot \frac{2\,d}{3} - \mathfrak{P}_2\left(\frac{l}{4} + \frac{d}{2}\right) = -\frac{P\,d\,(3\,l^2 - 4\,d^2)}{24\,e\,f}.$$

Z toho plyne

$$y_c = \frac{P\,d\,(3\,l^2 - 4\,d^2)}{24\,e\,f\,F} = \frac{P\,d\,(3\,l^2 - 4\,d^2)}{24\,E\,J}.$$

Položíme-li $d = \frac{1}{2}\,l$, vyjde

$$y_c = \frac{P\,l^3}{24\,E\,J},$$

což je největší průhyb prostého nosníku $a\,b$, zatíženého uprostřed břemenem $2\,P$.[1])

Příklad 16. Stanovme ohybovou čáru prostého nosníku stálého průřezu, zatíženého břemenem P, působícím v obecném bodě x (obr. 61).

Momentovým obrazcem je zde trojúhelník $a'\,x'\,b'$, jehož největší pořadnice při pólové vzdálenosti f je

$$\overline{x''\,x'} = \frac{M_x}{f} = \frac{P\,x\,x'}{f\,l}.$$

[1]) Srovnej *Jos. Šolín* „Základy technické nauky o pružnosti a pevnosti" (Praha 1904), str. 112.

Tento obrazec rozdělíme svislicí bodu x na dva trojúhelníky, jež nahradíme v jejich tížnicích břemeny

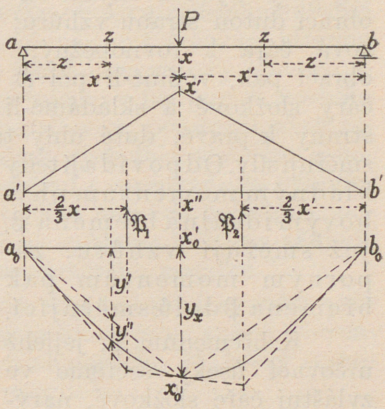
$$\mathfrak{P}_1 = \frac{\mathfrak{U}_1}{e}, \qquad \mathfrak{P}_2 = \frac{\mathfrak{U}_2}{e},$$

kde

$$\mathfrak{U}_1 = \text{pl. } a'\,x''\,x' = \frac{x}{2} \cdot \frac{P\,xx'}{fl} = \frac{P\,x^2\,x'}{2\,fl}, \qquad \mathfrak{U}_2 = \text{pl. } x''\,x'\,b' = \frac{x'}{2} \cdot \frac{Pxx'}{fl} = \frac{Pxx'^2}{2\,fl},$$

takže vyjde

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{P\,x^2\,x'}{2\,e\,f\,l}, \qquad \mathfrak{P}_2 = \frac{P\,x\,x'^2}{2\,e\,f\,l}.$$



Obr. 61.

Výslednicová čára k břemenům $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ má při pólové vzdálenosti $F = \frac{EJ}{ef}$ ve svislici bodu x pořadnici y_x, pro kterou platí jako pro momentovou pořadnici prostého nosníku

$$F\,y_x = \mathfrak{P}_1 \cdot \frac{2}{3}\frac{x}{l} \cdot x' + \mathfrak{P}_2 \cdot \frac{2}{3}\frac{x'}{l} \cdot x = \frac{P\,x^2\,x'^2}{3\,e\,f\,l},$$

tedy

$$y_x = \frac{P\,x^2\,x'^2}{3\,EJ\,l}.$$

Od tětivy $a_0 x_0$ přeneseme ve svislici bodu z vlevo od x pořadnice y'', odpovídající trojúhelníkovému zatížení $a'\,x''\,x'$; tyto pořadnice určíme, jako by šlo o trojúhelníkové zatížení prostého nosníku $a\,x$:

$$F\,y'' = \frac{\mathfrak{P}_1}{3} \cdot z - \mathfrak{P}_1 \frac{z^2}{x^2} \cdot \frac{z}{3} = \frac{P\,x'\,z\,(x^2 - z^2)}{6\,e\,f\,l}, \qquad \text{tedy} \qquad y'' = \frac{P\,x'\,z\,(x^2 - z^2)}{6\,EJ\,l}.$$

Tato pořadnice se přičte k

$$y' = y_x \cdot \frac{z}{x} = \frac{P\,x\,x'^2}{3\,EJ\,l}\,z,$$

čímž vyjde ohybová pořadnice

$$y = y' + y'' = \frac{P\,x\,x'^2 z}{3\,EJl} + \frac{Px'\,z\,(x^2 - z^2)}{6\,EJl} = \frac{P\,x'\,z\,(l^2 - x'^2 - z^2)}{6\,EJl}. \qquad (46^a)$$

Vpravo od břemene P v bodě z dostaneme obdobný výsledek, jen se vymění veličiny, které se týkají levé a pravé strany, tedy x' nahradíme x a z nahradíme z':

$$y = \frac{P\,x\,z'\,(l^2 - x^2 - z'^2)}{6\,EJl}. \qquad (46^b)$$

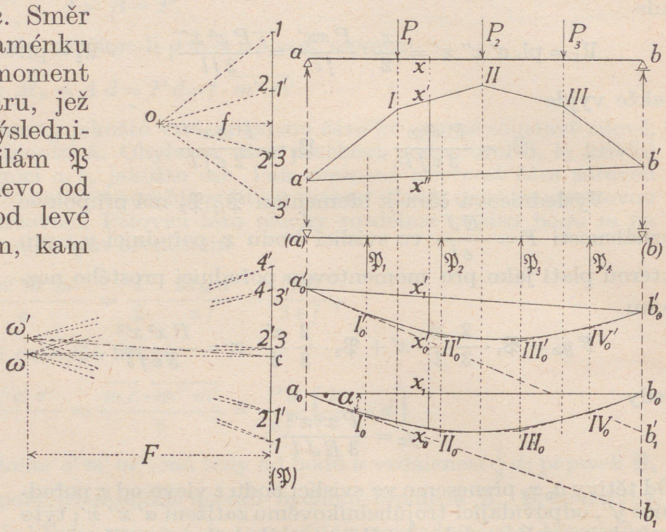
Břímě P působící v x vyvodí v bodě z vlevo od x průhyb podle vzorce (46^a). Působí-li totéž břímě P v bodě z, vyvodí v průřezu x průhyb podle vzorce (46^b), vyměníme-li x a z:

$$y = \frac{P\,z\,x'\,(l^2 - z^2 - x'^2)}{6\,EJl},$$

je tedy průhyb vyvozený v bodě z břemenem P v bodě x působícím roven průhybu, jejž v bodě x vyvodí břímě P působící v bodě z. Z toho plyne, že *příčinková čára průhybu bodu x je ohybovou čarou nosníku pro zatížení břemenem $P = 1$ v bodě x*. Klademe-li tedy $P = 1$, máme ve vzorcích (46^a), (46^b) rovnice příčinkové čáry průhybu bodu x vlevo a vpravo od tohoto bodu.

18. Grafické stanovení ohybové čáry pro různé nosníky. *α) Nosník prostý.* Prostý nosník $a\,b$ budiž zatížen libovolně, na př. osamělými břemeny P_1, P_2, P_3 (obr. 62). Hledáme-li čáru ohybovou, narýsujeme nejprve obrazec momentový. Přeneseme do čáry složkové úseky $P_1 = \overline{1\,1'}$, $P_2 = \overline{2\,2'}$, $P_3 = \overline{3\,3'}$, zvolíme ve vzdálenosti f pól o a rýsujeme k danému zatížení výslednicovou čáru $a'\,I\,II\,III\,b'$, již uzavřeme základní stranou $a'\,b'$; ve svislici průřezu x je pak momentová pořadnice $\overline{x''\,x'} = \eta$ a v bodě x moment ohybový $M = f\,\eta$. Podle věty Mohrovy pokládáme nyní plochu momentovou za určovací plochu spojité soustavy silové, jejíž výslednicovou čarou je čára ohybová,

užíváme-li pólové vzdálenosti F dané vzorcem (45^b). Plochu momentovou rozdělíme dále svislicemi na proužky (v obr. 62 je dělena paprsky břemen P_1, P_2, P_3), jež nahradíme *ideálnými břemeny* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3 \ldots$, působícími v tížnicích proužků[1]); určovací úseky těchto břemen určíme, uvedeme-li obsahy proužků na touž půdici e. Směr ideálných břemen $\mathfrak{P}$ závisí na znaménku ohybových momentů. Kladný moment ohybový vyvodí ohybovou čáru, jež obrací dutou stranu vzhůru; výslednicová čára k rovnoběžným silám $\mathfrak{P}$ obrací pak, volíme-li pól ω vlevo od čáry složkové a skládáme-li od levé strany k pravé, duté úhly tam, kam směřují síly. Odpovídají tedy kladným momentům ohybovým ideálná břemena $\mathfrak{P}$, jež směřují vzhůru, záporným momentům pak břemena $\mathfrak{P}$ dolů směřující.



Obr. 62.

K břemenům $\mathfrak{P}$, jejichž určovací úseky sečteme ve zvláštní čáře složkové, narýsujeme z pólu ω', ve vzdálenosti pólové F zvoleného, výslednicovou čáru $a'_0\ I'_0\ II'_0\ III'_0\ IV'_0\ b'_0$, do níž vepíšeme křivku, dotýkající se stran lomené čáry výslednicové na prodloužených svislých mezích proužkových. Pólová vzdálenost F nestanoví však ještě přesně polohu pólu, na níž též čára výslednicová závisí; nebude proto stanovená čára obecně shodná s čarou ohybovou. Ohybová čára nosníku $a\,b$ prochází jeho body podporovými, jež jsou na vodorovné původní ose nosníku. Stanovená čára $a'_0\,b'_0$ by tedy byla shodná s čarou ohybovou, kdyby její tětiva $a'_0\,b'_0$ byla vodorovná, což obecně nenastane. Vodorovnou stranu $a_0\,b_0$ obdržíme, vedeme-li $\omega'\,c \parallel a'_0\,b'_0$, dále $\omega\,c$ vodorovně a $\omega'\,\omega$ svisle; rýsujeme-li z pólu ω k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$ výslednicovou čáru $a_0\,I_0\,II_0\,III_0\,IV_0\,b_0$, do níž vepíšeme opět křivku, musí vyjíti tětiva $a_0\,b_0$ vodorovná, tedy křivka $a_0\,b_0$ shodná s čarou výslednicovou. Příčina, pro kterou nedostáváme čáru ohybovou, i když vyhovíme rovnicím (45^a), (45^b), záleží v tom, že tyto rovnice zaručují pouze totožnost druhých diferenciálních rovnic čáry výslednicové a čáry ohybové. Čáry tyto samy plynou ze svých druhých diferenciálních rovnic dvojí integrací, jíž vcházejí do rovnice každé čáry dvě integrační konstanty. Výslední rovnice jsou pak jen tehdy totožné, jsou-li integrační konstanty v obou rovnicích stejné, což obecně nebude.

Čáru $a_0\,x_0\,b_0$, shodnou s čarou výslednicovou, netřeba však rýsovati, neboť z čáry $a'_0\,x'_0\,b'_0$, rýsované z libovolného pólu ω', řešiti lze všechny úlohy, jež se týkají ohybu. Čáry $a_0\,x_0\,b_0$ i $a'_0\,x'_0\,b'_0$ jsou sestrojeny touž vzdáleností pólovou F, souvisí tedy po zákonu afinity rovnosti. V průřezu x mají tyto čáry pořadnice $\overline{x_1\,x_0} = y$, $\overline{x'_1\,x'_0} = y'$, jež jsou rovny; čára $a'_0\,x'_0\,b'_0$ dává tedy v každém průřezu správnou *pořadnici ohybovou* $y' = y$. Chceme-li na př. úhel α, který svírá tečna čáry ohybové v bodě a s vodorovnicí, určíme jej z čáry $a_0\,x_0\,b_0$, z níž plyne

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{b_0\,b_1}}{\overline{a_0\,b_0}} = \frac{\overline{b_0\,b_1}}{\overline{a\,b}}.$$

[1]) Určování tížnic a uvádění na půdici uspoříme, dělíme-li na úzké proužky stálé šířky; viz prvý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1940), str. 101.

Tečna čáry $a'_0 x'_0 b'_0$ utíná na svislici bodu b pořadnici $\overline{b'_0 b'_1} = \overline{b_0 b_1}$, poněvadž se sdružené pořadnice čar $a_0 x_0 b_0$ a $a'_0 x'_0 b'_0$ rovnají; pak jest

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{b'_0 b'_1}}{\overline{a b}},$$

tedy ani ke stanovení úhlu α nepotřebujeme čáry $a_0 x_0 b_0$ o vodorovné tětivě $a_0 b_0$. Postačí pak pro všechny případy čára $a'_0 x'_0 b'_0$.

Křivku $a'_0 x'_0 b'_0$ vztahujeme ke spojnici krajních bodů $a'_0 b'_0$; obrazec, omezený křivkou $a'_0 x'_0 b'_0$ a spojnicí $a'_0 b'_0$, má pak tvar momentového obrazce prostého nosníku $a\,b$. I lze si v tomto případě mysliti, že spojitá soustava silová, jejíž určovací plochou je plocha momentová, působí na prostý nosník $(a)(b)$, jehož momentový obrazec je zároveň *ohybovým obrazcem* daného nosníku $a\,b$. Tím připojujeme v podporách nosníku $(a)(b)$ reakce, jež jsou v rovnováze se spojitou soustavou silovou; poněvadž však reakce působí zde v koncových bodech nosníku, nemění nijak výslednicovou čáru a nemají tedy žádného vlivu na výsledek. Má pak takové spojení s nosníkem tu výhodu, že můžeme na př. největší pořadnici ohybovou stanoviti jako největší pořadnici momentovou prostého nosníku se zatížením spojitým a i jinak můžeme řešiti na základě známých vět a řešení, platných pro momentový obrazec prostého nosníku.

Pólová vzdálenost F, stanovená vzorcem (45^b), žádá, aby byl předem znám průřez nosníku, jehož moment setrvačnosti J k neutrálné ose průřezu je ve vzorci. Neznáme-li průřezu nosníku, určíme jej z největšího momentu ohybového M, který stanovíme z rýsovaného obrazce momentového; užijeme tu rovnice[1])

$$\frac{J}{e'} = \frac{M}{k},$$

v níž znamená e' vzdálenost krajních vláken průřezu od jeho osy neutrálné a k dovolené namáhání. Určíme-li průřez a jeho moment setrvačnosti J, vypočteme pak ze vzorce (45^b) vzdálenost pólovou F; půjde o to, v jakých jednotkách bude F vyjádřeno, tedy podle kterého měřidla je máme přenésti. Jednotky veličin ve vzorci určí modul pružnosti E; dosadíme-li jej na př. v kg/cm², musíme veškeré síly dosazovati v kg a délky v cm. Vyjádřili bychom tedy J v cm⁴, půdici e v cm. První pólovou vzdálenost f lze pokládati za sílu nebo za délku. Je-li f silou, změříme je na měřidle sil a dosadíme v kg; dosazením příslušných jednotek do vzorce (45^b) plyne tu, že F vyjde v cm a přeneslo by se podle měřidla délkového. Znamená-li však f délku, již změříme na délkovém měřidle a dosadíme v cm, vyjde F v kg, přenášíme je tedy podle měřidla silového.

V praktických případech se tu však namítá jistá obtíž. Modul pružnosti E bývá veliký (na př. u oceli 2 150 000 kg/cm²); proto vychází vzdálenost F tak značná, že se nevejde na nákresnu, leč bychom rýsovali v měřidle velmi malém. Velká vzdálenost pólová způsobuje, že vyjdou malé pořadnice ohybové, což odpovídá ovšem skutečnosti, neboť v praktických případech bývá ohyb velmi malý. Kdybychom tedy čáru ohybovou rýsovali v témž měřidle délkovém jako nosník $a\,b$, obdrželi bychom čáru, která se skoro neliší od přímky. Tuto obtíž snadno odstraníme. Místo vzdálenosti F užijeme totiž libovolné příhodné vzdálenosti pólové F_1; určíme-li tím pořadnice y_1 místo správných pořadnic y, jež by odpovídaly pólové vzdálenosti F, jest podle vzorce (41)

$$y = y_1 \frac{F_1}{F}. \qquad (41^a)$$

Pořadnice y i y_1 jsou délky; poměr $\frac{F_1}{F}$ musí pak býti pouhým číslem nepojmeno-

[1]) Viz *Jos. Šolín* „Základy technické nauky o pružnosti a pevnosti" (Praha 1904), str. 64.

vaným, tedy F_1 a F veličinami stejnorodými. Vypočteme-li F v cm, změříme F_1 na měřidle délkovém a dosadíme též v cm; vyjde-li F v kg, změřiti jest F_1 na měřidle silovém a dosaditi v kg.

Čáru ohybovou lze rýsovati libovolnou vzdáleností pólovou F_1; z pořadnic y_1 tak určených vypočteme pak správné pořadnice podle vzorce (41^a). Můžeme též vzdálenost pólovou F_1 zvoliti tak, aby vyšly pořadnice ohybové ve skutečné velikosti, i když je nosník ab rýsován v poměru zmenšení $1 : \mu$ (bývá $\mu = 5$, 10, 100, ..). Správné pořadnice ohybové y by byly zmenšeny v témž poměru jako nosník; pořadnice y_1 ve skutečné velikosti jsou pak μ-kráte větší než pořadnice y, rýsované v měřidle nosníku. Jest tedy

$$y = \frac{y_1}{\mu} = y_1 \frac{F_1}{F};$$

z toho plyne

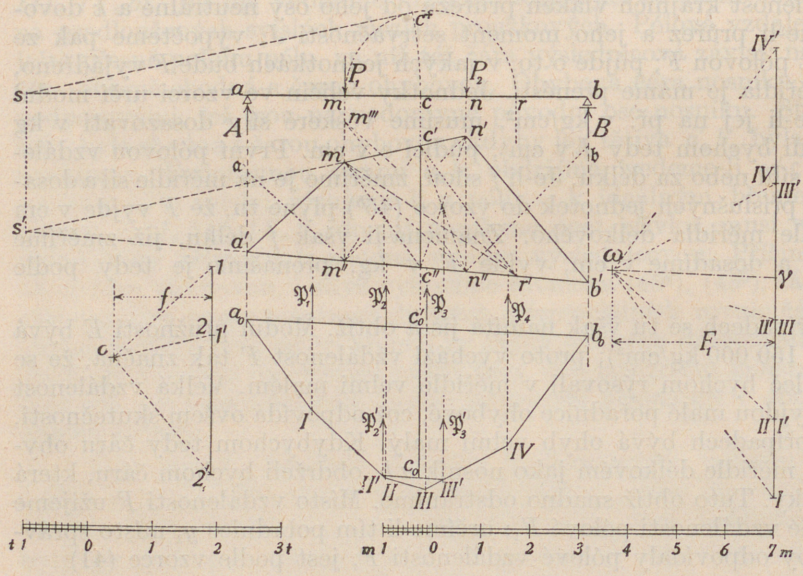
$$F_1 = \frac{F}{\mu}. \tag{47}$$

S touto vzdáleností pólovou vyjdou pořadnice ohybové ve skutečné velikosti.

Příklad 17. Určíme graficky největší průhyb prostého nosníku stálého průřezu o délce $\overline{ab} = 7$ m, zatíženého břemeny $P_1 = 1{,}05$, $P_2 = 2{,}15$ t, jež působí v bodech m, n ve vzdálenostech $\overline{am} = 2$ m, $\overline{an} = 4{,}5$ m.[1])

K břemenům $P_1 = \overline{1\,1'}$, $P_2 = \overline{2\,2'}$ sestrojíme pólovou vzdáleností $f = 2$ m (obr. 63) výslednicovou čáru $a'\ m'\ n'\ b'$, již uzavřeme základní stranou $a'\ b'$. Z momentového obrazce určíme $\overline{n''\,n'} = 2{,}1$ t a

$$\max M = f \cdot \overline{n''\,n'} = 2 \cdot 2{,}1 = 4{,}2\ \text{mt} = 4200\ \text{kgm}$$



Obr. 63.

pod některým břemenem (zde P_2); z tohoto momentu bychom vypočetli průřez nosníku a určili jeho moment setrvačnosti J k neutrálné ose. Průřez nosníku budiž na př. složen ze dvou železC č. 20, vedle sebe postavených; tu jest $J = 4304$ cm^4. Momentovou plochu pokládáme pak za určovací plochu spojité soustavy silové, jejíž výslednicovou čarou je čára ohybová, užíváme-li pólové vzdálenosti F dané vzorcem (45^b).

Kdyby šlo o celou čáru ohybovou, rozdělili bychom určovací plochu na proužky co nejužší. Hledáme-li pouze největší pořadnici ohybovou, postačí co nejméně proužků; rozdělíme tedy plochu momentovou svislicemi bodů m, n a lichoběžník $m''\ m'\ n'\ n''$ dělíme ještě úhlopříčnou $m'\ n''$ na dva trojúhelníky, abychom si uspořili hledání jeho tížnice. Jednotlivé díly plochy momentové nahradíme ideálnými břemeny $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$, jež působí v tížnicích dílů. Určovací úseky břemen stanovíme, uvedeme-li obsahy dílů na touž půdici e. Znamenejme $\overline{a\,m} = a$, $\overline{n\,b} = b$, $\overline{m\,n} = c$, $\overline{m''\,m'} = \eta_1$, $\overline{n''\,n'} = \eta_2$; pak jest

[1]) Viz *Jos. Šolín*, „Theorie zevnitřních sil trámů přímých", seš. II (Praha 1879), str. 9 a d.

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{\text{pl. } a'\, m'\, m''}{e} = \frac{a\,\eta_1}{2\,e}, \qquad \mathfrak{P}_2 = \frac{\text{pl. } m''\, m'\, n''}{e} = \frac{c\,\eta_1}{2\,e},$$

$$\mathfrak{P}_3 = \frac{\text{pl. } m'\, n'\, n''}{e} = \frac{c\,\eta_2}{2\,e}, \qquad \mathfrak{P}_4 = \frac{\text{pl. } n''\, n'\, b'}{e} = \frac{b\,\eta_2}{2\,e}.$$

Zvolme $e = \frac{1}{2}\,c = 1{,}25$ m; vyjde

$$\mathfrak{P}_1 = \eta_1 \frac{a}{c}, \qquad \mathfrak{P}_2 = \eta_1, \qquad \mathfrak{P}_3 = \eta_2, \qquad \mathfrak{P}_4 = \eta_2 \frac{b}{c}.$$

Určovací úseky $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_4$ sestrojíme, vedeme-li $m''\,\mathfrak{a} \parallel m'\,n''$, $n''\,\mathfrak{b} \parallel m''\,n'$; neboť pak plyne z podobnosti trojúhelníků

$$\overline{a'\,\mathfrak{a}} = \overline{a\,m} \cdot \frac{\overline{m''\,m'}}{\overline{m\,n}} = a\,\frac{\eta_1}{c} = \mathfrak{P}_1, \qquad \overline{b'\,\mathfrak{b}} = \overline{n\,b} \cdot \frac{\overline{n''\,n'}}{\overline{m\,n}} = b\,\frac{\eta_2}{c} = \mathfrak{P}_4.$$

Určovací úseky sil $\mathfrak{P}$ přeneseme do čáry složkové:

$$\overline{a'\,\mathfrak{a}} = \overline{I\,I'}, \qquad \overline{m''\,m'} = \overline{II\;II'}, \qquad \overline{n''\,n'} = \overline{III\;III'}, \qquad \overline{b'\,\mathfrak{b}} = \overline{IV\;IV'};$$

momenty ohybové jsou zde kladné, síly $\mathfrak{P}$ tedy směřují vzhůru.

Pólová vzdálenost F podle vzorce (45^b) by byla příliš veliká, neboť dosazením $E = 2000$ t/cm^2 (nosník ocelový), $J = 4304$ cm^4, $e = 1{,}25$ m $= 125$ cm, $f = 2$ m $= 200$ cm vyjde

$$F = \frac{E\,J}{e\,f} = \frac{2000 \cdot 4304}{125 \cdot 200} = 344{,}3 \text{ t}.$$

Zvolíme tedy jinou vzdálenost F_1 buď libovolně nebo podle vzorce (47), chceme-li míti pořadnice ohybové ve skutečné velikosti. Z pólu ω na př. ve vzdálenosti $F_1 = 2{,}5$ t od složkové čáry zvoleného rýsujeme k břemenům $\mathfrak{P}$ výslednicovou čáru $a_0\;I\;II\;III\;IV\;b_0$, do níž by bylo vepsati křivku, dotýkající se stran této lomené čáry na prodloužených svislých mezích proužkových, tedy na svislicích bodů a, m, n, b; strana $II\;III$ není tečnou čáry ohybové, poněvadž je druhý a třetí díl plochy momentové rozdělen šikmou mezí $m'\,n''$.

Jde-li jen o největší průhyb, není křivky ohybové potřebí. Pořadnice ohybové měříme od základní strany $a_0 b_0$; obrazec ohybový je pak totožný s momentovým obrazcem nosníku délky $a\,b$, na nějž by působila spojitá soustava silová, daná plochou momentovou jakožto plochou určovací. Pólový paprsek $\omega\;\gamma \parallel a_0\;b_0$ určuje základní bod γ složkového obrazce, jenž odpovídá průřezu c nosníku, v němž má ohybová čára největší pořadnici. Bod c určíme jako přechodný průřez nosníku spojitě zatíženého. Bod γ rozděluje určovací úsek $\overline{II\;II'} + \overline{III\;III'} = \overline{II\;III'}$, příslušný lichoběžníku $m''\,m'\,n'\,n''$, ve dva díly $\overline{II\;\gamma}$, $\overline{\gamma\;III'}$; pak dělí svislice bodu c lichoběžník $m''\,m'\,n'\,n''$ ve dvě části, jež mají určovací úseky $\overline{II\;\gamma}$, $\overline{\gamma\;III'}$. Jest tedy

$$\text{pl. } m''\,m'\,c'\,c'' = e \cdot \overline{II\;\gamma} = \text{pl. } m''\,m'''\,n'',$$

jestliže $\overline{II\;\gamma} = \overline{m''\,m'''}$, neboť $e = \frac{1}{2}\,\overline{m\,n}$. Trojúhelník $m''\,m'''\,n''$ proměníme nyní na lichoběžník $m''\,m'\,c'\,c''$, což lze řešiti zkusmo nebo přesně.

Veďme $m'''\,r' \parallel m'\,n''$; pak jest pl. $m''\,m'''\,n'' =$ pl. $m''\,m'\,r'$, tedy pl. $m''\,m'\,c'\,c'' =$ pl. $m''\,m'\,r'$ nebo pl. $m'\,c'\,c'' =$ pl. $m'\,r'\,c''$, což bude tehdy, bude-li $c'\,r' \parallel m'\,c''$. Zkusmo řešíme tak, že volíme svislici $c'\,c''$ a přesvědčíme se, je-li $c'\,r' \parallel m'\,c''$; není-li tomu tak, opravíme svislici $c'\,c''$ a stanovíme správnou mez $c'\,c''$ obyčejně již jednou opravou. Svislicí $c'\,c''$ rozdělíme dodatečně lichoběžník $m''\,m'\,n'\,n''$ na dva díly $m''\,m'\,c'\,c''$, $c''\,c'\,n'\,n''$, jež nahradíme v tížnicích těchto dílů působícími břemeny $\mathfrak{P}'_2 = \overline{II\;\gamma}$, $\mathfrak{P}'_3 = \overline{\gamma\;III'}$. Pak platí strana $I\;II$ pouze do bodu II' na paprsku $\mathfrak{P}'_2$, strana $III\;IV$ od bodu III' na paprsku $\mathfrak{P}'_3$; mezi břemeny $\mathfrak{P}'_2$, $\mathfrak{P}'_3$ platí strana $II'\;III' \parallel \omega\;\gamma \parallel a_0\,b_0$, což je kontrolou správnosti řešení. Strana $II'\;III'$ omezí největší pořadnici $y_1 = \overline{c'_0\,c_0} = 307$ cm, jež přísluší k pólové vzdálenosti F_1; největší pořadnice ohybová je podle vzorce (41^a), volíme-li F_1 libovolně,

$$y = y_1 \frac{F_1}{F} = 307 \cdot \frac{2{,}5}{344{,}3} = 2{,}23 \text{ cm}.$$

Zvolíme-li F_1 podle vzorce (47), dostaneme v délce $\overline{c'_0\,c_0}$ největší pořadnici ohybovou ve skutečné velikosti.

Přesně určíme bod c z rovnice pl. $m''\,m'\,r' =$ pl. $m''\,m'\,c'\,c''$. Sekou-li se strany $m'\,n'$, $a'\,b'$ v bodě s', je též pl. $s'\,m'\,r' =$ pl. $s'\,c'\,c''$, tedy

$$\tfrac{1}{2}\,\overline{s\,r} \cdot \overline{m''\,m'} = \tfrac{1}{2}\,\overline{s\,c} \cdot \overline{c''\,c'}.$$

Z obrazce plyne

$$\overline{m'' m'} = \overline{c'' c'} \cdot \frac{\overline{s m}}{\overline{s c}};$$

dosazením do předešlé rovnice dostaneme

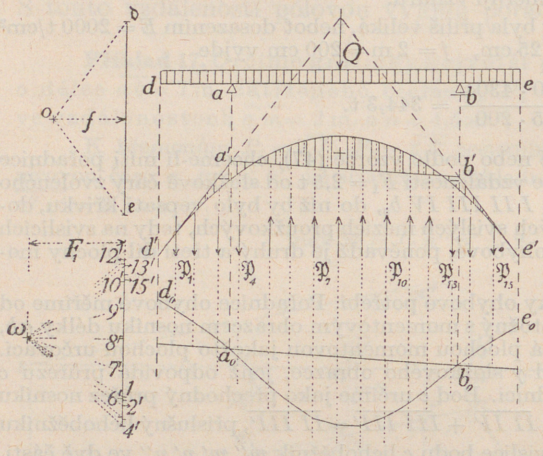
$$\overline{s r} \cdot \overline{c'' c'} \cdot \frac{\overline{s m}}{\overline{s c}} = \overline{s c} \cdot \overline{c'' c'}.$$

Konečně vychází

$$\overline{s c}^2 = \overline{s m} \cdot \overline{s r},$$

i sestrojíme $\overline{s c}$ jakožto střední měřickou úměrnou úseků $\overline{s m}$, $\overline{s r}$; rovná se pak $\overline{s c}$ délce $\overline{s c+}$ tečny, vedené z bodu s k polokružnici nad průměrem $\overline{m r}$.

β) ***Nosník s konci přes podpory přečnívajícími.*** Ohybová čára tohoto nosníku se řeší zase podle věty Mohrovy; jen základní strana její se určí poněkud jinak. K danému zatížení, na př. rovnoměrnému po celém nosníku, sestrojíme obrazec momentový (obr. 64); tu nahradíme veškeré zatížení výslednicí Q působící uprostřed nosníku $d\,e$, přeneseme do obrazce složkového úsek $Q = \overline{b\,e}$ a z pólu o ve vzdálenosti f narýsujeme k břemeni Q výslednicovou čáru, do níž vepíšeme parabolu mající v bodech d', e' body dotyčné. Základní strana momentového obrazce spojuje průsečíky a', b' svislic podporových s krajními stranami čáry výslednicové. Obrazec momentový pokládáme nyní za určovací plochu spojité soustavy silové, k níž sestrojíme čáru výslednicovou. Plochu momentovou rozdělíme tu svislicemi na úzké proužky, jež nahradíme ideálnými břemeny $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$, působícími v tížnicích proužků (přibližně uprostřed proužků lichoběžníkových). Určovací úseky břemen $\mathfrak{P}_1 = \overline{1\,1'}$, $\mathfrak{P}_2 = \overline{1'\,2'}$, $\mathfrak{P}_3 = \overline{2'\,3'}, \ldots$ stanovíme, uvedeme-li obsahy proužků na touž půdici e.[1]) Kladné plochy momentové nahrazujeme silami, jež působí vzhůru, záporné plochy momentové silami dolů působícími. K břemenům $\mathfrak{P}$ rýsujeme pak čáru výslednicovou z pólu ω, zvoleného na př. v libovolné vzdálenosti F_1; do této čáry výslednicové vepíšeme křivku $d_0\,a_0\,b_0\,e_0$, jež se dotýká jejích stran na prodloužených svislých mezích proužkových.



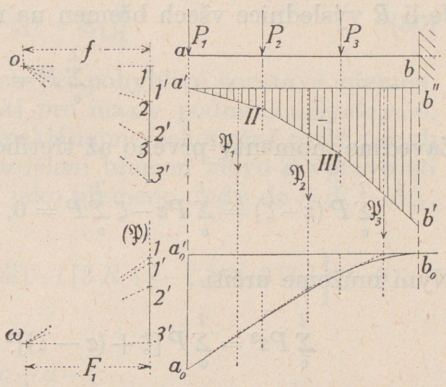
Obr. 64.

Skutečná čára ohybová by procházela podporovými body a, b, v nichž jsou ohybové pořadnice rovny nule. Základní strana, od níž měříme pořadnice ohybové, spojuje tedy průsečíky a_0, b_0 ohybové křivky se svislicemi podpor. Odmyslíme-li si přečnívající konce $d\,a$, $b\,e$ a k nim příslušné části plochy momentové, má se střední díl $a\,b$ jako nosník podepřený na koncích, pokud jde o čáru ohybovou. Určili bychom tedy na př. největší průhyb mezi podporami a, b, jako kdyby nosník končil v podporách a, b; co je mimo délku $\overline{a\,b}$, můžeme si tu odmysliti. Z pořadnic y_1, určených pólovou vzdáleností F_1, vypočteme správné pořadnice ohybové podle vzorce (41^a), dosazujíce za F ze vzorce (45^b).

γ) ***Nosník na jednom konci volný, na druhém vetknutý*** se řeší podobně jako předešlé nosníky. Ohybová čára je zase výslednicovou čarou ke spojité soustavě si-

[1]) Viz prvý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1940), str. 101.

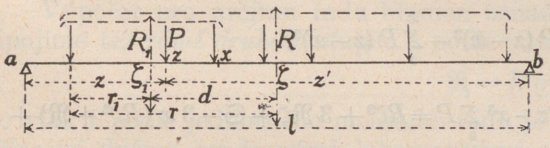
lové, jejíž určovací plochou je plocha momentová. Je-li tedy nosník $a\,b$ zatížen na př. osamělými břemeny P_1, P_2, P_3 (obr. 65), určíme k danému zatížení obrazec momentový, jenž jest omezen výslednicovou čarou $a'\,II\,III\,b'$ a její prodlouženou první stranou $a'\,b''$. Plochu momentovou rozdělíme svislicemi na proužky, jež nahradíme břemeny $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$ působícími v tížnicích proužků; určovací úseky břemen $\mathfrak{P}$ se stanoví uvedením obsahů proužků na libovolnou půdici e. Momenty ohybové jsou zde vesměs záporné, proto síly $\mathfrak{P}$ působí dolů. K nim sestrojíme z pólu ω, zvoleného na př. v libovolné vzdálenosti F_1, výslednicovou čáru lomenou, do níž vepíšeme křivku $a_0\,b_0$, dotýkající se stran lomené čáry na prodloužených svislých mezích proužkových. Ve vetknutém konci se dotýká ohybová čára původní přímé osy nosníku, je-li nosník vetknut dokonale. Ohybovou čáru $a_0\,b_0$ třeba tedy vztahovati k prodloužené tečně v bodě b_0 (poslední straně), od níž měříme pořadnice ohybové. Volíme-li pól ω na vodorovnici konce složkové čáry sil $\mathfrak{P}$, vyjde osa $a_0'\,b_0$ ohybové čáry vodorovná. Je-li vzdálenost pólová F_1 libovolná, stanovíme z pořadnic y_1 příslušné čáry výslednicové správné pořadnice ohybové dle vzorce (41^a).



Obr. 65.

19. Výpočet největšího průhybu prostého nosníku při pohyblivé soustavě břemen. Působí-li na prostý nosník stálého průřezu soustava břemen (obr. 66), určíme průhyb bodu x ($\overline{a\,x} = x$, $\overline{x\,b} = x'$) z příčinkové čáry, jejíž rovnici jsme odvodili v příkladě 16. Pro břemena v polohách z vlevo od průřezu x platí rovnice (46^a)

$$y = \frac{P\,x'\,z\,(l^2 - x'^2 - z^2)}{6\,EJl},$$



Obr. 66.

pro břemena vpravo od průřezu x rovnice (46^b)

$$y = \frac{P\,x\,z'\,(l^2 - x^2 - z'^2)}{6\,EJl}.$$

Účinky jednotlivých břemen sečteme a dostaneme celkový průhyb

$$y = \frac{1}{6\,E\,J\,l}\,[x'\,(l^2 - x'^2) \sum_0^x Pz - x' \sum_0^x Pz^3 + x\,(l^2 - x^2) \sum_x^l Pz' - x \sum_x^l Pz'^3].$$

Dosadíme-li $z' = l - z$, $x' = l - x$, vyjádříme

$$\sum_x^l Pz' = \sum_x^l P\,(l - z) = l \sum_x^l P - \sum_x^l Pz,$$

$$\sum_x^l Pz'^3 = \sum_x^l P\,(l - z)^3 = l^3 \sum_x^l P - 3\,l^2 \sum_x^l Pz + 3\,l \sum_x^l Pz^2 - \sum_x^l Pz^3,$$

$$x'\,(l^2 - x'^2) = x'\,(l + x')\,(l - x') = x\,x'\,(l + x') = (l - x)\,(2\,lx - x^2) = 2\,l^2\,x - 3\,l\,x^2 + x^3.$$

Vzorec pro y nabude tím po jednoduché úpravě tvaru

$$y=\frac{1}{6EJl}[(2l^2x-3lx^2+x^3)\sum_0^l Pz-x'\sum_0^l Pz^3+l\sum_x^l Pz^3-3lx\sum_x^l Pz^2+3lx^2\sum_x^l Pz-lx^3\sum_x^l P]=$$

$$=\frac{1}{6EJl}[xx'(l+x')\sum_0^l Pz-x'\sum_0^l Pz^3+l\sum_x^l P(z-x)^3].$$

Je-li R výslednice všech břemen na nosníku a ζ její působiště ($\overline{a\,\zeta}=\zeta$, $\overline{\zeta\,b}=\zeta'$), platí:

$$\sum_0^l P=R, \qquad \sum_0^l Pz=R\zeta. \tag{48a}$$

Zaveďme momenty prvého až třetího stupně k paprsku výslednice:

$$\sum_0^l P(z-\zeta)=\sum_0^l Pz-\zeta\sum_0^l P=0, \qquad \sum_0^l P(z-\zeta)^2=\mathfrak{R}, \qquad \sum_0^l P(z-\zeta)^3=\mathfrak{S}. \tag{48b}$$

Nyní můžeme určiti

$$\sum_0^l Pz^2=\sum_0^l P[\zeta+(z-\zeta)]^2=\zeta^2\sum_0^l P+2\zeta\sum_0^l P(z-\zeta)+\sum_0^l P(z-\zeta)^2,$$

$$\sum_0^l Pz^3=\sum_0^l P[\zeta+(z-\zeta)]^3=\zeta^3\sum_0^l P+3\zeta^2\sum_0^l P(z-\zeta)+3\zeta\sum_0^l P(z-\zeta)^2+\sum_0^l P(z-\zeta)^3$$

čili

$$\sum_0^l Pz^2=R\zeta^2+\mathfrak{R}, \qquad \sum_0^l Pz^3=R\zeta^3+3\mathfrak{R}\zeta+\mathfrak{S}; \tag{49a}$$

dále jest

$$\sum_x^l P(z-x)^3=\sum_0^l P(z-x)^3-\sum_0^x P(z-x)^3,$$

$$\sum_0^l P(z-x)^3=\sum_0^l Pz^3-3x\sum_0^l Pz^2+3x^2\sum_0^l Pz-x^3\sum_0^l P=R\zeta^3+3\mathfrak{R}\zeta+\mathfrak{S}-3x(R\zeta^2+\mathfrak{R})+$$

$$+3x^2\cdot R\zeta-Rx^3=-R(x-\zeta)^3-3\mathfrak{R}(x-\zeta)+\mathfrak{S}. \tag{49b}$$

Dosazením dostaneme

$$y=\frac{1}{6EJl}\left\{xx'(l+x')R\zeta-x'(R\zeta^3+3\mathfrak{R}\zeta+\mathfrak{S})+l[-R(x-\zeta)^3-3\mathfrak{R}(x-\zeta)+\right.$$

$$\left.+\mathfrak{S}-\sum_0^x P(z-x)^3]\right\},$$

což lze snadno upraviti na tvar

$$y=\frac{1}{6EJl}\left\{x\left(R\zeta^3-3Rl\zeta^2+[R(2l^2+x^2)+3\mathfrak{R}]\zeta-(Rlx^2+3\mathfrak{R}l-\mathfrak{S})\right)+l\sum_0^x P(x-z)^3\right\}.$$

Značíme-li R_1 výslednici břemen vlevo od x, ζ_1 její působiště a

$$\mathfrak{R}_1=\sum_0^x P(\zeta_1-z)^2, \qquad \mathfrak{S}_1=\sum_0^x P(\zeta_1-z)^3$$

momenty 2. a 3. stupně příslušné soustavy břemen k paprsku výslednice R_1, je podle rovnice (49b)

$$\sum_0^x P(x-z)^3=-\sum_0^x P(z-x)^3=R_1(x-\zeta_1)^3+3\mathfrak{R}_1(x-\zeta_1)-\mathfrak{S}_1. \tag{49c}$$

Průhyb v bodě x má tedy konečnou hodnotu

$$y = \frac{1}{6EJl}\left\{x\left(R\zeta^3 - 3Rl\zeta^2 + [R(2l^2+x^2)+3\mathfrak{R}]\zeta - (Rlx^2+3\mathfrak{R}l-\mathfrak{S})\right)+\right.$$
$$\left. + l[R_1(x-\zeta_1)^3 + 3\mathfrak{R}_1(x-\zeta_1) - \mathfrak{S}_1]\right\} = \frac{1}{6EJl}\left\{[R(l^2-x^2-\zeta'^2)\zeta' - 3\mathfrak{R}\zeta' + \mathfrak{S}]x + \right.$$
$$\left. + l[R_1(x-\zeta_1)^3 + 3\mathfrak{R}_1(x-\zeta_1) - \mathfrak{S}_1]\right\}. \qquad (50)$$

Z tohoto vzorce lze určiti též největší průhyb při pohyblivé soustavě břemen. Při spojité proměně derivace, jaká zde bude, platí pro $\max y$ podmínka $dy/dz = 0$, je-li z proměnná úsečka libovolného břemene. Předpokládejme nekonečně malý pohyb soustavy, při němž se nemění ani soustava, ani rozdělení břemen vlevo a vpravo od průřezu x; tu se výslednice R i R_1 pohybují stejně jako břemena, tedy $dz = d\zeta = d\zeta_1$. Vychází proto

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{6EJl}\left\{x[3R\zeta^2 - 6Rl\zeta + R(2l^2+x^2) + 3\mathfrak{R}] - l[3R_1(x-\zeta_1)^2 + 3\mathfrak{R}_1]\right\} = 0.$$

Znamenejme d vzdálenost paprsků R_1, R; tu jest

$$\zeta_1 = \zeta - d, \qquad x - \zeta_1 = x + d - \zeta$$

a výminka pro $\max y$ bude

$$x[3R\zeta^2 - 6Rl\zeta + R(2l^2+x^2) + 3\mathfrak{R}] - 3l[R_1(x+d)^2 - 2R_1(x+d)\zeta + R_1\zeta^2 + \mathfrak{R}_1] = 0$$

nebo po uspořádání podle mocnin neznámé ζ

$$(Rx - R_1 l)\zeta^2 - 2[Rx - R_1(x+d)]l\zeta + \frac{Rx}{3}(2l^2+x^2) + \mathfrak{R}x - [R_1(x+d)^2 + \mathfrak{R}_1]l = 0. \qquad (51)$$

Výpočet pro určitou řadu břemen usnadní tabulka hodnot R, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, r; k tomu připojíme též *rámě druhého stupně* ϱ podle vztahu

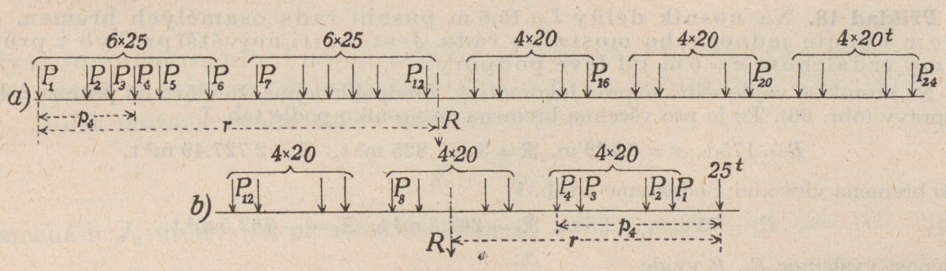
$$\mathfrak{R} = R\varrho^2. \qquad (48^c)$$

Pro vlak I podle jednotného mostního řádu je připojena tabulka I, jež platí pro vlak začínající dvěma tendrovými lokomotivami s nákladními vozy jednostranně připojenými (obr. 67*a*). Pro nákladní vozy, jež mohou býti připojeny podle mostního řádu též před první lokomotivou (obr. 67*b*), jsou uvedeny v tabulce II některé hodnoty. Znamená-li p vzdálenost břemene od prvního břemene lokomotivy, platí pro vzdálenost r výslednice od první nápravy lokomotivy

$$r = \frac{\Sigma Pp}{R}.$$

Dále jest, směřují-li kladné úsečky vpravo,

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{R} &= \Sigma P(p-r)^2 = \Sigma Pp^2 - 2r\Sigma Pp + r^2\Sigma P = \Sigma Pp^2 - r\Sigma Pp,\\ \mathfrak{S} &= \Sigma P(p-r)^3 = \Sigma Pp^3 - 3r\Sigma Pp^2 + 3r^2\Sigma Pp - r^3\Sigma P = \Sigma Pp^3 - r(3\Sigma Pp^2 - 2r\Sigma Pp).\end{aligned}\right\} \qquad (52)$$



Obr. 67.

Tabulka I.

n	P (t)	p (m)	$R=\Sigma P$ (t)	ΣPp (mt)	ΣPp^2 (m²t)	ΣPp^3 (m³t)	r (m)	$\mathfrak{R}$ (m² t)	$\mathfrak{S}$ (m³t)	ϱ^2 (m²)	ϱ (m)
1	25	0	25	0	0	0	0	0	0	0	0
2	25	3,0	50	75,0	225,00	675,000	1,5	112,5	0	2,25	1,5
3	25	4,5	75	187,5	731,25	2 953,125	2,5	262,5	− 862,5	3,50	1,871
4	25	6,0	100	337,5	1 631,25	8 353,125	3,375	492,187 5	− 474,626	4,921 875	2,219
5	25	7,5	125	525,0	3 037,50	18 900,000	4,2	832,5	− 850,5	6,660	2,581
6	25	10,5	150	787,5	5 793,75	47 840,625	5,25	1 659,375	0	11,062 5	3,326
7	25	13,5	175	1 125,0	10 350,00	109 350,000	6,428 6	3 117,825	+ 2 727,490	17,816 143	4,221
8	25	16,5	200	1 537,0	17 156,25	221 653,125	7,687 5	5 336,718 7	+ 7 712,383	26,683 594	5,166
9	25	18,0	225	1 987,0	25 256,25	367 453,125	8,833 3	7 700,0	+ 8 322,918	34,222 222	5,850
10	25	19,5	250	2 475,0	34 762,50	552 825,000	9,9	10 260,0	+ 5 528,250	41,04	6,406
11	25	21,0	275	3 000,0	45 787,50	784 350,000	10,909 1	13 060,2	− 99,818	47,491 636	6,891
12	25	24,0	300	3 600,0	60 187,50	1 129 950,000	12,0	16 987,5	0	56,625	7,525
13	20	27,0	320	4 140,0	74 767,50	1 523 610,000	12,937 5	21 206,25	+ 7 593,750	66,269 531	8,141
14	20	28,5	340	4 710,0	91 012,50	1 986 592,500	13,852 9	25 765,34	+ 11 956,082	75,780 412	8,705
15	20	32,5	360	5 360,0	112 137,50	2 673 155,000	14,888 9	32 333,0	+ 40 747,335	89,813 889	9,477
16	20	34,0	380	6 040,0	135 257,50	3 459 235,000	15,894 7	39 253,51	+ 61 512,084	103,298 711	10,164
17	20	37,0	400	6 780,0	162 637,50	4 472 895,000	16,95	47 716,5	+ 98 600,025	119,291 250	10,922
18	20	38,5	420	7 550,0	192 282,50	5 614 227,500	17,976 2	56 562,19	+124 172,344	134,671 881	11,605
19	20	42,5	440	8 400,0	228 407,50	7 149 540,000	19,090 9	68 043,94	+190 972,746	154,645 318	12,436
20	20	44,0	460	9 280,0	267 127,50	8 853 220,000	20,173 9	79 913,71	+239 874,139	173,725 457	13,180
21	20	47,0	480	10 220,0	311 307,50	10 929 680,000	21,291 7	93 706,33	+311 079,969	195,221 521	13,972
22	20	48,5	500	11 190,0	358 352,50	13 211 362,500	22,95	101 542,0	+326 394,825	203,084 000	14,251
23	20	52,5	520	12 240,0	413 477,50	16 105 425,000	23,538 5	125 366,26	+470 917,444	241,088 962	15,527
24	20	54,0	540	13 320,0	471 797,50	19 254 705,000	24,666 7	143 237,5	+550 649,997	265,254630	16,287

Tabulka II.

n	P (t)	p (m)	$R=\Sigma P$ (t)	ΣPp (mt)	ΣPp^2 (m² t)	ΣPp^3 (m³ t)	r (m)
1	20	− 3,0	20	− 60	180	− 540,0	− 3,0
2	20	− 4,5	40	− 150	585	− 2 362,5	− 3,75
3	20	− 8,5	60	− 320	2 030	− 14 645,0	− 5,333 3
4	20	− 10,0	80	− 520	4 030	− 34 645,0	− 6,5
5	20	− 13,0	100	− 780	7 410	− 78 585,0	− 7,8
6	20	− 14,5	120	− 1 070	11 615	− 139 557,5	− 8,916 7
7	20	− 18,5	140	− 1 440	18 460	− 266 190,0	−10,286 7
8	20	− 20,0	160	− 1 840	26 460	− 426 190,0	−11,5
9	20	− 23.0	180	− 2 300	37 040	− 669 530,0	−12,777 8
10	20	− 24,5	200	− 2 790	49 045	− 963 652,5	−13,95
11	20	− 28,5	220	− 3 360	65 290	− 1 426 635,0	−15,272 7
12	20	− 30,0	240	− 3 960	83 290	− 1 966 635,0	−16,5

Příklad 18. Na nosník délky $l = 15{,}6$ m působí řada osamělých břemen, daná vlakem I podle jednotného mostního řádu. Jest určiti největší průhyb v průřezu, jenž má vzdálenost $x = 6$ m od levé podpory.

Na nosník se vejde sedm náprav lokomotivy. Předpokládejme, že vlevo od průřezu x budou tři nápravy (obr. 66). Tu je pro všechna břemena na nosníku podle tab. I

$$R = 175 \text{ t}, \quad r = 6{,}429 \text{ m}, \quad \mathfrak{R} = 3\,117{,}825 \text{ m}^2\text{ t}, \quad \mathfrak{S} = 2\,727{,}49 \text{ m}^3\text{ t}.$$

Pro tři břemena vlevo od x odečteme z tab. I

$$R_1 = 75 \text{ t}, \quad r_1 = 2{,}5 \text{ m}, \quad \mathfrak{R}_1 = 262{,}5 \text{ m}^2\text{ t}, \quad \mathfrak{S}_1 = -\,862{,}5 \text{ m}^3\text{ t}.$$

Vzdálenost výslednic R_1, R vyjde

$$d = r - r_1 = 3{,}929 \text{ m}.$$

Vypočteme nyní součinitele v rovnici (51):

$$R\,x - R_1\,l = 175 \cdot 6 - 75 \cdot 15{,}6 = -120,$$

$$[R\,x - R_1\,(x+d)]\,l = [175 \cdot 6 - 75 \cdot (6 + 3{,}929)] \cdot 15{,}6 = 4\,763{,}07,$$

$$\frac{Rx}{3}(2\,l^2 + x^2) + \mathfrak{R}\,x - [R_1\,(x+d)^2 + \mathfrak{R}_1]\,l = \frac{175 \cdot 6}{3}(2 \cdot 15{,}6^2 + 6^2) + 3\,117{,}825 \cdot 6 -$$

$$- [75 \cdot (6 + 3{,}929)^2 + 262{,}5] \cdot 15{,}6 = 82\,219{,}45.$$

Rovnice (51) je zde tedy

$$-120\zeta^2 - 2 \cdot 4\,763{,}07\zeta + 82\,219{,}45 = 0;$$

řešením vyjde úsečka obsažená uvnitř délky nosníku

$$\zeta = \frac{-4\,763{,}07 + \sqrt{4\,763{,}07^2 + 120 \cdot 82\,219{,}45}}{120} = 7{,}854\text{ m},\quad \zeta' = l - \zeta = 7{,}746\text{ m}.$$

Za této polohy výslednice jsou úsečky břemen:

$$z_1 = \zeta - r = 7{,}854 - 6{,}429 = 1{,}425\text{ m},\quad z_3 = z_1 + p_3 = 1{,}425 + 4{,}5 = 5{,}925\text{ m} < x,$$

$$z_7 = z_1 + p_7 = 1{,}425 + 13{,}5 = 14{,}925\text{ m} < l$$

a úsečka výslednice R_1

$$\zeta_1 = \zeta - d = 7{,}854 - 3{,}929 = 3{,}925\text{ m}.$$

Poloha soustavy vyhovuje předpokladu a dá max y, jež vypočteme podle vzorce (50), v němž známe již všechny veličiny. Dosazením číselných hodnot do vzorce (50) určíme

$$EJ\,y_{max} = \frac{1}{6 \cdot 15{,}6}\Big\{[175 \cdot (15{,}6^2 - 6^2 - 7{,}746^2) \cdot 7{,}746 - 3 \cdot 3\,117{,}825 \cdot 7{,}746 + 2\,727{,}49] \cdot 6 +$$

$$+ 15{,}6[75 \cdot (6 - 3{,}925)^3 + 3 \cdot 262{,}5 \cdot (6 - 3{,}925) + 862{,}5]\Big\} = 8750{,}44.$$

Jelikož jsme dosazovali síly v t a délky v m, je potřebí v těchto jednotkách dosaditi E, J a výsledek vyjde v m.

b) Nosník průřezu proměnného.

20. Grafické stanovení čáry ohybové. Ohybová čára přímého nosníku je výslednicovou čarou ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plocha má pořadnice $\mathfrak{y}$ dané vzorcem (44); vzorec ten platí patrně i pro nosník průřezu proměnného a dává pořadnici

$$\mathfrak{y} = \frac{e\,f\,F}{E\,J}\,\eta\,. \tag{53}$$

Zde znamená f vzdálenost pólovou, se kterou je rýsován obrazec momentový, η pořadnici momentovou, e půdici, na kterou uvádíme obsahy proužků plochy momentové, abychom určili úseky ideálných břemen $\mathfrak{P}$; dále jest E modul pružnosti hmoty nosníkové, J moment setrvačnosti průřezu nosníku k jeho ose neutrálné a F pólová vzdálenost, jíž užíváme rýsujíce čáru ohybovou.

Mění-li se průřez nosníku, tedy je-li J proměnné, můžeme zase voliti jako při stálém průřezu

$$F = \frac{E\,J}{e\,f}\,; \tag{45^b}$$

pólová vzdálenost F se pak mění od průřezu k průřezu jako moment setrvačnosti J. Tu vyjde i zde

$$\mathfrak{y} = \eta, \tag{45^a}$$

tedy momentovou plochu pokládáme za určovací plochu spojité soustavy silové, k níž rýsujeme výslednicovou čáru proměnnou vzdáleností pólovou F.

Jinak můžeme zvoliti stálou vzdálenost pólovou

$$F = \frac{E\,J_0}{e\,f}\,, \tag{54^a}$$

znamená-li J_0 určitý (na př. střední) moment setrvačnosti; z rovnice (53) vyjde pak

$$\mathfrak{y} = \eta\,\frac{J_0}{J}\,. \tag{54^b}$$

Podle toho veškeré momentové pořadnice η redukujeme v poměru $\frac{J_0}{J}$, čímž obržíme určovací plochu spojité soustavy silové, jejíž výslednicovou čarou je čára ohybová, užíváme-li stálé vzdálenosti pólové F dané vzorcem (54^a).

Prvý způsob se hodí lépe, řešíme-li graficky; druhý je výhodnější pro řešení početářské, po případě smíšené, při němž břemena $\mathfrak{P}$ určujeme počtem, výslednicovou čáru k nim pak stanovíme graficky.

Průřez nosníku se mění buď spojitě nebo stupňovitě; rozměry průřezové jsou totiž buď v každém průřezu jiné nebo se mění jen v některých průřezech, zůstávajíce mezi těmito průřezy stálými. Proměnu momentu setrvačnosti znázorníme graficky *čarou momentu setrvačnosti*, jejíž pořadnice v každém průřezu jest úměrná momentu setrvačnosti toho průřezu; přenášíme tu buď samy momenty setrvačnosti v jistém měřidle nebo úseky jim úměrné, jež plynou, uvedeme-li momenty setrvačnosti všech průřezů na tři stálé úseky a čtvrtý proměnný. Čára momentu setrvačnosti je při spojité proměně průřezu spojitou křivkou, při stupňovité proměně čarou stupňovitou. Řešíme-li pak ohybovou čáru prvým způsobem, mění se při spojité proměně průřezu vzdálenost F spojitě; jednotlivé póly vyplní v obrazci složkovém spojitou *křivku pólovou*. Mění-li se průřez stupňovitě, redukuje se křivka pólová na několik pólů, z nichž každý náleží k části nosníku, v níž je průřez stálý. Prakticky nahrazujeme ovšem spojitou proměnu průřezu proměnou stupňovitou, rozdělujíce nosník na díly dosti úzké, v nichž pokládáme průřez nosníku za stálý, neboť nedovedeme operovati díly nekonečně malými.

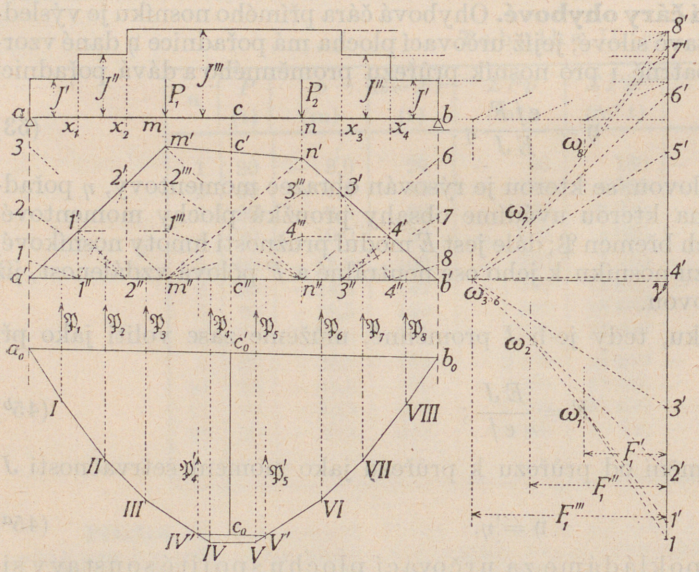
Příklad 19. Vyšetřme největší průhyb nosníku $a\,b$ proměnného průřezu, zatíženého v bodech m, n břemeny P_1, P_2. Čára momentu setrvačnosti budiž vyznačena v obr. 68 při ose nosníku.[1])

Průřez nosníku se mění podle obr. 68 stupňovitě; v částech $a\,x_1$, $x_4\,b$ je stálý moment setrvačnosti J', v částech $x_1\,x_2$, $x_3\,x_4$ stálý moment J'' a v části $x_2\,x_3$ stálý moment J'''. Určíme zase k daným břemenům P_1, P_2 vzdáleností pólovou f obrazec momentový $a'\,m'\,n'\,b'$ a rozdělíme jej na díly nejen svislicemi vrcholů m', n', nýbrž i svislicemi průřezů x_1, x_2, x_3, x_4, v nichž se mění průřez nosníku. Lichoběžník $m''\,m'\,n'\,n''$ rozdělme na př. úhlopříčnou $m''\,n'$ na dva trojúhelníky. Momentová plocha je tím rozdělena na osm dílů, jež nahrazujeme břemeny $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, ... Úseky břemen $\mathfrak{P}$ stanovíme podle rovnice

$$\mathfrak{P} = \frac{u}{e},$$

je-li u obsah příslušného dílu a e půdice, již zvolíme výhodně $e = \frac{1}{2}\,\overline{m\,n}$. Pak jest $\mathfrak{P}_4 = \overline{m''\,m'}$, $\mathfrak{P}_5 = \overline{n''\,n'}$. Dále vyjde

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{\overline{a\,x_1}\cdot\overline{1''\,1'}}{2\,e} = \frac{\overline{a\,x_1}\cdot\overline{1''\,1'}}{\overline{m\,n}},$$



Obr. 68.

což určíme, vedeme-li $1'\,1''' \parallel a'\,b'$, $1''\,1 \parallel n''\,1'''$; pak jest $\mathfrak{P}_1 = \overline{a'\,1}$. Vedeme-li podobně $2'\,2''' \parallel a'\,b'$, $2''\,2 \parallel n''\,2'''$, jest $\overline{a'\,2} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2$, tedy $\mathfrak{P}_2 = \overline{1\,2}$. Konečně přímka $m''\,3 \parallel m'\,n''$ určí $\mathfrak{P}_3 = \overline{2\,3}$. Obdobně stanovíme úseky $\mathfrak{P}_6 = \overline{7\,6}$, $\mathfrak{P}_7 = \overline{8\,7}$, $\mathfrak{P}_8 = \overline{b'\,8}$. Určovací úseky sil $\mathfrak{P}$ sečteme v čáře složkové; poněvadž jsou momenty ohybové kladné, směřují všechny síly $\mathfrak{P}$ vzhůru. Paprsky sil $\mathfrak{P}$ jsou dány svislými tížnicemi dílů plochy momentové.

[1]) Viz *J. Šolín* „Theorie zevnitřních sil trámů přímých", seš. II (Praha 1879), str. 13 a d.

Pólová vzdálenost F má zde podle vzorce (45^b) hodnoty

$$F' = \frac{E\,J'}{e\,f} \text{ (pro } \mathfrak{P}_1 \text{ a } \mathfrak{P}_8\text{)}, \quad F'' = \frac{E\,J''}{e\,f} \text{ (pro } \mathfrak{P}_2 \text{ a } \mathfrak{P}_7\text{)}, \quad F''' = \frac{E\,J'''}{e\,f} \text{ (pro } \mathfrak{P}_3 \text{ až } \mathfrak{P}_6\text{)}.$$

Poněvadž by byly tyto vzdálenosti příliš veliké, zvolíme přiměřeně menší vzdálenosti F_1', F_1'', F_1''', jež musí býti úměrné původním vzdálenostem, tedy

$$F_1' : F_1'' : F_1''' = F' : F'' : F''' = J' : J'' : J'''.$$

Volíme-li na př. F_1' libovolně, jest

$$F_1'' = F_1' \cdot \frac{J''}{J'}, \quad F_1''' = F_1' \cdot \frac{J'''}{J'}.$$

Na rovnoběžkách s čarou složkovou, vedených ve vzdálenostech F_1', F_1'', F_1''', jsou příslušné póly.

Zvolme libovolně ve vzdálenosti F_1' pól ω_1 a veďme strany čáry výslednicové $a_0\,I \parallel \omega_1\,1$, $I\,II \parallel \omega_1\,1'$. Strana $I\,II$ seče paprsek $\mathfrak{P}_2$, proto musí být rovnoběžná s pólovým paprskem $\omega_2\,1'$; pól ω_2 je tedy ve vzdálenosti F_1'' na prodlouženém paprsku $\omega_1\,1'$. Další strana $II\,III$ je rovnoběžná s pólovým paprskem $\omega_2\,2'$. Na tomto paprsku je též pól ω_3 ve vzdálenosti F_1'''. Pól ω_3 platí pro síly $\mathfrak{P}_3$ až $\mathfrak{P}_6$: je tedy $III\,IV \parallel \omega_3\,3'$, $IV\,V \parallel \omega_3\,4'$, $V\,VI \parallel \omega_3\,5'$, $VI\,VII \parallel \omega_3\,6'$. Na pólovém paprsku $\omega_3\,6'$ je ve vzdálenosti F_1'' pól ω_7; pak jest $VII\,VIII \parallel \omega_7\,7'$. Na paprsku $\omega_7\,7'$ je konečně ve vzdálenosti F_1' pól ω_8 a $VIII\,b_0 \parallel \omega_8\,8'$. Do lomené čáry výslednicové bychom mohli vepsati křivku, jež se dotýká stran lomené čáry na prodloužených svislých mezích proužkových. Křivky není třeba, jde-li jen o největší pořadnici ohybovou. Základní stranou ohybové čáry je spojnice $a_0\,b_0$; jde pak o rovnoběžnou tečnu ohybové čáry.

Veďme paprsek pólový rovnoběžný se stranou $a_0\,b_0$ tak, aby procházel pólem příslušným k síle, jejíž úsek onen paprsek rozdělí; vedeme tedy paprsek $\omega_3\,\gamma \parallel a_0\,b_0$ oním pólem ω_3, při němž padne paprsek $\omega_3\,\gamma$ dovnitř úhlu krajních paprsků z tohoto pólu vycházejících. Pak sestrojíme na ose nosníku bod c, jenž odpovídá bodu γ v čáře složkové; řešíme tu jako při stálém průřezu (viz příklad 14, obr. 63), neboť mezi body m, n se průřez nosníku nemění. Rozdělíme tedy lichoběžník $m''\,m'\,n'\,n''$ svislicí $c''\,c'$ na dva díly, jejichž obsahy se mají k sobě jako úseky $\overline{3'\,\gamma}$, $\overline{\gamma\,5'}$. V tížnicích obou dílů působí břemena $\mathfrak{P}_4' = \overline{3'\,\gamma}$, $\mathfrak{P}_5' = \overline{\gamma\,5'}$; paprsky jejich sekou lomenou čáru výslednicovou v bodech IV', V', jež spojuje tečna čáry ohybové $IV'\,V' \parallel \omega_3\,\gamma \parallel a_0\,b_0$, je-li správně rýsováno. Tím jest omezena největší pořadnice $y_1 = \overline{c_0'\,c_0}$, z níž vypočteme skutečnou pořadnici ohybovou y podle vzorce (41^a), tedy

$$y = y_1 \cdot \frac{F_1'}{F'}.$$

21. Počtářské řešení čáry ohybové jakožto čáry výslednicové. Jde-li pouze o jednotlivé pořadnice ohybové, vypočtou se nejlépe z rovnice čáry ohybové,[1]) jež plyne integrací základní rovnice (43). Hledáme-li však celou čáru ohybovou, určíme ji počtem výhodně podle věty Mohrovy jakožto výslednicovou čáru ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plocha má obecně pořadnice η dané vzorcem (53). Pro počtářské řešení dosaďme $f \cdot \eta = M$, je-li M moment ohybový; vyjde

$$\mathfrak{y} = \frac{e\,F\,M}{E\,J}. \tag{55}$$

Spojitou soustavu silovou lze nahraditi soustavou břemen nekonečně malých a blízkých; na délku $\mathrm{d}x$, jíž přísluší prvek určovací plochy $\mathrm{d}\,\mathfrak{U} = \mathfrak{y}\,\mathrm{d}x$, připadne elementární břímě

$$\mathrm{d}\,\mathfrak{P} = \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{U}}{e} = \frac{\mathfrak{y}\,\mathrm{d}x}{e} = \frac{F\,M}{E\,J}\,\mathrm{d}x.$$

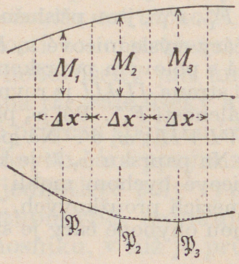
Řešíme-li počtem, zvolíme $F = 1$; prakticky nahradíme pak prvek délky $\mathrm{d}x$ přibližně dílkem malým, avšak konečným Δx, na nějž připadne ideálné břímě

$$\mathfrak{P} = \frac{M \cdot \Delta x}{E\,J}, \tag{56}$$

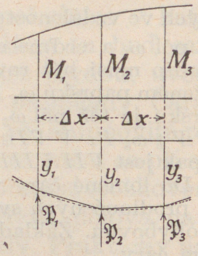
znamená-li M moment uprostřed dílku Δx. Břemenům $\mathfrak{P}$ bychom dali působiti jako při grafickém řešení přibližně uprostřed dílků Δx; výslednicová čára k břemenům $\mathfrak{P}$

[1]) *Jos. Šolín* „Základy technické nauky o pružnosti a pevnosti“ (Praha 1904), str. 102 a d., kdež je řešena tímto způsobem řada případů.

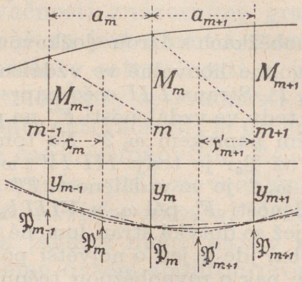
(obr. 69) by pak byla opsána křivce ohybové a dávala by správné pořadnice ohybové na mezích dílků Δx. Pro počtářské řešení je výhodnější stanoviti lomenou čáru vepsanou do čáry ohybové, jež by dávala v paprscích břemen skutečné pořadnice ohybové y. Jsou-li dílky Δx dosti malé, lze řešiti, jako by šlo o dílky nekonečně malé; na mezích dílků dáme tu působiti břemenům $\mathfrak{P}$, jež určíme podle vzorce (56), dosazujíce za M moment ohybový v paprsku břemene, tedy na mezi dílků. Výslednicová čára k těmto břemenům $\mathfrak{P}$ je pak přibližně vepsána do čáry ohybové, s níž má společné body v paprscích břemen (obr. 70).



Obr. 69.



Obr. 70.



Obr. 71.

Dělíme-li osu nosníku na větší díly a chceme-li počítati přesněji, odvodíme břemena $\mathfrak{P}$ na mezích dílů působící, k nimž náleží výslednicová čára lomená, vepsaná do křivky ohybové, uvážíme-li, že lze lomenou čáru vepsanou do křivky výslednicové pokládati za výslednicovou čáru pro zatížení nepřímé. Myslíme si tu (obr. 71) styčné body na mezích dílů $\ldots(m-1), (m), (m+1), \ldots$ a rozložíme zatížení každého dílu po zákonu prostého nosníku do styčných bodů, v témž bodě pak sečteme břemena, jež plynou ze zatížení obou dílů sousedních. Díly $\ldots a_m, a_{m+1}, \ldots$, na něž nosník dělíme, buďtež dosti malé, abychom mohli pokládati čáru momentovou v každém dílu za přímou a průřez nosníku za stálý; moment setrvačnosti průřezu nosníku v dílu a_m, a_{m+1} (přibližně uprostřed) znamenejme J_m, J_{m+1}. Klademe-li při počtářském řešení $F = 1$, má určovací plocha spojité soustavy silové, jejíž výslednicovou čarou je čára ohybová, podle vzorce (49) pořadnice

$$\eta = \frac{e\,M}{E\,J}.$$

Spojitou soustavu silovou rozložíme nyní v dílu a_m, a_{m+1} po zákonu prostého nosníku do bodů $(m-1)$, m, $(m+1)$ (obr. 71). Určovací plochu $\mathfrak{U}_m$ spojité soustavy silové v dílu am bychom nahradili břemenem

$$\mathfrak{P}'_m = \frac{\mathfrak{U}_m}{e},$$

působícím v tížnici určovací plochy, jež měj od bodu $(m-1)$ vzdálenost ξ_m; podobně určovací plochu $\mathfrak{U}_{m+1}$ v dílu a_{m+1} bychom nahradili břemenem

$$\mathfrak{P}'_{m+1} = \frac{\mathfrak{U}_{m+1}}{e},$$

jež působí v tížnici této plochy ve vzdálenosti ξ'_{m+1} od bodu $(m+1)$. Do bodu m připadne pak ze zatížení obou sousedních dílů břímě

$$\mathfrak{P}_m = \frac{\mathfrak{U}_m}{e} \cdot \frac{\xi_m}{a_m} + \frac{\mathfrak{U}_{m+1}}{e} \cdot \frac{\xi'_{m+1}}{a_{m+1}}.$$

V každém dílu nosníku pokládáme J přibližně za stálé; mění se pouze M (podle obr. 71).

Je-li U_m, U_{m+1} momentová plocha v dílu a_m, a_{m+1}, platí, hledíc k souvislosti pořadnic η s momenty M podle hořejšího vzorce,

$$\frac{\mathfrak{U}_m \xi_m}{e} = \frac{U_m \xi_m}{E J_m}, \qquad \frac{\mathfrak{U}_{m+1} \xi'_{m+1}}{e} = \frac{U_{m+1} \xi'_{m+1}}{E J_{m+1}}.$$

Pak znamená $U_m \xi_m$ statický moment plochy momentové v dílu a_m k bodu $(m-1)$. Plochu U_m berme přibližně za lichoběžník přímočarý a rozdělme ji úhlopříčnou ve dva trojúhelníky, jejichž statické momenty sečteme; obdržíme

$$U_m \xi_m = \frac{1}{2} a_m M_{m-1} \cdot \frac{a_m}{3} + \frac{1}{2} a_m M_m \cdot \frac{2 a_m}{3} = \frac{a_m^2}{6} (M_{m-1} + 2 M_m).$$

Obdobně jest

$$U_m \xi'_{m+1} = \frac{1}{2} a_{m+1} M_m \cdot \frac{2 a_{m+1}}{3} + \frac{1}{2} a_{m+1} M_{m+1} \cdot \frac{a_{m+1}}{3} = \frac{a_{m+1}^2}{6} (2 M_m + M_{m+1}).$$

Dosazením dostaneme

$$\mathfrak{P}_m = \frac{U_m \xi_m}{E J_m a_m} + \frac{U_{m+1} \xi'_{m+1}}{E J_{m+1} a_{m+1}} =$$

$$= \frac{1}{6E} \left(\frac{M_{m-1} + 2 M_m}{J_m} a_m + \frac{2 M_m + M_{m+1}}{J_{m+1}} a_{m+1} \right). \tag{57}$$

Pro nosník stálého průřezu jest J stálé; dělíme-li nosník na díly stálé délky a, vyjde

$$\mathfrak{P}_m = \frac{a}{6 E J} (M_{m-1} + 4 M_m + M_{m+1}). \tag{57a}$$

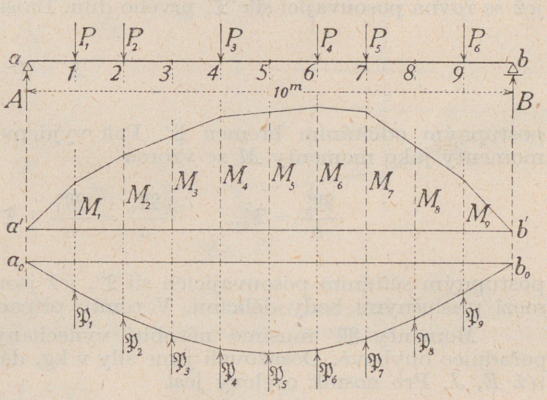
Stálého činitele $\frac{a}{6 E J}$ můžeme s počátku vynechati a teprve ve výsledcích opět zavésti.

Příklad 20. Vypočteme ohybovou čáru ocelového nosníku stálého průřezu o momentu setrvačnosti $J = 14250\ \mathrm{cm}^4$, jenž má rozpětí $l = 10$ m a je zatížen osamělými břemeny $P_1 = 1200$, $P_2 = 500$, $P_3 = 900$, $P_4 = 600$, $P_5 = 1800$, $P_6 = 1000$ kg, jež působí ve vzdálenostech 1, 2, 4, 6, 7 a 9 m od levé podpory (obr. 72).

Rozdělme nosník na 10 dílů o délce $a = 1$ m. V dělicích bodech vypočteme momenty ohybové. Nejprve určíme síly posouvající podle vzorce

$$T = A - \sum_0^x P$$

algebraickým sčítáním vnějších sil od levého konce a k průřezu x; reakce v levé podpoře má hodnotu



Obr. 72.

$$A = \frac{1}{l} \sum_0^l P p' = \frac{1}{10} (1200 \cdot 9 + 500 \cdot 8 + 900 \cdot 6 + 600 \cdot 4 + 1800 \cdot 3 + 1000 \cdot 1) = 2900\ \mathrm{kg}$$

a rovná se síle posouvající v prvém dílu. Ostatní síly posouvající plynou, odčítáme-li postupně břemena P; výpočet je sestaven dále v číselné tabulce, v níž jsou uvedeny síly posouvající jednotlivých dílů nosníků mezi příslušnými body dělicími. Ze sil posouvajících vypočteme dále momenty ohybové; je-li M_m moment ohybový v bodě m a T_m síla posouvající vpravo od bodu m, dále M_n

moment ohybový v bodě n, tu není-li mezi m, n břemene a značíme-li $\overline{m\,n} = a$, platí

$$M_n = M_m + T_m\, a,$$

neboť M_m a T_m nahrazují úplně vnější síly po levé straně bodu m i se silou, jež působí po případě v bodě m. Pak jest

$$\frac{M_n}{a} = \frac{M_m}{a} + T_m.$$

V podpoře a jest $M_0 = 0$; je-li T_0 posouvající síla v prvém dílu, T_1 v druhém atd., vyjde podle posledního vzorce

$$\frac{M_1}{a} = T_0, \qquad \frac{M_2}{a} = \frac{M_1}{a} + T_1, \qquad \frac{M_3}{a} = \frac{M_2}{a} + T_2, \ldots$$

Určíme tedy podíly M/a postupně pouhým sčítáním sil posouvajících, počínajíce od bodu a. V pravé podpoře je moment $M_{10} = 0$, což je kontrolou. Poněvadž je v tomto případě $a = 1$ m, je též $M/a = M$; jinak bychom určili $M = a \cdot M/a$. Výpočet momentů je proveden v číselné tabulce.

Ohybovou čáru počítejme přibližně, berouce podle vzorce (56) v dělicích bodech břemena

$$\mathfrak{P} = \frac{M\,a}{E\,J};$$

ohybová čára je tu momentovou čarou prostého nosníku $a\,b$, zatíženého břemeny $\mathfrak{P}$. Poněvadž je J stálé, vynecháme stálého činitele $a/E\,J$ a dostaneme břemena

$$\mathfrak{P}' = M;$$

pořadnice momentové čáry k břemenům $\mathfrak{P}'$ znásobíme pak $a/E\,J$, čímž vypočteme pořadnice ohybové. K břemenům $\mathfrak{P}'$ určíme jako dříve nejprve posouvající síly $\mathfrak{T}'$; k tomu potřebujeme reakci

$$\mathfrak{A}' = \frac{1}{l}\sum_0^l \mathfrak{P}'\,p' = \frac{1}{10}\ (2900 \cdot 9 + 4600 \cdot 8 + 5800 \cdot 7 + 7000 \cdot 6 + 7300 \cdot 5 +$$
$$+ 7600 \cdot 4 + 7300 \cdot 3 + 5200 \cdot 2 + 3100 \cdot 1) = 24780,$$

jež se rovná posouvající síle $\mathfrak{T}'_0$ prvého dílu. Další síly posouvající plynou podle vzorce

$$\mathfrak{T}' = \mathfrak{A}' - \sum_0^x \mathfrak{P}'$$

postupným odčítáním břemen $\mathfrak{P}'$. Pak vyjdeme od momentu $\mathfrak{M}_0' = 0$ a určíme postupně další momenty jako momenty M ze vzorců

$$\frac{\mathfrak{M}_1'}{a} = \mathfrak{T}_0', \qquad \frac{\mathfrak{M}_2'}{a} = \frac{\mathfrak{M}_1'}{a} + \mathfrak{T}_1', \qquad \frac{\mathfrak{M}_3'}{a} = \frac{\mathfrak{M}_2'}{a} + \mathfrak{T}_2', \ldots$$

postupným sčítáním posouvajících sil $\mathfrak{T}'$, jež jsou uvedeny pro jednotlivé díly v číselné tabulce mezi příslušnými body dělicími. V tomto případě jest $a = 1$ m, tedy $\mathfrak{M}'/a = \mathfrak{M}'$.

Momenty $\mathfrak{M}'$ musíme násobiti vynechaným stálým činitelem $a/E\,J$, abychom dostali pořadnice ohybové. Dosazovali jsme síly v kg, délky v m, i musíme v týchž jednotkách vyjádřiti též E, J. Pro nosník ocelový jest

$$E = 2\,000\,000\ \mathrm{kg/cm^2} = 20\,000\,000\,000\ \mathrm{kg/m^2};$$

dále máme

$$J = 14250\ \mathrm{cm^4} = 0{,}0001425\ \mathrm{m^4},$$

tedy

$$E\,J = 2\,850\,000\ \mathrm{m^2\,kg}.$$

Poněvadž $a = 1$ m, třeba $\mathfrak{M}'$ děliti pouze $E\,J$, čímž se určí pořadnice ohybové y v m.

m	P	T	$M = \mathfrak{P}'$	$\mathfrak{T}'$	$\mathfrak{M}'$	$y = \frac{\mathfrak{M}'}{EJ}$
0	—	2 900	0	24 780	0	0
1	1 200	1 700	2 900	21 880	24 780	0,00869
2	500	1 200	4 600	17 280	46 660	0,01637
3	—	1 200	5 800	11 480	63 940	0,02244
4	900	300	7 000	4 480	75 420	0,02646
5	—	300	7 300	— 2 820	79 900	0,02804
6	600	— 300	7 600	— 10 420	77 080	0,02705
7	1 800	— 2 100	7 300	— 17 720	66 660	0,02339
8	—	— 2 100	5 200	— 22 920	48 940	0,01717
9	1 000	— 3 100	3 100	— 26 020	26 020	0,00913
10	—		0		0	0

Největší průhyb $y_5 = 0{,}02804\,\text{m} \doteq 2{,}80\,\text{cm}$ vychází tu uprostřed nosníku. Přesným výpočtem z rovnice ohybové čáry vychází[1]) největší průhyb max $y = 2{,}76\,\text{cm}$ v průřezu o úsečce $x = 5{,}11\,\text{m}$. Odchylka ve velikosti pořadnice činí zde $+ 0{,}04\,\text{cm}$, t. j. asi 1,5 %.

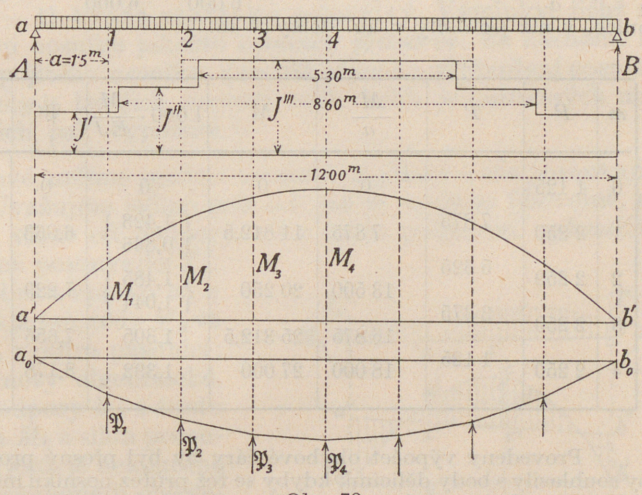
Příklad 21. Ocelový nosník nýtovaný proměnného průřezu o délce $l = 12\,\text{m}$ je zatížen v celé délce rovnoměrně břemenem $q = 1500\,\text{kg/m}$; určiti jest ohybovou čáru (obr. 73).

Modul pružnosti berme $E = 2\,000\,000\,\text{kg/cm}^2$. Průřez nosníku nechť se mění dvakráte, jak v obrazci naznačeno; momenty setrvačnosti buďtež

$$J' = 41\,509\,\text{cm}^4, \qquad J'' = 68\,173\,\text{cm}^4, \qquad J''' = 96\,969\,\text{cm}^4.$$

Lze tu počítati s plnými průřezy nosníku, neboť nýtovými otvory oslabuje se nosník pouze v části tažené a i tu poměrně v malé části. Oslabení nosníku se pak nahradí volbou menší hodnoty za E (2 000 000 místo 2 150 000 kg/cm² pro ocel).

Rozdělme nosník na osm stejných dílů o délce $a = 1{,}5\,\text{m}$. Nosník, vnější síly a tedy i ohybová čára jsou souměrné ke svislici středu nosníku, proto stačí počítati polovici nosníku. Momenty ohybové v bodech dělicích vypočteme jako pro soustavu osamělých břemen, pokládajíce zatížení za nepřímé se styčnými body ve všech bodech dělicích. Ve všech vnitřních bodech dělicích máme pak břemena $P = q\,a = 2250\,\text{kg}$, v krajních bodech $P_0 = \frac{1}{2}\,q\,a = 1125\,\text{kg}$. Reakcí podporových zde nepotřebujeme; ze souměrnosti nosníku a vnějších sil plyne, že se levá (i pravá) reakce rovná polovině součtu břemen. Pak je síla posouvající před středním břemenem i za ním rovna polovině toho břemene, tedy vpravo od bodu 3 je $T_3 = \frac{1}{2}\,P = 1125\,\text{kg}$. Ostatní síly posouvající plynou z této připočítáváním předchozích břemen:



Obr. 73.

$$T_2 = T_3 + P_3, \qquad T_1 = T_2 + P_2, \qquad T_0 = T_1 + P_1.$$

Dále jest $M_0 = 0$, jako v předešlém příkladě pak

$$\frac{M_1}{a} = T_0, \qquad \frac{M_2}{a} = \frac{M_1}{a} + T_1, \qquad \frac{M_3}{a} = \frac{M_2}{a} + T_2, \ldots$$

Hodnoty M/a, uvedené v číselné tabulce, znásobíme $a = 1{,}5\,\text{m}$ a dostaneme ohybové momenty M.

[1]) Viz *Jos. Šolín* „Základy technické nauky o pružnosti a pevnosti“ (Praha 1904), str. 188.

Průřez nosníku v každém dílu pokládejme přibližně za stálý a vypočteme v dělicích bodech hodnoty $1000\,M/EJ$, dosazujíce E v kg/m² a J v m⁴, t. j. $EJ' = 8\,301\,800$ m² kg, $EJ'' = 13\,634\,600$ m² kg, $EJ''' = 19\,393\,800$ m² kg; násobíme zde 1000, abychom dostali pohodlnější čísla. Podle vzorce (57) bylo by v obecném dělicím bodě břímě

$$\mathfrak{P}_m = \frac{a}{6E}\left(\frac{M_{m-1} + 2M_m}{J_m} + \frac{2M_m + M_{m+1}}{J_{m+1}}\right).$$

Vynecháme zatím stálého činitele $a/6$ a určíme z podílů $1\,000 \cdot M/EJ$ břemena

$$\mathfrak{P}'_m = \frac{6\,000}{a}\,\mathfrak{P}_m = \frac{1\,000}{E}\left(\frac{M_{m-1} + 2M_m}{J_m} + \frac{2M_m + M_{m+1}}{J_{m+1}}\right).$$

Hodnotami v tabulce uvedenými vyjde, hledíc k souměrnosti,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}'_1 &= 0 \quad\quad + 2\cdot(1{,}423 + 0{,}866) + 1{,}485 = 6{,}063,\\
\mathfrak{P}'_2 &= 0{,}866 + 2\cdot(1{,}485 + 1{,}044) + 1{,}305 = 7{,}229,\\
\mathfrak{P}'_3 &= 1{,}044 + 2\cdot(1{,}305 + 1{,}305) + 1{,}392 = 7{,}656,\\
\mathfrak{P}'_4 &= 1{,}305 + 2\cdot(1{,}392 + 1{,}392) + 1{,}305 = 8{,}178.
\end{aligned}$$

Z břemen $\mathfrak{P}'$ určíme posouvající síly $\mathfrak{T}'$ a momenty $\mathfrak{M}'$ jako z břemen P posouvající síly T a momenty M; vycházíme z hodnot $\mathfrak{T}'_3 = \frac{1}{2}\mathfrak{P}'_4 = 4{,}089$, $\mathfrak{M}'_0 = 0$.

Na konec dělíme činitelem $6000/a$, jejž jsme připojili k břemenům $\mathfrak{P}_m$, a vypočteme ohybové pořadnice

$$y = \mathfrak{M}' \cdot \frac{a}{6\,000} = \frac{\mathfrak{M}'}{a} \cdot \frac{a^2}{6\,000};$$

podíly $\frac{\mathfrak{M}'}{a}$ násobíme tedy činitelem $\frac{a^2}{6\,000} = \frac{2{,}25}{6\,000} = 0{,}000\,375$. Celý výpočet je v číselné tabulce, v níž jsou síly v kg, délky v m.

m	P	T	$\frac{M}{a}$	M	$1\,000 \cdot \frac{M}{EJ}$	$\mathfrak{P}'$	$\mathfrak{T}'$	$\frac{\mathfrak{M}'}{a}$	$y = \frac{\mathfrak{M}'}{a} \cdot \frac{a^2}{6\,000}$
0	1 125		↓ 0	0	0	0		↓ 0	0
1	2 250	7 875	7 875	11 812,5	1,423 0,866	6,063	25,037	25,037	0,00939
2	2 250	5 625	13 500	20 250	1,485 1,044	7,229	18,974	44,011	0,01650
3	2 250	3 375	16 875	25 312,5	1,305	7,656	11,745	55,756	0,02091
4	2 250	1 125 ↑	18 000	27 000	1,392	8,178	4,089 ↑	59,845	0,02244

Provedený výpočet ohybové čáry by byl přesný pro nepřímé zatížení, jehož styčné body by souhlasily s body dělicími, kdyby se též průřez nosníku měnil ve styčných bodech, jak bylo předpokládáno. Je-li nosník zatížen přímo, je tento výpočet přibližný.

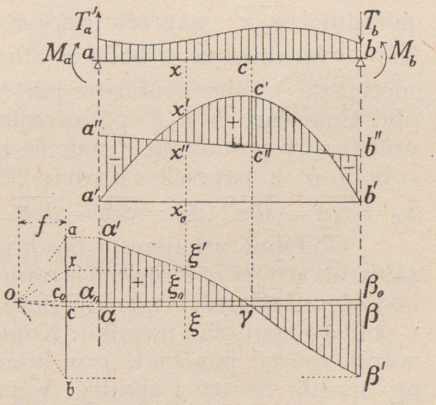
B) Theorie spojitého nosníku stálého průřezu.

I. Zatížení stálé.

a) Příprava k řešení grafickému.

22. *Obrazec momentů ohybových a sil posouvajících.* Spojitý nosník o n polích, tedy $(n+1)$ podpoře, z nichž je jedna pevná, ostatní posouvatelné po vodorovné, má za libovolného zatížení v pevné podpoře dvě neznámé složky reakce, v podporách posouvatelných po jedné neznámé složce, tedy celkem $(n+2)$ neznámých složek reakcí. Reakce jsou v rovnováze se zatížením, jsou tedy vázány třemi výminkami rovnováhy všech vnějších sil. Nedostává se pak $(n-1)$ výminek, i je spojitý nosník o n polích $(n-1)$-kráte staticky neurčitý. Výminky, jichž se nedostává, odvodí se z přetvoření nosníku jakožto *výminky přetvárné*. Za neznámé se volí nejlépe *podporové momenty* spojitého nosníku, pro něž plynou z přetvoření nosníku *rovnice třímomentové (Clapeyronovy)*; lze jich napsati tolik, kolik je neznámých momentů podporových, jež se z nich pak vypočtou.[1])

Známe-li momenty podporové, určíme snadno moment ohybový a sílu posouvající v libovolném průřezu nosníku. Uvažujme jediné pole $a\,b$, jež je zatíženo libovolně, na př. spojitě (obr. 74). Vše, co je vlevo od podpory a i s touto podporou, nahradíme podporovým momentem M_a a silou posouvající T'_a, jež náleží k průřezu nekonečně blízko vpravo od a položenému. Naznačíme M_a i T'_a kladně, tedy M_a ve smyslu ručiček hodinových a T'_a vzhůru působící; dosazovali bychom ovšem hodnoty algebraické. Nosník i vnější síly vpravo od podpory b i s touto podporou nahradíme momentem M_b a silou posouvající T_b, příslušnou k průřezu, jenž je nekonečně blízko vlevo od podpory b; naznačujeme-li obě veličiny kladně, jsou smysl M_b a směr T_b protivny smyslu M_a a směru T'_a, poněvadž jdeme nyní s pravé strany. V průřezu x spojitého nosníku vzniká ohybový moment M a posouvající síla T, jež se určí z momentu $\mathfrak{M}$ a síly posouvající $\mathfrak{T}$ prostého nosníku o délce $a\,b$ a témž zatížení jako v poli $a\,b$ spojitého nosníku podle vzorců



Obr. 74.

$$M = \mathfrak{M} + M', \qquad M' = \frac{M_a x' + M_b x}{l}, \tag{58}$$

[1]) Viz *Jos. Šolín* „Základy technické nauky o pružnosti a pevnosti“ (Praha 1904), str. 125 a d., kde je podrobně odvozeno řešení spojitého nosníku za stálého zatížení; tam lze nalézti důkazy všech rovnic a vět, jichž bude dále použito.

$$T = \mathfrak{T} + T', \qquad T' = \frac{M_b - M_a}{l}, \tag{59}$$

kde značí jako obvykle $l = \overline{a\,b}$, $x = \overline{a\,x}$, $x' = \overline{x\,b} = l - x$; dále jest M' *doplněk momentový* a T' *doplněk síly posouvající*.

Znázorněme poslední vzorce graficky. Moment $\mathfrak{M}$ stanovíme výslednicovou čarou $a'\,x'\,b'$ k danému zatížení, již vztahujeme k základní straně $a'\,b'$; je-li f příslušná vzdálenost pólová, platí

$$\mathfrak{M} = f \cdot \overline{x_0\,x'}.$$

Doplněk M' se mění po zákonu přímky, již určíme dvěma body. Ve svislici podpory a jest

$$x = 0, \qquad x' = l \qquad \text{a} \qquad M'_a = M_a = f \cdot \overline{a''\,a'};$$

ve svislici podpory b platí

$$x = l, \qquad x' = 0 \qquad \text{a} \qquad M'_b = M_b = f \cdot \overline{b''\,b'}.$$

Podporové momenty M_a, M_b bývají pravidlem záporné; jejich pořadnice směřují pak dolů a přenášíme je tak, aby končily v bodech a', b'. Přímka $a'\,b'$, vztažená k přímce $a''\,b''$ jakožto straně základní, dává doplňky momentové

$$M' = f \cdot \overline{x''\,x_0}.$$

V průřezu x má pak spojitý nosník ohybový moment

$$M = \mathfrak{M} + M' = f \cdot (\overline{x_0\,x'} + \overline{x''\,x_0}) = f \cdot \overline{x''\,x'}.$$

Rozdíl proti prostému nosníku záleží v tom, že výslednicovou čáru $a'\,x'\,b'$ k danému zatížení vztahujeme místo ke straně $a'\,b'$ k *přemístěné straně základní* $a''\,b''$ čili k *prostému obrazci momentovému* $a'\,x'\,b'\,x_0$ přistupuje *doplňovací lichoběžník* $a''\,a'\,b'\,b''$.

Síly posouvající určíme nyní z obrazce momentového a obrazce složkového jako u prostého nosníku. Úsek síly posouvající $\mathfrak{T}$ prostého nosníku jest omezen v čáře složkové pólovými paprsky rovnoběžnými se stranami, které omezují momentovou pořadnici $\overline{x_0\,x'}$; paprsek $o\,\mathfrak{c}_0 \parallel a'\,b'$ určí počátek, paprsek $o\,\mathfrak{x}$ rovnoběžný s tečnou čáry výslednicové v bodě x' stanoví konec úseku $\mathfrak{T} = \overline{\mathfrak{c}_0\,\mathfrak{x}}$, jejž přeneseme vodorovnicemi do svislice průřezu x jakožto pořadnici $\overline{\xi_0\,\xi'}$. Učiníme-li tak ve všech průřezech, obdržíme čáru $\alpha'\,\xi'\,\beta'$ posouvajících sil $\mathfrak{T}$, jejíž osa $\alpha_0\,\beta_0$ jde bodem $\mathfrak{c}_0$. V podporách určíme síly posouvající, vedeme-li paprsek $o\,\mathfrak{a}$ rovnoběžně s tečnou čáry výslednicové v bodě a' a paprsek $o\,\mathfrak{b}$ rovnoběžně s tečnou čáry výslednicové v bodě b'; pak jest $\mathfrak{T}_a = \overline{\mathfrak{c}_0\,\mathfrak{a}} = \overline{\alpha_0\,\alpha'}$, $\mathfrak{T}_b = \overline{\mathfrak{c}_0\,\mathfrak{b}} = \overline{\beta_0\,\beta'}$.

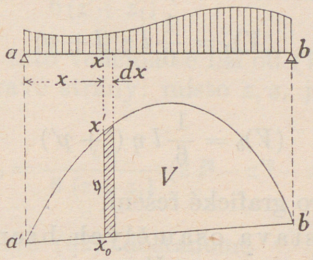
Obdobně určujeme i posouvající síly T nosníku spojitého, pro nějž jediné místo základní strany $a'\,b'$ máme stranu $a''\,b''$; pólový paprsek $o\,\mathfrak{c} \parallel a''\,b''$ určí nový základní bod čáry složkové, v němž je počátek určovacích úseků posouvajících sil všech průřezů v poli $a\,b$ spojitého nosníku. Koncové body úseků sil posouvajících jsou tytéž jako pro nosník prostý, poněvadž jsou koncové body momentových pořadnic na téže čáře $a'\,x'\,b'$ pro nosník prostý i spojitý. V průřezu x spojitého nosníku je tedy síla posouvající $T = \overline{\mathfrak{c}\,\mathfrak{x}} = \overline{\xi\,\xi'}$. Čára sil posouvajících $\alpha'\,\xi'\,\beta'$ je táž jako pro nosník prostý; místo osy $\alpha_0\,\beta_0$ platí však pro nosník spojitý osa $\alpha\,\beta$ jdoucí bodem $\mathfrak{c}$. Posouvající síla spojitého nosníku se liší od posouvající síly prostého nosníku ve všech průřezech pole $a\,b$ o doplněk $T' = \overline{\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_0} = \overline{\xi\,\xi_0}$, jenž vyhovuje vzorci (59), jak bychom se snadno přesvědčili. Průsečík γ čáry sil posouvajících s osou $\alpha\,\beta$ určuje *průřez přechodný* c, v němž je největší moment kladný $M_c = f \cdot \overline{c''\,c'}$ v poli $a\,b$ spojitého nosníku.

23. Grafické vyjádření veličin $\mathfrak{N}$ a $\mathfrak{N}'$. Spojitý nosník stálého průřezu se řeší z výminek přetvárných, jež jsou dány rovnicemi třímomentovými. Momenty M_{r-1}, M_r, M_{r+1} v posloupných podporách a_{r-1}, a_r, a_{r+1} jsou vázány obecnou rovnicí třímomentovou

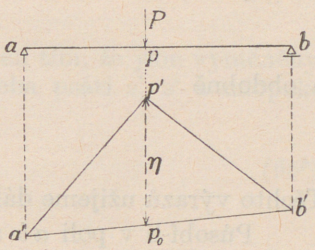
$$M_{r-1}\,l_r + 2\,M_r\,(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1}\,l_{r+1} + \frac{\mathfrak{N}_r}{l_r} + \frac{\mathfrak{N}'_{r+1}}{l_{r+1}} +$$

$$+ 6\,E\,J\left(\frac{h_{r+1} - h_r}{l_{r+1}} - \frac{h_r - h_{r-1}}{l_r}\right) = 0, \tag{60}$$

v níž znamenají l_r, l_{r+1} délky obou posloupných polí $a_{r-1}\,a_r$, $a_r\,a_{r+1}$; h_{r-1}, h_r, h_{r+1} jsou nezamýšlená snížení (popuštění) podpor a_{r-1}, a_r, a_{r+1} proti původní přímé ose nosníku, E je modul pružnosti hmoty nosníkové a J moment setrvačnosti průřezu nosníku. Členy $\mathfrak{N}_r$, $\mathfrak{N}'_{r+1}$ pochodí od zatížení polí l_r, l_{r+1}.



Obr. 75.



Obr. 76.

V poli $a\,b$, jež budiž zatíženo libovolně, na př. spojitě (obr. 75), jest

$$\mathfrak{N} = 6\int_0^l \mathfrak{M}\,x\,\mathrm{d}x, \qquad \mathfrak{N}' = 6\int_0^l \mathfrak{M}\,x'\,\mathrm{d}x. \tag{61}$$

Vyjádříme-li z prostého obrazce momentového $a'\ x'\ b'$ moment

$$\mathfrak{M} = f \cdot \overline{x_0\,x'} = f \cdot \eta,$$

dostaneme

$$\mathfrak{N} = 6\,f\int_0^l \eta\,x\,\mathrm{d}\,x, \qquad \mathfrak{N}' = 6\,f\int_0^l \eta\,x'\,\mathrm{d}x.$$

Zde jest $\eta\,\mathrm{d}x$ prvek obsahu prostého obrazce momentového, omezený dvěma sousmeznými pořadnicemi; x a x' jsou vzdálenosti tohoto prvku od svislic bodů a, b. Znamená tedy

$$\int_0^l \eta\,x\,d\,x = (V)_a$$

statický moment prostého obrazce momentového V ke svislici podpory a, dále

$$\int_0^l \eta\,x'\,\mathrm{d}x = (V)_b$$

statický moment obrazce V ke svislici podpory b. Z toho plyne

$$\mathfrak{N} = 6\,f\,(V)_a, \qquad \mathfrak{N}' = 6\,f\,(V)_b. \tag{62}$$

Pro jediné břímě osamělé P, jež působí v průřezu p pole $a\,b$, je za označení $\overline{a\,p} = p$, $\overline{p\,b} = p'$

$$\mathfrak{N} = P\,p\,p'\,(l + p), \qquad \mathfrak{N}' = P\,p\,p'\,(l + p'). \tag{63}$$

Prostým obrazcem momentovým (obr. 76) je tu trojúhelník $a'\,p'\,b'$, jehož největší pořadnici znamenejme krátce $\overline{p_0\,p'} = \eta$. Ze vzorců (56) určíme

$$(V)_a = \frac{\mathfrak{N}}{6\,f} = \frac{P p p'\,(l+p)}{6\,f}\,;$$

V bodě p vyvodí u prostého nosníku $a\,b$ břímě P moment

$$\mathfrak{M}_p = f\,\eta = \frac{P p p'}{l}\,,$$

proto jest

$$(V)_a = \frac{1}{6}\,l\,\eta\,(l+p) \tag{64a}$$

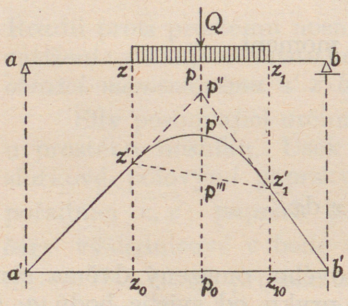
a obdobně

$$(V)_b = \frac{1}{6}\,l\,\eta\,(l+p')\,. \tag{64b}$$

Těchto výrazů užijeme dále pro grafické řešení.

Působí-li v poli $a\,b$ soustava osamělých břemen, stanovíme veličiny $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ i $(V)_a$, $(V)_b$ pro jednotlivá břemena a sečteme je.

Částečné zatížení rovnoměrné v délce $\overline{z\,z_1}$ (obr. 77) řešíme tak, že z prostého obrazce momentového vypočteme $(V)_a$, $(V)_b$ a ze vzorců (62) veličiny $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$. Rýsujíce prostý obrazec momentový určíme nejprve trojúhelník $a'\,p''\,b'$ k břemeni $Q = q\cdot\overline{z\,z_1}$, jímž nahrazujeme celé zatížení rovnoměrné; náhradné břímě působí ve středu p úsečky $\overline{z\,z_1}$. K zatížení rovnoměrnému náleží pak výslednicová parabola $z'\,p'\,z_1'$, jež se dotýká v bodech z', z_1' na svislicích mezí zatížení strany $a'\,p'', p''\,b'$; tětiva $z'\,z_1'$ je přidružena k svislému průměru $p''\,p'''$, proto platí $\overline{p''\,p'} = \overline{p'\,p'''}$. Celý obrazec jest určen pořadnicí $\overline{p_0\,p''} = \eta$, z níž plynou všechny další pořadnice. Znamenáme-li $\overline{az} = z$, $\overline{zb} = z'$, $\overline{az_1} = z_1$, $\overline{z_1 b} = z_1'$, $\overline{ap} = p$, $\overline{pb} = p'$, jest $p = \frac{z+z_1}{2}$, $p' = \frac{z'+z_1'}{2}$. Z podobnosti plyne



Obr. 77.

$$\overline{z_0\,z'} = \overline{p_0\,p''}\cdot\frac{\overline{az}}{\overline{ap}} = \eta\,\frac{z}{p}\,, \qquad \overline{z_{10}\,z_1'} = \overline{p_0\,p''}\cdot\frac{\overline{z_1 b}}{\overline{pb}} = \eta\,\frac{z_1'}{p'}\,;$$

dále jest

$$\overline{p_0\,p'''} = \frac{\overline{z_0\,z'} + \overline{z_{10}\,z_1'}}{2} = \eta\left(\frac{z}{2\,p} + \frac{z_1'}{2\,p'}\right), \qquad \overline{p'''\,p''} = \overline{p_0\,p''} - \overline{p_0\,p'''} = \eta\left(1 - \frac{z}{2\,p} - \frac{z_1'}{2\,p'}\right),$$

$$\overline{p'''\,p'} = \overline{p'\,p''} = \frac{\overline{p'''\,p''}}{2} = \frac{\eta}{2}\left(1 - \frac{z}{2\,p} - \frac{z_1'}{2\,p'}\right).$$

Obsah V prostého obrazce momentového lze vyjádřiti rozdílem trojúhelníka $a'\,p''\,b'$ a parabolického trojúhelníka $z'\,p''\,z_1'\,p'$. Statické momenty trojúhelníka $a'\,p''\,b'$ k svislicím podpor jsou dány vzorci (64a), 64b), neboť jsme zde užili téhož označení úseček i pořadnice $\overline{p_0\,p''}$ jako při jediném břemeni. Od těchto momentů jest odečísti statické momenty parabolického trojúhelníka, jenž má obsah

$$\text{pl.}\,z'\,p''\,z_1'\,p' = \frac{1}{3}\,\overline{z\,z_1}\cdot\overline{p'\,p''} = \frac{\eta}{6}\,(z_1 - z)\left(1 - \frac{z}{2\,p} - \frac{z_1'}{2\,p'}\right);$$

těžiště tohoto parabolického trojúhelníka je ve svislici bodu p, statický moment určíme pak součinem obsahu a vzdálenosti těžiště. Celkem vyjde

$$(V)_a = \frac{1}{6} l\eta\,(l+p) - \frac{\eta}{6}(z_1 - z)\left(1 - \frac{z}{2p} - \frac{z_1'}{2p'}\right)p.$$

Nahradíme-li p, p' hodnotami prve uvedenými a dosadíme-li v čitateli $z' = l - z$, $z_1' = l - z_1$, můžeme poslední výkaz upraviti na tvar

$$(V)_a = \frac{l\eta}{6(z' + z_1')}(2l^2 - z^2 - z_1^2). \tag{65a}$$

Podobně bychom určili $(V)_b$; tato veličina se liší od $(V)_a$ jen tím, že jsou vyměněny úseky, které se týkají levé a pravé strany: místo z, z_1 je třeba psáti z_1', z' a naopak, takže

$$(V)_b = \frac{l\eta}{6(z + z_1)}(2l^2 - z'^2 - z_1'^2). \tag{65b}$$

Dosadíme-li $(V)_a$, $(V)_b$ do vzorců (62), dostaneme

$$\mathfrak{M} = f\eta \frac{l}{z' + z_1'}(2l^2 - z^2 - z_1^2), \qquad \mathfrak{M}' = f\eta \frac{l}{z + z_1}(2l^2 - z'^2 - z_1'^2).$$

Součin $f\eta$ znamená moment prostého nosníku v bodě p pod jediným osamělým břemenem $Q = q(z_1 - z)$; proto jest

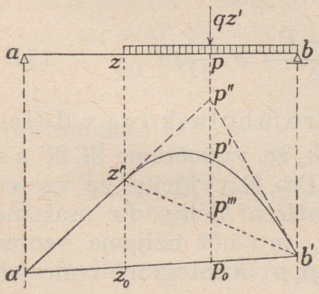
$$f\eta = \frac{Q p p'}{l} = \frac{q(z_1 - z)}{l} \cdot \frac{z + z_1}{2} \cdot \frac{z' + z_1'}{2} = \frac{q}{4l}(z_1^2 - z^2)(z' + z_1').$$

Vychází tedy

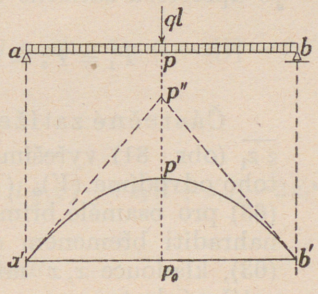
$$\mathfrak{M} = \frac{q}{4}(z_1^2 - z^2)(2l^2 - z^2 - z_1^2), \qquad \mathfrak{M}' = \frac{q}{4}(z_1 - z)(z' + z_1')(2l^2 - z'^2 - z_1'^2) =$$

$$= \frac{q}{4}(z'^2 - z_1'^2)(2l^2 - z'^2 - z_1'^2). \tag{66}$$

Známe-li $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, můžeme řešiti třímomentové rovnice i pro toto částečné zatížení rovnoměrné.



Obr. 78.



Obr. 79.

Částečné zatížení rovnoměrné v délce $\overline{zb} = z'$ (obr. 78) plyne z předchozího, položíme-li $z_1 = l$, $z_1' = 0$; tím vyjde

$$(V)_a = \frac{l\eta}{6z'}(l^2 - z^2) = \frac{1}{6} l\eta\,(l + z),$$

$$(V)_b = \frac{l\eta}{6(l + z)}(2l^2 - z'^2) = \frac{1}{6} l\eta \frac{2l^2 - z'^2}{2l - z'}, \tag{67}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{q}{4}(l^2 - z^2)^2, \qquad \mathfrak{M}' = \frac{q}{4} z'^2 (2l^2 - z'^2). \tag{68}$$

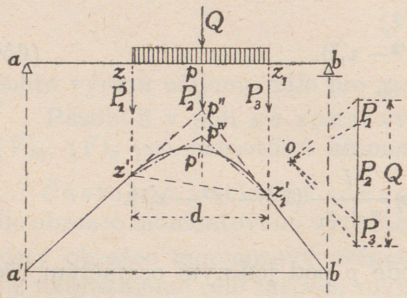
Plné zatížení rovnoměrné (obr. 79) plyne konečně z předchozího částečného, klademe-li $z = 0$, $z' = l$, což dá

$$(V)_a = (V)_b = \frac{1}{6} l^2 \eta, \tag{69}$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' = \frac{1}{4} q l^4. \tag{70}$$

Podle předchozích případů znamená i zde $\eta = \overline{p_0 p''}$ největší pořadnici prostého momentového trojúhelníka $a' p'' b'$ pro břímě $q\,l$ působící ve středu p délky $a\,b$ (obr. 79); je pak $\eta = 2 \cdot \overline{p_0 p'}$.

Zatížení rovnoměrné lze nahraditi pro řešení početní i grafické též třemi osamělými břemeny*) P_1, P_2, P_3 (obr. 80), jež mají stejný účinek, dá-li jejich prostý obrazec momentový stejné statické momenty k svislicím obou podpor nebo stejné výrazy $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$. Břemena volíme tak, aby měla touž výslednici $Q = q\,d$ jako rovnoměrné zatížení. Pak v prostém obrazci momentovém je lichoběžník $a' z' z_1' b'$ společný zatížení rovnoměrnému i osamělým břemenům P_1, P_2, P_3; je tedy pouze třeba, aby se vyrovnaly statické momenty parabolické úseče $z' p' z_1'$ a trojúhelníka $z' p^{IV} z_1'$. Břímě P_2 působí uprostřed zatížené délky $\overline{z z_1}$. Stačí vedle rovnosti ploch rovnost statických momentů obou obrazců k svislicím z, z_1, což můžeme řešiti, jako by šlo o $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ prostého nosníku $z\,z_1$, zatíženého v celé délce rovnoměrně nebo jediným osamělým břemenem P_2, pro něž je trojúhelník $z' p^{IV} z_1'$ prostým obrazcem momentovým. $\mathfrak{M}$ k svislici z pro zatížení rovnoměrné je dáno vzorcem (70), pro osamělé břímě P_2 vzorcem (63), kde $l = d$, $p = p' = \frac{1}{2} d$; vyjde tedy



Obr. 80.

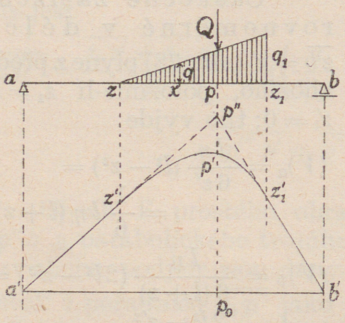
$$\frac{q d^4}{4} = P_2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \left(d + \frac{d}{2} \right) = \frac{3}{8} P_2 d^3.$$

Z toho plyne

$$P_2 = \frac{2}{3} q d. \tag{71a}$$

Poněvadž břemena P_1, P_2, P_3 mají míti touž výslednici jako rovnoměrné zatížení a P_2 je uprostřed zatížené délky, vyjde

$$P_1 = P_3 = \frac{qd - P_2}{2} = \frac{1}{6} q d. \tag{71b}$$



Obr. 81.

Částečné zatížení trojúhelníkové v délce $\overline{z z_1}$ (obr. 81) vyřešíme tak, že vypočteme $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ a z toho odvodíme $(V)_a, (V)_b$. Pro $\mathfrak{M}$ vyjdeme ze vzorce (63) pro osamělé břímě; zatížení délky $\mathrm{d}\,x$ můžeme nahraditi břemenem $q\,\mathrm{d}\,x$, pro něž užijeme vzorce (63), kladouce x, x' místo p, p', a integrací v mezích zatížení dostaneme

$$\mathfrak{M} = \int_z^{z_1} x x' (l + x) q\,\mathrm{d}\,x.$$

*) Viz *J. Laciný* „Řešení rovnoměrného a trojúhelníkového obtížení na spojitém nosníku použitím náhradných břemen“ (Technický obzor 1927, 47).

Poměrné zatížení se mění podle přímky a platí

$$q = q_1 \cdot \frac{x - z}{z_1 - z},$$

takže

$$\mathfrak{N} = \frac{q_1}{z_1 - z} \int_z^{z_1} x\, x' \,(l + x)\,(x - z)\,\mathrm{d}\,x.$$

Provedeme integraci

$$\int_z^{z_1} x\, x' \,(l+x)\,(x-z)\,\mathrm{d}\,x = \int_z^{z_1} x\,(l-x)\,(l+x)\,(x-z)\,\mathrm{d}\,x = \int_z^{z_1} (l^2 x^2 - l^2 x z - x^4 - x^3 z)\,\mathrm{d}\,x =$$

$$= \left[\frac{l^2 x^3}{3} - \frac{l^2 x^2 z}{2} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^4 z}{4}\right]_z^{z_1} = \frac{l^2 (z_1^3 - z^3)}{3} - \frac{l^2 z (z_1^2 - z^2)}{2} - \frac{z_1^5 - z^5}{5} + \frac{z (z_1^4 - z^4)}{4} =$$

$$= \frac{(z_1 - z)^2}{60} \left\{(z + 2 z_1)\,[3 z' (l + z) + 7 z_1' (l + z_1)] + 2 z_1^2 (z_1 - z)\right\}$$

a dosazením vyjde

$$\mathfrak{N} = \frac{q_1 (z_1 - z)}{60} \left\{(z + 2 z_1)\,[3 z' (l + z) + 7 z_1' (l + z_1)] + 2 z_1^2 (z_1 - z)\right\}. \qquad (72^a)$$

Obdobně plyne

$$\mathfrak{N}' = \int_z^{z_1} x\, x' \,(l + x')\, q\,\mathrm{d}\,x = \frac{q_1}{z_1 - z} \int_z^{z_1} x\, x' \,(l + x')\,(x - z)\,\mathrm{d}\,x;$$

určíme integrál

$$\int_z^{z_1} x\, x' \,(l + x')\,(x - z)\,\mathrm{d}\,x = \int_z^{z_1} x\,(l - x)\,(2 l - x)\,(x - z)\,\mathrm{d}\,x = \int_z^{z_1} (2 l^2 x^2 - 2 l^2 x z - 3 l x^3 +$$

$$+ 3 l x^2 z + x^4 - x^3 z)\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{2 l^2 x^3}{3} - \frac{2 l^2 x^2 z}{2} - \frac{3 l x^4}{4} + \frac{3 l x^3 z}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^4 z}{4}\right]_z^{z_1} =$$

$$= \frac{(2 l^2 + 3 l z)\,(z_1^3 - z^3)}{3} - l^2 z\,(z_1^2 - z^2) - \frac{(3 l + z)\,(z_1^4 - z^4)}{4} + \frac{z_1^5 - z^5}{5} =$$

$$= \frac{(z_1 - z)^2}{60} \left\{(z' + 2 z_1')\,[3 z\,(l + z') + 7 z_1\,(l + z_1')] - 2 z'^2 (z_1 - z)\right\}$$

a dostaneme

$$\mathfrak{N}' = \frac{q_1 (z_1 - z)}{60} \left\{(z' + 2 z_1')\,[3 z\,(l + z') + 7 z_1\,(l + z_1')] - 2 z_1'^2 (z_1 - z)\right\}. \qquad (72^b)$$

Podle vzorce (62) vypočteme

$$(V)_a = \frac{\mathfrak{N}}{6 f}, \qquad (V)_b = \frac{\mathfrak{N}'}{6 f};$$

do toho zavedeme největší momentovou pořadnici $\overline{p_0 p''} = \eta$ k výslednici $Q = \frac{1}{2} q_1 (z_1 - z)$ jež působí v tížnici zatěžovacího trojúhelníka. Součin $f \eta$ dává moment prostého nos-

níku $a\,b$ v bodě p pod břemenem Q: $f\eta = \dfrac{Q\,p\,p'}{l}$. Pro tížnici trojúhelníka platí

$$p = \frac{z + 2z_1}{3}, \qquad p' = \frac{z' + 2z'_1}{3},$$

tedy

$$f\eta = \frac{q_1\,(z_1 - z)\,(z + 2z_1)\,(z' + 2z'_1)}{18\,l}.$$

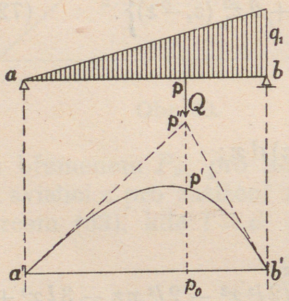
Potom jest

$$(V)_a = \frac{q_1\,(z_1 - z)\left\{(z + 2z_1)\,[3\,z'\,(l + z) + 7\,z'_1\,(l + z_1)] + 2\,z_1^2\,(z_1 - z)\right\}}{360\,f} =$$

$$= \frac{l\,\eta}{20} \cdot \frac{(z + 2z_1)\,[3\,z'\,(l + z) + 7\,z'_1\,(l + z_1)] + 2\,z_1^2\,(z_1 - z)}{(z + 2z_1)\,(z' + 2z'_1)}, \tag{73a}$$

$$(V)_b = \frac{q_1\,(z_1 - z)\left\{(z' + 2z'_1)\,[3\,z\,(l + z') + 7\,z_1\,(l + z'_1)] - 2\,z'^2_1\,(z_1 - z)\right\}}{360\,f} =$$

$$= \frac{l\,\eta}{20} \cdot \frac{(z' + 2z'_1)\,[3\,z\,(l + z') + 7\,z_1\,(l + z'_1)] - 2\,z'^2_1\,(z_1 - z)}{(z + 2z_1)\,(z' + 2z'_1)}. \tag{73b}$$



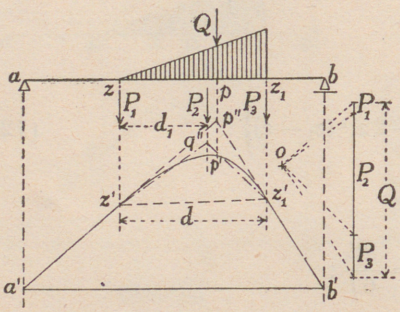
Obr. 82.

Plné zatížení trojúhelníkové (obr. 82) plyne z předchozího částečného dosazením $z = 0$, $z' = l$, $z_1 = l$, $z'_1 = 0$, čímž dostaneme

$$\mathfrak{N} = \frac{2}{15}\,q_1\,l^4 = \frac{4}{15}\,Q\,l^3, \qquad \mathfrak{N}' = \frac{7}{60}\,q_1\,l^4 = \frac{7}{30}\,Q\,l^3, \tag{74}$$

$$(V)_a = \frac{2}{5}\,l^2\,\eta, \qquad (V)_b = \frac{7}{40}\,l^2\,\eta. \tag{75}$$

Zatížení trojúhelníkové můžeme nahraditi, řešíme-li počtem nebo graficky, třemi osamělými břemeny P_1, P_2, P_3 (obr. 83), jež určíme tak, aby dala výslednici Q a stejné statické momenty prostého obrazce momentového k svislicím podpor, tedy stejné veličiny $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$. Krajní strany výslednicové čáry k osamělým břemenům i k zatížení trojúhelníkovému zde splynou, takže se prosté obrazce momentové liší jen v části zatížené, kde platí pro osamělá břemena trojúhelník $z'\,q''\,z'_1$ a pro zatížení trojúhelníkové úseč kubické paraboly $z'\,p'\,z'_1$. Oba obrazce, vztažené k tětivě $z'\,z'_1$, můžeme pokládati za prosté momentové obrazce nosníku délky $\overline{z\,z_1} = d$, pro nějž určíme $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$ pro břímě P_2 podle vzorců (63) a pro plné zatížení trojúhelníkové podle vzorců (74). Z rovnosti obojích vyjde



Obr. 83.

$$P_2\,d_1\,(d - d_1)\,(d + d_1) = \frac{4}{15}\,Q\,d^3,$$

$$P_2\,d_1\,(d - d_1)\,(2d - d_1) = \frac{7}{30}\,Q\,d^3.$$

Řešením těchto rovnic určíme

$$d_1 = \frac{3}{5}\,d, \qquad P_2 = \frac{25}{36}\,Q. \tag{76a}$$

Mají-li míti břemena P_1, P_2, P_3 výslednici Q, musí býti dále $P_1 + P_2 + P_3 = Q$ a součet

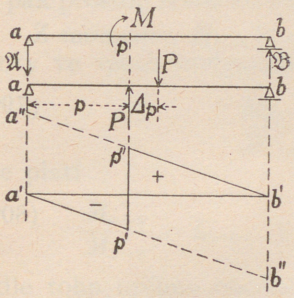
statických momentů břemen P_1, P_2, P_3 na př. k bodu z musí být roven statickému momentu síly Q k témuž bodu, tedy

$$P_2 d_1 + P_3 d = Q \cdot \frac{2}{3} d.$$

Z toho určíme

$$P_1 = \frac{Q}{18}, \qquad P_2 = \frac{Q}{4}. \tag{76b}$$

Zatížení momentem M v obecném průřezu p pole $a\,b$ (obr. 84) můžeme řešiti jako účinek dvojice sil P na rameni Δp, kde $M = P \cdot \Delta p$, jestliže položíme $\Delta p = 0$. Dvojici vyřešíme jako soustavu dvou břemen podle vzorce (63):



Obr. 84.

$$\mathfrak{N} = P(p + \Delta p)(p' - \Delta p)(l + p + \Delta p) - P\,p\,p'\,(l + p).$$

Zanedbáme-li v prvém členu vyšší mocniny Δp, dostaneme

$$\mathfrak{N} = P \cdot \Delta p\,[p'(l+p) - p(l+p) + p\,p'] = M(l^2 - 3p^2) \tag{77a}$$

a obdobně

$$\mathfrak{N}' = -M(l^2 - 3p'^2). \tag{77b}$$

Prostý obrazec momentový určíme výslednicovou čarou k reakcím

$$-\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \frac{M}{l},$$

jež se skládá ze dvou rovnoběžek $a'p' \parallel p''b'$ a osy $a'b'$; pořadnice

$$\overline{a'a''} = \overline{b''b'} = \eta = \frac{M}{f}.$$

Ze vzorců (62) plyne pak

$$(V)_a = \frac{\mathfrak{N}}{6f} = \frac{M(l^2 - 3p^2)}{6f} = \frac{\eta}{6}(l^2 - 3p^2), \qquad (V)_b = -\frac{\eta}{6}(l^2 - 3p'^2). \tag{78}$$

b) Jediné pole nosníku zatíženo.

24. Momenty ohybové v polích nezatížených. *α) Levé body základní.* Spojitý nosník o n polích měj jediné pole $\overline{a_{r-1}\,a_r} = l_r$ zatíženo libovolně; ostatní pole buďtež nezatížena. Podpory nosníku nechť jsou v původní výši, čímž poslední člen v rovnici třímomentové odpadá. Znamenejme podpory nosníku

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_{k-1},\ a_k,\ a_{k+1},\ \ldots\ a_{r-3},\ a_{r-2},\ a_{r-},\ a_r,\ a_{r+1},\ a_{r+2},\ \ldots$$
$$\ldots\ a_{s-1},\ a_s,\ a_{s+1},\ \ldots\ a_{n-3},\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$$

a délky polí

$$l_1, l_2, l_3, \ldots l_k, l_{k+1}, \ldots l_{r-2}, l_{r-1}, l_r, l_{r+1}, l_{r+2}, \ldots l_s, l_{s+1}, \ldots l_{n-2}, l_{n-1}, l_n.$$

Napišme nejprve třímomentové rovnice pro levá pole nezatížená $l_1, l_2, l_3, \ldots l_{r-1}$; odpadají v nich členy, jež se týkají zatížení i popuštění podpor, platí tedy rovnice

pro pole l_1, l_2 .... $M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = 0$,

„ „ l_2, l_3 .... $M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = 0$,

„ „ l_{k-1}, l_k .... $M_{k-1} l_k + 2M_k(l_k + l_{k+1}) + M_{k+1} l_{k+1} = 0$,

„ „ l_{r-2}, l_{r-1} .... $M_{r-3} l_{r-2} + 2M_{r-2}(l_{r-2} + l_{r-1}) + M_{r-1} l_{r-1} = 0$.

Je-li nosník na levém konci prostě podepřen, je v podpoře a_0 moment $M_0 = 0$; zbývá tedy v napsaných $(r-2)$ rovnicích celkem $(r-1)$ neznámých momentů podporových. Rovnice jsou lineárné a homogenní; lze z nich pak určiti poměry neznámých, je-li rovnic o jednu méně než neznámých.

Obecný poměr posloupných momentů podporových v levé části nezatížené určíme z rovnice pro pole l_{k-1}, l_k

$$M_{k-1}\, l_k + 2\, M_k\, (l_k + l_{k+1}) + M_{k+1}\, l_{k+1} = 0\,.$$

Dělme tuto rovnici $M_k\, l_{k+1}$; dostaneme rovnici

$$\frac{M_{k-1}}{M_k} \cdot \frac{l_k}{l_{k+1}} + 2\left(1 + \frac{l_k}{l_{k+1}}\right) + \frac{M_{k+1}}{M_k} = 0\,.$$

Znamenejme

$$\frac{M_{k-1}}{M_k} = \lambda_{k-1}\,, \qquad \frac{M_k}{M_{k+1}} = \lambda_k\,, \tag{79^a}$$

dále

$$\frac{l_k}{l_{k+1}} = \delta_k\,; \tag{80^a}$$

pak lze poslední rovnici psáti

$$\delta_k\, \lambda_{k-1} + 2\,(1 + \delta_k) + \frac{1}{\lambda_k} = 0\,.$$

Z toho vychází

$$\lambda_k = -\,\frac{1}{2\,(1 + \delta_k) + \delta_k\, \lambda_{k-1}}\,, \tag{81^a}$$

čímž je dán zákon poměrů λ ve tvaru zvratném. Poněvadž jsou všechny poměry δ délek polí dány, určíme z posledního vzorce poměry λ, známe-li jediný.

Je-li nosník v levé krajní podpoře a_0 prostě podepřen, je tu $M_0 = 0$ a tedy

$$\lambda_0 = \frac{M_0}{M_1} = 0\,.$$

Z tohoto poměru určíme všechny ostatní. Dosadíme-li do vzorce (81^a) $k = 1$, vyjde, hledíc k hodnotě $\lambda_0 = 0$, poměr

$$\lambda_1 = -\,\frac{1}{2\,(1 + \delta_1)}\,;$$

je-li $k = 2$, vychází

$$\lambda_2 = -\,\frac{1}{2\,(1 + \delta_2) + \delta_2\, \lambda_1}\,.$$

Tak určíme postupně všechny poměry λ. Tyto poměry posloupných momentů podporových v levých polích nezatížených stanoví se jedině z poměrů δ délek polí, nezávisí tedy nijak na zatížení pole l_r.

Poměr $\delta_1 = \dfrac{l_1}{l_2}$ je kladný, poněvadž délky polí bereme prostě; pak jest

$$(1 + \delta_1) > 1, \quad 2\,(1 + \delta_1) > 2 \quad \text{a} \quad -\lambda_1 = \frac{1}{2\,(1 + \delta_1)} < \frac{1}{2}\,.$$

Poměr λ_1 je záporný a jeho prostá hodnota je menší než $\frac{1}{2}$. Poměr λ_2 lze vyjádřiti ve tvaru

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2+\delta_2(2+\lambda_1)};$$

poněvadž jest $-\lambda_1 < \frac{1}{2}$ a $\delta_2 > 0$, platí

$$(2+\lambda_1) > 1 > 0, \quad 2+\delta_2(2+\lambda_1) > 2 \quad \text{nebo} \quad -\lambda_2 < \tfrac{1}{2}.$$

Totéž platí i o všech dalších poměrech λ. Tedy poměry posloupných momentů podporových v levé části nezatížené jsou vesměs záporné a prosté hodnoty jejich jsou menší než $\frac{1}{2}$. Postupujeme-li od zatíženého pole vlevo, střídají se proto kladné a záporné momenty v podporách nosníku; každý moment podporový má pak prostou hodnotu více než dvakrát menší než moment v sousední podpoře pravé.

Z momentu M_{r-1} v levé podpoře zatíženého pole určíme, znajíce poměry λ, momenty ve všech podporách levých. Neboť jest

$$\frac{M_{r-2}}{M_{r-1}} = \lambda_{r-2}, \quad \text{tedy} \quad M_{r-2} = M_{r-1}\lambda_{r-2};$$

dále platí

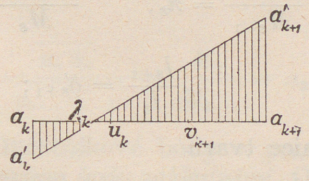
$$\frac{M_{r-3}}{M_{r-2}} = \lambda_{r-3}, \quad \text{z čehož plyne} \quad M_{r-3} = M_{r-2}\lambda_{r-3} = M_{r-1}\lambda_{r-2}\lambda_{r-3}.$$

Podle toho určíme obecně

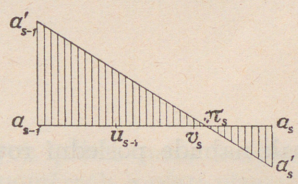
$$M_k = M_{r-1}\lambda_{r-2}\lambda_{r-3}\ldots\lambda_k; \qquad (82^a)$$

moment v podpoře a_k vlevo od zatíženého pole l_r rovná se tedy momentu M_{r-1} v levé podpoře zatíženého pole, násobenému poměry λ pro všechna pole mezilehlá.

Momentový obrazec v libovolném levém poli nezatíženém $a_k a_{k+1}$ (obr. 85) redukuje se na doplňovací lichoběžník, daný pořadnicemi momentů podporových $M_k = f\cdot\overline{a_k a'_k}$, $M_{k+1} = f\cdot\overline{a_{k+1}a'_{k+1}}$. Poněvadž o prostých hodnotách momentů platí $|M_k| < \frac{1}{2}|M_{k+1}|$ a znaménka obou momentů jsou protivná, jest $\overline{a_k a'_k} < \frac{1}{2}\overline{a'_{k+1}a_{k+1}}$. Momentovou čarou je přímka $a'_k a'_{k+1}$, vztažená k ose $a_k a_{k+1}$, již protíná v bodě λ_k; v tomto bodě jest $M = 0$, je tedy bod λ_k obratníkovým bodem v poli l_{k+1}. Bod λ_k rozděluje pole l_{k+1} v poměru



Obr. 85.



Obr. 86.

$$\frac{\overline{a_k\lambda_k}}{\overline{a_{k+1}\lambda_k}} = \frac{\overline{a_k a'_k}}{\overline{a_{k+1}a'_{k+1}}} = \frac{M_k}{M_{k+1}} = \lambda_k.$$

Poměry λ se tedy rovnají poměrům, ve kterých obratníkové body v nezatížené levé části nosníku rozdělují příslušná pole. Tyto body jako poměry λ nezávisí pak též na zatížení pole l_r a mají v každém poli stálou polohu; nazývejme je *levými body základními*. Podle předešlého je poměr

$$\frac{\overline{a_k\lambda_k}}{\overline{\lambda_k a_{k+1}}} = -\lambda_k < \frac{1}{2};$$

rozdělíme-li pole na třetiny $\overline{a_k u_k} = \overline{u_k v_{k+1}} = \overline{v_{k+1}a_{k+1}}$, jest

$$\frac{\overline{a_k u_k}}{\overline{u_k a_{k+1}}} = \frac{1}{2},$$

proto musí býti

$$\overline{a_k \lambda_k} < \overline{a_k u_k}.$$

Levý bod základní je tedy v každém poli uvnitř levé krajní třetiny pole. Známe-li bod λ_k, určíme z momentu M_{k+1} moment M_k podle obr. 85.

β) ***Pravé body základní.*** Napišme si nyní třímomentové rovnice pro pravá pole nezatížená, totiž

$$\text{pro pole } l_{r+1},\ l_{r+2} \ldots M_r l_{r+1} + 2 M_{r+1} (l_{r+1} + l_{r+2}) + M_{r+2} l_{r+2} = 0,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\text{pro pole } l_s,\ l_{s+1} \ldots M_{s-1} l_s + 2 M_s (l_s + l_{s+1}) + M_{s+1} l_{s+1} = 0,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$,, \quad ,, \quad l_{n-1},\ l_n \ldots M_{n-2} l_{n-1} + 2 M_{n-1} (l_{n-1} + l_n) + M_n l_n = 0.$$

Je-li nosník v pravé krajní podpoře a_n prostě podepřen, je tu $M_n = 0$; v napsaných rovnicích je pak zase o jeden neznámý moment podporový více, nežli je rovnic, z nichž lze tedy určiti poměry posloupných momentů podporových. Z obecné rovnice této skupiny pro pole l_s, l_{s+1}

$$M_{s-1} l_s + 2 M_s (l_s + l_{s+1}) + M_{s+1} l_{s+1} = 0$$

plyne dělením $M_s l_s$

$$\frac{M_{s-1}}{M_s} + 2\left(1 + \frac{l_{s+1}}{l_s}\right) + \frac{M_{s+1}}{M_s} \cdot \frac{l_{s+1}}{l_s} = 0.$$

Znamenejme

$$\frac{M_s}{M_{s-1}} = \pi_s, \qquad \frac{M_{s+1}}{M_s} = \pi_{s+1}, \tag{79^b}$$

$$\frac{l_{s+1}}{l_s} = \delta'_{s+1}; \tag{80^b}$$

pak nabude poslední rovnice tvaru

$$\frac{1}{\pi_s} + 2 (1 + \delta'_{s+1}) + \delta'_{s+1} \pi_{s+1} = 0,$$

z něhož vychází

$$\pi_s = - \frac{1}{2 (1 + \delta'_{s+1}) + \delta'_{s+1} \pi_{s+1}}. \tag{81^b}$$

Z posledního vzorce určíme všechny poměry π posloupných momentů podporových v pravé části nezatížené z poměrů δ' délek polí; poměry π nezávisí tedy na zatížení pole l_r. V krajní pravé podpoře a_n jest $M_n = 0$, je-li tu nosník prostě podepřen; pak jest

$$\pi_n = \frac{M_n}{M_{n-1}} = 0.$$

Ze vzorce (81^b) plyne nyní

$$\pi_{n-1} = - \frac{1}{2 (1 + \delta'_n)},$$

dále

$$\pi_{n-2} = - \frac{1}{2 (1 + \delta'_{n-1}) + \delta'_{n-1} \pi_{n-1}};$$

tak stanovíme postupně všechny poměry π. O nich lze dokázati jako o poměrech λ, že jsou vesměs záporné a mají prosté hodnoty menší než $\frac{1}{2}$. Tedy poměry posloupných momentů podporových v pravé části nezatížené jsou záporné a prosté hodnoty jejich jsou menší než $\frac{1}{2}$, uvažujeme-li poměr libovolného momentu podporového k momentu v předchozí podpoře. Proto se střídají i vpravo od zatíženého pole v podporách momenty kladné a záporné; prostá hodnota každého momentu podporového je pak více než dvakrát menší než prostá hodnota momentu v sousední podpoře levé.

Z momentu M_r v pravé podpoře zatíženého pole určíme, znajíce poměry π, všechny další pravé momenty podporové. Začneme poměrem

$$\frac{M_{r+1}}{M_r} = \pi_{r+1}, \quad \text{jenž dá} \quad M_{r+1} = M_r \pi_{r+1};$$

dále jest

$$\frac{M_{r+2}}{M_{r+1}} = \pi_{r+2}, \quad \text{z čehož} \quad M_{r+2} = M_{r+1} \pi_{r+2} = M_r \pi_{r+1} \pi_{r+2}.$$

Obecně platí podle toho

$$M_s = M_r \pi_{r+1} \pi_{r+2} \ldots . \pi_s, \tag{82^b}$$

tedy moment v podpoře a_s vpravo od zatíženého pole l_r rovná se momentu M_r v pravé podpoře zatíženého pole, násobenému poměry π pro všechna pole mezilehlá.

V každém pravém poli nezatíženém, na př. $a_{s-1} a_s$, je momentovým obrazcem (obr. 86) doplňovací lichoběžník $a_{s-1} a'_{s-1} a'_s a_s$, stanovený pořadnicemi momentů podporových $M_{s-1} = f \cdot \overline{a_{s-1} a'_{s-1}}$, $M_s = f \cdot \overline{a_s a'_s}$. Momenty M_{s-1}, M_s mají protivná znaménka; momentová přímka $a'_{s-1} a'_s$ seče proto osu v obratníkovém bodě π_s uvnitř pole. Bod π_s dělí pole v poměru

$$\frac{\overline{a_s \pi_s}}{\overline{a_{s-1} \pi_s}} = \frac{\overline{a_s a'_s}}{\overline{a_{s-1} a'_{s-1}}} = \frac{M_s}{M_{s-1}} = \pi_s,$$

jenž nezávisí na zatížení pole l_r. Obratníkové body v pravých polích nezatížených mají proto stálou polohu; slovou *pravými body základními*. O poměrech π platí obecně

$$-\pi_s = \frac{\overline{a_s \pi_s}}{\overline{\pi_s a_{s-1}}} < \frac{1}{2};$$

dělíme-li pole $a_{s-1} a_s$ na tři stejné díly $\overline{a_s v_s} = \overline{v_s u_{s-1}} = \overline{u_{s-1} a_{s-1}}$, jest

$$\frac{\overline{a_s v_s}}{\overline{v_s a_{s-1}}} = \frac{1}{2},$$

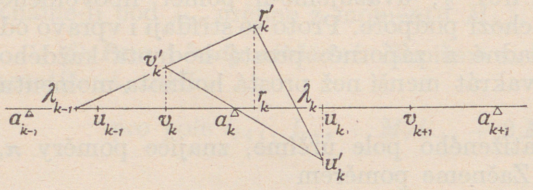
z čehož plyne

$$\overline{a_s \pi_s} < \overline{a_s v_s}.$$

Pravé body základní jsou tedy uvnitř pravých krajních třetin polí.

γ) ***Sestrojení bodů základních.*** Poněvadž může býti libovolné pole spojitého nosníku zatíženo, lze si mysliti každé pole spojitého nosníku vlevo nebo vpravo od pole zatíženého; dostaneme tedy v každém poli spojitého nosníku jeden levý a jeden pravý bod základní. V poli l_1 platí $\lambda_0 = 0$ i jest bod $\lambda_0 \equiv a_0$; v poli l_n máme $\pi_n = 0$, tedy bod $\pi_n \equiv a_n$. Ze známých krajních bodů základních λ_0, π_n určíme všechny ostatní základní body λ i π počtem z rovnic (81^a), (81^b), jak bylo již ukázáno, a graficky jednoduchou konstrukcí.

Známe-li bod λ_{k-1}, určíme bod λ_k (obr. 87), rozdělíme-li pole $\overline{a_{k-1}\,a_k}$ na tři stejné díly $\overline{a_{k-1}\,u_{k-1}} = \overline{u_{k-1}\,v_k} = \overline{v_k\,a_k} = \frac{1}{3}\overline{a_{k-1}\,a_k}$, rovněž tak pole $\overline{a_k\,a_{k+1}}$ na díly $\overline{a_k\,u_k} = \overline{u_k\,v_{k+1}} = \overline{v_{k+1}\,a_{k+1}} = \frac{1}{3}\overline{a_k\,a_{k+1}}$; dále přeneseme $\overline{v_k\,a_k} = \overline{r_k\,u_k}$ a vedeme bodem λ_{k-1} libovolnou přímku, jež protne svislice bodů v_k, r_k v bodech v'_k, r'_k. Spojnice $\overline{v'_k\,a_k}$ seče svislici bodu u_k v bodě u'_k, jehož spojnice s bodem r'_k stanoví na ose nosníku bod λ_k. Správnost sestrojení odvodíme ze vzorce (81^a). Dosaďme



Obr. 87.

$$\lambda_k = \frac{\overline{a_k\,\lambda_k}}{\overline{a_{k+1}\,\lambda_k}}, \qquad \lambda_{k-1} = \frac{\overline{a_{k-1}\,\lambda_{k-1}}}{\overline{a_k\,\lambda_{k-1}}}, \qquad \text{dále} \qquad \delta_k = \frac{\overline{a_{k-1}\,a_k}}{\overline{a_k\,a_{k+1}}},$$

čímž vychází z rovnice (81^a) vztah

$$\frac{\overline{\lambda_k\,a_{k+1}}}{\overline{a_k\,\lambda_k}} = 2\left(1 + \frac{\overline{a_{k-1}\,a_k}}{\overline{a_k\,a_{k+1}}}\right) - \frac{\overline{a_{k-1}\,a_k}}{\overline{a_k\,a_{k+1}}} \cdot \frac{\overline{a_{k-1}\,\lambda_{k-1}}}{\overline{\lambda_{k-1}\,a_k}};$$

z toho plyne

$$\frac{\overline{a_k\,a_{k+1}}}{\overline{a_k\,\lambda_k}} - 1 + \frac{\overline{a_{k-1}\,a_k}}{\overline{a_k\,a_{k+1}}} \cdot \left(\frac{\overline{a_{k-1}\,a_k}}{\overline{\lambda_{k-1}\,a_k}} - 1\right) = 2\left(1 + \frac{\overline{a_{k-1}\,a_k}}{\overline{a_k\,a_{k+1}}}\right)$$

nebo

$$\frac{\overline{a_{k-1}\,a_k}^2}{\overline{\lambda_{k-1}\,a_k}} + \frac{\overline{a_k\,a_{k+1}}^2}{\overline{a_k\,\lambda_k}} = 3\,(\overline{a_{k-1}\,a_k} + \overline{a_k\,a_{k+1}}). \tag{83}$$

V obr. 87 jest $\overline{a_k\,r_k} = \overline{a_k\,u_k} - \overline{r_k\,u_k} = \frac{1}{3}\,(\overline{a_k\,a_{k+1}} - \overline{a_{k-1}\,a_k})$; z obrazce plyne pak

$$\frac{\overline{v_k\,v'_k}}{\overline{r_k\,r'_k}} = \frac{\overline{\lambda_{k-1}\,v_k}}{\overline{\lambda_{k-1}\,r_k}} = \frac{\overline{\lambda_{k-1}\,a_k} - \frac{1}{3}\,\overline{a_{k-1}\,a_k}}{\overline{\lambda_{k-1}\,a_k} + \frac{1}{3}\,(\overline{a_k\,a_{k+1}} - \overline{a_{k-1}\,a_k})},$$

$$\frac{\overline{u'_k\,u_k}}{\overline{v_k\,v'_k}} = \frac{\overline{a_k\,u_k}}{\overline{v_k\,a_k}} = \frac{\overline{a_k\,a_{k+1}}}{\overline{a_{k-1}\,a_k}},$$

$$\frac{\overline{r_k\,r'_k}}{\overline{u'_k\,u_k}} = \frac{\overline{r_k\,\lambda_k}}{\overline{\lambda_k\,u_k}} = \frac{\overline{a_k\,\lambda_k} - \frac{1}{3}\,(\overline{a_k\,a_{k+1}} - \overline{a_{k-1}\,a_k})}{\frac{1}{3}\,\overline{a_k\,a_{k+1}} - \overline{a_k\,\lambda_k}}.$$

Znásobíme-li levé a pravé strany napsaných úměr, obdržíme

$$1 = \frac{\overline{\lambda_{k-1}\,a_k} - \frac{1}{3}\,\overline{a_{k-1}\,a_k}}{\overline{\lambda_{k-1}\,a_k} + \frac{1}{3}\,(\overline{a_k\,a_{k+1}} - \overline{a_{k-1}\,a_k})} \cdot \frac{\overline{a_k\,a_{k+1}}}{\overline{a_{k-1}\,a_k}} \cdot \frac{\overline{a_k\,\lambda_k} - \frac{1}{3}\,(\overline{a_k\,a_{k+1}} - \overline{a_{k-1}\,a_k})}{\frac{1}{3}\,\overline{a_k\,a_{k+1}} - \overline{a_k\,\lambda_k}};$$

z toho plyne

$$(\overline{\lambda_{k-1}\,a_k} - \tfrac{1}{3}\,\overline{a_{k-1}\,a_k})\,(\overline{a_k\,\lambda_k} \cdot \overline{a_k\,a_{k+1}} - \tfrac{1}{3}\,\overline{a_k\,a_{k+1}}^2 + \overline{a_k\,\lambda_k} \cdot \overline{a_{k-1}\,a_k}) =$$
$$= \tfrac{1}{3}\,\overline{a_{k-1}\,a_k} \cdot (\tfrac{1}{3}\,\overline{a_k\,a_{k+1}}^2 - \overline{a_k\,\lambda_k} \cdot \overline{a_k\,a_{k+1}}),$$

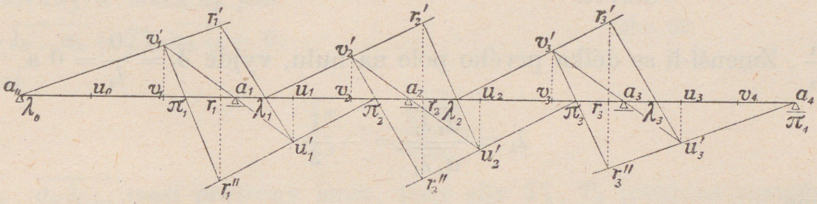
dále

$$\tfrac{1}{3}\,\overline{\lambda_{k-1}\,a_k} \cdot \overline{a_k\,a_{k+1}}^2 + \tfrac{1}{3}\,\overline{a_k\,\lambda_k} \cdot \overline{a_{k-1}\,a_k}^2 = \overline{a_k\,\lambda_k} \cdot \overline{\lambda_{k-1}\,a_k}\,(\overline{a_{k-1}\,a_k} + \overline{a_k\,a_{k+1}}),$$

Dělíme-li tuto rovnici $\frac{1}{3}\overline{a_k\lambda_k}\cdot\overline{\lambda_{k-1}a_k}$, dospějeme k rovnici (83), čímž jsme dokázali, že je sestrojení v obr. 87 správné.[1])

Obdobně sestrojíme z pravého základního bodu π_{s+1} předchozí bod π_s; v obr. 87 je potřebí jen zaměniti levou stranu s pravou.

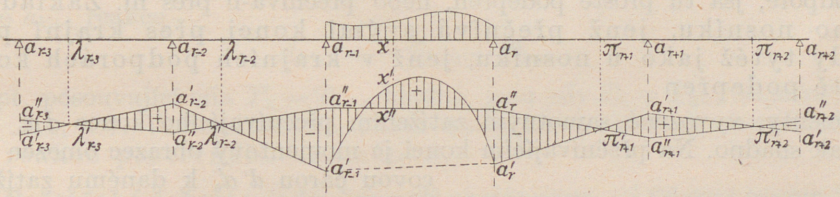
U spojitého nosníku, který je na koncích prostě podepřen, známe bod $\lambda_0 \equiv a_0$ a bod $\pi_n \equiv a_n$; z nich určíme základní body ostatní, opakujeme-li sestrojení naznačené v obr. 87. Tak u nosníku o čtyřech polích obecně různých (obr. 88) rozdělíme nejprve každé pole na tři stejné díly: $\overline{a_0u_0} = \overline{u_0v_1} = \overline{v_1a_1}$, $\overline{a_1u_1} = \overline{u_1v_2} = \overline{v_2a_2}$, $\overline{a_2u_2} = \overline{u_2v_3} = \overline{v_3a_3}$, $\overline{a_3u_3} = \overline{u_3v_4} = \overline{v_4a_4}$, pak vystřídáme třetiny u vnitřních podpor: $\overline{v_1a_1} = \overline{r_1u_1}$, $\overline{v_2a_2} = \overline{r_2u_2}$, $\overline{v_3a_3} = \overline{r_3u_3}$ a vedeme bodem $\lambda_0 \equiv a_0$ libovolnou přímku šikmou, jež protne svislice



Obr. 88.

bodů v_1, r_1 v bodech v_1', r_1'; spojnice $v_1'a_1$ seče svislici bodu u_1 v bodě u_1' a spojnice $r_1'u_1'$ určí na ose nosníku bod λ_1. Tímto bodem vedeme opět šikmou přímku $\lambda_1 v_2' r_2'$, spojnicí $v_2'a_2$ určíme bod u_2' a spojnicí $r_2'u_2'$ bod λ_2. Obdobně sestrojíme bod λ_3, vycházejíce z bodu λ_2. Pravé body základní stanovíme obráceným postupem. Začneme v bodě $\pi_4 \equiv a_4$ a vedeme jím přímku $\pi_4 u_3'$, abychom uspořili čar; tato přímka seče svislici bodu r_3 v bodě r_3'', jehož spojnice s bodem v_3' dá bod π_3. Tímto bodem vedeme přímku $\pi_3 u_2'$, jež určí bod r_2'', a spojnice $r_2'' v_2'$ stanoví bod π_2. Obdobně určíme z bodu π_2 bod π_1.

δ) ***Momentové obrazce v polích nezatížených*** určíme snadno, známe-li *úplný obrazec momentový* v jediném poli zatíženém a všechny body základní (obr. 89). V zatíženém poli $a_{r-1}a_r$ skládá se úplný obrazec momentový z prostého obrazce momentového $a_{r-1}'x'a_r'$ a z doplňovacího lichoběžníka $a_{r-1}''a_{r-1}'a_r'a_r''$, jejž zatím pokládejme



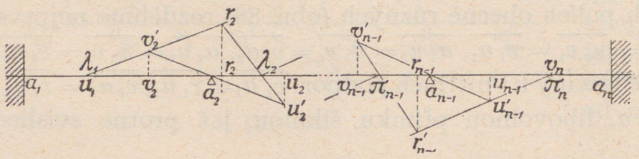
Obr. 89.

za známý. V nezatížených polích odpadnou prosté obrazce momentové a zbývají jen doplňovací lichoběžníky. Odvodili jsme, že jsou v levých polích nezatížených obratníkovými body levé body základní a v pravých polích nezatížených pravé body základní. Sekou se tedy nerovnoběžné strany doplňovacích lichoběžníků v levých (pravých) polích nezatížených na svislicích levých (pravých) bodů základních. Vlevo od zatíženého pole je momentovou čarou lomená čára $a_{r-1}'a_{r-2}'a_{r-3}'\ldots$ a čarou základní lomená čára $a_{r-1}''a_{r-2}''a_{r-3}''\ldots$; obě čáry se sekou na svislicích základních bodů

[1]) Viz *A. Flamant* „Résistance des Matériaux" (Paříž 1886), str. 380. Ryze graficky odvozuje základní body *Jos. Šolín* v „Theorii zevnitřních sil trámů přímých", seš. II (Praha 1879), str. 26; v tomto spise je vyvinuta celá theorie nosníků spojitých na základech ryze měřických

$\lambda_{r-2}, \lambda_{r-3}, \ldots$ Vpravo od zatíženého pole je momentovou čarou $a'_r a'_{r+1} a'_{r+2} \ldots$, čarou základní $a''_r a''_{r+1} a''_{r+2} \ldots$; průsečíky obou čar jsou ve svislicích základních bodů $\pi_{r+1}, \pi_{r+2}, \ldots$

ε) ***Účinek konců vetknutých a přečnívajících.*** Ve vetknutém konci lze si mysliti dvě podpory sjednocené, mezi nimiž je *pole nulové*. Budiž levý konec nosníku v bodě a_1 vetknut (obr. 90); půjde o základní bod λ_1. Myslíme-li si před podporou a_1 konečné pole $\overline{a_0 a_1} = l_1$, platí, jak bylo již ukázáno,



Obr. 90.

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2(1+\delta_1)},$$

kde $\delta_1 = \frac{l_1}{l_2}$. Zmenší-li se délka prvého pole na nulu, vyjde $\delta_1 = \frac{0}{l_2} = 0$ a

$$\lambda_1 = \frac{\overline{a_1 \lambda_1}}{\overline{a_2 \lambda_1}} = -\frac{1}{2};$$

z toho plyne

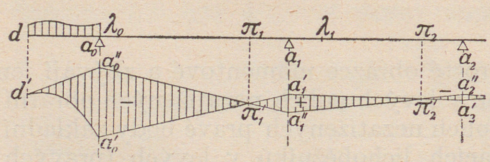
$$\overline{a_1 \lambda_1} = \tfrac{1}{2} \overline{\lambda_1 a_2} \quad \text{nebo} \quad \overline{a_1 \lambda_1} = \tfrac{1}{3} \overline{a_1 a_2} = \overline{a_1 u_1}.$$

Je-li tedy spojitý nosník v levém konci a_1 vetknut, ztotožní se základní bod λ_1 s koncem u_1 levé krajní třetiny pole $a_1 a_2$. Z bodu λ určíme pak další základní body levé zase podle obr. 87.

Obdobně též, je-li nosník spojitý v pravém konci a_n vetknut (obr. 90), je nejbližší základní bod π_n v levém konci v_n pravé krajní třetiny pole $a_{n-1} a_n$. Z bodu π_n určíme pak předchozí základní body pravé zase jako v obr. 86.

Přečnívá-li nosník spojitý na levém konci přes podporu a_0 v délce $a_0 d$, odvodili bychom zase základní body levé předpokládajíce, že je zatíženo jediné pole l_r; vlevo od tohoto pole, tedy i na přečnívajícím konci $a_0 d$ není žádného zatížení. Pak je v podpoře a_0 moment $M_0 = 0$, jako když nosník v bodě a_0 končí a je tu prostě podepřen. Z toho plyne opět $\lambda_0 \equiv a_0$ a sestrojení základních bodů λ zůstane týmž, jako by přečnívajícího konce nebylo. Také pravé základní body π jsou tytéž, končí-li nosník v pravé krajní podpoře, jsa tu prostě podepřen, nebo přečnívá-li přes ni. Základní body spojitého nosníku, jenž přečnívá svými konci přes krajní podpory, jsou tedy tytéž jako u nosníku, jenž v krajních podporách končí, jsa tu prostě podepřen.

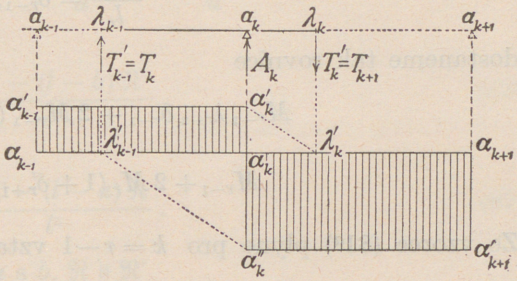
Momenty, vyvozené samotným zatížením přečnívajícího konce $d a_0$ (obr. 91), určí se pak snadno. Na přečnívajícím konci je momentový obrazec omezen výslednicovou čarou $d' a'_0$ k danému zatížení a její prodlouženou první stranou $d' a''_0$. Ve všech polích spojitého nosníku jsou momentovými obrazci pouhé doplňovací lichoběžníky, jejichž nerovnoběžné strany se sekou na svislicích pravých bodů základních $\pi_1, \pi_2, \ldots$ neboť od pravého konce nosníku až k bodu a_0 není zatížení. Momentovou čarou je pak lomená čára $a'_0 a'_1 a'_2 \ldots$ a základní čarou $a''_0 a''_1 a''_2 \ldots$



Obr. 91.

25. Posouvající síly v polích nezatížených. V každém nezatíženém poli je posouvající síla stálá, v různých polích ovšem různá. V poli $a_{k-1} a_k$ je posouvající síla $T'_{k-1} = T_k$, v poli $a_k a_{k+1}$ pak $T'_k = T_{k+1}$. Předpokládejme, že jsou obě pole vlevo od zatíženého pole l_r, a vyšetřme poměr sil T_k, T'_k.

V levé části nezatížené jsou levé body základní λ_{k-1}, λ_k body obratníkovými, v nich je tedy $M = 0$. Odejmeme-li část nosníku vlevo od bodu λ_{k-1}, musíme ji nahraditi posouvající silou $T'_{k-1} = T_k$ a momentem $M = 0$; síla T_k působí vzhůru, je-li kladná (obr. 92). Část nosníku vpravo od bodu λ_k nahradíme posouvající silou $T'_k = T_{k+1}$ a momentem $M = 0$; síla T'_k působí zde dolů, je-li kladná, poněvadž nahrazuje pravou stranu. Na díl nosníku $\lambda_{k-1}\lambda_k$ působí pak síla T_k v bodě λ_{k-1}, T'_k v bodě λ_k a reakce A_k v podpoře a_k. Tyto tři síly jsou v rovnováze. Momentová výminka rovnováhy k bodu a_k jest



Obr. 92.

$$T_k \cdot \overline{\lambda_{k-1} a_k} + T'_k \cdot \overline{a_k \lambda_k} = 0;$$

z ní vychází

$$\frac{T_k}{T'_k} = -\frac{\overline{a_k \lambda_k}}{\overline{a_k \lambda_{k-1}}}. \tag{84}$$

Úseky $\overline{a_k \lambda_k}$, $\overline{a_k \lambda_{k-1}}$ mají protivný směr, tedy síly T_k, T'_k protivná znaménka. Jdeme-li od zatíženého pole v levo, je v každém nezatíženém poli posouvající síla stálá a znaménka sil posouvajících se střídají. Totéž platí vpravo od zatíženého pole. Pravidlem jest $\overline{\lambda_{k-1} a_k} > \overline{a_k \lambda_k}$, neliší-li se mnoho délky polí; proto zpravidla ubývá prosté hodnoty posouvající síly, postupujeme-li od pole k poli vzdalujíce se od pole zatíženého.

Podle vzorce (84) určíme snadno graficky na př. sílu T'_k, známe-li $T_k = \overline{\alpha_k \alpha''_k}$ (obr. 92). Je potřebí jen vésti $\lambda'_k \alpha'_k \parallel \alpha''_k \lambda'_{k-1}$; pak jest $T_k = \overline{\alpha_k \alpha'_k}$. Tak můžeme postupovati od pole k poli, ovšem jen v polích nezatížených. Určili bychom ovšem též posouvající sílu v libovolném průřezu nosníku podle známé obecné souvislosti obrazce momentového a složkového: úsek síly posouvající jest omezen v čáře složkové pólovými paprsky rovnoběžnými s oněmi stranami obrazce momentového, jež omezují momentovou pořadnici příslušného průřezu.

Ze sil posouvajících stanovíme podporové reakce. V podpoře a_k působí reakce

$$A_k = -T_k + T'_k, \tag{85}$$

v podpoře a_{k+1} reakce

$$A_{k+1} = -T_{k+1} + T'_{k+1}.$$

Je-li na př. posouvající síla $T'_k = T_{k+1}$ kladná, jsou síly T_k a T'_{k+1} záporné; pak jest $A_k > 0$ a $A_{k+1} < 0$. V nezatížené části nosníku působí v sousedních podporách reakce protivného znaménka.

26. Počtářské řešení v jediném poli zatíženém. *α) Obecné vzorce.* U nosníku spojitého o n polích, jehož jediné pole $\overline{a_{r-1} a_r} = l_r$ je zatíženo jakkoli, užili jsme již všech rovnic třímomentových vyjma dvě, jež platí pro pole l_{r-1}, l_r a pro pole l_r, l_{r+1}. Jsou to rovnice

$$M_{r-2} l_{r-1} + 2 M_{r-1} (l_{r-1} + l_r) + M_r l_r + \frac{\mathfrak{N}'_r}{l_r} = 0,$$

$$M_{r-1} l_r + 2 M_r (l_r + l_{r+1}) + M_{r+1} l_{r+1} + \frac{\mathfrak{N}_r}{l_r} = 0.$$

Z těchto rovnic vyloučíme momenty M_{r-2}, M_{r+1}, užijíce známých vzorců

$$M_{r-2} = M_{r-1} \lambda_{r-2}, \qquad M_{r+1} = M_r \pi_{r+1}.$$

Obě rovnice dělme zároveň délkou l_r a dosaďme podle vzorců (80^a), (80^b)

$$\frac{l_{r-1}}{l_r} = \delta_{r-1}, \qquad \frac{l_{r+1}}{l_r} = \delta'_{r+1};$$

dostaneme tak rovnice

$$M_{r-1}\lambda_{r-2}\delta_{r-1} + 2M_{r-1}(\delta_{r-1}+1) + M_r + \frac{\mathfrak{N}'_r}{l_r^2} = 0,$$

$$M_{r-1} + 2M_r(1+\delta'_{r+1}) + M_r\pi_{r+1}\delta'_{r+1} + \frac{\mathfrak{N}_r}{l_r^2} = 0.$$

Ze vzorce (81^a) plyne pro $k = r-1$ vztah

$$2(1+\delta_{r-1}) + \delta_{r-1}\lambda_{r-2} = -\frac{1}{\lambda_{r-1}};$$

vzorec (81^b) dá, dosadíme-li $s = r$,

$$2(1+\delta'_{r+1}) + \delta'_{r+1}\pi_{r+1} = -\frac{1}{\pi_r}.$$

Těmito hodnotami obdržíme z předešlých rovnic rovnice

$$-\frac{M_{r-1}}{\lambda_{r-1}} + M_r + \frac{\mathfrak{N}'_r}{l_r^2} = 0,$$

$$M_{r-1} - \frac{M_r}{\pi_r} + \frac{\mathfrak{N}_r}{l_r^2} = 0.$$

Zde jsou již jen veličiny, které se týkají jediného pole $a_{r-1}a_r$; znamenejme toto pole nyní krátce ab, vynechme u $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$, l, λ a π indexy a pišme M_a, M_b místo M_{r-1}, M_r. Dostaneme rovnice

$$-\frac{M_a}{\lambda} + M_b + \frac{\mathfrak{N}'}{l^2} = 0,$$

$$M_a - \frac{M_b}{\pi} + \frac{\mathfrak{N}}{l^2} = 0.$$

V poli ab jsou základní body λ, π (obr. 93), jež dovedeme určiti; znamenejme krátce $\overline{a\lambda} = a$, $\overline{\pi b} = b$, $\overline{\lambda\pi} = l - a - b = c$ a dosaďme

$$\lambda = \frac{\overline{a\lambda}}{\overline{b\lambda}} = -\frac{a}{l-a}, \qquad \pi = \frac{\overline{b\pi}}{\overline{a\pi}} = -\frac{b}{l-b}$$

do posledních rovnic, čímž dospějeme k rovnicím

$$\left.\begin{aligned} \frac{l-a}{a}M_a + M_b + \frac{\mathfrak{N}'}{l^2} &= 0, \\ M_a + \frac{l-b}{b}M_b + \frac{\mathfrak{N}}{l^2} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Vypočteme nyní momenty M_a, M_b. Z obou posledních rovnic vyloučíme M_b, násobíme-li prvou $(l-b)$, druhou b a odečteme-li druhou od prvé; vyjde

$$\left[\frac{(l-a)(l-b)}{a} - b\right]M_a + \frac{(l-b)\mathfrak{N}' - b\mathfrak{N}}{l^2} = 0.$$

Zjednodušíme dále

$$\frac{(l-a)(l-b)}{a} - b = \frac{l(l-a-b)}{a} = \frac{cl}{a}$$

a určíme tím

$$M_a = \frac{a}{c} \cdot \frac{b\mathfrak{N} - (l-b)\mathfrak{N}'}{l^3}. \tag{87a}$$

Obdobně jest

$$M_b = \frac{b}{c} \cdot \frac{a\mathfrak{N}' - (l-a)\mathfrak{N}}{l^3}, \tag{87b}$$

což plyne ze vzorce pro M_a, vyměníme-li a s b, $\mathfrak{N}$ s $\mathfrak{N}'$.

β) ***Jediné břímě osamělé*** P, jež působí v průřezu p v poli $a\,b$ (viz obr. 76), dá podle vzorců (63)

$$\mathfrak{N} = P\,p\,p'\,(l+p), \qquad \mathfrak{N}' = P\,p\,p'\,(l+p').$$

Pak jest

$$b\mathfrak{N} - (l-b)\mathfrak{N}' = P\,p\,p'\,[b\,(l+p) - (l-b)\,(l+p')] =$$
$$= P\,p\,p'\,[b\,(2\,l+p+p') - l^2 - l\,p')] = -\,P\,l\,p\,p'\,(l-3\,b+p'),$$

tedy podle vzorce (87a)

$$M_a = -\frac{P\,a}{c\,l^2}\,p\,p'\,(l-3\,b+p'). \tag{88a}$$

Vyměníme-li zde p s p', a s b, dostaneme

$$M_b = -\frac{P\,b}{c\,l^2}\,p\,p'\,(l-3\,a+p). \tag{88b}$$

Poněvadž jest $b < \frac{1}{3}\,l$, vyjde $(l-3\,b) > 0$, tedy i $(l-3\,b+p') > 0$ a obdobně $(l-3\,a+p) > 0$. Z toho plyne, že jsou v podporách jediného zatíženého pole vždy momenty záporné. To platí nejen pro jediné osamělé břímě, nýbrž vůbec pro jakékoli zatížení, neboť každé zatížení lze složiti z osamělých břemen.

Z podporových momentů M_a, M_b stanovíme momenty ohybové i síly posouvající ve všech průřezech pole $a\,b$. Moment ohybový v průřezu x je dán vzorcem (58)

$$M = \mathfrak{M} + M'.$$

$\mathfrak{M}$ je moment ohybový v průřezu x prostého nosníku $a\,b$, zatíženého v průřezu p osamělým břemenem P; má pro průřez x vlevo od břemene hodnotu

$$\mathfrak{M} = \frac{P\,p'}{l}\,x \tag{89a}$$

a pro průřez x vpravo od břemene hodnotu

$$\mathfrak{M} = \frac{P\,p}{l}\,x'. \tag{89b}$$

Doplněk momentový M' je dán vzorcem (58), do něhož dosadíme za M_a, M_b stanovené hodnoty; vyjde

$$M' = \frac{M_a\,x' + M_b\,x}{l} = -\frac{P\,p\,p'}{c\,l^3}\,[a\,(l-3\,b+p')\,x' + b\,(l-3\,a+p)\,x]. \tag{90}$$

Počítáme-li předem momenty M_a, M_b, určíme ovšem doplněk M' z původního vzorce (58).

Síla posouvající v průřezu x se určí podle vzorce (59)

$$T = \mathfrak{T} + T' .$$

$\mathfrak{T}$ je posouvající síla prostého nosníku $a\,b$; platí pro ni vlevo od břemene vzorec

$$\mathfrak{T} = \frac{P\,p'}{l} \tag{91^a}$$

a vpravo od břemene vzorec

$$\mathfrak{T} = -\frac{P\,p}{l} . \tag{91^b}$$

Doplněk T' síly posouvající určíme ze vzorce (59)

$$T' = \frac{M_b - M_a}{l} = \frac{P\,p\,p'}{c\,l^3}\,[a\,(l - 3\,b + p') - b\,(l - 3\,a + p)] =$$

$$= \frac{P\,p\,p'}{c\,l^3}\,[l\,(2\,a - b) - (a + b)\,p] . \tag{92}$$

Podrobnějším vyšetřováním se později ukáže, že je vlevo od břemene posouvající síla kladná, vpravo od břemene záporná. Je-li jediné pole $a\,b$ spojitého nosníku zatíženo jediným osamělým břemenem, souhlasí tedy znaménka síly posouvající v poli $a\,b$ spojitého nosníku po obou stranách břemene se znaménky u prostého nosníku.

γ) ***Soustava osamělých břemen*** se řeší tak, že se vypočtou podporové momenty pro každé břímě v soustavě podle vzorců (88^a), (88^b) a výsledky se sečtou. Pak jest

$$M_a = -\frac{a}{c\,l^2} \sum P\,p\,p'\,(l - 3\,b + p') , \tag{93^a}$$

$$M_b = -\frac{b}{c\,l^2} \sum P\,p\,p'\,(l - 3\,a + p) . \tag{93^b}$$

Z momentů podporových stanovíme ohybový moment M a posouvající sílu T v libovolném průřezu x pole $a\,b$ podle obecných vzorců (58), (59).

δ) ***Rovnoměrné zatížení částečné v délce*** $\overline{z\,z_1}$ (viz obr. 77) dá $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ podle vzorců (66). Z toho určíme

$$b\,\mathfrak{N} - (l - b)\,\mathfrak{N}' = \frac{q}{4}\,[b\,(z_1^2 - z^2)\,(2\,l^2 - z^2 - z_1^2) - (l - b)\,(z'^2 - z_1'^2)\,(2\,l^2 - z'^2 - z^2)] =$$

$$= -\frac{q\,l}{4}\left\{(l - 2\,b)\,[2\,(z_1^2\,z_1' - z^2\,z') + l\,(z_1^2 - z^2)] + z_1^2\,z_1'^2 - z^2\,z'^2\right\},$$

$$a\,\mathfrak{N}' - (l - a)\,\mathfrak{N} = \frac{q}{4}\,[a\,(z'^2 - z_1'^2)\,(2\,l^2 - z'^2 - z_1'^2) - (l - a)\,(z_1^2 - z^2)\,(2\,l^2 - z^2 - z_1^2)] =$$

$$= -\frac{q\,l}{4}\left\{(l - 2\,a)\,[2\,(z'^2\,z - z_1'^2\,z_1) + l\,(z'^2 - z_1'^2)] + z'^2\,z^2 - z_1'^2\,z_1^2\right\}.$$

Vzorce (87^a), (87^b) dají tu

$$M_a = -\frac{q\,a}{4\,c\,l^2}\left\{(l - 2\,b)\,[2\,(z_1^2\,z_1' - z^2\,z') + l\,(z_1^2 - z^2)] + z_1'^2\,z_1^2 - z'^2\,z^2\right\}, \tag{94^a}$$

$$M_b = -\frac{q\,b}{4\,c\,l^2}\left\{(l - 2\,a)\,[2\,(z'^2\,z - z_1'^2\,z_1) + l\,(z'^2 - z_1'^2)] + z'^2\,z^2 - z_1'^2\,z_1^2\right\}. \tag{94^b}$$

Známe-li podporové momenty, určíme ohybový moment M a posouvající sílu T v obecném průřezu podle obecných vzorců (58), (59). Prostý nosník $a\,b$, zatížený rovnoměrně v délce $\overline{z\,z_1}$, má v podporách a, b reakce

$$\mathfrak{A} = \frac{q\,(z_1 - z)\,(z' + z'_1)}{2\,l}, \qquad \mathfrak{B} = \frac{q\,(z_1 - z)\,(z + z_1)}{2\,l} = \frac{q\,(z_1^2 - z^2)}{2\,l}.$$

V průřezu x části $a\,z$ je

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{A}\,x,$$

v průřezu x části $z_1\,b$ vyjde

$$\mathfrak{T} = -\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{B}\,x'$$

a v průřezu x části $z\,z_1$ obdržíme

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{A} - q\,(x - z), \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{A}\,x - \frac{1}{2}\,q\,(x - z)^2.$$

*ε) **Rovnoměrné zatížení v délce** $\overline{z\,b}$* (viz obr. 78) plyne z předešlého, dosadíme-li $z_1 = l$, $z'_1 = 0$; tím vyjde po úpravě

$$M_a = -\frac{q\,z'^2}{4\,c\,l^2}\,a\,[(l - 2\,b)\,(l + 2\,z) - z^2], \quad M_b = -\frac{q\,z'^2}{4\,c\,l^2}\,b\,[(l - 2\,a)\,(l + 2\,z) + z^2]. \tag{95}$$

Pro nosník prostý dostaneme v tomto případě

$$\mathfrak{A} = \frac{q\,z'^2}{2\,l}, \qquad \mathfrak{B} = \frac{q\,z'\,(l + z)}{2\,l},$$

pro průřez x v části $a\,z$ jest

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{A} = \frac{q\,z'^2}{2\,l}, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{A}\,x = \frac{q\,z'^2}{2\,l}\,x$$

a pro průřez x v části $z\,b$

$$\mathfrak{T} = -\mathfrak{B} + q\,x' = -\frac{q}{2\,l}\,(l^2 - z^2 - 2\,l\,x'), \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{B}\,x' - \frac{1}{2}\,q\,x'^2 = \frac{q\,x'}{2\,l}\,(l^2 - z^2 - l\,x').$$

*ζ) **Plné zatížení rovnoměrné*** (viz obr. 79) odvodíme z předešlého dosazením $z = 0$, $z' = l$, což dá

$$M_a = -\frac{q\,l}{4}\cdot\frac{a\,(l - 2\,b)}{c}, \quad M_b = -\frac{q\,l}{4}\cdot\frac{b\,(l - 2\,a)}{c}. \tag{96}$$

V průřezu x je ohybový moment

$$M = \mathfrak{M} + M', \qquad \text{kde} \qquad \mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\,q\,x\,(l - x),$$

$$M' = \frac{M_a\,x' + M_b\,x}{l} = -\frac{q\,l}{4}\cdot\frac{a\,(l - 2\,b) + (b - a)\,x}{c} = -\frac{q\,l}{4}\cdot\frac{b\,(l - 2\,a) + (a - b)\,x'}{c}. \tag{97}$$

V témž průřezu x je dále posouvající síla

$$T = \mathfrak{T} + T', \quad \text{při čemž} \quad \mathfrak{T} = q\left(\frac{l}{2} - x\right),$$

$$T' = \frac{M_b - M_a}{l} = \frac{q\,l}{4}\cdot\frac{a - b}{c}. \tag{98}$$

η) ***Částečné zatížení trojúhelníkové v délce*** $z\overline{z_1}$ (viz obr. 81) vyvodí $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}$ dané vzorci (72^a), (72^b). Potom jest

$$b\,\mathfrak{N}-(l-b)\,\mathfrak{M}=\frac{q_1(z_1-z)}{60}\Big\{b(z+2z_1)[3z'(l+z)+7z_1'(l+z_1)]+2bz_1^2(z_1-z)-$$
$$-(l-b)(z'+2z_1')[3z(l+z')+7z_1(l+z_1')]+2(l-b)z_1'^2(z_1-z)\Big\}=$$
$$=-\frac{q_1 l(z_1-z)}{60}\Big\{(z+2z_1)\Big(3[b(z-z')-z(l+z')]+7[b(z_1-z_1')-z_1(l+z_1')]\Big)+$$
$$+3(l-b)[3z(l+z')+7z_1(l+z_1')]-2(z_1-z)[b(z_1-z_1')+z_1'^2]\Big\},$$

$$a\,\mathfrak{M}-(l-a)\,\mathfrak{N}=\frac{q_1(z_1-z)}{60}\Big\{a(z'+2z_1')[3z(l+z')+7z_1(l+z_1')]-2az_1'^2(z_1-z)-$$
$$-(l-a)(z+2z_1)[3z'(l+z)+7z_1'(l+z_1)]-2(l-a)z_1^2(z_1-z)\Big\}=$$
$$=-\frac{q_1 l(z_1-z)}{60}\Big\{(z+2z_1)\Big(3[a(z-z')+z'(l+z)]+7[a(z_1-z_1')+z_1'(l+z_1)]\Big)-$$
$$-3a[3z(l+z')+7z_1(l+z_1')]+2(z_1-z)[a(z_1'-z_1)+z_1^2]\Big\}.$$

Podle vzorců (87^a), (87^b) vyjde

$$M_a=-\frac{q_1(z_1-z)a}{60cl^2}\Big\{(z+2z_1)\Big(3[b(z-z')-z(l+z')]+7[b(z_1-z_1')-z_1(l+z_1')]\Big)+$$
$$+3(l-b)[3z(l+z')+7z_1(l+z_1')]-2(z_1-z)[b(z_1-z_1')+z_1'^2]\Big\},\quad(99^a)$$

$$M_b=-\frac{q_1(z_1-z)b}{60cl^2}\Big\{(z+2z_1)\Big(3[a(z-z')+z'(l+z)]+7[a(z_1-z_1')+z_1'(l+z_1)]\Big)-$$
$$-3a[3z(l+z')+7z_1(l+z_1')]+2(z_1-z)[a(z_1'-z_1)+z_1^2]\Big\}.\quad(98^b)$$

Ohybový moment M a posouvající síla T jsou dány vzorci (58), (59). Pro nosník prostý ab určíme reakce

$$\mathfrak{A}=\frac{Qp'}{l}=\frac{q_1(z_1-z)(z'+2z_1')}{6l},\qquad\mathfrak{B}=\frac{Qp}{l}=\frac{q_1(z_1-z)(z+2z_1)}{6l}.$$

V průřezu x části az jest $\quad\mathfrak{T}=\mathfrak{A},\quad\mathfrak{M}=\mathfrak{A}x.$

v průřezu x části zb platí $\quad\mathfrak{T}=-\mathfrak{B},\quad\mathfrak{M}=\mathfrak{B}x'$

a v průřezu x části zz_1 dostaneme

$$\mathfrak{T}=\mathfrak{A}-Q\frac{(x-z)^2}{(z_1-z)^2}=\mathfrak{A}-\frac{q_1(x-z)^2}{2(z_1-z)}.$$

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{A}x-Q\frac{(x-z)^2}{(z_1-z)^2}\cdot\frac{x-z}{3}=\mathfrak{A}x-\frac{q_1(x-z)^3}{6(z_1-z)}.$$

ϑ) ***Plné zatížení trojúhelníkové*** (viz obr. 82) vychází z předešlého případu dosazením $z=z_1'=0$, $z'=z_1=l$; tak určíme

$$M_a=-\frac{q_1 l}{60c}a(7l-15b),\qquad M_b=-\frac{q_1 l}{60c}b(8l-15a).\quad(100)$$

Pro nosník prostý vycházejí reakce

$$\mathfrak{A} = \frac{Q}{3}, \qquad \mathfrak{B} = \frac{2Q}{3}$$

a v obecném průřezu x

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{A} - Q\frac{x^2}{l^2} = \frac{Q}{3l^2}(l^2 - 3x^2) = \frac{q_1}{6l}(l^2 - 3x^2),$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A}x' - \frac{Qx^2}{l^2}\cdot\frac{x}{3} = \frac{Qx}{3l^2}(l^2 - x^2) = \frac{q_1 x}{6l}(l^2 - x^2),$$

je-li $Q = \frac{1}{2}q_1 l$ výslednice zatížení. Dále je doplněk posouvající síly

$$T' = \frac{M_b - M_a}{l} = \frac{q_1 l}{60c}(7a - 8b) \tag{101}$$

a doplněk momentový

$$M' = \frac{M_a x' + M_b x}{l} = -\frac{q_1 l}{60c}[7ax' + b(8x - 15a)]. \tag{102}$$

*ι) **Zatížení momentem** M* v libovolném bodě p (viz obr. 84) řešíme z $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ daných vzorci (77); z toho plyne

$$b\mathfrak{N} - (l-b)\mathfrak{N}' = M[b(l^2 - 3p^2) + (l-b)(l^2 - 3p'^2)] = Ml[l(l-3b) + 3p'(2b - p')]$$

a obdobně

$$a\mathfrak{N}' - (l-a)\mathfrak{N} = -Ml[l(l-3a) + 3p(2a - p)].$$

Dosazením do vzorců (87^a), (87^b) dostaneme

$$M_a = \frac{Ma}{cl}[l(l-3b) + 3p'(2b - p')], \qquad M_b = -\frac{Mb}{cl^2}[l(l-3a) + 3p(2a - p)]. \tag{103}$$

Pro nosník prostý je vlevo od p

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{A} = -\frac{M}{l}, \qquad \mathfrak{M} = \mathfrak{A}x = -\frac{M}{l}x$$

a vpravo od p

$$\mathfrak{T} = -\mathfrak{B} = -\frac{M}{l}, \qquad \mathfrak{M} = \mathfrak{B}x' = \frac{M}{l}x'.$$

Doplněk posouvající síly vyjde

$$T' = \frac{M_b - M_a}{l} = -\frac{M}{cl^2}[(a+b)(l^2 - 3p^2) - 3al(l-2p)] \tag{104}$$

a doplněk momentový

$$M' = \frac{M_a x' + M_b x}{l} = \frac{M}{cl^2}\left\{(l^2 - 3p^2)[al - (a+b)x] - 3al(l-2p)(x' - b)\right\}. \tag{105}$$

27. Grafické řešení momentů ohybových v jediném poli zatíženém.
*α) **Obecné řešení.*** Z rovnic (84), odvozených v předešlém odstavci, plynou rovnice

$$(l-a)M_a + aM_b + \frac{a\mathfrak{N}'}{l^2} = 0,$$

$$bM_a + (l-b)M_b + \frac{b\mathfrak{N}}{l^2} = 0.$$

V průřezu x je doplněk momentový

$$M' = \frac{M_a x' + M_b x}{l}\,; \qquad \text{z toho} \qquad M' l = M_a x' + M_b x\,.$$

V bodě λ jest $x = \overline{a\lambda} = a$, $x' = \overline{\lambda b} = l - a$, tedy

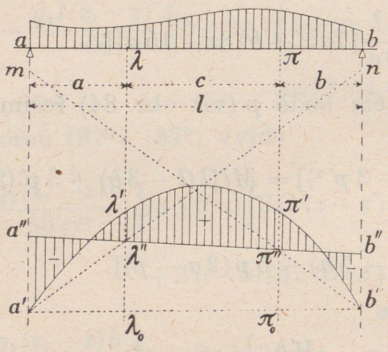
$$M'_\lambda l = (l - a)\, M_a + a\, M_b\,.$$

V bodě π třeba dosaditi $x' = \overline{\pi b} = b$, $x = \overline{a\pi} = l - b$; tím vyjde

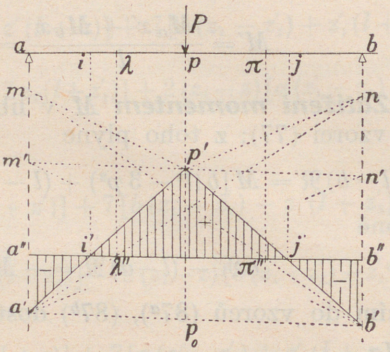
$$M'_\pi l = b\, M_a + (l - b)\, M_b\,.$$

Hořejší rovnice lze pak psáti

$$M'_\lambda l + \frac{a\,\mathfrak{R}'}{l^2} = 0\,, \qquad M'_\pi l + \frac{b\,\mathfrak{R}}{l^2} = 0\,.$$



Obr. 93.



Obr. 94.

K libovolnému zatížení v poli $a\,b$, na př. spojitému, určíme výslednicovou čáru $a'\,\lambda'\,\pi'\,b'$ (obr. 93); je-li $a''\,b''$ přemístěná strana základní, tu jest

$$M'_\lambda = f \cdot \overline{\lambda''\,\lambda_0}\,, \qquad M'_\pi = f \cdot \overline{\pi''\,\pi_0}\,.$$

Dále dosaďme podle vzorců (62)

$$\mathfrak{R}' = 6\,f\,(V)_b\,, \qquad \mathfrak{R} = 6\,f\,(V)_a\,;$$

obdržíme pak

$$f \cdot \overline{\lambda''\,\lambda_0} \cdot l + 6\,f \cdot (V)_b \cdot \frac{a}{l^2} = 0\,, \qquad f \cdot \overline{\pi''\,\pi_0} \cdot l + 6\,f \cdot (V)_a \cdot \frac{b}{l^2} = 0$$

a z toho vypočteme

$$(V)_b = \overline{\lambda_0\,\lambda''} \cdot \frac{l^3}{6\,a}\,, \qquad (V)_a = \overline{\pi_0\,\pi''} \cdot \frac{l^3}{6\,b}\,.$$

Spojnice $a'\,\lambda''$ určí na svislici bodu b bod n, spojnice $b'\,\pi''$ na svislici bodu a bod m; pak jest

$$n = \overline{b'\,n} = \overline{\lambda_0\,\lambda''} \cdot \frac{l}{a}\,, \qquad m = \overline{a'\,m} = \overline{\pi_0\,\pi''} \cdot \frac{l}{b}\,.$$

Tím vychází

$$(V)_a = \frac{1}{6}\,l^2\,m\,, \qquad (V)_b = \frac{1}{6}\,l^2\,n\,. \tag{106}$$

Poslední rovnice lze jednoduše vyložiti. Statický moment trojúhelníka $a' m b' = D$ ke svislici bodu a jest

$$(D)_a = \frac{1}{2} l m \cdot \frac{1}{3} l = \frac{1}{6} l^2 m = (V)_a .$$

Obdobně má trojúhelník $a' n b' = D'$ ke svislici bodu b statický moment

$$(D')_b = \frac{1}{2} l n \cdot \frac{1}{3} l = \frac{1}{6} l^2 n = (V)_b .$$

Sestrojíme-li tedy trojúhelník $a' m b'$, jenž má ke svislici podpory a týž statický moment jako prostý obrazec momentový, a trojúhelník $a' n b'$, jenž má ke svislici podpory b týž statický moment jako prostý obrazec momentový, seče strana $m b'$ svislici bodu π v bodě π'' přemístěné strany základní a strana $a' n$ svislici bodu λ v bodě λ'' přemístěné strany základní. Mezi přemístěnou stranou základní $a'' b'' \equiv \lambda'' \pi''$ a výslednicovou čarou $a' \lambda' \pi' b'$ k danému zatížení jest úplný obrazec momentový v poli $a b$. Úlohu řeší úseky $\overline{a' m} = m$, $\overline{b' n} = n$, jež se stanoví pro každý druh zatížení jinak.

*β) **Jediné břímě osamělé.*** Prostým obrazcem momentovým k jedinému břemeni P, jež působí v průřezu p pole $a b$ (obr. 94), je trojúhelník $a' p' b'$, jehož největší pořadnici znamenejme $\overline{p_0 p'} = \eta$. Statické momenty prostého obrazce momentového ke svislicím podporovým určili jsme vzorci (64^a), (64^b)

$$(V)_a = \tfrac{1}{6} l \eta (l + p), \qquad (V)_b = \tfrac{1}{6} l \eta (l + p') .$$

Srovnáme-li je s hodnotami, danými vzorci (106), dostaneme

$$m = \eta \frac{l + p}{l} = \eta + \eta \frac{p}{l}, \qquad n = \eta \frac{l + p'}{l} = \eta + \eta \frac{p'}{l} . \tag{107}$$

Úseky m, n snadno sestrojíme. Veďme bodem p' přímku $m' n' \parallel a' b'$, dále přímky $p' m \parallel b' m'$, $p' n \parallel a' n'$. Pak jest

$$\overline{a' m'} = \eta, \quad \overline{m' m} = \overline{a' m'} \cdot \frac{\overline{a p}}{\overline{a b}} = \eta \frac{p}{l}, \quad \text{tedy } m = \overline{a' m'} + \overline{m' m} = \overline{a' m} ;$$

$$\overline{b' n'} = \eta, \quad \overline{n' n} = \overline{b' n'} \cdot \frac{\overline{p b}}{\overline{a b}} = \eta \frac{p'}{l}, \quad \text{tedy } n = \overline{b' n'} + \overline{n' n} = \overline{b' n} .$$

Body m, n sestrojíme, doplníme-li trojúhelník $a' p' b'$ do rovnoběžníka $a' m' n' b'$ a promítneme-li vrchol p' rovnoběžně s úhlopříčnami rovnoběžníka na svislice podporové. Spojnice $a' n$ seče pak svislici bodu λ v bodě λ'' a spojnice $b' m$ svislici bodu π v bodě π''; body λ'', π'' spojuje přemístěná strana základní $a'' b''$.

*γ) **Soustava osamělých břemen.*** Působí-li v poli $a b$ břemena $P_1, P_2, P_3, \ldots$, určíme $\mathfrak{N}$ pro soustavu břemen, stanovíme-li hodnoty pro jednotlivá břemena a sečteme je:

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_3 + \ldots$$

Dosaďme za veličiny $\mathfrak{N}$ pro jednotlivá břemena i pro celou soustavu ze vzorce (62) a dostaneme

$$(V)_a = (V_1)_a + (V_2)_a + (V_3)_a + \ldots ;$$

podle vzorce (106) plyne

$$\tfrac{1}{6} l^2 m = \tfrac{1}{6} l^2 m_1 + \tfrac{1}{6} l^2 m_2 + \tfrac{1}{6} l^2 m_3 + \ldots$$

nebo

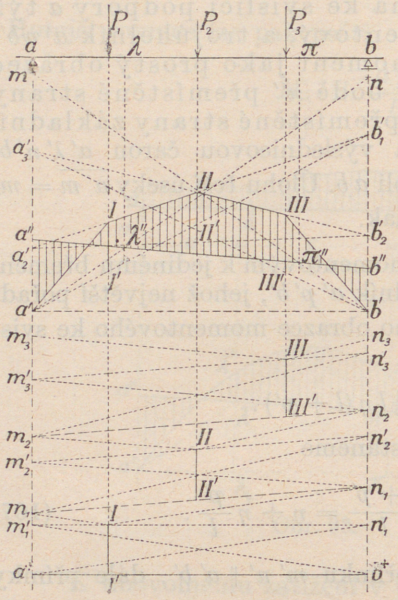
$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$$

a obdobně

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots$$

Sestrojíme tedy úseky m, n pro jednotlivá břemena a sečteme je.

K dané soustavě břemen P_1, P_2, P_3 narýsujeme nejprve výslednicovou čáru $a' I II III b'$, jež uzavírá se spojnicí $a' b'$ prostý obrazec momentový (obr. 95). Prosté obrazce momentové pro jednotlivá břemena určíme, podržíme-li pro každé břímě z výslednicové čáry jen ony dvě strany, jež se sekou na paprsku břemene, a průsečíky jejich se svislicemi podpor spojíme. K břemeni P_1 náleží prostý trojúhelník momentový $a' I b_1'$, určený stranou $a' I$ a prodlouženou stranou $I II$; v paprsku břemene P_1 má trojúhelník $a' I b_1'$ největší pořadnici $\eta_1 = \overline{I' I}$. Břímě P_2 dá prostý trojúhelník $a_2' II b_2'$, stanovený prodlouženými stranami $I II$, $II III$; v paprsku P_2 má trojúhelník $a_2' II b_2'$ největší pořadnici $\eta_2 = \overline{II' II}$. Konečně pro břímě P_3 je prostým trojúhelníkem momentovým $a_3' III b'$ o největší pořadnici $\eta_3 = \overline{III' III}$ v paprsku P_3. Úseky m, n sestrojíme ve zvláštním obrazci. Od osy $a^+ b^+$ přeneseme v paprsku P_1 pořadnici $\eta_1 = \overline{I' I}$; k břemeni P_1 náležel by prostý trojúhelník $a^+ I b^+$. Úseky m_1, n_1 sestrojíme, doplníme-li trojúhelník $a^+ I b^+$ do rovnoběžníka $a^+ m_1' n_1' b^+$ a vedeme-li $I m_1 \| b^+ m_1'$, $I n_1 \| a^+ n_1'$; pak jest $\overline{a^+ m_1} = m_1$, $\overline{b^+ n_1} = n_1$. Od spojnice $m_1 n_1$ přeneseme dále v paprsku P_2 pořadnici $\eta_2 = \overline{II' II}$; prostým trojúhelníkem pro břímě P_2 by byl $m_1 II n_1$. Doplníme jej do rovnoběžníka $m_1 m_2' n_2' n_1$ a vedeme $II m_2 \| n_1 m_2'$, $II n_2 \| m_1 n_2'$; tím určíme úseky $\overline{m_1 m_2} = m_2$, $\overline{n_1 n_2} = n_2$. Konečně přeneseme v paprsku P_3 od spojnice $m_2 n_2$ pořadnici $\eta_3 = \overline{III' III}$, doplníme trojúhelník $m_2 III n_2$ do rovnoběžníka $m_2 m_3' n_3' n_2$ a vedeme $III m_3 \| n_2 m_3'$, $III n_3 \| m_2 n_3'$, čímž sestrojíme úseky $\overline{m_2 m_3} = m_3$, $\overline{n_2 n_3} = n_3$. Pro soustavu břemen jest



Obr. 95.

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = \overline{a^+ m_3}, \quad n = n_1 + n_2 + n_3 = \overline{b^+ n_3}.$$

Přeneseme nyní do obrazce momentového $\overline{a^+ m_3} = \overline{a' m}$, $\overline{b^+ n_3} = \overline{b' n}$; spojnice $a' n$ seče svislici bodu λ v bodě λ'', spojnice $b' m$ svislici bodu π v bodě π'', body λ'', π'' spojuje pak přemístěná strana základní $a'' b''$, jež omezuje s výslednicovou čarou $a' I II III b'$ úplný obrazec momentový v poli $a b$.

Odvozené sestrojení je zdlouhavé, obsahuje-li soustava větší počet břemen. Zjednoduší se, vyjádříme-li úseky m_1, m_2, m_3, ... podle vzorce (102) hodnotami

$$m_1 = \eta_1 + \eta_1 \frac{p_1}{l}, \quad m_2 = \eta_2 + \eta_2 \frac{p_2}{l}, \quad m_3 = \eta_3 + \eta_3 \frac{p_3}{l}, \ldots;$$

pak platí

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots = \Sigma \eta + \frac{1}{l} \Sigma \eta p \qquad (108^a)$$

a obdobně

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots = \Sigma\eta + \frac{1}{l}\,\Sigma\eta p' . \qquad (108^b)$$

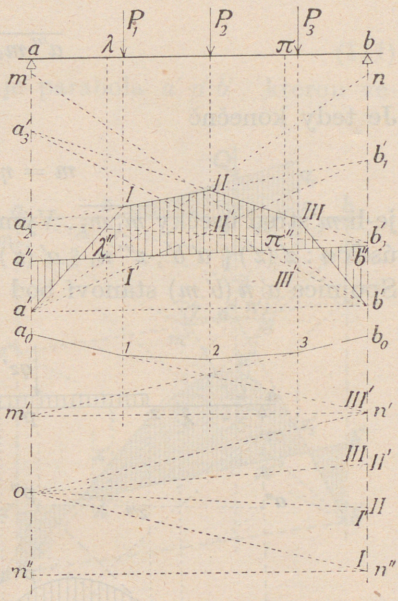
Pokládáme-li $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ za určovací úseky sil, jež působí v paprscích $P_1, P_2, P_3, \ldots$ znamená $\Sigma\eta p$ součet statických momentů těchto sil ke svislici bodu a a $\Sigma\eta p'$ součet statických momentů těchto sil ke svislici bodu b. Oba součty stanovíme výslednicovou čarou k silám, jež mají určovací úseky $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ a působí v paprscích $P_1, P_2, P_3, \ldots$ Úseky η sestrojíme jako v obr. 95. Sečteme nyní (obr. 96) tyto úseky $\eta_1 = \overline{I\,I'}$, $\eta_2 = \overline{II\,II'}$, $\eta_3 = \overline{III\,III'}$ ve svislici bodu b, zvolíme pól o ve svislici bodu a, tedy ve vzdálenosti $f = l$ a rýsujeme výslednicovou čáru $a_0\,1\,2\,3\,b_0$ nejlépe tak, aby její prodloužená první strana procházela bodem $III' \equiv n'$. Prodloužené krajní strany této čáry výslednicové utínají na svislicích podporových určovací úseky $\overline{m'\,a_0} = m'$, $\overline{n'\,b_0} = n'$ součtů statických momentů

$$\Sigma\eta p = l\,m', \qquad \Sigma\eta p' = l\,n' .$$

Vedeme-li ještě $m''\,n'' \parallel m'\,n'$, dostaneme podle vzorců (108^a), (108^b)

$$m = \Sigma\eta + m' = \overline{m''\,m'} + \overline{m'\,a_0} = \overline{m''\,a_0},$$
$$n = \Sigma\eta + n' = \overline{n''\,n'} + \overline{n'\,b_0} = \overline{n''\,b_0}.$$

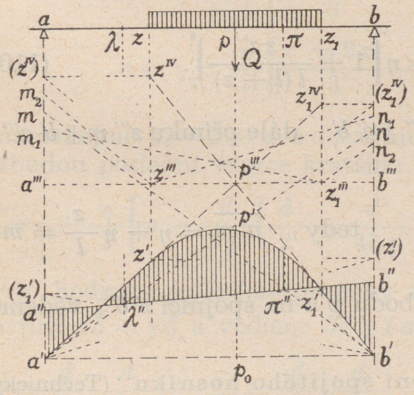
Výslední úseky přeneseme do obrazce momentového: $\overline{m''\,a_0} = \overline{a'\,m}$, $\overline{n''\,b_0} = \overline{b'\,n}$ a určíme spojnicemi $a'\,n$, $b'\,m$ na svislicích bodů λ, π body λ'', π'' přemístěné základní strany $a''\,b''$.



Obr. 96.

δ) ***Částečné zatížení rovnoměrné v délce*** $\overline{z\,z_1}$ (obr. 97) dá prostý obrazec momentový omezený výslednicovou čarou, složenou z přímek $a'\,z'$, $z_1'\,b'$ a paraboly $z'\,p'\,z_1'$, vepsané do lomené čáry výslednicové $a'\,p'''\,b'$ k břemeni $Q = q\,(z_1 - z)$, působícímu uprostřed délky $\overline{z\,z_1}$. Prostý obrazec momentový je úplně určen pořadnicí $\overline{p_0\,p'''} = \eta$.

Srovnáme-li $(V)_a$ dané vzorcem (65^a) a (106), dostaneme



Obr. 97.

$$\frac{l\eta}{6\,(z' + z_1')}\,(2\,l^2 - z^2 - z_1^2) = \frac{l\,m^2}{6}\,;$$

z toho plyne

$$m = \frac{\eta}{l\,(z' + z_1')}\,(2l^2 - z^2 - z_1^2) = \eta\left(1 + \frac{z\,z'}{2\,l\,p'} + \frac{z_1\,z_1'}{2\,l\,p'}\right). \qquad (109^a)$$

Obdobně bychom určili

$$n = \frac{\eta}{l\,(z + z_1)}\,(2\,l^2 - z'^2 - z_1'^2) = \eta\left(1 + \frac{z\,z'}{2\,l\,p} + \frac{z_1\,z_1'}{2\,l\,p}\right). \qquad (109^b)$$

Úseky m, n můžeme sestrojiti takto[1]): Vedeme-li bodem p''' přímku $a''' b''' \parallel a' b'$, dále $z_1' (z_1') \parallel a' b'$, $z_1''' m_1 \parallel b' (z_1')$, dostaneme

$$\overline{a''' m_1} = \overline{a z_1} \cdot \frac{\overline{a' (z_1')}}{\overline{a b}} = \frac{z_1}{l} \cdot \frac{\eta z_1'}{p'};$$

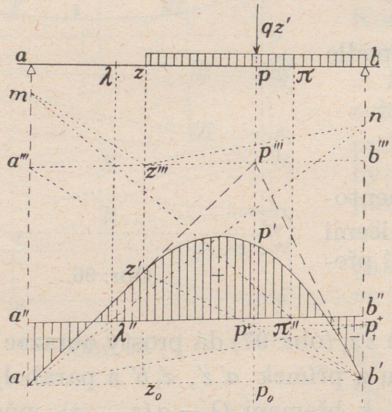
přímka $b' p'''$ seče svislici bodu z v z^{IV} a přímky $z^{IV} (z^{IV}) \parallel a' b'$, $z''' m_2 \parallel b' (z^{IV})$ určí úsek

$$\overline{a''' m_2} = \overline{a z} \cdot \frac{\overline{a' (z^{IV})}}{\overline{a b}} = \frac{z}{l} \cdot \frac{\eta z'}{p'}.$$

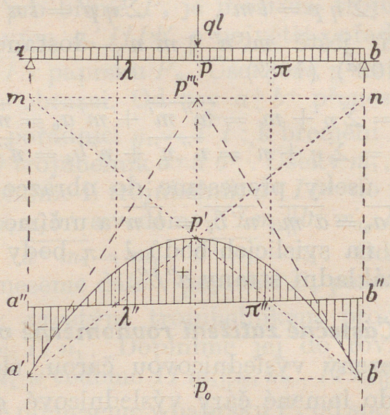
Je tedy konečně

$$m = \eta + \tfrac{1}{2} (\overline{a''' m_1} + \overline{a''' m_2}) = \overline{a' m},$$

je-li m střed úsečky $\overline{m_1 m_2}$. Výměnou levé a pravé strany v tomto sestrojení dostaneme úsek $n : z' (z') \parallel a' b'$, $z''' n_1 \parallel a' (z')$; $z_1^{IV} (z_1^{IV}) \parallel a' b'$, $z_1''' n_2 \parallel a' (z_1^{IV})$, bod n půlí úsek $\overline{n_1 n_2}$. Spojnice $a' n (b' m)$ stanoví bod λ'' (π'') přemístěné základní strany $a'' b''$.



Obr. 98.



Obr. 99.

ε) ***Částečné zatížení rovnoměrné v délce*** $\overline{z b}$ (obr. 98) vychází z předešlého případu dosazením $z_1 = l$, $z_1' = 0$, což dá

$$m = \eta \frac{l + z}{l}, \qquad n = \eta \cdot \frac{2 l^2 - z'^2}{l (l + z)} = \eta \left(1 + \frac{z z'}{l (l + z)} \right). \tag{110}$$

Úsek m sestrojíme, vedeme-li bodem p''' přímku $a''' b''' \parallel a' b'$, dále přímku $z''' m \parallel b' a'''$; pak jest

$$\overline{a' a'''} = \overline{p_o p'''} = \eta, \qquad \overline{a''' m} = \overline{a' a'''} \cdot \frac{\overline{a z}}{\overline{a b}} = \eta \frac{z}{l}, \qquad \text{tedy} \qquad \overline{a' m} = \eta + \eta \frac{z}{l} = m.$$

Pro sestrojení úseku n stanovíme bod p^+ na svislici bodu p a na spojnici $z' b'$, vedeme $p^+ p_1^+ \parallel a' b'$, $z''' n \parallel a' p_1^+$; v obr. 98 jest

[1]) Jiná sestrojení viz *J. Farský* „Příspěvek k řešení spojitého nosníku" (Technický obzor 1914, 197) a *J. Rameš* „Grafické řešení obtížení rovnoměrného, trojúhelníkového a jejich kombinací u spojitého nosníku" (Technický obzor 1939, 227).

$$\overline{z_0 z'} = \overline{p_0 p'''} \cdot \frac{\overline{a z}}{\overline{a b}} = \eta \frac{z}{p}, \qquad \overline{b' p_1^+} = \overline{p_0 p^+} = \tfrac{1}{2}\overline{z_0 z'} = \eta \frac{z}{2p} = \eta \frac{z}{l+z},$$

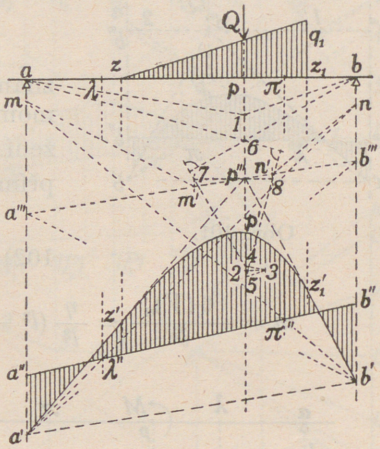
$$\overline{b''' n} = \overline{b' p_1^+} \cdot \frac{\overline{z b}}{\overline{a b}} = \eta \frac{z}{l+z} \cdot \frac{z'}{l}, \qquad \text{takže} \qquad \overline{b' n} = \eta + \eta \frac{z z'}{l(l+z)} = n.$$

Spojnicemi $a' n$, $b' m$ určíme jako vždy body λ'', π'' přemístěné základní strany $a'' b''$.

ζ) ***Plné zatížení rovnoměrné*** (obr. 99) je zvláštním případem předešlého zatížení, klademe-li $z = 0$, $z' = l$; ze vzorců (110) vyjde pak

$$m = n = \eta. \tag{111}$$

Výslednicovou čarou k zatížení rovnoměrnému je parabola $a' p' b'$, kterou vepisujeme do lomené výslednicové čáry $a' p''' b'$ k výslednici $\overline{q l}$, působící ve středu p délky $\overline{a b}$; tu jest $\overline{p_0 p'} = \overline{p' p'''}$ a $\overline{p_0 p'''} = \eta$. Přímkou $m n \parallel a' b'$, vedenou bodem p''', určíme již body m, n, jejichž spojnice s body b', a' sekou svislice bodů λ, π v bodech λ'', π'' přemístěné základní strany $a'' b''$; spojnice $a' n$, $b' m$ jdou však bodem p' jakožto středem obdélníka $a' m n b'$, není tedy bodů m, n třeba, neboť spojnice $a' p'$, $p' b'$ určují již body λ'', π''.



Obr. 100.

η) ***Částečné zatížení trojúhelníkové v délce*** $\overline{z z_1}$ (obr. 100) má výslednicovou čáru složenou z přímek $a' z'$, $z_1' b'$ a z kubické paraboly $z' p' z_1'$, která se těchto přímek dotýká v bodech z', z_1'; přímky $a' z'$, $z_1' b'$ se sekou v bodě p''' na paprsku výslednice $Q = \frac{1}{2} q_1 (z_1 - z)$ trojúhelníkového zatížení.

Z hodnot $(V)_a$, $(V)_b$ daných vzorci (73^a), (73^b) určíme

$$m = \frac{6(V)_a}{l^2} = \frac{3\eta}{10 l} \cdot \frac{(z + 2z_1)[3z'(l+z) + 7z_1'(l+z_1)] + 2z_1^2(z_1 - z)}{(z + 2z_1)(z' + 2z_1')},$$

$$n = \frac{6(V)_b}{l^2} = \frac{3\eta}{10 l} \cdot \frac{(z' + 2z_1')[3z(l+z') + 7z_1(l+z_1)] - 2z_1'^2(z_1 - z)}{(z + 2z_1)(z' + 2z_1')},$$

což lze uvésti na tvar

$$\left.\begin{aligned} m &= \eta + \frac{\eta}{l}\left[\frac{z + 2z_1}{3} - \frac{(z_1 - z)^2}{2(z' + 2z_1')} + \frac{(z_1 - z)^3}{15(z + 2z_1)(z' + 2z_1')}\right], \\ n &= \eta + \frac{\eta}{l}\left[\frac{z' + 2z_1'}{3} - \frac{(z_1 - z)^2}{2(z + 2z_1)} - \frac{(z_1 - z)^3}{15(z + 2z_1)(z' + 2z_1')}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{112}$$

Znamenejme $z_1 - z = d$ a dosaďme $\frac{1}{3}(z + 2z_1) = p = \overline{a p}$, $\frac{1}{3}(z_1' + 2z_1') = p' = \overline{p b}$; tím nabudou poslední vzorce kratšího tvaru

$$m = \eta + \frac{\eta}{l}\left[p - \frac{d}{3p'}\left(\frac{d}{2} - \frac{d^2}{45p}\right)\right], \qquad n = \eta + \frac{\eta}{l}\left[p' - \frac{d}{3p}\left(\frac{d}{2} + \frac{d^2}{45p'}\right)\right]. \tag{112^a}$$

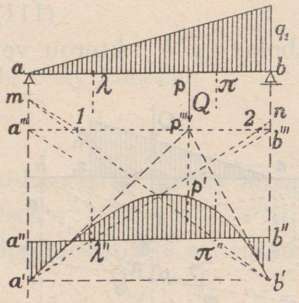
Tyto hodnoty vyřešíme graficky takto: Přeneseme $\overline{p 1} = \frac{1}{5} d$, $\overline{p''' 2} = \frac{1}{2} d$, na vodorovnici $\overline{23} = \frac{1}{9} d$ a vedeme $34 \parallel 1a$, $35 \parallel b1$, čímž sestrojíme

$$\overline{24} = \frac{d}{9} \cdot \frac{d}{5p}, \qquad \overline{25} = \frac{d}{9} \cdot \frac{d}{5p'}, \qquad \text{tedy } \overline{p''' 4} = \frac{d}{2} - \frac{d^2}{45p}, \qquad \overline{p''' 5} = \frac{d}{2} + \frac{d^2}{45p'}.$$

Je-li dále $\overline{p\,6} = \frac{1}{3}d$, určíme na vodorovnici bodu p''' přímkami $47 \perp b\,6$, $58 \perp a\,6$ úseky

$$\overline{7\,p'''} = \frac{d}{3\,p'}\left(\frac{d}{2} - \frac{d^2}{45\,p}\right), \qquad \overline{p'''\,8} = \frac{d}{3\,p}\left(\frac{d}{2} + \frac{d^2}{45\,p'}\right).$$

Svislé průměty bodů 7, 8 na přímku $a'''\,b'''$ jsou m', n' a přímky $m'\,m \parallel b'\,a'''$, $n'\,n \parallel a'\,b'''$ stanoví úseky $\overline{a'\,m} = m$, $\overline{b'\,n} = n$.



Obr. 101.

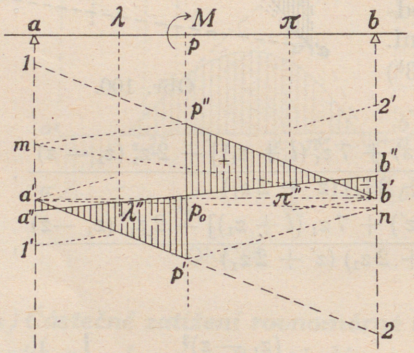
*ϑ) **Plné zatížení trojúhelníkové*** (obr. 101) má za výslednicovou čáru kubickou parabolu $a'\,p'\,b'$ a odvodí se z předchozího případu, klademe-li $z = 0 = z_1'$, $z' = l = z_1 = d$; vyjde pak $p = \frac{2}{3}l$, $p' = \frac{1}{3}l$, dále

$$m = \frac{6}{5}\eta, \qquad n = \frac{21}{20}\eta, \tag{113}$$

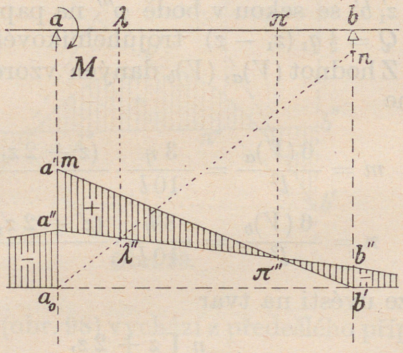
znamená-li zase $\eta = \overline{a'\,a'''} = \overline{b'\,b'''}$ pořadnici vrcholu prostého momentového trojúhelníka k výslednici $Q = \frac{1}{2}q_1 l$ všeho zatížení. Přeneseme-li $\overline{a'''\,1} = \frac{1}{5}\overline{a'''\,b'''}$, $\overline{2\,b'''} = \frac{1}{20}\overline{a'''\,b'''}$, dostaneme přímkami $1\,m \parallel b'\,a'''$, $2\,n \parallel a'\,b'''$ úseky $m = \overline{a'\,m}$, $n = \overline{a'\,n}$.

*ι) **Zatížení momentem*** M v průřezu p pole $a\,b$ (obr. 102) dá podle vzorců (78)

$$m = \frac{6\,(V)_a}{l^2} = \frac{\eta}{l^2}(l^2 - 3\,p^2), \qquad n = \frac{6\,(V)_b}{l^2} = -\frac{\eta}{l^2}(l^2 - 3\,p'^2). \tag{114}$$



Obr. 102.



Obr. 103.

Prostý obrazec momentový $a'\,p'\,p''\,b'$ jest určen pořadnicemi $\overline{a'\,1} = \overline{2\,b'} = \eta_c = M/f$. K sestrojení úseku m upravíme

$$m = \eta - 3\,\eta\,\frac{p^2}{l^2};$$

ve svislici p máme úsek $\overline{p'\,p_0} = \eta\,\frac{p}{l}$, přeneseme do svislice bodu a: $\overline{1\,1'} = 3 \cdot \overline{p_0\,p'}$, načež přímka $p''\,m \parallel b'\,1'$ určí úsek $\overline{m\,1} = \overline{1'\,1} \cdot \frac{p}{l}$ a tedy

$$\overline{a'\,m} = \overline{a'\,1} - \overline{m\,1} = \eta - 3\,\eta\,\frac{p^2}{l^2} = m.$$

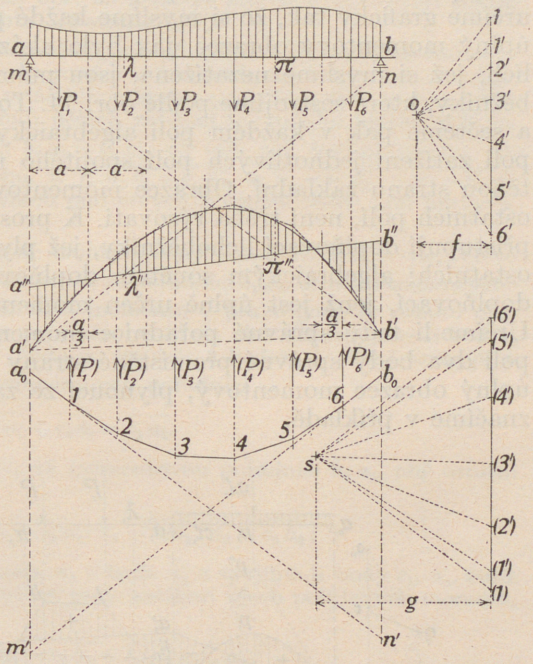
Obdobně určíme bod n, přeneseme-li $\overline{2\,2'} = 3 \cdot \overline{p_0\,p''}$ a vedeme $p'\,n \parallel a'\,b'''$.

Přenáší-li se na nosník moment M v bodě a (obr. 103), jest $p = 0$, $p' = l$ a vyjde

$$m = \eta, \qquad n = 2\eta. \tag{114a}$$

Prostý obrazec momentový je trojúhelník $a_0\, a'\, b'$, kde $\overline{a_0\, a'} = \eta = M/f$. Potom jest $m \equiv a'$, $\overline{b'\, n} = 2\eta$ a tedy bod π'' přemístěné základní strany je na přímce $a'\, b'$, bod λ'' na přímce $a_0\, n$. Vlevo od bodu a vycházela by základní strana z bodu a'', momentová přímka z bodu a_0; v bodě a má ohybový moment dvě hodnoty, jejichž rozdíl je $f \cdot \overline{a_0\, a'} = M$.

*x) **Zatížení spojité*** budiž dáno v poli $a\, b$ určovací plochou (obr. 104). Momentovou čarou jeho je křivka, již sestrojíme,[1]) rozdělíme-li určovací plochu svislicemi na proužky, jejichž zatížení nahrazujeme osamělými břemeny $P_1, P_2, P_3, \ldots$ v tížnicích proužků působícími; určovací úseky břemen určíme, uvedeme-li obsahy proužků na touž půdici. K náhradným břemenům $P_1 = \overline{1\ 1'}$, $P_2 = \overline{1'\ 2'}$, $P_3 = \overline{2'\ 3'}, \ldots$ narýsujeme pólovou vzdáleností f lomenou čáru výslednicovou, do níž vepíšeme křivku mající dotyčné body na prodloužených svislých mezích proužkových. Úseky m, n stanovíme pak ze vzorců (106).



Obr. 104.

Prostý obrazec momentový V jest omezen momentovou křivkou a základní stranou $a'\, b'$. Jeho statické momenty ke svislicím podporovým určíme, rozdělíme-li prostý obrazec momentový na proužky na př. prodlouženými svislými mezemi proužků určovací plochy zatížení; proužky nahradíme v jejich tížnicích[2]) osamělými břemeny $(P_1), (P_2), (P_3), \ldots$, jejichž určovací úseky stanovíme, uvedeme-li obsahy proužků na půdici e. K břemenům $(P_1) = \overline{(1)\ (1')}$, $(P_2) = \overline{(1')\ (2')}$, $(P_3) = \overline{(2')\ (3')}\ldots$, jež působí na př. vzhůru, sestrojíme pólovou vzdáleností g lomenou čáru výslednicovou $a_0\ 1\ 2\ 3 \ldots b_0$, jejíž krajní strany prodloužíme ke svislicím podporovým a obdržíme v nich úseky $\overline{m'\, a_0} = m'$, $\overline{n'\, b_0} = n'$; pak jest

$$(V)_a = e\, g\, m', \qquad (V)_b = e\, g\, n'.$$

Srovnáme-li tyto hodnoty s hodnotami, danými vzorci (106), dostaneme úseky

$$m = \frac{6\, e\, g}{l^2}\, m', \qquad n = \frac{6\, e\, g}{l^2}\, n'. \tag{115}$$

Půdici e i vzdálenost g volíme; zvolme je tak, aby bylo $6\, e\, g = l^2$, tedy na př.

$$e = \frac{1}{6}\, l, \quad g = l \text{ nebo } e = \frac{1}{3}\, l, \quad g = \frac{1}{2}\, l \text{ (obr. 104).}$$

[1]) Srovnej prvý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1940), str. 101.

[2]) Tížnice úzkých proužků lichoběžníkových jsou přibližně uprostřed šířky; u krajních proužků trojúhelníkových o šířce a mají svislé tížnice od svislé meze proužkové vzdálenost $\frac{1}{3}\, a$.

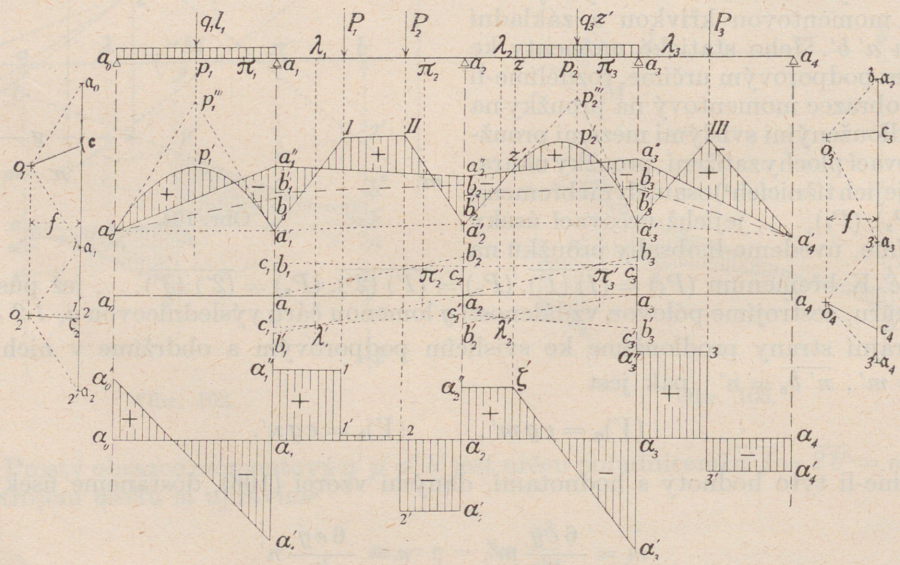
Vyjde pak

$$m = m' , \qquad n = n ;$$

přeneseme-li $\overline{m' a_0} = \overline{a' m}$, $\overline{n' b_0} = \overline{b' n}$, dávají spojnice $a' n$, $b' m$ na svislicích bodů λ, π body λ'', π'' přemístěné základní strany $a'' b''$.

c) *Několik polí nosníku zatíženo.*

28. Obrazec momentů ohybových a sil posouvajících. Budiž zatíženo několik polí spojitého nosníku, po případě všechna. Momentový obrazec spojitého nosníku určíme graficky tak, že si myslíme každé pole samotné zatíženo; v tomto poli určíme úplný momentový obrazec, jak bylo ukázáno v předešlém odstavci. V ostatních polích, jež si myslíme nezatížena, jsou momentovými obrazci pouhé doplňovací lichoběžníky, které sestrojíme podle obr. 74. To opakujeme pro každé zatížené pole zvláště a sečteme pak v každém poli algebraicky obrazce momentové, jež vyvodí v tomto poli zatížení jednotlivých polí spojitého nosníku, čímž sestrojíme správnou přemístěnou stranu základní. Obrazce momentové, jež vyvozuje v libovolném poli zatížení ostatních polí, není třeba rýsovati. K prostému obrazci momentovému v každém poli přistupují doplňovací lichoběžníky, jež plynou ze zatížení téhož pole i ze zatížení polí ostatních; algebraickým součtem doplňovacích lichoběžníků je konečný lichoběžník doplňovací, jenž jest úplně určen momentovými pořadnicemi v podporách nosníku. Určíme-li tedy správné pořadnice momentů podporových, obdržíme tím v každém poli dva body správné přemístěné strany základní, čímž je též určen v každém poli úplný obrazec momentový, plynoucí ze zatížení všech polí. Praktické provedení naznačíme v příkladě.



Obr. 105.

Příklad 22. Spojitý nosník o čtyřech různých polích je zatížen v celém prvém poli rovnoměrně, v druhém poli dvěma osamělými břemeny P_1, P_2, v třetím rovnoměrně po části pole $\overline{z a_3}$, ve čtvrtém osamělým břemenem P_3 (obr. 105).

Nejprve určíme podle obr. 88 základní body ve všech polích. Pak sestrojíme v každém poli prostý obrazec momentový. Zatížení prvého pole nahradíme břemenem $q_1 l_1$, působícím ve středu p_1 pole $a_0 a_1$; určovací úsek jeho přeneseme do čáry složkové $q_1 l_1 = \overline{a_0 a_1}$, zvolíme ve vzdálenosti f pól o_1 a rýsujeme výslednicovou čáru $a'_0 p'''_1 a'_1$, do níž vepíšeme parabolu $a'_0 p'_1 a'_1$. V čáře

složkové pro druhé pole $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2$ sečteme určovací úseky břemen $P_1 = \overline{1\,1'}$, $P_2 = \overline{2\,2'}$, zvolíme pól o_2 v téže vzdálenosti f jako pól o_1 a rýsujeme výslednicovou čáru $a'_1\ I\ II\ a'_2$ bodem a'_1, v němž končí výslednicová čára v prvém poli. V třetím poli nahradíme rovnoměrné zatížení břemenem $q_3 z'$, jež působí ve středu p_2 délky $\overline{z\,a_3} = z'$, přeneseme úsek jeho $q_3 z' = \overline{\mathfrak{z}\,\mathfrak{a}_3}$ do složkové čáry $\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3$ pro třetí pole, zvolíme pól o_3 opět ve vzdálenosti f a rýsujeme bodem a'_2 výslednicovou čáru $a'_2\ p''_2\ a'_3$, do níž vepíšeme parabolu $z'\ p'_2\ a'_3$. Konečně ve čtvrtém poli přeneseme do složkové čáry $\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4$ určovací úsek břemene $P_3 = \overline{3\,3'}$, zvolíme pól o_4 ve vzdálenosti f a narýsujeme bodem a'_3 výslednicovou čáru $a'_3\ III\ a'_4$.

Dále určíme v každém poli zvláště přemístěnou stranu základní předpokládajíce vždy, že je zatíženo pouze pole, v němž právě vyšetřujeme. V poli prvém určíme podle obr. 99 přemístěnou základní stranu $a'_0\ b_1$, v poli druhém podle obr. 95 nebo 96 stranu $b'_1\ b_2$, v poli třetím podle obr. 98 stranu $b'_2\ b_3$ a v poli čtvrtém podle obr. 94 stranu $b'_3\ a'_4$.

Účinkem zatížení ostatních polí posune se v každém poli přemístěná strana základní; toto posunutí určíme, stanovíme-li správné momenty podporové, vzniklé zatížením všech polí nosníku. Tu přeneseme z obrazce momentového nejlépe do zvláštního obrazce pod obrazcem momentovým od osy $a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ vzhůru pořadnice, jež znamenají účinek zatížení nejbližšího levého pole na příslušnou podporu, tedy $\overline{b_1\,a_1} = \overline{b_1\,a'_1}$, $\overline{b_2\,a_2} = \overline{b_2\,a'_2}$, $\overline{b_3\,a_3} = \overline{b_3\,a'_3}$; od téže osy dolů přeneseme pořadnice vzniklé zatížením nejbližšího pole pravého, t. j. $\overline{a_1\,b'_1} = \overline{b'_1\,a'_1}$, $\overline{a_2\,b'_2} = \overline{b'_2\,a'_2}$, $\overline{a_3\,b'_3} = \overline{b'_3\,a'_3}$. V každé podpoře stanovíme nyní zvláště účinek všech polí levých a účinek všech polí pravých, jež pak sečteme.

V podpoře a_1 vyvodí sousední levé (prvé) pole moment daný pořadnicí $\overline{b_1\,a_1} \equiv \overline{c_1\,a_1}$. Vlevo od podpory a_2 jsou dvě pole; bližší (druhé) pole dá momentovou pořadnici $\overline{b_2\,a_2}$, účinek vzdálenějšího (prvého) pole stanovíme pak, násobíme-li pořadnici $\overline{b_1\,a_1}$ momentu v pravé podpoře tohoto pole poměrem základního bodu π_2. Graficky provedeme toto násobení (viz obr. 89), spojíme-li bod a_1 s bodem b_2 a průsečík π'_2 této spojnice se svislicí bodu π_2 spojíme s bodem b_1, čímž sestrojíme $\overline{b_1\,a_1} \cdot \pi_2 = \overline{c_2\,b_2}$. Obě levá pole dají v podpoře a_2 momentovou pořadnici

$$\overline{b_2\,a_2} + \overline{b_1\,a_1} \cdot \pi_2 = \overline{b_2\,a_2} + \overline{c_2\,b_2} = \overline{c_2\,a_2}.$$

Vlevo od podpory a_3 jsou tři pole. Nejbližší (třetí) dá momentovou pořadnici $\overline{b_3\,a_3}$, obě ostatní (prvé a druhé) vyvodí pořadnici

$$\overline{b_1\,a_1} \cdot \pi_2 \cdot \pi_3 + \overline{b_2\,a_2} \cdot \pi_3 = (\overline{b_1\,a_1} \cdot \pi_2 + \overline{b_2\,a_2})\,\pi_3 = \overline{c_2\,a_2} \cdot \pi_3 = \overline{c_3\,b_3};$$

sestrojíme ji, protneme-li spojnici $a_2\,b_3$ se svislicí bodu π_3 v bodě π'_3 a spojíme-li body c_2, π'_3, čímž určíme na svislici bodu a_3 bod c_3. V podpoře a_3 vyvodí tedy zatížení všech polí levých moment, jehož pořadnice jest

$$\overline{b_1\,a_1} \cdot \pi_2 \cdot \pi_3 + \overline{b_2\,a_2} \cdot \pi_3 + \overline{b_3\,a_3} = \overline{c_3\,b_3} + \overline{b_3\,a_3} = \overline{c_3\,a_3}.$$

Obdobně stanovíme v každé podpoře účinek zatížení pravých polí. V podpoře a_3 dá jediné (čtvrté) pravé pole pořadnici $\overline{a_3\,b'_3} \equiv \overline{a_3\,c'_3}$. V podpoře a_2 vyvodí dvě pravá pole pořadnici

$$\overline{a_3\,b'_3} \cdot \lambda_2 + \overline{a_2\,b'_2} = \overline{b'_2\,c'_2} + \overline{a_2\,b'_2} = \overline{a_2\,c'_2},$$

jejíž konec c'_2 sestrojíme spojnicí bodu b'_3 s průsečíkem λ'_2 přímky $a_3\,b'_2$ se svislicí bodu λ_2. V podpoře a_1 vznikne účinkem zatížení tří polí pravých pořadnice

$$\overline{a_3\,b'_3} \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_1 + \overline{a_2\,b'_2} \cdot \lambda_1 + \overline{a_1\,b'_1} = (\overline{a_3\,b'_3} \cdot \lambda_2 + \overline{a_2\,b'_2})\,\lambda_1 + \overline{a_1\,b'_1} = \overline{a_2\,c'_2} \cdot \lambda_1 + \overline{a_1\,b'_1} = \overline{b'_1\,c'_1} + \overline{a_1\,b'_1} = \overline{a_1\,c'_1};$$

bod c'_1 určuje spojnice bodu c'_2 s průsečíkem λ'_1 přímky $a_2\ b'_1$ se svislicí bodu λ_1.

Současné zatížení všech polí vyvodí pak v podpoře a moment, jehož pořadnice jest

$$\overline{c_1\,a_1} + \overline{a_1\,c'_1} = \overline{c_1\,c'_1} = \overline{a''_1\,a'_1},$$

v podpoře a_2 moment o pořadnici

$$\overline{c_2\,a_2} + \overline{a_2\,c'_2} = \overline{c_2\,c'_2} = \overline{a''_2\,a'_2}$$

a v podpoře a_3 moment, k němuž náleží pořadnice

$$\overline{c_3\,a_3} + \overline{a_3\,c'_3} = \overline{c_3\,c'_3} = \overline{a''_3\,a'_3}.$$

V krajních podporách a_0, a_4, v nichž nosník končí, jsa v nich prostě podepřen, jsou vždy momenty $M_0 = 0$, $M_4 = 0$. Výslední pořadnice momentové přeneseme do obrazce momentového; celkové pořadnice momentové v podporách určují správné přemístěné strany základní ve všech polích $a'_0\ a''_1$, $a''_1\ a''_2$, $a''_2\ a''_3$, $a''_3\ a'_4$. Správný obrazec momentový v každém poli jest obsažen mezi správnou přemístěnou stranou základní a výslednicovou čarou k zatížení v poli působícímu.

Z obrazce momentového a složkového určíme v každém poli snadno síly posouvající. Pólovými paprsky $o_1 c_1 \parallel a'_0 a''_1$, $o_2 c_2 \parallel a''_1 a''_2$, $o_3 c_3 \parallel a''_2 a''_3$, $o_4 c_4 \parallel a''_3 a'_4$ určíme základní body složkových obrazců pro jednotlivá pole, v nichž začínají určovací úseky posouvajících sil. V bodě a_0 je posouvající síla $T'_0 = \overline{c_1 a_0} = \overline{\alpha_0 \alpha'_0}$, v bodě a_1 v prvém poli $T_1 = \overline{c_1 a_1} = \overline{\alpha_1 \alpha'_1}$, v druhém poli $T'_1 = \overline{c_2 a_1} = \overline{\alpha_1 \alpha''_1}$, v bodě a_2 v druhém poli $T_2 = \overline{c_2 a_2} = \overline{\alpha_2 \alpha'_2}$, v třetím poli $T'_2 = \overline{c_3 a_2} = \overline{\alpha_2 \alpha''_2}$, v bodě a_3 v třetím poli $T_3 = \overline{c_3 a_3} = \overline{\alpha_3 \alpha'_3}$, ve čtvrtém poli $T'_3 = \overline{c_4 a_3} = \overline{\alpha_3 \alpha''_3}$ a v bodě a_4 konečně $T_4 = \overline{c_4 a_4} = \overline{\alpha_4 \alpha'_4}$. Čarou síly posouvající je v prvém poli přímka $\alpha'_0 \alpha'_1$, v druhém poli stupňovitá čára $\alpha''_1\ 1\ 1'\ 2\ 2'\ \alpha'_2$, jejíž svislé strany v paprscích břemen se rovnají úsekům břemen; v třetím poli se skládá čára síly posouvající z vodorovnice $\alpha''_2\ \zeta'$ a přímky $\zeta'\ \alpha'_3$, ve čtvrtém poli platí stupňovitá čára $\alpha''_3\ 3\ 3'\ \alpha'_4$. V průřezech, kde síly posouvající mění znaménko, jsou největší prosté hodnoty momentů ohybových. Je to jednak v podporách, kdež jsou největší momenty záporné, jednak v průřezech přechodných uvnitř polí, v nichž obdržíme největší momenty kladné.

Reakce podporové určíme ze sil posouvajících při podporách podle vzorce (85). Dostaneme hodnoty

$$\begin{aligned}
A_0 &= T'_0 = \overline{c_1 a_0} = \overline{\alpha_0 \alpha'_0}, \\
A_1 &= -T_1 + T'_1 = \overline{c_2 c_1} = \overline{\alpha'_1 \alpha''_1}, \\
A_2 &= -T_2 + T'_2 = \overline{c_3 a_2} + \overline{a_2 c_2} = \overline{\alpha'_2 \alpha''_2}, \\
A_3 &= -T_3 + T'_3 = \overline{c_4 c_3} = \overline{\alpha'_3 \alpha''_3}, \\
A_4 &= -T_4 = \overline{a_4 c_4} = \overline{\alpha'_4 \alpha_4}.
\end{aligned}$$

29. Ohybová čára. Věta Mohrova, odvozená v odst. 17 β), platí vůbec pro každý přímý nosník. Podle ní jest ohybová čára spojitého nosníku stálého průřezu výslednicovou čarou ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plochou je plocha momentová. Pól má býti ve vzdálenosti

$$F = \frac{EJ}{ef}$$

od čáry složkové. Vzdálenost F vychází pravidlem příliš veliká. Zvolíme pak na př. libovolnou vzdálenost F_1, jíž odpovídají pořadnice y_1; správné pořadnice ohybové se určí podle vzorce (41^a)

$$y = y_1 \frac{F_1}{F}.$$

Vyšetříme-li momentový obrazec nosníku za předpokladu, že jsou podpory nosníku pevné, nedbajíce jejich popuštění, jsou ve všech podporách spojitého nosníku ohybové pořadnice rovny nule; pak musí býti průsečíky ohybové čáry se svislicemi podporovými v přímce, jež jest osou, od níž měříme ohybové pořadnice. Uvažujeme-li předem určitá popuštění v podporách a stanovíme-li momenty ohybové, hledíce k těmto popuštěním, musíme dostati v podporách ohybové pořadnice rovné daným popuštěním, čímž je zase určena osa ohybové čáry a dána zároveň kontrola řešení. Vše ostatní se objasní příkladem.

Příklad 23. Stanovme ohybovou čáru ocelového spojitého nosníku stálého průřezu o třech polích délek $l_1 = 12$ m, $l_2 = 16$ m, $l_3 = 10$ m, zatíženého v celé délce rovnoměrným zatížením $q = 450$ kg/m $= 0{,}45$ t/m; průřez nosníku měj moment setrvačnosti $J = 17\,250$ cm^4.

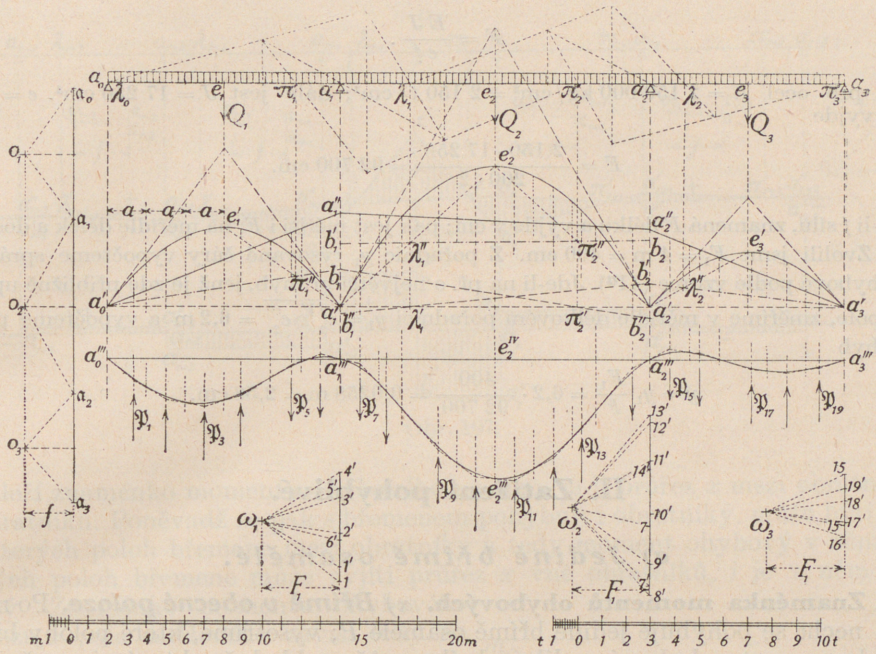
Zatížení jednotlivých polí nahradíme výslednicemi

$$Q_1 = q\,l_1 = 5{,}4 \text{ t} = \overline{a_0 a_1}, \qquad Q_2 = q\,l_2 = 7{,}2 \text{ t} = \overline{a_1 a_2}, \qquad Q_3 = q\,l_3 = 4{,}5 \text{ t} = \overline{a_2 a_3},$$

jejichž určovací úseky přeneseme do obrazce složkového (obr. 106) a zvolíme pro každé pole zvlášť póly o_1, o_2, o_2 v téže vzdálenosti $f = 2$ t (měřené na měřidle silovém) na vodorovnicích středů úseků $\overline{a_0 a_1}$, $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{a_2 a_3}$. Potom narýsujeme výslednicové čáry k břemenům Q_1, Q_2, Q_3, jež působí ve středech e_1, e_2, e_3 polí, a vepíšeme do nich paraboly $a'_0\ e'_1\ a'_1$, $a'_1\ e'_2\ a'_2$, $a'_2\ e'_3\ a'_3$. Na ose nosníku stanovíme dále podle obr. 88 základní body a sestrojíme pak v každém poli zvláště podle obr. 99 přemístěnou základní stranu $a'_0 b_1$, $b'_1 b_2$, $b'_2 a'_3$, předpokládajíce vždy, že je zatíženo jen pole, v němž právě řešíme. Jde nyní o současný účinek zatížení všech polí na momenty v podporách a_1, a_2.

V podpoře a_1 vyvodí zatížení obou sousedních polí momentové pořadnice $\overline{b_1 a_1'}$, $\overline{b_1' a_1'}$ a zatížení třetího pole pořadnici $\overline{b_2' a_2'} \cdot \lambda_1 = \overline{b_1'' a_1'}$, jež jest určena na svislici bodu a_1 přímkou $b_2' b_1''$, protínající osu $a_1' a_2'$ v bodě λ_1'. Zatížení všech tří polí dá tedy v podpoře a_1 momentovou pořadnici

$$\overline{a_1'' a_1'} = \overline{b_1 a_1'} + \overline{b_1' a_1'} - \overline{a_1' b_1''}.$$



Obr. 106.

Obdobně vyvodí zatížení prvého pole v bodě a_2 momentovou pořadnici $\overline{b_1 a_1'} \cdot \pi_2 = \overline{b_2'' a_2'}$, je-li bod b_2'' na spojnici bodu b_1 s průsečíkem π_2' osy $a_1' a_2'$ se svislicí bodu π_2; zatížení druhého pole dá pořadnici $\overline{b_2 a_2'}$, zatížení třetího pole pořadnici $\overline{b_2' a_2'}$. Celková pořadnice momentová v bodě a_2 jest

$$\overline{a_2'' a_2'} = \overline{b_2 a_2'} + \overline{b_2' a_2'} - \overline{a_2' b_2''}.$$

Správné přemístěné strany základní jsou pak $a_0' a_1''$, $a_1'' a_2''$, $a_2'' a_3'$; od nich k momentovým parabolám měříme momentové pořadnice spojitého nosníku.

Ohybová čára je výslednicovou čarou ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plochou je plocha momentová. Momentovou plochu rozdělíme svislicemi na proužky šířky $a = 2$ m; meze nejbližší bodům obratníkovým, v nichž je $M = 0$, vynecháme a nahradíme je svislicemi bodů obratníkových. Krajní proužky a proužky u bodů obratníkových mají tvar trojúhelníků, ostatní tvar lichoběžníků. Každý proužek, jehož obsah znamenejme $\mathfrak{U}$, nahradíme ideálným břemenem $\mathfrak{P} = \mathfrak{U}/e$, je-li e půdice, kterou zvolme $e = a = 2$ m. Určovacími úseky proužků lichoběžníkových jsou pak prostě jejich střední pořadnice; u proužků trojúhelníkových znásobíme jejich střední pořadnice poměrem a'/a, je-li a' skutečná šířka proužku. Paprsky břemen $\mathfrak{P}$ jsou dány svislými tížnicemi proužků; u proužků lichoběžníkových půlí paprsky $\mathfrak{P}$ přibližně jejich šířku. Kladné plochy momentové nahradíme břemeny $\mathfrak{P}$, jež směřují vzhůru, záporné plochy břemeny dolů směřujícími.

Pro přehlednost rýsujeme složkový obrazec pro břemena $\mathfrak{P}$ v každém poli zvláště. Zvolíme pak pól ω_1 na př. v libovolné vzdálenosti F_1 a rýsujeme z něho k břemenům $\mathfrak{P}$ v prvém poli výslednicovou čáru, jejíž poslední strana, rovnoběžná s paprskem $\omega_1\ 6'$, platí až k paprsku $\mathfrak{P}_7$ prvého břemene v druhém poli; s touto stranou musí býti rovnoběžný pólový paprsek $\omega_2\ 7$, i jest $\omega_2\ 7 \parallel \omega_1\ 6'$. Pól ω_2 má mimo to vzdálenost F_1 od čáry složkové, čímž jest určen. Z pólu ω_2 rýsujeme výslednicovou čáru k břemenům $\mathfrak{P}$ v druhém poli a poslední stranu její prodloužíme až k paprsku $\mathfrak{P}_{15}$ prvého břemene v třetím poli. Pól ω_3 sestrojíme ve vzdálenosti F_1 od složkové čáry pro třetí pole na paprsku $\omega_3\ 15 \parallel \omega_2\ 14'$, poněvadž je poslední strana v druhém poli, rovnoběžná s paprskem $\omega_2\ 14'$, zároveň první stranou v třetím poli, tedy je rovnoběžná s paprskem $\omega_3\ 15$. Z pólu ω_3 narýsujeme pak výslednicovou čáru k břemenům $\mathfrak{P}$ v třetím poli. Do lomené čáry výslednicové k břemenům $\mathfrak{P}$ vepíšeme konečně křivku, jež se dotýká stran lomené čáry na prodloužených svislých mezích proužkových.

Osa, od níž jest měřiti ohybové pořadnice, dána je výminkou, že jsou v podporách a_0, a_1, a_2, a_3 ohybové pořadnice vesměs rovny nule, poněvadž jsme řešili nosník spojitý za předpokladu, že jsou jeho podpory v téže přímce a že nepopustí. Průsečíky a_0''', a_1''', a_2''', a_3''' svislic podporových s čarou ohybovou musí tedy býti v jediné přímce, jež jest osou čáry ohybové; tím je dána kontrola řešení. Narýsovaná čára by dávala v měřidle délkovém správné pořadnice ohybové, kdybychom ji byli rýsovali pólovou vzdáleností

$$F = \frac{EJ}{ef}.$$

Dosaďme pro ocel $E = 2\,150\,000\ \mathrm{kg/cm^2} = 2\,150\ \mathrm{t/cm^2}$; dále jest $J = 17\,250\ \mathrm{cm^4}$, $e = 200$ cm, $f = 2$ t, i vyjde

$$F = \frac{2\,150 \cdot 17\,250}{200 \cdot 2} = 92\,700\ \mathrm{cm}.$$

Znamená-li f sílu, znamená F délku a vyjde v cm; pak jest měřiti i F_1 na měřidle délek a dosazovati je v cm. Zvolili jsme $F_1 = 4$ m $= 400$ cm. Z pořadnic y_1 rýsované čáry vypočteme správné pořadnice ohybové podle vzorce (41^a). Jde-li na př. o největší průhyb, jenž je zde přibližně uprostřed druhého pole, změříme v měřidle délkovém pořadnici $y_1 = \overline{e_2^{IV}\ e_2'''} = 6{,}2$ m a vypočteme pak největší průhyb

$$y = y_1 \frac{F_1}{F} = 6{,}2 \cdot \frac{400}{92\,700} = 0{,}0258\ \mathrm{m} = 2{,}58\ \mathrm{cm}.$$

II. Zatížení pohyblivé.

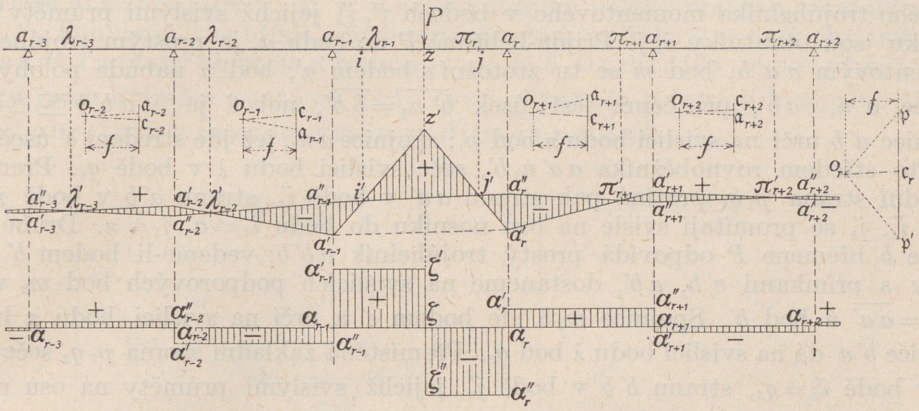
a) Jediné břímě osamělé.

30. Znaménka momentů ohybových. *α) Břímě v obecné poloze.* Po nosníku spojitém nechť se pohybuje jediné břímě osamělé P; vyšetříme, které polohy břemene přičiňují k momentu ohybovému libovolného průřezu kladně a které záporně. Naznačíme si k tomu momentový obrazec nosníku pro libovolnou polohu z břemene P (obr. 107). V poli $a_{r-1}\,a_r$, v němž působí břímě, sestrojíme k břemeni $P = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'}$ z pólu o_r ve vzdálenosti f od složkové čáry zvoleného výslednicovou čáru $a'_{r-1}\,z'\,a'_r$ a podle obr. 94 přemístěnou základní stranu $a''_{r-1}\,a''_r$. V levých polích nezatížených jsou momentovými obrazci pouhé doplňovací lichoběžníky, jejichž strany se sekou na svislicích levých bodů základních, a v pravých polích nezatížených dostaneme pouhé doplňovací lichoběžníky, jejichž strany se sekou na svislicích pravých bodů základních.

V poli zatíženém jsou v podporách a_{r-1}, a_r vždy momenty záporné, pod břemenem dá pak sestrojení podle obr. 94 vždy moment kladný. Vyjdou tedy v poli zatíženém dva *obratníky* i, j, v nichž je moment $M = 0$; dány jsou průsečíky i', j' momentové čáry $a'_{r-1}\,z'\,a'_r$ s přemístěnou základní stranou $a''_{r-1}\,a''_r$. Mezi obratníky i, j je pak moment kladný, vně obratníků moment záporný.

V každém poli nezatíženém se mění znaménko momentu jednou, a to v levých polích v levém, v pravých polích v pravém bodě základním. Podle toho určíme snadno znaménko momentu ohybového v libovolném průřezu některého pole nezatíženého. V bližší podpoře zatíženého pole je vždy moment záporný; znaménko momentu se pak mění tolikráte, kolik je základních bodů (vlevo od zatíženého pole levých, vpravo pravých) mezi touto podporou a uvažovaným průřezem. Je-li mezi průřezem a bližší podporou zatíženého pole sudý (lichý) počet základních bodů, a to vlevo od zatíženého pole levých, vpravo pravých, je v průřezu ohybový moment záporný (kladný). Je-li na př. břímě v poli $a_{r-1}\,a_r$, vznikne v průřezu x, který je v poli $a_{r-4}\,a_{r-3}$, vlevo od bodu λ_{r-4} ohybový moment kladný, poněvadž jsou mezi průřezem x a podporou a_{r-1} tři základní body levé (λ_{r-4}, λ_{r-3}, λ_{r-2}); v průřezu x_1 pole $a_{r+2}\,a_{r+3}$, který je vlevo od bodu π_{r+3}, je moment záporný, poněvadž jsou mezi body x_1 a a_r dva základní body pravé (π_{r+1}, π_{r+2}).

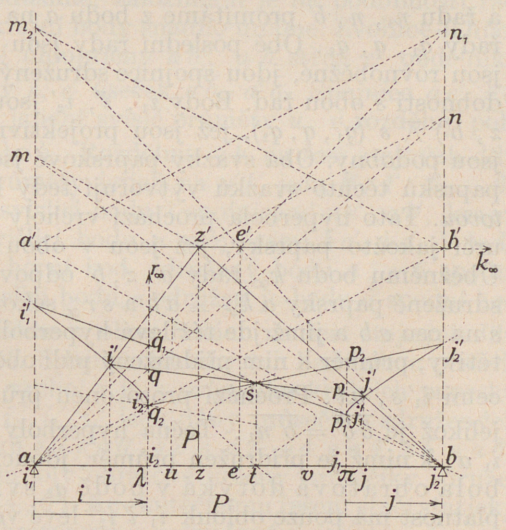
β) ***Hyperboly obratové.*** Vyšetřujme znaménko ohybového momentu libovolného průřezu nosníku, pohybuje-li se jediné břímě P po nosníku. V polích nezatížených jsou obratníky body základní, jejichž poloha je stálá; znaménko momentu libovolného průřezu v poli nezatíženém nezávisí tedy na pohybu břemene v poli zatíženém. V tomto



Obr. 107.

poli záleží znaménko momentu ohybového na tom, je-li průřez x mezi obratníky nebo vně obratníků. Poněvadž se pak s břemenem pohybují i obratníky, může býti průřez x za některých poloh břemene mezi obratníky a tedy moment ohybový v něm kladný, za jiných poloh břemene může vyjíti průřez x vně obratníků, i je v něm moment záporný. Znaménko momentu ohybového v průřezu x pole zatíženého závisí tedy na pohybu obratníků.

Pro břímě P v poloze z v poli $a_{r-1}\,a_r$ (obr. 107) skládá se momentový obrazec v tomto poli z prostého obrazce $a'_{r-1}\,z'\,a'_r$ a z doplňovacího lichoběžníka $a''_{r-1}\,a'_{r-1}\,a'_r\,a''_r$; obratníky i, j jsou svislými průměty průsečíků i', j' momentové čáry $a'_{r-1}\,z'\,a'_r$ s přemístěnou základní stranou $a''_{r-1}\,a''_r$, stačí tedy vyšetřiti pohyb bodů i', j'. Pohybuje-li se břímě P v poli $a_{r-1}\,a_r$, opisuje vrchol z' prostého trojúhelníka momentového parabolu se svislou osou (viz obr. 1). Vyšetřování zjednodušíme tím, že zvolíme za měřické místo vrcholů z' jednodušší čáru. Působí-li místo břemene P, jež dá v průřezu x moment M, v téže poloze břímě $2P$, $3P$, ..., je v témž průřezu x moment $2M$, $3M$, ..; v průřezech obratníkových je $M = 0$, tedy i $2M = 0$, $3M = 0$, ... Poloha obratníků závisí jedině na poloze, nikoli na velikosti břemene. Velikost břemene se může libovolně měniti; vrcholu z' lze pak přisouditi jakožto měřické místo libovolnou čáru, nejlépe přímku rovnoběžnou se základní stranou prostého trojúhelníka momentového.



Obr. 108.

Vyšetřme pohyb obratníků v poli $a\,b$ spojitého nosníku, v němž známe základní body λ, π (obr. 108). Pro břímě P v poloze z působící naznačme prostý trojúhelník momentový $a\,z'\,b$ při ose nosníku $a\,b$ a zvolme za měřické místo bodu z' přímku

$a'b' \parallel ab$; výška $\overline{zz'}$ závisí na velikosti břemene a na pólové vzdálenosti, jež obé mohou býti libovolné, lze tedy i výšku $\overline{zz'}$ zvoliti libovolně. Přemístěnou základní stranu k prostému trojúhelníku momentovému $az'b$ určíme, vedeme-li $z'm \parallel ba'$, $z'n \parallel ab'$ a protneme-li spojnici an se svislicí bodu λ v bodě q a spojnici bm se svislicí bodu π v bodě p. Spojnice pq je přemístěnou stranou základní a seče strany az', $z'b$ prostého trojúhelníka momentového v bodech i', j', jejichž svislými průměty na osu nosníku jsou obratníky i, j. Přijde-li břímě P do bodu a, je prostým trojúhelníkem momentovým $aa'b$; bod m se tu ztotožní s bodem a', bod n nabude polohy n_1 na přímce $a'n_1 \parallel ab'$, při čemž jest úsek $\overline{b'n_1} = \overline{bb'}$, neboť je $\triangle ab'b \overline{\simeq} \triangle a'n_1b'$. Spojnice $a'b$ určí na svislici bodu π bod p_1; spojnice an_1, jež jde středem e' úsečky $\overline{a'b'}$ jakožto středem rovnoběžníka $aa'n_1b'$, seče svislici bodu λ v bodě q_1. Přemístěná základní strana p_1q_1 protíná pak stranu aa' v bodě i_1'', stranu $a'b$ v bodě $j_1'' \equiv p_1$; body i_1'', j_1'' se promítají svisle na osu nosníku do bodů $i_1 \equiv a$, $j_1 \equiv \pi$. Druhé krajní poloze b břemene P odpovídá prostý trojúhelník $ab'b$; vedeme-li bodem b' rovnoběžky s přímkami $a'b$, ab', dostaneme na svislicích podporových bod m_2 ve výši $\overline{a'm_2} = \overline{aa'}$ a bod b'. Spojnice m_2b jde bodem e' a určí na svislici bodu π bod p_2; spojnice $b'a$ dá na svislici bodu λ bod q_2. Přemístěná základní strana p_2q_2 seče stranu ab' v bodě $i_2'' \equiv q_2$, stranu $b'b$ v bodě j_2'', jejichž svislými průměty na osu nosníku jsou obratníky $i_2 \equiv \lambda$, $j_2 \equiv b$.

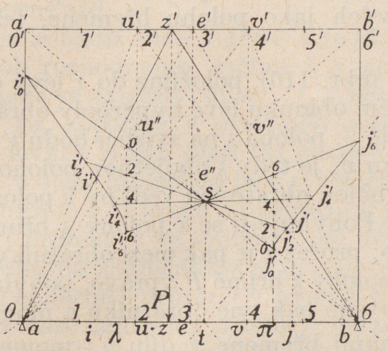
Pohybuje-li se břímě P v poli ab, vytvoří jeho působiště bodovou řadu a, z, b, jež se promítá svislými paprsky na rovnoběžnou osu $a'b'$ do shodné řady a', z', b'. Tuto řadu promítáme rovnoběžkami s přímkou $a'b$ do řady a', m, m_2 na levé svislici podporové a rovnoběžkami s přímkou ab' do řady n_1, n, b' na pravé svislici podporové; obě poslední řady jsou s předešlými řadami podobny. Řadu a', m, m_2 promítáme dále centrálně z bodu b na rovnoběžnou osu (svislici bodu π) do podobné řady p_1, p, p_2 a řadu n_1, n, b' promítáme z bodu a na rovnoběžnou osu (svislici bodu λ) do podobné řady q_1, q, q_2. Obě poslední řady jsou pak vzájemně podobny a poněvadž osy jejich jsou rovnoběžné, jdou spojnice sdružených bodů obou řad pq, p_1q_1, p_2q_2 středem podobnosti s obou řad. Body i_1', i', i_2' jsou průsečíky sdružených paprsků svazků a (a', z', b') $\overline{\wedge}$ s (q_1, q, q_2), jež jsou projektivní, poněvadž řady bodové a', z', b' a q_1, q, q_2 jsou podobny. Oba svazky paprskové jsou protiběžné; průsečíky i_1', i', i_2' sdružených paprsků těchto svazků vytvořují tedy hyperbolu, která slove *levou hyperbolou obratovou*. Tato hyperbola prochází vrcholy obou svazků a, s; tečny její v bodech a, s se určí jakožto paprsky, jež jsou v obou svazcích sdruženy společnému paprsku as. Úběžnému bodu k_∞ řady a', z', b' odpovídá v podobné řadě q_1, q, q_2 úběžný bod r_∞; sdružené paprsky $ak_\infty \equiv ab$ a sr_∞ sekou se v bodě t, jenž je svislým průmětem bodu s na osu ab a jímž jde též levá hyperbola obratová. Pak jsou $st \parallel i_1'a$ dvě rovnoběžné tětivy; průměr k nim přidružený půlí obě tětivy a tedy i každý svislý úsek mezi spojnicemi $i_1's$, at. Prochází proto onen průměr též bodem q_2, pro nějž platí $\overline{\lambda q_2} = \overline{q_2q_1}$, jelikož je $\overline{bb'} = \overline{b'n_1}$. Tečna hyperboly v bodě q_2 je pak rovnoběžná s tětivami st, $i_1'a$, k nimž je přidružen průměr, jdoucí bodem q_2. Z toho plyne, že se levá hyperbola obratová dotýká v bodě q_2 svislice levého bodu základního. Statickou platnost má pouze oblouk $i_1'i'i_2'$ levé větve hyperboly; pokračování levé větve a celá pravá větev, jdoucí body s, t, nemají statické platnosti.

Obdobně jsou body j_1', j', j_2' na *pravé hyperbole obratové*, jejíž pravá větev jde bodem b a dotýká se v bodě $j_1' \equiv p_1$ svislice pravého bodu základního; levá větev její jde zase body s, t. Statickou platnost má pouze oblouk $j_1'j'j_2'$ pravé větve.

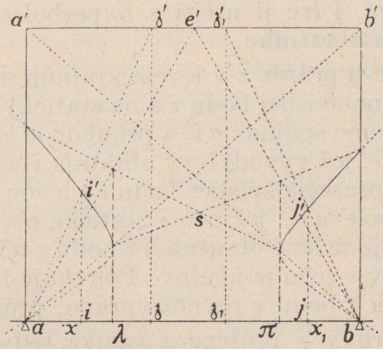
Celá větev hyperboly je po téže straně libovolné tečny. Je tedy levá větev levé hyperboly obratové, na níž je staticky platný oblouk $i_1'i'i_2'$, celá po levé straně svislice bodu λ; levé obratníky i, jsouce svislými průměty bodů i', jsou pak nezbytně po levé straně levého základního bodu λ. Obdobně jsou pravé obratníky j

nezbytně po pravé straně pravého základního bodu π. Do vnitřního dílu $\overline{\lambda\pi}$ pole ab nemohou obratníky nikdy přijíti.

Pohybu břemene z a přes z do b odpovídá řada a', z', b', na levé hyperbole obratové řada i_1', i', i_2' a na ose nosníku polohy levého obratníku $i_1 \equiv a$, i, $i_2 \equiv \lambda$, na pravé hyperbole obratové řada j_1', j', j_2' a na ose nosníku polohy pravého obratníku $j_1 \equiv \pi$, j, $j_2 \equiv b$. Pohybuje-li se břímě z bodu a přes z do b, pohybuje se levý obratník z bodu a přes i do λ a pravý obratník z bodu π přes j do b. Obratníky se pohybují v témž směru jako břímě a zůstává vždy levý obratník v levém krajním dílu $\overline{a\lambda}$, pravý obratník v pravém krajním dílu $\overline{\pi b}$ pole ab.



Obr. 109.



Obr. 110.

Sestrojení hyperbol obratových zjednodušíme, založíme-li je na podobnosti řad (a', z', b'), (q_1, q, q_2), (p_1, p, p_2), jejichž krajní body snadno určíme. Zvolíme-li libovolně přímku $a'b' \parallel ab$ (obr. 109), stanoví úhlopříčny ab', $a'b$ střed e'' obdélníka $aa'b'b$, jehož svislými průměty jsou středy e, e' úseček $\overline{ab}$, $\overline{a'b'}$. Spojnice ae', be' sekou úhlopříčny $a'b$, ab' v bodech u'', v'', jejichž svislé průměty u, v rozdělují pole ab na tři stejné díly; pak jest $\overline{ue} = \overline{ev} = \frac{1}{6}\overline{ab}$. Rozdělme $\overline{ab}$ na šest stejných dílů a znamenejme dělicí body $0, 1, 2, \ldots 6$; průměty jejich na $a'b'$ jsou $0', 1', 2', \ldots 6'$. Krajní body řady (q_1, q, q_2) jsou určeny na svislici bodu λ spojnicemi ae', ab', krajní body řady (p_1, p, p_2) jsou pak dány na svislici bodu π spojnicemi ba', be'. V řadě bodové na svislici bodu λ poznamenejme 0 horní bod, sdružený bodu a, a 6 spodní bod, sdružený bodu b; v řadě bodové na svislici bodu π sdružen je bodu a spodní bod 0, bodu b horní bod 6. Vzdálenost $\overline{06}$ rozdělme v obou řadách na šest stejných dílů a poznamenejme dělicí body opět $0, 1, 2, \ldots 6$. Spojnice sdružených bodů obou posledních řad vytvořují svazek paprskový, jehož vrchol s je v průsečíku krajních paprsků 00, 66. Body levé hyperboly obratové i_0', i_2', i_4', i_6' jsou dány průsečíky sdružených paprsků svazků s a a, tedy průsečíky paprsků $s0$ s $a0'$, $s2$ s $a2'$, $s4$ s $a4'$, $s6$ s $a6'$. Obdobně jsou body j_0', j_2', j_4', j_6' pravé hyperboly obratové určeny průsečíky sdružených paprsků svazků s $(0, 2, 4, 6)$ a b $(0', 2', 4', 6')$. Ke skutečnému řešení stačí staticky platné oblouky $i_0'i_6'$, $j_0'j_6'$ obou hyperbol obratových; pokračování jejich, jež nemá statické platnosti, určilo by se jako v obr. 108.

Hyperbolami obratovými určíme snadno k dané poloze z břemene P obratníky i, j. Bod z' na paprsku P spojíme s body a, b a určíme průsečíky i', j' obou spojnic s hyperbolami obratovými. Body i, j jsou pak svislými průměty bodů i', j'.

γ) ***Obojetná poloha břemene.*** Známe-li pohyb obratníků, posoudíme snadno, jakým znaménkem přičiňují jednotlivé polohy břemene v poli ab k ohybovému momentu libovolného průřezu x v témž poli ab. Je-li průřez x mezi základními body λ, π, je za každé polohy břemene P v poli ab mezi obratníky, neboť je vždy levý obratník i

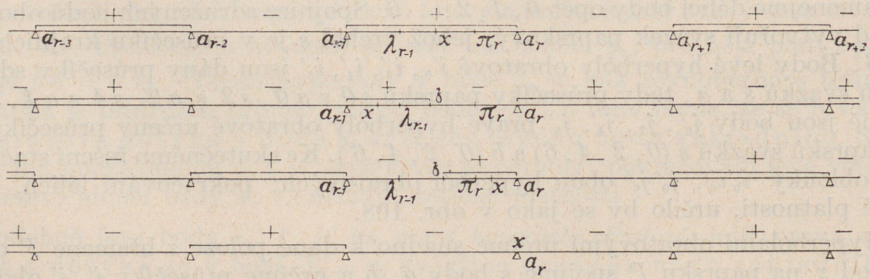
vlevo od bodu λ a pravý obratník j vpravo od bodu π; v průřezu x je pak vždy moment kladný. Veškeré polohy břemene P v poli ab přičiňují tedy k ohybovému momentu průřezu x ve vnitřním dílu pole $\overline{\lambda\pi}$ kladně.

Budiž nyní průřez x v krajním dílu pole, na př. $\overline{a\lambda}$. K dané poloze z břemene P mohli bychom určiti obratníky i, j z hyperbol obratových a posouditi pak znaménko ohybového momentu průřezu x; v průřezu x je moment kladný za oněch poloh břemene, jež dají průřez x mezi obratníky i, j, a moment záporný, vyjde-li průřez x vně obratníků. Lze však najednou rozděliti pole ab v díly přičiňující k momentu průřezu x kladně a záporně; třeba jen určiti *obojetnou (neutrálnou) polohu* břemene, jež nepřičiňuje k momentu průřezu x ani kladně ani záporně, vyvozujíc v průřezu x moment $M = 0$. Obojetná poloha břemene znamená tedy polohu, za které je průřez x průřezem obratníkovým, i lze ji určiti z hyperbol obratových jako polohu břemene, jež odpovídá danému obratníku.

Je-li průřez x v levém krajním dílu $\overline{a\lambda}$ (obr. 110), položíme do x levý obratník i, určíme na svislici bodu i a na staticky platném oblouku levé hyperboly obratové bod i' a protneme spojnici ai' s přímkou $a'b'$ v bodě ζ'; poloha ζ na svislici bodu ζ' je polohou břemene, jež vyvodí levý obratník i v průřezu x, je tedy ζ obojetnou polohou břemene. Druhý průsečík svislice bodu i s levou hyperbolou obratovou vedl by k poloze břemene mimo pole ab, jež nemá statické platnosti. Pohybuje-li se z polohy ζ břímě P vlevo, pohybuje se levý obratník i z bodu x též vlevo; průřez x je pak mezi obratníky a moment ohybový v něm je kladný. Pohybuje-li se z polohy ζ břímě P vpravo, pohybuje se levý obratník z bodu x rovněž vpravo; průřez x vyjde pak vně obratníků a moment v něm je záporný. V průřezu x vzniká tedy polohami břemene v dílu $\overline{a\zeta}$ moment kladný, polohami břemene v dílu $\overline{\zeta b}$ moment záporný.

Obdobně určíme pro průřez x_1 v pravé krajní části $\overline{\pi b}$ pole ab obojetnou polohu ζ_1, pokládáme-li průřez x_1 za pravý průřez obratníkový j a stanovíme-li příslušnou polohu břemene. Svislice bodu j seče staticky platný oblouk pravé hyperboly obratové v bodě j', jehož spojnice s bodem b protne přímku $a'b'$ v bodě ζ_1' na svislici obojetné polohy ζ_1. Pohybuje-li se z polohy ζ_1 břímě P vlevo (vpravo), posouvá se pravý obratník j též vlevo (vpravo); tím se ocitá průřez x_1 vně obratníků (mezi obratníky) a moment v něm je záporný (kladný). Polohy břemene v části $\overline{a\zeta_1}$ ($\overline{\zeta_1 b}$) vyvozují v průřezu x_1 moment záporný (kladný).

Oba výsledky lze shrnouti v jednu větu: K průřezu x, položenému v krajní části $\overline{a\lambda}$ nebo $\overline{\pi b}$ pole ab, náleží obojetná poloha ζ, jež dělí pole ve dva díly $\overline{a\zeta}$, $\overline{\zeta b}$; polohy břemene v onom dílu, v němž je průřez x, přičiňují k momentu průřezu x kladně, polohy břemene v druhém dílu záporně.



Obr. 111.

δ) ***Schemata znamének.*** Vyšetřme znaménka, kterými všechny polohy břemene na nosníku přičiňují k momentu ohybovému průřezu x, obsaženého nejprve ve vnitřní části $\lambda_{r-1}\pi_r$, pole $a_{r-1}a_r$ (obr. 111). Jak jsme odvodili, přičiňují tu polohy břemene v celém poli $a_{r-1}a_r$ kladně. O znaménku v každém jiném poli rozhodneme, spočteme-li

základní body (vlevo od obtíženého pole levé, vpravo pravé) mezi průřezem x a bližší podporou pole, v němž určujeme znaménko; je-li těchto základních bodů sudý (lichý) počet, vyvodí břímě v libovolné poloze v uvažovaném poli působící v průřezu x moment záporný (kladný), i platí znaménko záporné (kladné) pro celé příslušné pole. Je-li břímě kdekoli v poli $a_{r-2}a_{r-1}$, není mezi podporou a_{r-1} a průřezem x žádný základní bod pravý; všechny polohy břemene v poli $a_{r-2}a_{r-1}$ vyvodí v průřezu x moment záporný. Polohy břemene v poli $a_{r-3}a_{r-2}$ vyvozují v průřezu x moment kladný, poněvadž je mezi podporou a_{r-2} a průřezem x jeden základní bod pravý, π_{r-1}. Na pravé straně průřezu není mezi podporou a_r a průřezem x žádný základní bod levý, platí proto pro celé pole $a_r a_{r+1}$ znaménko záporné. K podpoře a_{r+1} přibude jeden základní bod levý, platí tedy pro celé pole $a_{r+1}a_{r+2}$ znaménko kladné, pro pole $a_{r+2}a_{r+3}$ obdobně znaménko záporné atd.

Průřez x budiž dále v levé krajní části $a_{r-1}\lambda_{r-1}$ pole $a_{r-1}a_r$. O znaménku v tomto poli rozhodneme, určíme-li k průřezu x v poli $a_{r-1}a_r$ obojetnou polohu ζ, jež rozdělí pole ve dva díly; díl $a_{r-1}\zeta$, v němž je průřez x, přičiňuje k momentu průřezu x kladně, díl ζa_r záporně. V ostatních polích posuzujeme znaménka jako v předešlém případě. V levých polích platí táž znaménka jako při průřezu x ve vnitřní části téhož pole, neboť v obou případech jsou tytéž základní body pravé mezi libovolnou podporou levou a průřezem x. Vpravo od průřezu x je v tomto případě o jeden levý bod základní více než při průřezu x ve vnitřní části téhož pole, platí tedy ve všech pravých polích znaménka opačná znaménkům v prvém případě.

Jde-li konečně o průřez x v pravé krajní části $\pi_r a_r$ pole $a_{r-1}a_r$, náleží k němu v poli $a_{r-1}a_r$ zase neutrálná poloha ζ; díl ζa_r, obsahující průřez x, přičiňuje pak kladně, díl $a_{r-1}\zeta$ záporně. Srovnáme-li s průřezem ve vnitřní části téhož pole, máme vpravo od průřezu x týž počet základních bodů levých; proto platí ve všech pravých polích táž znaménka jako v prvém případě. Vlevo od průřezu x je zde však o jeden základní bod pravý více než v prvém případě, dostaneme tedy ve všech levých polích znaménka opačná znaménkům v prvém případě.

Srovnáme-li schemata znamének pro všechny tři probrané případy, vidíme, že stačí rozhodnouti o znaménku v poli, v němž je průřez; ostatní celá pole přičiňují střídavě kladně a záporně, znaménka se pak střídají se znaménkem v poli, v němž je průřez (je-li průřez ve vnitřní části), po případě se znaménky v obou dílech pole (je-li průřez v některé části krajní).

Pravidlo o střídání znamének pozbývá platnosti, jde-li o průřez podporový, na př. a_r (obr. 111). Případ ten plyne z případu třetího, pohybuje-li se průřez x vpravo, až splyne s podporou a_r. Obojetná poloha ζ se tu pohybuje, jak ukazuje obr. 110, rovněž vpravo; je-li $x \equiv a_r$, vyjde i $\zeta \equiv a_r$. Díl ζa_r, jenž přičiňoval kladně, zde tedy odpadá a díl $a_{r-1}\zeta$, přičiňující záporně, rozšíří se na celé pole $a_{r-1}a_r$. V ostatních polích platí táž znaménka jako v případě třetím, tedy celé pole $a_r a_{r+1}$ přičiňuje rovněž záporně. K momentu podporovému přičiňují obě sousední pole záporně, ostatní celá pole střídavě kladně a záporně. Znaménko v sousedních polích plyne též z toho, že libovolným zatížením kteréhokoli pole vznikají v jeho podporách výhradně záporné momenty.

Zvláštní případ se namítá, jde-li o moment k základnímu bodu, na př. π_r. Průřez si tu můžeme mysliti třeba ve vnitřní části $\lambda_{r-1}\pi_r$ pole $a_{r-1}a_r$; platí pak v poli $a_{r-1}a_r$ i ve všech pravých polích táž znaménka jako v prvém případě, t. j. v poli $a_{r-1}a_r$ znaménko kladné, v ostatních pravých polích střídavě znaménko záporné a kladné. Je-li jakkoli zatíženo libovolné levé pole, je bod π_r bodem obratníkovým, tedy je v něm moment ohybový $M = 0$. Všechna pole vlevo od podory a_{r-1} nepřičiňují tedy nijak k momentu ohybovému v bodě π_r.

ε) ***Počtářské stanovení obratníků a polohy obojetné*** založíme na výmince, že je v bodech obratníkových moment $M = 0$; poněvadž pak je

$$M = \mathfrak{M} + M',$$

platí pro obratníky

$$\mathfrak{M} = -M'.$$

Břímě P, působící v poloze z vpravo od průřezu x v poli ab, dá podle vzorce (89^a)

$$\mathfrak{M} = \frac{Pz'}{l} x;$$

působí-li břímě P v poloze z vlevo od průřezu x, určí se podle vzorce (89^b)

$$\mathfrak{M} = \frac{Pz}{l} x'.$$

Pro obě polohy břemene platí pak jednotný vzorec (90) pro doplněk momentový, jenž dá

$$M' = -\frac{Pzz'}{cl^3} [a(l-3b+z')x' + b(l-3a+z)x].$$

Výminka obratníků $\mathfrak{M} = -M'$ dá pro průřez x vlevo od břemene, tedy pro $x < z$

$$\frac{Pz'}{l} x = \frac{Pzz'}{cl^3} [a(l-3b+z')x' + b(l-3a+z)x];$$

z toho plyne

$$\frac{cl^2 x}{z} = a(l-3b+z')x' + b(l-3a+z)x. \qquad (116^a)$$

Obdobně platí pro průřez x vpravo od břemene, tedy pro $x > z$

$$\frac{cl^2 x'}{z'} = a(l-3b+z')x' + b(l-3a+z)x. \qquad (116^b)$$

Obě poslední rovnice platí, je-li $M = 0$; lze z nich pak určiti jak obratníky i, j k dané poloze z břemene P, tak i obojetnou polohu ζ k danému průřezu x.

Obratníky i, j k dané poloze z břemene P vypočteme, řešíme-li z rovnic (116^a), (116^b) úsečku x jakožto úsečku průřezů, v nichž je $M = 0$. Do rovnice (116^a), jež platí pro průřez x vlevo od břemene, položíme $x = i$, $x' = i'$ a vypočteme z ní

$$\frac{i}{l} = \frac{az(2l-3b-z)}{cl^2 + (2a-b)lz - (a+b)z^2}. \qquad (117^a)$$

Rovnice (116^b) platí pro průřez x vpravo od břemene; tu dosadíme $x = j$, $x' = j'$ a obdržíme

$$\frac{j'}{l} = \frac{bz'(2l-3a-z')}{cl^2 + (2b-a)lz' - (a+b)z'^2}. \qquad (117^b)$$

Hledáme-li naopak k danému průřezu x obojetnou polohu ζ, dosadíme do rovnic (116^a), (116^b) $z = \zeta$, $z' = \zeta'$; obdržíme rovnice kvadratické, jež lze uspořádati ve tvar

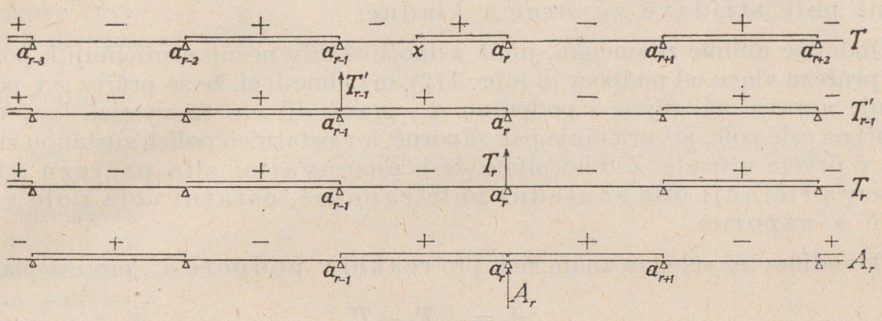
$$[al-(a+b)x]\zeta^2 - [a(2l-3b)-(2a-b)x]l\zeta + cl^2 x = 0, \qquad (118^a)$$

$$[bl-(a+b)x']\zeta'^2 - [b(2l-3a)-(2b-a)x']l\zeta' + cl^2 x' = 0. \qquad (118^b)$$

Prvá rovnice platí, je-li průřez x vlevo od břemene, jež působí v poloze ζ; určuje tedy obojetnou polohu ζ k průřezu x, obsaženému v levé krajní části $a\lambda$ pole ab. Z druhé rovnice vypočteme obojetnou polohu ζ k průřezu x v pravé krajní části πb pole ab.

Z rovnice (118^a) i (118^b) vypočteme po dvou úsečkách ζ, z nichž má statickou platnost jen úsečka, jež dává polohu ζ uvnitř pole ab; druhý kořen by vedl k bodu mimo pole ab, proto nemá statické platnosti.

31. Znaménka posouvajících sil. *α) **Břímě v obecné poloze.*** Působí-li břímě P v libovolné poloze z v poli $a_{r-1}a_r$, vyvodí v poli $a_{r-1}a_r$ prostý obrazec momentový $a'_{r-1}z'a'_r$ (obr. 107), daný výslednicovou čarou k břemeni $P = \overline{\mathfrak{p}\mathfrak{p}'}$, rýsovanou z pólu o_r ve vzdálenosti f od čáry složkové zvoleného; k tomu určíme podle obr. 94 přemístěnou základní stranu $a''_{r-1}a''_r$, jež seče čáru $a'_{r-1}z'a'_r$ v bodech i', j' na svislicích obratníků i, j. V předešlém odstavci jsme dovodili, že ke každé poloze z břemene P náleží dva obratníky i, j vlevo a vpravo od břemene; základní paprsek $o_r\mathfrak{c}_r \parallel a''_{r-1}a''_r$ je pak nezbytně obsažen v úhlu $\mathfrak{p}o_r\mathfrak{p}'$ a základní bod $\mathfrak{c}_r$ mezi body $\mathfrak{p}$ a $\mathfrak{p}'$. V poli $a_{r-1}a_r$ je vlevo od břemene P stálá síla posouvající $T'_{r-1} = \mathfrak{c}_r\mathfrak{p} = \overline{\alpha_{r-1}\alpha'_{r-1}}$, jež je kladná, a vpravo od břemene P stálá síla posouvající $T_r = \mathfrak{c}_r\mathfrak{p}' = \overline{\alpha_r\alpha''_r}$ znaménka záporného.



Obr. 112.

V ostatních polích jsou obrazci momentovými pouhé doplňovací lichoběžníky; obratníky jsou v levých polích nezatížených levé, v pravých polích nezatížených pravé body základní. Sílu posouvající v libovolném poli nezatíženém určíme, vedeme-li pólem, zvoleným ve vzdálenosti f od svislé čáry složkové, paprsky rovnoběžné se stranami, jež omezují momentové pořadnice v témž poli. Tak určíme paprsky $o_{r-2}\mathfrak{c}_{r-2} \parallel \overline{a''_{r-3}a''_{r-2}}$, $\overline{o_{r-2}\mathfrak{a}_{r-2}} \parallel a'_{r-3}a'_{r-2}$ v poli $a_{r-3}a_{r-2}$ stálou sílu posouvající $T'_{r-3} = T_{r-2} = \mathfrak{c}_{r-2}\mathfrak{a}_{r-2} = \alpha_{r-2}\alpha''_{r-2}$, jež směřuje vzhůru, je tedy kladná; v poli $a_{r-2}a_{r-1}$ dají paprsky $\overline{o_{r-1}\mathfrak{c}_{r-1}} \parallel \overline{a''_{r-2}a''_{r-1}}$, $\overline{o_{r-1}\mathfrak{a}_{r-1}} \parallel a'_{r-2}a'_{r-1}$ stálou zápornou sílu posouvající $T'_{r-2} = T_{r-1} = \mathfrak{c}_{r-1}\mathfrak{a}_{r-1} = \alpha_{r-1}\alpha''_{r-1}$. Obdobně určíme v poli a_ra_{r+1} stálou kladnou sílu posouvající $T'_r = T_{r+1} = \mathfrak{c}_{r+1}\mathfrak{a}_{r+1} = \alpha_r\alpha'_r$ a v poli $a_{r+1}a_{r+2}$ stálou zápornou sílu posouvající $T'_{r+1} = T_{r+2} = \mathfrak{c}_{r+2}\mathfrak{a}_{r+2} = \alpha_{r+1}\alpha'_{r+1}$. V každém poli nezatíženém je síla posouvající stálá; znaménka sil posouvajících se střídají a mění se v podporách. V poli zatíženém je vlevo od břemene kladná, vpravo od břemene záporná síla posouvající. Z toho plyne, že vlevo od břemene dostaneme posouvající sílu kladnou (zápornou), je-li mezi břemenem a průřezem sudý (lichý) počet podpor; vpravo od břemene vznikne pak v průřezu kladná (záporná) síla posouvající, je-li mezi břemenem a průřezem lichý (sudý) počet podpor.

*β) **Schemata znamének.*** Podle odvozených pravidel určíme již, jakými znaménky přičiňují polohy břemene na celém nosníku k posouvající síle libovolného průřezu. Jde-li o průřez x v poli $a_{r-1}a_r$ (obr. 112), přičiňuje v tomto poli pravý díl xa_r kladně, poněvadž je pro polohy břemene v tomto dílu průřez x vlevo od břemene; levý díl $a_{r-1}x$ přičiňuje pak záporně. Působí-li břímě P v některém poli pravém, je průřez x vlevo od břemene. Mezi břemenem v poli a_ra_{r+1} a průřezem x je jediná

podpora, vyvozují tedy všechny polohy břemene v poli $a_r a_{r+1}$ v průřezu x zápornou sílu posouvající; postoupí-li břímě do pole $a_{r+1} a_{r+2}$, přibude mezi břemenem a průřezem jedna podpora a vznikne v průřezu x kladná síla posouvající. Po levé straně průřezu x platí obrácená znaménka. Břímě, působící kdekoli v poli $a_{r-2} a_{r-1}$, vyvodí v průřezu x kladnou sílu posouvající, poněvadž je mezi břemenem a průřezem x vpravo od břemene jediná podpora; mezi břemenem v poli $a_{r-3} a_{r-2}$ a průřezem x jsou dvě podpory, čímž vzniká v průřezu x záporná síla posouvající. Celkem vidíme, že v tom poli, kde je průřez x, přičiňuje pravý díl pole kladně, levý záporně, ostatní celá pole přičiňují pak kladně nebo záporně; znaménka v obou dílech pole obsahujícího průřez a v celých polích ostatních se střídají.

Toto pravidlo pozbývá platnosti, jde-li o posouvající sílu při podpoře. Schema znamének pro posouvající sílu T'_{r-1} průřezu vpravo od podpory a_{r-1} (obr. 112) odvodíme ze schematu pro obecný průřez x, myslíme-li si, že se průřez x pohybuje vlevo k podpoře a_{r-1}, až s ní splyne; levý díl $a_{r-1} x$ pak odpadne, pravý díl $x a_r$ se rozšíří na celé pole $a_{r-1} a_r$, jinak se však znaménka nemění. K posouvající síle průřezu vpravo od podpory přičiňují tedy obě sousední pole kladně, ostatní pole střídavě záporně a kladně.

Obdobně určíme znaménka, jimiž jednotlivé díly nosníku přičiňují k posouvající síle T_r průřezu vlevo od podpory a_r (obr. 112), myslíme-li si, že se průřez x v poli $a_{r-1} a_r$ pohybuje vpravo, až splyne s podporou a_r; pravý díl $x a_r$ tu vymizí, levý díl $a_{r-1} x$ se rozšíří na celé pole, jež přičiňuje pak záporně, a v ostatních polích zůstanou znaménka určená v prvém případě. Z toho plyne, že k posouvající síle průřezu vlevo od podpory přičiňují obě sousední pole záporně, ostatní celá pole střídavě kladně a záporně.

Odvodíme též schema znamének pro reakci v podpoře a_r, pro niž platí vzorec

$$A_r = -T_r + T'_r .$$

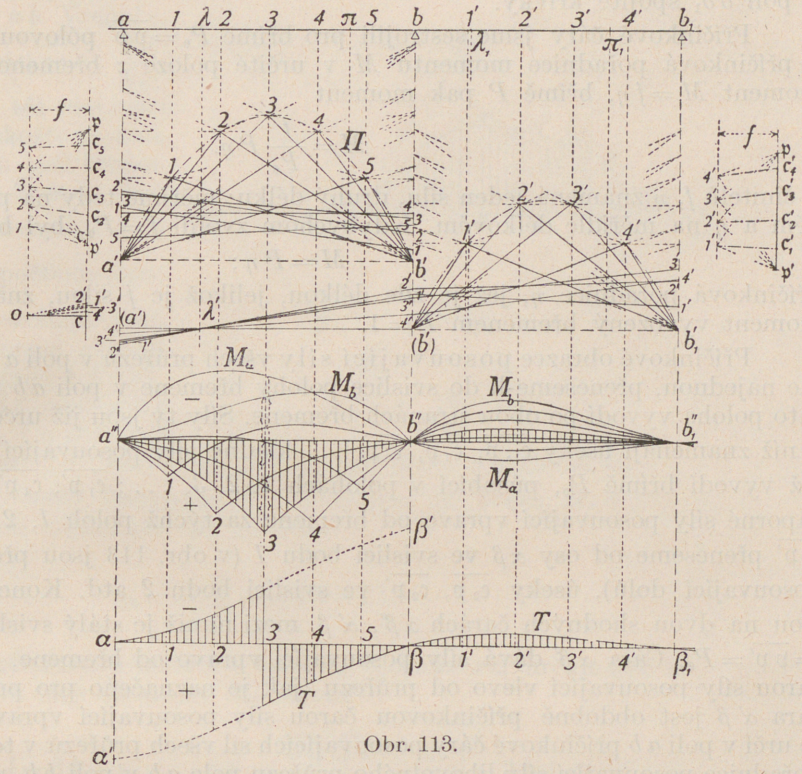
Z předešlých pravidel plyne, že jsou schemata znamének pro síly $-T_r$ a T'_r shodná a jsou zároveň schematem pro reakci A_r (obr. 112). K reakci v libovolné podpoře přičiňují obě sousední pole kladně, ostatní celá pole střídavě záporně a kladně.

32. Příčinkové čáry. *α) Přímé řešení grafické.* Příčinková pořadnice ohybového momentu nebo posouvající síly průřezu x, po případě reakce v určité podpoře vypočte se pro určitou polohu z břemene P jakožto hodnota příslušné veličiny, vyvozená břemenem P v poloze z působícím; přenese-li se příčinková pořadnice od libovolné osy ve svislici polohy z, naplní koncové body pořadnic příčinkovou čáru příslušné veličiny.

Graficky vyšetříme přímo příčinkové čáry, stanovíme-li účinek břemene P v různých polohách na nosníku působícího a přeneseme-li pak tyto účinky jakožto pořadnice příčinkové ve svislicích příslušných poloh břemene. Jde-li o příčinkové čáry ohybových momentů a posouvajících sil průřezů v poli $a\,b$, rozdělíme pole $a\,b$ na přiměřený počet stejných dílů (v obr. 113 na šest dílů) a určíme k břemeni $P_0 = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'}$, jež působí postupně ve všech dělicích bodech *1*, *2*, *3*, ..., obrazce momentů ohybových i síly posouvající v poli $a\,b$. Prosté trojúhelníky momentové rýsujeme při téže vodorovné základní straně $a'\,b'$; vrcholy jejich jsou pak na parabole II, jejímž vrcholem *3* je vrchol prostého trojúhelníka momentového pro břímě, jež působí ve středu *3* pole $a\,b$. Lze též přímo sestrojiti prosté trojúhelníky momentové pro polohy *1*, *2*, *3*, ... břemene P_0; těmto polohám odpovídají ve vzdálenosti f póly *1*, *2*, *3*, ..., jež jsou na vodorovnicích, rozdělujících úsek $\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'}$ na týž počet stejných dílů, na jaký je pole $a\,b$ děleno polohami břemene. K prostým trojúhelníkům momentovým $a'\,1\,b'$, $a'\,2\,b'$, $a'\,3\,b'$, ... určíme podle obr. 94 přemístěné základní strany *1 1*, *2 2*, *3 3*, ..., s nimiž vedeme póly *1*, *2*,

3, ... rovnoběžné základní paprsky *1* c_1, *2* c_2, *3* c_3, ... Tím jsou určeny úplné obrazce momentové a v čáře složkové též posouvající síly, vyvozené v poli *a b* různými polohami břemene v témž poli.

Příčinkovou čáru momentu libovolného průřezu, na př. *3*, dostaneme, přeneseme-li pořadnice ohybového momentu v bodě *3*, vyvozené různými polohami břemene, ve svislicích příslušných poloh; tak přenášíme pořadnici výslednicové čáry *a' 1b'* (*a' 2b'*, *a' 3b'*, ...), měřenou ve svislici bodu *3* od základní strany *1 1* (*2 2*, *3 3*, ...), od osy *a'' b''* ve svislici polohy *1* (*2*, *3*, ...). Takto určíme v poli *a b* příčinkové čáry momentů k dělicím bodům *1*, *2*, *3*, ... i momentů podporových M_a, M_b. Příčinková čára momentu průřezu mezipodporového skládá se v poli *a b* ze dvou křivek, jež se sekou na svislici průřezu. Pro průřezy *2*, *3*, *4* ve vnitřní části $\lambda\pi$ pole *a b* jsou veškeré příčinkové pořadnice v témž poli kladné. K průřezům *1*, *5* v krajních částech *a* λ, π *b* pole *a b* náleží v témž poli kladné i záporné pořadnice příčinkové; příčinková čára seče tu osu v obojetné poloze, jež by se sestrojila přímo podle obr. 110. Příčinkovou čarou podporového momentu M_a i M_b je v poli *a b* spojitá křivka.



Obr. 113.

Pořadnice, jež jsou v momentových obrazcích ve svislici určitého průřezu, přeneseny jsou v příčinkových obrazcích ve svislicích příslušných poloh břemene a naopak. Podle toho jsou na př. ve svislici bodu *5* v příčinkových obrazcích momentů přeneseny pořadnice momentového obrazce pro břímě v bodě *5* působící, jež jsou na svislicích průřezů *a*, *1*, *2*, ..., pro něž příčinkové čáry sestrojujeme. Vlevo od bodu *5* je momentovou čarou přímka *a' 5* a základní stranou přímka *5 5*; je-li pole *a b* děleno body *1*, *2*, *3*, ... na stejné díly, rovnají se rozdíly posloupných pořadnic, měřených ve svislicích dělicích bodů mezi dvěma přímkami. Přeneseme-li všechny příčinkové čáry od téže osy, jsou podle toho mezi příčinkovými čarami momentů k bodům *a*, *1*, *2*, *3*, *4*, *5* ve svislici bodu *5* rovné úseky. Obdobně jsou na př. ve svislici bodu *3* rovné úseky mezi příčinkovými čarami momentů k bodům levým *a*, *1*, *2* i k bodu *3* a jiné rovné úseky mezi příčinkovými čarami momentů k bodu *3* i k bodům pravým *4*, *5*, *b*.

V sousedním poli *b* b_1 sestrojíme příčinkové čáry pro průřezy v poli *a b*, zvolíme-li v poli *b* b_1 vhodný počet poloh *1'*, *2'*, *3'*, ... břemene $P_0 = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'}$ a sestrojíme pro ně v poli *b* b_1 úplné obrazce momentové; prostým trojúhelníkům momentovým o společné

základní straně $(b')\,b_1'$ odpovídají póly $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, jejichž vodorovnice rozdělují úsek $\overline{\mathfrak{p}'\mathfrak{p}}$ v témž poměru, v jakém body $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ dělí pole $b\,b_1$. V nezatíženém poli $a\,b$ jsou momentovými obrazci pouhé doplňovací lichoběžníky, jejichž strany se sekou v bodě λ' na svislici levého základního bodu λ. Momentové pořadnice jednotlivých průřezů v poli $a\,b$ přeneseme pak zase od osy $b''\,b_1''$ na svislice příslušných poloh břemene v poli $b\,b_1$ a koncové body pořadnic spojíme příčinkovými čarami, jimiž jsou v poli $b\,b_1$ spojité křivky.

Příčinkové čáry jsme sestrojili pro břímě $P_0 = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'}$ pólovou vzdáleností f. Je-li η příčinková pořadnice momentu M v určité poloze z břemene, vyvodí břímě P_0 moment $M = f\,\eta$, břímě P pak moment

$$M = \frac{f}{P_0}\,P\,\eta. \qquad (119^a)$$

Z činitelů f, η znamená jeden sílu, druhý délku; měříme tedy na př. f na měřidle silovém a η na měřidle délkovém. Kdybychom zvolili $f = P_0$, byl by

$$M = P\,\eta;$$

příčinková pořadnice η, jež je zde délkou, jelikož je f silou, znamenala by pak též moment vyvozený břemenem $P = 1$.

Příčinkové obrazce posouvající síly všech průřezů v poli $a\,b$ (obr. 113) sestrojíme najednou, přeneseme-li do svislice polohy břemene v poli $a\,b$ posouvající síly, jež tato poloha vyvodí po obou stranách břemene. Síly ty jsou již určeny v čáře složkové, v níž znamenají úseky $\overline{c_1\,\mathfrak{p}}$, $\overline{c_2\,\mathfrak{p}}$, $\overline{c_3\,\mathfrak{p}}$, ... kladné síly posouvající vlevo od břemene, jež vyvodí břímě P_0, působící v polohách 1, 2, 3, ...; $\overline{c_1\,\mathfrak{p}'}$, $\overline{c_2\,\mathfrak{p}'}$, $\overline{c_3\,\mathfrak{p}'}$, ... jsou pak záporné síly posouvající vpravo od břemene za týchž poloh 1, 2, 3, ... Úseky $\overline{c_1\,\mathfrak{p}}$, $\overline{c_1\,\mathfrak{p}'}$ přeneseme od osy $\alpha\,\beta$ ve svislici bodu 1 (v obr. 113 jsou přenášeny kladné síly posouvající dolů), úseky $\overline{c_2\,\mathfrak{p}}$, $\overline{c_2\,\mathfrak{p}'}$ ve svislici bodu 2 atd. Koncové body pořadnic jsou na dvou shodných čarách $\alpha\,\beta'$, $\alpha'\,\beta$, mezi nimiž je stálý svislý úsek $\overline{\alpha\,\alpha'} = \overline{\beta'\,\beta} = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'} = P_0$. Čára $\alpha\,\beta'$ dává síly posouvající vpravo od břemene, je tedy příčinkovou čarou síly posouvající vlevo od průřezu (jak je naznačeno pro průřez 3 v obr. 113); čára $\alpha'\,\beta$ jest obdobně příčinkovou čarou síly posouvající vpravo od průřezu. Tak se určí v poli $a\,b$ příčinkové čáry posouvajících sil všech průřezů v témž poli. Příčinkové pořadnice posouvající síly libovolného průřezu pole $a\,b$ v poli $b\,b_1$ určíme, stanovíme-li síly posouvající v poli $a\,b$, vyvozené polohami $1'$, $2'$, $3'$, ... břemene P_0. Úseky příslušných sil posouvajících jsou omezeny ve svislé čáře složkové pólovými paprsky rovnoběžnými s přímkami, jež omezují momentové obrazce v poli $a\,b$. Pólem o, zvoleným ve vzdálenosti f od čáry složkové, vedeme tedy paprsek $o\,c \parallel (a')\,(b')$ a paprsky $o\,1'$, $o\,2'$, $o\,3'$, ... rovnoběžné se stranami $1'\,1'$, $2'\,2'$, $3'\,3'$, ... v poli $a\,b$. Pak jest $\overline{1'\,c}$, $\overline{2'\,c}$, $\overline{3'\,c}$, ... posouvající síla v celém poli $a\,b$, vyvozená polohou $1'$, $2'$, $3'$, ... břemene P_0, do kteréž polohy přeneseme příslušnou sílu posouvající od osy $\beta\,\beta_1$. Je-li η příčinková pořadnice v poloze břemene, vyvodí břímě P_0 posouvající sílu $T = \eta$, tedy břímě P v téže poloze působící sílu

$$T = \frac{P}{P_0}\,\eta. \qquad (119^b)$$

Pořadnice η znamená sílu a odměřuje se na témž měřidle jako síla P_0. Volíme-li $P_0 = 1$, vyjde $T = P\,\eta$; pořadnice η, jež tu jsou pouhými čísly nepojmenovanými, odměřují se na měřidle, jehož jednotkou je $P_0 = 1$.

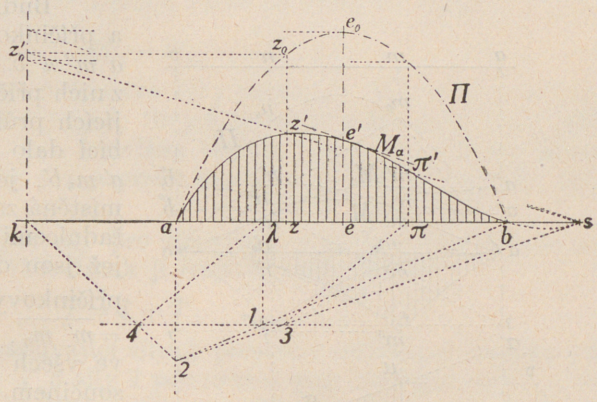
β) Grafické řešení založené na vzorcích. Příčinkovou čáru podporového momentu M_a určíme graficky též ze vzorce (88^a); znamenáme-li nyní polohu břemene z, jest

$$M_a = -\frac{P\,a}{c\,l^2}\,z\,z'\,(l - 3\,b + z').$$

Položme

$$\frac{P_0 z z'}{l} = f\eta;$$

tu značí η výšku prostého trojúhelníka momentového, rýsovaného pólovou vzdáleností f k břemeni P_0, jež působí v poloze z. Přenášíme-li od osy $a\,b$ (obr. 114) pořadnici $\overline{z z_0} = \eta$, je bod z_0 na parabole Π, jejíž osou je svislice středu e pole $a\,b$. Vrchol e_0 paraboly Π má pořadnici $\overline{e e_0} = \frac{P l}{4 f}$, již lze vypočísti nebo též sestrojiti pólovou vzdáleností f jakožto prostou pořadnici momentovou pod břemenem P_0, jež působí v bodě e. Přeneseme dále $\overline{b s} = l - 3b = \overline{a b} - 3\overline{\pi b}$ a $\overline{k s} = k = \frac{c l}{a}$, což vypočteme nebo sestrojíme, vedouce libovolnou vodorovnici $3\,4$, již protneme svislicí bodu λ v bodě 1, spojnicí $b\,1$ určíme na svislici bodu a bod 2, spojnicí $2\,s$ na vodorovnici $1\,4$ bod 3 a přímkou $\lambda\,4 \parallel \pi\,3$ bod 4; spojnice $2\,4$ určuje pak bod k, jak plyne z podobnosti.



Obr. 114.

Moment M_a, vyvozený břemenem P_0, sestrojme ve tvaru $M_a = f\,\eta_a$, je-li η_a příčinková pořadnice; ze vzorce pro M_a vychází

$$\eta_a = -\frac{\eta}{k}(l - 3b + z').$$

Vodorovnice bodu z_0 seče svislici bodu k v bodě z'_0, spojnice $s\,z'_0$ určuje pak na svislici bodu z bod z' příčinkové čáry momentu M_a; neboť

$$\overline{z s} = \overline{z b} + \overline{b s} = l - 3b + z', \qquad \overline{z z'} = \frac{\overline{k z'_0} \cdot \overline{z s}}{\overline{k s}} = \frac{\eta}{k}(l - 3b + z') = -\eta_a.$$

Bodem z' jde příčinková čára momentu M_a, jejíž veškeré pořadnice v poli $a\,b$ mají znaménko záporné. Jako bod z' sestrojíme též další body e', π' příčinkové čáry momentu M_a, jež je parabolickou čarou třetího řádu, procházející body a, b a v prodloužení bodem s. Ze vzorce pro moment M_a plyne

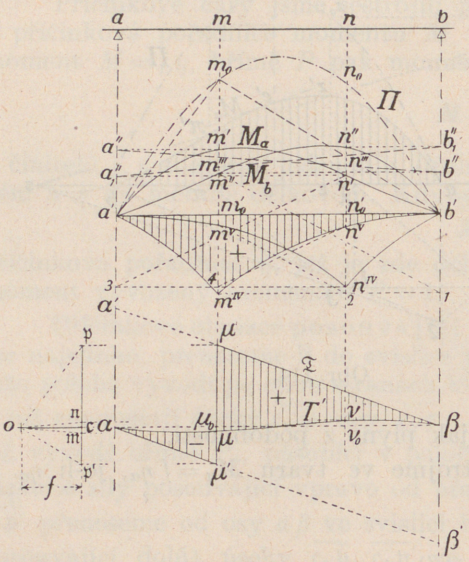
$$\frac{\mathrm{d}M_a}{\mathrm{d}z} = -\frac{P a}{c l^2}[(l - 3b + z')(z' - z) - z z'],$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 M_a}{\mathrm{d}z^2} = \frac{P a}{c l^2}[(l - 3b + z') \cdot 2 + 2(z' - z)] = \frac{6 P a}{c l^2}(z' - b).$$

Z výminky bodu obratového $\frac{\mathrm{d}^2 M_a}{\mathrm{d}z^2} = 0$ plyne zde $z' = b$; má tedy příčinková čára momentu M_a na svislici bodu π bod obratový, jenž je zároveň středem křivky.[1]) Staticky platí ovšem čára ta pouze mezi body a, b. Příčinkovou čáru jsme sestrojili pólovou vzdáleností f pro břímě P_0; pro libovolné břímě P platí pak vzorec (119[a]).

[1]) Sestrojení tečny a bodu největšího příčinku viz ve spisovatelově „Theorii čar příčinkových“, č. III (Praha 1912), str. 153 a d.

Obdobně sestrojíme v poli ab příčinkovou čáru momentu M_b; třeba tu jen vyměniti ve vzorcích veličiny a body, jež se týkají levé a pravé strany pole ab. Známe-li v poli ab příčinkové čáry momentů M_a, M_b, určíme snadno v témž poli příčinkové čáry momentů ohybových a sil posouvajících pro průřezy v poli ab; stanovíme jen použitím příčinkových čar momentů podporových pro různé polohy břemene úplné obrazce momentové v poli ab a příslušné obrazce složkové.



Obr. 115.

Budiž sestrojena v poli ab parabola II a příčinkové čáry $a'm'n'b'$ momentu M_a a $a'm''n''b'$ momentu M_b (obr. 115); sestrojíme z nich příčinkové čáry momentů a sil posouvajících průřezů m, n. Břímě P_0 v bodě m působící dalo by prostý trojúhelník momentový $a'm_0b'$, jehož vrchol je na parabole II; přemístěná základní strana $a''b''$ jest určena pořadnicemi momentů podporových M_a, M_b, jež jsou dány ve svislici polohy m břemene příčinkovými čarami, tedy $\overline{a''a'} = \overline{m'm_0'}$, $\overline{b''b'} = \overline{m''m_0'}$. Břímě P_0 v bodě m působící vyvodí ve všech průřezech pole ab momenty dané součinem pólové vzdálenosti f a pořadnic omezených lomenou čarou $a'm_0b'$ a základní stranou $a''b''$, na níž je bod m'''. Momentová pořadnice $\overline{m'''m_0}$ v bodě m znamená příčinkovou pořadnici momentu M_m v bodě m; přeneseme ji od osy $a'b'$ jakožto pořadnici $\overline{m^{IV}m_0'} = \overline{m'''m_0}$ a určíme tak vrchol m^{IV} příčinkové čáry momentu M_m. Podobně určíme vrchol n^{IV} příčinkové čáry M_n, přeneseme-li vodorovnicemi pořadnice $\overline{a_1''a'} = \overline{n'n_0'}$, $\overline{b_1''b'} = \overline{n''n_0'}$ a stanovíme-li spojnicí $a_1''b_1''$ přemístěnou stranu základní pro břímě P_0, jež působí v bodě n, a pro něž by byl bod n_0 vrcholem prostého trojúhelníka momentového; od strany $a_1''b_1''$ měříme největší příčinkovou pořadnici $\overline{n'''n_0} = \overline{n^{IV}n_0'}$.

Jsou-li určeny vrcholy m^{IV}, n^{IV}, ... příčinkových čar momentů v náležitém počtu bodů v poli ab, sestrojíme snadno další body příčinkových čar. Břímě P v libovolné poloze vpravo od bodu n působící vyvodí v bodě a moment M_a a v témž bodě v poli ab posouvající sílu T_a'. Pak je v bodě m moment ohybový

$$M_m = M_a + T_a' \cdot \overline{am}$$

a v bodě n moment

$$M_n = M_a + T_a' \cdot \overline{an};$$

z toho plyne

$$M_n - M_m = T_a' \cdot \overline{mn}, \qquad M_m - M_a = T_a' \cdot \overline{am},$$

tedy

$$(M_m - M_a) : (M_n - M_m) = \overline{am} : \overline{mn}. \tag{120^a}$$

Poslední vzorec platí pro každou polohu břemene vpravo od bodu n i pro polohu n. Je-li pak n^V bod příčinkové čáry momentu M_m, platí podle obr. 115 pro břímě P_0 v bodě n působící

$$M_a = f \cdot \overline{n_0'n'}, \qquad M_m = f \cdot \overline{n_0'n^V}, \qquad M_n = f \cdot \overline{n_0'n^{IV}};$$

z toho plyne

$$M_n - M_m = f \cdot \overline{n^V n^{IV}}, \qquad M_m - M_a = f \cdot \overline{n'n^V},$$

tedy podle vzorce (120^a)

$$\overline{n^V n^{IV}} : \overline{n' n^V} = \overline{m n} : \overline{a m}.$$

Veďme bodem n^{IV} vodorovnici $n^{IV}\,3$ a jejím průsečíkem 4 se svislicí bodu m přímku $4\,n^V \parallel 3\,n'$; tím vyhovíme poslední úměře a sestrojíme bod n^V příčinkové čáry momentu M_m.

Obdobně platí, působí-li břímě P kdekoli vlevo od bodu m, vztah

$$(M_m - M_n) : (M_n - M_b) = \overline{m n} : \overline{n b}, \qquad (120^b)$$

z něhož plyne sestrojení bodu m^V příčinkové čáry momentu M_n : bodem m^{IV} vedeme vodorovnici a sestrojíme pak $2\,m^V \parallel 1\,m''$. Stejně bychom určili další body příčinkových čar momentů k bodům m, n a k dalším bodům v poli $a\,b$. Účinek břemene P vypočteme z příčinkové pořadnice η v paprsku břemene pro každý moment ohybový ze vzorce (119^a).

Příčinkovou čáru posouvající síly pro libovolný průřez určili bychom nyní ze složkových obrazců jako v obr. 113. Jinak ji řešíme podle vzorce

$$T = \mathfrak{T} + T',$$

sčítajíce příčinkové pořadnice posouvající síly $\mathfrak{T}$ prostého nosníku a doplňku síly posouvající T'. Příčinková čára $\alpha\,\mu'\,\mu''\,\beta$ síly $\mathfrak{T}$ pro průřez m je dána přímkami $\alpha'\,\beta \parallel \alpha\,\beta'$, jež mají svislou vzdálenost $\overline{\alpha'\alpha} = \overline{\beta\,\beta'} = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'} = P_0$. Vedeme-li body $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ paprsky $o\,\mathfrak{p} \parallel a'\,m_0$, $o\,\mathfrak{p}' \parallel m_0\,b'$ a pólem o paprsek $o\,\mathfrak{c} \parallel a'\,b'$, vyjde $\overline{\mathfrak{c}\,\mathfrak{p}} = \overline{\mu_0\,\mu''}$, $\overline{\mathfrak{c}\,\mathfrak{p}'} = \overline{\mu_0\,\mu'}$. Paprsek $o\,\mathfrak{m} \parallel a''\,b''$ určí doplněk síly posouvající $T' = \overline{\mathfrak{m}\,\mathfrak{c}} = \overline{\mu\,\mu_0}$ pro břímě P_0 v bodě m působící. Směřují-li kladné pořadnice $\mathfrak{T}$ vzhůru, sčítá se doplněk T' se silou $\mathfrak{T}$ algebraicky; příčinkovou pořadnici síly T měříme pak od bodu μ k příčinkové čáře $\mathfrak{T}$. Podobně veďme paprsek $o\,\mathfrak{n} \parallel a_1''\,b_1''$, jenž určí doplněk $T' = \overline{\mathfrak{n}\,\mathfrak{c}} = \overline{\nu\,\nu_0}$ pro břímě P_0 v poloze n. Body α, μ, ν, β spojuje pak příčinková čára doplňku T', od níž k čáře $\alpha\,\mu'\,\mu''\,\beta$ měříme příčinkové pořadnice celkové síly posouvající T. Doplněk T' je za téhož zatížení pro všechny průřezy v poli $a\,b$ týž; jeho příčinková čára je tedy společná všem průřezům v poli $a\,b$.

γ) ***Řešení mimo pole, v němž je průřez.*** Je-li zatíženo libovolné pole, na př. $a_{r-1}\,a_r$, jsou momentovými obrazci v ostatních polích nezatížených (viz obr. 89) pouhé doplňovací lichoběžníky, jejichž strany se sekou na svislicích příslušných bodů základních. V podpoře a_k vlevo od zatíženého pole je podle vzorce (82) moment

$$M_k = \gamma_k\,M_{r-1},$$

v podpoře a_{k-1} pak moment

$$M_{k-1} = \gamma_{k-1}\,M_{r-1},$$

znamená-li

$$\gamma_k = \lambda_{r-2}\,\lambda_{r-3} \ldots \lambda_k, \qquad \gamma_{k-1} = \lambda_{r-2}\,\lambda_{r-3} \ldots \lambda_{k-1}.$$

V průřezu x nezatíženého pole $\overline{a_{k-1}\,a_k} = l_k$ je moment ohybový

$$M = M' = \frac{M_{k-1}\,x' + M_k\,x}{l_k} = M_{r-1} \cdot \frac{\gamma_{k-1}\,x' + \gamma_k\,x}{l_k}. \qquad (121^a)$$

Mění-li se zatížení v poli $a_{r-1}\,a_r$ a s ním moment M_{r-1}, mění se podle vzorce (121^a) momenty ve všech průřezech vlevo od podpory a_{r-1} přímo úměrně k momentu M_{r-1} v levé podpoře zatíženého pole. Totéž dovoditi lze o silách posouvajících. Za uvedeného zatížení je v průřezu x pole $a_{k-1}\,a_k$ síla posouvající

$$T = T' = \frac{M_k - M_{k-1}}{l_k} = M_{r-1} \cdot \frac{\gamma_k - \gamma_{k-1}}{l_k}; \qquad (121^b)$$

vypočteme tedy při zatížení v poli $a_{r-1}a_r$ posouvající sílu kdekoli vlevo od podpory a_{r-1}, násobíme-li moment M_{r-1} stálým činitelem.

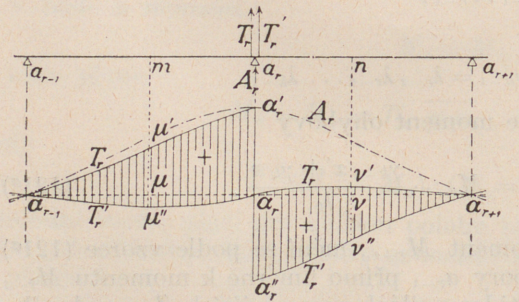
Z předešlého plyne, že krajní hodnota momentu nebo posouvající síly kteréhokoli průřezu vlevo od podpory a_{r-1}, pokud je vyvozena zatížením pole $a_{r-1}a_r$, určí se z min M_{r-1} podle vzorců (121^a), (121^b) nebo podle obr. 89 a příslušných obrazců složkových pro jednotlivá pole; min M_{r-1} určíme pak z příčinkové čáry momentu M_{r-1} v poli $a_{r-1}a_r$. Obdobně ono zatížení pole $a_{r-1}a_r$, jež vyvodí min M_r, dá též onu část max M, T nebo min M, T ve všech průřezech vpravo od podpory a_r, jež plyne ze zatížení pole $a_{r-1}a_r$; příslušné momenty a síly posouvající se určí z momentu M_r známým způsobem. Stačí tedy úplně, stanovíme-li příčinkové čáry momentů a posouvajících sil průřezů mezipodporových pouze v poli, v němž je průřez. Příčinkovou čáru momentu podporového určíme ovšem v obou polích, jež obsahují příslušnou podporu.

Kdybychom přes to chtěli stanoviti příčinkové čáry i v polích, v nichž není průřez, o jehož moment nebo posouvající sílu jde, postupovali bychom, řešíce přímo, jak naznačeno v obr. 113 pro pole $b\,b_1$. Určujeme-li příčinkové čáry ostatních veličin z příčinkových čar momentů podporových, jež sestrojíme podle obr. 114, stanovíme na př. v poli $a_{r-1}a_r$ příčinkovou čáru momentu průřezu x, obsaženého v poli $a_{k-1}a_k$, redukujeme-li příčinkové pořadnice momentu M_{r-1} v bližší podpoře pole $a_{r-1}a_r$ podle vzorce (121^a) nebo podle obr. 89, přenášejíce každou příčinkovou pořadnici momentu M_{r-1} do svislice podpory a_{r-1} a odvozujíce z ní momentové obrazce v levých polích, jak je naznačeno v obr. 89. Příčinková čára momentu M_{r-1} v poli $a_{r-1}a_r$ má obratový bod na svislici základního bodu π_r; v téže svislici budou obratové body příčinkových čar v poli $a_{r-1}a_r$ pro momenty i posouvající síly všech průřezů vlevo od podpory a_{r-1}. Podle toho má příčinková čára momentu i posouvající síly průřezu x v každém poli vpravo od x, jež neobsahuje průřezu, obratový bod na svislici pravého bodu základního; obdobně jsou v levých polích obratové body oněch příčinkových čar na svislicích levých bodů základních.

δ) ***Příčinková čára reakce podporové.*** Jako pro moment podporový tak i pro reakci A_r v libovolné vnitřní podpoře a_r musíme určiti příčinkovou čáru v obou polích sousedních. Reakce A_r se vypočte z posouvající síly T_r vlevo od podpory a_r a z posouvající síly T'_r vpravo od podpory a_r podle vzorce

$$A_r = -T_r + T'_r.$$

Příčinkové čáry sil T_r, T'_r jest určiti v obou polích $a_{r-1}a_r$, $a_r a_{r+1}$, jež obsahují podporu a_r, na př. podle obr. 113. Příčinkovou čarou síly T_r (obr. 116) je čára $\alpha_{r-1}\mu'\alpha'_r\alpha_r\nu'\alpha_{r+1}$, jež má v obou polích pořadnice záporné; příčinkovou čarou síly T'_r je pak čára $\alpha_{r-1}\mu''\alpha_r\alpha''_r\nu''\alpha_{r+1}$, jež má v obou polích pořadnice kladné. Podle vzorce je třeba změnit znaménko síly T_r, čímž obdržíme v obou polích kladné pořadnice síly $-T_r$ i T'_r; sčítáme je, přenášejíce prosté pořadnice obou sil posouvajících po obou stranách osy, čímž dostáváme v bodě m příčinkovou pořadnici $A_r = \overline{\mu'\mu} + \overline{\mu\mu''} = \overline{\mu'\mu''}$ a v bodě n pořadnici $A_r = \overline{\nu'\nu} + \overline{\nu\nu''} = \overline{\nu'\nu''}$. Přenášíme-li výslední pořadnice od přímé osy $\alpha_{r-1}\alpha_r\alpha_{r+1}$, obdržíme čáru, jež je v obr. 116 čerchována. Lze ovšem přímo určiti podle obr. 113 v obou polích, jež obsahují podporu a_r, síly posouvající T_r a T'_r v obrazcích složkových a součty $-T_r + T'_r$ přenášeti od přímé osy.



Obr. 116.

Příčinkové čáry reakce A_r mimo pole $a_{r-1}\,a_r$, $a_r\,a_{r+1}$ není třeba; neboť je-li zatíženo kterékoli pole vlevo od podpory a_{r-1}, plynou síly T_r, T'_r a tedy i reakce A_r z momentu v pravé podpoře toho pole. Pak ono zatížení kteréhokoli pole vlevo (vpravo) od podpory a_{r-1} (a_{r+1}), jež vyvodí vpravé (levé) podpoře téhož pole $\min M$, vyvozuje též onu část $\max A_r$ nebo $\min A_r$, jež plyne ze zatížení onoho pole. Vlevo od podpory a_{r-1} by se sestrojila příčinková čára reakce A_r v každém poli z příčinkové čáry momentu v pravé podpoře příslušného pole redukcí v určitém poměru, jejž lze snadno určiti; je třeba jen pro libovolný moment v příslušné podpoře sestrojiti momentové obrazce v pravých polích nezatížených a z nich vyšetřiti síly T_r, T'_r a tím reakci A_r. Z toho plyne, že příčinková čára reakce A_r má v každém poli vlevo (vpravo) od podpory a_{r-1} (a_{r+1}) obratový bod na svislici levého (pravého) bodu základního.

Končí-li nosník v krajní levé podpoře a_0, je reakce

$$A_0 = T'_0;$$

v krajní pravé podpoře a_n, v níž nosník končí, vyjde

$$A_n = -T_n.$$

Příčinkové čáry reakcí A_0, A_n se pak shodují s příčinkovými čarami posouvajících sil T'_0, $-T_n$.

Pro přímé zatížení, jež jsme dosud předpokládali, jsou příčinkovými čarami momentů ohybových, sil posouvajících i reakcí podporových spojité křivky. Jde-li o zatížení nepřímé, určíme příčinkové pořadnice ve styčných bodech jako pro zatížení přímé a koncové body jejich spojujeme v každém oddílu přímkou, jak plyne z věty odvozené v odst. 13, jež má obecnou platnost.

ε) ***Výpočet příčinkových pořadnic M, T, A.*** Příčinkové pořadnice ohybových momentů, posouvajících sil a podporových reakcí vypočteme snadno, stanovíme-li nejprve příčinkové pořadnice podporových momentů. Pro ně platí rovnice (88^a), (88^b); znamenáme-li z polohu jediného pohyblivého břemene P, jsou to rovnice

$$M_a = -\frac{Pa}{cl^2} z z' (l - 3b + z'), \qquad M_b = -\frac{Pb}{cl^2} z z' (l - 3a + z).$$

Pro břímě $P = 1$ lze tyto rovnice upraviti na tvar

$$\frac{M_a}{l} = -\frac{a}{c}\cdot\frac{z}{l}\cdot\frac{z'}{l}\left(\frac{l-3b}{l} + \frac{z'}{l}\right), \quad \frac{M_b}{l} = -\frac{b}{c}\cdot\frac{z}{l}\cdot\frac{z'}{l}\left(\frac{l-3a}{l} + \frac{z}{l}\right).$$

Poznamenejme kratčeji

$$\frac{z}{l}\cdot\frac{z'}{l} = \omega_1, \qquad \frac{z}{l}\left(\frac{z'}{l}\right)^2 = \omega_2, \qquad \left(\frac{z}{l}\right)^2\frac{z'}{l} = \omega_3; \tag{122}$$

potom jest

$$\frac{M_a}{l} = -\frac{a}{c}\left(\frac{l-3b}{l}\omega_1 + \omega_2\right), \qquad \frac{M_b}{l} = -\frac{b}{c}\left(\frac{l-3a}{l}\omega_1 + \omega_3\right). \tag{123}$$

Pro ohybový moment M v obecném průřezu x platí vzorce (58), jež lze psáti

$$\frac{M}{l} = \frac{\mathfrak{M}}{l} + \frac{M_a}{l}\cdot\frac{x'}{l} + \frac{M_b}{l}\cdot\frac{x}{l}; \tag{124^a}$$

posouvající sílu T lze podle (59) počítati ze vzorce

$$T = \mathfrak{T} + \frac{M_b}{l} - \frac{M_a}{l}. \tag{124^b}$$

Pro polohy břemene z vlevo od průřezu x je podle vzorců (89^b) a (91^b)

$$\frac{\mathfrak{M}}{l} = \frac{z}{l} \cdot \frac{x'}{l}, \qquad \mathfrak{T} = -\frac{z}{l};$$

pro polohy z vpravo od x vyjde podle (89^a), (91^a)

$$\frac{\mathfrak{M}}{l} = \frac{z'}{l} \cdot \frac{x}{l}, \qquad \mathfrak{T} = \frac{z'}{l}.$$

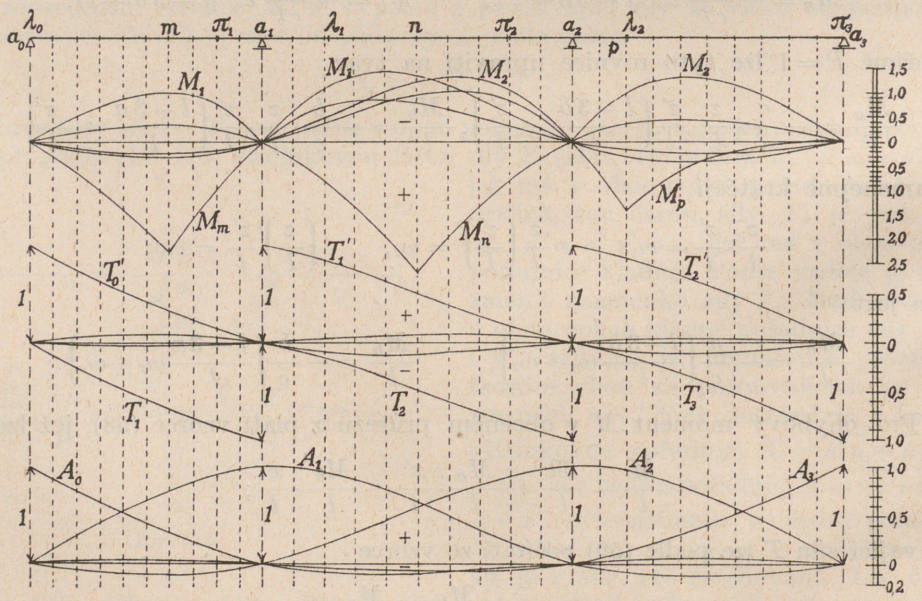
Pro usnadnění výpočtu sestavíme v tabulce hodnoty ω a $\mathfrak{M}/l$ pro dělení pole na libovolný počet stejných dílů; pro deset dílů jsou sestaveny hodnoty ω v tabulce III a $\mathfrak{M}/l$ v tabulce IV.

Tab. III.
Součinitelé ω.

z/l	z'/l	ω_1	ω_2	ω_3	$\omega_1+\omega_2$	$\omega_1+\omega_3$	$\omega_2-\omega_3$
0,1	0,9	0,09	0,081	0,009	0,171	0,099	0,072
0,2	0,8	0,16	0,128	0,032	0,288	0,192	0,096
0,3	0,7	0,21	0,147	0,063	0,357	0,273	0,084
0,4	0,6	0,24	0,144	0,096	0,384	0,336	0,048
0,5	0,5	0,25	0,125	0,125	0,375	0,375	0
0,6	0,4	0,24	0,096	0,144	0,336	0,384	−0,048
0,7	0,3	0,21	0,063	0,147	0,273	0,357	−0,084
0,8	0,2	0,16	0,032	0,128	0,192	0,288	−0,096
0,9	0,1	0,09	0,009	0,081	0,099	0,171	−0,072

Tab. IV. Příčinkové pořadnice momentů prostého nosníku.

$\frac{z}{l}$	$\mathfrak{M}/l$				
	$\frac{x}{l}=0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5
0,1	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05
0,2	0,08	0,16	0,14	0,12	0,10
0,3	0,07	0,14	0,21	0,18	0,15
0,4	0,06	0,12	0,18	0,24	0,20
0,5	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
0,6	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20
0,7	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15
0,8	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
0,9	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05



Obr. 117.

Příklad 24. Vypočteme příčinkové pořadnice ohybových momentů, posouvajících sil a podporových reakcí spojitého nosníku stálého průřezu se třemi poli dlouhými $l_1 = 12$, $l_2 = 16$, $l_3 = 14$ m. Mimo podporové momenty určíme ohybové momenty v průřezech m, n, p ($\overline{a_0 m} = m$, $\overline{m a_1} = m'$; $\overline{a_1 n} = n$, $\overline{n a_2} = n'$; $\overline{a_2 p} = p$, $\overline{p a_3} = p'$) daných poměry $m/l_1 = 0{,}6$, $n/l_2 = 0{,}5$, $p/l_3 = 0{,}2$ (obr. 117).

Neprve určíme základní body; k tomu potřebujeme poměry

$$\delta_1 = \frac{l_1}{l_2} = \frac{3}{4}, \qquad \delta_2 = \frac{l_2}{l_3} = \frac{8}{7}, \qquad \delta'_2 = \frac{l_2}{l_1} = \frac{4}{3}, \qquad \delta'_3 = \frac{l_3}{l_2} = \frac{7}{8}.$$

Poměry základních bodů levých podle vzorce (81^a) jsou

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{2(1+\delta_1)} = -\frac{2}{7}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2(1+\delta_2)+\delta_2\lambda_1} = -\frac{49}{194}.$$

Poměry základních bodů pravých plynou ze vzorce (81^b):

$$\pi_3 = 0, \qquad \pi_2 = -\frac{1}{2(1+\delta'_3)} = -\frac{4}{15}, \qquad \pi_1 = -\frac{1}{2(1+\delta'_2)+\delta'_2\pi_2} = -\frac{45}{194}.$$

Základní body λ, π dělí pole ab na díly $\overline{a\lambda} = a$, $\overline{\pi b} = b$, $\overline{\lambda\pi} = c$, pro něž platí

$$\lambda = -\frac{a}{l-a}, \qquad \pi = -\frac{b}{l-b};$$

z toho plyne

$$a = -\frac{\lambda}{1-\lambda}l, \qquad b = -\frac{\pi}{1-\pi}l, \qquad c = l-a-b. \tag{125}$$

Podle toho jest

$$a_1 = 0, \qquad b_1 = -\frac{\pi_1}{1-\pi_1}l_1 = \frac{45}{239}l_1 = 2{,}259, \qquad c_1 = l_1 - a_1 - b_1 = 9{,}741\text{ m};$$

$$a_2 = -\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}l_2 = \frac{2}{9}l_2 = 3{,}556, \qquad b_2 = -\frac{\pi_2}{1-\pi_2}l_2 = \frac{4}{19}l_2 = 3{,}368, \qquad c_2 = l_2 - a_2 - b_2 = 9{,}076\text{ m};$$

$$a_3 = -\frac{\lambda_2}{1-\lambda_2}l_3 = \frac{49}{243}l_3 = 2{,}823, \qquad b_3 = 0, \qquad c_3 = l_3 - a_3 - b_3 = 11{,}177\text{ m}.$$

Začneme s podporovými momenty. Podle vzorců (123) a (79^a), (79^b) jest:
pro polohy břemene $P = 1$ v prvém poli

$$\frac{M_1}{l_1} = -\frac{b_1}{c_1}\left(\frac{l_1 - 3a_1}{l_1}\omega_1 + \omega_3\right) = -\frac{2{,}259}{9{,}741}(\omega_1+\omega_3) = -0{,}2319(\omega_1+\omega_3), \qquad \frac{M_2}{l_1} = \frac{M_1}{l_1}\pi_2;$$

pro polohy břemene $P = 1$ v druhém poli

$$\frac{M_1}{l_2} = -\frac{a_2}{c_2}\left(\frac{l_2 - 3b_2}{l_2}\omega_1 + \omega_2\right) = -\frac{3{,}556}{9{,}076}\left(\frac{16-10{,}104}{16}\omega_1 + \omega_2\right) = -0{,}1444\,\omega_1 - 0{,}3918\,\omega_2,$$

$$\frac{M_2}{l_2} = -\frac{b_2}{c_2}\left(\frac{l_2 - 3a_2}{l_2}\omega_1 + \omega_3\right) = -\frac{3{,}368}{9{,}076}\left(\frac{16-10{,}668}{16}\omega_1 + \omega_3\right) = -0{,}1237\,\omega_1 - 0{,}3711\,\omega_3;$$

pro polohy břemene $P = 1$ v třetím poli

$$\frac{M_2}{l_3} = -\frac{a_3}{c_3}\left(\frac{l_3 - 3b_3}{l_3}\omega_1 + \omega_2\right) = -\frac{2{,}823}{11{,}177}(\omega_1+\omega_2) = -0{,}2526(\omega_1+\omega_2), \qquad \frac{M_1}{l_3} = \frac{M_2}{l_3}\lambda_1.$$

Hodnoty ω_1, ω_2, ω_3, $(\omega_1+\omega_2)$ a $(\omega_1+\omega_3)$ jsou v tabulce III pro dělení každého pole na deset stejných dílů, jehož zde užijeme. Celý výpočet provedeme v tabulkách.

Pro momenty průřezů mezipodporových platí vzorec (124^a). Pro polohy břemene $P = 1$ v prvém poli vyjde

$$\frac{M_m}{l_1} = \frac{\mathfrak{M}_m}{l_1} + \frac{M_1}{l_1}\cdot\frac{m}{l_1}.$$

Při břemeni v prvém poli je pro průřezy n, p v druhém a třetím poli $\mathfrak{M} = 0$, jelikož v poli, kde je průřez, není zatížení, a tedy

$$\frac{M_n}{l_1} = \frac{M_1}{l_1}\cdot\frac{n'}{l_2} + \frac{M_2}{l_1}\cdot\frac{n}{l_2}, \qquad \frac{M_p}{l_1} = \frac{M_2}{l_1}\cdot\frac{p'}{l_3}.$$

Pro polohy břemene $P = 1$ v druhém poli dostaneme

$$\frac{M_n}{l_2} = \frac{\mathfrak{M}_n}{l_2} + \frac{M_1}{l_2} \cdot \frac{n'}{l_2} + \frac{M_2}{l_2} \cdot \frac{n}{l_2}, \qquad \frac{M_m}{l_2} = \frac{M_1}{l_2} \cdot \frac{m}{l_1}, \qquad \frac{M_p}{l_2} = \frac{M_2}{l_2} \cdot \frac{p'}{l_3}$$

a pro polohy břemene $P = 1$ v třetím poli

$$\frac{M_p}{l_3} = \frac{\mathfrak{M}_p}{l_3} + \frac{M_2}{l_3} \cdot \frac{p'}{l_3}, \qquad \frac{M_m}{l_3} = \frac{M_1}{l_3} \cdot \frac{m}{l_1}, \qquad \frac{M_n}{l_3} = \frac{M_1}{l_3} \cdot \frac{n'}{l_2} + \frac{M_2}{l_3} \cdot \frac{n}{l_2}.$$

Podíly $\mathfrak{M}/l$ jsou v tabulce IV. Výpočet podílů M/l pro všechny momenty je obsažen v tabulkách *a)*, *b)*, *c)*. Pro $z/l = 0, 1, 0$ (v podporách) je pro všechny momenty $M/l = 0$.

a) Hodnoty M/l pro polohy z břemene $P = 1$ v prvém poli.

z/l_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
M_1/l_1	− 0,02296	− 0,04452	− 0,06331	− 0,07792	− 0,08696	− 0,08905	− 0,08279	− 0,06679	− 0,03965
M_2/l_1	+ 0,00612	+ 0,01187	+ 0,01688	+ 0,02078	+ 0,02319	+ 0,02375	+ 0,02208	+ 0,01781	+ 0,01057
$\frac{\mathfrak{M}_m}{l_1}$	+ 0,04	+ 0,08	+ 0,12	+ 0,16	+ 0,20	+ 0,24	+ 0,18	+ 0,12	+ 0,06
$\frac{M_1}{l_1} \cdot \frac{m}{l_1}$	− 0,01378	− 0,02671	− 0,03799	− 0,04675	− 0,05218	− 0,05343	− 0,04967	− 0,04007	− 0,02379
$\frac{M_m}{l_1}$	+ 0,02622	+ 0,06329	+ 0,08201	+ 0,11325	+ 0,14782	+ 0,18657	+ 0,13033	+ 0,07993	+ 0,03621
$\frac{M_1}{l_1} \cdot \frac{n'}{l_2}$	− 0,01148	− 0,02226	− 0,03166	− 0,03896	− 0,04348	− 0,04452	− 0,04140	− 0,03340	− 0,01982
$\frac{M_2}{l_1} \cdot \frac{n}{l_2}$	+ 0,00306	+ 0,00594	+ 0,00844	+ 0,01039	+ 0,01160	+ 0,01188	+ 0,01104	+ 0,00890	+ 0,00528
$\frac{M_n}{l_1}$	− 0,00842	− 0,01632	− 0,02322	− 0,02857	− 0,03188	− 0,03264	− 0,03036	− 0,02450	− 0,01454
$\frac{M_p}{l_1}$	+ 0,00489	+ 0,00950	+ 0,01350	+ 0,01662	+ 0,01855	+ 0,01900	+ 0,01766	+ 0,01425	+ 0,00846

b) Hodnoty M/l pro polohy z břemene $P=1$ v druhém poli.

z/l_2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$-0,1444\,\omega_1$	−0,01300	−0,02310	−0,03032	−0,03466	−0,03610	−0,03466	−0,03032	−0,02310	−0,01300
$-0,3918\,\omega_2$	−0,03174	−0,05015	−0,05759	−0,05642	−0,04898	−0,03761	−0,02468	−0,01254	−0,00353
$\frac{M_1}{l_2}$	−0,04474	−0,07325	−0,08791	−0,09108	−0,08508	−0,07227	−0,05500	−0,03564	−0,01653
$-0,1237\,\omega_1$	−0,01113	−0,01979	−0,02598	−0,02969	−0,03092	−0,02969	−0,02598	−0,01979	−0,01113
$-0,3711\,\omega_3$	−0,00334	−0,01188	−0,02338	−0,03563	−0,04639	−0,05344	−0,05455	−0,04750	−0,03006
$\frac{M_2}{l_2}$	−0,01447	−0,03167	−0,04936	−0,06532	−0,07731	−0,08313	−0,08053	−0,06729	−0,04119
M_m/l_2	−0,02684	−0,04395	−0,05275	−0,05465	−0,05105	−0,04336	−0,03300	−0,02138	−0,00992
$\mathfrak{M}_n/l_2$	+0,05	+0,10	+0,15	+0,20	+0,25	+0,20	+0,15	+0,10	+0,05
$\frac{M_1}{l_2} \cdot \frac{n'}{l_2}$	−0,02237	−0,03662	−0,04396	−0,04554	−0,04254	−0,03614	−0,02750	−0,01782	−0,00826
$\frac{M_2}{l_2} \cdot \frac{n}{l_2}$	−0,00724	−0,01584	−0,02468	−0,03266	−0,03866	−0,04156	−0,04026	−0,03364	−0,02060
M_n/l_2	+0,02039	+0,04754	+0,08136	+0,12180	+0,16880	+0,12230	+0,08224	+0,04854	+0,02114
M_p/l_2	−0,01158	−0,02534	−0,03949	−0,05226	−0,06185	−0,06650	−0,06442	−0,05383	−0,03295

c) Hodnoty M/l pro polohy z břemene $P = 1$ v třetím poli.

z/l_3	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
M_2/l_3	− 0,04319	− 0,07275	− 0,09018	− 0,09700	− 0,09472	− 0,08487	− 0,06896	− 0,04850	− 0,02501
M_1/l_3	+ 0,01234	+ 0,02079	+ 0,02577	+ 0,02771	+ 0,02706	+ 0,02425	+ 0,01970	+ 0,01386	+ 0,00715
$\frac{M_m}{l_3}$	+ 0,00740	+ 0,01247	+ 0,01546	+ 0,01663	+ 0,01624	+ 0,01455	+ 0,01182	+ 0,00832	+ 0,00429
$\frac{M_1}{l_3} \cdot \frac{n'}{l_2}$	+ 0,00617	+ 0,01040	+ 0,01288	+ 0,01386	+ 0,01353	+ 0,01212	+ 0,00985	+ 0,00693	+ 0,00358
$\frac{M_2}{l_3} \cdot \frac{n}{l_2}$	− 0,02160	− 0,03638	− 0,04509	− 0,04850	− 0,04736	− 0,04244	− 0,03448	− 0,02425	− 0,01250
$\frac{M_n}{l_3}$	− 0,01543	− 0,02548	− 0,03221	− 0,03464	− 0,03383	− 0,03032	− 0,02463	− 0,01732	− 0,00892
$\frac{\mathfrak{M}_p}{l_3}$	+ 0,08	+ 0,16	+ 0,14	+ 0,12	+ 0,10	+ 0,08	+ 0,06	+ 0,04	+ 0,02
$\frac{M_2}{l_3} \cdot \frac{p'}{l_3}$	− 0,03455	− 0,05820	− 0,07214	− 0,07760	− 0,07578	− 0,06790	− 0,05517	− 0,03880	− 0,02001
$\frac{M_p}{l_3}$	+ 0,04545	+ 0,10180	+ 0,06786	+ 0,04240	+ 0,02422	+ 0,01210	+ 0,00483	+ 0,00120	− 0,00001

Pro polohy břemene v prvém poli jest:

$$T'_0 = \mathfrak{T}_0 + \frac{M_1}{l_1} = \frac{z'}{l_1} + \frac{M_1}{l_1}, \qquad T_1 = \mathfrak{T}_1 + \frac{M_1}{l_1} = -\frac{z}{l_1} + \frac{M_1}{l_1};$$

$$T'_1 = T_2 = \frac{M_2}{l_2} - \frac{M_1}{l_2} = \left(\frac{M_2}{l_1} - \frac{M_1}{l_1}\right)\frac{l_1}{l_2}; \qquad T'_2 = T_3 = -\frac{M_2}{l_3} = -\frac{M_2}{l_1} \cdot \frac{l_1}{l_3}.$$

Polohy břemene v druhém poli dají

d) Příčinkové pořadnice v prvém poli.

z/l_1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
M_1	0	− 0,2755	− 0,5342	− 0,7597	− 0,9350	− 1,0435	− 1,0686	− 0,9935	− 0,8015	− 0,4758	0
M_2	0	+ 0,0734	+ 0,1424	+ 0,2026	+ 0,2494	+ 0,2783	+ 0,2850	+ 0,2650	+ 0,2137	+ 0,1268	0
M_m	0	+ 0,3146	+ 0,6395	+ 0,9841	+ 1,3590	+ 1,7738	+ 2,2388	+ 1,5640	+ 0,9592	+ 0,4345	0
M_n	0	− 0,1010	− 0,1958	− 0,2786	− 0,3428	− 0,3826	− 0,3917	− 0,3643	− 0,2940	− 0,1745	0
M_p	0	+ 0,0587	+ 0,1140	+ 0,1620	+ 0,1994	+ 0,2226	+ 0,2280	+ 0,2119	+ 0,1710	+ 0,1015	0
$T'_0 = A_0$	+ 1,0	+ 0,8770	+ 0,7555	+ 0,6367	+ 0,5221	+ 0,4130	+ 0,3109	+ 0,2172	+ 0,1332	+ 0,0603	0
T_1	0	− 0,1230	− 0,2445	− 0,3633	− 0,4779	− 0,5870	− 0,6891	− 0,7828	− 0,8668	− 0,9397	− 1,0
$T'_1 = T_2$	0	+ 0,0218	+ 0,0423	+ 0,0601	+ 0,0740	+ 0,0826	+ 0,0846	+ 0,0786	+ 0,0634	+ 0,0377	0
$T'_2 = T_3 = -A_3$	0	− 0,0052	− 0,0102	− 0,0145	− 0,0178	− 0,0199	− 0,0204	− 0,0189	− 0,0153	− 0,0091	0
A_1	0	+ 0,1448	+ 0,2868	+ 0,4234	+ 0,5519	+ 0,6696	+ 0,7737	+ 0,8614	+ 0,9302	+ 0,9774	+ 1,0
A_2	0	− 0,0270	− 0,0525	− 0,0746	− 0,0918	− 0,1025	− 0,1050	− 0,0975	− 0,0787	− 0,0468	0

e) Příčinkové pořadnice v druhém poli.

z/l_2	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
M_1	0	−0,7158	−1,1720	−1,4066	−1,4573	−1,3613	−1,1563	−0,8800	−0,5702	−0,2645	0
M_2	0	−0,2315	−0,5067	−0,7898	−1,0451	−1,2370	−1,3301	−1,2885	−1,0766	−0,6590	0
M_m	0	−0,4294	−0,7032	−0,8440	−0,8744	−0,8168	−0,6938	−0,5280	−0,3421	−0,1587	0
M_n	0	+0,3262	+0,7606	+1,3018	+1,9488	+2,7008	+1,9568	+1,3158	+0,7766	+0,3382	0
M_p	0	−0,1853	−0,4054	−0,6318	−0,8362	−0,9896	−1,0640	−1,0307	−0,8613	−0,5272	0
$T'_0=T_1=A_0$	0	−0,0596	−0,0977	−0,1172	−0,1214	−0,1134	−0,0964	−0,0733	−0,0475	−0,0220	0
T'_1	+1,0	+0,9303	+0,8416	+0,7385	+0,6258	+0,5078	+0,3891	+0,2745	+0,1683	+0,0753	0
T_2	0	−0,0697	−0,1584	−0,2615	−0,3742	−0,4922	−0,6109	−0,7255	−0,8317	−0,9247	−1,0
$T'_2=T_3=-A_3$	0	+0,0165	+0,0362	+0,0564	+0,0747	+0,0883	+0,0950	+0,0920	+0,0769	+0,0471	0
A_1	+1,0	+0,9899	+0,9393	+0,8557	+0,7472	+0,6212	+0,4855	+0,3478	+0,2158	+0,0973	0
A_2	0	+0,0862	+0,1946	+0,3179	+0,4489	+0,5805	+0,7059	+0,8175	+0,9086	+0,9718	+1,0

f) Příčinkové pořadnice v třetím poli.

z/l_3	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
M_1	0	+0,1728	+0,2911	+0,3608	+0,3879	+0,3788	+0,3395	+0,2758	+0,1940	+0,1001	0
M_2	0	−0,6047	−1,0185	−1,2625	−1,3580	−1,3261	−1,1882	−0,9654	−0,6790	−0,3501	0
M_m	0	+0,1036	+0,1746	+0,2164	+0,2328	+0,2274	+0,2037	+0,1655	+0,1165	+0,0601	0
M_n	0	−0,2160	−0,3637	−0,4509	−0,4850	−0,4736	−0,4245	−0,3448	−0,2425	−0,1249	0
M_p	0	+0,6363	+1,4252	+0,9500	+0,5936	+0,3391	+0,1694	+0,0676	+0,0168	−0,0001	0
$T'_0=T_1=A_0$	0	+0,0144	+0,0243	+0,0301	+0,0323	+0,0316	+0,0283	+0,0230	+0,0162	+0,0083	0
$T'_1=T_2$	0	−0,0486	−0,0818	−0,1015	−0,1091	−0,1066	−0,0955	−0,0776	−0,0545	−0,0281	0
T'_2	+1,0	+0,9432	+0,8728	+0,7902	+0,6970	+0,5947	+0,4849	+0,3690	+0,2485	+0,1250	0
$T_3=-A_3$	0	−0,0568	−0,1272	−0,2098	−0,3030	−0,4053	−0,5151	−0,6310	−0,7515	−0,8750	−1,0
A_1	0	−0,0630	−0,1061	−0,1316	−0,1414	−0,1382	−0,1238	−0,1006	−0,0707	−0,0364	0
A_2	+1,0	+0,9918	+0,9546	+0,8917	+0,8061	+0,7013	+0,5804	+0,4466	+0,3030	+0,1531	0

$$T'_0 = T_1 = \frac{M_1}{l_1} = \frac{M_1}{l_2}\cdot\frac{l_2}{l_1}; \quad T'_1 = \mathfrak{T}'_1 + \frac{M_2 - M_1}{l_2} = \frac{z'}{l_2} + \frac{M_2}{l_2} - \frac{M_1}{l_2},$$

$$T_2 = \mathfrak{T}_2 + \frac{M_2 - M_1}{l_2} = -\frac{z}{l_2} + \frac{M_2}{l_2} - \frac{M_1}{l_2}; \quad T'_2 = T_3 = -\frac{M_2}{l_3} = -\frac{M_2}{l_2}\cdot\frac{l_2}{l_3}.$$

Pro polohy břemene v třetím poli vypočteme

$$T'_0 = T_1 = \frac{M_1}{l_1} = \frac{M_1}{l_3}\cdot\frac{l_3}{l_1}; \quad T'_1 = T_2 = \frac{M_2 - M_1}{l_2} = \left(\frac{M_2}{l_3} - \frac{M_1}{l_3}\right)\cdot\frac{l_3}{l_2};$$

$$T'_2 = \mathfrak{T}'_2 - \frac{M_2}{l_3} = \frac{z'}{l_3} - \frac{M_2}{l_3}, \quad T_3 = \mathfrak{T}_3 - \frac{M_2}{l_3} = -\frac{z}{l_3} - \frac{M_2}{l_3}.$$

Z posouvajících sil vypočteme podporové reakce podle vzorců

$$A_0 = T_0,\ A_1 = -T_1 + T_1',\ A_2 = -T_2 + T_2',\ A_3 = -T_3.$$

Podíly M/l, vypočtené v tabulkách *a*), *b*), *c*), dávají podle uvedených vzorců příčinkové pořadnice posouvajících sil T, obsažené v tabulkách *d*), *e*), *f*), kde jsou též příčinkové pořadnice momentů, určené z podílů M/l násobením příslušnými délkami polí. Z posouvajících sil jsou určeny reakce A_1, A_2, jejichž příčinkové pořadnice jsou též v tabulkách *d*), *e*), *f*). Podle výsledků výpočtu jsou vyneseny příčinkové čáry v obr. 117. Příčinkové pořadnice M jsou délky, příčinkové pořadnice T, A pouhá čísla.

Vynesením vypočtených pořadnic zjistíme hrubší omyly ve výpočtu, neboť výslední hodnoty musí dáti pro všechny příčinkové čáry plynulé křivky. Velmi dobrá kontrola číselných hodnot příčinkových pořadnic plyne dále z toho, že příčinkové čáry mají rovnice třetího stupně; při dělení na stejné díly musí tedy výslední číselné hodnoty tvořiti aritmetické řady třetího stupně a proto třetí rozdíly posloupných číselných hodnot mají býti stálé. Tak na př. číselné hodnoty M_1/l_1 v prvém poli tvoří, vynecháme-li desetinnou čárku, řadu

$$M_1/l_1 = 0,\ -2296,\ -4452,\ -6331,\ -7792,\ -8696,\ -8905,\ -8279,\ -6679,\ -3965,\ 0;$$

z toho vyjdou prvé rozdíly posloupných hodnot

$$\Delta_1 = -2296,\ -2156,\ -1879,\ -1461,\ -904,\ -209,\ +626,\ +1600,\ +2714,\ +3965,$$

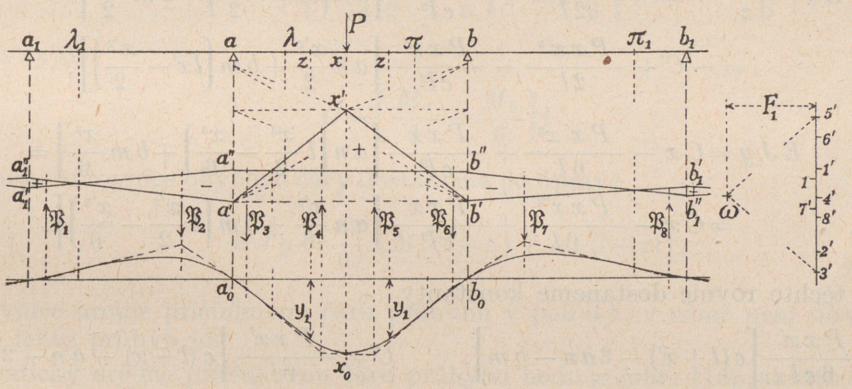
druhé rozdíly jsou

$$\Delta_2 = +140,\ +277,\ +418,\ +557,\ +695,\ +835,\ +974,\ +1114,\ +1251,$$

a třetí rozdíly

$$\Delta_3 = +137,\ +141,\ +139,\ +138,\ +140,\ +139,\ +140,\ +137.$$

Nepatrné kolísání v třetí rozdílové řadě, jež by měla obsahovati veskrze stejné hodnoty, je následek zaokrouhlování čísel. Obdobné výsledky dostaneme ve všech vodorovných řádkách uvedených v tabulkách *a*) až *f*), pokud náleží ke spojitým křivkám, tedy při čáře M_m (M_n, M_p) nalevo a napravo od bodu m (n, p). Tato kontrola výpočtu je velmi citlivá a ukáže zřetelně všechny probnější omyly, jež se do výpočtu vloudily.



Obr. 118.

ζ) ***Příčinková čára průhybu.*** Stanovme ohybovou čáru nosníku zatíženého břemenem P v bodě x pole $a\,b$ (obr. 118). V tomto poli dostaneme v obecném bodě z moment daný vzorcem (58), kde $\mathfrak{M}$ vlevo a vpravo od břemene je určeno vzorci (89^a), (89^b) a doplněk M' vzorcem (90); v tomto případě píšeme x, x' místo p, p' a z, z' místo x, x'. Označíme-li kratčeji

$$l - 3a + x = m, \qquad l - 3b + x' = n, \tag{126}$$

dostaneme podle vzorce (43) diferenciální rovnici ohybové čáry v části $a\,x$

$$EJ\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}z^2} = -M = -\frac{P x'}{l} z + \frac{P x x'}{c l^3}(a n z' + b m z);$$

záporné znaménko u momentu platí zde, volíme-li kladnou osu Y dolů. Integrací této rovnice dostaneme

$$EJ\frac{dy}{dz}=C-\frac{Px'}{l}\cdot\frac{z^2}{2}+\frac{Pxx'}{cl^3}\left[an\left(lz-\frac{z^2}{2}\right)+bm\frac{z^2}{2}\right],$$

$$EJy=D+Cz-\frac{Px'}{l}\cdot\frac{z^3}{6}+\frac{Pxx'}{cl^3}\left[an\left(l\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{6}\right)+bm\frac{z^3}{6}\right].$$

V části xb platí podobně

$$EJ\frac{d^2y}{dz'^2}=-M=-\frac{Px}{l}z'+\frac{Pxx'}{cl^3}(anz'+bmz),$$

z čehož plyne integrací

$$EJ\frac{dy}{dz'}=C'-\frac{Px}{l}\cdot\frac{z'^2}{2}+\frac{Pxx'}{cl^3}\left[an\frac{z'^2}{2}+bm\left(lz'-\frac{z'^2}{2}\right)\right],$$

$$EJy=D'+C'z'-\frac{Px}{l}\cdot\frac{z'^3}{6}+\frac{Pxx'}{cl^3}\left[an\frac{z'^3}{6}+bm\left(l\frac{z'^2}{2}-\frac{z'^3}{6}\right)\right].$$

Pro stanovení integračních konstant užijeme výminek, jimž musí ohybová čára vyhověti. Tato čára jde bodem a, v němž je $z=0$, $y=0$; dosazením do rovnice levé větve dostaneme $D=0$. Pravá větev ohybové čáry jde bodem b, jenž má souřadnice $z'=0$, $y=0$; z rovnice pravé větve vyjde tím $D'=0$. V bodě x mají obě větve ohybové čáry společnou tečnu a společnou pořadnici; musíme tedy dostati pro $z=x$ a $z'=x'$ z rovnic obou větví totéž y i $dy/dz=-dy/dz'$. To dá rovnice

$$EJ\frac{dy}{dz}=C-\frac{Px'x^2}{2l}+\frac{Pxx'}{cl^3}\left[an\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)+bm\frac{x^2}{2}\right]=$$

$$=-C'+\frac{Pxx'^2}{2l}-\frac{Pxx'}{cl^3}\left[an\frac{x'^2}{2}+bm\left(lx'-\frac{x'^2}{2}\right)\right],$$

$$EJy=Cx-\frac{Px'x^3}{6l}+\frac{Pxx'}{cl^3}\left[an\left(l\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+bm\frac{x^3}{6}\right]=$$

$$=C'x'-\frac{Pxx'^3}{6l}+\frac{Pxx'}{cl^3}\left[an\frac{x'^3}{6}+bm\left(l\frac{x'^2}{2}-\frac{x'^3}{6}\right)\right].$$

Řešením těchto rovnic dostaneme konstanty

$$C=\frac{Pxx'}{6cl}\left[c(l+x')-2an-bm\right],\qquad C'=\frac{Pxx'}{6l}\left[c(l+x)-an-2bm\right].$$

Dosazením konstanty C do rovnice levé větve ax ohybové čáry dostaneme po úpravě tuto rovnici ve tvaru

$$EJy=\frac{Px'z}{6cl^3}\left[cl^2(l^2-x'^2-z^2)-anxz'(l+z')-bmxz'(l+z)\right]. \qquad (127^a)$$

Konstanta C', dosazena do rovnice pravé větve xb, dá konečný tvar této rovnice

$$EJy=\frac{Pxz'}{6cl^3}\left[cl^2(l^2-x^2-z'^2)-bmx'z(l+z)-anx'z(l+z')\right]. \qquad (127^b)$$

Kontrola řešení je v tom, že rovnice pravé větve plyne z rovnice levé větve, vyměníme-li veličiny, které se týkají levé a pravé strany, tedy x s x', z se z', a s b a m s n; tomu výsledek vyhovuje.

Vyměníme-li x a z v obou rovnicích pro y, dojdeme jako u prostého nosníku k výsledku, že průhyb vyvozený v bodě z břemenem P v bodě x působícím rovná se průhybu, jejž vyvodí v bodě x břímě P, které působí v bodě z. Z toho plyne, že příčinkovou čarou průhybu v bodě x je ohybová čára nosníku zatíženého břemenem $P = 1$ v bodě x. Klademe-li tedy $P = 1$, máme v rovnicích (127^a), (127^b) rovnice pravé a levé větve příčinkové čáry průhybu bodu x.

Je-li pole ab nezatíženo, je v něm $\mathfrak{M} = 0$ a tedy v průřezu z

$$M = M' = \frac{M_a z' + M_b z}{l}.$$

Pro určení ohybové čáry vyjdeme opět z rovnice

$$EJ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}z^2} = -M = -\frac{M_a (l - z) + M_b z}{l},$$

z níž plyne integrací

$$EJ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = C - \frac{1}{l}\left[M_a \left(lz - \frac{z^2}{2}\right) + M_b \frac{z^2}{2}\right],$$

$$EJ\, y = D + Cz - \frac{1}{l}\left[M_a \left(l\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) + M_b \frac{z^3}{6}\right].$$

Ohybová čára prochází podporovými body; jejich souřadnice musí tedy vyhověti rovnici ohybové čáry. V bodě a je $z = 0$, $y = 0$, z čehož plyne $D = 0$. V bodě b je $z = l$, $y = 0$, což dá

$$Cl - \frac{1}{l}\left[M_a \left(\frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6}\right) + M_b \frac{l^3}{6}\right] = 0$$

a z toho vyjde

$$C = \left(\frac{M_a}{3} + \frac{M_b}{6}\right) l.$$

Dosazením do rovnice ohybové čáry dostaneme po úpravě

$$EJ\, y = \frac{z z'}{6 l}\left[M_a (l + z') + M_b (l + z)\right]. \tag{128}$$

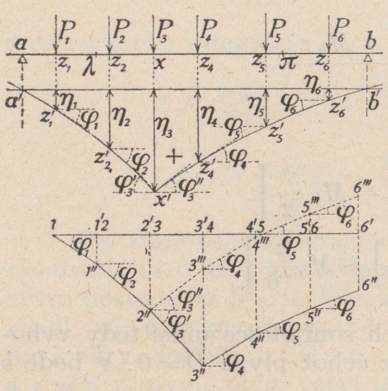
Tato rovnice urcuje příčinkovou čáru průhybu v poli ab, v němž není obsažen průřez x, o jehož průhyb jde.

Graficky určíme příčinkovou čáru průhybu bodu x (obr. 118) jakožto ohybovou čáru nosníku při zatížení břemenem $P = 1$ v bodě x. K tomuto břemeni určíme momentový obrazec nejprve v poli ab podle obr. 94 a v ostatních polích podle obr. 89. Momentovou plochu pokládáme pak za určovací plochu spojité soustavy sil, k níž narýsujeme výslednicovou čáru. K tomu cíli rozdělíme momentovou plochu na př. na trojúhelníky, jež nahradíme v tížnicích břemeny $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, ...; jejich určovací úseky dostaneme uvedením obsahů jednotlivých dílů momentové plochy na touž půdici e. Výslednicová čára k břemenům P je opsána spojité křivce výslednicové; dotyčné body jsou na svislých mezích dílů momentové plochy. Každému trojúhelníkovému dílu momentové plochy odpovídá jako výslednicová čára kubická parabola, jejíž další body a tečny by se určily jako při zatížení trojúhelníkovém. Při rýsování ohybové čáry měli bychom bráti pólovou vzdálenost $F = \frac{EJ}{ef}$; volíme-li místo toho jinou vzdálenost F_1, dostaneme pořadnice y_1, z nichž plynou příčinkové pořadnice podle rovnice $y = y_1 \frac{F_1}{F}$.

b) Pohyblivá soustava osamělých břemen.

33. Krajní hodnoty momentů ohybových, sil posouvajících i reakcí podporových, řešené z příčinkových čar. Vyšetřujeme-li krajní hodnoty (maxima a minima) momentů ohybových a sil posouvajících v průřezech mezipodporových, můžeme se omeziti na zatížení v poli, v němž je průřez. Účinek zatížení ostatních polí levých (pravých) určí se z momentu v pravé (levé) podpoře zatíženého pole, jak bylo v předešlém odstavci vyloženo.

K momentu ohybovému průřezu x ve vnitřní části $\lambda\pi$ pole ab přičiňují veškeré polohy břemene v poli ab kladně; lze tedy zatížením pole ab vyvoditi v průřezu x pouze kladný moment, v krajním případě max M. Příčinková čára momentu průřezu x skládá se v poli ab ze dvou křivek $a'x'$, $x'b'$, jež se sekou na svislici průřezu x (obr. 119). Pohyblivou soustavou osamělých břemen vyvodíme v průřezu x největší moment, obsáhneme-li délkou pole ab co nejvíce a největších břemen; břemena největší a nejhustější umístíme poblíže průřezu x a jedno z nich položíme do průřezu x. Zvolíme-li na základě toho určitou polohu soustavy, zbývá přesvědčiti se, vyvozuje-li tato poloha max M. Moment vyvozený v průřezu x soustavou břemen vypočteme z příčinkového obrazce, stanovíme-li účinky jednotlivých břemen podle vzorce (119^a) a sečteme-li je; dostaneme



Obr. 119.

$$M = \frac{f}{P_0}(P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + P_3\eta_3 + \ldots) = \frac{f}{P_0}\Sigma P\eta. \qquad (129^a)$$

Pohybuje-li se soustava břemen po nosníku, mění se příčinkové pořadnice η a tím i moment M. Předpokládejme pohyb nekonečně malý, jímž se změní úsečka z libovolného břemene v soustavě o $\mathrm{d}z$. Ze vzorce (129^a) plyne tu

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z} = \frac{f}{P_0}\Sigma P \cdot \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}z} = \frac{f}{P_0}\Sigma P \cdot \operatorname{tg}\varphi,$$

znamená-li φ odchylku tečny k příčinkové čáře v koncovém bodě pořadnice η, neboť pak jest $\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}z = \operatorname{tg}\varphi$. Zde se mění $\mathrm{d}M/\mathrm{d}z$ náhle, přestoupí-li některé břímě přes průřez x; výminkou max M je tedy $\mathrm{d}M/\mathrm{d}z \gtrless 0$ neboli

$$\Sigma P \cdot \operatorname{tg}\varphi \gtrless 0. \qquad (130^a)$$

Graficky se přesvědčíme snadno, vyhovuje-li poloha soustavy výminee (130^a). Přeneseme určovací úseky břemen $P_1 = \overline{1\,1'}$, $P_2 = \overline{2\,2'}$, $P_3 = \overline{3\,3'}, \ldots$ do vodorovné čáry složkové a určíme

$$\Sigma P \operatorname{tg}\varphi = P_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + P_2 \operatorname{tg}\varphi_2 + P_3 \operatorname{tg}\varphi_3 + \ldots$$

Vedeme-li bodem 1 přímku, jež se odchyluje od vodorovnice o úhel φ_1, tedy je rovnoběžná s tečnou příčinkové čáry v bodě z_1', dostaneme ve svislici bodu $1'$ pořadnici $\overline{1'\,1''} = P_1 \operatorname{tg}\varphi_1$. Bodem $1''$ veďme dále rovnoběžku s tečnou k čáře příčinkové v bodě z_2'; ve svislici bodu $2'$ je pak pořadnice $\overline{2'\,2''} = P_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + P_2 \operatorname{tg}\varphi_2$. Břímě P_3, jež působí v bodě x, můžeme čítati buď k levé nebo k pravé straně, tedy vésti bodem $2''$ rovnoběžku s tečnou k levé nebo k pravé větvi příčinkové čáry v bodě x'; tím dospějeme ve svislici bodu $3'$ k bodům $3''$, $3'''$ a k pořadnicím $\overline{3'\,3''} = P_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + P_2 \operatorname{tg}\varphi_2 + P_3 \operatorname{tg}\varphi_3'$, $\overline{3'\,3'''} = P_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + P_2 \operatorname{tg}\varphi_2 + P_3 \operatorname{tg}\varphi_3''$. Body $3''$, $3'''$ vedeme rovnoběžky s tečnou příčinkové čáry v bodě z_4', body $4''$, $4'''$, jež tím na svislici bodu $4'$ vzniknou,

rovnoběžky s tečnou příčinkové čáry v bodě z'_5 atd. V koncovém bodě složkové čáry obdržíme pak úseky

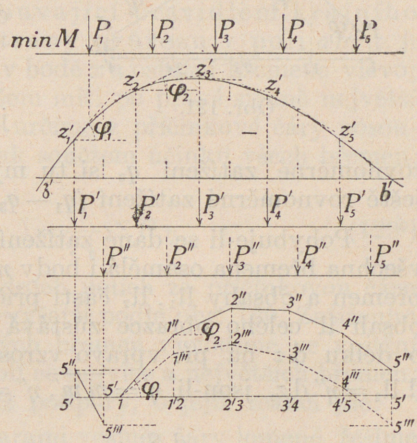
$$\overline{6'\,6''} = \Sigma_1 P \operatorname{tg}\varphi, \qquad \overline{6'\,6'''} = \Sigma_2 P \operatorname{tg}\varphi,$$

z nichž prvý platí, čítáme-li břímě P_3 k levé straně, a druhý, čítáme-li břímě P_3 k pravé straně. Liší-li se výslední úseky znaménkem, tedy jsou-li body $6''$, $6'''$ po různých stranách bodu $6'$, je vyhověno výmince (130^a) a zvolená poloha soustavy vyvozuje v průřezu x max M, jehož hodnotu určíme pak podle vzorce (129^a); $\Sigma P \eta$ lze ovšem vyšetřiti graficky podle obr. 5.

Je-li průřez x v krajní části pole $a\,b$, na př. v $a\,\lambda$, náleží k němu v poli $a\,b$ obojetná poloha ζ; příčinkové pořadnice v dílu $a\,\zeta$ jsou pak kladné, v dílu $\zeta\,b$ záporné. Zatížením pole $a\,b$ lze vyvoditi v tomto průřezu x moment kladný i záporný, v krajních případech tedy max M a min M. Kladná část příčinkového obrazce má v podstatě týž tvar jako v obr. 119. Místo podpory b jest uvažovati pouze obojetnou polohu ζ; jinak se určí max M jako v předešlém případě.

V části $\zeta\,b$, jež přičiňuje záporně, je příčinkovou čarou spojitá křivka (obr. 120); nejúčinnější polohu soustavy, jež vyvodí min M, stanovíme tu zkusmo. Délkou $\overline{\zeta\,b}$ hledíme obsáhnouti co nejvíce a největších břemen; největší a nejhustější břemena umístíme poblíž bodu největšího příčinku záporného, v němž je největší pořadnice příčinková. Pro určitou polohu soustavy vyšetří se z příčinkového obrazce podle vzorce (129^a)

$$M = \frac{f}{P_0}\Sigma P \eta, \qquad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z} = \frac{f}{P_0}\Sigma P \operatorname{tg}\varphi.$$



Obr. 120.

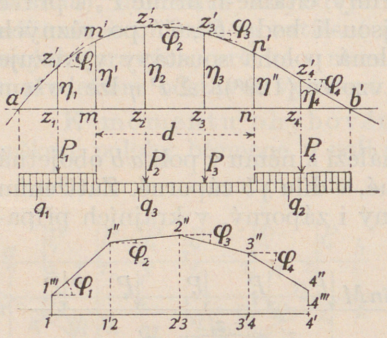
Zde se mění $\mathrm{d}M/\mathrm{d}z$ spojitě; pak žádá min M, aby byla $\mathrm{d}M/\mathrm{d}z = 0$, tedy

$$\Sigma P \operatorname{tg}\varphi = 0. \qquad (130^b)$$

Pro zvolenou polohu soustavy $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$ vyšetříme zase $\Sigma P \operatorname{tg}\varphi$, sestrojíme-li k břemenům $P_1 = \overline{1\,1'}$, $P_2 = \overline{2\,2'}$, $P_3 = \overline{3\,3'}, \ldots$ vodorovnou čáru složkovou a rýsujeme-li pak lomenou čáru $1\,1''\,2''\,3'' \ldots$, jež se skládá z rovnoběžek s tečnami v koncových bodech příslušných příčinkových pořadnic. Vyjde-li tu $\Sigma P \operatorname{tg}\varphi = \overline{5'\,5''}$ záporné, t. j. bod $5''$ nad bodem $5'$ (ve smyslu záporných pořadnic příčinkových), třeba úhly φ algebraicky zvětšiti, tedy soustavu břemen posunouti vpravo, aby bylo vyhověno výmince (130^b). Zvolíme vpravo od prvé druhou polohu soustavy $P''_1, P''_2, P''_3, \ldots$ a určíme pro ni obdobně lomenou čarou $1\,1'''\,2'''\,3''' \ldots$ opět $\Sigma P \operatorname{tg}\varphi = \overline{5'\,5'''}$; vyjde-li úsek $\overline{5'\,5'''}$ protivného znaménka, tedy bod $5'''$ po druhé straně bodu $5'$, je mezi oběma zvolenými polohami soustavy břemen poloha $P_1, P_2, P_3, \ldots$, jež vyhovuje výmince (130^b). Správnou polohu soustavy břemen určíme přibližně interpolací po zákonu přímky: přeneseme úsek $\overline{5'\,5''}$ na př. na paprsek P'_1, úsek $\overline{5'\,5'''}$ od téže osy na paprsek P'_1; spojnice $5''\,5'''$ seče pak osu na svislici správné polohy břemene P_1, jež dává polohu soustavy vyvozující min M. Malá chyba v poloze soustavy nemá praktického významu, poněvadž se poblíž minima hodnota funkce nepatrně mění. Je-li poloha soustavy určena, vypočteme min M podle vzorce (129^a).

K momentu v podpoře a přičiňuje sousední pole $a\,b$ záporně; příčinkovou čarou je v poli $a\,b$ spojitá křivka a min M_a se vyšetří jako min M pro průřez x v krajní části pole.

Vyšetřme též, jak se určí nejúčinnější poloha pohyblivého zatížení, jež se skládá z osamělých břemen i zatížení rovnoměrného; příkladem jeho je zatížení povozy a lidmi na mostě silničním. Nechť jde obecně o jakoukoli statickou veličinu S, jejíž příčinkový obrazec je dán (obr. 121); příčinkové pořadnice znamenejtež zde v příslušném měřidle účinek břemene $P = 1$. Na nosník nechť působí pohyblivé zatížení, složené z osamělých břemen $P_1, P_2, P_3, \ldots$ a ze zatížení rovnoměrných, jež jsou dána vlevo od bodu m poměrným zatížením q_1, vpravo od bodu n poměrným zatížením q_2 a mezi body m, n poměrným zatížením q_3; délka $\overline{m\,n} = d$ budiž stálá, pohybuje-li se zatížení po nosníku. Pro určitou polohu zatížení je podle vzorců (6) a (7) hledaná veličina



Obr. 121.

$$S = (q_1 - q_3)\,\mathfrak{U}_1 + (q_2 - q_3)\,\mathfrak{U}_2 + q_3\,\mathfrak{U} + \Sigma P\,\eta,$$

je-li $\mathfrak{U} = \text{pl. } a'\,m'\,n'\,b'$, $\mathfrak{U}_1 = \text{pl. } a'\,m'\,m$, $\mathfrak{U}_2 = \text{pl. } n\,n'\,b'$; rovnoměrné zatížení q_3 si tu myslíme po celém nosníku, proto zbude v dílu $a\,m$ ještě rovnoměrné zatížení $(q_1 - q_3)$ a v dílu $n\,b$ rovnoměrné zatížení $(q_2 - q_3)$.

Pohybuje-li se dané zatížení po nosníku, pohybují se podle předpokladu stejně všechna břemena osamělá i body m, n; pak se mění příčinkové pořadnice η v papiscích břemen a obsahy $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$ částí příčinkového obrazce, jež odpovídají délkám $a\,m$, $n\,b$, obsah $\mathfrak{U}$ celého obrazce zůstává však stálý. Nekonečně malým pohybem zatížení o délku $\mathrm{d}z$ na př. vpravo vzroste obsah $\mathfrak{U}_1$ o $\mathrm{d}\,\mathfrak{U}_1 = \eta'\,\mathrm{d}z$ a zmenší se obsah $\mathfrak{U}_2$ o $\mathrm{d}\,\mathfrak{U}_2 = \eta''\,\mathrm{d}z$, jsou-li $\eta' = \overline{m\,m'}$, $\eta'' = \overline{n\,n'}$ příčinkové pořadnice v bodech m, n. Pak jest

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z} = (q_1 - q_3)\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{U}_1}{\mathrm{d}z} - (q_2 - q_3)\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{U}_2}{\mathrm{d}z} + \Sigma P\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}z},$$

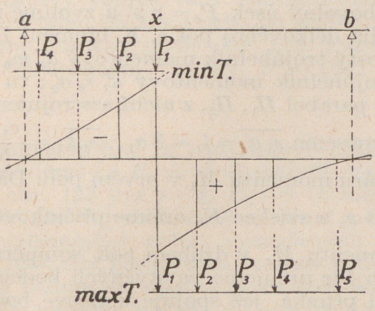
tedy

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z} = (q_1 - q_3)\,\eta' - (q_2 - q_3)\,\eta'' + \Sigma P \operatorname{tg}\varphi, \tag{131}$$

jelikož $\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}z = \operatorname{tg}\varphi$ znamená směrnici tečny k příčinkové čáře v koncovém bodě příslušné pořadnice η. Graficky určíme $\mathrm{d}S/\mathrm{d}z$ podle posledního vzorce, přeneseme-li do vodorovné čáry složkové určovací úseky břemen $P_1 = \overline{1\,1'}$, $P_2 = \overline{2\,2'}$, $P_3 = \overline{3\,3'}, \ldots$; na svislici bodu 1 přeneseme v měřidle sil pořadnici $\overline{1\,1'''} = (q_1 - q_3)\,\eta'$, jejíž hodnotu vypočteme, odměřujíce η' v měřidle délkovém a dosazujíce je jako délku. Dále vedeme přímku $1'''\,1''$ rovnoběžně s tečnou příčinkové čáry v bodě z_1', přímku $1''\,2''$ rovnoběžně s tečnou příčinkové čáry v bodě z_2' atd.; konečně přeneseme ve smyslu protivném ke smyslu $1\,1'''$ pořadnici $\overline{4''\,4'''} = (q_2 - q_3)\,\eta''$, dosazujíce η'' opětně podle měřidla délkového. Pak je pro danou polohu zatížení $\mathrm{d}S/\mathrm{d}z = \overline{4'\,4'''}$.

Je-li příčinkovou čarou spojitá křivka, mění se $\mathrm{d}S/\mathrm{d}z$ spojitě; $\max S$ tu žádá, aby byla $\mathrm{d}S/\mathrm{d}z = 0$. Nejúčinnější polohu soustavy určíme zde zkusmo, jak bylo ukázáno u soustavy osamělých břemen (obr. 120). U příčinkové čáry lomené, třebas o stranách křivých, mění se $\mathrm{d}S/\mathrm{d}z$ náhle, přestoupí-li některé břímě přes průřez, v jehož svislici je vrchol příčinkové čáry; pak nastane $\max S$ za polohy soustavy, pro niž platí $\mathrm{d}S/\mathrm{d}z \gtrless 0$. V nejúčinnější poloze soustavy je jedno z největších břemen v bodě největšího příčinku; o správnosti polohy se přesvědčíme v podstatě jako za samotné soustavy osamělých břemen (obr. 119).

Pro posouvající sílu průřezu x je průřez sám polohou přechodnou, jde-li o přímé zatížení; v průřezu má příčinková čára posouvající síly (obr. 122) dvě pořadnice protivného znaménka. Z příčinkového obrazce plyne, že se max T vyvodí pohyblivou soustavou osamělých břemen, je-li co nejvíce zatížena pravá strana xb průřezu x; břemena největší a nejhustější mají býti poblíž průřezu x a první břímě obyčejně v průřezu. Pravidlem vzniká tedy největší síla posouvající krajním zatížením pravé strany průřezu v poli ab jako u prostého nosníku. Výjimka by mohla nastati jen, kdyby soustava začínala břemenem poměrně malým nebo od ostatních břemen značně vzdáleným.[1]) Obdobně žádá nejmenší síla posouvající pravidlem krajního zatížení levé strany průřezu v poli ab, t. j. břímě P_1 má býti v bodě x a ostatní břemena vlevo; soustava musí ovšem míti po pravé straně největší a nejhustější břemena. Pro každé břímě v soustavě určíme z příčinkové čáry posouvající sílu podle vzorce (119^b), pro celou soustavu pak součtem účinků všech břemen, tedy



Obr. 122.

$$T = \frac{1}{P_0}(P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + P_3\eta_3 + \ldots) = \frac{1}{P_0}\Sigma P\eta. \qquad (129^b)$$

Reakce ve vnitřní podpoře má v obou sousedních polích za příčinkovou čáru spojitou křivku. Nejúčinnější poloha soustavy se tu vyšetří podle obr. 120. Zatížením obou sousedních polí pohyblivou soustavou osamělých břemen vyvodíme ve vnitřní podpoře největší reakci, obsáhneme-li délkou obou polí co nejvíce a největších břemen; břemena největší a nejhustější umístíme pak poblíž podpory, o jejíž reakci jde.

Za nepřímého zatížení jsou příčinkovými čarami vesměs čáry lomené, řešíme tedy podle obr. 119.

Příklad 25. Určíme krajní hodnoty ohybových momentů i posouvajících sil pro některé průřezy a podporových reakcí spojitého nosníku o třech souměrných polích délky $l_1 = l_3 = 12$ m, $l_2 = 16$ m; nosník budiž zatížen nepřímo, dělen jsa styčnými body na stejné oddíly délky 2 m. Vyšetříme krajní hodnoty momentů v podpoře a_1 a v průřezech, daných úsečkami $\overline{a_0 m} = m = 6$ m, $\overline{a_0 n} = n = 10$ m, $\overline{a_1 p} = p = 2$ m, $\overline{a_1 r} = r = 8$ m. Krajní hodnoty posouvající síly stanovíme v oddílech vlevo od bodů m, r a krajní hodnoty reakcí v podporách a_0, a_1. Počítejme pouze s pohyblivým zatížením vlakem podle normy I mostního řádu z r. 1904.

Základní body bychom určili graficky podle obr. 88; počtem je stanovíme ze vzorce (81^a). Určíme nejprve poměry

$$\delta_1 = \frac{l_1}{l_2} = \frac{3}{4}, \qquad \delta_2 = \frac{l_2}{l_3} = \frac{4}{3}$$

a pak vypočteme

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{2(1+\delta_1)} = -\frac{2}{7}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2(1+\delta_2)+\delta_2\lambda_1} = -\frac{7}{30}.$$

Ze souměrnosti nosníku plyne

$$\pi_1 = \lambda_2, \qquad \pi_2 = \lambda_1, \qquad \pi_3 = 0.$$

Úseky, na něž základní body dělí pole, určíme podle rovnic (125) v příkladu 24:

$$a_1 = 0, \qquad b_1 = -\frac{\pi_1}{1-\pi_1} l_1 = \frac{7}{31} l_1 = 2{,}27 \text{ m}, \qquad c_1 = l_1 - a_1 - b_1 = 9{,}73 \text{ m};$$

$$a_2 = -\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1} l_2 = \frac{2}{9} l_2 = 3{,}56 \text{ m} = b_2, \qquad c_2 = l_2 - a_2 - b_2 = 8{,}88 \text{ m}.$$

[1]) Přesné kriterium pro ten případ odvozuje *Jos. Šolín* v „Theorii zevnitřních sil trámů přímých“, seš. II (Praha 1879), str. 99 a d.

K sestrojení příčinkových čar potřebujeme úseky

$$l_1 - 3\,a_1 = 12\text{ m}, \qquad \frac{c_1\,l_1}{b_1} = 51{,}4\text{ m}; \qquad l_2 - 3\,b_2 = 5{,}32\text{ m}, \qquad \frac{c_2\,l_2}{a_2} = 39{,}9\text{ m}.$$

Přeneseme nyní do složkové čáry (obr. 123, tab. 1) libovolný úsek $P_0 = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'}$ a zvolíme na vodorovnici jeho středu ve vzdálenosti $f = 2$ m (podle měřidla délkového) pól o. K břemeni P_0, působícímu v bodě m uprostřed pole prvého, narýsujeme prostý trojúhelník momentový $a'_0\,m_0\,a'_1$ a k břemeni P_0 v poloze r uprostřed druhého pole prostý trojúhelník momentový $a'_1\,r_0\,a'_2$; tu je $a'_0\,m_0 \parallel o\mathfrak{p} \parallel a'_1\,r_0$, $m_0\,a'_1 \parallel o\,\mathfrak{p}' \parallel r_0\,a'_2$. Body m_0, r_0 jsou vrcholy parabol Π_1, Π_2, z nichž sestrojujeme podle obr. 114 příčinkové čáry momentů podporových. Přeneseme $\overline{s_1\,a'_0} = l_1 - 3\,a_1$, $\overline{s_1\,k_1} = \frac{c_1\,l_1}{b_1}$ a sestrojíme z paraboly Π_1, bodu s_1 a svislice K_1 příčinkovou čáru momentu M_1 v prvém poli. Dále přeneseme $\overline{a'_2\,s_2} = l_2 - 3\,b_2$, $\overline{k_2\,s_2} = \frac{c_2\,l_2}{a_2}$ a z paraboly Π_2, bodu s_2 a svislice K_2 určíme příčinkovou čáru momentu M_1 v druhém poli. S touto čarou je čára momentu M_2 v druhém poli souměrná ke svislici středu r druhého pole. Příčinkové pořadnice všech čar určujeme ve styčných bodech; příčinkovou čarou v každém oddílu je pro nepřímé zatížení přímka, jež spojuje koncové body příčinkových pořadnic ve styčných bodech.

Dále sestrojíme příčinkové čáry momentů styčných průřezů, a to pro každý průřez jen v poli, v němž je průřez obsažen. Určíme nejprve podle obr. 115 vrcholy těchto čar; příčinkové pořadnice momentů podporových v uvažovaném bodě styčném přeneseme do svislic příslušných podpor a spojíme koncové body přemístěnou základní stranou, od níž k parabole Π měříme ve svislici uvažovaného bodu styčného pořadnici vrcholu příčinkové čáry pro moment téhož průřezu styčného. Takto určíme vrcholy příčinkových čar momentů pro všechny styčné průřezy v poli prvém i druhém. Pak sestrojíme průsečíky příčinkových čar momentů se svislicemi bodů styčných, hledíce k obr. 115 a ke vzorcům (120^a), (120^b), podle pravidla, že tyto průsečíky rozdělují vzdálenost vrcholu příčinkové čáry momentu pro průřez, o jehož svislici jde, od příčinkové čáry momentu v levé (pravé) podpoře téhož pole na tolik dílů, na kolik je děleno pole vlevo (vpravo) od uvažované svislice ostatními body styčnými. Graficky řešíme tu podle obr. 115 anebo jak je naznačeno v obr. 123 (v prvém poli pro průřez m, v druhém pro s).

Do příčinkových obrazců posouvajících sil přeneseme úsek $P_0 = \overline{\alpha'_0\,\alpha_0} = \overline{\alpha_1\,\alpha'_1} = \overline{\alpha''_1\,\alpha_1} = \overline{\alpha_2\,\alpha'_2}$ a sestrojíme nejprve přímky, jež dávají příčinkové obrazce sil $\mathfrak{T}$. Pak určíme v každém poli příčinkový obrazec doplňku T'. Zvolíme pól o_1 (o_2) ve vzdálenosti f od svislé čáry složkové a vedeme jím rovnoběžky s přemístěnými stranami základními pro jednotlivé polohy břemen; pořadnici, omezenou ve složkovém obrazci paprskem vodorovným a paprskem rovnoběžným s přemístěnou stranou základní, přeneseme do svislice příslušné polohy břemene a koncové body těchto pořadnic spojíme příčinkovou čarou doplňku T'. Mezi čarou T' a čarami $\mathfrak{T}$ jsou obsaženy příčinkové obrazce posouvajících sil pro všechny průřezy, ovšem jen v poli, v němž je průřez. Příčinkové pořadnice posouvající síly T_m oddílu vlevo od bodu m (obr. 125) jsou dány vlevo od bodu m pořadnicemi přímky $\alpha_0\,\alpha'_1$ vztažené k čáře T'; pořadnice v bodě m a vpravo od něho jsou určeny přímkou $\alpha'_0\,\alpha_1$ vztaženou k čáře T'. Obdobně se určí v druhém poli příčinková čára posouvající síly T_r.

Reakce v krajní podpoře a_0 jest $A_0 = T'_0$; lze tu řešiti, jako by šlo o přímé zatížení a příčinkový obrazec reakce A_0 je dán v prvém poli přímkou $\alpha'_0\,\alpha_1$ vztaženou k čáře T'. Pro reakci A_1 určíme příčinkovou čáru v obou přilehlých polích podle vzorce $A_1 = -T_1 + T'_1$. Příčinkový obrazec síly T_1 je v prvém poli obsažen mezi čarou T' a přímkou $\alpha_0\,\alpha'_1$. Příčinkovou čáru posouvající síly T'_1 vpravo od podpory a_1 určíme v prvém poli, stanovíme-li pro jednotlivé polohy břemene v prvém poli sílu T'_1 jakožto stálou sílu posouvající v nezatíženém druhém poli. Je-li zatíženo pouze prvé pole, je momentovým obrazcem v druhém poli pouhý doplňovací lichoběžník, jehož strany se sekou na svislici základního bodu π_2. Příčinkové pořadnice momentu M_1, vyvozené jednotlivými polohami břemene v prvém poli, přeneseme na svislici bodu a_1 ($\overline{m'\,m'_0} = \overline{a''_1\,a'_1}$), koncové body ($a''_1$) jejich spojíme s bodem π'_2 a vedeme pólem o_1 rovnoběžky ($o_1\,\mathfrak{m}' \parallel a''_1\,\pi'_2$); mezi těmito paprsky a vodorovným paprskem $o_1\,\alpha_0$ je ve svislé čáře složkové určovací úsek síly T'_1, jejž přeneseme vodorovnicí ($\mathfrak{m}'\,\mu'$) do svislice příslušné polohy břemene a koncové body spojíme příčinkovou čarou T'_1. Příčinkové pořadnice reakce A_1 v prvém poli se pak rovnají součtu prostých pořadnic přímky $\alpha_0\,\alpha'_1$, měřených od přímé osy $\alpha_0\,\alpha_1$, a pořadnic obsažených mezi čarami T' a T'_1. V druhém poli jsou mezi čarou T' a přímkou $\alpha''_1\,\alpha_2$ příčinkové pořadnice síly T'. Příčinkovou čáru síly T_1 v druhém poli stanovíme pak, jestliže pořadnici momentu M_1, vyvozeného jednotlivými polohami břemene v druhém poli, přeneseme na svislici bodu a_1 ($\overline{a'''_1\,a'_1} = \overline{r'\,r'_0}$), a koncové body ($a'''_1$) spojíme s bodem a'_0; se spojnicemi vedeme rovnoběžky ($o'_2\,\mathfrak{r}' \parallel a'_0\,a'''_1$) pólem o'_2, zvoleným ve vzdálenosti f od svislé čáry složkové, a obdržíme mezi těmito paprsky a vodorovným paprskem pólovým úseky ($\overline{\mathfrak{r}'\,\mathfrak{c}_2}$) stálých sil posouvajících v prvém poli pro jednotlivé polohy břemene v druhém poli. Tyto úseky přeneseme vodorovnicemi ($\mathfrak{r}'\,\varrho'$) na svislice příslušných poloh břemene a koncové body spojíme příčinkovou čarou síly T_1 v druhém poli. Příčinkové pořadnice reakce A_1 v druhém poli rovnají se algebraickému součtu pořadnic přímky $\alpha''_1\,\alpha_2$, měřených od vodorovné osy $\alpha_1\,\alpha_2$, a pořadnic mezi čarou T' a T_1, jež jsou kladné, směřují-li vzhůru.

Příčinkové čáry momentů k bodům a_1, m, n, p, r naznačíme každou ve zvláštním obrazci (obr. 124, tab. 1), rovněž tak příčinkové čáry posouvajících sil T_m, T_r a reakcí A_0, A_1 (obr. 125, tab. 1); z těchto obrazců vyšetříme pak krajní hodnoty uvedených veličin. Nejúčinnější polohu soustavy volíme vždy zkusmo, kladouce jedno z největších a nejhustějších břemen do polohy největšího příčinku nebo do jiného vrcholu příčinkové čáry; zvolenou polohu soustavy kontrolujeme graficky podle obr. 119. Daná řada břemen (vlak podle normy I) obsahuje zde břemena dvojí velikosti $P' = 16\,t$, $P'' = 13\,t$; lze pak stanoviti

$$\Sigma P\eta = P'\Sigma\eta' + P''\Sigma\eta'',$$

znamenají-li η' (η'') příčinkové pořadnice v paprscích břemen P' (P''). Určujíce momenty, odměřujeme f a P_0 na témž měřidle, na př. délkovém, a pořadnice příčinkové η na měřidle délkovém; v obr. 123 jest $f = 2$, $P_0 = 6$ (v měřidle délek). U sil posouvajících a reakcí odměřujeme P_0 a příčinkové pořadnice η na témž měřidle, na př. zase délkovém, jež je připojeno k obr. 123. Za nejúčinnějších poloh, vyznačených v obr. 124 a 125 (tab. 1), počítáme momenty podle vzorce (129a), síly posouvající a reakce podle vzorce (129b). Pro větší bezpečnost lze vynechati břemena, jež padnou do opačně příčiňující části nosníku v poli, jež neobsahuje průřezu, o který jde (na př. třetí nápravu tendru, jež v poloze soustavy, které vyžaduje $\max M_r$, padne do třetího pole). Tím dostaneme hodnoty nepatrně větší, než skutečně vzniknou. Malý nadbytek bezpečnosti je zde na místě, poněvadž mimo řadu břemen, předepsanou mostním řádem, jsou možná i jiná zatížení, jež i za menšího součtu břemen mohou vyvoditi větší prosté hodnoty některých veličin.

Moment M_1 v podpoře a_1, vyvozený zatížením prvého pole podle obr. 124, má hodnotu

$$\min M_1^{(1)} = \frac{f}{P_0}\Sigma P\eta = -\frac{2}{6}[16\cdot(2{,}60 + 3{,}04 + 3{,}12 + 2{,}82 + 2{,}16) + 13\cdot 0{,}28] = -74{,}5\text{ mt}.$$

Zatížením druhého pole podle obr. 124 dostaneme

$$\min M_1^{(2)} = \frac{f}{P_0}\Sigma P\eta = -\frac{2}{6}[16\cdot(2{,}80 + 3{,}72 + 4{,}12 + 4{,}18 + 4{,}00) +$$
$$+ 13\cdot(2{,}08 + 1{,}26 + 0{,}52)] = -117{,}1\text{ mt}.$$

Ze souměrnosti nosníku plyne, že hodnoty $\min M_2$, vyvozené zatížením druhého a třetího pole, rovnají se hodnotám $\min M_1$, jež dává zatížení druhého a prvého pole. Zatížením třetího pole vyvodíme v bodě a_1 největší moment, má-li zatížení polohu, jež dá

$$\min M_2^{(3)} = \min M_1^{(1)};$$

pak jest

$$\max M_1^{(3)} = M_2\,\lambda_1 = \min M_1^{(1)}\cdot\lambda_1 = 74{,}5\cdot\frac{2}{7} = 21{,}3\text{ mt}.$$

V průřezu m můžeme vyvoditi zatížením prvého pole pouze

$$\max M_m^{(1)} = \frac{f}{P_0}\Sigma P\eta = \frac{2}{6}\,16\cdot(3{,}74 + 5{,}50 + 7{,}40 + 5{,}46 + 3{,}48) = 136{,}4\text{ mt}.$$

Zatížením druhého pole vzniká $\min M_m^{(2)}$, má-li soustava břemen polohu, jež dá $\min M_1^{(2)}$; pak jest

$$\min M_m^{(2)} = \min M_1^{(2)}\cdot\frac{m}{l_1} = -117{,}1\cdot\frac{6}{12} = -58{,}6\text{ mt}.$$

Obdobně vyvodíme zatížením třetího pole největší moment v průřezu m, umístíme-li soustavu břemen tak, aby vzniklo $\min M_2^{(3)} = \min M_1^{(1)}$; v průřezu m je pak moment

$$\max M_m^{(3)} = M_1\frac{m}{l_1} = M_2\,\lambda_1\frac{m}{l_1} = \min M_1^{(1)}\cdot\lambda_1\frac{m}{l_1} = 74{,}5\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{6}{12} = 10{,}6\text{ mt}.$$

V průřezu n dá zatížení levé části prvého pole

$$\min M_n^{(1)} = \frac{f}{P_0}\Sigma P\eta = -\frac{2}{6}\,16\cdot(0{,}06 + 0{,}10 + 0{,}08) = -1{,}3\text{ mt}$$

a zatížení pravé části prvého pole

$$\max M_n^{(1)} = \frac{f}{P_0}\Sigma P\eta = \frac{2}{6}\,16\cdot(0{,}36 + 1{,}00 + 1{,}96 + 3{,}20 + 0{,}92) = 39{,}7\text{ mt}.$$

Jako v bodě m určíme ze zatížení druhého pole

$$\min M_n^{(2)} = \min M_1^{(2)} \frac{n}{l_1} = -117{,}1 \cdot \frac{10}{12} = -97{,}6 \text{ mt}$$

a ze zatížení třetího pole

$$\max M_n^{(3)} = \min M_1^{(1)} \cdot \lambda_1 \frac{n}{l_1} = 74{,}5 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{10}{12} = 17{,}7 \text{ mt}.$$

V průřezu p vyvodí zatížení levé části druhého pole

$$\max M_p^{(2)} = \frac{f}{P_0} \Sigma P \eta = \frac{2}{6} 16 \cdot (0{,}86 + 2{,}94 + 1{,}52 + 0{,}38 - 0{,}40) = 28{,}3 \text{ mt}$$

a zatížení pravé části druhého pole

$$\min M_p^{(2)} = \frac{f}{P_0} \Sigma P \eta = -\frac{2}{6} 16 \cdot (0{,}75 + 1{,}02 + 1{,}08 + 0{,}88 + 0{,}64) = -23{,}3 \text{ mt}.$$

Zatížení prvého pole vyvozuje v průřezu p záporný moment; jeho největší hodnota prostá plyne z oné polohy zatížení, jež dá $\min M_1^{(1)}$, podle rovnice

$$\min M_p^{(1)} = \min M_1^{(1)} \cdot \frac{\overline{p\,\pi_2}}{\overline{a_1\,\pi_2}} = \min M_1^{(1)} \cdot \frac{l_2 - b_2 - p}{l_2 - b_2} = -74{,}5 \cdot \frac{10{,}44}{12{,}44} = -62{,}5 \text{ mt}.$$

Zatížení třetího pole vyvozuje v průřezu p kladný moment, jenž je největší za polohy soustavy, která dá $\min M_2^{(3)} = \min M_1^{(1)}$; v bodě p je pak moment

$$\max M_p^{(3)} = \min M_2^{(3)} \cdot \frac{\overline{\lambda_1\,p}}{\overline{\lambda_1\,a_2}} = -\min M_1^{(1)} \cdot \frac{a_2 - p}{l_2 - a_2} = 74{,}5 \cdot \frac{1{,}56}{12{,}44} = 9{,}3 \text{ mt}.$$

V průřezu r vzniká zatížením druhého pole

$$\max M_r^{(2)} = \frac{f}{P_0} \Sigma P \eta = \frac{2}{6} [16 \cdot (2{,}82 + 4{,}32 + 6{,}06 + 8{,}08 + 6{,}08) + 13 \cdot (1{,}78 + 0{,}58)] = 156{,}1 \text{ mt}.$$

Zatížení prvého pole dá v průřezu r záporný moment, jenž se vypočte jako $\min M_p^{(1)}$ ze vzorce

$$\min M_r^{(1)} = \min M_1^{(1)} \cdot \frac{l_2 - b_2 - r}{l_2 - b_2} = -74{,}5 \cdot \frac{4{,}44}{12{,}44} = -26{,}6 \text{ mt}.$$

Zatížení třetího pole vyvodí v průřezu r rovněž záporný moment; vypočte se jako $\max M_p^{(3)}$ ze vzorce

$$\min M_r^{(3)} = \min M_3^{(3)} \cdot \frac{\overline{\lambda_1\,r}}{\overline{\lambda_1\,a_2}} = \min M_1^{(1)} \cdot \frac{r - a_2}{l_2 - a_2} = -74{,}5 \cdot \frac{4{,}44}{12{,}44} = -26{,}6 \text{ mt}.$$

Posouvající síla T_m v oddílu vlevo od bodu m, vyvozená zatížením pravé části prvého pole podle obr. 125, má hodnotu

$$\max T_m^{(1)} = \frac{1}{P_0} \Sigma P \eta = \frac{1}{6} 16 \cdot (2{,}56 + 1{,}86 + 1{,}28 + 0{,}68 + 0{,}14) = 17{,}4 \text{ t}.$$

Zatížení levé části prvého pole podle obr. 125 dá

$$\min T_m^{(1)} = \frac{1}{P_0} \Sigma P \eta = -\frac{1}{6} 16 \cdot (2{,}32 + 1{,}56 + 0{,}76) = -12{,}4 \text{ t}.$$

Zatížení druhého pole vyvozuje v oddílu vlevo od bodu m zápornou sílu posouvající

$$T_m = T' = \frac{M_1 - M_0}{l_1} = \frac{M_1}{l_1};$$

její největší hodnota prostá plyne ze zatížení, které dá $\min M_1^{(2)}$, z čehož

$$\min T_m^{(2)} = \frac{\min M_1^{(2)}}{l_1} = -\frac{117{,}1}{12} = -9{,}8 \text{ t}.$$

V třetím poli si mysleme soustavu břemen v poloze, jež vyvodí $\min M_2^{(3)} = \min M_1^{(1)}$; pak vzniká v prvém poli síla posouvající

$$\max T_m^{(3)} = \frac{M_1}{l_1} = \frac{M_2 \lambda_1}{l_1} = \min M_1^{(1)} \frac{\lambda_1}{l_1} = 74{,}5 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{12} = 1{,}8 \text{ t}.$$

V oddílu vlevo od bodu r dá zatížení pravé části druhého pole

$$\max T_r^{(2)} = \frac{1}{P_0} \Sigma P \eta = \frac{1}{6} 16 \cdot (3{,}00 + 2{,}40 + 1{,}80 + 1{,}22 + 0{,}68) = 24{,}3 \text{ t}$$

a zatížení levé části druhého pole

$$\min T_r^{(2)} = \frac{1}{P_0} \Sigma P \eta = -\frac{1}{6} 16 \cdot (2{,}08 + 1{,}46 + 0{,}94 + 0{,}50 + 0{,}12) = -13{,}6 \text{ t}.$$

Zatížením prvého pole, jež vyvodí $\min M_1^{(1)}$, vznikne v bodě a_2 moment $M_2 = M_1 \pi_2$ a v druhém poli síla posouvající

$$\max T_r^{(1)} = \frac{M_2 - M_1}{l_2} = M_1 \frac{\pi_2 - 1}{l_2} = -\frac{M_1}{l_2 - b_2} = -\frac{\min M_1^{(1)}}{l_2 - b_2} = \frac{74{,}5}{12{,}44} = 6{,}0 \text{ t}.$$

Zatížení třetího pole, jež dá $\min M_2^{(3)} = \min M_1^{(1)}$, vyvodí moment $M_1 = M_2 \lambda_1$ a v druhém poli sílu posouvající

$$\min T_r^{(3)} = \frac{M_2 - M_1}{l_2} = M_2 \frac{1 - \lambda_1}{l_2} = \frac{M_2}{l_2 - a_2} = \frac{\min M_1^{(1)}}{l_2 - a_2} = -\frac{74{,}5}{12{,}44} = -6{,}0 \text{ t}.$$

Podporové reakce určíme jako síly posouvající. Zatížením prvého pole vyvodíme $\max A_0$, položíme-li prvé z největších a nejhustějších břemen do bodu a_0, ostatní břemena vpravo (obr. 125, tab. 1); pak jest

$$\max A_0^{(1)} = \frac{1}{P_0} \Sigma P \eta = \frac{1}{6} [16 \cdot (6{,}00 + 5{,}20 + 4{,}36 + 3{,}56 + 2{,}80) + 13 \cdot (0{,}90 + 0{,}34)] = 61{,}1 \text{ t}.$$

Zatížením druhého pole, jež vyvodí $\min M_1^{(2)}$, vznikne reakce

$$\min A_0^{(2)} = \min T_m^{(2)} = -9{,}8 \text{ t}.$$

Zatížením třetího pole, jež dá $\min M_2^{(3)} = \min M_1^{(1)}$, dostaneme

$$\max A_0^{(3)} = \max T_m^{(3)} = 1{,}8 \text{ t}.$$

V podpoře a_1 vyvodíme největší reakci současným zatížením prvého a druhého pole podle obr. 125 (dvěma lokomotivami s komíny proti sobě a částmi dvou tendrů), z něhož plyne

$$\max A_1^{(1)} = \frac{1}{P_0} \Sigma P \eta = \frac{1}{6} [16 \cdot (4{,}20 + 4{,}86 + 5{,}34 + 5{,}76 + 6{,}00 + 5{,}04 + 4{,}46 + 3{,}82 + 3{,}08 + 2{,}36) + 13 \cdot (0{,}64 + 1{,}72 + 0{,}24)] = 125{,}4 \text{ t}.$$

Zatížením třetího pole, jež vyvodí $\min M_2^{(3)} = \min M_1^{(1)}$, vzniká reakce

$$\min A_1^{(3)} = -T_1 + T_1'.$$

T_1 je posouvající síla v prvém poli, mající stanovenou hodnotu $\max T_m^{(3)}$, a T_1' je posouvající síla v druhém poli, rovněž již určená hodnotou $\min T_r^{(3)}$; proto jest

$$\min A_1^{(3)} = -\max T_m^{(3)} + \min T_r^{(3)} = -1{,}8 - 6{,}0 = -7{,}8 \text{ t}.$$

Výsledky řešení jsou sestaveny dále v číselné tabulce, v níž jsou uvedeny momenty v mt, síly v t. Kdybychom pro bezpečnost připustili současné zatížení jednotlivých polí (tedy několik vlaků na mostě současně), tu bychom sčítali hodnoty téhož znaménka u téže veličiny a určili tak celková maxima a minima, vyvozená pohyblivou řadou osamělých břemen, jak je provedeno dále v číselné tabulce. Současné zatížení vlakem v několika polích bylo by prakticky možné jen u mostu o více kolejích, je-li počet polí spojitého nosníku malý. Sčítáme-li i u mostu o jedné koleji účinky zatížení jednotlivých polí, dostaneme hodnoty větší, než skutečně vzniknou, a tedy jistý nadbytek

bezpečnosti, který je zde na místě, jak bylo svrchu uvedeno. Kdybychom však nepřipouštěli současné zatížení několika polí, musili bychom brát za maximum a minimum největší hodnotu kladnou a zápornou, vyvozenou zatížením jediného pole. Pro moment M_1 bylo by ovšem počítati se současným zatížením prvého a druhého pole. Není-li tu možné rozdělení břemen podle způsobu, jakého žádá min M_1 v prvém i druhém poli zvláště, bylo by vyšetřiti min M_1 za současného zatížení obou polí jedinou soustavou břemen. Řešili bychom tu jako za zatížení jediného pole; břemena největší a nejhustější umístili bychom poblíž polohy největšího příčinku v poli, v němž jsou prosté příčinkové pořadnice větší, tedy zde v poli druhém. Chceme-li pro momenty a posouvající síly průřezů mezipodporových ušetřiti stanovení příčinkových čar v polích, jež neobsahují průřezu, musíme ovšem vždy řešiti minimum momentu podporového ze zatížení každého sousedního pole zvláště a z toho vyšetřovati, jak bylo ukázáno, onu část maxima nebo minima momentu i posouvající síly průřezu mezipodporového, jež plyne ze zatížení příslušného pole.

Krajní hodnoty momentů ohybových, sil posouvajících a reakcí podporových.

	Zatížení pole						Celkové krajní hodnoty	
	$a_0\,a_1$		$a_1\,a_2$		$a_2\,a_3$			
	max	min	max	min	max	min	max	min
M_1	–	– 74,5	–	– 117,1	+ 21,3	–	+ 21,3	– 191,6
M_m	+ 136,4	–	–	– 58,6	+ 10,6	–	+ 147,0	– 58,6
M_n	+ 39,7	– 1,3	–	– 97,6	+ 17,7	–	+ 57,4	– 98,9
M_p	–	– 62,5	+ 28,3	– 23,3	+ 9,3	–	+ 37,6	– 85,8
M_r	–	– 26,6	+ 156,1	–	–	– 26,6	+ 156,1	– 53,2
T_m	+ 17,4	– 12,4	–	– 9,8	+ 1,8	–	+ 19,2	– 22,2
T_r	+ 6,0	–	+ 24,3	– 13,6	–	– 6,0	+ 30,3	– 19,6
A_0	+ 61,1	–	–	– 9,8	+ 1,8	–	+ 62,9	– 9,8
A_1	+ 125,4				–	– 7,8	+ 125,4	– 7,8

34. Přímý výpočet krajních hodnot *M*, *T*, *A* i průhybu.[1] ***α) Ohybové momenty.*** Vzorce pro soustavu břemen odvodíme ze vzorců pro jediné osamělé břímě. V průřezu x jediného zatíženého pole je moment

$$M = \mathfrak{M} + M',$$

kde $\mathfrak{M}$ je dáno vzorci (89^a), (89^b) a M' vzorcem (90). Působiště pohyblivého břemene znamenejme z (místo p). Pro soustavu břemen, jež působí v jediném poli $a\,b$, dostaneme v tomto poli hodnoty $\mathfrak{M}$, M' sčítáním účinků jednotlivých břemen:

$$\mathfrak{M} = \frac{x'}{l}\sum_0^x P z + \frac{x}{l}\sum_x^l P z',$$

$$M' = -\frac{1}{c\,l^3}\left[a\,x'\sum_0^l P z z'\,(l - 3\,b + z') + b\,x\sum_0^l P z z'\,(l - 3\,a + z)\right] =$$

$$= -\frac{1}{c\,l^3}\left[l\,(a\,x' + b\,x - 3\,a\,b)\sum_0^l P z z' + a\,x'\sum_0^l P z z'^2 + b\,x\sum_0^l P z^2 z'\right].$$

Znamenejme R (R_1, R_2) výslednici břemen v poli $a\,b$ (v části $a\,x$, $x\,b$) a ζ (ζ_1, ζ_2) její působiště; jako obvykle bude $\overline{a\,\zeta} = \zeta$, $\overline{\zeta\,b} = \zeta'$. Tu jest

$$\sum_0^x P z = R_1\,\zeta_1, \quad \sum_x^l P z' = R_2\,\zeta_2' = R\,\zeta' - R_1\,\zeta_1',$$

[1] Řešení krajních hodnot M, T při pohyblivé soustavě břemen odvodil prvý *J. Šolín* v „Theorii zevnitřních sil trámů přímých“, II, 88 a d., a to ryze měřicky. Početní řešení, jak následuje, viz v autorově „Theorii čar příčinkových“ III, 171 a d.

takže vyjde

$$\mathfrak{M} = R_1 \zeta_1 \frac{x'}{l} + R_2 \zeta_2 \frac{x}{l} = R \zeta' \frac{x}{l} - R_1 (x - \zeta_1) . \tag{132}$$

V odstavci 19 určili jsme již

$$\sum_0^\iota P = R , \qquad \sum_0^l P z = R \zeta , \qquad \sum_0^l P (z - \zeta) = 0 ,$$
$$\sum_0^l P (z - \zeta)^2 = \mathfrak{R} , \qquad \sum_0^l P (z - \zeta)^3 = \mathfrak{S} ,$$
$$\sum_0^l P z^2 = R \zeta^2 + \mathfrak{R} , \qquad \sum_0^l P z^3 = R \zeta^3 + 3 \mathfrak{R} \zeta + \mathfrak{S} .$$

S použitím toho stanovíme

$$\left.\begin{aligned} \sum_0^l P z z' &= l \Sigma P z - \Sigma P z^2 = R \zeta \zeta' - \mathfrak{R} , \\ \sum_0^l P z z'^2 &= l^2 \Sigma P z - 2 l \Sigma P z^2 + \Sigma P z^3 = R \zeta \zeta'^2 - \mathfrak{R} (2 l - 3 \zeta) + \mathfrak{S} , \\ \sum_0^l P z^2 z' &= l \Sigma P z^2 - \Sigma P z^3 = R \zeta^2 \zeta' + \mathfrak{R} (l - 3 \zeta) - \mathfrak{S} . \end{aligned}\right\} \tag{133}$$

Dosadíme-li do vzorce pro M', dostaneme

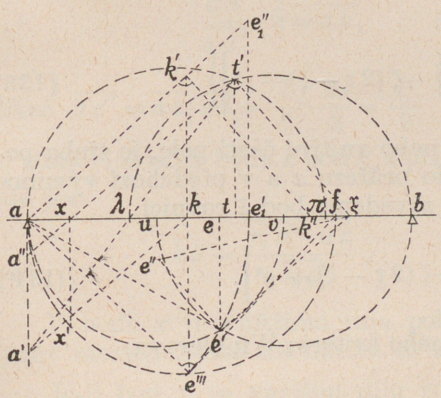
$$M' = - \frac{1}{c l^3} \Big\{ l (a x' + b x - 3 a b) (R \zeta \zeta' - \mathfrak{R}) + a x' [R \zeta \zeta'^2 - \mathfrak{R} (2 l - 3 \zeta) + \mathfrak{S}] + b x [R \zeta^2 \zeta' + \mathfrak{R} (l - 3 \zeta) - \mathfrak{S}] \Big\},$$

což lze upraviti na tvar

$$M' = - \frac{a x' - b x}{c l^3} \left[R \zeta \zeta' \left(3 \frac{a l (x' - b)}{a x' - b x} - l - \zeta \right) + 3 \mathfrak{R} \left(\zeta - \frac{a l (x' - b)}{a x' - b x} \right) + \mathfrak{S} \right].$$

K zjednodušení vzorce zaveďme pomocný bod t, jenž rozděluje pole $\overline{a b}$ v témž poměru jako úsek $\overline{\lambda \pi}$, tedy

$$\frac{t}{a} = \frac{t'}{b} = \frac{l}{a + b} .$$



Obr. 126.

Bod t sestrojíme (obr. 126) jakožto svislý průmět průsečíku t' polokružnic nad průměry $\overline{a \pi}$, $\overline{\lambda b}$. Počtem určíme

$$t = \frac{a l}{a + b} , \qquad t' = \frac{b l}{a + b} ; \tag{134a}$$

z toho plyne

$$t - x = \frac{a l}{a + b} - x = \frac{a x' - b x}{a + b} ,$$
$$a x' - b x = (t - x) (a + b) = (t - x) \frac{a l}{t} .$$

Dále zaveďme pomocný bod ξ podle rovnice

$$\frac{a l (x' - b)}{a x' - b x} = \xi . \tag{134b}$$

Graficky jej určíme, vedeme-li $t'\xi \perp x t'$, neboť pak jest

$$\overline{t\xi} = \frac{\overline{tt'}^2}{\overline{xt}} = \frac{\overline{at}\cdot\overline{t\pi}}{\overline{xt}}, \qquad \frac{\overline{t\pi}}{\overline{\pi b}} = \frac{\overline{\lambda t}}{\overline{a\lambda}} = \frac{\overline{\lambda t}+\overline{t\pi}}{\overline{a\lambda}+\overline{\pi b}} = \frac{c}{a+b},$$

$$\overline{xt} = t - x, \qquad \overline{t\xi} = t\cdot\frac{bc}{ax'-bx} = \frac{abcl}{(a+b)(ax'-bx)}, \qquad \xi = \overline{at}+\overline{t\xi}$$

a dosazením hodnot $\overline{at} = t$ a $\overline{t\xi}$ dostaneme po úpravě vzorec (134^b).

Vzorec pro M' můžeme tedy psáti

$$M' = -\frac{a}{cl^2}\cdot\frac{t-x}{t}[R\zeta\zeta'(3\xi - l - \zeta) + 3\Re(\zeta - \xi) + \Im]. \tag{135}$$

Vyšetříme max a min M; pro ně máme výminku

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{M}}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}z} \gtreqless 0,$$

při čemž znaménko rovnosti platí při spojité proměně derivace, tedy je-li příčinkovou čarou M spojitá křivka, a obě znaménka nerovnosti platí při přetržité proměně derivace, jež nastane, je-li příčinková čára složena ze dvou křivých větví, jež se stýkají ve vrcholu. Uvažujeme-li nekonečně malý pohyb soustavy, při němž se výslednice R, R_1 nemění a pohybují se stejně s břemeny, je $\mathrm{d}z = \mathrm{d}\zeta = \mathrm{d}\zeta_1 = -\mathrm{d}\zeta'$; tu jest

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{M}}{\mathrm{d}z} = -R\frac{x}{l} + R_1,$$

$$\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}z} = -\frac{a}{cl^2}\cdot\frac{t-x}{t}\left\{R[\zeta'(3\xi - l - \zeta) - \zeta(3\xi - l - \zeta) - \zeta\zeta'] + 3\Re\right\} =$$

$$= -\frac{3a}{cl^2}\cdot\frac{t-x}{t}\left\{R\left[l\left(\xi - \frac{l}{3}\right) - \zeta(2\xi - \zeta)\right] + \Re\right\}.$$

Nahradíme podle vzorce (48^c) $\Re = R\varrho^2$, je-li ϱ rámě druhého stupně soustavy břemen k paprsku výslednice. Tu vyjde

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z} = -R\frac{x}{l} + R_1 - \frac{3a}{cl^2}\cdot\frac{t-x}{t}R\left[l\left(\xi - \frac{l}{3}\right) - \zeta(2\xi - \zeta) + \varrho^2\right] \gtreqless 0$$

neboli

$$R_1 \gtreqless R\left\{\frac{x}{l} + \frac{3a}{cl^2}\cdot\frac{t-x}{t}\left[l\left(\xi - \frac{l}{3}\right) - \zeta(2\xi - \zeta) + \varrho^2\right]\right\}. \tag{136}$$

Jde-li o max M v průřezu x, ať již v krajní nebo vnitřní části pole, je třeba položiti jedno z největších a nejhustějších břemen do průřezu x a v předchozí výmince bráti obě znaménka nerovnosti. Pro zjednodušení zavedeme bod ξ rovnicí

$$\xi - x = \frac{3a}{cl}\cdot\frac{t-x}{t}\left[l\left(\xi - \frac{l}{3}\right) - \zeta(2\xi - \zeta) + \varrho^2\right]. \tag{134^c}$$

Kriterium pro max M nabude potom tvaru obdobného kriteriu Winklerovu:

$$R_1 \gtreqless R\frac{\xi}{l}. \tag{136^a}$$

Úsečku ξ vypočteme z rovnice (134^c), můžeme ji však také sestrojiti. K početnímu i grafickému stanovení ξ je třeba zvoliti polohu soustavy, čímž je dáno ϱ a ζ. Pro sestrojení upravíme

$$l\left(\mathfrak{x}-\frac{l}{3}\right)-\zeta\left(2\,\mathfrak{x}-\zeta\right)=\left(\zeta-\mathfrak{x}\right)^2-\left(\mathfrak{x}-\frac{l}{2}\right)^2-\frac{l^2}{12}$$

a dosadíme $c\,t=l\,(t-a)$, což plyne z definice bodu t; tím vyjde

$$\xi-x=\frac{3\,a\,(t-x)}{l^2\,(t-a)}\left[\left(\zeta-\mathfrak{x}\right)^2-\left(\mathfrak{x}-\frac{l}{2}\right)^2-\frac{l^2}{12}+\varrho^2\right].$$

Polokružnice nad průměry $\overline{a\,v}=\overline{u\,b}=\frac{2}{3}\,l$ sekou se v bodě e' a $\overline{e\,e'}^2=\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{6}=\frac{l^2}{12}$, tedy

$$\left(\mathfrak{x}-\frac{l}{2}\right)^2+\frac{l^2}{12}=\overline{e\,\mathfrak{x}}^2+\overline{e\,e'}^2=\overline{\mathfrak{x}\,e'}^2.$$

Je-li dále

$$(\zeta-\mathfrak{x})^2+\varrho^2=\varrho'^2,$$

kde ϱ' znamená rámě druhého stupně soustavy břemen k bodu $\mathfrak{x}$, tu přenesením $\overline{e'\,e''}=\varrho'$ na přímku $e'\,e''\perp\mathfrak{x}\,e'$ dostaneme

$$\overline{\mathfrak{x}\,e''}^2=\left(\zeta-\mathfrak{x}\right)^2-\left(\mathfrak{x}-\frac{l}{2}\right)^2-\frac{l^2}{12}+\varrho^2.$$

Spojnice $t'\,\lambda$, $t'\,x$ určují na svislici bodu a body a', a'', pro něž platí

$$\frac{\overline{a\,a'}}{\overline{t'\,t}}=\frac{\overline{a\,\lambda}}{\overline{\lambda\,t}},\qquad\frac{\overline{t'\,t}}{\overline{a\,a''}}=\frac{\overline{x\,t}}{\overline{a\,x}};$$

znásobením levých a pravých stran obou rovnic plyne

$$\frac{\overline{a\,a'}}{\overline{a\,a''}}=\frac{\overline{a\,\lambda}\cdot\overline{x\,t}}{\overline{\lambda\,t}\cdot\overline{a\,x}}=\frac{a\,(t-x)}{(t-a)\,x},\qquad\frac{3\,a\,(t-x)}{l^2\,(t-a)}=\frac{3\,x}{l^2}\cdot\frac{\overline{a\,a'}}{\overline{a\,a''}}.$$

Veďme $a'\,k\parallel a''\,x$; tu jest

$$\frac{\overline{a\,a'}}{\overline{a\,a''}}\cdot x=\overline{a\,k},\qquad\xi-x=3\,\frac{\overline{a\,k}}{l^2}\cdot\overline{e'\,e''}^2=\overline{a\,k}\cdot\frac{\overline{e'\,e''}^2}{\overline{a\,e'}^2},$$

jelikož $\overline{a\,e'}^2=\overline{a\,e}\cdot\overline{a\,v}=\frac{l}{2}\cdot\frac{2\,l}{3}=\frac{l^2}{3}$. Přenesme $\overline{a\,e'}=\overline{a\,e_1'}$, $\overline{e_1'\,e_1''}=\overline{\mathfrak{x}\,e''}$; na spojnici $a\,e_1''$ stanoví svislice bodu k bod k' a přímka $k'\,k''\perp a\,k'$ určí bod k'' tak, že $\overline{k\,k'}^2=\overline{a\,k}\cdot\overline{k\,k''}$. Dále jest

$$\overline{k\,k'}=\frac{\overline{e_1'\,e_1''}\cdot\overline{a\,k}}{\overline{a\,e_1'}},\qquad\overline{k\,k''}=\frac{\overline{k\,k'}^2}{\overline{a\,k}}=\overline{a\,k}\cdot\frac{\overline{e'\,e''}^2}{\overline{a\,e'}^2}=\xi-x.$$

V bodě x ve vnitřním dílu pole můžeme zatížením téhož pole vyvoditi pouze kladný moment; jeho maximum se určí, jak bylo právě uvedeno.

Je-li bod x ve vnějším dílu pole ($\overline{a\,\lambda}$ nebo $\overline{\pi\,b}$), stanovíme $\max M$ zase podle předchozího výkladu. Pro $\min M$ je třeba zatížiti co nejvíce díl $\overline{\mathfrak{z}\,b}$, je-li $\mathfrak{z}$ obojetná

poloha břemene. V tomto případě je příčinkovou čarou spojitá křivka a tu platí ve výmince (136) znaménko rovnosti; znamenáme-li ζ_x úsečku výslednice R v tomto případě, vychází

$$\frac{R_1}{R} = \frac{x}{l} + \frac{3a}{cl^2} \cdot \frac{t-x}{t} \left[l\left(\xi - \frac{l}{3}\right) - \zeta_x\left(2\xi - \zeta_x\right) + \varrho^2 \right],$$

což lze upraviti

$$\left(\zeta_x - \xi\right)^2 = \xi^2 - l\left(\xi - \frac{l}{3}\right) - \varrho^2 - \frac{1}{3}\left(x - \frac{R_1}{R} l\right) \frac{cl}{a} \cdot \frac{t}{t-x} =$$

$$= \frac{l^2}{3} - \xi\left(l - \xi\right) - \varrho^2 - \frac{1}{3}\left(x - \frac{R_1}{R} l\right) \frac{cl}{a} \cdot \frac{t}{t-x}. \tag{137}$$

Z této rovnice vypočteme polohu ζ_x výslednice, jež vede k min M, a to určíme potom ze vzorců (132) a (135).

Pro grafické sestrojení nahraďme $ct = l(t-a)$ a poslední rovnici přepišme na tvar

$$(\zeta_x - \xi)^2 = \left(\xi - \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{l^2}{12} - \varrho^2 - \frac{1}{3}\left(x - \frac{R_1}{R} l\right) \frac{l^2(t-a)}{a(t-x)}.$$

Sestrojili jsme již

$$\left(\xi - \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{l^2}{12} = \overline{\xi e'}^2;$$

dále jest

$$\frac{l^2(t-a)}{3a(t-x)} = \frac{l^2}{3\overline{ak}} = \frac{\overline{ae'}^2}{\overline{ak}} = \overline{af},$$

určíme-li bod e''' na svislici bodu k úsečkou $\overline{ae'''} = \overline{ae'}$ a vedeme-li $e'''f \perp ae'''$. Tím vychází

$$(\zeta_x - \xi)^2 = \overline{\xi e'}^2 - (\varrho^2 + x^+ \cdot \overline{af}), \qquad \text{kde} \qquad x^+ = x - \frac{R_1}{R} l.$$

Nepadne-li, jak bude pravidlem, vlevo od x žádné břímě, je $R_1 = 0$, $x^+ = x$ a $x \cdot \overline{af} = \overline{xx'}^2$, seče-li polokružnice nad průměrem $\overline{af}$ svislici bodu x v bodě x'. Vychází tedy nakonec

$$(\zeta_x - \xi)^2 = \overline{\xi e'}^2 - (\varrho^2 + \overline{xx'}^2),$$

což by se snadno sestrojilo. Tím je dáno rámě ζ_x výslednice R; za této polohy soustavy vyjde min M.

Jde-li o moment v podpoře a, dostaneme jej z obecného momentu, položíme-li $x = 0$, $x' = l$. Tu vyjde ze vzorce (134^b)

$$\xi = l - b = a + c,$$

tedy bod ξ padne do π. Poněvadž pak je $\mathfrak{M}_a = 0$, redukuje se M_a na momentový doplněk M'_a a podle vzorce (135) dostaneme

$$M_a = -\frac{a}{cl^2} [R\zeta\zeta'(l - 3b + \zeta') + 3\Re(b - \zeta') + \mathfrak{S}]. \tag{138^a}$$

Zatížením pole ab vyvodíme min M_a, má-li soustava polohu danou úsečkou ζ_a výslednice; tato plyne z rovnice (137), do níž dosadíme $x = 0$, $R_1 = 0$ a hořejší hodnotu ξ, takže platí

$$(\zeta_a - a - c)^2 = \frac{l^2}{3} - (l - b)\, b - \varrho^2. \tag{139^a}$$

Pro podporový moment M_b položíme do vzorců pro obecný průřez $x = l$, $x' = 0$; tu vyjde $\xi = a$, dále jest $\frac{l-t}{t} = \frac{b}{a}$ a podle vzorce (135)

$$M_b = -\frac{b}{c\,l^2}[R\,\zeta\,\zeta'\,(l - 3\,a + \zeta) - 3\,\Re\,(\zeta - a) - \Im]. \tag{138^b}$$

Nejúčinnější poloha soustavy plyne z podmínky

$$(\zeta'_b - b - c)^2 = \frac{l^2}{3} - (l - a)\,a - \varrho^2, \tag{139^b}$$

jež plyne z rovnice (139^a) výměnou a s b a ζ_a se ζ'_b.

Graficky plyne

$$\frac{l^2}{3} - (l-b)\,b = \left(\frac{l}{2} - b\right)^2 + \frac{l^2}{12} = \overline{e\pi}^2 + \overline{e\,e'}^2 = \overline{\pi\,e'}^2,\quad (\zeta_a - a - c)^2 = \overline{\pi\,\zeta'_a}^2 = \overline{\pi\,e'}^2 - \varrho^2.$$

Obdobně bude

$$\overline{\lambda\,\zeta'_b}^2 = \overline{\lambda e'}^2 - \varrho^2.$$

β) Posouvající síla v průřezu x je dána vzorcem $T = \mathfrak{T} + T'$; pro soustavu břemen jest

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{N} - R_1 = R\,\frac{\zeta'}{l} - R_1 \tag{140}$$

a doplněk T' plyne ze vzorce (92) sčítáním pro jednotlivá břemena, jejichž působiště při pohyblivé soustavě znamenejme zase z:

$$T' = \frac{1}{c\,l^3}[l\,(2\,a - b)\sum_0^l P z\,z' - (a + b)\sum_0^l P z^2\,z'].$$

Dosazením $\Sigma P z\,z'$ a $\Sigma P z^2\,z'$ ze vzorců (133) dostaneme po úpravě

$$T' = \frac{a+b}{c\,l^3}\left[R\,\zeta\zeta'\left(l\,\frac{2a-b}{a+b} - \zeta\right) + 3\,\Re\left(\zeta - \frac{a\,l}{a+b}\right) + \Im\right].$$

Nahraďme

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{t-a}, \qquad \frac{a\,l}{a+b} = t$$

a položme

$$l\,\frac{2\,a-b}{a+b} = g; \tag{134^d}$$

potom jest

$$g - \frac{l}{2} = l\left(\frac{2\,a-b}{a+b} - \frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{l}{2} - t'\right) = 3\cdot\overline{e\,t},$$

čímž je bod g určen. Tak dostáváme konečně

$$T' = \frac{a+b}{c\,l^3}[R\,\zeta\,\zeta'\,(g - \zeta) + 3\,\Re\,(\zeta - t) + \Im]. \tag{141}$$

Příčinková čára T ukazuje, že pro $\max T$ je třeba zatížiti co nejvíce díl $\overline{x\,b}$ a co nejméně díl $\overline{a\,x}$; břemena největší a nejhustější mají přijíti k bodu x a do tohoto bodu umístíme buď prvé břímě nebo některé následující. Omezíme se na případ, že

v x má býti buď P_1 nebo P_2, a odvodíme kriterium, kdy prvá poloha soustavy dá větší T než poloha druhá. Je-li P_1 v průřezu x a ostatní břemena vpravo, je $R_1 = 0$ a podle vzorců (140), (141) dostaneme posouvající sílu

$$T_1 = R\frac{\zeta'}{l} + \frac{a+b}{c\,l^3}[R\,\zeta\,\zeta'(g-\zeta) + 3\,\mathfrak{R}(\zeta - t) + \mathfrak{S}].$$

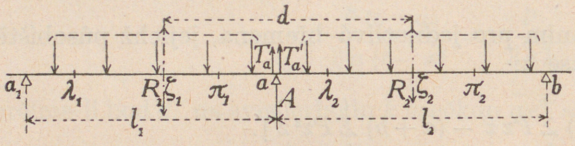
Je-li břímě P_2 v průřezu x, vyjde $R_1 = P_1$; soustava se posune o vzdálenost p_2 břemen P_1, P_2 vlevo. Pro jednoduchost si mysleme, že se soustava tímto posunutím nezmění, tedy že nepřistoupí nové břímě do pole $a\,b$; potom je za této polohy soustavy

$$T_2 = R\frac{\zeta' + p_2}{l} - P_1 + \frac{a+b}{c\,l^3}[R(\zeta - p_2)(\zeta' + p_2)(g - \zeta + p_2) + 3\,\mathfrak{R}(\zeta - p_2 - t) + \mathfrak{S}].$$

Prvá poloha soustavy dá větší hodnotu, je-li $T_1 > T_2$ neboli $T_1 - T_2 > 0$. Dosazením hodnot za T_1, T_2 a úpravou dostaneme kriterium

$$P_1\,l > R\,p_2\left\{1 + \frac{a+b}{c\,l^2}[\zeta\,\zeta'(\zeta - \zeta' - p_2)(g - \zeta + p_2) - 3\,\varrho^2]\right\}. \qquad (142)$$

Je-li tomuto kriteriu vyhověno, je $T_1 > T_2$, tedy $\max T$ vznikne krajním zatížením pravé strany průřezu x. Není-li kriteriu vyhověno, položili bychom do x břímě P_2. Břemena, která v druhé poloze na nosník přistupují, zvětšují T_2; bylo by je tedy uvažovati, kdyby levá strana nerovnice (142) nepatrně převyšovala stranu pravou.



Obr. 127.

γ) Podporové reakce. Reakce v krajních podporách, v nichž nosník končí, rovnají se přímo posouvajícím silám při podporách (v pravé podpoře s opačným znaménkem), čímž jsou jejich krajní hodnoty také dány krajními hodnotami těchto posouvajících sil.

Ve vnitřní podpoře a, ke které přiléhají pole l_1, l_2 (obr. 127), platí pro reakci vzorec

$$A = -T_a + T'_a,$$

kde

$$T_a = \mathfrak{T}_a + \frac{M_a - M_{a_1}}{l_1}, \qquad T'_a = \mathfrak{T}'_a + \frac{M_b - M_a}{l_2}.$$

Je-li R_1 (R_2) výslednice břemen v poli l_1 (l_2) a ζ_1 (ζ_2) její působiště, platí

$$\mathfrak{T}_a = -R_1\frac{\zeta_1}{l_1}, \qquad \mathfrak{T}'_a = R_2\frac{\zeta'_2}{l_2};$$

poznamenejme kratčeji

$$-\mathfrak{T}_a + \mathfrak{T}'_a = R_1\frac{\zeta_1}{l_1} + R_2\frac{\zeta'_2}{l_2} = \mathfrak{A}.$$

Uvažujme nejprve pouze zatížení v poli l_1; podle vzorců (138^a), (138^b) dá toto zatížení

$$M^{(1)}_{a_1} = -\frac{a_1}{c_1\,l_1^2}[R_1\,\zeta_1\,\zeta'_1(l_1 - 3\,b_1 + \zeta'_1) + 3\,\mathfrak{R}_1(b_1 - \zeta'_1) + \mathfrak{S}_1],$$

$$M^{(1)}_{a} = -\frac{b_1}{c_1\,l_1^2}[R_1\,\zeta_1\,\zeta'_1(l_1 - 3\,a_1 + \zeta_1) - 3\,\mathfrak{R}_1(\zeta_1 - a_1) - \mathfrak{S}_1],$$

a podle vzorce (79^b) vyjde

$$M_b^{(1)} = M_a^{(1)} \cdot \pi_2 .$$

Samotné zatížení v poli l_2 dá obdobně

$$M_b^{(2)} = -\frac{b_2}{c_2 l_2^2}[R_2 \zeta_2 \zeta_2' (l_2 - 3a_2 + \zeta_2) - 3\mathfrak{R}_2 (\zeta_2 - a_2) - \mathfrak{S}_2],$$

$$M_a^{(2)} = -\frac{a_2}{c_2 l_2^2}[R_2 \zeta_2 \zeta_2' (l_2 - 3b_2 + \zeta_2') + 3\mathfrak{R}_2 (b_2 - \zeta_2') + \mathfrak{S}_2],$$

$$M_{a_1}^{(2)} = M_a^{(2)} \cdot \lambda_1 .$$

Ze zatížení obou polí vyjde

$$M_{a_1} = M_{a_1}^{(1)} + M_{a_1}^{(2)}, \qquad M_a = M_a^{(1)} + M_a^{(2)}, \qquad M_b = M_b^{(1)} + M_b^{(2)},$$

čímž dostaneme

$$A = \mathfrak{A} + \frac{M_{a_1}^{(1)} + M_{a_1}^{(2)}}{l_1} - \left(M_a^{(1)} + M_a^{(2)}\right)\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) + \frac{M_b^{(1)} + M_b^{(2)}}{l_2} =$$

$$= \mathfrak{A} + \frac{M_{a_1}^{(1)}}{l_1} - M_a^{(1)}\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} - \frac{\pi_2}{l_2}\right) - M_a^{(2)}\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} - \frac{\lambda_1}{l_1}\right) + \frac{M_b^{(2)}}{l_2}.$$

Dosazením za $\mathfrak{A}$, $M_{a_1}^{(1)}$, $M_a^{(1)}$, $M_a^{(2)}$, $M_b^{(2)}$ a uspořádáním podle mocností ζ_1, ζ_2 můžeme uvésti vzorec pro reakci na tvar

$$A = R_1 \frac{\zeta_1}{l_1}\left(1 + \alpha_1 \frac{\zeta_1'}{l_1} + \beta_1 \frac{\zeta_1 \zeta_1'}{l_1^2} - \gamma_1 \frac{\zeta_1'^2}{l_1^2}\right) + R_2 \frac{\zeta_2'}{l_2}\left(1 + \alpha_2 \frac{\zeta_2}{l_2} + \beta_2 \frac{\zeta_2 \zeta_2'}{l_2^2} - \gamma_2 \frac{\zeta_2^2}{l_2^2}\right) -$$

$$- 3\frac{\mathfrak{R}_1}{l_1^2}\left(\beta_1 \frac{\zeta_1}{l_1} - \gamma_1 \frac{\zeta_1'}{l_1} + \gamma_3\right) + 3\frac{\mathfrak{R}_2}{l_2^2}\left(\gamma_2 \frac{\zeta_2}{l_2} - \beta_2 \frac{\zeta_2'}{l_2} + \gamma_4\right) - \frac{\mathfrak{S}_1}{l_1^3}\alpha_3 + \frac{\mathfrak{S}_2}{l_2^3}\beta_3, \qquad (143)$$

kde jest

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1 = \frac{l_2 + (1-\pi_2) l_1}{l_2} \cdot \frac{b_1}{c_1} \cdot \frac{l_1 - 3a_1}{l_1} - \frac{a_1}{c_1}\frac{l_1 - 3b_1}{l_1}, \quad \beta_1 = \frac{l_2 + (1-\pi_2) l_1}{l_2} \cdot \frac{b_1}{c_1}, \quad \gamma_1 = \frac{a_1}{c_1}, \\
&\alpha_2 = \frac{(1-\lambda_1) l_2 + l_1}{l_1} \cdot \frac{a_2}{c_2} \cdot \frac{l_2 - 3b_2}{l_2} - \frac{b_2}{c_2} \cdot \frac{l_2 - 3a_2}{l_2}, \quad \beta_2 = \frac{(1-\lambda_1) l_2 + l_1}{l_1} \cdot \frac{a_2}{c_2}, \quad \gamma_2 = \frac{b_2}{c_2}, \\
&\gamma_3 = -\frac{a_1 b_1}{c_1 l_1} \cdot \frac{(1-\pi_2) l_1}{l_2}, \quad \gamma_4 = \frac{a_2 b_2}{c_2 l_2} \cdot \frac{(1-\lambda_1) l_2}{l_1}, \quad \alpha_3 = \beta_1 + \gamma_1, \quad \beta_3 = \beta_2 + \gamma_2 .
\end{aligned}\right\} \qquad (144)$$

Pro max A, jež plyne ze zatížení obou sousedních polí l_1, l_2, platí výminka $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z} = 0$.

Při nekonečně malém pohybu soustavy, při kterém se nemění rozdělení břemen v poli l_1, l_2 a tedy i výslednice R_1, R_2, pohybují se obě výslednice stejně jako všechna břemena; proto platí

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}\zeta_1 = \mathrm{d}\zeta_2 = -\mathrm{d}\zeta_1' = -\mathrm{d}\zeta_2' .$$

Z rovnice (143) odvodíme

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z} = \frac{R_1}{l_1}\left[1 + \alpha_1 \frac{\zeta_1'}{l_1} + \beta_1 \frac{\zeta_1 \zeta_1'}{l_1^2} - \gamma_1 \frac{\zeta_1'^2}{l_1} + \zeta_1\left(-\frac{\alpha_1}{l_1} + \beta_1 \frac{\zeta_1' - \zeta_1}{l_1^2} + 2\gamma_1 \frac{\zeta_1'}{l_1^2}\right)\right] -$$

$$- \frac{R_2}{l_2}\left[1 + \alpha_2 \frac{\zeta_2}{l_2} + \beta_2 \frac{\zeta_2 \zeta_2'}{l_2^2} - \gamma_2 \frac{\zeta_2^2}{l_2^2} - \zeta_2\left(\frac{\alpha_2}{l_2} + \beta_2 \frac{\zeta_2' - \zeta_2}{l_2^2} - 2\gamma_2 \frac{\zeta_2}{l_2^2}\right)\right] -$$

$$- 3\frac{\mathfrak{R}_1}{l_1^2} \cdot \frac{\beta_1 + \gamma_1}{l_1} + 3\frac{\mathfrak{R}_2}{l_2^2} \cdot \frac{\beta_2 + \gamma_2}{l_2} = 0 .$$

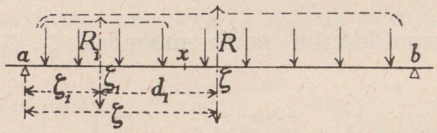
Vyjádříme všechny úsečky jedinou, na př. ζ_1, dosazením

$$\zeta_1' = l_1 - \zeta_1, \quad \zeta_2 = \zeta_1 + d - l_1, \quad \zeta_2' = l_2 - \zeta_2 = l_1 + l_2 - d - \zeta_1$$

a výsledek upravíme podle mocností ζ_1; vyjde

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z} = &-3\frac{\zeta_1^2}{l_1^2}\left[\frac{R_1}{l_1}(\beta_1+\gamma_1) - \frac{R_2}{l_2}\cdot\frac{l_1^2}{l_2^2}(\beta_2+\gamma_2)\right] + 2\frac{\zeta_1}{l_1}\left[\frac{R_1}{l_1}(\beta_1+2\gamma_1-\alpha_1) - \right.\\ &\left. - \frac{R_2}{l_2}\cdot\frac{l_1}{l_2}(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2) + 3\frac{R_2}{l_2}\cdot\frac{l_1}{l_2}\cdot\frac{d-l_1}{l_2}(\beta_2+\gamma_2)\right] + \frac{R_1}{l_1}(1+\alpha_1-\gamma_1) - \\ &- \frac{R_2}{l_2}\left[1-\alpha_2-\beta_2+2\frac{d-l_1}{l_2}(\alpha_2+2\,\beta_2+\gamma_2) - 3\frac{(d-l_1)^2}{l_2^2}(\beta_2+\gamma_2)\right] - \\ &- 3\frac{\Re_1}{l_1^3}(\beta_1+\gamma_1) + 3\frac{\Re_2}{l_2^3}(\beta_2+\gamma_2).\end{aligned}\right\} \quad (145)$$

Jsou-li zatížena pouze pole l_1, l_2, byla by pro max A výminka $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z} = 0$, což stačí pro stanovení úsečky ζ_1 udávající polohu celé soustavy. Je-li zatíženo ještě některé pole sousední, připočteme účinek tohoto zatížení k účinku zatížení v polích l_1, l_2 a stanovíme přesně polohu soustavy, jak je ukázáno v číselném příkladě 26.



Obr. 128.

δ) **Průhyb.** Účinek soustavy břemen (obr. 128) na průhyb průřezu x plyne z příčinkové čáry. Podle rovnice (127^a) určíme účinek všech břemen vlevo od x a sečteme je, podle rovnice (127^b) počítáme účinky pravých břemen, jež rovněž sečteme; dostaneme tak celkem

$$\begin{aligned}EJy = &\frac{1}{6cl^3}\left\{cl^2xx'\left[(l+x')\sum_0^x Pz + (l+x)\sum_x^l Pz'\right] - cl^2\left(x'\sum_0^x Pz^3 + x\sum_x^l Pz'^3\right) - \right.\\ &- anxx'\left(l\sum_0^x Pzz' + l\sum_x^l Pzz' + \sum_0^x Pzz'^2 + \sum_x^l Pzz'^2\right) - bmxx'\left(l\sum_0^x Pzz' + l\sum_x^l Pzz' + \right.\\ &\left.\left. + \sum_0^x Pz^2z' + \sum_x^l Pz^2z'\right)\right\} = \frac{1}{6cl^3}\left\{cl^2\left[xx'(l+x')\sum_0^l Pz - x'\sum_0^l Pz^3 + l\sum_x^l P(z-x)^3\right] - \right.\\ &\left. - anxx'\left(l\sum_0^l Pzz' + \sum_0^l Pzz'^2\right) - bmxx'\left(l\sum_0^l Pzz' + \sum_0^l Pz^2z'\right)\right\}.\end{aligned}$$

Nahradíme-li jednotlivé součty výrazy danými vzorci (49), (133) a vyjádříme-li $\sum_x^l P(z-x)^3$ jako v odstavci 19, dostaneme po úpravě

$$\left.\begin{aligned}EJy = &\frac{R}{6l}\left[l^2 - \zeta'^2 - x^2 - \frac{an(l+\zeta') + bm(l+\zeta)}{cl^2}x'\zeta\right]x\zeta' - \\ &- \frac{\Re}{2l}\left[\zeta' - \frac{(an\zeta' + bm\zeta)x'}{cl^2}\right]x + \frac{\mathfrak{S}}{6l}\left[1 - \frac{(an-bm)x'}{cl^2}\right]x + \\ &+ \frac{1}{6}\left[R_1(x-\zeta_1)^3 + 3\Re_1(x-\zeta_1) - \mathfrak{S}_1\right].\end{aligned}\right\} \quad (146)$$

Chceme-li pohyblivou soustavou břemen, která působí pouze v poli ab, vyvoditi v průřezu x největší průhyb, určíme polohu soustavy podmínkou $\mathrm{d}y/\mathrm{d}z = 0$; derivováním vzorce (146) dostaneme při $\mathrm{d}z = \mathrm{d}\zeta = -\mathrm{d}\zeta' = \mathrm{d}\zeta_1$

$$EJ\frac{dy}{dz}=\frac{R}{6l}\left\{-\left[l^2-\zeta'^2-x^2-\frac{an(l+\zeta')+bm(l+\zeta)}{cl^2}x'\zeta\right]x+\right.$$
$$+\left[2\zeta'-\frac{an(l+\zeta')+bm(l+\zeta)}{cl^2}x'-\frac{bm-an}{cl^2}x'\zeta\right]x\zeta\Big\}-$$
$$-\frac{\Re}{2l}\left[-1-\frac{(bm-an)x'}{cl^2}\right]x+\frac{1}{6}[-3R_1(x-\zeta_1)^2-3\Re_1]=0.$$

Nahradíme-li $\zeta_1=\zeta-d_1$, $\zeta'=l-\zeta$, dostaneme po úpravě podle mocností ζ podmínku pro nejúčinnější polohu soustavy ve tvaru

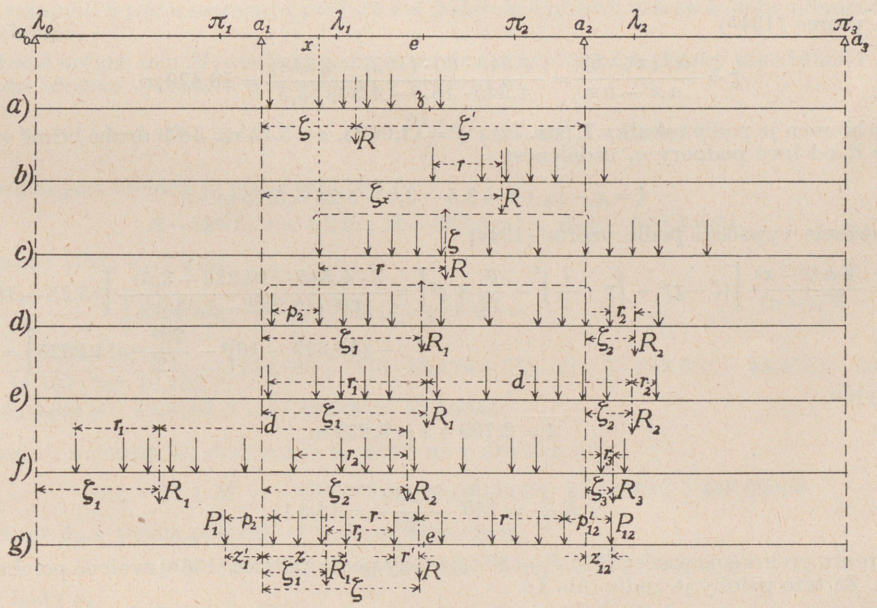
$$\left.\begin{aligned}&\left\{Rx\left[1-\frac{(an-bm)x'}{cl^2}\right]-R_1\right\}\zeta^2-2\left[Rx\left(1-\frac{anx'}{cl^2}\right)-R_1(x+d_1)\right]\zeta+\\&+Rlx\left[1-\frac{(l+x)x'}{3cl}+\frac{a(3b-x')x'}{cl^2}\right]+\frac{\Re}{l}\left[1-\frac{(an-bm)x'}{cl^2}\right]x-\\&-[R_1(x+d_1)^2+\Re_1]=0.\end{aligned}\right\}\quad(147)$$

Úsečka ζ stanovená touto rovnicí určuje polohu soustavy v poli ab, která vyvodí největší průhyb v průřezu x.

Jsou-li zatížena též sousední pole, je třeba vyjádřiti účinek břemen v sousedních polích jako funkci úsečky ζ a připočísti k hodnotě ze zatížení v poli ab; z výrazu takto určeného odvodíme $\max y$, jak je ukázáno v příkladě 26.

Příklad 26. Spojitý nosník stálého průřezu má tři pole délek $l_1=14$, $l_2=20$, $l_3=16$ m a je zatížen vlakem I podle jednotného mostního řádu. Vypočteme $\max M$ a $\min M$ v průřezu x v druhém poli, daném úsečkou $\overline{a_1x}=x=3{,}5$ m, $\max T$ v témž průřezu, $\min M$ v podpoře a_1, $\max A_1$ a největší průhyb středu e druhého pole (obr. 129).

Délkami polí jsou dány poměry $\delta_1=\frac{l_1}{l_2}=\frac{7}{10}$, $\delta_2=\frac{l_2}{l_3}=\frac{5}{4}$; $\delta'_3=\frac{l_3}{l_2}=\frac{4}{5}$, $\delta'_2=\frac{l_2}{l_1}=\frac{10}{7}$.



Obr. 129.

Jako v příkladě 24 určíme poměry základních bodů:

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{2(1+\delta_1)} = -\frac{1}{3{,}4}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2(1+\delta_2)+\delta_2\lambda_1} = -\frac{68}{281} = -\frac{1}{4{,}1323};$$

$$\pi_3 = 0, \qquad \pi_2 = -\frac{1}{2(1+\delta_3')} = -\frac{5}{18} = -\frac{1}{3{,}6}, \qquad \pi_1 = -\frac{1}{2(1+\delta_2')+\delta_2'\pi_2} = -\frac{126}{562} = -\frac{1}{4{,}4603}.$$

Základní body dělí pole na úseky dané vzorci (125):

$$a_1 = 0, \qquad b_1 = -\frac{\pi_1}{1-\pi_1} l_1 = 2{,}564, \qquad c_1 = l_1 - a_1 - b_1 = 11{,}436\,\text{m};$$

$$a_2 = -\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1} l_2 = 4{,}545, \qquad b_2 = -\frac{\pi_2}{1-\pi_2} l_2 = 4{,}348, \qquad c_2 = l_2 - a_2 - b_2 = 11{,}107\,\text{m};$$

$$a_3 = -\frac{\lambda_2}{1-\lambda_2} l_3 = 3{,}118, \qquad b_3 = 0, \qquad c_3 = l_3 - a_3 - b_3 = 12{,}882\,\text{m}.$$

a) Moment v průřezu x v druhém poli. K posouzení nejúčinnější polohy soustavy břemen určíme obojetnou polohu podle rovnice (118^a); k tomu vypočteme

$$a\,l - (a+b)\,x = 4{,}545 \cdot 20 - (4{,}545 + 4{,}348) \cdot 3{,}5 = 59{,}775,$$

$$[a\,(2\,l - 3\,b) - (2\,a - b)\,x]\,l = [4{,}545 \cdot (2 \cdot 20 - 3 \cdot 4{,}348) - (2 \cdot 4{,}545 - 4{,}348) \cdot 3{,}5] \cdot 20 = 2118{,}36,$$

$$c\,l^2\,x = 11{,}107 \cdot 20^2 \cdot 3{,}5 = 15549{,}8.$$

Číselně je nyní rovnice (118^a)

$$59{,}775\,\zeta^2 - 2118{,}36\,\zeta + 15549{,}8 = 0;$$

úsečka příslušná k bodu uvnitř druhého pole vychází z toho

$$\zeta = \frac{2118{,}36 - \sqrt{2118{,}36^2 - 4 \cdot 59{,}775 \cdot 15549{,}8}}{2 \cdot 59{,}775} = 10{,}382\,\text{m}.$$

Pro max M je třeba zatížiti kladně přičiňující část $\overline{a\,\zeta}$; vejde se na ni lokomotiva. Zkusmo položíme druhou nápravu do x (obr. 129a); poslední náprava lokomotivy vyjde přitom do části záporně přičiňující vpravo od ζ, avšak blízko k tomuto bodu, kde má malý účinek. K výpočtu max M určíme podle vzorce (134a)

$$t = \frac{a\,l}{a+b} = \frac{4{,}545 \cdot 20}{4{,}545 + 4{,}348} = 10{,}222\,\text{m}$$

a podle vzorce (134^b)

$$\xi = \frac{a\,l\,(x'-b)}{a\,x' - b\,x} = \frac{4{,}545 \cdot 20 \cdot (16{,}5 - 4{,}348)}{4{,}545 \cdot 16{,}5 - 4{,}348 \cdot 3{,}5} = 18{,}479\,\text{m}.$$

Pro šest břemen je podle tabulky I (str. 72): $\varrho^2 = 11{,}0625$, $r = 5{,}25$ m. Je-li druhé břímě v x, má výslednice R od levé podpory a_1 vzdálenost

$$\zeta = x - p_2 + r = 3{,}5 - 3{,}0 + 5{,}25 = 5{,}75\,\text{m}.$$

Nyní můžeme vypočísti podle vzorce (134c)

$$\xi - x = \frac{3\,a\,(t-x)}{l^2\,(t-a)}\left[(\zeta-\xi)^2 - \left(\xi - \frac{l}{2}\right)^2 - \frac{l^2}{12} + \varrho^2\right] = \frac{3 \cdot 4{,}545 \cdot (10{,}222 - 3{,}5)}{20^2\,(10{,}222 - 4{,}545)} \cdot \left[(5{,}75 - 18{,}479)^2 - \right.$$

$$\left. - (18{,}479 - 10)^2 - \frac{20^2}{12} + 11{,}0625\right] = 2{,}739\,\text{m},$$

takže vyjde

$$\xi = 2{,}739 + x = 6{,}239\,\text{m}.$$

To dá

$$R\,\frac{\xi}{l} = 150 \cdot \frac{6{,}239}{20} = 46{,}8\,\text{t};$$

tuto hodnotu překračuje součet $P_1 + P_2 = 50$ t, je tedy podle kriteria (136^a) zvolená poloha soustavy správná. Za této polohy je podle tab. I:

$$R = 150\,\text{t}, \qquad \mathfrak{R} = 1659{,}375\,\text{m}^2\,\text{t}, \qquad \mathfrak{S} = 0.$$

Dále vypočteme

$$\mathfrak{M} = R\frac{l-\zeta}{l}x - P_1 p_2 = 150 \cdot \frac{20-5{,}75}{20} \cdot 3{,}5 - 25 \cdot 3 = 299{,}062 \text{ mt};$$

podle vzorce (135) jest

$$M' = -\frac{a}{c\,l^2} \cdot \frac{t-x}{t}\left[R\zeta\zeta'(3\mathfrak{x} - l - \zeta) + 3\mathfrak{R}(\zeta - \mathfrak{x}) + \mathfrak{S}\right] =$$

$$= -\frac{4{,}545}{11{,}107 \cdot 20^2} \cdot \frac{10{,}222 - 3{,}5}{10{,}222}\left[150 \cdot 5{,}75 \cdot (20 - 5{,}75) \cdot (3 \cdot 18{,}479 - 20 - 5{,}75) + \right.$$

$$\left. + 3 \cdot 1659{,}375 \cdot (5{,}75 - 18{,}479) + 0\right] = -202{,}831 \text{ mt}.$$

Vyjde tedy

$$\max M = \mathfrak{M} + M' = 299{,}062 - 202{,}831 = 96{,}231 \text{ mt}.$$

Pro $\min M$ zatížíme co nejvíce část $\overline{\mathfrak{z}\,b} = l - \mathfrak{z} = 9{,}618$ m, na kterou se vejde pět náprav lokomotivy; poněvadž by však šestá náprava mohla vyjíti do části kladně přičiňující vlevo od $\mathfrak{z}$, uvažujme všech šest náprav lokomotivy jako zatížení v druhém poli. Tu jest jako při $\max M$ $\varrho^2 = 11{,}0625$; vlevo od průřezu x není břemen, tedy $R_1 = 0$. Pro nejúčinnější polohu soustavy platí vzorec (137)

$$(\zeta_x - \mathfrak{x})^2 = \frac{l^2}{3} - \mathfrak{x}(l - \mathfrak{x}) - \varrho^2 - \frac{1}{3}\left(x - \frac{R_1}{R}l\right)\frac{c\,l}{a}\,\frac{t}{t-x} =$$

$$= \frac{20^2}{3} - 18{,}479\,(20 - 18{,}479) - 11{,}0625 - \frac{1}{3}(3{,}5 - 0)\,\frac{11{,}107 \cdot 20}{4{,}545} \cdot \frac{10{,}222}{10{,}222 - 3{,}5} = 7{,}4528;$$

z toho plyne

$$\zeta_x - \mathfrak{x} = \pm\sqrt{7{,}4528} = \pm 2{,}730 \text{ m}.$$

Uvnitř druhého pole je bod daný úsečkou

$$\zeta_x = \mathfrak{x} - 2{,}730 = 15{,}749 \text{ m}.$$

Krajní břemena mají potom od a_1 vzdálenosti:

$$z_1 = \zeta_x - r = 15{,}749 - 5{,}75 = 10{,}499, \qquad z_6 = z_1 + p_6 = 10{,}499 + 10{,}5 = 20{,}999 \text{ m}.$$

Jelikož vyšlo $z_1 > \mathfrak{z}$, nepadne žádné břímě vlevo od $\mathfrak{z}$; avšak $z_6 > l_2$, tedy šesté břímě vyjde do třetího pole (obr. 129*b*). Přibližně mohli bychom tu počítati tak, že bychom určili nejúčinnější polohu soustavy pouze z pěti břemen v druhém poli působících, jak jsme ji právě určili ze šesti břemen, stanovili k tomu moment v průřezu x a dodatečně přičetli účinek šestého břemene v třetím poli působícího.

Přesně určíme $\min M$, uvažujeme-li při stanovení nejúčinnější polohy také břímě P_6 v třetím poli. Z pěti břemen v druhém poli vychází v průřezu x

$$\mathfrak{M} = R\frac{l-\zeta}{l}x = 125 \cdot \frac{20-\zeta}{20}\,3{,}5 = 437{,}5 - 21{,}875\,\zeta.$$

Pro soustavu pěti břemen je podle tabulky I

$$R = 125 \text{ t}, \quad r = 4{,}2 \text{ m}, \quad \mathfrak{R} = 832{,}5 \text{ m}^2\text{t}, \quad \mathfrak{S} = -850{,}5 \text{ m}^3\text{t}.$$

Podle vzorce (135) vyčíslíme

$$M' = -\frac{a}{c\,l^2} \cdot \frac{t-x}{t}\left[R\,\zeta\,\zeta'(3\mathfrak{x} - l - \zeta) + 3\,\mathfrak{R}(\zeta - \mathfrak{x}) + \mathfrak{S}\right] =$$

$$= -\frac{4{,}545 \cdot 6{,}722}{11{,}107 \cdot 20^2 \cdot 10{,}222}\left[125\,\zeta\,(20 - \zeta)\,(3 \cdot 18{,}479 - 20 - \zeta) + 3 \cdot 832{,}5\,(\zeta - 18{,}479) - 850{,}5\right] =$$

$$= -0{,}08409\,\zeta^3 + 4{,}66156\,\zeta^2 - 61{,}27583\,\zeta + 31{,}59056.$$

Připočteme-li moment $\mathfrak{M}$, dostaneme ze zatížení v druhém poli

$$M_{(2)} = \mathfrak{M} + M' = -0{,}08409\,\zeta^3 + 4{,}66156\,\zeta^2 - 83{,}15083\,\zeta + 469{,}09056.$$

Břímě P_6 v třetím poli má od bodu a_2 vzdálenost

$$p = \zeta - r + p_6 - l_2 = \zeta - 4{,}2 + 10{,}5 - 20 = \zeta - 13{,}7,$$

tedy od bodu a_3

$$p' = l_3 - p = 16 - \zeta + 13{,}7 = 29{,}7 - \zeta.$$

Podle vzorce (88^a) dá P_6 v bodě a_2 moment

$$M_2 = -\frac{Pa_3}{c_3 l_3^2}\, pp'\,(l_3 - 3\,b_3 + p') = -\frac{Pa_3}{c_3 l_3^2}\,(\zeta - 13{,}7)\,(29{,}7 - \zeta)\,(16 - 0 + 29{,}7 - \zeta) =$$

$$= -\frac{25 \cdot 3{,}118}{12{,}882 \cdot 16^2}\,(\zeta^3 - 89{,}1\,\zeta^2 + 2390{,}27\,\zeta - 18594{,}873).$$

V bodě a_1 dostaneme moment

$$M_1 = M_2\,\lambda_1$$

a v průřezu x

$$M_{(3)} = \frac{M_1 x' + M_2 x}{l_2} = \frac{M_2}{l_2}\,(x + \lambda_1 x') = \frac{M_2}{20}\,(3{,}5 - \frac{16{,}5}{4{,}1323}) = -\frac{0{,}493}{20}\,M_2.$$

Dosadíme-li za M_2 hodnotu prve určenou a vyčíslíme, vyjde ze zatížení v třetím poli moment v průřezu x

$$M_{(3)} = 0{,}00058\,\zeta^3 - 0{,}05191\,\zeta^2 + 1{,}39268\,\zeta - 10{,}83429.$$

Všech šest břemen dá tedy v průřezu x moment

$$M = M_{(2)} + M_{(3)} = -0{,}08351\,\zeta^3 + 4{,}60965\,\zeta^2 - 81{,}75815\,\zeta + 458{,}25627.$$

Podmínka minima je

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\zeta} = -3.0{,}083\,51\,\zeta^2 + 2.4{,}609\,65\,\zeta - 81{,}758\,15 = 0$$

čili

$$0{,}25053\,\zeta^2 - 2 \cdot 4{,}60965\,\zeta + 81{,}75815 = 0.$$

Z toho vychází uvnitř pole l_2 úsečka $\zeta = \dfrac{4{,}60965 - \sqrt{4{,}60965^2 - 0{,}25053 \cdot 81{,}75815}}{0{,}25053} = 14{,}906$ m.

Za této úsečky výslednice pěti břemen v druhém poli vyjdou vzdálenosti krajních břemen od bodu a_1:

$$z_1 = \zeta - r = 14{,}906 - 4{,}2 = 10{,}706,\ z_6 = 10{,}706 + 10{,}5 = 21{,}206\ \text{m},$$

je tedy v druhém poli pět břemen a v třetím jedno, jak jsme předpokládali. Za této polohy soustavy vypočteme min M z hořejší rovnice pro M dosazením ζ:

$$\min M = -0{,}08351 \cdot 14{,}906^3 + 4{,}609\,65 \cdot 14{,}906^2 - 81{,}75815 \cdot 14{,}906 + 458{,}25627 = -12{,}799\ \text{mt}.$$

b) Posouvající síla v průřezu x. Pro max T umístíme buď prvé nebo druhé břímě do průřezu x a ostatní břemena vpravo. Je-li v x břímě P_1 (obr. 129c), bude v druhém poli celkem osm břemen; je-li P_2 v x (obr. 129d), vejde se do pole $a_1 a_2$ celkem deset břemen. Přesvědčme se o tom, která z obou poloh dá větší T, podle kriteria (142), jež nepočítá s břemeny přistupujícími do pole v druhé poloze soustavy a nedbá též břemen v třetím poli. Výslednice břemen v druhém poli v prvé poloze obsažených je $R = 8 \cdot 25 = 200$ t, vzdálenost prvých dvou břemen $p_2 = 3$ m; podle tabulky I je dále $r = 7{,}687$ m, $\varrho^2 = 26{,}6856$. Výslednice R má od a_1 (a_2) vzdálenost

$$\zeta = x + r = 3{,}5 + 7{,}687 = 11{,}187,\ \zeta' = l_2 - \zeta = 8{,}813\ \text{m}.$$

Dále vypočteme

$$g = l_2\,\frac{2a_2 - b_2}{a_2 + b_2} = 20 \cdot \frac{2 \cdot 4{,}545 - 4{,}348}{4{,}545 + 4{,}348} = 10{,}665\ \text{m}.$$

Obě strany kriteria (142) jsou:

$$P_1 l_2 = 25 \cdot 20 = 500\ \text{mt},$$

$$R p_2 \left\{1 + \frac{a_2 + b_2}{c_2 l_2^2}\,[\zeta\zeta' + (\zeta - \zeta' - p_2)\,(g - \zeta + p_2) - 3\,\varrho^2]\right\} = 200 \cdot 3 \cdot \left\{1 + \frac{4{,}545 + 4{,}348}{11{,}107 \cdot 20^2}\,[11{,}187 \cdot 8{,}813 +\right.$$

$$\left. + (11{,}187 - 8{,}813 - 3)\,(10{,}665 - 11{,}187 + 3) - 3 \cdot 26{,}6856]\right\} = 600.1{,}034 = 620{,}4\ \text{mt} > P_1 l_2.$$

Břemena, která v druhé poloze do druhého pole přistupují, zvětší T_2; břemena v třetím poli zmenší více T_1 než T_2. Je tedy zjevné, že bude $T_2 > T_1$, takže druhá poloha soustavy dá max T. Za této polohy vypočteme T zvláště z břemen v druhém poli a z břemen v třetím poli, výsledky pak sečteme.

Pro deset břemen v druhém poli je podle tabulky I

$$R_1 = 250\text{ t},\ r_1 = 9{,}9\text{ m},\ \mathfrak{R}_1 = 10260\text{ m}^2\text{ t},\ \mathfrak{S}_1 = 5528{,}25\text{ m}^3\text{ t}.$$

Výslednice R_1 má od bodu a_1 (a_2) vzdálenost

$$\zeta_1 = x - p_2 + r_1 = 3{,}5 - 3 + 9{,}9 = 10{,}4\text{ m},$$
$$\zeta_1' = l_2 - \zeta_1 = 9{,}6\text{ m}.$$

Posouvající síla prostého nosníku $a_1 a_2$ v průřezu x má hodnotu

$$\mathfrak{T} = R_1 \frac{\zeta_1'}{l_2} - P_1 = 250 \cdot \frac{9{,}6}{20} - 25 = 95\text{ t};$$

podle vzorce (141) je doplněk posouvající síly

$$T' = \frac{a_2 + b_2}{c_2 l_2^3}\,[R_1 \zeta_1 \zeta_1' (g - \zeta_1) + 3\,\mathfrak{R}_1 (\zeta_1 - t) + \mathfrak{S}_1] = \frac{4{,}545 + 4{,}348}{11{,}107.20^3}\,[250 \cdot 10{,}4 \cdot 9{,}6\,(10{,}665 - 10{,}4) +$$
$$+ 3 \cdot 10260\,(10{,}4 - 10{,}222) + 5\,528{,}25] = 1{,}764\text{ t}.$$

Břemena v druhém poli dají celkem $T_{(2)} = \mathfrak{T} + T' = 95 + 1{,}764 = 96{,}764$ t.

Pro dvě břemena v třetím poli platí podle tabulky I

$$R_2 = 50\text{ t},\ r_2 = 1{,}5\text{ m},\ \mathfrak{R}_2 = 112{,}5\text{ m}^2\text{ t},\ \mathfrak{S}_2 = 0;$$

dále je

$$\zeta_2 = 1{,}5 + r_2 = 3,\ \zeta_2' = l_3 - \zeta_2 = 13\text{ m}.$$

Podle vzorce (138^a) vychází za tohoto zatížení v bodě a_2 moment

$$M_2 = -\frac{a_3}{c_3 l_3^2}\,[R_2 \zeta_2 \zeta_2' (l_3 - 3 b_3 + \zeta_2') + 3\,\mathfrak{R}_2 (b_3 - \zeta_2') + \mathfrak{S}_2] = -\frac{3{,}118}{12{,}882 \cdot 16^2}\,[50 \cdot 3 \cdot 13\,(16 - 0 + 13) +$$
$$+ 3 \cdot 112{,}5(0 - 13) + 0] = -49{,}319\text{ mt}.$$

V podpoře a_1 je moment $M_1 = M_2 \lambda_1$ a v průřezu x posouvající síla ze samotného zatížení v třetím poli

$$T_{(3)} = \frac{M_2 - M_1}{l_2} = \frac{M_2 (1 - \lambda_1)}{l_2} = -\frac{49{,}319}{16}\left(1 + \frac{1}{3{,}4}\right) = -3{,}989\text{ t}.$$

Celkem vyjde

$$\max T = T_{(2)} + T_{(3)} = 92{,}875\text{ t}.$$

c) Moment v podpoře a_1. Stanovíme $\min M_1$, pokud je vyvozeno zatížením vpravo od podpory a_1. Užijeme soustavy břemen, dané dvěma lokomotivami; z dvanácti břemen vejde se deset do druhého, dvě do třetího pole (obr. 129e). Počítejme přesně pro toto zatížení v obou polích. Deset břemen v druhém poli dá podle tabulky I

$$R_1 = 250\text{ t},\ r_1 = 9{,}9\text{ m},\ \mathfrak{R}_1 = 10260\text{ m}^2\text{ t},\ \mathfrak{S}_1 = 5528{,}25\text{ m}^3\text{ t}.$$

Podle vzorce (138^a) vyjde v podpoře a_1 ze zatížení v druhém poli moment

$$M_1^{(2)} = -\frac{a_2}{c_2 l_2^2}\,[R_1 \zeta_1 \zeta_1' (l_2 - 3 b_2 + \zeta_1') + 3\,\mathfrak{R}_1 (b_2 - \zeta_1') + \mathfrak{S}_1] =$$
$$= -\frac{4{,}545}{11{,}107.20^2}\,[250 \cdot \zeta_1 (20 - \zeta_1)(20 - 3.4{,}348 + 20 - \zeta_1) + 3.10260\,(4{,}348 - 20 + \zeta_1) + 5528{,}25] =$$
$$= -0{,}25575\,\zeta_1^3 + 12{,}00393\,\zeta_1^2 - 169{,}36854\,\zeta_1 + 487{,}19574\,.$$

Ze zatížení třetího pole plyne podle tabulky I

$$R_2 = 50\text{ t},\ r_2 = 1{,}5\text{ m},\ \mathfrak{R}_2 = 112{,}5\text{ m}^2\text{ t},\ \mathfrak{S}_2 = 0;$$

dále jest

$$d = p_{12} - r_1 - r_2 = 24 - 9{,}9 - 1{,}5 = 12{,}6\text{ m},\ \zeta_2 = \zeta_1 + d - l_2 = \zeta_1 + 12{,}6 - 20 = \zeta_1 - 7{,}4\,.$$

Podle vzorce (138^a) je moment v podpoře a_2

$$M_2^{(3)} = -\frac{a_3}{c_3 l_3^2}\,[R_2 \zeta_2 \zeta_2' (l_3 - 3 b_3 + \zeta_2') + 3\,\mathfrak{R}_2 (b_3 - \zeta_2') + \mathfrak{S}_3]$$

a z toho vypočteme moment v podpoře a_1

$$M_1^{(3)} = M_2^{(3} \cdot \lambda_1 = + \frac{3{,}118}{3{,}4.12{,}882.16^2} [50 \cdot (\zeta_1 - 7{,}4)(16 - \zeta_1 + 7{,}4)(16 - 0 + 16 - \zeta_1 + 7{,}4) +$$
$$+ 3 \,.\, 112{,}5\,(0 - 16 + \zeta_1 - 7{,}4) + 0] = 0{,}01390\,\zeta_1^3 - 0{,}97607\,\zeta_1^2 + 19{,}37446\,\zeta_1 - 97{,}05728.$$

Celkem vychází ze zatížení pole druhého i třetího

$$M_1^{(2,3)} = M_1^{(2)} + M_1^{(3)} = -\,0{,}24185\,\zeta_1^3 + 11{,}02786\,\zeta_1^2 - 149{,}99408\,\zeta_1 + 390{,}13846\,.$$

Podmínka minima je

$$\frac{\mathrm{d}\,M_1^{(2,3)}}{\mathrm{d}\,\zeta_1} = -\,3.0{,}24185\,\zeta_1^2 + 2.11{,}02786\,\zeta_1 - 149{,}99408 = 0$$

neboli

$$0{,}72555\,\zeta_1^2 - 2.11{,}02786\,\zeta_1 + 149{,}99408 = 0\,.$$

Z toho vychází uvnitř pole l_2 délka

$$\zeta_2 = \frac{11{,}02786 - \sqrt{11{,}02786^2 - 0{,}72555 \cdot 149{,}99408}}{0{,}72555} = 10{,}271\ \mathrm{m}\,.$$

Potom jsou vzdálenosti břemen P_1 a P_{10} od podpory a_1:

$$z_1 = \zeta_1 - r_1 = 0{,}371\,,\quad z_{10} = z_1 + 19{,}5 = 19{,}871\ \mathrm{m}\,.$$

Zatížení je tedy v poli druhém a třetím rozděleno, jak jsme předpokládali, i vychází podle hořejšího vzorce

$$\min M_1^{(2,\,3)} = -\,0{,}24185 \cdot 10{,}271^3 + 11{,}02786 \cdot 10{,}271^2 - 149{,}99234 \cdot 10{,}271 + 390{,}13846 = -\,249{,}134\ \mathrm{mt}.$$

Hodnotu min M_1 plynoucí ze zatížení druhého (a třetího) pole potřebujeme při výpočtu krajních hodnot momentů i posouvajících sil průřezů v prvém poli, pokud k nim přičiňuje pouze zatížení druhého (a třetího) pole. Skutečné min M_1 by se vyvodilo zatížením obou polí sousedních k podpoře a_1 (podobně jako dále při reakci A_1) a vyšetřovalo by se podobně jako účinek zatížení v druhém (a třetím) poli, právě stanovený: určili bychom polohu soustavy jedinou úsečkou (na př. úsečkou ζ_1 výslednice v prvém poli), vyjádřili M_1 jako funkci této úsečky a z toho počtem vyšetřili min M_1.

d) Podporová reakce A_1 má největší hodnotu, je-li co nejvíce zatíženo pole prvé i druhé; na tato dvě pole se vejdou dvě lokomotivy a nákladní vůz, jehož dvě nápravy v nejúčinnější poloze soustavy vyjdou však do třetího pole (obr. 129*f*). Uvažujme pro přesný výpočet i tato dvě břemena, tedy zatížení v prvém až třetím poli. Výpočet můžeme provésti tak, že určíme pro zatížení každého pole zvláště momenty v podporách a_1, a_2, tyto momenty sečteme a z nich vypočteme reakci A_1 podle známých vztahů. Veškeré úsečky vyjadřujeme úsečkou ζ_1 výslednice R_1 v prvém poli jakožto jedinou proměnnou. Tím dostaneme reakci A_1 jako funkci jediné proměnné ζ_1 a můžeme potom snadno stanoviti její maximum.

Do prvého pole padne šest břemen, pro něž odečteme z tabulky I

$$R_1 = 150\ \mathrm{t}\,,\ r_1 = 5{,}25\ \mathrm{m}\,,\ \mathfrak{R}_1 = 1659{,}375\ \mathrm{m^2\,t}\,,\ \mathfrak{S}_1 = 0\,.$$

V druhém poli je břímě P_7 až P_{14}; znamenáme-li p'_i vzdálenost břemene P_i od P_7, je $p'_i = p_i - p_7$, kde p_i je vzdálenost břemene P_i od P_1, uvedená v tabulce I. Tu jest

$$\sum_7^{14} P_i\,p'_i = \sum_7^{14} P_i\,(p_i - p_7) = \sum_7^{14} P_i\,p_i - p_7 \sum_7^{14} P_i\,,$$
$$\sum_7^{14} P_i\,p_i'^2 = \sum_7^{14} P_i\,(p_i - p_7)^2 = \sum_7^{14} P_i\,p_i^2 - 2p_7 \sum_7^{14} P_i\,p_i + p_7^2 \sum_7^{14} P_i\,,$$
$$\sum_7^{14} P_i\,p_i'^3 = \sum_7^{14} P_i\,(p_i - p_7)^3 = \sum_7^{14} P_i\,p_i^3 - 3p_7 \sum_7^{14} P_i\,p_i^2 + 3p_7^2 \sum_7^{14} P_i\,p_i - p_7^3 \sum_7^{14} P_i\,.$$

Obecně jest $\sum_7^{14} = \sum_1^{14} - \sum_1^{6}$; s použitím hodnot v tabulce I dostaneme z předchozích vzorců:

$$R_2 = \sum_7^{14} P = 340 - 150 = 190\ \mathrm{t}\,,\quad \sum_7^{14} P\,p' = (4710 - 787{,}5) - 13{,}5 \cdot (340 - 150) = 1357{,}5\ \mathrm{m\,t}\,,$$
$$\sum_7^{14} P\,p'^2 = (91012{,}50 - 5793{,}75) - 2 \cdot 13{,}5\,.\,(4710 - 787{,}5) + 13{,}5^2 \cdot (340 - 150) = 13938{,}75\ \mathrm{m^2\,t}\,,$$
$$\sum_7^{14} P\,p'^3 = (1986592{,}5 - 47840{,}625) - 3 \cdot 13{,}5 \cdot (91012{,}50 - 5793{,}75) + 3 \cdot 13{,}5^2 \cdot (4710 - 787{,}5) -$$
$$- 13{,}5^3 \cdot (340 - 150) = 164548{,}125\ \mathrm{m^3\,t}\,.$$

Rámě výslednice R_2 k břemeni P_7 jest

$$r_2 = \frac{\sum_7^{14} P\,p'}{\sum_7^{14} P} = \frac{1357{,}5}{190} = 7{,}145\ \text{m},$$

tedy vzdálenost výslednice R_1 a R_2

$$d = p_7 + r_2 - r_1 = 13{,}5 + 7{,}145 - 5{,}25 = 15{,}395\ \text{m}.$$

Podle vzorců (52) vypočteme

$$\Re_2 = \Sigma P p'^2 - r_2 \Sigma P p' = 13938{,}75 - 7{,}145 \cdot 135{,}75 = 4238{,}412\ \text{m}^2\,\text{t},$$

$$\Im_2 = \Sigma P\,p'^3 - r_2\,(3\,\Sigma P\,p'^2 - 2\,r_2\,\Sigma P\,p') = 164\,548{,}125 - 7{,}145\,(3 \cdot 13938{,}75 - 2 \cdot 7{,}145 \cdot 1357{,}5) =$$
$$= 4374{,}552\ \text{m}^3\,\text{t}.$$

Samotné zatížení prvého pole dá podle vzorce (138^b)

$$M_1^{(1)} = -\frac{b_1}{c_1 l_1^2}\left[R_1 \zeta_1 \zeta_1'\,(l_1 - 3\,a_1 + \zeta_1) - 3\,\Re_1\,(\zeta_1 - a_1) - \Im_1\right] =$$
$$= -\frac{2{,}564}{11{,}436 \cdot 14^2}\,[150\,\zeta_1\,(14 - \zeta_1)\,(14 - 0 + \zeta_1) - 3 \cdot 1659{,}355\,(\zeta_1 - 0) - 0] = +0{,}17158\,\zeta_1^3 - 27{,}93618\,\zeta_1;$$

dále je podle vzorce (79^b)

$$M_2^{(1)} = M_1^{(1)} \cdot \pi_2 = -\frac{M_1^{(1)}}{3{,}6} = -0{,}04766\,\zeta_1^3 + 7{,}76005\,\zeta_1.$$

Úsečky výslednice v druhém poli jsou

$$\zeta_2 = \zeta_1 - r_1 + p_7 + r_2 - l_1 = \zeta_1 - 5{,}25 + 13{,}5 + 7{,}145 - 14 = \zeta_1 + 1{,}395, \qquad \zeta_2' = l_2 - \zeta_2 = 18{,}605 - \zeta_1.$$

Samotné zatížení druhého pole vyvodí podle vzorce (138^a)

$$M_1^{(2)} = -\frac{a_2}{c_2 l_2^2}\,[R_2\,\zeta_2\,\zeta_2'\,(l_2 - 3\,b_2 + \zeta_2') + 3\,\Re_2\,(b_2 - \zeta_2') + \Im_2] =$$
$$= -\frac{4{,}545}{11{,}107 \cdot 20^2}\,[190\,(\zeta_1 + 1{,}395)\,(18{,}605 - \zeta_1)\,(20 - 3 \cdot 4{,}348 + 18{,}605 - \zeta_1) +$$
$$+ 3 \cdot 4238{,}412\,(4{,}348 - 18{,}605 + \zeta_1) + 4374{,}552] = -0{,}19437\,\zeta_1^3 + 8{,}31343\,\zeta_1^2 - 93{,}46767\,\zeta_1 +$$
$$+ 52{,}02872$$

a podle vzorce (138^b)

$$M_2^{(2)} = -\frac{b_2}{c_2 l_2^2}\,[\Re_2\,\zeta_2\,\zeta_2'\,(l_2 - 3\,a_2 + \zeta_2) - 3\,\Re_2\,(\zeta_2 - a_2) - \Im_2] =$$
$$= -\frac{4{,}348}{11{,}107 \cdot 20^2}\,[190\,(\zeta_1 + 1{,}395)\,(18{,}605 - \zeta_1)\,(20 - 3 \cdot 4{,}545 + \zeta_1 + 1{,}395) -$$
$$- 3 \cdot 4238{,}412\,(\zeta_1 + 1{,}395 - 4{,}545) - 4374{,}552] = +0{,}18594\,\zeta_1^3 - 1{,}75719\,\zeta_1^2 - 17{,}21510\,\zeta_1 -$$
$$- 72{,}36714.$$

V třetím poli jsou dvě nápravy nákladního vozu, jež dají

$$R_3 = 2 \cdot 20 = 40\ \text{t}, \qquad r_3 = \frac{1{,}50}{2} = 0{,}75\ \text{m}, \qquad \Re_3 = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}75^2 = 22{,}5\ \text{m}^2\,\text{t}, \quad \Im_3 = 0.$$

Dále je

$$\zeta_3 = \zeta_1 - r_1 + p_{15} + r_3 - (l_1 + l_2) = \zeta_1 - 5{,}25 + 32{,}5 + 0{,}75 - (14 + 20) = \zeta_1 - 6,$$
$$\zeta_3' = l_3 - \zeta_3 = 16 - \zeta_1 + 6 = 22 - \zeta_1.$$

Podle vzorce (138^a) vyjde

$$M_2^{(3)} = -\frac{a_3}{c_3 l_3^2}\,[R_3\,\zeta_3\,\zeta_3'\,(l_3 - 3\,b_3 + \zeta_3') + 3\,\Re_3\,(b_3 - \zeta_3' + \Im_3] =$$
$$= -\frac{3{,}118}{12{,}882 \cdot 16^2}\,[40\,(\zeta_1 - 6)\,(22 - \zeta_1)\,(16 - 0 + 22 - \zeta_1) + 3 \cdot 22{,}5\,(0 - 22 + \zeta_1) + 0] = -0{,}03782\,\zeta_1^3 +$$
$$+ 2{,}49607\,\zeta_1^2 - 45{,}29563\,\zeta_1 + 191{,}10535$$

a podle vzorce (79^a)

$$M_1^{(3)} = M_2^{(3)}\,\lambda_1 = -\frac{M_2^{(3)}}{3{,}4} = +0{,}01112\,\zeta_1^3 - 0{,}73414\,\zeta_1^2 + 13{,}32224\,\zeta_1 - 56{,}20745.$$

Zatížením všech tří polí vyjdou podorové momenty

$$M_1 = M_1^{(1)} + M_1^{(2)} + M_1^{(3)} = -0{,}01167\,\zeta_1^3 + 7{,}57929\,\zeta_1^2 - 108{,}08161\,\zeta_1 - 4{,}17873,$$

$$M_2 = M_2^{(1)} + M_2^{(2)} + M_2^{(3)} = +0{,}10046\,\zeta_1^3 + 0{,}73888\,\zeta_1^2 - 54{,}75068\,\zeta_1 + 118{,}73821.$$

Reakce v podpoře a_1 se vypočte podle vzorce

$$A_1 = -T_1 + T_1', \qquad \text{kde} \qquad T_1 = \mathfrak{T}_1 + \frac{M_1 - M_0}{l_1}, \qquad T_1' = \mathfrak{T}_1' + \frac{M_2 - M_1}{l_2},$$

takže jest

$$A_1 = -\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_1' - M_1\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) + \frac{M_2}{l_2}.$$

Vypočteme-li

$$\mathfrak{T}_1 = -R_1\frac{\zeta_1}{l_1} = -\frac{150}{14}\zeta_1 = -10{,}71429\,\zeta_1, \qquad \mathfrak{T}_1' = R_2\frac{\zeta_2}{l_2} = \frac{190}{20}(18{,}605 - \zeta_1) = 176{,}7475 - 9{,}5\,\zeta_1,$$

dostaneme dosazením těchto hodnot a stanovených hodnot M_1, M_2 jakož i $\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = \frac{1}{14} + \frac{1}{20}$, $\frac{1}{l_2} = \frac{1}{20}$ reakci

$$A_1 = 0{,}01143\,\zeta_1^3 - 0{,}88340\,\zeta_1^2 + 11{,}60095\,\zeta_1 + 183{,}19183.$$

Podmínkou maxima je

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}\zeta_1} = 3 \cdot 0{,}01143\,\zeta_1^2 - 2 \cdot 0{,}88340\,\zeta_1 + 11{,}60095 = 0,$$

což dá pro určení ζ_1 rovnici

$$0{,}03429\,\zeta_1^2 - 2 \cdot 0{,}88340\,\zeta_1 + 11{,}60095 = 0.$$

Z ní vypočteme úsečku ζ_1 uvnitř prvého pole

$$\zeta_1 = \frac{0{,}88340 - \sqrt{0{,}88340^2 - 0{,}03429 \cdot 11{,}60095}}{0{,}03429} = 7{,}724\ \mathrm{m}.$$

Za této polohy výslednice R_1 jsou vzdálenosti břemen od podpory a_0:

$$z_1 = \zeta_1 - r_1 = 2{,}474, \qquad z_6 = z_1 + p_6 = 12{,}974 < l_1, \qquad z_7 = z_6 + 3 = 15{,}974 > l_1,$$
$$z_{14} = z_1 + p_{14} = z_1 + 28{,}5 = 30{,}974 < (l_1 + l_2), \qquad z_{15} = z_{14} + 4 = 34{,}974 > (l_1 + l_2).$$

Břemena jsou tedy rozdělena tak, jak jsme předpokládali. Dosazením ζ_1 do rovnice pro A_1 dostaneme

$$\max A_1 = 0{,}01143 \cdot 7{,}724^3 - 0{,}88340 \cdot 7{,}724^2 + 11{,}60095 \cdot 7{,}724 + 183{,}19183 = 225{,}361\ \mathrm{t}.$$

e) Největší průhyb uprostřed druhého pole žádá co největšího zatížení v tomto poli; vejdou se tam dvě lokomotivy, při čemž krajní břemena P_1 a P_{12} přijdou do prvého a třetího pole (obr. 129*g*). Z břemen v druhém poli dostaneme $EJ\,y_{(2)}$ podle vzorce (146). Pro průřez uprostřed pole je $x = x' = 10$ m, tedy

$$m = l - 3a + x = 20 - 3 \cdot 4{,}545 + 10 = 16{,}365, \qquad n = l - 3b + x' = 20 - 3 \cdot 4{,}348 + 10 = 16{,}956\ \mathrm{m}.$$

Soustava břemen v druhém poli je souměrná, dá tedy výslednici $R = 10 \cdot 25 = 250$ t uprostřed, ve vzdálenosti $r = 9$ m od krajních břemen a ve vzdálenosti $r' = 1{,}5$ m od obou břemen nejbližších k výslednici. Pro souměrnost soustavy je $\mathfrak{S} = 0$ a moment druhého stupně k paprsku výslednice jest

$$\mathfrak{R} = 2 \cdot \sum_1^5 P\,(r' + p)^2 = 2\,r'^2 \sum_1^5 P + 4\,r' \sum_1^5 P\,p + 2 \sum_1^5 P\,p^2,$$

neboť polovice soustavy v druhém poli je totožná se soustavou krajních pěti břemen lokomotivy; dosazením hodnot za součty z tabulky I dostaneme

$$\mathfrak{R} = 2 \cdot 1{,}5^2 \cdot 125 + 4 \cdot 1{,}5 \cdot 525 + 2 \cdot 3037{,}5 = 9787{,}5\ \mathrm{m^2\,t}.$$

Vlevo od x je pět břemen soustavy podle obr. 67*a*) v obráceném pořádku; pro ně je podle tabulky I

$$R_1 = 125\ \mathrm{t}, \qquad r_1 = 4{,}2\ \mathrm{m}, \qquad \mathfrak{R}_1 = 832{,}5\ \mathrm{m^2\,t}, \qquad \mathfrak{S}_1 = +850{,}5\ \mathrm{m^3\,t},$$

kde u $\mathfrak{S}_1$ je třeba znaménko obrátit, poněvadž je pořad břemen obrácený a tím změněna znaménka úseček $(\zeta - z)$ měřených od výslednice. Dosazením číselných hodnot do vzorce (146) dostaneme

$$E J\, y_{(2)} = \frac{250}{6.20}\left[20^2 - \zeta'^2 - 10^2 - \frac{4{,}545 \cdot 16{,}956\,(20+\zeta') - 4{,}348 \cdot 16{,}365\,(20+\zeta)}{11{,}107 \cdot 20^2}\,10\,\zeta\right] 10\,\zeta' -$$

$$- \frac{9787{,}5}{2 \cdot 20}\left[\zeta' - \frac{(4{,}545 \cdot 16{,}956\,\zeta' + 4{,}348 \cdot 16{,}365\,\zeta) \cdot 10}{11{,}107 \cdot 20^2}\right] 10 + 0 + \frac{1}{6}\,[125\,(10-\zeta_1)^3 + 3 \cdot 832{,}5\,(10 -$$

$$- \zeta_1) - 850{,}5].$$

Dosadíme-li sem

$$\zeta' = l_2 - \zeta = 20 - \zeta, \qquad \zeta_1 = \zeta - r' - r_1 = \zeta - 1{,}5 - 4{,}2 = \zeta - 5{,}7$$

a vyčíslíme, vyjde

$$E J\, y_{(2)} = -0{,}4312\,\zeta^3 - 49{,}4275\,\zeta^2 + 1116{,}9129\,\zeta + 4900{,}1885.$$

Břemena P_1 v prvém a P_{12} v třetím poli vyvodí v podporách a_1, a_2 momenty M_1, M_2, z nichž plyne průhyb v bodě x podle vzorce (128), kde píšeme x místo z:

$$E J\, y_{(1,3)} = \frac{x\,x'}{6\,l_2}\,[M_1(l_2 + x') + M_2(l_2 + x)].$$

Samotné břímě P_1 dá podle vzorců (88^b), (79^b), značíme-li z_1, z_1' jeho vzdálenosti od podpor a_0, a_1:

$$M_1^{(1)} = -\frac{P_1 b_1}{c_1 l_1^2}\,z_1 z_1'\,(l_1 - 3\,a_1 + z_1), \qquad M_2^{(1)} = M_1^{(1)}\,\pi_2;$$

břímě P_{12} vyvodí podle (88^a), (79^a), jsou-li z_{12}, z_{12}' jeho vzdálenosti od podpor a_2, a_3:

$$M_2^{(3)} = -\frac{P_{12}\,a_3}{c_3\,l_3^2}\,z_{12}\,z_{12}'\,(l_3 - 3\,b_3 + z_{12}'), \qquad M_1^{(3)} = M_2^{(3)}\,\lambda_1.$$

Břemena P_1, P_{12} dají v podporách a_1, a_2 dohromady momenty

$$M_1 = M_1^{(1)} + M_1^{(3)}, \qquad M_2 = M_2^{(1)} + M_2^{(3)}.$$

Dosazením těchto momentů a délek $a_1 = b_3 = 0$ do hořejšího vzorce vyjde

$$E J\, y_{(1)} = -\frac{x\,x'}{6\,l_2}\left\{\frac{P_1 b_1}{c_1 l_1^2}\,z_1\;z_1'\;(l_1 + z_1\;)\,[l_2 + x' + \pi_2\,(l_2 + x\;)]\right\},$$

$$E J\, y_{(3)} = -\frac{x\,x'}{6\,l_2}\left\{\frac{P_{12}\,a_3}{c_3\,l_3^2}\,z_{12}\,z_{12}'\,(l_3 + z_{12}')\,[l_2 + x\; + \lambda_1\,(l_2 + x')]\right\}.$$

Proměnné úsečky z_1, z_1', z_{12}, z_{12} vyjádříme jedinou proměnnou ζ:

$$z_1' = r + p_2 - \zeta = 12 - \zeta, \qquad z_1 = l_1 - z_1' = 2 + \zeta;$$

$$z_{12} = r + p_{12}' - \zeta' = 12 - \zeta' = \zeta - 8, \qquad z_{12}' = l_3 - z_{12} = 4 + \zeta' = 24 - \zeta.$$

Číselnými hodnotami vychází

$$E J\, y_{(1)} = -\frac{10 \cdot 10}{6 \cdot 20}\left\{\frac{25 \cdot 2{,}564}{11{,}436 \cdot 14^2}\,(2+\zeta)\,(12-\zeta)\,(16+\zeta)\left[20 + 10 - \frac{1}{3{,}6}\,(20+10)\right]\right\} =$$

$$= +0{,}5163\,\zeta^3 + 3{,}0981\,\zeta^2 - 95{,}0071\,\zeta - 198{,}2757,$$

$$E J\, y_{(3)} = -\frac{10 \cdot 10}{6 \cdot 20}\left\{\frac{25 \cdot 3{,}118}{12{,}882 \cdot 16^2}\,(\zeta - 8)\,(24-\zeta)\,(40-\zeta)\left[20 + 10 - \frac{1}{3{,}4}\,(20+10)\right]\right\} =$$

$$= -0{,}4171\,\zeta^3 + 30{,}0329\,\zeta^2 - 614{,}0065\,\zeta + 3203{,}5123.$$

Veškerá břemena dají v bodě x průhyb, pro nějž platí

$$E J\, y = E J\, y_{(1)} + E J\, y_{(2)} + E J\, y_{(3)} = -0{,}3320\,\zeta^3 - 16{,}2965\,\zeta^2 + 407{,}8993\,\zeta + 7905{,}4251.$$

Podmínkou $\max y$ je $\mathrm{d}\,y/\mathrm{d}\,\zeta = 0$, což dá rovnici

$$-3 \cdot 0{,}332\,\zeta^2 - 2 \cdot 16{,}2965\,\zeta + 407{,}8993 = 0 \text{ neboli } 0{,}996\,\zeta^2 + 2 \cdot 16{,}2965\,\zeta - 407{,}8993 = 0.$$

Z ní plyne pro nejúčinnější polohu soustavy úsečka uvnitř druhého pole

$$\zeta = \frac{-16{,}2965 + \sqrt{16{,}2965^2 + 0{,}996 \cdot 407{,}8993}}{0{,}996} = 9{,}662\,\text{m}.$$

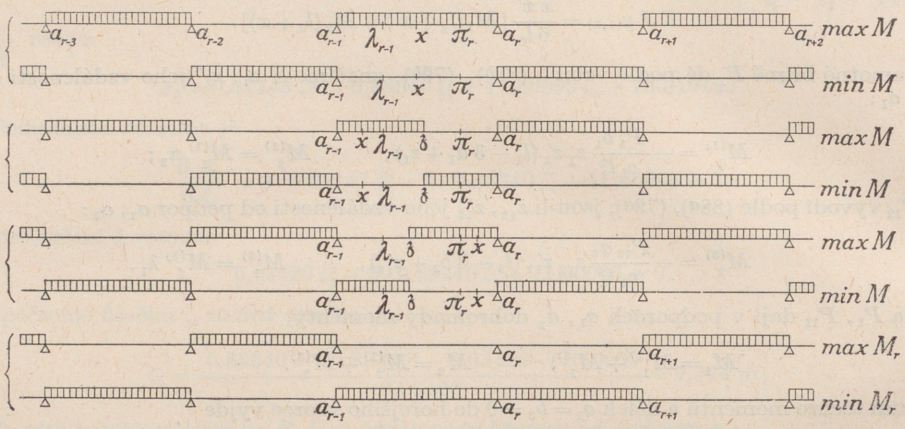
Za této polohy odpovídá rozdělení břemen na nosníku předpokladu, plyne tedy dosazením vypočtené hodnoty ζ do rovnice pro EJy

$$EJ\,y_{max} = -0{,}3320 \cdot 9{,}662^3 - 16{,}2965 \cdot 9{,}662^2 + 407{,}8993 \cdot 9{,}662 + 7905{,}4251 = 10025{,}74.$$

Dosazovali jsme síly v t, délky v m; vyjádříme-li E, J v těchto jednotkách, vyjde y_{max} v m.

c) Pohyblivé zatížení rovnoměrné.

35. Nejúčinnější zatížení. *α) Momenty ohybové.* Pohyblivým zatížením rovnoměrným vyvodíme v libovolném průřezu max M, zatížíme-li plně všechny díly nosníku, které k momentu M přičiňují kladně, a necháme-li nezatíženy díly, jež

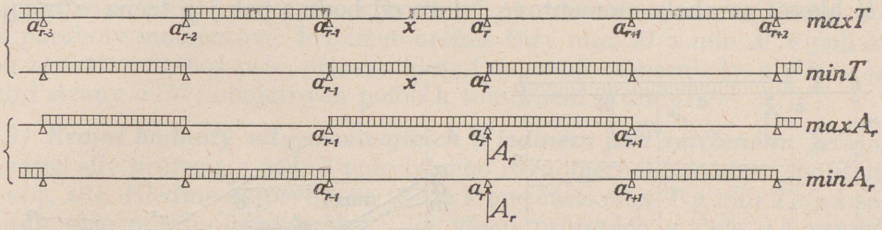


Obr. 130.

přičiňují záporně. Naopak min M vznikne, jsou-li plně zatíženy díly nosníku, jež k momentu M přičiňují záporně, a vůbec nezatíženy díly, jež přičiňují kladně. Z obr. 111, jenž obsahuje schemata znamének pro ohybové momenty různých průřezů, plyne zatížení nosníku pohyblivým zatížením rovnoměrným, jež vyvozuje v příslušných průřezech max M a min M. V obr. 130 jsou vyznačena tato zatížení pro moment průřezu x ve vnitřní části $\lambda_{r-1}\pi_r$ pole $a_{r-1}a_r$, průřezu x v krajní části levé $a_{r-1}\lambda_{r-1}$ a v krajní části pravé $\pi_r a_r$ téhož pole, konečně pro moment v podpoře a_r. Pro průřez ve vnitřní části pole třeba plně zatížiti, aby vzniklo max M, pole, v němž je průřez; ostatní celá pole jsou střídavě zatížena a nezatížena. V témž průřezu vyvodí min M obrácené zatížení. Je-li průřez x v krajní části pole, náleží k němu v poli obojetná poloha ϑ, jež rozděluje pole ve dva díly; abychom vyvodili max M, zatížíme díl $a\vartheta$, v němž je průřez, druhý díl pole nezatížíme, ostatní celá pole pak střídavě zatížíme a nezatížíme. Pro min M v témž průřezu užijeme zatížení obráceného. V libovolné podpoře vnitřní vznikne max M, jsou-li obě sousední pole nezatížena, ostatní celá pole střídavě zatížena a nezatížena; min M žádá zase opačného zatížení.

β) Síly posouvající a reakce podporové. Také pro síly posouvající i pro reakce podporové platí totéž pravidlo pro nejúčinnější zatížení jako pro momenty. Největší kladná hodnota (max T, A) vzniká, zatíží-li se plně díly nosníku, jež přičiňují kladně, a nezatíží-li se vůbec díly nosníku, jež přičiňují záporně; největší zápornou hodnotu (min T, A) vyvodíme, zatížíme-li naopak plně díly přičiňující záporně a neza-

tížíme-li díly přičiňující kladně. Schemata znamének jsou naznačena v obr. 112; podle nich jsou vyznačena v obr. 131 zatížení, jež vyvodí v průřezu x max T a min T, dále v podpoře a_r max A_r a min A_r.



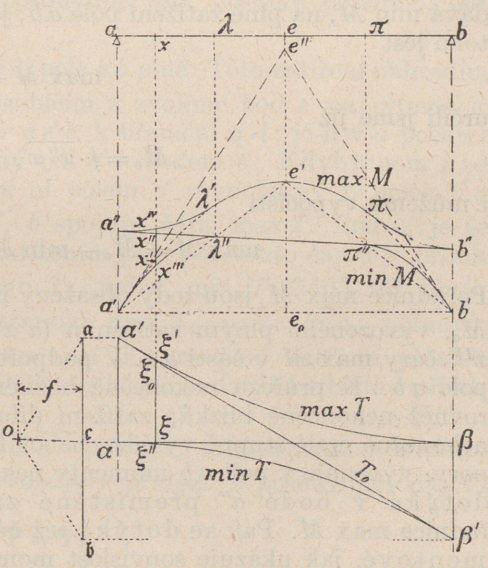
Obr. 131.

V průřezu x vznikne max T, je-li v poli, jež obsahuje průřez, plně zatížena strana pravá a nezatížena strana levá; ostatní celá pole jsou střídavě zatížena a nezatížena. V témž průřezu vyvodí min T obrácené zatížení. V podpoře a_r je max A_r, jsou-li plně zatížena obě sousední pole, ostatní celá pole pak střídavě nezatížena a zatížena; min A_r žádá zase opačného zatížení. Jelikož je min A_r záporné, působí nosník na podporu a_r v tomto případě tahem. Obyčejně je kladná reakce, vyvozená zatížením stálým, větší než prostá hodnota uvedeného min A_r. Není-li tomu tak, tu má-li nosník odpovídati výpočtu, musí býti učiněno opatření, aby nosník i v tomto případě k podpoře přiléhal, neboť by se jinak nosník od podpory a_r vzdálil a vznikl by nosník, jenž má o jednu podporu méně; v takovém případě nosník do podpory zakotvíme.

Pohyblivé zatížení rovnoměrné vyskytuje se v praxi jakožto zatížení lidmi na lávkách pro pěší a mostech silničních. Rozdělení tohoto zatížení podle obr. 130 a 131 je sice málo pravděpodobné, je však možné; třeba je proto vždy uvažovati.

36. Řešení grafické. *α) Krajní hodnoty momentů ohybových v jediném poli zatíženém.* Krajní hodnoty momentů v různých průřezech spojitého nosníku vyvozují se pohyblivým zatížením rovnoměrným podle obr. 130. Vyšetřme graficky nejprve onu část max M a min M ve všech průřezech pole ab, jež jest vyvozena zatížením téhož pole.

Vyjdeme (obr. 132) od prosté paraboly momentové $a'e'''b'$ pro plné zatížení pole ab, jejíž krajní tečny jsou stranami výslednicové čáry $a'e'''b'$ k břemeni $Q = ql = \overline{a\,b}$, jež působí ve středu e pole ab; parabolu $a'e'b'$ nazývejme *hlavní parabolou momentovou*. Předpokládáme-li, že je zatíženo pouze pole ab, a to plně, určíme přemístěnou základní stranu $a''b''$ průsečíky jejími λ'', π'' se svislicemi bodů základních, jež jsou stanoveny spojnicemi $a'e'$, $b'e'$. Průřezy ve vnitřní části $\lambda\pi$ pole ab žádají pro max M plného zatížení pole ab, pro min M pak, aby pole ab zůstalo nezatíženo.

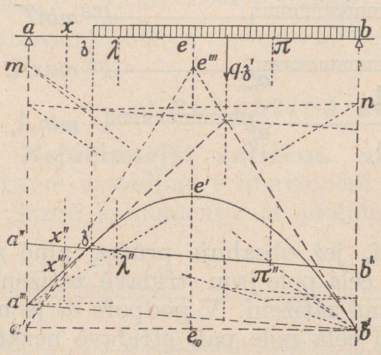


Obr. 132.

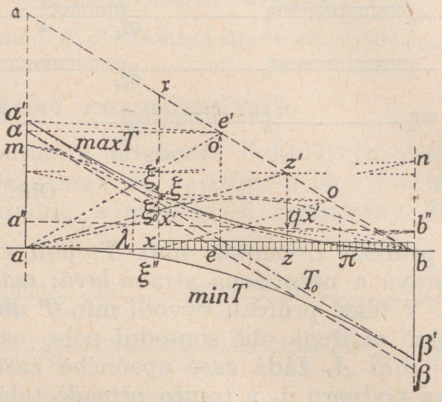
Hledíme-li pouze k zatížení pole ab, je ve vnitřní části pole parabola $\lambda' e' \pi'$, vztažená ke straně $a''b''$, čarou max M; za čáru min M lze v téže části bráti přímku $\lambda''\pi''$,

vztaženou samu k sobě, neboť je ve všech průřezech vnitřní části min $M = 0$, pokud jde o zatížení samotného pole $a\,b$.

K průřezu x v levé krajní části $a\,\lambda$ bylo by určiti (podle obr. 110) obojetnou polohu ζ a pro min M zatížiti díl $\zeta\,b$ (obr. 133). Pro toto zatížení je výslednicovou čarou část $\zeta'\,e'\,b'$ hlavní paraboly momentové, vlevo od bodu ζ pak její tečna $a'''\,\zeta'$, jež seče



Obr. 133.



Obr. 134.

tečnu v bodě b' na paprsku náhradného břemene $q\,\zeta'$, působícího uprostřed zatížené délky. K prostému obrazci momentovému $a'''\,\zeta'\,e'\,b'$ určíme podle obr. 84 přemístěnou základní stranu $a''\,b''$, od níž na svislici průřezu x měříme pořadnici $\overline{x''\,x'''}$ pro moment min $M = f \cdot \overline{x''\,x'''}$; tuto pořadnici $\overline{x''\,x'''}$ bychom pak přenesli do obr. 132 na svislici průřezu x od základní strany $a''\,b''$. Stejně bychom určili další body čáry min M v části $a\,\lambda$.

Je-li sestrojena čára min M, lze určiti snadno v každém průřezu části $a\,\lambda$ max M, jež žádá zatížení dílu $a\,\zeta$. Zatížení, jež vyvozuje max M, doplňuje se zatížením, jež dává min M, na plné zatížení pole $a\,b$, jemuž odpovídá v průřezu x moment M_0. Podle toho jest

$$\max M + \min M = M_0;$$

určili jsme již

$$M_0 = f \cdot \overline{x''\,x'}, \qquad \min M = f \cdot \overline{x''\,x'''}$$

i můžeme vypočísti

$$\max M = M_0 - \min M = f\,(\overline{x''\,x'} - \overline{x''\,x'''}) = f \cdot \overline{x'''\,x'}.$$

Pořadnice max M jsou tedy obsaženy mezi čarou min M $(a'\,x'''\,\lambda'')$ a čarou momentu M_0, vyvozeného plným zatížením $(a'\,x'\,\lambda')$. Přeneseme-li $\overline{x'''\,x'} = \overline{x''\,x^{IV}}$, obdržíme bod x^{IV} čáry max M v části $a\,\lambda$. V podpoře a je max $M = 0$, uvažujeme-li pouze zatížení pole $a\,b$. K průřezu nekonečně blízkému k podpoře a náležela by obojetná poloha rovněž nekonečně blízká; zatížení dílu $a\,\zeta$ bylo by pak nekonečně malé a max M nekonečně malé stupně vyššího, neboť konečné břímě, působící nekonečně blízko podpory, vyvozuje v poli $a\,b$ momenty nekonečně malé. Z toho plyne, že se čára max M dotýká v bodě a'' přemístěné základní strany $a''\,b''$, od níž měříme pořadnice max M. Pak se dotýká též čára min M v bodě a' hlavní paraboly momentové, jak ukazuje souvislost momentů max M, min M a M_0. Obdobně lze dokázati, že se čára min M dotýká v bodě λ'' přemístěné základní strany $a''\,b''$ a čára max M se dotýká v bodě λ' hlavní paraboly momentové.

Čáry max M a min M v části $a\,\lambda$ jsou vyššího řádu; přibližně je lze nahraditi parabolami druhého stupně, jež mají vlastnosti odvozené a z nichž

každá jest úplně stanovena dvěma tečnami s body dotyčnými. Podobně v pravé krajní části πb je čarou max M čára vyššího řádu, již lze přibližně nahraditi obyčejnou parabolou $\pi' b''$, dotýkající se v bodě π' hlavní paraboly momentové, v bodě b'' přemístěné strany základní. Čarou min M je též čára vyššího řádu, lišící se málo od obyčejné paraboly, která se dotýká v bodě π'' přemístěné strany základní a v bodě b' hlavní paraboly momentové. Přibližně určíme čáry max M a min M v poli ab, pokud plynou ze zatížení téhož pole, přímo z hlavní momentové paraboly $a' e' b'$ a přemístěné základní strany $a'' b''$; obojetných poloh k tomu není potřebí.

β) ***Krajní hodnoty sil posouvajících v jediném poli zatíženém.*** Krajní hodnoty posouvající síly průřezu x žádají pohyblivého rovnoměrného zatížení spojitého nosníku podle obr. 131. Hleďme nejprve zase pouze k oné části max T a min T, jež se vyvozuje zatížením pole obsahujícího průřez. Ve všech průřezech x pole ab vzniká max T, zatíží-li se díl xb. Sestrojíme max T pro všechny průřezy v jediném obrazci, v němž přeneseme od osy ab ve svislici bodu a pořadnici $\overline{a\mathfrak{a}} = q \cdot l$ (obr. 134). Přímka $\mathfrak{a}b$ dá ve svislici bodu x pořadnici $\overline{x\mathfrak{x}} = \overline{a\mathfrak{a}} \cdot \frac{\overline{xb}}{\overline{ab}} = q \cdot x'$, kterou berme za složkový obrazec k rovnoměrnému zatížení dílu $\overline{xb} = x'$, pro něž hledáme v průřezu x posouvající sílu max T. K náhradnému břemeni $q \cdot x'$, jež působí ve středu z úsečky $\overline{xb}$, náleží na př. prostý trojúhelník momentový $az'b$, jehož vrchol z' zvolme na přímce $\mathfrak{a}b$; příslušný pól o sestrojme na paprsku $\mathfrak{x}o \equiv \mathfrak{a}b$ paprskem $xo \parallel az'$, pokládajíce x za počátek a $\mathfrak{x}$ za konec složkové čáry. K zatížení rovnoměrnému je výslednicovou čarou parabola, jež se dotýká stran az', $z'b$ v bodech x', b. Pro částečné zatížení rovnoměrné sestrojíme přemístěnou základní stranu $a'' b''$ podle obr. 98. Pólový paprsek $o\xi' \parallel a'' b''$ stanoví základní bod složkové čáry, od něhož k počátku x měříme určovací úsek posouvající síly průřezu x; poněvadž je směr úseku $\overline{x\mathfrak{x}} = q \cdot x'$ ve složkovém obrazci obrácen, vyjde $\max T = \overline{x\xi'}$ ovšem kladné. Vodorovný paprsek $o\xi$ je rovnoběžný se základní stranou ab prostého obrazce momentového a určuje základní bod složkové čáry pro nosník prostý, jenž omezuje úsek posouvající síly nosníku prostého, tedy $\max \mathfrak{T} = \overline{x\xi}$.

V podpoře a vyvodíme max T'_a, zatížíme-li pole ab plně. Toto zatížení nahradíme břemenem $q \cdot l = \overline{a\mathfrak{a}}$ ve středu e pole ab působícím a zvolíme bod e' na přímce $\mathfrak{a}b$ za vrchol prostého trojúhelníku momentového $ae'b$ k břemeni $q \cdot l$; je-li v a počátek, v $\mathfrak{a}$ konec složkové čáry, ztotožní se příslušný pól o' s bodem e'. Kdybychom i zde určili přemístěnou stranu základní a vedli s ní pólem o' rovnoběžný paprsek $o'\alpha'$, obdrželi bychom $\max T'_a = \overline{a\alpha'}$. Body α', ξ', b spojuje čára max T. Bod α' je též na čáře síly posouvající T_0, vyvozené plným zatížením pole ab; touto čarou je přímka $\alpha'\beta'$, jež má v bodě b pořadnici $\overline{b\beta'} = \overline{\mathfrak{a}\alpha'} = \min T_b$, neboť $\min T_b$ žádá též plného zatížení pole ab. Vodorovný paprsek $o'\alpha$ stanoví $\max \mathfrak{T}_a = \overline{a\alpha} = \frac{1}{2}\overline{a\mathfrak{a}}$; pořadnice $\overline{b\beta} = \overline{\mathfrak{a}\alpha} = \overline{\alpha a}$ stanoví pak přímku síly posouvající $\mathfrak{T}_0$ pro plné zatížení prostého nosníku, jež jde středem e. Čarou max $\mathfrak{T}$ je parabola $\alpha\xi b$, jež se dotýká v bodě α přímky $\alpha\beta$ a v bodě b osy ab.

V průřezu x vznikne min T, zatíží-li se díl $\overline{ax}$ pole ab; toto zatížení se doplňuje se zatížením dílu $\overline{xb}$ na plné zatížení, jež vyvozuje v průřezu x posouvající sílu T_0, i platí

$$\max T + \min T = T_0.$$

Určili jsme již

$$\max T = \overline{x\xi'}, \qquad T_0 = \overline{x\xi_0},$$

plyne tedy

$$\min T = T_0 - \max T = \overline{x\xi_0} - \overline{x\xi'} = \overline{\xi'\xi_0}.$$

Určovací úseky min T jsou obsaženy mezi čarou max T a přímkou T_0. Přeneseme-li $\overline{\xi' \xi_0} = \overline{x \xi''}$, dostaneme bod čáry min T, jež jde též bodem a, neboť min $T'_a = 0$, a bodem β'.

V podpoře b je max $T_b = 0$; v průřezu nekonečně blízkém vyvodili bychom max T zatížením pravé strany, jež je nekonečně malé. Konečné břímě, jež by působilo nekonečně blízko u podpory b, vyvodilo by podle příčinkové čáry (obr. 113 n. 115) vlevo od břemene nekonečně malou sílu posouvající; břímě nekonečně malé, jež působí nekonečně blízko u podpory b, vyvodí pak vlevo od břemene sílu posouvající, která je nekonečně malou vyššího stupně. Proto se dotýká čára max T v bodě b osy ab. Ze souvislosti sil max T, min T a T_0 plyne pak, že se čára min T dotýká v bodě β' přímky T_0. Obdobně se dotýká čára max T v bodě α' přímky T_0 a čára min T v bodě a osy ab. Čarami max T a min T jsou čáry vyššího řádu, jež lze přibližně nahraditi obyčejnými parabolami, které se jich dotýkají v bodech α', b, a, β'.

Přibližné čáry max T a min T v poli ab sestrojíme tedy prostě, určíme-li přímku posouvající síly T_0 pro plné zatížení pole ab. Toto zatížení nahradíme výslednicí $q \cdot l = \overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$, jež působí ve středu e pole ab (obr. 132), sestrojíme k němu z pólu o prostou parabolu momentovou $a' e' b'$, určíme podle obr. 99 přemístěnou základní stranu $a'' b''$ a vedeme paprsek $o\mathfrak{c} \parallel a'' b''$. Přeneseme-li pak $\overline{\mathfrak{c}\mathfrak{a}} = \overline{\alpha\alpha'}$, $\overline{\mathfrak{c}\mathfrak{b}} = \overline{\beta\beta'}$, je přímka $\alpha'\beta'$ čarou posouvající síly T_0. Čarou max T je přibližně obyčejná parabola, jež se dotýká v bodě α' přímky T_0 a v bodě β osy $\alpha\beta$; obdobně nahrazujeme čáru min T přibližně parabolou, jež se dotýká v bodě α osy $\alpha\beta$ a v bodě β' přímky T_0.

*γ) **Účinek zatížení všech polí.*** Hledáme-li za pohyblivého zatížení rovnoměrného krajní hodnoty momentů v průřezech pole ab, přistupuje k zatížení v poli ab ještě zatížení v ostatních polích, jež jsou podle obr. 130 buď plně zatížena nebo nezatížena. Zatížením některého levého (pravého) pole vzniká v poli ab pouhý doplňovací lichoběžník momentový, jehož strany se sekou na svislici pravého (levého) bodu základního. Tyto doplňovací lichoběžníky přičteme pak algebraicky k obrazci, jejž dává zatížení v poli ab, jak je naznačeno v příkladě 27.

Také pro krajní hodnoty sil posouvajících sčítáme účinky zatížení různých polí podle obr. 131. Zatížení kteréhokoli jiného pole vyvodí v celém poli ab stálou sílu posouvající, jež se určí graficky v obrazci složkovém podle známé souvislosti s obrazcem momentovým. Účinky zatížení ostatních polí se pak sčítají algebraicky s účinkem zatížení v poli ab, jak jest uvedeno v příkladě 27.[1])

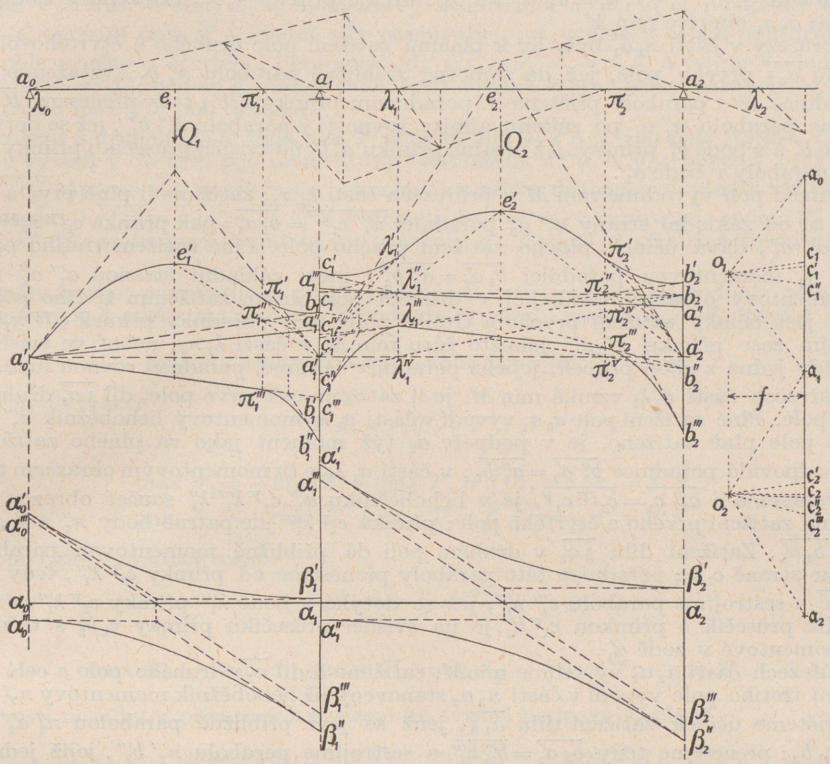
Příklad 27. Vyšetříme graficky krajní hodnoty momentů ohybových a sil posouvajících ve všech průřezech spojitého nosníku o čtyřech polích souměrných, na nějž působí pohyblivé zatížení rovnoměrné.

Stačí řešiti levou polovici nosníku; svislice bodu a_2 (obr. 135) jest osou souměrnosti obrazců pro celý nosník. Určíme nejprve graficky základní body: z bodu $\lambda_0 \equiv a_0$ stanovíme podle obr. 88 body λ_1 a λ_2; bod π_2 je s bodem λ_2 souměrně položen k bodu a_2 a z bodu π_2 určíme bod π_1. Pak sestrojíme momentový obrazec pro plné zatížení pole $\overline{a_0 a_1} = l_1$ i pole $\overline{a_1 a_2} = l_2$. Přeneseme do čáry složkové úseky $Q_1 = q\, l_1 = \overline{\mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_1}$, $Q_2 = q\, l_2 = \overline{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2}$, zvolíme póly o_1, o_2 v téže vzdálenosti f od čáry složkové a narýsujeme čáry výslednicové k břemenům Q_1, Q_2, jež působí ve středech e_1, e_2 obou polí; do těchto čar výslednicových vepíšeme paraboly $a'_0 e'_1 a'_1$, $a'_1 e'_2 a'_2$. Kdyby bylo prvé pole samotné zatíženo, byla by přemístěná základní strana $a'_0 b_1$ dána spojnicí bodu a'_0 s průsečíkem π''_1 svislice bodu π_1 s přímkou $a'_1 e'_1$. Obdobně určují v druhém poli přímky $a'_1 e'_2$, $a'_2 e'_2$ na svislicích bodů λ_1, π_2 body λ''_1, π''_2 přemístěné základní strany $c_1 b_2$, jež platí, je-li pouze druhé pole plně zatíženo.

Pro průřezy v části $a_0 \pi_1$ žádá max M (viz obr. 130) plného zatížení pole prvého a třetího. Plné zatížení druhého pole vyvodí v podpoře a_2 týž moment $f \cdot \overline{b_2 a'_2}$ jako plné zatížení třetího pole, což plyne ze souměrnosti; v podpoře a_1 dá pak plné zatížení třetího pole momentovou pořadnici $\overline{c''_1 a'_1}$, je-li bod c''_1 na přímce $b_2 \lambda_1^{IV}$ a bod λ_1^{IV} na straně $a'_1 a'_2$. Přeneseme-li $\overline{c''_1 a'_1} = \overline{a''_1 b_1}$, určíme

[1]) Srovnej *Jos. Šolín* „Theorie zevnitřních sil trámů přímých", seš. II (Praha 1879), str. 111 a d., kde je řešeno též současné rovnoměrné zatížení stálé i pohyblivé.

základní stranu $a'_0 a''_1$, od níž ke straně $a'_0 b_1$ sahají pořadnice momentů, jež vyvozuje v prvém poli plné zatížení třetího pole; od strany $a'_0 a''_1$ k parabole $a'_0 e'_1 \pi'_1$ měříme pak pořadnice max M v průřezech části $a_0 \pi_1$. Pro průřezy v části $\pi_1 a_1$ bylo by zatížiti pro max M díly $\overline{3\, a_1}$, $\overline{a_2 a_3}$. Zatížení dílu $\overline{3\, a_1}$ vyvodí moment daný přibližně parabolou $\pi'_1 b_1$, jež se dotýká v bodě π'_1 hlavní paraboly a v bodě b_1 strany $a'_0 b_1$. Plné zatížení třetího pole dá kladné momenty, určené pořadnicemi přímky $a'_0 b_1$ vztažené k základní straně $a'_0 a''_1$. Celkem je čarou max M v části $\pi_1 a_1$ parabola $\pi'_1 b_1$ vztažená k základní straně $a'_0 a''_1$.



Obr. 135.

V druhém poli vzniká max M v průřezech části $\lambda_1 \pi_2$, je-li plně zatíženo pole druhé a čtvrté. Zatížení druhého pole dá jakožto čáru max M parabolu $\lambda'_1 e'_2 \pi'_2$, vztaženou k základní straně $c_1 b_2$. Pole čtvrté je souměrné s prvým a jeho plné zatížení vyvodí v podpoře a_2 týž moment jako plné zatížení pole prvého, t. j. kladný moment $f \cdot \overline{b''_2 a'_2}$, je-li bod b''_2 na přímce $b_1 \pi_2^V$. Zatížení čtvrtého pole dá pak v druhém poli pouhý doplňovací lichoběžník, jehož strany se sekou na svislici bodu λ_1; přeneseme-li $\overline{b''_2 a'_2} = \overline{a''_2 b_2}$, určí spojnice bodů a''_2 a λ''_1 základní stranu $a'''_1 a''_2$, od níž k přímce $c_1 b_2$ měříme pořadnice momentů, vyvozených v druhém poli plným zatížením čtvrtého pole. Čarou max M v části $\lambda_1 \pi_2$ je pak parabola $\lambda'_1 e'_2 \pi'_2$, vztažená k základní straně $a'''_1 a''_2$.

V průřezech části $a_1 \lambda_1$ vyvodíme max M, zatížíme-li v druhém poli díl $\overline{a_1 3}$ a celé třetí pole. Zatížení v druhém poli dá za přibližnou čáru max M parabolu $c_1 \lambda'_1$, vztaženou k základní straně $c_1 b_2$; plné zatížení třetího pole vyvodí v druhém poli pouhý doplňovací lichoběžník $b_2 a'_2 a'_1 c''_1$, jejž jsme již určili. Poněvadž jest $\overline{a''_2 b''_2} = \overline{b_2 a'_2}$, určuje spojnice $b''_2 \lambda''_1 \equiv b''_2 c'_1$, vztažená ke straně $a'''_1 a''_2$, rovněž doplňovací lichoběžník, vyvozený v druhém poli plným zatížením třetího pole. V části $a_1 \lambda_1$ sečteme pak pořadnice paraboly $c_1 \lambda'_1$, měřené od strany $c_1 b_2$, a pořadnice přímky $c'_1 \lambda''_1$, měřené od strany $a'''_1 a''_2$, tedy přeneseme od přímky $c'_1 \lambda''_1$ pořadnice paraboly $c_1 \lambda'_1$, vztažené ke straně $c_1 b_2$; dostaneme tím parabolu $c'_1 \lambda'_1$, jež souvisí s parabolou $c_1 \lambda'_1$ po zákonu afinity rovnosti, dotýká se tedy v bodě c'_1 přímky $c'_1 b''_2$, nedotýká se však v bodě λ'_1 hlavní paraboly momentové.

Pro průřezy v části $\pi_2 a_2$ bylo by zatížiti celé prvé pole, v druhém poli díl $\overline{3\, a_2}$ a celé čtvrté pole. Plné zatížení prvého pole vyvodí v podpoře a_2 momentovou pořadnici $\overline{b''_2 a'_2} = \overline{b_2 b'_2}$ a v části $\pi_2 a_2$ momentový trojúhelník $\pi''_2 b_2 b'_2$; účinek zatížení čtvrtého pole jeví se v části $\pi_2 a_2$ lichoběž-

níkem $\pi_2'' b_2 a_2'' \pi_2^{IV}$ a zatížení dílu $\overline{\mathfrak{z} a_2}$ dá přibližně parabolu $\pi_2' b_2$, vztaženou ke straně $\pi_2'' b_2$. Přeneseme-li pořadnice této paraboly od přímky $\pi_2'' b_2''$, obdržíme parabolu $\pi_2' b_2'$, jež se dotýká přímky $\pi_2'' b_2''$ v bodě b_2', avšak nedotýká se hlavní paraboly momentové v bodě π_2'; parabola $\pi_2' b_2'$ je přibližně čarou max M, vztahujeme-li ji ke straně $a_1''' a_2''$.

V průřezech části $a_0 \pi_1$ žádá min M plného zatížení druhého a čtvrtého pole. Plné zatížení druhého pole vyvodí v bodě a_1 momentovou pořadnici $\overline{c_1 a_1'}$, plné zatížení čtvrtého pole dá v podpoře a_2 touž pořadnici $\overline{b_2'' a_2'} = \overline{a_2'' b_2}$ jako plné zatížení prvého pole, v podpoře a_1 pak pořadnici $\overline{a_1''' c_1}$. Přeneseme-li $\overline{a_1''' c_1} + \overline{c_1 a_1'} = \overline{a_1''' a_1'} = \overline{a_1'' b_1'}$, určuje přímka $a_0' b_1'$, vztažená k základní straně $a_0' a_1''$, v části $a_0 \pi_1$ obrazec min M.

Pro průřezy v části $\pi_1 a_1$ bylo by k plnému zatížení pole druhého a čtvrtého přidati ještě zatížení dílu $\overline{a_0 \mathfrak{z}}$ prvého pole, jež dá samotné přibližně parabolu $\pi_1'' a_1'$, vztaženou ke straně $\pi_1'' b_1$; pořadnice této paraboly přičteme k pořadnicím přímky $a_0' b_1'$, tedy přeneseme $\overline{b_1' b_1''} = \overline{b_1 a_1'}$ a přetvoříme parabolu $\pi_1'' a_1'$ po zákonu afinity rovnosti v parabolu $\pi_1''' b_1''$, jež se dotýká v bodě π_1''' strany $a_0' b_1'$ a v bodě b_1'' přímky, jež protíná přímku $a_0' b_1'$ na svislici průsečíku přímky $a_0' b_1$ s tečnou hlavní paraboly v bodě a_1'.

V druhém poli vyvodíme min M v průřezech části $\lambda_1 \pi_2$, zatížíme-li plně prvé a třetí pole. Přeneseme tu od základní strany $a_1''' a_2''$ pořadnici $\overline{a_1''' c_1^{IV}} = \overline{b_1 a_1'}$; pak přímka $c_1^{IV} \pi_2^{IV}$, vztažená ke straně $a_1''' a_2''$, dává účinek plného zatížení prvého pole. Plné zatížení třetího pole vyvodí v podpoře a_2 momentovou pořadnici $\overline{b_2 a_2'} = \overline{a_2'' b_2''}$; mezi základní stranou $a_1''' a_2''$ a přímkou $b_2'' \lambda_1''$ je momentový obrazec, vznikající v druhém poli plným zatížením třetího pole. V části $\lambda_1 \pi_2$ sčítati jest účinky zatížení prvého a třetího pole, tedy pořadnice přímek $c_1^{IV} \pi_2^{IV}$ a $b_2'' \lambda_1''$; obdržíme tím zase přímku $\lambda_1''' \pi_2'''$ jakožto čáru min M v části $\lambda_1 \pi_2$, neboť ve svislicích bodů λ_1, π_2 má vždy jedna z obou přímek, jejichž pořadnice sčítáme, pořadnici rovnou nule.

V průřezech části $a_1 \lambda_1$ vzniká min M, je-li zatíženo celé prvé pole, díl $\overline{\mathfrak{z} a_2}$ druhého pole a celé čtvrté pole. Plné zatížení pole $a_0 a_1$ vyvodí v části $a_1 \lambda_1$ momentový lichoběžník $a_1''' c_1^{IV} \lambda_1''' \lambda_1''$. Je-li čtvrté pole plně zatíženo, je v podpoře a_2 týž moment jako za plného zatížení prvého pole, jemuž odpovídá pořadnice $\overline{b_2'' a_2'} = \overline{a_2'' b_2}$; v části $a_1 \lambda_1$ je tu momentovým obrazcem trojúhelník $c_1 a_1''' \lambda_1''$. Přeneseme-li $\overline{a_1''' c_1} = \overline{c_1^{IV} c_1^V}$, je v lichoběžníku $a_1''' c_1^V \lambda_1''' \lambda_1''$ součet obrazců momentových pro plné zatížení prvého a čtvrtého pole; přímka $c_1^V \lambda_1'''$ jde patrně body π_2'' a b_2', poněvadž jest $\overline{a_2'' b_2} = \overline{b_2 b_2'}$. Zatížení dílu $\overline{\mathfrak{z} a_2}$ v druhém poli dá přibližně momentovou parabolu $a_1' \lambda_1''$, vztaženou ke straně $c_1 b_2$; pořadnice této paraboly přeneseme od přímky $c_1^V \lambda_1'''$, tedy přeneseme $\overline{c_1^V c_1'''} = \overline{c_1 a_1'}$ a sestrojíme parabolu $c_1''' \lambda_1'''$, jež se dotýká v bodě λ_1''' přímky $c_1^V \lambda_1'''$ a v bodě c_1''' přímky, jejíž průsečík s přímkou $c_1^V b_2'$ je na svislici průsečíku přímky $c_1 b_2$ s tečnou hlavní paraboly momentové v bodě a_1'.

V průřezech části $\pi_2 a_2$ vyvodíme min M, zatížíme-li díl $\overline{a_1 \mathfrak{z}}$ druhého pole a celé třetí pole. Plné zatížení třetího pole vyvodí v části $\pi_2 a_2$ stanovený již lichoběžník momentový $\pi_2^{IV} \pi_2''' b_2'' a_2''$. K němu přičteme účinek zatížení dílu $\overline{a_1 \mathfrak{z}}$, jenž se jeví přibližně parabolou $\pi_2'' a_2'$ vztaženou ke straně $c_1 b_2$; přeneseme tedy $\overline{b_2 a_2'} = \overline{b_2'' b_2'''}$ a sestrojíme parabolu $\pi_2''' b_2'''$, jejíž jednou krajní tečnou je přímka $\pi_2''' b_2''$, kterou protíná druhá krajní tečna na svislici průsečíku krajních tečen paraboly $\pi_2'' a_2'$.

Obrazce největších a nejmenších sil posouvajících vyšetříme z obrazců složkových a momentových. V libovolném průřezu vyvodíme max T, zatížíme-li v témž poli pravou stranu průřezu a ostatní celá pole střídavě zatížíme a nezatížíme; min T žádá obráceného zatížení (viz obr. 131). V průřezu x prvého pole vyvodíme max T, zatížíme-li díl $\overline{x a_1}$ a celé třetí pole; v bodě a_0 je podle toho max T_0', je-li plně zatíženo pole první a třetí. Plné zatížení prvého pole vyvodí momentovou parabolu $a_0' e_1' a_1'$, vztaženou k přemístěné základní straně $a_1' b_1$; paprsek $o_1 c_1 \parallel a_0' b_1$ určí pak posouvající síly při podporách $T_0' = \overline{c_1 a_0} = \overline{\alpha_0 \alpha_0'''}$, $T_1 = \overline{c_1 a_1} = \overline{\alpha_1 \beta_1'''}$ a přímka $\alpha_0''' \beta_1'''$ je čarou síly posouvající pro plné zatížení samotného prvého pole. Kdybychom hleděli pouze k zatížení v prvém poli, byla by přibližnou čarou max T (min T) parabola, jež by se dotýkala přímky $\alpha_0''' \beta_1'''$ v bodě $\alpha_0''' (\beta_1''')$ a osy $\alpha_0 \alpha_1$ v bodě $\alpha_1 (\alpha_0)$. K tomu přistupuje ještě účinek plného zatížení třetího pole, jenž se jeví v podpoře a_1 momentovou pořadnicí $\overline{c_1' a_1'} = \overline{a_1'' b_1}$ a v prvém poli momentovým trojúhelníkem $a_0' a_1'' b_1$; paprsek $o_1 c_1' \parallel a_0' a_1''$ určí pak úsek $\overline{c_1' c_1}$ stálé síly posouvající, kterou vyvozuje v celém prvém poli plné zatížení třetího pole. O úsek $\overline{c_1' c_1} = \overline{\alpha_0''' \alpha_0'} = \overline{\alpha_1 \beta_1'}$ posuneme svisle přímku $\alpha_0'' \beta_1'''$ a osu $\alpha_0 \alpha_1$, čímž sestrojíme tečny paraboly $\alpha_0' \beta_1'$, jež je přibližnou čarou max T v prvém poli.

V průřezu x prvého pole vznikne min T zatížením dílu $\overline{a_0 x}$ a plným zatížením pole druhého a čtvrtého, jež se již vyskytlo, když šlo o min M v průřezech části $a_0 \pi_1$. Plné zatížení druhého a čtvrtého pole vyvozuje v podpoře a_1 momentovou pořadnici $\overline{a_1''' a_1'} = \overline{a_1''' b_1'}$ a v prvém poli momentový trojúhelník $a_0' a_1'' b_1'$; paprsek $o_1 c_1'' \parallel a_0' b_1'$ určí úsek $\overline{c_1' c_1''}$ stálé záporné síly posouvající, jež vzniká ve všech průřezech prvého pole plným zatížením pole druhého a čtvrtého. Přeneseme-li $\overline{c_1' c_1''} = \overline{\alpha_0 \alpha_0''} = \overline{\beta_1'' \beta_1'}$ a vedeme-li bodem α_0'' vodorovnici, bodem β_1'' rovnoběžku s přímkou $\alpha_0''' \beta_1'''$, dostaneme tečny paraboly, jež je v prvém poli přibližnou čarou min T.

V druhém poli žádá max T v libovolném průřezu x zatížení dílu $\overline{x\,a_2}$ a plného zatížení pole prvého a čtvrtého. Hledíce nejprve k zatížení v druhém poli určíme přímku síly posouvající pro plné zatížení druhého pole. Paprskem $o_2 c_2 \parallel c_1 b_2$ obdržíme úsek $\overline{c_2 a_1} = \overline{\alpha_1 \alpha_1'''}$ posouvající síly v bodě a_1 a úsek $\overline{c_2 a_2} = \overline{\alpha_2 \beta_2'''}$ posouvající síly v bodě a_2; přímka $\alpha_1''' \beta_2'''$ je čarou síly posouvající pro plné zatížení druhého pole samotného. Přibližnou čarou max T (min T) v druhém poli, pokud jde o zatížení téhož pole samotného, byla by parabola, jež by se dotýkala přímky $\alpha_1''' \beta_2'''$ v bodě α_1''' (β_2''') a osy $\alpha_1 \alpha_2$ v bodě α_2 (α_1). Plné zatížení pole prvého a čtvrtého vyvodí, jak jsme již vyšetřili, v části $a_1 \lambda_1$ momentový lichoběžník $a_1''' c_1^V \lambda_1''' \lambda_1''$; paprsky $o_2 c_2' \parallel c_1^V \lambda_1'''$ a $o_2 c_2'' \parallel a_1''' a_2''$ omezují úsek $\overline{c_2'' c_2'}$ kladné síly posouvající, jež vzniká v celém poli druhém plným zatížením pole prvého a čtvrtého. Přenesme tedy $\overline{c_2'' c_2'} = \overline{\alpha_1''' \alpha_1'} = \overline{\alpha_2 \beta_2'}$ a veďme bodem α_1' rovnoběžku s přímkou $\alpha_1''' \beta_2'''$, bodem β_2' vodorovnici, čímž určíme krajní tečny paraboly $\alpha_1' \beta_2'$, která je přibližnou čarou max T v poli druhém.

V průřezu x druhého pole žádá min T zatížení dílu $\overline{a_1 x}$ a celého pole třetího. Plné zatížení třetího pole vyvodí v druhém poli momentový lichoběžník $a_1''' a_2'' b_2'' c_1'$; paprsek $o_2 c_2''' \parallel c_1' b_2''$ určí pak úsek $\overline{c_2'' c_2'''}$ záporné síly posouvající, jež vzniká v celém druhém poli plným zatížením třetího pole. Přeneseme-li $\overline{c_2'' c_2'''} = \overline{\alpha_1 \alpha_1''} = \overline{\beta_2' \beta_2''}$ a vedeme-li bodem α_1'' vodorovnici, bodem β_2'' rovnoběžku s přímkou $\alpha_1''' \beta_2'''$, sestrojíme krajní tečny paraboly $\alpha_1'' \beta_2''$, jež je přibližně čarou min T v poli druhém.

Z krajních hodnot posouvajících sil při podporách určíme též krajní hodnoty reakcí podporových (kladná max A a záporná min A). V podpoře a_0 působí reakce $A_0 = T_0'$, pročež jest

$$\max A_0 = \max T_0' = \overline{\alpha_0 \alpha_0'}, \quad \min A_0 = \min T_0' = \overline{\alpha_0 \alpha_0''}.$$

V podpoře a_1 je reakce

$$A_1 = -T_1 + T_1';$$

pak vyjde

$$\max A_1 = -\min T_1 + \max T_1' = \overline{\beta_1'' \alpha_1} + \overline{\alpha_1 \alpha_1'} = \overline{\beta_1' \alpha_1},$$
$$\min A_1 = -\max T_1 + \min T_1' = \overline{\beta_1' \alpha_1} + \overline{\alpha_1 \alpha_1''} = \overline{\beta_1' \alpha_1''}.$$

Ve střední podpoře a_2 vzniká reakce

$$A_2 = -T_2 + T_2'.$$

platí tedy

$$\max A_2 = -\min T_2 + \max T_2', \quad \min A_2 = -\max T_2 + \min T_2'.$$

Ze souměrnosti nosníku a příslušných zatížení ke svislici podpory a_2 plyne

$$\max T_2' = -\min T_2, \quad \min T_2' = -\max T_2,$$

pročež jest

$$\max A_2 = -2 \cdot \min T_2 = 2 \cdot \beta_2'' \alpha_2, \quad \min A_2 = -2 \cdot \max T_2 = 2 \cdot \overline{\beta_2'' \alpha_2}.$$

35. Řešení počtářské. Počtem lze určiti krajní hodnoty momentů ohybových, sil posouvajících i reakcí podporových z příčinkových obrazců. Maximum jakékoli statické veličiny S vznikne, jsou-li plně zatíženy všechny díly nosníku, jež k veličině S přičiňují kladně, a nezatíženy díly přičiňující záporně. Podle vzorce (7) je pak

$$\max S = q\, \mathfrak{U}_+,$$

znamená-li $\mathfrak{U}_+$ obsah všech kladných částí příčinkového obrazce; zde předpokládáme, že se z příčinkové pořadnice η stanoví účinek břemene P podle vzorce $S = P\eta$, tedy že η znamená hodnotu hledané veličiny S pro břímě $P = 1$. Obdobně vyvozuje minimum veličiny S plné zatížení všech dílů nosníku, jež přičiňují k veličině S záporně, jsou-li současně díly kladně přičiňující nezatíženy. Pak jest

$$\min S = q\, \mathfrak{U}_-,$$

znamená-li $\mathfrak{U}_-$ obsah všech záporných částí příčinkového obrazce. Určujeme-li pro moment ohybový a sílu posouvající příčinkové čáry z břemene P_0 pólovou vzdáleností f, platí pro libovolné břímě P vzorec (119^a) a (119^b); pak přistoupí ve vzorcích posledních na pravé straně stálý činitel f/P_0 u momentů a $1/P_0$ u posouvajících sil.

Vyjde tedy

$$\max M = \frac{f}{P_0} q\, \mathfrak{U}_+, \qquad \min M = \frac{f}{P_0} q\, \mathfrak{U}_-, \tag{148a}$$

$$\max T = \frac{1}{P_0} q\, \mathfrak{U}_+, \qquad \min T = \frac{1}{P_0} q\, \mathfrak{U}_-, \tag{148b}$$

znamená-li opět $\mathfrak{U}_+$ obsah všech kladných a $\mathfrak{U}_-$ obsah všech záporných částí příčinkového obrazce.

Jinak vypočteme krajní hodnoty momentů ohybových a sil posouvajících, vyvozené pohyblivým zatížením rovnoměrným, ze vzorců pro rovnoměrné zatížení. Stanovme takto ony části krajních hodnot momentů ohybových a sil posouvajících průřezů v poli $a\,b$, jež jsou vyvozeny zatížením téhož pole $a\,b$. Účinek zatížení ostatních polí, jež jsou střídavě plně zatížena a nezatížena podle obr. 130 a 131, jeví se v průřezu x pole $a\,b$ pouhým doplňkem momentovým M' a doplňkem síly posouvající T', jež se určí podle vzorců (58), (59) z podporových momentů M_a, M_b; tyto momenty určíme pak podle vzorce (82a), je-li zatíženo některé pole pravé, a podle vzorce (82b), je-li zatíženo některé pole levé

V průřezu x ve vnitřní části $\lambda\,\pi$ pole $a\,b$ vznikne zatížením v témž poli $\max M$, je-li zatíženo celé pole $a\,b$. Pak určíme, dosazujíce za doplněk M' ze vzorce (97),

$$\max M = \mathfrak{M} + M' = \frac{1}{2} q\, x\, x' - \frac{q\, l}{4} \frac{a\,(l-2\,b) + (b-a)\,x}{c}. \tag{149}$$

V průřezu x, jenž je v levé krajní části $a\,\lambda$, dá $\min M$ zatížení dílu $\overline{\zeta\, b}$, je-li ζ poloha obojetná, daná vzorcem (118a). Jelikož je tu průřez x v nezatížené části $a\,\zeta$, určí se $\mathfrak{M}$, jak bylo ukázáno v odst. 26 ε); doplněk M' vypočteme z podporových momentů M_a, M_b, pro něž platí vzorce (95). Do všech vzorců klademe ovšem ζ místo z a dostaneme

$$M' = -\frac{M_a\, x' + M_b\, x}{l} = -\frac{q\, \zeta'^2}{4\, c\, l^3} \left\{ [a\, x'\,(l-2\,b) + b\, x\,(l-2\,a)]\,(l+2\,\zeta) + \zeta^2\,(b\, x - a\, x') \right\}.$$

Ze vzorce (118a) pro obojetnou polohu plyne

$$-\zeta^2 [a\, l - (a+b)\, x] = \zeta^2\,(b\, x - a\, x') = c\, l^2 x - l\, [a\,(2\, l - 3\, b) - (2\, a - b)\, x]\, \zeta;$$

dosazením toho a jednoduchou úpravou vyjde

$$M' = -\frac{q\, \zeta'^2}{4\, c\, l^2} \left\{ [a\,(l-2\,b) - (a-b)\, x]\, l - b\,(a-x)\, \zeta + c\, l\, x \right\}.$$

Pak jest

$$\min M = \mathfrak{M} + M' = \frac{q\, \zeta'^2}{2\, l}\, x - \frac{q\, \zeta'^2}{4\, c\, l^2} \left\{ [a\,(l-2\,b) - (a-b)\, x]\, l - b\,(a-x)\, \zeta + c\, l\, x \right\},$$

což lze upraviti

$$\min M = -\frac{q\,(a-x)\, \zeta'^2}{4\, c\, l^2}\, [(l-2\,b)\, l - b\, \zeta]. \tag{150a}$$

V témž průřezu x žádá $\max M$ zatížení dílu $\overline{a\, \zeta}$, jež se doplňuje se zatížením dílu $\overline{\zeta\, b}$ na plné zatížení pole $a\,b$. Pak jest

$$\max M + \min M = M_0,$$

značí-li M_0 moment průřezu x, vyvozený plným zatížením pole $a\,b$; tento moment M_0 je dán vzorcem (149) a rovná se ve vnitřní části pole $\max M$.

Z toho plyne

$$\max M = M_0 - \min M = \frac{1}{2} q x x' - \frac{q l}{4} \frac{a (l - 2b) + (b - a) x}{c} +$$
$$+ \frac{q (a - x) \zeta'^2}{4 c l^2} [(l - 2b) l - b \zeta].$$

Nahradíme-li $\zeta' = l - \zeta$, $x' = l - x$, můžeme výsledek zjednodušiti na tvar

$$\max M = \frac{1}{2} q x \left(\frac{l}{2} - x \right) - \frac{q (a - x) \zeta}{4 c l^2} \{ b l^2 + (2 l - \zeta) [(l - 2b) l - b \zeta] \}. \quad (150^b)$$

Vzorce pro $\min M$ a $\max M$ v průřezu x pravé krajní části πb plynou již ze vzorců (150^a), (150^b) výměnou veličin, jež se týkají pravé a levé strany, tedy a s b, x s x', ζ se ζ', což dá

$$\min M = - \frac{q (b - x') \zeta^2}{4 c l^2} [(l - 2a) l - a \zeta'], \quad (151^a)$$

$$\max M = \frac{1}{2} q x \left(\frac{l}{2} - x' \right) - \frac{q (b - x') \zeta'}{4 c l^2} \{ a l^2 + (2 l - \zeta') [(l - 2a) l - a \zeta'] \}. \quad (151^b)$$

Obojetná poloha ζ je tu dána rovnicí (118^b).

V podpoře a určíme $\min M$ ze vzorce (150^a) pro průřez v části $a \lambda$, dosadíme-li $x = 0$, $\zeta = 0$, $\zeta' = l$; vyjde tím

$$\min M_a = - \frac{q a}{4 c} (l - 2b) l,$$

což souhlasí se vzorcem (96) pro moment v podpoře a za plného zatížení pole $a b$.

Ve všech průřezech pole $a b$ vyvozuje $\max T$ zatížení pravé strany $\overline{x b}$ průřezu x; pro ně určíme $\mathfrak{T}$, jak bylo uvedeno v odst. 26 ε), a doplněk T' z momentů podporových daných vzorci (95), nahradíme-li všude průřez z průřezem x. Tak stanovíme po úpravě

$$T' = \frac{M_b - M_a}{l} = - \frac{q x'^2}{4 c l^3} [(b - a) l (l + 2x) + (a + b) x^2],$$

$$\max T = \mathfrak{T} + T' = \frac{q x'^2}{2 l} + T',$$

což lze zjednodušiti

$$\max T = \frac{q x'^2}{4 c l^3} [2 c l^2 - (b - a) l (l + 2x) - (a + b) x^2]. \quad (152^a)$$

Opačně žádá $\min T$ zatížené levé strany $\overline{a x}$ a plyne z $\max T$, vyměníme-li a s b, x s x' a obrátíme-li znaménko, tedy

$$\min T = - \frac{q x^2}{4 c l^3} [2 c l^2 - (a - b) l (l + 2x') - (a + b) x'^2]. \quad (152^b)$$

V podpoře a jest $x = 0$, $x' = l$, proto vyjde

$$\max T'_a = \frac{q}{4 c l} [2 c l^2 - (b - a) l^2] = \frac{q l}{4 c} (a - b + 2c); \quad (153^a)$$

v podpoře b dosaďme $x = l$, $x' = 0$ a obdržíme

$$\min T_b = - \frac{q}{4 c l} [2 c l^2 - (a - b) l^2] = - \frac{q l}{4 c} (b - a + 2c). \quad (153^b)$$

Oba poslední vzorce souhlasí se silou posouvající za plného zatížení pole $a\,b$ u podpor v tomto poli.[1])

III. Účinek popuštění podpor.

38. Znaménka momentů ohybových a sil posouvajících. *α) Popuštění vnitřní podpory.* V třímomentové rovnici (60) jest obsaženo v posledním členu *popuštění* t. j. nezamýšlené snížení h_{r-1}, h_r, h_{r+1} podpor a_{r-1}, a_r, a_{r+1} proti původní poloze. Třímomentovou rovnici lze rozděliti na dvě rovnice, z nichž jedna obsahuje účinek zatížení, majíc tvar

$$M_{r-1}\,l_r + 2\,M_r(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1}\,l_{r+1} + \frac{\mathfrak{N}_r}{l_r} + \frac{\mathfrak{N}'_{r+1}}{l_{r+1}} = 0,$$

a v druhé rovnici je popuštění podpor ve tvaru

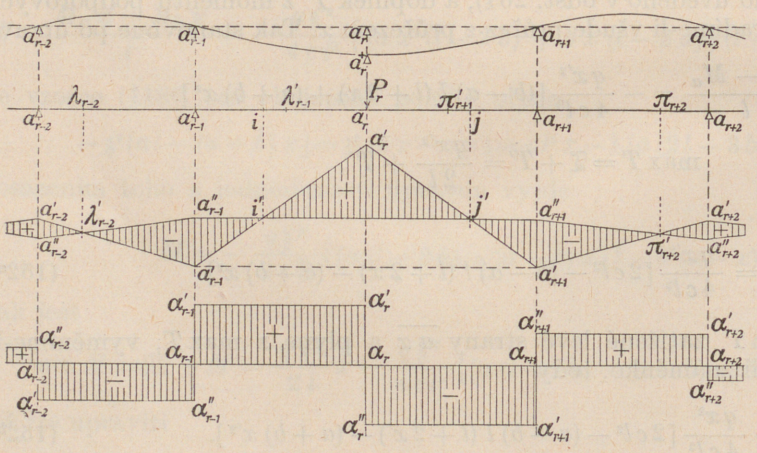
$$M_{r-1}\,l_r + 2\,M_r\,(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1}\,l_{r+1} + 6\,E\,J\left(\frac{h_{r+1} - h_r}{l_{r+1}} - \frac{h_r - h_{r-1}}{l_r}\right) = 0.$$

V podpoře a_r bychom určili z rovnic prvého tvaru moment M'_r, z rovnic druhého tvaru moment M''_r. Uvažujeme-li zatížení i popuštění podpor zároveň, dostaneme v podpoře a_r celkový moment

$$M_r = M'_r + M''_r.$$

Lze tedy řešiti zatížení i popuštění podpor zvláště a účinky jejich sčítati. Obírejme se nyní účinkem samotného popuštění podpor.

Nechť pouze podpora a_r spojitého nosníku popustí o $\overline{a_r a_r^+} = h_r$ (obr. 136); všechny ostatní podpory nosníku buďtež v původní výši, tedy na přímce vodorovné, je-li osa spojitého nosníku přímá a vodorovná. Vyšetřme, jakého znaménka jsou momenty ohybové, síly posouvající a reakce podporové, jež vyvodí samotné popuštění h_r.



Obr. 136.

Odmyslíme-li si veškeré zatížení spojitého nosníku, není momentů ohybových ani posouvajících sil a reakcí podporových, jsou-li podpory nosníku v původní výši. Popustí-li jediná podpora a_r o h_r, zůstal by přímý nosník i dále přímým, kdyby na podporách jen volně spočíval a nebyl nijak zatížen. Myslíme si však, že je nosník opatřen tak, aby stále přiléhal k podporám; pravidlem není ovšem třeba zvláštního opatření, poněvadž stálé zatížení samo obyčejně nosník k podporám přitlačí. Pak osa nosníku, původně přímá, musí procházeti bodem a_r^+ a tudíž se ohýbá; tím vznikají ve všech průřezech nosníku momenty ohybové i síly posouvající. Lze si představiti, že je snížení h_r podpory a_r vyvozeno břemenem P_r, jež působí v bodě a_r na přímý

[1]) Pro spojitý nosník o dvou a třech stejných polích jsou uvedeny podle *E. Winklera* hodnoty max M, min M, M_0, dále max T, min T a T_0 v „Technickém průvodci", sv. 4. (6. vyd., Praha 1946) na str. 127, a pro nosník o čtyřech stejných polích na str. 128.

nosník ... $a_{r-2}\, a_{r-1}\, a_{r+1}\, a_{r+2}$ ... bez podpory a_r; vyvodí-li břímě P_r v bodě a_r průhyb h_r, má týž účinek jako popuštění h_r podpory a_r.[1]) Velikost břemene P_r je tím určena; stanovili bychom ji, kdybychom pro libovolné břímě P'_r sestrojili momentový obrazec nosníku bez podpory a_r a vyšetřili pak ohybovou pořadnici y_r pod břemenem P'_r. Stačilo by tu uvažovati díl $a_{r-1}\, a_{r+1}$ daného nosníku a děliti obrazec momentový svislicí bodu a_r a svislicemi obratníků i, j. Ze správné pořadnice ohybové y_r, vyvozené břemenem P'_r, plyne břímě P_r, jemuž odpovídá průhyb h_r, z úměry $P'_r : y_r = P_r : h_r$, jež dá

$$P_r = P'_r \frac{h_r}{y_r}. \tag{154}$$

Jde-li pouze o znaménka, nikoli o velikost momentů, sil posouvajících i reakcí podporových, lze voliti břímě P_r libovolně. Vynechá-li se podpora a_r, sloučí se obě sousední pole v jediné pole délky $\overline{a_{r-1}\, a_{r+1}} = l_r + l_{r+1}$. Pro tento nosník určíme základní body; potřebujeme body levé až k λ'_{r-1} a pravé od bodu π'_{r+1} vpravo. Levé základní body až po λ_{r-2} jsou tytéž jako u původního nosníku, rovněž tak pravé základní body π_{r+2} a další. Pouze v poli $a_{r-1}\, a_{r+1}$ dostaneme jiné základní body λ'_{r-1}, π'_{r+1} než u původního nosníku. V poli $a_{r-1}\, a_{r+1}$ je prostým obrazcem momentovým k břemeni P_r trojúhelník $a'_{r-1}\, a'_r\, a'_{r+1}$, k němuž určíme podle obr. 94 přemístěnou základní stranu $a''_{r-1}\, a''_{r+1}$. V ostatních polích levých (pravých) jsou momentovými obrazci pouhé doplňovací lichoběžníky, jejichž nerovnoběžné strany se sekou na svislicích základních bodů levých (pravých). V poli $a_{r-1}\, a_{r+1}$, v němž je břímě P_r, jsou obratníky i, j; mezi nimi je moment kladný, vně obratníků pak záporný. Dále vlevo (vpravo) se znaménka mění v základních bodech levých (pravých). Popuštěním podpory a_r vzniká tedy v této podpoře moment kladný, v sousedních podporách a_{r-1}, a_{r+1} momenty záporné, v dalších podporách a_{r-2}, a_{r+2} momenty kladné atd.; znaménka momentů podporových se stále střídají. Zatížení vyvozuje pravidlem v podporách momenty záporné; popuštěním jediné podpory. vnitřní se pak zmenší prostá hodnota momentu v této podpoře, zvětší se prosté hodnoty momentů v podporách sousedních atd.

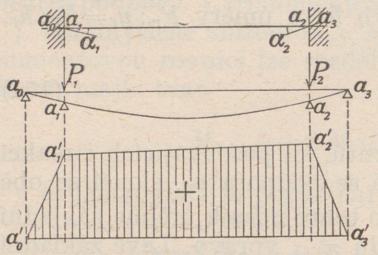
Z obrazců momentových a příslušných obrazců složkových bychom určili ve všech polích síly posouvající jako v obr. 107. Vlevo od břemene je kladná, vpravo záporná síla posouvající; znaménka sil posouvajících se mění dále ve všech podporách Všimněme si reakcí podporových původního nosníku. V podpoře a_r působí reakce $A_r = -T_r + T'_r$; vlevo od podpory a_r je kladná síla posouvající $T_r = \overline{\alpha_r\, \alpha'_r}$, vpravo od podpory a_r záporná síla posouvající $T'_r = \overline{\alpha_r\, \alpha''_r}$, je tedy reakce A_r záporná. U podpory a_{r-1} je vlevo záporná síla posouvající $T_{r-1} = \overline{\alpha_{r-1}\, \alpha''_{r-1}}$, vpravo kladná síla posouvající $T'_{r-1} = \overline{\alpha_{r-1}\, \alpha'_{r-1}}$; reakce $A_{r-1} = -T_{r-1} + T'_{r-1}$ je pak kladná. Po obou stranách podpory a_{r+1} mají síly posouvající táž znaménka jako u podpory a_{r-1}, je tedy i reakce A_{r+1} kladná. U podpor a_{r-2}, a_{r+2} jsou znaménka sil posouvajících proti silám u podpor a_{r-1}, a_{r+1} obrácena; proto jsou reakce A_{r-2}, A_{r+2} záporné. Zatížením vznikají v podporách zpravidla kladné reakce; popuštěním podpory a_r zmenší se tedy reakce v této podpoře, zvětší se reakce v podporách sousedních a_{r-1}, a_{r+1}, zmenší se reakce v podporách a_{r-2}, a_{r+2} atd.

Účinek popuštění podpory a_r bychom stanovili počtem ovšem též z rovnic tří-momentových.[2])

[1]) Viz *Jos. Šolín* „Theorie zevnitřních sil trámů přímých", seš. III (Praha 1885), str. 6 a d.

[2]) Počtářské řešení popuštění podpor u nosníku o dvou a třech polích viz *Jos. Šolín* „Základy technické nauky o pružnosti a pevnosti" (Praha 1904), str. 144 a d.; popuštění ve vetknutých koncích nosníku o jediném poli je řešeno tamtéž na str. 148 a d.

*β) **Popuštění ve vetknutém konci.*** Nosník o jediném poli $a_1 a_2$ budiž vetknut původně vodorovně na obou koncích (obr. 137). Počtem se řeší jako spojitý nosník o třech polích, z nichž obě krajní jsou nulová. Popuštěním v podporách nastane odchýlení konců a_1, a_2 od vodorovné o úhly α_1, α_2; vyšetřme graficky znaménka příslušných momentů ohybových. Vyjděme od nosníku $a_0 a_1 a_2 a_3$ o třech polích konečných.



Obr. 137.

Odchýlení o úhel α_1 v podpoře a_1 si lze představiti jakožto snížení podpory a_1, jež nahradíme břemenem P_1 v témž bodě působícím; obdobně též odchýlení o úhel α_2 v podpoře a_2 lze vyložiti snížením podpory a_2, jež nahradíme břemenem P_2 v bodě a_2. Obdržíme tak prostý nosník $a_0 a_3$, zatížený v bodech a_1, a_2 osamělými břemeny P_1, P_2. Momentovým obrazcem je pak čtyrúhelník $a'_0 a'_1 a'_2 a'_3$, jehož pořadnice jsou vesměs kladné. Stanou-li se krajní pole nulovými, odpadnou obrazce momentové v těchto polích a zbude jen obrazec v poli středním obecně lichoběžníkový, znaménka kladného. Z toho plyne, že odchýlí-li se oba konce vetknutého nosníku popuštěním podpor ve smyslu naznačeném v obr. 137, vznikají ve všech průřezech nosníku momenty kladné, obecně ovšem různé. Nastane-li odchýlení souměrné, vzali bychom $l_1 = l_3$, $P_1 = P_2$ a vyšly by stejné momenty ve všech průřezech.

IV. Spojitý nosník kloubový.

a) Zatížení stálé.

39. Obrazec momentů ohybových a sil posouvajících. Spojitý nosník o n polích, jehož jedna podpora je pevná, ostatní posouvatelné, je staticky neurčitý; k jeho řešení se nedostává obecně $(n-1)$ výminek (viz odst. 22). Tyto výminky si zjednáme jakožto *zvláštní výminky statické*, rozdělíme-li nosník na díly spojené vzájemně *klouby*. Předpokládáme-li theoreticky klouby bez tření, jež dovolují vzájemné otáčení dílů bez nejmenších odporů, tu je-li nosník v rovnováze, musí paprsek výslednice R vnějších sil po jedné straně kloubu e protínati jeho osu; jinak by nastalo otáčení kolem kloubu e. Moment výslednice R k bodu e, t. j. ohybový moment v tom bodě je tedy $M_e = 0$. Takovou výminku dá každý kloub. Rozdělíme-li tedy nosník na n dílů, jež jsou spojeny $(n-1)$ klouby, přibude ke třem obecným $(n-1)$ zvláštních statických výminek rovnováhy; pak lze takovýto *spojitý nosník kloubový* řešiti ze statických výminek rovnováhy, je tedy staticky určitý.

Umístění kloubů není ovšem libovolné; třeba dbáti toho, aby nevznikly díly neurčité nebo přeurčité. Díly, na něž je nosník dělen klouby, nesmějí míti více než dvě podpory; každý díl o třech podporách by byl sám spojitým nosníkem, tedy staticky neurčitým. V jednom poli nosníku, t. j. mezi dvěma sousedními podporami nesmějí býti více než dva klouby; každý kloub dává výminkou $M_e = 0$ jeden bod přemístěné strany základní, tři klouby v jednom poli by daly v tom poli tři body pro přímou přemístěnou stranu základní, což je staticky přeurčité. Obyčejně se střídá pole bez kloubů s polem se dvěma klouby. V krajním poli nosníku může býti ovšem jen jeden kloub, je-li nosník na koncích prostě podepřen; neboť v krajních podporách je pak moment $M = 0$, což spolu s momentem $M_e = 0$ v kloubu e určuje úplně přemístěnou stranu základní v krajním poli.

Předpokládejme dále, že na nosník působí zatížení svislé a že všechny pohyblivé podpory jsou posouvatelné po vodorovné; v posouvatelných podporách působí pak reakce svislé a v jediné pevné podpoře vyjde rovněž svislá reakce. Pak je také výslednicí vnějších sil po jedné straně libovolného průřezu svislá síla, rovná posouvající

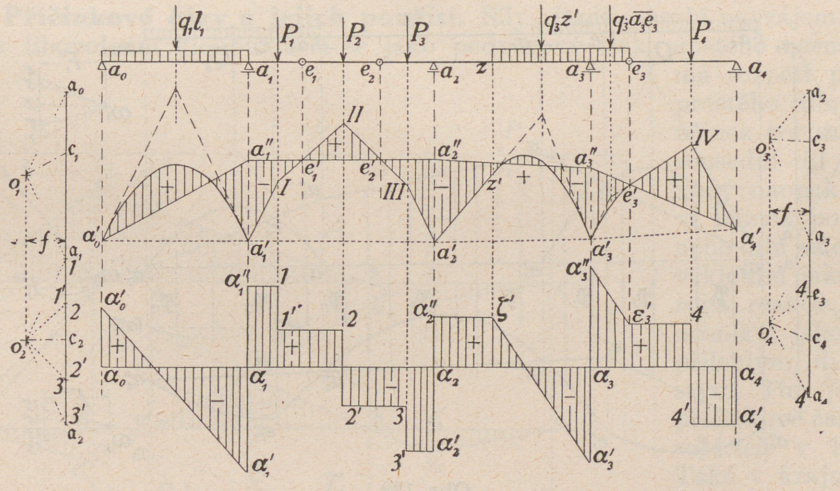
síle toho průřezu. Vnější síly po jedné straně libovolného kloubu e se tedy skládají ve svislou výslednici E, jejíž paprsek jde osou kloubu; silou E lze nahraditi díl nosníku po jedné straně kloubu e.

Vyjmeme-li díl nosníku, jenž nemá vnitřních podpor, tedy díl mezi klouby e_1, e_2 (obr. 138), musíme nahraditi působení ostatního nosníku v kloubech e_1, e_2 svislými silami E_1, E_2, v osách kloubů působícími, jež jsou v rovnováze se zatížením dílu $e_1 e_2$; určí se tedy síly E_1, E_2 z rovnováhy dílu $e_1 e_2$ jako reakce prostého nosníku. Totéž platí o dílu $e_3 a_4$ mezi kloubem e_3 a krajní podporou a_4; na tento díl působí část nosníku vlevo od bodu e_3 svislou silou E_3 a podpora a_4 svislou reakcí A_4, jež se stanoví zase jako podporové reakce prostého nosníku $e_3 a_4$. Z toho plyne, že se díly nosníku bez vnitřních podpor ($e_1 e_2$, $e_3 a_4$) mají jako nosníky prosté; nazývejme je *díly prostými*. Odejmeme-li takový díl prostý $e_1 e_2$, musíme působení jeho na ostatní nosník nahraditi v kloubech e_1, e_2 svislými silami E_1, E_2, které stanovíme jako podporové tlaky prostého nosníku $e_1 e_2$. *Díly podporované* $a_0 e_1$, $e_2 e_3$ mají se pak jako nosníky s jedním neb oběma konci přes podpory přečnívajícími, zatížené na koncích podporovými tlaky prostých dílů $e_1 e_2$, $e_3 a_4$.

Momenty ohybové a síly posouvající spojitého nosníku kloubového určíme v podstatě jako u spojitého nosníku obecného. Sestrojíme v každém poli prostý obrazec momentový a k němu přemístěnou stranu základní, jež zde však určíme ze zvláštních statických výminek rovnováhy. V každém kloubu e je moment ohybový $M_e = 0$, ve svislici bodu e seče tedy přemístěná strana základní čáru momentovou. Výminek je tolik, že stačí právě k řešení nosníku, jak ukáže příklad.

Příklad 28. Stanoviti jest momenty ohybové, síly posouvající a reakce podporové spojitého nosníku kloubového o čtyřech polích, jehož klouby a zatížení jsou naznačeny v obr. 138.

V každém poli sestrojíme výslednicovou čáru k zatížení, zvolivše pro každé pole zvláštní pól o_1, o_2, o_3, o_4 v téže vzdálenosti od čáry složkové. Složková čára pro prvé pole obsahuje úsek $\overline{a_0 a_1} = q_1 l_1$; v druhém poli sčítáme úseky břemen $P_1 = \overline{1\,1'}$, $P_2 = \overline{2\,2'}$, $P_3 = \overline{3\,3'}$, v třetím přeneseme úsek $\overline{a_2 a_3} = q_3 z'$ ($z' = z a_3$) a ve čtvrtém úseky $q_3 \cdot a_3 e_3 = \overline{a_3 e_3}$, $P_4 = \overline{4\,4'}$. Z pólu o_1 narý-



Obr. 138.

sujeme v prvém poli parabolu $a'_0 a'_1$, z pólu o_2 sestrojíme v druhém poli výslednicovou čáru lomenou $a'_1\, I\, II\, III\, a'_2$; z pólu o_3 určíme v třetím poli čáru složenou z přímky $a'_2 z'$ a z paraboly $z' a'_3$, konečně z pólu o_4 stanovíme ve čtvrtém poli parabolu $a'_3 e'_3$ a lomenou čáru $e'_3\, IV\, a'_4$. V kloubech e_1, e_2, e_3 jsou skutečné momenty ohybové rovny nule; procházejí tedy přemístěné strany základní body e'_1, e'_2, e'_3, v nichž svislice kloubů sekou čáry momentové. Rovněž v krajních pod-

porách a_0, a_4 rovnají se momenty ohybové nule, jdou tedy přemístěné strany základní v krajních polích body a'_0, a'_4. Přemístěná základní strana v druhém poli spojuje pak body e'_1, e'_2 a ve čtvrtém poli body e'_3, a'_4; obě strany sekou svislice vnitřních podpor v bodech a''_1, a''_2, a''_3 a přemístěná základní strana v prvém poli je dána body a'_0, a''_1, v třetím poli body a''_2, a''_3. Tím jsou vyřízeny momentové obrazce ve všech polích; nad základními stranami jsou pořadnice kladné, pod nimi pořadnice záporné.

Pólové paprsky $o_1 c_1 \parallel a'_0 a''_1$, $o_2 c_2 \parallel a''_1 a''_2$, $o_3 c_3 \parallel a''_2 a''_3$, $o_4 c_4 \parallel a''_3 a'_4$ určují základní body složkových obrazců pro jednotlivá pole, čímž jsou stanoveny ve složkových obrazcích též úseky sil posouvajících. Do obrazce sil posouvajících přeneseme úseky $\overline{c_1 a_0} = \overline{\alpha_0 \alpha'_0}$, $\overline{c_1 a_1} = \overline{\alpha_1 \alpha'_1}$, $\overline{c_2 a_1} = \overline{\alpha_1 \alpha''_1}$, $\overline{c_2 a_2} = \overline{\alpha_2 \alpha'_2}$, $\overline{c_3 a_2} = \overline{\alpha_2 \alpha''_2}$, $\overline{c_3 a_3} = \overline{\alpha_3 \alpha'_3}$, $\overline{c_4 a_3} = \overline{\alpha_3 \alpha''_3}$, $\overline{c_4 a_4} = \overline{\alpha_4 \alpha'_4}$ a sestrojíme pak čáry sil posouvajících v jednotlivých polích, jak ukazuje obrazec. V obrazcích složkových i v obrazci sil posouvajících jsou též určovací úseky reakcí podporových

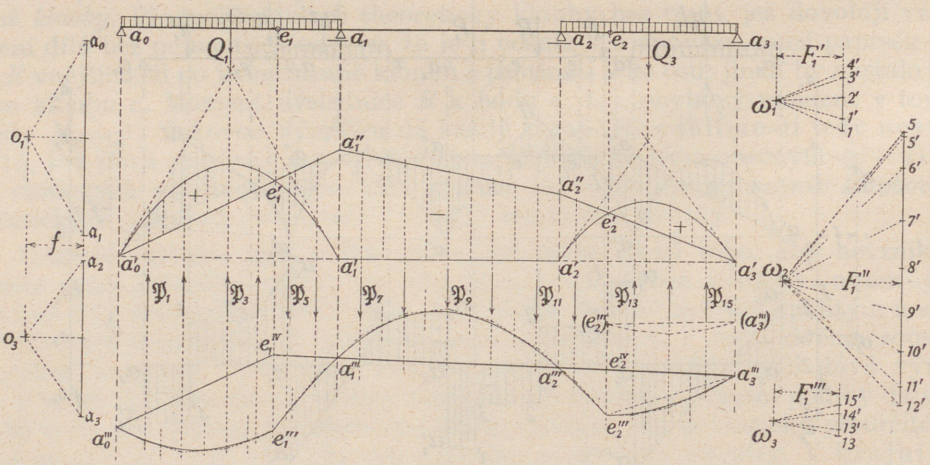
$$A_0 = \overline{c_1 a_0} = \overline{\alpha_0 \alpha'_0},\quad A_1 = \overline{c_2 c_1} = \overline{\alpha'_1 \alpha''_1},\quad A_2 = \overline{c_3 a_2} + \overline{a_2 c_2} = \overline{\alpha'_2 \alpha''_2},\quad A_3 = \overline{c_4 c_3} = \overline{\alpha'_3 \alpha''_3},\quad A_4 = \overline{a_4 c_4} = \overline{\alpha'_4 \alpha_4}.$$

40. Ohybová čára spojitého nosníku kloubového určí se jako u každého přímého nosníku jakožto výslednicová čára ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plochou je plocha momentová; pól má býti ve vzdálenosti

$$F = \frac{EJ}{ef}$$

od čáry složkové. Ohybovou čáru sestrojujeme zvláště pro každý díl nosníku mezi dvěma klouby. U dílů podporovaných jsou dány základní strany čar ohybových výminkami podporovými; má-li nosník jednu podporu pevnou, ostatní posouvatelné po vodorovné, rovnají se ohybové pořadnice ve všech podporách nule. Základními stranami a ohybovými čarami dílů podporovaných jsou určeny ohybové pořadnice v kloubech, jimiž jsou stanoveny základní strany ohybových obrazců dílů prostých.

Příklad 29. Vyšetříme ohybovou čáru nosníku o třech polích s klouby e_1, e_2 v krajních polích, zatíženého v prvém i třetím poli rovnoměrně po celém poli; druhé pole budiž nezatíženo. Nosník měj v dílech $a_0 e_1$, $e_1 e_2$, $e_2 a_3$ průřez stálý, avšak v každém dílu jiný, o momentech setrvačnosti J', J'', J'''.



K zatížení pole prvého $Q_1 = \overline{a_0 a_1}$ a třetího $Q_3 = \overline{a_2 a_3}$ sestrojíme touž vzdáleností pólovou f momentové paraboly $a'_0 e'_1 a'_1$, $a'_2 e'_2 a'_3$ (obr. 139) a určíme v krajních polích přemístěné strany základní jakožto spojnice průsečíků a'_0, e'_1 a e'_2, a'_3 momentových čar se svislicemi bodů a_0, e_1, e_2, a_3, v nichž jsou momenty rovny nule. V podporách a_1, a_2 dostaneme tím momentové pořadnice $\overline{a''_1 a'_1}$, $\overline{a''_2 a'_2}$; v nezatíženém poli druhém je pak momentovou čarou přímka $a'_1 a'_2$, vztažená

ke straně a_1'' a_2''. Obrazce momentové pokládáme dále za určovací plochy spojitých soustav silových, k nimž rýsujeme čáry výslednicové zvláště pro díl $a_0 e_1$, $e_1 e_2$ i $e_2 a_3$. Momentový obrazec dílu $a_0 e_1$ rozdělíme svislicemi na proužky, jež nahradíme ideálními břemeny $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$; podobně rozdělíme momentový obrazec dílu $e_1 e_2$ ($e_2 a_3$) svislicemi na proužky, jež nahradíme břemeny $\mathfrak{P}_5$, $\mathfrak{P}_6$, ... $\mathfrak{P}_{12}$ ($\mathfrak{P}_{13}$, $\mathfrak{P}_{14}$, $\mathfrak{P}_{15}$). Určovacími paprsky břemen $\mathfrak{P}$ jsou tížnice proužků, určovací úseky jejich stanovíme, uvedeme-li obsahy proužků na touž půdici e. Kladným momentům (v dílech $a_0 e_1$, $e_2 a_3$) odpovídají břemena vzhůru směřující; záporné plochy momentové (v dílu $e_1 e_2$) nahrazujeme břemeny dolů působícími. Pro díly $a_0 e_1$, $e_1 e_2$, $e_2 a_3$ měli bychom zvoliti póly ve vzdálenostech

$$F' = \frac{EJ'}{ef}, \qquad F'' = \frac{EJ''}{ef}, \qquad F''' = \frac{EJ'''}{ef};$$

tyto vzdálenosti pólové by byly příliš velké, zvolíme tedy přiměřené vzdálenosti jiné F_1', F_1'', F_1''', jež musí míti poměr

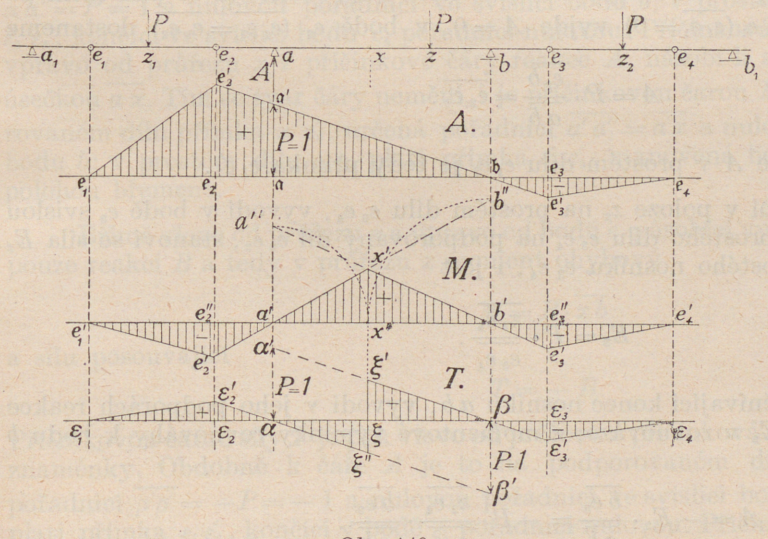
$$F_1' : F_1'' : F_1''' = F' : F'' : F''' = J' : J'' : J'''.$$

Sestrojíme nejprve z pólu ω_2, jenž má od složkové čáry pro díl $e_1 e_2$ vzdálenost F_1'', výslednicovou čáru k břemenům $\mathfrak{P}_5$, $\mathfrak{P}_6$ ... $\mathfrak{P}_{12}$, do níž vepíšeme křivku $e_1'' a_1''' a_2''' e_2'''$, dotýkající se stran lomené čáry výslednicové na prodloužených svislých mezích proužkových. V podporách a_1, a_2, posouvatelných po vodorovné, jsou ohybové pořadnice rovny nule; základní strana ohybové čáry pro díl $e_1 e_2$ spojuje tedy průsečíky a_1''', a_2''' ohybové čáry se svislicemi podpor a_1, a_2. Tím jsou již určeny v bodech e_1, e_2 ohybové pořadnice $\overline{e_1^{IV} e_1''}$, $\overline{e_2^{IV} e_2'''}$. Pro díl $a_0 e_1$ zvolíme pól ω_1 ve vzdálenosti F_1' od jeho čáry složkové a rýsujeme čáru ohybovou tak, aby procházela bodem e_1'''. V bodě a_0 se rovná ohybová pořadnice opět nule, v bodě e_1 je pak pořadnice $\overline{e_1^{IV} e_1'''}$, spojuje proto základní strana ohybové čáry pro díl $a_0 e_1$ body a_0''', e_1^{IV}. Chceme-li, aby byla základní stranou ohybového obrazce na př. pro díl $e_2 a_3$ prodloužená přímka $a_1''' a_2'''$, sestrojíme ohybovou čáru tohoto dílu tak, aby šla body e_2''', a_3'''. Tu nejprve narýsujeme z pólu ω_3, ve vzdálenosti F_1''' od čáry složkové zvoleného, libovolnou výslednicovou čáru k břemenům $\mathfrak{P}_{13}$, $\mathfrak{P}_{14}$, $\mathfrak{P}_{15}$ a přeneseme pořadnice této čáry, měřené od tětivy (e_2''') (a_3'''), v týchž svislicích od přímky $e_2''' a_3'''$, čímž obdržíme ve správné poloze lomenou čáru výslednicovou k břemenům $\mathfrak{P}$, do níž vepíšeme křivku ohybovou. Pólovými vzdálenostmi F_1 určíme v libovolném bodě nosníku pořadnici y_1; správná pořadnice ohybová je tu podle vzorce (41^a)

$$y = y_1 \frac{F_1'}{F'}.$$

Jak se měří a dosazují jednotlivé veličiny, bylo uvedeno v odst. 18, α).

41. Příčinkové čáry a jejich použití. Síly, jimiž působí navzájem oba díly nosníku v libovolném kloubu, určí se jako podporový tlak prostého nosníku, jenž má rozpětí přilehlého prostého dílu, jde-li o účinek tohoto dílu na sousední díl podporovaný; naopak se stanoví účinek podporovaného dílu na díl prostý v kloubu jako podporová reakce prostého nosníku, shodného s přilehlým dílem prostým. Tím jsou dány příčinkové čáry sil působících v kloubech. Také v krajní podpoře a_4, k níž přiléhá prostý díl $e_3 a_4$ (obr. 138), působí reakce rovná reakci prostého nosníku o rozpětí přilehlého prostého dílu $e_3 a_4$.



Obr. 140.

Vyšetřme dále příčinkovou čáru reakce A v libovolné vnitřní podpoře a. Stačí tu, uvažujeme-li nejvýše tři sousední pole, a to střední pole $a\,b$ bez kloubů a sousední pole $a_1\,a$ i $b\,b_1$ se dvěma klouby e_1, e_2 a e_3, e_4 (obr. 140). Stanovíme reakci A pro různé polohy pohyblivého břemene $P = 1$. Břímě P, jež působí v poloze z na podporovaném dílu $e_2\,e_3$, vyvodí v podporách a, b reakce A, B, s nimiž je v rovnováze. Poněvadž jsou prosté díly $e_1\,e_2$, $e_3\,e_4$ nezatíženy, nepůsobí v kloubech e_1, e_2, e_3, e_4 žádné síly. Reakce A, B se pak stanoví jako reakce nosníku s konci přes podpory přečnívajícími, prostě podepřeného v bodech a, b. Z momentové výminky rovnováhy sil A, B, P k bodu b vyjde

$$A = P \cdot \frac{\overline{z\,b}}{\overline{a\,b}}.$$

Pohybuje-li se břímě P po dílu $e_2\,e_3$, mění se reakce A po zákonu přímky, jež má v bodě b ($\overline{z\,b} = 0$) pořadnici $A = 0$, v bodě a ($\overline{z\,b} = \overline{a\,b}$) pořadnici $A = P = 1 = \overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'}$. Příčinková přímka $\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}$ platí beze změny i pro polohy břemene na přečnívajících koncích, tedy až k bodům $\mathfrak{e}_2'$, $\mathfrak{e}_3'$; na pravém konci přečnívajícím $b\,e_3$ jest ovšem úsečka $\overline{z\,b}$ záporná, což dá též záporné příčinkové pořadnice reakce A. V kloubech e_2, e_3 dá přímka $\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}$ pořadnice

$$\overline{\mathfrak{e}_2\,\mathfrak{e}_2'} = P \cdot \frac{\overline{e_2\,b}}{\overline{a\,b}}, \qquad \overline{\mathfrak{e}_3\,\mathfrak{e}_3'} = P \cdot \frac{\overline{e_3\,b}}{\overline{a\,b}} = -\,P \cdot \frac{\overline{b\,e_3}}{\overline{a\,b}}.$$

Je-li břímě P v poloze z_1 na prostém dílu $e_1\,e_2$, působí tento díl na díl $e_2\,e_3$ v bodě e_2 tlakem E_2, jenž se určí jako podporový tlak prostého nosníku $e_1\,e_2$, tedy

$$E_2 = P \cdot \frac{\overline{e_1\,z_1}}{\overline{e_1\,e_2}}.$$

V podporách a, b vznikají pak reakce A, B, jež jsou se silou E_2 (dolů působící) v rovnováze; z momentové výminky rovnováhy sil A, B, E_2 k bodu b plyne

$$A = E_2 \cdot \frac{\overline{e_2\,b}}{\overline{a\,b}} = P \cdot \frac{\overline{e_1\,z_1}}{\overline{e_1\,e_2}} \cdot \frac{\overline{e_2\,b}}{\overline{a\,b}}.$$

Pohybuje-li se břímě P po dílu $e_1\,e_2$, mění se úsečka $\overline{e_1\,z_1}$; reakce A se pak mění po zákonu přímky. V bodě e_1 ($\overline{e_1\,z_1} = 0$) vyjde $A = 0$, v bodě e_2 ($\overline{e_1\,z_1} = \overline{e_1\,e_2}$) dostaneme

$$A = P \cdot \frac{\overline{e_2\,b}}{\overline{a\,b}} = \overline{\mathfrak{e}_2\,\mathfrak{e}_2'}.$$

Příčinkovou čarou reakce A v prostém dílu $e_1\,e_2$ je tedy přímka $\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2'$.

Břímě P, jež působí v poloze z_2 na prostém dílu $e_3\,e_4$, vyvodí v bodě e_3 svislou sílu E_3; jde-li o účinek prostého dílu $e_3\,e_4$ na podporovaný díl $e_2\,e_3$, stanoví se síla E_3 jako podporový tlak prostého nosníku $e_3\,e_4$, i jest

$$E_3 = P \cdot \frac{\overline{z_2\,e_4}}{\overline{e_3\,e_4}}.$$

Síla E_3, působíc na přečnívající konec nosníku $a\,b$, vyvodí v jeho podporách reakce A, B, jež jsou se silou E_3 v rovnováze; z momentové výminky rovnováhy k bodu b určíme

$$A = -\,E_3 \cdot \frac{\overline{b\,e_3}}{\overline{a\,b}} = -\,P \cdot \frac{\overline{z_2\,e_4}}{\overline{e_3\,e_4}} \cdot \frac{\overline{b\,e_3}}{\overline{a\,b}}.$$

S úsečkou $\overline{z_2 e_4}$ se mění reakce A po zákonu přímky. V bodě e_4 ($\overline{z_2 e_4} = 0$) vyjde $A = 0$, v bodě e_3 ($\overline{z_2 e_4} = \overline{e_3 e_4}$) pak jest

$$A = -P \cdot \frac{\overline{b e_3}}{\overline{a b}} = \overline{e_3 e_3'}.$$

V prostém dílu $e_3 e_4$ je příčinkovou čarou reakce A přímka $e_3' e_4$.

Mezi podporami a, b je příčinková čára reakce A táž jako u prostého nosníku $a b$; tato čára (přímka $a' b$) se prodlužuje ke svislicím kloubů e_2, e_3 a v prostých dílech $e_1 e_2$, $e_3 e_4$ jsou příčinkovými čarami reakce A přímky, jež mají v bodech e_1, e_4, kde čára končí, pořadnice nulové. Ve vzdálenějších kloubech e_1, e_4 jsou tedy nulové polohy břemene. Obdobně by se určila příčinková čára reakce B; plyne z čáry reakce A, vyměníme-li levou stranu s pravou. Vynecháme-li v obr. 140 část vlevo od svislice bodu a, dostaneme příčinkovou čáru reakce A pro nosník, jehož levý konec je v bodě a. Příčinkovou čáru reakce A pro nosník, jehož pravým koncem by byl bod b, obdrželi bychom, kdybychom vynechali část obrazce vpravo od svislice bodu b. Vynecháme-li část vlevo od svislice bodu e_2 a vpravo od svislice bodu e_3, vyjde příčinková čára reakce A pro nosník podepřený v bodech a, b s konci přečnívajícími přes podpory vlevo do bodu e_2, vpravo do bodu e_3.

Příčinkové čáry momentů ohybových a sil posouvajících průřezů v dílech prostých jsou totožné s příčinkovými čarami prostých nosníků, jež mají rozpětí příslušných dílů prostých. V dílech podporovaných jest rozeznávati průřezy mezi podporami a na přečnívajících koncích.

Průřez x budiž nejprve mezi podporami a, b (obr. 140); je-li břímě P kdekoli vpravo od x a vlevo od bodu e_4, působí po levé straně průřezu pouze levá reakce A, jež se mění podle stanovené příčinkové čáry, pohybuje-li se břímě $P = 1$ po nosníku. V průřezu x je pak moment ohybový

$$M = A \cdot \overline{a x}$$

a síla posouvající

$$T = A.$$

Z toho plyne, že je vpravo od průřezu x příčinková čára síly T shodná s příčinkovou čarou reakce A; v dílu podporovaném je to tedy přímka $\xi' \varepsilon_3'$, stanovená pořadnicí $\overline{\alpha \alpha'} = P = 1$ a nulovou pořadnicí ve svislici bodu b, v prostém dílu $e_3 e_4$ pak přímka $\varepsilon_3' \varepsilon_4$, končící ve svislici bodu e_4 pořadnicí nulovou. Příčinková čára momentu M plyne vpravo od průřezu x z příčinkové čáry reakce A, násobí-li se veškeré její pořadnice úsečkou $\overline{a x}$. Tím se tvar čáry nemění, i je příčinkovou čarou M vpravo od x na podporovaném dílu přímka $x' e_3'$, určená pořadnicí $\overline{a' a''} = \overline{a x}$ a nulovou pořadnicí ve svislici bodu b; v prostém dílu $e_3 e_4$ platí přímka $e_3' e_4'$, stanovená bodem e_4' jakožto nulovou polohou břemene.

Břímě vlevo od průřezu x a vpravo od bodu e_1 působící vyvodí vpravo od průřezu x pouze reakci B a tedy v průřezu x moment ohybový

$$M = B \cdot \overline{x b}$$

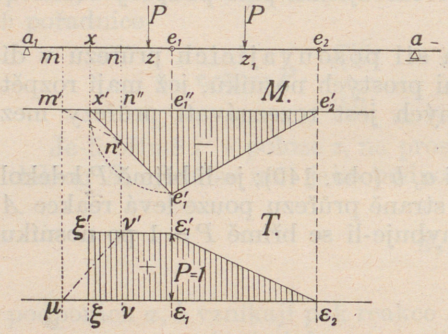
a sílu posouvající

$$T = -B.$$

Příčinkovou čarou síly T je pak vlevo od průřezu x příčinková čára reakce B s opačnými znaménky. Obdobně k čáře A je to na podporovaném dílu přímka $\varepsilon_2' \xi''$, určená pořadnicí $\overline{\beta \beta'} = -P = -1$ a nulovou pořadnicí ve svislici bodu a; pro prostý díl $e_1 e_2$ platí přímka $\varepsilon_1 \varepsilon_2'$, končící v bodě ε_1 pořadnicí nulovou. Příčinkovou čáru momentu M

vlevo od průřezu x odvodíme z příčinkové čáry reakce B, násobíme-li její pořadnice úsečkou $\overline{x\,b}$. Obdržíme tak v podporovaném dílu přímku $e_2' x'$, jež má ve svislici bodu a pořadnici nulovou, ve svislici bodu b pořadnici $\overline{b'\,b''} = \overline{x\,b}$ a jde mimo to bodem x' jako u prostého nosníku; v prostém dílu $e_1 e_2$ platí přímka $e_1' e_2'$, jež končí nulovou pořadnicí v bodě e_1'.

Mezi podporami a, b jsou příčinkové čáry momentu M i posouvající síly T shodné s čarami prostého nosníku $a\,b$; čáry ty se prodlužují přes podpory k nejbližším kloubům a v dílech prostých jsou příčinkovými čarami zase přímky, jež se připojují k předelším a končí ve vzdálenějších kloubech pořadnicemi nulovými. Vynecháme-li část obrazce vlevo od svislice bodu a, dostaneme příčinkové čáry M, T pro průřez x v poli $a\,b$, které přiléhá ke krajní podpoře levé a nemá kloubu. Obdobně máme čáry M, T pro průřez x v poli $a\,b$, jež přiléhá ke krajní podpoře pravé a nemá kloubu, vynecháme-li vše, co je vpravo od svislice bodu b. Vynecháme-li část obrazce vlevo od svislice bodu e_2 a vpravo od svislice bodu e_3, dostaneme příčinkové čáry pro nosník $a\,b$ s konci přečnívajícími přes podpory k bodům e_2, e_3.



Obr. 141.

Mějme konečně průřez x na přečnívajícím konci $a_1 e_1$, tedy v poli, jež obsahuje dva klouby e_1, e_2 (obr. 141). Břímě P, jež působí v poloze z mezi průřezem x a kloubem e_1, je jedinou vnější silou po pravé straně průřezu x, vyvodí tedy v průřezu x moment ohybový a sílu posouvající

$$M = -P \cdot \overline{x\,z}, \qquad T = P;$$

jdouce s pravé strany, obracíme zde znaménko M i T, jež dává břímě P. Příčinkovou čarou momentu M je pak přímka, jež má v bodě x $(\overline{x\,z} = 0)$ pořadnici $M = 0$, v bodě e_1 $(\overline{x\,z} = \overline{x\,e_1})$ pořadnici $M = -P \cdot \overline{x\,e_1} = -\overline{x\,e_1}$, jde-li o účinek břemene $P = 1$. Příčinkovou čarou síly T je mezi body x, e_1 přímka rovnoběžná s osou ve vzdálenosti $\overline{\xi\,\xi'} = \overline{\varepsilon_1\,\varepsilon_1} = P = 1$.

Břímě P, jež působí v poloze z_1 na prostém dílu $e_1 e_2$, vyvodí v kloubu e_1 svislou sílu

$$E_1 = P \cdot \frac{\overline{z_1\,e_2}}{\overline{e_1\,e_2}},$$

jež působí dolů, nahrazuje-li pravou stranu nosníku v bodě e_1. Vpravo od průřezu x je pak síla E_1, jež dá v průřezu x

$$M = -E_1 \cdot \overline{x\,e_1} = -P \cdot \frac{\overline{z_1\,e_2}}{\overline{e_1\,e_2}} \cdot \overline{x\,e_1}, \qquad T = E_1 = P \cdot \frac{\overline{z_1\,e_2}}{\overline{e_1\,e_2}}.$$

Příčinkovou čarou momentu M je na prostém dílu $e_1 e_2$ přímka $e_1' e_2'$, daná v bodě e_2 $(\overline{z_1\,e_2} = 0)$ pořadnicí $M = 0$ a v bodě e_1 $(\overline{z_1\,z_2} = \overline{e_1\,e_2})$ pořadnicí

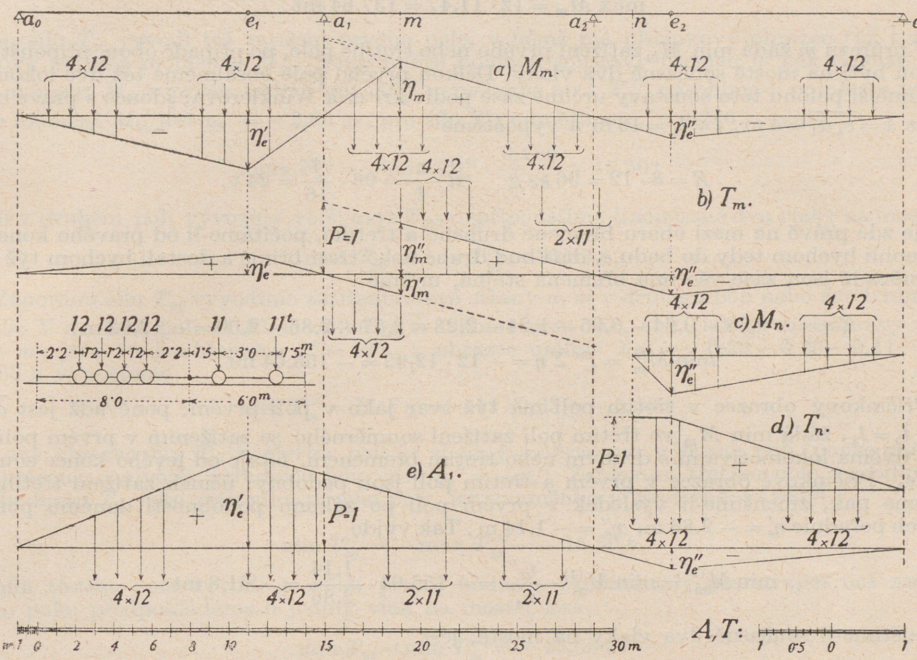
$$M = -P \cdot \overline{x\,e_1} = -\overline{x\,e_1} = \overline{e_1''\,e_1'}.$$

Příčinkovou čarou síly T je v témž dílu přímka $\varepsilon_1' \varepsilon_2$, jež má v bodě e_2 rovněž pořadnici nulovou a v bodě e_1 pořadnici $\overline{\varepsilon_1\,\varepsilon_1'} = P = 1$.

Jako na pravém řešilo by se i na levém přečnívajícím konci, na němž znaménko momentu zůstává záporné, znaménko posouvající síly se však mění v záporné.

Kdyby šlo o zatížení nepřímé, změnily by se příčinkové čáry jen v oddílech, v nichž by byly pro přímé zatížení čarami lomenými; v těchto oddílech by byly příčinkovými čarami pro nepřímé zatížení přímky, mající ve styčných bodech pořadnice stanovené pro přímé zatížení. Je-li na př. průřez x na pravém přečnívajícím konci mezi styčnými body m, n (obr. 141), je v oddílu $m\,n$ příčinkovou čarou momentu M přímka $m'n'$ a příčinkovou čarou posouvající síly T přímka $\mu\nu'$; v bodě m jsou příčinkové pořadnice M i T pro přímé zatížení rovny nule.

Z příčinkových obrazců lze stanoviti účinek zatížení stálého i jakéhokoli zatížení pohyblivého, jak ukáže příklad.[1]) Příčinkové pořadnice A, M, T zde mají týž význam jako u prostého nosníku (viz odst. 2).



Obr. 142.

Příklad 30. Vyšetřme krajní hodnoty momentů ohybových a sil posouvajících v průřezech m ($\overline{a_1 m} = 4$ m), n ($\overline{a_2 n} = 2$ m) a krajní hodnoty reakce A_1 spojitého nosníku kloubového o třech polích délek $l_1 = \overline{l_3} = 16$ m, $l_2 = 14$ m, jenž má po jednom kloubu v krajních polích ve vzdálenostech $\overline{a_0 e_1} = \overline{e_2 a_3} = 12$ m od krajních podpor. Na nosník působí přímo stálé zatížení rovnoměrné $q_0 = 1{,}5$ t/m, pohyblivé zatížení rovnoměrné $q' = 0{,}8$ t/m a pohyblivá řada osamělých břemen, daná vlakem podle normy II mostního řádu z r. 1904, složeným ze dvou tendrových lokomotiv s nákladními vozy (obr. 142).

Pro všechny hledané veličiny sestrojíme příčinkové obrazce a vyšetříme z nich účinek zatížení stálého i krajní hodnoty z pohyblivého zatížení rovnoměrného a z řady osamělých břemen.

a) V průřezu m vyvodíme pohyblivou řadou břemen max M_m, zatížíme-li co nejvíce pole druhé, v němž všechny polohy břemene přičiňují kladně. Nejúčinnější polohu soustavy dá kriterium Winklerovo

$$R_1 \leqq R\,\frac{x}{l},$$

v němž dosadíme $x = \overline{a_1 m} = 4$ m, $l = l_2 = 14$ m. Délkou $a_1 a_2$ obsáhneme dvě tendrové lokomotivy, mající po čtyřech nápravách o 12 t tlaku, tedy

$$R = 8 \cdot 12 = 96\text{ t}, \qquad R\,\frac{x}{l} = 96 \cdot \frac{4}{14} = 27{,}4\text{ t}.$$

[1]) Přímé řešení pro pohyblivou soustavu osamělých břemen viz ve spisovatelově „Theorii čar příčinkových", č. I (Praha 1909), str. 30 a d.

R_1 znamená součet břemen od bodu a_1 k bodu m; sčítáme-li břemena od levého konce soustavy, obsahující dvě lokomotivy, přestoupíme 27,4 t třetím břemenem, jež třeba tedy umístiti do bodu m. Za polohy soustavy tím určené vypočteme

$$\max M_m = \Sigma P \eta = P' \Sigma \eta ,$$

jelikož jsou zde všechna břemena téže velikosti $P' = 12$ t. Břemena působící v oboru téže přímky příčinkové mohli bychom nahraditi výslednicí, jež by se násobila příčinkovou pořadnicí v paprsku výslednice; přesnější výsledek dostaneme však, počítáme-li s jednotlivými břemeny. Příčinkové pořadnice η odměříme v měřidle délkovém a určíme

$$\Sigma \eta = 1{,}14 + 2{,}00 + 2{,}86 + 2{,}51 + 1{,}24 + 0{,}92 + 0{,}57 + 0{,}23 = 11{,}47 \text{ m} ;$$

pak jest

$$\max M_m = 12 \cdot 11{,}47 = 137{,}64 \text{ mt} .$$

V průřezu m žádá min M_m zatížení prvého nebo třetího pole, po případě obou, připouštíme-li, že mohou býti na mostě současně dva vlaky. Délkou prvého pole obsáhneme též dvě lokomotivy a nejúčinnější polohu této soustavy určíme zase podle kriteria Winklerova; jdouce s pravé strany, dosadme $x = \overline{e_1 a_1} = 4$ m, $l = l_1 = 16$ m a vypočtěme

$$R = 8 \cdot 12 = 96 \text{ t}, \qquad R \frac{x}{l} = 96 \cdot \frac{4}{16} = 24 \text{ t} .$$

Bod e_1 je zde právě na mezi oboru břemene druhého a třetího, počítáme-li od pravého konce soustavy; mohli bychom tedy do bodu e_1 dáti buď druhé nebo třetí břímě a dostali bychom týž výsledek. Poněvadž jsou zase všechna břemena stejná, určíme

$$\Sigma \eta = -0{,}38 - 0{,}64 - 0{,}95 - 1{,}24 - 2{,}28 - 2{,}57 - 2{,}86 - 2{,}00 = -12{,}92 \text{ m},$$
$$\min M_m^{(1)} = P' \Sigma \eta = -12 \cdot 12{,}92 = -155{,}04 \text{ mt} .$$

Příčinkový obrazec v třetím poli má týž tvar jako v poli prvém; poněvadž jest $\overline{a_2 e_2} = \overline{e_1 a_1}$, $l_3 = l_1$, žádá min M_m ve třetím poli zatížení souměrného se zatížením v prvém poli, tedy zatížení dvěma lokomotivami s druhým nebo třetím břemenem, čítaje od levého konce soustavy, v bodě e_2. Příčinkové obrazce v prvém a třetím poli jsou podobny; účinek zatížení třetího pole vypočteme pak, zmenšíme-li výsledek v prvém poli po zákonu podobnosti danému poměrem největších pořadnic $\eta_e' = -2{,}86$ m, $\eta_e'' = -1{,}14$ m. Tak vyjde

$$\min M_m^{(3)} = \min M_m^{(1)} \cdot \frac{\eta_e''}{\eta_e'} = -155{,}04 \cdot \frac{1{,}14}{2{,}86} = -61{,}8 \text{ mt} .$$

Nepřipouštíme-li současně dva vlaky na mostě, jest

$$\min M_m = \min M_m^{(1)} = -155{,}04 \text{ mt} .$$

Pro rovnoměrné zatížení stálé i pohyblivé potřebujeme příčinkové plochy. V prvém poli je příčinkovým obrazcem trojúhelník o základně $l_1 = 16$ m a výšce $\eta_e' = -2{,}86$ m, tedy o obsahu

$$\mathfrak{U}_1 = -\tfrac{1}{2}\, 16 \cdot 2{,}86 = -22{,}88 \text{ m}^2 .$$

V druhém poli je trojúhelník příčinkový o základně $l_2 = 14$ m a výšce $\eta_m = 2{,}86$ m, obsah jeho jest

$$\mathfrak{U}_2 = \tfrac{1}{2}\, 14 \cdot 2{,}86 = 20{,}02 \text{ m}^2 .$$

V třetím poli je rovněž příčinkovým obrazcem trojúhelník o základně $l_3 = 16$ m a výšce $\eta_e'' = -1{,}14$ m; má obsah

$$\mathfrak{U}_3 = -\tfrac{1}{2}\, 16 \cdot 1{,}14 = -9{,}12 \text{ m}^2 .$$

Pohyblivé zatížení rovnoměrné vyvodí, zatížíme-li plně druhé pole,

$$\max M_m = q' \mathfrak{U}_2 = 0{,}8 \cdot 20{,}02 = 16{,}02 \text{ mt} ,$$

a zatížíme-li celé první a třetí pole, vyjde

$$\min M_m = q' (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_3) = -0{,}8 \cdot (22{,}88 + 9{,}12) = -25{,}60 \text{ mt} .$$

Stálé zatížení dá moment

$$M_m = q_0 (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2 + \mathfrak{U}_3) = -1{,}5 \cdot 11{,}98 = -17{,}97 \text{ mt} .$$

b) Vyšetřujme dále posouvající sílu T_m. V druhém poli vyvodíme max T_m krajním zatížením pravé strany $\overline{m a_2}$; mimo lokomotivu vejde se sem ještě nákladní vůz, jehož jedna náprava padne do třetího pole. Soustava obsahuje břemena dvojí velikosti $P' = 12$ t, $P'' = 11$ t; příčinkové pořadnice v paprscích břemen P' znamenejme η', v paprscích břemen P'' pak η'' a dostaneme

$$\max T_m^{(2)} = P' \Sigma \eta' + P'' \Sigma \eta''.$$

Příčinkové pořadnice posouvající síly měříme v měřidle, jehož jednotkou je pořadnice $P = 1$ ve svislici podpory a_1; pořadnice ty jsou pouhými čísly nepojmenovanými. Z obrazce určíme

$$\Sigma \eta' = 0{,}73 + 0{,}63 + 0{,}54 + 0{,}44 = 2{,}34, \qquad \Sigma \eta'' = 0{,}19 - 0{,}02 = 0{,}17,$$

i jest

$$\max T_m^{(2)} = 12 \cdot 2{,}34 + 11 \cdot 0{,}17 = 30{,}35 \text{ t}.$$

Kladnou sílu T_m vyvodí též zatížení prvého pole, v němž má příčinkový obrazec týž tvar jako příčinkový obrazec momentu M_m. Nejúčinnější polohou soustavy břemen je pak poloha, určená již pro moment M_m v prvém poli; z min $M_m^{(1)}$ vypočteme max $T_m^{(1)}$, násobíme-li poměrem pořadnic η_e'. Pro moment M_m jest $\eta_e' = -2{,}86$ m, pro sílu T_m odměříme $\eta_e' = 0{,}286$ a vyjde

$$\max T_m^{(1)} = -\min M_m^{(1)} \cdot \frac{0{,}286}{2{,}86} = 15{,}50 \text{ t}.$$

Zatížení v druhém poli vyvozuje větší max T_m; nepřipouštíme-li současně dva vlaky na mostě, jest

$$\max T_m = \max T_m^{(2)} = 30{,}35 \text{ t}.$$

Zápornou sílu T_m vyvodíme zatížením levé strany $\overline{a_1 m}$ v druhém poli nebo zatížením v třetím poli. V druhém poli zatížíme délku $\overline{a_1 m}$ lokomotivou tak, aby tlak první nápravy působil v bodě m; jsou tu jen břemena $P' = 12$ t, z obrazce určíme $\Sigma \eta' = -0{,}29 - 0{,}20 - 0{,}11 - 0{,}03 = -0{,}63$ a vypočteme

$$\min T_m^{(2)} = P' \Sigma \eta' = -12 \cdot 0{,}63 = -7{,}56 \text{ t}.$$

Příčinkový obrazec síly T_m v třetím poli je shodný s obrazcem v prvém poli, pouze znaménka jsou obrácena; největší pořadnice jeho jest $\eta_e'' = -\eta_e'$. Zatížením třetího pole vyvodíme touž krajní hodnotu T_m jako zatížením prvého pole, jen znaménko je protivné; je tedy

$$\min T_m^{(3)} = -\max T_m^{(1)} = -15{,}50 \text{ t}.$$

Zatížením třetího pole vyvodí se větší prostá hodnota záporné síly posouvající než zatížením druhého pole; předpokládáme-li jediný vlak na mostě, jest

$$\min T_m = \min T_m^{(3)} = -15{,}50 \text{ t}.$$

Stanovíme dále obsahy příčinkových ploch; největší pořadnice příčinkové jsou $\eta_e' = 0{,}286$, $\eta_m' = -0{,}286$, $\eta_m'' = 0{,}714$, $\eta_e'' = -0{,}286$. Části příčinkového obrazce mají obsahy

$$\mathfrak{U}_1 = \frac{1}{2} l_1 \eta_e' = 2{,}288 \text{ m}, \qquad \mathfrak{U}_2' = \frac{1}{2} \overline{a_1 m} \cdot \eta_m' = -0{,}572 \text{ m},$$

$$\mathfrak{U}_2'' = \frac{1}{2} \overline{m a_2} \cdot \eta_m'' = 3{,}670 \text{ m}, \qquad \mathfrak{U}_3 = \frac{1}{2} l_3 \eta_e'' = -2{,}288 \text{ m}.$$

Pohyblivým zatížením rovnoměrným vyvodíme max T_m, zatížíme-li plně díly $\overline{a_0 a_1}$, $\overline{m a_2}$, jež přičiňují kladně; tím vyjde

$$\max T_m = q' (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2'') = 0{,}8 \cdot 5{,}958 = 4{,}77 \text{ t}.$$

Obdobně jest

$$\min T_m = q' (\mathfrak{U}_2' + \mathfrak{U}_3) = -0{,}8 \cdot 2{,}860 = -2{,}29 \text{ t}.$$

Zatížení stálé dá sílu

$$T_m = q_0 \cdot \Sigma \mathfrak{U} = 1{,}5 \cdot 3{,}098 = 4{,}65 \text{ t}.$$

c) V průřezu n lze vyvoditi pouze záporný moment ohybový; min M_n určíme z pohyblivé soustavy břemen, zatížíme-li co nejvíce délku $\overline{n a_3}$, která obsáhne dvě lokomotivy. Nejúčinnější polohu soustavy stanovíme z kriteria Winklerova, do něhož dosadíme $x = \overline{n e_2} = 2$ m, $l = \overline{n a_3} = 14$ m, $R = 8 \cdot 12 = 96$ t a vypočteme

$$R \frac{x}{l} = 96 \cdot \frac{2}{14} = 13{,}7 \text{ t}.$$

Sčítáme-li břemena od levého konce soustavy, přestoupí se 13,7 t druhým břemenem, jež položíme do bodu n. Všechna břemena zde mají touž velikost $P' = 12$ t; z obrazce určíme součet příčinkových pořadnic

$$\Sigma \eta' = -0{,}80 - 2{,}00 - 1{,}80 - 1{,}60 - 0{,}87 - 0{,}67 - 0{,}47 - 0{,}27 = -8{,}48 \text{ m}$$

a stanovíme

$$\min M_n = P' \Sigma \eta' = -12 \cdot 8{,}48 = -101{,}76 \text{ mt}.$$

Příčinkový obrazec má největší pořadnici $\eta_e'' = -2$ m a obsah

$$\mathfrak{U} = \tfrac{1}{2} \overline{n a_3} \cdot \eta_e'' = -\tfrac{1}{2} 14 \cdot 2 = -14 \text{ m}^2.$$

Pohyblivé zatížení rovnoměrné dá moment

$$\min M_n = q' \mathfrak{U} = -0{,}8 \cdot 14 = -11{,}2 \text{ mt}$$

a stálé zatížení vyvodí

$$M_n = q_0 \mathfrak{U} = -1{,}5 \cdot 14 = -21 \text{ mt}.$$

d) Posouvající síla T_n je kladná; pohyblivou soustavou břemen vyvodíme její největší hodnotu, umístíme-li prvé břímě do bodu n, ostatní vpravo, neboť síla T_n je tím větší, čím blíže jsou břemena k bodu n. Vejdou se tu zase dvě lokomotivy, jež mají břemena stálé velikosti $P' = 12$ t; z obrazce určíme

$$\Sigma \eta' = 1{,}00 + 1{,}00 + 0{,}97 + 0{,}87 + 0{,}50 + 0{,}40 + 0{,}30 + 0{,}20 = 5{,}24$$

a vypočteme

$$\max T_n = P' \Sigma \eta' = 12 \cdot 5{,}24 = 62{,}88 \text{ t}.$$

Obsah příčinkového obrazce jest

$$\mathfrak{U} = 1 \cdot 2 + \tfrac{1}{2} 1 \cdot 12 = 8 \text{ m};$$

pohyblivým zatížením rovnoměrným vzniká

$$\max T_n = q' \mathfrak{U} = 0{,}8 \cdot 8 = 6{,}4 \text{ t},$$

stálé zatížení dá pak

$$T_n = q_0 \mathfrak{U} = 1{,}5 \cdot 8 = 12 \text{ t}.$$

e) Největší reakce A_1 vznikne pohyblivou soustavou břemen, zatížíme-li co nejvíce délku $\overline{a_0 a_2}$; jedno z největších a nejhustějších břemen umístíme pak do polohy největšího příčinku e_1. Na délku $\overline{a_0 a_2}$ se vejdou dvě lokomotivy a dva nákladní vozy. Nejúčinnější polohu této soustavy určíme podle kriteria Winklerova, dosazujíce $x = \overline{a_0 e_1} = 12$ m, $l = \overline{a_0 a_2} = 30$ m, $R = 8 \cdot 12 + 4 \cdot 11 = 140$ t; tu jest

$$R \frac{x}{l} = 140 \cdot \frac{12}{30} = 56 \text{ t}.$$

Sčítáme-li břemena od levého konce soustavy, přestoupí se 56 t pátým břemenem, jež jest umístiti do bodu e_1. Soustava má dvojí břemena; v paprscích břemen $P' = 12$ t jsou příčinkové pořadnice η', jež mají součet

$$\Sigma \eta' = 0{,}43 + 0{,}56 + 0{,}69 + 0{,}81 + 1{,}29 + 1{,}20 + 1{,}11 + 1{,}03 = 7{,}12;$$

v paprscích břemen $P'' = 11$ t znamenejme příčinkové pořadnice η'' a stanovme z obrazce

$$\Sigma \eta'' = 0{,}76 + 0{,}55 + 0{,}34 + 0{,}12 = 1{,}77.$$

Příčinkové pořadnice reakce A_1 jsou jako u sil posouvajících pouhá čísla nepojmenovaná a odměřují se v měřidle, jehož jednotkou je příčinková pořadnice $P = 1$ ve svislici podpory a_1. Za stanovené polohy soustavy břemen má reakce A_1 hodnotu

$$\max A_1 = P' \Sigma \eta' + P'' \Sigma \eta'' = 12 \cdot 7{,}12 + 11 \cdot 1{,}77 = 104{,}91 \text{ t}.$$

V třetím poli má příčinkový obrazec reakce A_1 týž tvar jako příčinkový obrazec momentu M_m; $\min A_1$ se pak vyvodí týmž zatížením v třetím poli jako $\min M_m^{(3)}$ a vypočte se, násobí-li se $\min M_m^{(3)}$ poměrem pořadnic η_e'' v čáře A_1 a čáře M_m. V čáře A_1 jest $\eta_e'' = -0{,}286$, v čáře M_m jsme určili $\eta_e'' = -1{,}14$, vyjde tedy

$$\min A_1 = \min M_m^{(3)} \cdot \frac{0{,}286}{1{,}14} = -15{,}50 \text{ t}.$$

K obsahům příčinkových obrazců potřebujeme pořadnice $\eta'_e = 1{,}286$, $\eta''_e = -0{,}286$; pak jest

$$\mathfrak{U}_1 = \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2)\,\eta'_e = \tfrac{1}{2}\,30 \cdot 1{,}286 = 19{,}29\ \text{m},$$
$$\mathfrak{U}_2 = \tfrac{1}{2}\,l_3\,\eta''_e = -\tfrac{1}{2}\,16 \cdot 0{,}286 = -2{,}29\ \text{m}.$$

Pohyblivé zatížení rovnoměrné dá

$$\max A_1 = q'\,\mathfrak{U}_1 = 0{,}8 \cdot 19{,}29 = 15{,}43\ \text{t},$$
$$\min A_1 = q'\,\mathfrak{U}_2 = -0{,}8 \cdot 2{,}29 = -1{,}83\ \text{t};$$

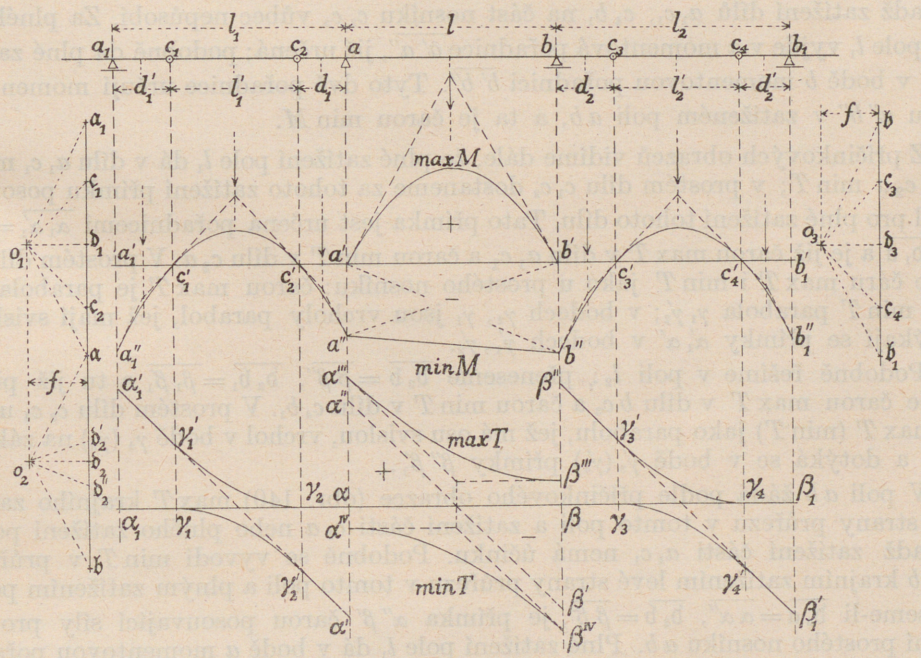
zatížení stálé vyvodí pak

$$A_1 = q_0\,(\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2) = 1{,}5 \cdot 17 = 25{,}5\ \text{t}.$$

Výsledky jsou sestaveny v tabulce a v ní jsou pak stanovena celková maxima (minima) součtem hodnoty, kterou dává zatížení stálé q_0, s maximem (minimem) z pohyblivé soustavy břemen ΣP i z pohyblivého zatížení rovnoměrného q'. V tabulce jsou momenty v mt a síly v t.

Krajní hodnoty momentů ohybových, sil posouvajících a reakcí podporových.

	q_0	ΣP		q'		Celkem	
		max	min	max	min	max	min
M_m	— 17,97	+ 137,64	— 155,04	+ 16,02	— 25,60	+ 135,69	— 198,61
T_m	+ 4,65	+ 30,35	— 15,50	+ 4,77	— 2,29	+ 39,77	— 13,14
M_n	— 21,00	—	— 101,76	—	— 11,20	— 21,00	— 133,96
T_n	+ 12,00	+ 62,88	—	+ 6,40	—	+ 81,28	+ 12,00
A_1	+ 25,50	+ 104,91	— 15,50	+ 15,43	— 1,83	+ 145,84	+ 8,17



Obr. 143.

42. *Přímé řešení krajních hodnot M, T, A pro pohyblivé zatížení rovnoměrné.* Čáry krajních hodnot ohybových momentů a posouvajících sil i krajní hodnoty reakcí určíme snadno graficky (obr. 143). Nejúčinnější zatížení pro maxima i minima ohybových momentů a posouvajících sil v jednotlivých průřezech nosníku plynou z příčinkových čar v obr. 140, 141.

Podle toho plné zatížení pole $\overline{a_1 a} = l_1$ vyvodí $\min M$ v částech $a_1 c_1$, $c_2 a$ a $\max M$ v části $c_1 c_2$. Zatížení těchto tří dílů pole l_1 nahradíme výslednicemi uprostřed dílů, přeneseme do složkové čáry určovací úseky výslednic $\overline{a_1 c_1} = q\,d_1'$, $\overline{c_1 c_2} = q\,l_1'$, $\overline{c_2 a} = q\,d_1$ a zvolíme pól o_1 proti středu $\mathfrak{d}_1$ úseku $\overline{c_1 c_2}$; výslednicová čára k výslednicím zatížení v uvedených úsecích seče svislice bodů c_1, c_2 v bodech c_1', c_2' na vodorovnici, kterou vezmeme za osu $a_1' b_1'$ momentového obrazce. Do lomené čáry výslednicové vepíšeme kvadratickou parabolu $a_1'' c_1' c_2' a''$.

Plné zatížení pole $\overline{a\,b} = l$ vyvodí v tomto poli $\max M$, jež se určí jako u prostého nosníku: přeneseme $q\,l = \overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}$, zvolíme pól o_2 na vodorovnici středu $\mathfrak{d}_2$ úseku $\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}$ v téže vzdálenosti f jako pól o_1 a rýsujeme výslednicovou čáru k výslednici zatížení, působící uprostřed $\overline{a\,b}$; do této lomené čáry výslednicové vepíšeme parabolu $a'\,b'$, jež je čarou $\max M$ v této části nosníku.

Podle příčinkových čar vyvodí plné zatížení pole $\overline{b\,b_1} = l_2$ v dílech $b\,c_3$, $c_4\,b_1$ $\min M$, v dílu $c_3 c_4$ $\max M$. Momentovou čarou je tu zase jediná spojitá parabola, kterou určíme, nahradíme-li zatížení oněch tří dílů výslednicemi uprostřed dílů, přeneseme do složkového obrazce úseky výslednic $q\,d_2 = \overline{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}_3}$, $q\,l_2' = \overline{\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_4}$, $q\,d_2' = \overline{\mathfrak{c}_4\,\mathfrak{b}_1}$ a zvolíme pól o_3 ve vzdálenosti f od složkové čáry na vodorovnici středu $\mathfrak{d}_3$ úseku $\overline{\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_4}$. Výslednicovou čáru rýsujeme tak, aby druhá strana šla bodem c_3' na prodloužené ose $a'\,b'$; výslednicová čára jde pak i bodem c_4' na téže ose. Do lomené výslednicové čáry vepisujeme parabolu $b''\,c_3'\,c_4'\,b_1''$.

Pro $\min M$ v poli $a\,b$ je třeba zatížiti plně části $c_1 a$ a $b\,c_4$ nebo celá pole l_1, l_2, poněvadž zatížení dílů $a_1 c_1$, $c_4 b_1$ na část nosníku $c_2 c_3$ vůbec nepůsobí. Za plného zatížení pole l_1 vyjde v a momentová pořadnice $\overline{a'\,a''}$, již určená; podobně dá plné zatížení pole l_2 v bodě b momentovou pořadnici $\overline{b'\,b''}$. Tyto dvě pořadnice určují momentovou přímku $a''\,b''$ v zatíženém poli $a\,b$, a ta je čarou $\min M$.

Z příčinkových obrazců vidíme dále, že plné zatížení pole l_1 dá v dílu $a_1 c_1$ $\max T$, v dílu $c_2 a$ $\min T$; v prostém dílu $c_1 c_2$ dostaneme za tohoto zatížení přímku posouvajících sil pro plné zatížení tohoto dílu. Tato přímka jest určena pořadnicemi $\overline{\alpha_1 \alpha_1'} = \overline{\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{a}_1}$, $\overline{\alpha\,\alpha'} = \overline{\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{a}}$ a je již čarou $\max T$ v dílu $a_1 c_1$ a čarou $\min T$ v dílu $c_2 a$. V prostém dílu $c_1 c_2$ určíme čáru $\max T$ i $\min T$ jako u prostého nosníku: čarou $\max T$ je parabola $\gamma_1' \gamma_2$, čarou $\min T$ parabola $\gamma_1 \gamma_2'$; v bodech γ_2, γ_1 jsou vrcholy parabol, jež mají svislé osy a dotýkají se přímky $\alpha_1' \alpha'$ v bodech γ_1', γ_2'.

Podobně řešíme v poli l_2: přeneseme $\overline{\mathfrak{d}_3\,\mathfrak{b}} = \overline{\beta\,\beta''}$, $\overline{\mathfrak{d}_3\,\mathfrak{b}_1} = \overline{\beta_1\,\beta_1'}$ a tu již přímka $\beta''\,\beta_1'$ je čarou $\max T$ v dílu $b\,c_3$ a čarou $\min T$ v dílu $c_4 b_1$. V prostém dílu $c_3 c_4$ určíme čáru $\max T$ ($\min T$) jako parabolu, jež má osu svislou, vrchol v bodě γ_4 (γ_3) na základní straně a dotýká se v bodě γ_3' (γ_4') přímky $\beta''\,\beta_1'$.

V poli $a\,b$ žádá podle příčinkového obrazce (obr. 140) $\max T$ krajního zatížení pravé strany průřezu v tomto poli a zatížení části $c_1 a$ nebo plného zatížení pole l_1, poněvadž zatížení části $a_1 c_1$ nemá účinku. Podobně se vyvodí $\min T$ v průřezech pole $a\,b$ krajním zatížením levé strany průřezu v tomto poli a plným zatížením pole l_2. Přeneseme-li $\overline{\mathfrak{d}_2\,\mathfrak{a}} = \overline{\alpha\,\alpha''}$, $\overline{\mathfrak{d}_2\,\mathfrak{b}} = \overline{\beta\,\beta'}$, je přímka $\alpha''\,\beta'$ čarou posouvající síly pro plné zatížení prostého nosníku $a\,b$. Plné zatížení pole l_1 dá v bodě a momentovou pořadnici $\overline{a'\,a''}$ a v nezatíženém poli $a\,b$ momentovou přímku $a''\,b'$; pólový paprsek $o_2\,\mathfrak{d}_2' \parallel a''\,b'$

určí úsek $\overline{\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}'_2}$ příslušné posouvající síly v poli $a\,b$, jenž se prostě přičítá k pořadnicím, které dá zatížení pole $a\,b$ a jež se určí jako u prostého nosníku. Čarou $\max T$ v poli $a\,b$ je pak čára prostého nosníku posunutá o úsek $\overline{\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}'_2} = \overline{\alpha'' \alpha'''} = \overline{\beta \beta'''}$, tedy parabola $\alpha''' \beta'''$, jež má v β''' vrchol, osu svislou a v bodě α''' tečnu rovnoběžnou s přímkou $\alpha'' \beta'$. Obdobně dá plné zatížení pole l_2 v bodě b momentovou pořadnici $\overline{b' b''}$ a v nezatíženém poli $a\,b$ momentovou přímku $a' b''$; pólový paprsek $o_2 \mathfrak{d}''_2 \parallel a' b''$ určí úsek $\overline{\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}''_2}$ příslušné posouvající síly v poli $a\,b$, o který posuneme čáru $\min T$ prostého nosníku. Přenesme tedy $\overline{\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}''_2} = \overline{\alpha \alpha^{IV}} = \overline{\beta' \beta^{IV}}$ a rýsujeme jakožto čáru $\min T$ v poli $a\,b$ parabolu $\alpha^{IV} \beta^{IV}$, jež má v α^{IV} vrchol, osu svislou a dotýká se v bodě β^{IV} přímky rovnoběžné s $\alpha'' \beta'$.

Obrazec posouvajících sil dává též krajní hodnoty reakcí. Jako u spojitého nosníku bez kloubů je reakce $A = -T_a + T'_a$, je-li T_a (T'_a) posouvající síla vlevo (vpravo) od podpory a. Z toho vychází

$$\max A = -\min T_a + \max T'_a = \overline{\alpha' \alpha} + \overline{\alpha \alpha'''} = \overline{\alpha' \alpha'''},$$

$$\min A = -\max T_a + \min T'_a = 0 + \overline{\alpha \alpha^{IV}} = \overline{\alpha \alpha^{IV}}.$$

Určovací úsek $\max A$ ($\min A$) měříme tedy od čáry $\min T$ ($\max T$) vlevo od podpory k čáře $\max T$ ($\min T$) vpravo od podpory. Totéž platí pro reakci B, takže jest

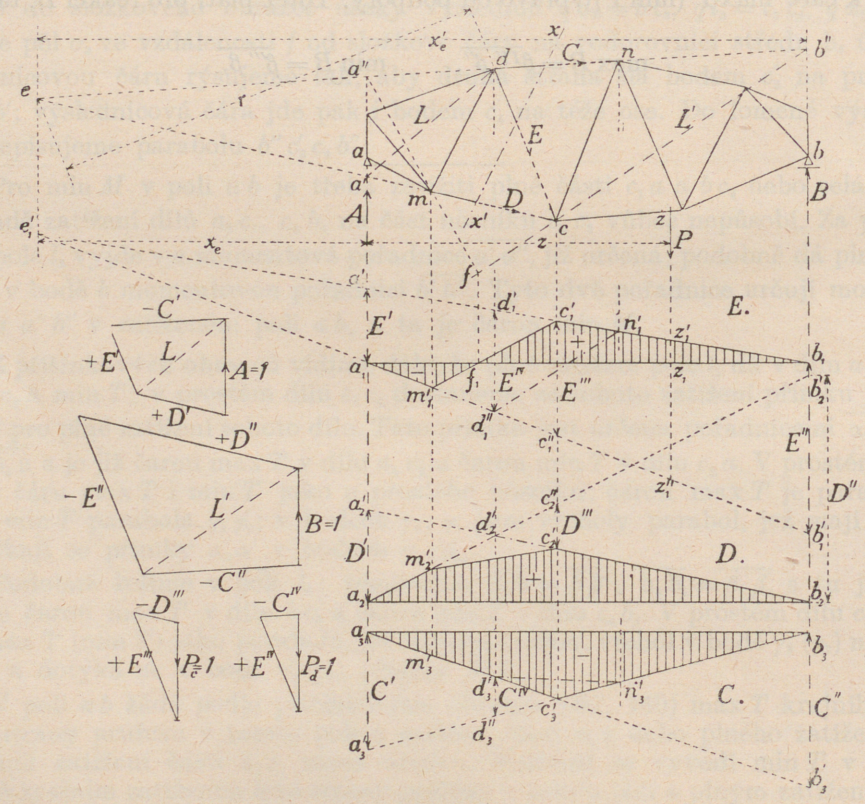
$$\max B = \overline{\beta^{IV} \beta''}, \qquad \min B = \overline{\beta''' \beta}.$$

C) Staticky určité soustavy prutové za pohyblivého zatížení a jejich přetvoření.

I. Zatížení pohyblivé.

a) Prostý nosník příhradový soustavy trojúhelníkové.

43. Příčinkové čáry osových sil prutů v soustavě kosoúhlé. Příhradový nosník trojúhelníkové soustavy kosoúhlé budiž podepřen v bodě a pevně, v bodě b posouvatelně po vodorovné (obr. 144). Vyšetřme, jak se mění osové síly prutů, pohybuje-li se jediné osamělé břímě P po nosníku. Proměnu osových sil znázorníme příčinkovými čarami, jež sestrojíme pro břímě $P = 1$.



Obr. 144.

Břímě P, jež působí v obecné poloze z vpravo od řezu xx' vedeného pruty C, D, E, vyvodí v podporách reakce A, B a v proťatých prutech osové síly C, D, E.

Odejmeme-li část nosníku vpravo od řezu $x x'$ a nahradíme-li její působení osovými silami C, D, E proťatých prutů, musí býti rovnováha. Z rovnováhy sil A, C, D, E, jež působí na levou část nosníku, určíme na př. osovou sílu E, uvažujíce momentovou výminku rovnováhy k přidruženému středu momentovému e, jenž je v průsečíku os prutů C, D. Znamenáme-li x_e prostou hodnotu vodorovné vzdálenosti bodu e od svislice bodu a a r délku kolmice, spuštěné z bodu e na osu prutu E, má momentová výminka rovnováhy sil A, C, D, E k bodu e tvar

$$A x_e - E_A r = 0,$$

jenž dá

$$E_A = A \frac{x_e}{r}. \tag{155a}$$

Pohybuje-li se břímě $P = 1$ po nosníku, mění se na pravé straně vzorce (155a) pouze reakce A, a to po zákonu přímky, dané ve svislici bodu b pořadnicí nulovou, ve svislici bodu a pořadnicí $P = 1$. Pak se mění též osová síla E_A, jež plyne z reakce A, po zákonu přímky, již určíme dvěma body. Břímě působící v bodě b dá $A = 0$, tedy i $E_A = 0$; břímě $P = 1$, jež působí v bodě a, vyvodí $A = P = 1$ a podle vzorce (155a) sílu osovou

$$E' = 1 \cdot \frac{x_e}{r}. \tag{155b}$$

Pořadnice $E' = \overline{a_1 a_1'}$ má pouze měřickou platnost jakožto pořadnice prodloužené přímky příčinkové, jež platí staticky po pravé straně řezu $x x'$. Sílu E' určíme též graficky jako osovou sílu prutu E, jež vzniká, působí-li po levé straně řezu $x x'$ pouze reakce $A = 1$. Tato reakce je v rovnováze s osovými silami C', D', E' proťatých prutů, jež stanovíme na př. methodou průsečnou, nahrazujíce síly C', E' výslednicí, působící v témž paprsku $L \equiv a' d$ jako výslednice sil $A = 1$, D'. Znaménka osových sil vyšetříme vztahujíce směry jejich dané obrazcem silovým k části nosníku vlevo od řezu $x x'$ a znamenajíce kladně síly D', E', jež působí od řezu $x x'$ (tahy) a záporně sílu C' působící k řezu $x x'$ (tlak). Pořadnicí $E' = \overline{a_1 a_1'}$ jest určena přímka $a_1' b_1$, jež je příčinkovou čarou osové síly E po pravé straně řezu $x x'$. Přenáší-li se tedy zatížení pohyblivé nepřímo na př. do styčných bodů spodního pasu, platí přímka $a_1' b_1$ staticky pouze vpravo od svislice pravého styčného bodu c proťatého spodního pasu D.

Kdyby břímě $P = 1$ působilo vlevo od řezu $x x'$, odňali bychom levou část nosníku a řešili z rovnováhy sil B, C, D, E. Momentová výminka rovnováhy k bodu e je tu

$$B x_e' + E_B r = 0,$$

je-li x_e' vodorovná vzdálenost bodu e od svislice bodu b; pak vychází

$$E_B = - B \frac{x_e'}{r}. \tag{156a}$$

Síla E_B, jež plyne z pouhé reakce B jakožto jediné síly vnější po pravé straně řezu $x x'$, mění se jako reakce B po zákonu přímky. Břímě v bodě a působící dá $B = 0$ i $E_B = 0$; působí-li břímě $P = 1$ v bodě b, vyjde $B = P = 1$ a podle vzorce (156a)

$$E'' = - 1 \cdot \frac{x_e'}{r}, \tag{156b}$$

což znamená osovou sílu, jež vzniká v prutu E, působí-li po pravé straně řezu $x x'$ pouze reakce $B = 1$. Z rovnováhy sil $B = 1$, C'', D'', E'' určíme osové síly proťatých prutů graficky na př. methodou průsečnou; výslednice sil D'', E'' působí zde v témž paprsku $L' \equiv b'' c$ jako výslednice sil B, C''. Znaménka osových sil stanovíme, vztahujeme-li směry jejich určené obrazcem silovým k části nosníku vpravo od řezu $x x'$;

síly C'', E'' jsou zde záporné (tlaky), poněvadž působí k řezu $x x'$, síla D'' je pak kladná (tah), směřujíc od řezu $x x'$. Pořadnice $E'' = \overline{b_1 b_1'}$, přenesená algebraicky, určuje přímku $a_1 b_1'$, jež je příčinkovou čarou osové síly E po levé straně řezu $x x'$, tedy vlevo od svislice levého styčného bodu m prořatého spodního pasu D, působí-li zatížení pohyblivé na spodní pás.

Měřicky platí obě stanovené přímky neomezeně, dávajíce ve svislici obecné polohy z břemene P pořadnice

$$\overline{z_1 z_1'} = E_A, \qquad \overline{z_1 z_1''} = E_B.$$

Mezi přímkami $a_1 b_1'$, $a_1' b_1$ je pak ve svislici polohy z pořadnice

$$\overline{z_1'' z_1'} = \overline{z_1'' z_1} + \overline{z_1 z_1'} = E_A - E_B = \frac{A x_e + B x_e'}{r}.$$

Z rovnováhy sil A, B, P plyne momentovou výminkou k bodu e

$$A x_e + B x_e' = P (x_e + z);$$

pak jest

$$\overline{z_1'' z_1'} = P \frac{x_e + z}{r} = E_P, \tag{157}$$

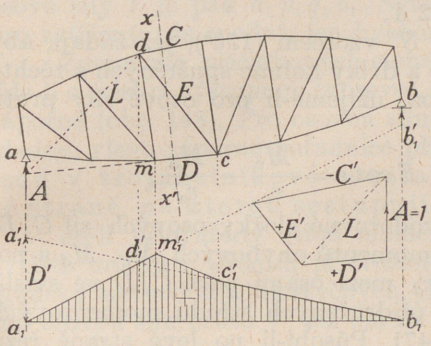
což znamená osovou sílu prutu E, která je v rovnováze se silami C, D, P. Vynecháváme tedy, hledajíce sílu E_P, podporové reakce a pokládáme břímě P za jedinou vnější sílu po jedné straně řezu; myslíme-li si pak, že jest odňata část nosníku vlevo od řezu $x x'$, platí znaménko ve vzorci (157). Určíme tedy algebraickou pořadnici mezi prodlouženou levou a pravou přímkou příčinkovou v libovolné svislici jakožto osovou sílu, jež plyne z rovnováhy sil P, C, D, E, myslíme-li si, že odnímáme část nosníku vlevo od řezu $x x'$. Hledáme-li podle toho pořadnici mezi přímkami $a_1 b_1'$, $a_1' b_1$ ve svislici bodu e, kde by bylo $z = -x_e$, vyjde tu $E_P = 0$, z čehož plyne, že se přímky $a_1 b_1'$, $a_1' b_1$ sekou v bodě e_1' na svislici přidruženého středu momentového e. Působí-li břímě $P = 1$ v bodě c, plyne z rovnováhy sil P, C, D, E osová síla $C = 0$, jelikož jediná vnější síla P jde tu momentovým středem přidruženým k prutu C; rozložíme tedy břímě $P = 1$ pouze do směrů D, E a dostaneme pořadnici $E''' = \overline{c_1'' c_1'}$. Je-li břímě $P = 1$ ve svislici bodu d, vyjde obdobně z rovnováhy sil P, C, D, E osová síla $D = 0$; zbývají pak v rovnováze pouze síly P, C^{IV} a $E^{IV} = \overline{d_1'' d_1'}$.

V oddílu $m c$ je příčinkovou čarou přímka $m_1' c_1'$, jelikož jde o zatížení nepřímé; přímka $m_1' c_1'$ seče pak osu v bodě f_1 na svislici *obojetné* (*neutrálné*) *polohy* břemene. Svislici obojetné polohy sestrojíme přímo, protneme-li osu nezatíženého pasu C se svislicemi podporovými v bodech a'', b'' a spojíme-li bod a'' s m a bod b'' s c; obě spojnice se sekou v bodě f na svislici obojetné polohy. Neboť působí-li břímě P ve svislici bodu f, lze pokládati $a'' f b''$ za momentový trojúhelník k tomuto břemeni. Poněvadž se pak zatížení přenáší nepřímo do styčných bodů spodního pasu, nahraditi jest v oddílu $m c$ momentovou čáru $m f c$ přímkou $m c$. Po levé straně řezu $x x'$ působí tu reakce A a složka P_m břemene P do bodu m; k těmto silám náleží výslednicová čára $b'' a'' m c$, jejíž krajní strany se sekou v bodě e, kterým tedy prochází výslednice vnějších sil A, P_m po levé straně řezu $x x'$. Tyto síly mají pak k bodu e moment rovný nule, i je též osová síla $E = 0$ a bod f je proto ve svislici polohy obojetné.

Příčinkovou čarou osové síly libovolného prutu je tedy vpravo i vlevo od řezu $x x'$, vedeného prutem podle pravidel methody průsečné, jediná přímka. Pravá přímka příčinková je dána ve svislici levé podpory pořadnicí S', jež plyne jako osová síla prutu, působí-li po levé straně řezu $x x'$ pouze reakce $A = 1$; obdobně jest určena levá přímka příčinková ve svislici pravé podpory pořadnicí S'', kterou stanovíme jako osovou sílu prutu, působí-li po pravé straně řezu $x x'$ pouze reakce $B = 1$. V druhé svislici podporové má každá z obou přímek pořadnici nulovou. Obě přímky se sekou na svislici přidruženého středu momentového a svislá pořadnice mezi nimi v libovolném místě se stanoví

jako osová síla prutu S_P, působí-li po jedné straně řezu pouze břímě $P = 1$ v příslušné poloze jakožto jediná síla vnější; myslíme-li si, že je odňata levá část nosníku, dává síla S_P algebraicky pořadnici mezi levou a pravou přímkou příčinkovou. V proťatém oddílu zatíženého pasu je příčinkovou čarou rovněž přímka, jež má s předešlými přímkami společné body na mezích tohoto oddílu.

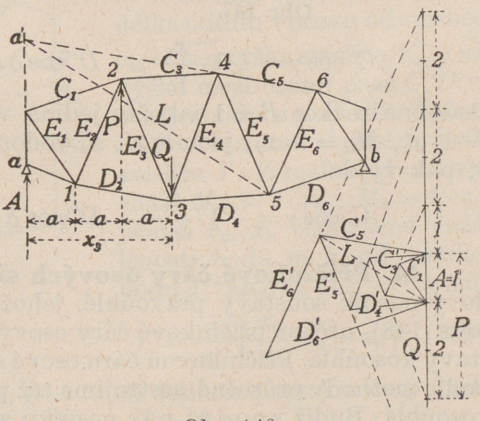
Podle toho určíme příčinkovou čáru osové síly D, naneseme-li ve svislicích podporových pořadnice $D' = \overline{a_2 a_2'}$, $D'' = \overline{b_2 b_2'}$; přímka $a_2' b_2$ platí staticky vpravo od svislice bodu c, přímka $a_2 b_2'$ vlevo od svislice bodu m, je-li spodní pás zatížen. V oddílu $m\,c$ je příčinkovou čarou přímka $m_2' c_2'$. Přímky $a_2' b_2$, $a_2 b_2'$ se sekou v bodě d_2' na svislici přidruženého středu momentového d a mezi nimi je na př. ve svislici bodu c pořadnice $\overline{c_2'' c_2'} = D'''$, znamená-li D''' osovou sílu v prutu D, jež je v rovnováze se silou E''', $C''' = 0$ a břemenem $P_c = 1$. Příčinková čára osové síly C jest obdobně stanovena pořadnicemi $C' = \overline{a_3 a_3'}$, $C'' = \overline{b_3 b_3'}$; přímka $a_3' b_3$ platí vpravo, $a_3 b_3'$ vlevo od řezu $x\,x'$. Obě přímky se sekou v bodě c_3' na svislici přidruženého středu momentového c a pořadnice mezi nimi na př. ve svislici bodu d je $\overline{d_3' d_3''} = C^{IV}$.



Obr. 145.

Kdyby zatížení pohyblivé působilo na horní pás, brali bychom oddíl $d\,n$ místo oddílu $m\,c$; levá přímka příčinková by platila až ke svislici bodu d, pravá teprve od svislice bodu n a v oddílu $d\,n$ bychom vložili mezi obě přímky přímku novou. Příčinkovým obrazcem osové síly E by tu byl obrazec $a_1 d_1'' n_1' b_1$, příčinkovým obrazcem síly D trojúhelník $a_2 d_2' b_2$ a příčinkovým obrazcem síly C čtyrúhelník $a_3 d_3' n_3' b_3$. V oddílu $d\,n$ bychom obdrželi u mezipasového prutu E jinou polohu obojetnou; její svislice by se sestrojila v mnohostranu osovém obdobně jako bod f, jen by bylo vyměniti horní a spodní pás.

Odvozená pravidla platí obecně, nechť je tvar nosníku jakýkoli. Je-li na př. šikmý nosník příhradový[1]) podepřen v bodě a pevně, v bodě b posouvatelně po vodorovné (obr. 145), určíme příčinkovou čáru osové síly D zase z pořadnic $D' = \overline{a_1 a_1'}$, $D'' = \overline{b_1 b_1'}$, jež znamenají osové síly v prutu D, působí-li po jedné straně řezu $x\,x'$ pouze reakce $A = 1$, po případě $B = 1$. Přímka $a_1' b_1$ platí vpravo od řezu $x\,x'$, tedy vpravo od svislice bodu c, působí-li zatížení pohyblivé na spodní pás; přímka $a_1 b_1'$ platí vlevo od řezu $x\,x'$, tedy vlevo od svislice bodu m. Obě přímky se sekou na svislici přidruženého středu d a v oddílu $m\,c$ je příčinkovou čarou přímka $m_1' c_1'$.



Obr. 146.

Pořadnice S', S'', jimiž stanovíme v podporových svislicích příčinkové přímky, určíme graficky, jak je ukázáno v obr. 144; jde-li o všechny pruty, řešili bychom methodou bodů styčných (obr. 146).

Pro silový obrazec můžeme tu odvoditi kontroly z methody průsečné. Na př. jsou v rovnováze síly A, C_5, E_5, D_4 (obr. 146); výslednice sil A, C_5, jdoucí bodem a',

[1]) Viz *W. L. Andrée* „Die Statik des Eisenbaues" (Mnichov 1917), str. 417.

musí se rušiti s výslednicí sil E_5, D_4, jež jde styčným bodem 5, takže obě výslednice mají společný paprsek $L \equiv a'\,5$ a s ním musí být v obrazci silovém rovnoběžný určovací úsek jedné i druhé výslednice. Další kontrolu můžeme odvoditi, je-li vodorovný průmět délek mezipasových prutů stálý. Nahradíme-li reakci $A = 1$ svislými silami P, Q na př. v bodech 2, 3, jež spojuje příčka E_3, je

$$P = A\,\frac{x_3}{a}, \qquad Q = A\,\frac{x_2}{a};$$

jelikož pak je

$$x_3 = 3\,a, \qquad x_2 = 2\,a,$$

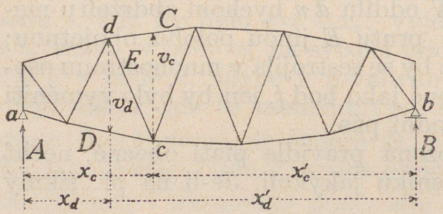
vyjde

$$P = 3\,A, \qquad Q = 2\,A.$$

Z rovnováhy sil P, Q, C_3, E_3, D_2 plyne, že paprsek výslednice sil Q, D_2, E_3, jdoucí bodem 3, musí procházeti též bodem 2, v němž se protínají paprsky zbývajících sil P, C_3. Síla P je tedy v rovnováze se silou C_3 a s výslednicí (Q, D_2, E_3), jež má paprsek E_3; tedy prodloužený úsek síly E_3 v obrazci silovém musí procházeti ve složkové čáře bodem, jenž má od horního konce úseku A vzdálenost 3 A. Podobně plyne, že prodloužené úseky každých dvou posloupných sil v příčkách téže polohy (sestupných nebo výstupných) utínají na složkové čáře úsek $2\,A$.

Počtem jsou dány síly S' vzorcem (155^b) a S'' vzorcem (156^b), jež žádají, aby byly předem určeny přidružené středy momentové a délky kolmic spuštěných z těchto středů na osy příslušných prutů. Toho není třeba, užijeme-li pro osové síly prutů vzorců[1])

$$C\cos\gamma = -\frac{M_c}{v_c}, \qquad D\cos\delta = \frac{M_d}{v_d}, \qquad E\cos\varepsilon = \frac{M_c}{v_c} - \frac{M_d}{v_d},$$



Obr. 147.

jež určují vodorovné složky osových sil C, D, E z podílů momentů ohybových M_c, M_d a pořadnic v_c, v_d mezi osami pasů C, D ve svislicích jejich přidružených středů momentových c, d (obr. 147). Působí-li po levé straně řezu $x\,x'$ pouze reakce $A = 1$, jest $M_c = 1 \cdot x_c$, $M_d = 1 \cdot x_d$, znamenáme-li x_c, x_d vodorovné vzdálenosti bodů c, d od svislice bodu a; hořejší vzorce dají

$$C'\cos\gamma = -1 \cdot \frac{x_c}{v_c}, \qquad D'\cos\delta = 1 \cdot \frac{x_d}{v_d}, \qquad E'\cos\varepsilon = 1 \cdot \frac{x_c}{v_c} - 1 \cdot \frac{x_d}{v_d}. \qquad (158^a)$$

Podobně reakce $B = 1$ jakožto jediná vnější síla po pravé straně řezu $x\,x'$ dá $M_c = 1 \cdot x'_c$, $M_d = 1 \cdot x'_d$, jsou-li x'_c, x'_d vodorovné vzdálenosti bodů c, d od svislice podpory b; pak vyjde

$$C''\cos\gamma = -1 \cdot \frac{x'_c}{v_c}, \qquad D''\cos\delta = 1 \cdot \frac{x'_d}{v_d}, \qquad E''\cos\varepsilon = 1 \cdot \frac{x'_c}{v_c} - 1 \cdot \frac{x'_d}{v_d}. \qquad (158^b)$$

44. Příčinkové čáry osových sil prutů v soustavě pravoúhlé. Pro příhradový nosník soustavy pravoúhlé, jehož mezipasové pruty jsou střídavě svislé a šikmé (obr. 148), určí se příčinkové čáry osových sil v pasech a příčkách jako pro nosník soustavy kosoúhlé. Příčinkovou čáru osové síly ve svislici V, kterou lze protnouti řezem $x\,x'$ podle methody průsečné, sestrojíme též podle obecných pravidel odvozených u soustavy kosoúhlé. Budiž spodní pás nosníku zatížen pohyblivým zatížením. Pravá přímka příčinková $n'_1 b_1$ je dána ve svislici bodu a pořadnicí $\overline{a_1 a'_1} = V'$, jež plyne jako osová síla z rovnováhy sil $A = 1$, C', D', V'; levá přímka příčinková $a_1 m'_1$ má ve svislici bodu b pořadnici $\overline{b_1 b'_1} = V''$, kterou určíme jako osovou sílu z rovnováhy sil $B = 1$, C'', D'', V''. Obě přímky se sekou na svislici přidruženého středu momentového v

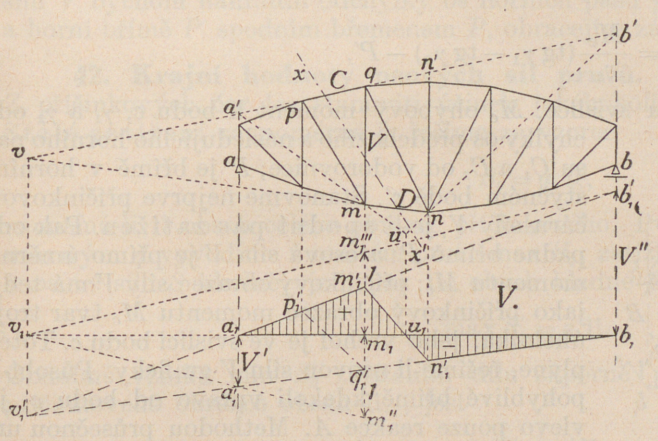
[1]) Viz prvý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1940), str. 196.

a svislá pořadnice mezi nimi v libovolné poloze plyne jako osová síla svislice z rovnováhy sil C, D, V se samotným břemenem $P = 1$ v příslušné poloze působícím. Hledejme tuto pořadnici ve svislici bodu m, tedy z rovnováhy sil $P_m = 1$, C, D, V; jelikož břímě P_m, působící ve svislici bodu m, prochází přidruženými středy momentovými prutů C i D, vyjde z uvedené rovnováhy $C = 0$, $D = 0$ a $V = -P_m = -1$, odnímáme-li levou stranu; je tedy pořadnice $\overline{m_1' q_1'} = -1$. Z obrazce plyne pak, že pořadnici V' (V'') sestrojíme, promítneme-li jednotku silovou, přenesenou do svislice V, z bodu na svislici v na levou (pravou) svislici podporovou. Je-li bod v na nákresně, není třeba zvláště řešiti síly V', V''; přeneseme-li $\overline{m_1 m_1'''} = \overline{m_1'' m_1} = 1$ a promítneme-li bod v svisle na prodlouženou osu $a_1 b_1$, určuje spojnice $v_1 m_1'''$ pořadnici $\overline{a_1' a_1} = V'$ a spojnice $v_1 m_1'''$ pořadnici $\overline{b_1' b_1} = V''$. V oddílu $m n$ proťatého zatíženého pasu je příčinkovou čarou přímka $m_1' n_1'$, jež seče osu $a_1 b_1$ v bodě u_1 na svislici obojetné polohy břemene. Tuto svislici sestrojíme přímo jako u soustavy kosoúhlé, protneme-li prodlouženou osu pasu C se svislicemi podporovými v bodech a', b' a spojíme-li body a', m a b', n; obě spojnice se sekou v bodě u na svislici polohy obojetné.

Působí-li zatížení pohyblivé ve styčných bodech horního pasu, bráti jest proťatý oddíl $p q$ horního pasu místo oddílu $m n$ spodního pasu. Příčinkovou čarou osové síly V je pak $a_1 p_1' q_1' b_1$. Svislice obojetné polohy by se tu určila obdobně jako pro zatížený pás spodní; jen bychom pasy C a D vyměnili.

Znaménka příčinkových pořadnic jsou stanovena kteroukoli z pořadnic V', V''. Jde-li o svislici výstupnou (vpravo), vychází vlevo znaménko kladné, vpravo znaménko záporné (obr. 148). Pro osovou sílu sestupné příčky E jsme dostali (obr. 144) vpravo kladné, vlevo záporné pořadnice příčinkové. Srovnáním obou případů poznáváme, že jsou v trojúhelníkové soustavě mezipasové pruty taženy břemeny na té straně, na kterou sestupují.

Je-li přidružený střed momentový v na nákresně, nemusíme pořadnice V', V'' zvláště určovati. Není-li přidružený střed momentový určen, stanovíme síly V', V'' graficky methodou bodů styčných, jde-li o více prutů. Počtem bychom je určili z rovnice pro osovou sílu prutu V, jež má za označení podle obr. 148 na př. tvar[1])



Obr. 148.

$$V = \frac{1}{a''}\left(\frac{M_m}{v_m} v_n'' - M_n\right) - P';$$

M_m a M_n jsou ohybové momenty k bodům m, n, dále jest a'' délka oddílu vpravo od svislice, $v_m = \overline{m q}$ výška svislice, $v_n'' = \overline{n n'}$ výška mezi osami pasů C, D ve svislici bodu n a P' břímě působící v horním styčném bodě svislice V. Z reakce $A = 1$ vychází $M_m = 1 \cdot x_m$, $M_n = 1 \cdot x_n$, jsou-li x_m, x_n vodorovné vzdálenosti bodů m, n od svislice bodu a; zároveň je $P' = 0$ a tedy

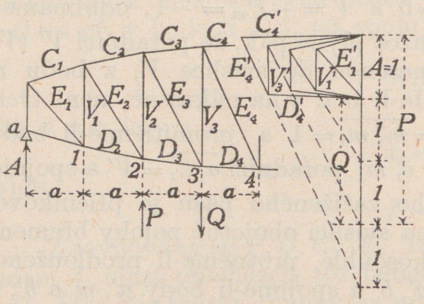
$$V' = \frac{1}{a''}\left(\frac{x_m}{v_m} v_n'' - x_n\right). \quad (159^a)$$

Působí-li po pravé straně řezu pouze reakce $B = 1$, od jejíhož paprsku mají body m, n vzdálenosti x_m', x_n', jest $M_m = 1 \cdot x_m'$, $M_n = 1 \cdot x_n'$, $P' = 0$ a

$$V'' = \frac{1}{a''}\left(\frac{x_m'}{v_m} v_n'' - x_n'\right). \quad (159^b)$$

[1]) Viz prvý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1940), str. 198; tamtéž jest uveden pro sílu V ještě jeden vzorec, jenž může býti v některých případech příhodnější.

Řešíme-li u pravoúhlé soustavy graficky osové síly S' z reakce $A = 1$ v obrazci silovém methodou bodů styčných (obr. 149), tu nahradíme-li reakci A svislými silami P, Q ve styčných bodech *2*, *3*, je při stálé délce příhrady a síla $P = 3A$, $Q = 2A$; síla P je v rovnováze se silou C_3 a s výslednicí (Q, D_3, E_3), jež působí v paprsku E_3, prodloužený úsek E'_3 jde tedy dolním koncem úseku síly P ve složkové čáře. Každé dva prodloužené úseky sil v posloupných příčkách utínají proto na složkové čáře úsek rovný jednotce.



Obr. 149.

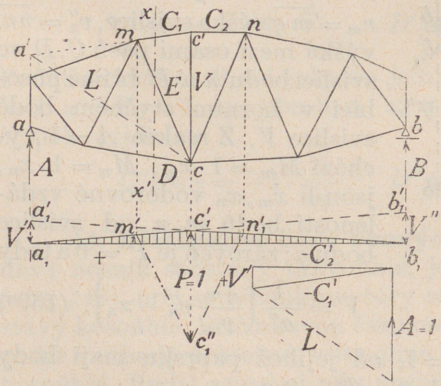
Počtem bychom určili úseky sil S', S'' v pasových prutech a v příčkách podle vzorců (158^a), (158^b) jako u soustavy kosoúhlé.

Sestrojení příčinkových čar jsme dosud odvozovali methodou průsečnou; platí tedy předešlá pravidla ve všech případech, ve kterých lze určiti osové síly prutů methodou průsečnou. Tomu nevyhovují především podporové svislice, jejichž osové síly se však snadno určí. V podporové svislici působí tlak rovný hornímu břemeni, vychází-li příčka ze spodního konce svislice; připojuje-li se první příčka ke svislici podporové v horním styčném bodě, je podporová svislice tlačena silou, jež se rovná rozdílu podporové reakce a spodního břemene. V posledním případě je příčinková čára osové síly v podporové svislici shodná s příčinkovou čarou podporové reakce, působí-li zatížení na horní pás. Je-li však spodní pás zatížen, je v podpoře příčinková pořadnice osové síly v podporové svislici rovna nule a v sousedním oddílu je příčinkovou čarou přímka, jejíž pořadnice v sousedním styčném bodě je dána příčinkovou čarou reakce, s níž se shoduje mimo prvý oddíl příčinková čára osové síly v podporové svislici.

Methodou průsečnou nelze také určiti osovou sílu svislice V, z jejíhož spodního styčného bodu vycházejí dvě příčky, z horního žádná (obr. 150). Pro osovou sílu této svislice platí obecný vzorec[1])

$$V = \frac{M_c}{v_c}(\operatorname{tg}\gamma_1 - \operatorname{tg}\gamma_2) - P',$$

v němž znamená $v_c = \overline{cc'}$ výšku svislice, M_c ohybový moment k bodu c, γ_1 a γ_2 odchylky os předchozího a následujícího horního pasu C_1 a C_2 od vodorovnice; P' je břímě v horním styčném bodě c'. Stanovme nejprve příčinkovou čáru síly V, je-li spodní pás zatížen. Pak odpadne břímě P' a osová síla V je přímo úměrná momentu M_c; příčinkový obrazec síly V má tedy jako příčinkový obrazec momentu M_c tvar trojúhelníka, jeho vrchol je ve svislici bodu c. Totéž plyne, řešíme-li osovou sílu V graficky. Působí-li pohyblivé břímě kdekoli vpravo od bodu c, je vlevo pouze reakce A. Methodou průsečnou určíme z rovnováhy sil A, C_1, E, D osovou sílu C_1, nahrazujíce síly D, E výslednicí, jež působí v témž paprsku $L \equiv a'c$ jako výslednice sil A, C_1; v bodě c' jsou pak v rovnováze síly C_1, C_2, V, lze tedy ze známé síly C_1 určiti síly C_2 a V. Pohybuje-li se břímě $P = 1$ po nosníku, mění se reakce A po zákonu přímky; pokud je břímě vpravo od bodu c, je obrazec silový, z něhož určujeme sílu V, stále podobný i mění



Obr. 150.

se břímě vpravo od bodu c, je obrazec silový, z něhož určujeme sílu V, stále podobný i mění

[1]) Viz prvý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1940), str. 198.

se síla V též po zákonu přímky jako reakce A. Měřicky platí tato přímka, jež má ve svislici bodu b pořadnici nulovou, až ke svislici bodu a; z příčinkové pořadnice $A = 1$ v tomto bodě plyne methodou průsečnou síla C'_1 a z rovnováhy v bodě c' síly C'_2, V'. Pořadnice $V' = \overline{a_1 a'_1}$ stanoví přímku $a'_1 b_1$, jež je vpravo od svislice bodu c příčinkovou čarou síly V. Podobně bychom určili z reakce $B = 1$ jakožto jediné síly vnější po pravé straně bodu c osovou sílu V'' a přenesli bychom ji jakožto pořadnici $\overline{b_1 b'_1} = V''$; přímka $a_1 b'_1$ je příčinkovou čarou síly V vlevo od svislice bodu c. Přímky $a'_1 b_1$, $a_1 b'_1$ se sekou v bodě c'_1 na svislici bodu c, poněvadž příčinkový obrazec síly V je téhož tvaru jako obrazec momentu M_c. Příčinkovým obrazcem osové síly V je trojúhelník $a_1 c'_1 b_1$, je-li zatížen spodní pás.

Přenáší-li se zatížení do styčných bodů horního pasu, platí stanovená příčinková čára pro všechny polohy pohyblivého břemene $P = 1$, jež nedají do bodu c' žádného břemene P'; platí tedy přímky stanovené v částech $a_1 m'_1$, $n'_1 b_1$. V oddílech mc, cn po obou stranách svislice V se však příčinková čára mění. Působí-li břímě $P = 1$ v bodě c', mění se příčinková pořadnice, určená pro zatížení spodního pasu, tedy za předpokladu $P' = 0$, podle vzorce pro sílu V o hodnotu $-P' = -1$, kterou přičteme ve svislici bodu c algebraicky k pořadnici stanovené čáry, přeneseme-li $\overline{c'_1 c''_1} = -P = -1$ ve smyslu záporných pořadnic příčinkových. Bod c''_1 určuje správnou pořadnici příčinkovou ve svislici bodu c, v oddílech mc, cn jsou pak příčinkovými čarami přímky $m'_1 c''_1$, $c''_1 n'_1$.

Pořadnice V', V'', jež stanoví příčinkovou čáru osové síly V, vypočtou se ze vzorce pro sílu V, dosadíme-li pro reakci $A = 1$ moment $M_c = 1 \cdot x_c$ a pro reakci $B = 1$ moment $M_c = 1 \cdot x'_c$; v obou případech odpadá břímě P' a vyjde

$$V' = 1 \cdot \frac{x_c}{v_c} (\operatorname{tg} \gamma_1 - \operatorname{tg} \gamma_2), \qquad V'' = 1 \cdot \frac{x'_c}{v_c} (\operatorname{tg} \gamma_1 - \operatorname{tg} \gamma_2). \tag{160}$$

Kdyby naopak vycházely dvě příčky z horního bodu svislice, dostali bychom výsledky obdobné, jen by bylo vyměniti horní a spodní pás. V obecném vzorci pro sílu V bychom nahradili odchylky os horních pasů γ odchylkami os spodních pasů δ a horní břímě P' spodním břemenem P, obracejíce zároveň u břemene znaménko.

42. Krajní hodnoty osových sil prutů. *α) Řešení z příčinkových čar.* Z příčinkových čar lze stanoviti účinek jakéhokoli zatížení stálého i pohyblivého. Stálé zatížení rovnoměrné q_0 řešíme ze vzorce

$$S_0 = q_0 \mathfrak{U}, \tag{161}$$

znamená-li $\mathfrak{U}$ obsah celého obrazce příčinkového. Pohyblivým zatížením rovnoměrným q' vyvodíme v určitém prutu $\max S'_q$, zatížíme-li díl nosníku, který přičiňuje k osové síle S kladně; je-li pak $\mathfrak{U}_+$ obsah kladné části příčinkového obrazce, vyjde

$$\max S'_q = q' \mathfrak{U}_+. \tag{162a}$$

Obdobně vzniká $\min S'_q$ zatížením dílu záporně přičiňujícího; má-li záporná část příčinkového obrazce obsah $\mathfrak{U}_-$, jest

$$\min S'_q = q' \mathfrak{U}_-. \tag{162b}$$

Krajní hodnoty osových sil prutů, vyvozené pohyblivou soustavou osamělých břemen, určíme rovněž snadno z příčinkových obrazců. Příčinkové obrazce pro osové síly v prutech pasových mají tvar trojúhelníků nebo čtyrúhelníků podle toho, je-li přidružený střed momentový v styčném bodě zatíženého pasu nebo mezi styčnými body zatíženého pasu. Tvar jejich souhlasí s tvarem příčinkových obrazců pro momenty ohybové k přidruženým středům momentovým, z nichž lze ostatně osové síly prutů pasových přímo vypočísti. Je-li příčinkovým obrazcem trojúhelník

stanoví se nejúčinnější polohy soustavy podle kriteria Winklerova, jako by šlo o moment ohybový průřezu styčného. Je-li příčinkovým obrazcem čtyrúhelník, určíme nejúčinnější polohu soustavy podle nerovnice (32), jako by šlo o moment ohybový průřezu mimostyčného.

Příčinkové čáry osových sil prutů mezipasových mají pořadnice obého znaménka; lze tedy vyvoditi pohyblivou soustavou osamělých břemen v mezipasových prutech max S i min S. Jde-li o max S, zatížíme co nejvíce díl nosníku, jenž přičiňuje kladně. Kladná část příčinkového obrazce má tvar trojúhelníka jako příčinkový obrazec ohybového momentu prostého nosníku. Nejúčinnější poloha soustavy vyhovuje pak kriteriu Winklerovu, danému nerovnicí (8)

$$R_1 \leqq R\frac{x}{l}.$$

Za l dosadíme tu délku dílu kladně přičiňujícího, tedy vzdálenost obojetné polohy od podpory na straně kladné části příčinkového obrazce, za x bereme na př. vzdálenost obojetné polohy od polohy největšího příčinku kladného; pak znamená R_1 součet břemen v uvedené délce x působících, čítáme-li břímě působící v poloze největšího příčinku jednou k pravé, po druhé k levé straně. Hledáme-li min S, zatížíme co nejvíce díl záporně přičiňující. Záporná část příčinkového obrazce má zase tvar trojúhelníka, i stanoví se nejúčinnější poloha soustavy obdobně jako pro max S.

Známe-li nejúčinnější polohu soustavy, vyšetříme příslušnou sílu osovou podle vzorce (6) platného pro soustavu osamělých břemen

$$S = \Sigma P\eta.$$

Poněvadž jsme sestrojovali příčinkové čáry pro břímě $P = 1$, mají zde příčinkové pořadnice η význam pouhých čísel nepojmenovaných; řešíme-li graficky, odměříme pořadnice η v měřidle, jehož jednotkou je zvolený úsek $P = 1$. Toho je též dbáti, počítáme-li obsahy Ω příčinkových obrazců, jejichž základnami jsou délky, výškami příčinkové pořadnice.

Příklad 31. Stanoviti jest krajní hodnoty osových sil prutů prostého nosníku příhradového trojúhelníkové soustavy kosoúhlé, na jehož spodní pás působí stálé zatížení rovnoměrné $q_0 = 2{,}2$ t/m a pohyblivé zatížení rovnoměrné $q' = 1{,}8$ t/m. Nosník má rozpětí $\overline{ab} = l = 25{,}2$ m, rozdělené svislicemi styčných bodů na stejné díly délky $a = 2{,}1$ m; styčné body horního pasu mají nad přímou osou spodního pasu výšky $v_1 = 2{,}3$, $v_3 = 3{,}3$, $v_5 = 3{,}8$ m (obr. 151, tab. 2).

Rozlišujme pasy příponami protějších bodů styčných, příčky příponami jejich pravých konců. Pro délku spodního pasu d_m, horního pasu c_m, sestupné příčky e_m a předchozí výstupné příčky e_{m-1} platí vzorce

$$d_m = 2a, \quad c_m = \sqrt{4a^2 + (v_{m+1} - v_{m-1})^2}, \quad e_{m-1} = e_m = \sqrt{a^2 + v_{m-1}^2}.$$

V sudých styčných bodech je svislá výška mezi osami pasů

$$v_m = \tfrac{1}{2}(v_{m-1} + v_{m+1}).$$

Výšky v a délky prutů jsou uvedeny dále v číselné tabulce.

Příčinkové čáry osových sil prutů určíme, vyšetříme-li pořadnice S', jež stanoví prodlouženou pravou přímku příčinkovou ve svislici levé podpory. Pořadnice S' znamenají osové síly prutů, vyvozené reakcí $A = 1$ jakožto jedinou vnější silou po levé straně. Platí pro ně, řešíme-li počtem, vzorce (158[a]), jež dají pro obecný horní pás C_m, obecný spodní pás D_m, sestupnou příčku E_m a výstupnou příčku E_{m-1} hodnoty

$$C'_m \cos\gamma_m = -\frac{x_m}{v_m}, \qquad D'_m = \frac{x_m}{v_m}, \qquad E'_m \cos\varepsilon_m = \frac{x_m}{v_m} - \frac{x_{m-1}}{v_{m-1}}, \qquad E'_{m-1}\cos\varepsilon_{m-1} = \frac{x_{m-2}}{v_{m-2}} - \frac{x_{m-1}}{v_{m-1}}.$$

Pro pruty pasové stačí pořadnice C', D'; u mezipasových prutů vyjma E_1, E_2 třeba však ještě určiti pořadnice E'' jakožto osové síly plynoucí z reakce $B = 1$, chceme-li si uspořiti určování

přidružených středů momentových, jež jsou mimo nosník. Síly E'' jsou dány vzorcem (158^b); pro obecnou příčku sestupnou E_m a výstupnou E_{m-1} platí

$$E''_m \cos \varepsilon_m = \frac{x'_m}{v_m} - \frac{x'_{m-1}}{v_{m-1}}, \qquad E''_{m-1} \cos \varepsilon_{m-1} = \frac{x'_{m-2}}{v_{m-2}} - \frac{x_{m-1}}{v_{m-1}}.$$

Mohli bychom ovšem též síly S', S'' řešiti graficky, jak je naznačeno pro kontrolu v obr. 151, kde jsou určeny z reakce $A = 1$ síly S'; kontrolovati bychom mohli obrazec silový podle obr. 146. Počtářské řešení je provedeno dále v číselných tabulkách; první obsahuje mimo rozměry nosníku v metrech podíly $\frac{x_m}{v_m}$ a $\frac{x'_m}{v_m}$, v druhé tabulce je výpočet sil S', S'', obsahy příčinkových ploch a skutečné síly osové. Pro bod m jest $x_m = m\,a$, $x'_m = (12 - m)\,a$, pro horní pás C_m a příčku E_m platí

$$\cos \gamma_m = \frac{2\,a}{c_m}, \qquad \cos \varepsilon_m = \frac{a}{e_m};$$

toho je použito v tabulce II.

Tabulka I.

m	v_m	c_m	d_m	e_m	$\frac{x_m}{v_m}$	$\frac{x'_m}{v_m}$
1	2,3	—	4,200	3,114	0,913	—
2	2,8	4,317	—	3,114	1,5	7,5
3	3,3	—	4,200	3,912	1,909	5,727
4	3,55	4,230	—	3,912	2,366	4,732
5	3,8	—	4,200	4,342	2,763	3,868
6	3,8	4,200	—	4,342	3,316	3,316

Ze sil S', S'', vypočtených v tab. II, sestrojí se příčinkové čáry a stanoví se pak jejich obsahy. Tak pro osovou sílu D_3 přeneseme (obr. 151) $\overline{a_1 a'_1} = D'_3$, přímka $a'_1 b_1$ je příčinkovou čarou vpravo od svislice bodu c a s ní se protíná na svislici bodu d přímka $a_1 d'_1$ platná vlevo od svislice bodu m. V oddílu $m\,c$ je příčinkovou čarou přímka $m'_1 c'_1$. Obsah příčinkového obrazce D_3 jest

$$\mathfrak{U} = \tfrac{1}{2}\,\overline{m_1 m'_1} \cdot \overline{a_1 c_1} + \tfrac{1}{2}\,\overline{c_1 c'_1} \cdot \overline{m_1 b_1} = \tfrac{1}{2}\,0{,}954 \cdot 8{,}4 + \tfrac{1}{2}\,1{,}273 \cdot 21{,}0 = 17{,}38\ \mathrm{m};$$

příčinkové pořadnice odměřujeme na měřidle, podle něhož jsme přenášeli síly S', a dosazujeme je jako čísla nepojmenovaná.

U horního pasu, na př. C_4, přeneseme $\overline{a_2 a'_2} = C'_4$; spojnice $a'_2 b_2$ je příčinkovou čarou vpravo od bodu c'_2 a přímka $a_2 c'_2$ je příčinkovou čarou vlevo od bodu c'_2. Obsah příčinkového obrazce jest

$$\mathfrak{U} = \tfrac{1}{2}\,\overline{c_2 c'_2} \cdot \overline{a_2 b_2} = -\tfrac{1}{2}\,1{,}285 \cdot 25{,}2 = -16{,}21\ \mathrm{m}.$$

Pro výstupnou příčku E_3 přeneseme $\overline{a_3 a'_3} = E'_3$, $\overline{b_3 b'_3} = E''_3$; přímka $a'_3 b_3$ je čarou příčinkovou vpravo od bodu c'_3, přímka $a_3 b'_3$ pak vlevo od bodu m'_3 a $m'_3 c'_3$ je příčinkovou čarou v oddílu $m\,c$. V tomto oddílu jest obojetná poloha ve svislici bodu f_3 a kladná i záporná část příčinkového obrazce mají obsahy

$$\mathfrak{U}_+ = \tfrac{1}{2}\,\overline{m_3 m'_3} \cdot \overline{a_3 f_3} = \tfrac{1}{2}\,0{,}549 \cdot 6{,}38 = 1{,}75\ \mathrm{m},$$

$$\mathfrak{U}_- = \tfrac{1}{2}\,\overline{c_3 c'_3} \cdot \overline{f_3 b_3} = -\tfrac{1}{2}\,0{,}507 \cdot 18{,}82 = -4{,}77\ \mathrm{m}.$$

Obdobně řešíme u příček sestupných; pro příčku E_4 přeneseme $\overline{a_4 a'_4} = E'_4$, $\overline{b_4 b'_4} = E''_4$ a sestrojíme přímkou $a'_4 b_4$ příčinkovou čáru vpravo od bodu c'_4 a přímkou $a_4 b'_4$ příčinkovou čáru vlevo od bodu m'_4. V oddílu $m\,c$ je příčinkovou čarou přímka $m'_4 c'_4$, jež seče osu v bodě g_4 na svislici polohy obojetné. Kladná i záporná část příčinkového obrazce mají obsahy

$$\mathfrak{U}_+ = \tfrac{1}{2}\,\overline{c_4 c'_4} \cdot \overline{g_4 b_4} = \tfrac{1}{2}\,0{,}568 \cdot 19{,}52 = 5{,}55\ \mathrm{m},$$

$$\mathfrak{U}_- = \tfrac{1}{2}\,\overline{m_4 m'_4} \cdot \overline{a_4 g_4} = -\tfrac{1}{2}\,0{,}309 \cdot 5{,}68 = -0{,}88\ \mathrm{m}.$$

Obsah celého obrazce příčinkového jest

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_+ + \mathfrak{U}_- .$$

Stálé zatížení dá pak podle vzorce (161) osovou sílu

$$S_0 = q_0 \mathfrak{U}$$

a pohyblivé zatížení rovnoměrné vyvodí podle (162^a), (162^b) krajní hodnoty

$$\max S'_q = q' \mathfrak{U}_+ , \qquad \min S'_q = q' \mathfrak{U}_- .$$

Výsledky řešení pro všechny pruty jsou v tabulce II, v níž jsou uvedeny síly v t.

Tabulka II.

Prut	$S' \cos \sigma$	S'	$S'' \cos \sigma$	S''	$\mathfrak{U}_+$	$\mathfrak{U}_-$	$\mathfrak{U}$	S_0	$\max S'_q$	$\min S'_q$
C_2	− 1,5	− 1,542	—	—	—	− 16,21	− 16,21	− 35,66	—	− 29,20
C_4	− 2,366	− 2,383	—	—	—	− 18,00	− 18,00	− 39,60	—	− 32,40
C_6	− 3,316	− 3,316	—	—	—	− 20,89	− 20,89	− 45,96	—	− 37,60
D_1	—	+ 0,913	—	—	+ 9,59	—	+ 9,59	+ 21,10	+ 17,11	—
D_3	—	+ 1,909	—	—	+ 17,38	—	+ 17,38	+ 38,25	+ 31,28	—
D_5	—	+ 2,763	—	—	+ 19,73	—	+ 19,73	+ 43,41	+ 35,31	—
E_1	− 0,913	− 1,354	—	—	—	− 14,22	− 14,22	− 31,28	—	− 25,60
E_3	− 0,409	− 0,762	+ 1,773	+ 3,303	+ 1,75	− 4,77	− 3,02	− 6,64	+ 3,15	− 8,59
E_5	− 0,397	− 0,821	+ 0,864	+ 1,786	+ 3,24	− 2,84	+ 0,40	+ 0,88	+ 5,83	− 5,11
E_2	+ 0,587	+ 0,870	—	—	+ 9,13	—	+ 9,13	+ 20,09	+ 16,44	—
E_4	+ 0,457	+ 0,851	− 0,995	− 1,853	+ 5,55	− 0,88	+ 4,67	+ 10,27	+ 9,99	− 1,58
E_6	+ 0,553	+ 1,142	− 0,552	− 1,142	+ 4,33	− 1,92	+ 2,41	+ 5,30	+ 7,79	− 3,46

Příklad 32. Vyšetříme krajní hodnoty osových sil prutů C_3, D_3, E_3, V_3 a V_5 v příhradovém nosníku pravoúhlé soustavy, na jehož horní pás působí pohyblivá soustava osamělých břemen, daná vlakem podle normy I mostního řádu z r. 1904. Nosník má rozměry $a_1 = 3{,}2$, $a_2 = 3{,}8$, $a_3 = 4{,}2$, $a_4 = a_5 = 4{,}4$ m; $l = 40$ m; $v_0 = 2{,}5$, $v_1 = 3{,}67$, $v_2 = 4{,}58$, $v_3 = 5{,}23$, $v_4 = 5{,}62$, $v_5 = 5{,}75$ m (obr. 152, tab. 2).

Příčinkové čáry osových sil prutů jsou určeny pořadnicemi S', po případě též S'', jejichž řešení je známo; provedeme je počtářsky.

a) Pro osovou sílu D_3 vypočteme podle vzorce (158^a)

$$D'_3 \cos \delta_3 = 1 \cdot \frac{x_3}{v_3} = \frac{11{,}2}{5{,}23} = 2{,}141 ;$$

jelikož pak jest

$$\cos \delta_3 = \frac{a_3}{d_3} \qquad \text{a} \qquad d_3 = \sqrt{a_3^2 + (v_3 - v_2)^2} = 4{,}250 \text{ m} ,$$

vyjde

$$D'_3 = 2{,}141 \cdot \frac{4{,}25}{4{,}2} = 2{,}166 .$$

Příčinkovým obrazcem osové síly D_3 je trojúhelník $a_1 d'_1 b_1$, jehož pravá strana je dána ve svislici bodu a pořadnicí

$$\overline{a_1 a'_1} = D'_3 .$$

Nejúčinnější soustavu tvoří dvě lokomotivy, umístěné komíny proti sobě, s příslušnými tendry a nákladními vozy; pak přijdou největší břemena poblíž polohy největšího příčinku d.

Celou délkou nosníku obsáhneme dvě lokomotivy s tendry a jeden nákladní vůz. Nejúčinnější polohu soustavy určíme kriteriem Winklerovým, dosazujíce

$$x = \overline{a_1 d_1} = 11{,}2\,\text{m}, \qquad l = \overline{a_1 b_1} = 40\,\text{m}, \qquad R = 10 \cdot 16 + 6 \cdot 13 + 2 \cdot 11 = 260\,\text{t};$$

pak jest

$$R\frac{x}{l} = 260 \cdot \frac{11{,}2}{40} = 72{,}8\,\text{t}.$$

Sčítáme-li břemena od levého konce soustavy, přestoupíme 72,8 t přičtením šestého břemene, jež umístíme tedy do bodu d; tím jest určena poloha soustavy naznačená v příčinkovém obrazci D_3.

Za této polohy soustavy určíme

$$\max D_3 = \Sigma P \eta,$$

odměřujíce příčinkové pořadnice η v paprscích břemen na měřidle, podle něhož jsme přenášeli D_3', a dosazujíce je jako čísla nepojmenovaná. Zde jsou trojí břemena

$$P' = 16\,\text{t}, \qquad P'' = 13\,\text{t}, \qquad P''' = 11\,\text{t}.$$

Součet příčinkových pořadnic je v paprscích břemen P'

$$\Sigma \eta' = 1{,}17 + 1{,}37 + 1{,}56 + 1{,}48 + 1{,}41 + 1{,}14 + 1{,}06 + 0{,}99 + 0{,}91 + 0{,}83 = 11{,}92,$$

v paprscích břemen P''

$$\Sigma \eta'' = 0{,}20 + 0{,}39 + 0{,}61 + 0{,}62 + 0{,}54 + 0{,}46 = 2{,}82$$

a v paprscích břemen P'''

$$\Sigma \eta''' = 0{,}29 + 0{,}13 = 0{,}42.$$

Obdržíme tedy

$$\max D_3 = P' \Sigma \eta' + P'' \Sigma \eta'' + P''' \Sigma \eta''' = 16 \cdot 11{,}92 + 13 \cdot 2{,}82 + 11 \cdot 0{,}42 = 233{,}00\,\text{t}.$$

Stejně budeme postupovati u ostatních sil osových.

b) Příčinková čára osové síly C_3 jest určena pořadnicí

$$C_3' = -1 \cdot \frac{x_2}{v_2} = -\frac{7{,}0}{4{,}58} = -1{,}528 = \overline{a_2 a_2'}.$$

Nejúčinnější soustavou jsou zde dvě lokomotivy s komíny za sebou, příslušné tendry a jeden nákladní vůz. Kdybychom byli v pochybnostech, která soustava jest účinnější, musili bychom uvažovati též dvě lokomotivy s komíny proti sobě a z výsledků vybrati výsledek o větší prosté hodnotě. Nejúčinnější polohu soustavy určíme kriteriem Winklerovým, do něhož dosadíme

$$x = \overline{a_2 c_2} = 7\,\text{m}, \qquad l = 40\,\text{m}, \qquad R = 260\,\text{t};$$

tím vyjde

$$R\frac{x}{l} = 260 \cdot \frac{7}{40} = 45{,}5\,\text{t},$$

což přestoupíme třetím břemenem, sčítáme-li břemena od levého konce soustavy. Třetí břímě položíme tedy do svislice bodu c a z příslušné polohy soustavy určíme $\min C_3$. V paprscích břemen $P' = 16\,\text{t}$, $P'' = 13\,\text{t}$, $P''' = 11\,\text{t}$ jsou příčinkové pořadnice, jež mají součty

$$\Sigma \eta' = -0{,}76 - 1{,}01 - 1{,}26 - 1{,}21 - 1{,}15 - 0{,}73 - 0{,}68 - 0{,}63 - 0{,}57 - 0{,}52 = -8{,}52,$$

$$\Sigma \eta'' = -1{,}00 - 0{,}94 - 0{,}89 - 0{,}37 - 0{,}31 - 0{,}25 = -3{,}76,$$

$$\Sigma \eta''' = -0{,}14 - 0{,}02 = -0{,}16;$$

pak jest

$$\min C_3 = -16 \cdot 8{,}52 - 13 \cdot 3{,}76 - 11 \cdot 0{,}16 = -186{,}96\,\text{t}.$$

c) Příčinkovou čáru osové síly E_3 stanovíme pořadnicemi E_3', E_3'', jež vypočteme podle vzorců (158*a*), (158*b*), které dají

$$E_3' \cos \varepsilon_3 = 1 \cdot \frac{x_2}{v_2} - 1 \cdot \frac{x_3}{v_3} = 1{,}528 - 2{,}141 = -0{,}613,$$

$$E_3'' \cos \varepsilon_3 = 1 \cdot \frac{x_2'}{v_2} - 1 \cdot \frac{x_3'}{v_3} = \frac{33{,}0}{4{,}58} - \frac{28{,}8}{5{,}23} = 7{,}205 - 5{,}507 = 1{,}698.$$

Dále jest

$$\cos \varepsilon_3 = \frac{a_3}{e_3}, \qquad e_3 = \sqrt{a_3^2 + v_2^2} = 6{,}214 \text{ m},$$

tedy

$$E_3' = -0{,}613 \cdot \frac{6{,}214}{4{,}2} = -0{,}907 = \overline{a_3 a_3'}, \qquad E_3'' = 1{,}698 \cdot \frac{6{,}214}{4{,}2} = 2{,}513 = \overline{b_3 b_3'}.$$

Příčinkový obrazec síly E_3 má kladnou část $a_3 c_3' f_3$ a zápornou část $f_3 d_3' b_3$. Délkou $\overline{a_3 f_3} = 8{,}69$ m obsáhneme pouze lokomotivu; je tedy $R = 5 \cdot 16 = 80$ t. Nejúčinnější polohu soustavy stanovíme, vypočteme-li

$$R \cdot \frac{\overline{a_3 c_3}}{\overline{a_3 f_3}} = 80 \cdot \frac{7}{8{,}69} = 64{,}5 \text{ t},$$

což se přestupuje pátým břemenem, sčítáme-li břemena od levého konce soustavy. Páté břímě položíme tedy do svislice bodu c a za příslušné polohy soustavy určíme

$$\max E_3 = P' \Sigma \eta' = 16 \cdot (0{,}09 + 0{,}18 + 0{,}26 + 0{,}35 + 0{,}44) = 16 \cdot 1{,}32 = 21{,}12 \text{ t}.$$

Délkou $\overline{f_3 b_3} = 31{,}31$ m obsáhneme dvě lokomotivy, jež umístíme s komíny za sebou, a dva tendry, tedy součet břemen $R = 238$ t. Pak jest

$$R \cdot \frac{\overline{f_3 d_3}}{\overline{f_3 b_3}} = 238 \cdot \frac{2{,}51}{31{,}31} = 19{,}1 \text{ t};$$

sčítáme-li břemena od levého konce soustavy, přestoupíme 19,1 t druhým břemenem, jež položíme proto do svislice bodu d. Součty příčinkových pořadnic v paprscích břemen $P' = 16$ t, $P'' = 13$ t jsou

$$\Sigma \eta' = -0{,}29 - 0{,}65 - 0{,}62 - 0{,}59 - 0{,}56 - 0{,}31 - 0{,}28 - 0{,}24 - 0{,}21 - 0{,}18 = -3{,}93,$$
$$\Sigma \eta'' = -0{,}47 - 0{,}43 - 0{,}40 - 0{,}09 - 0{,}06 - 0{,}02 = -1{,}47;$$

z toho vyjde

$$\min E_3 = P' \Sigma \eta' + P'' \Sigma \eta'' = -16 \cdot 3{,}93 - 13 \cdot 1{,}47 = -81{,}99 \text{ t}.$$

d) Pro příčinkovou čáru osové síly V_3 stanovíme rovněž pořadnice V_3', V_3'', jež vypočteme podle vzorců (159^a), (159^b); dají zde

$$V_3' = \frac{1}{a_3}\left(\frac{x_3}{v_3} v_2 - x_2\right) = \frac{1}{4{,}2}\left(\frac{11{,}2}{5{,}23} \cdot 4{,}58 - 7\right) = 0{,}669 = \overline{a_4 a_4'},$$

$$V_3'' = \frac{1}{a_3}\left(\frac{x_3'}{v_3} v_2 - x_2'\right) = \frac{1}{4{,}2}\left(\frac{28{,}8}{5{,}23} \cdot 4{,}58 - 33\right) = -1{,}853 = \overline{b_4 b_4'}.$$

Příčinkový obrazec má zase část kladnou $u_4 m_4' b_4$ a zápornou $a_4 d_4' u_4$. Na délku $\overline{u_4 b_4}$ se vejdou dvě lokomotivy a jeden tendr; tu jest

$$R = 199 \text{ t}, \qquad R \cdot \frac{\overline{u_4 m_4}}{\overline{u_4 b_4}} = 199 \cdot \frac{1{,}94}{26{,}34} = 14{,}7 \text{ t}.$$

Již prvé břímě je větší než 14,7 t, položíme je tedy do svislice bodu m a určíme v paprscích břemen $P' = 16$ t a $P'' = 13$ t příčinkové pořadnice, jež mají součty

$$\Sigma \eta' = 0{,}41 + 0{,}38 + 0{,}36 + 0{,}34 + 0{,}31 + 0{,}13 + 0{,}11 + 0{,}08 + 0{,}06 + 0{,}04 = 2{,}22,$$
$$\Sigma \eta'' = 0{,}25 + 0{,}22 + 0{,}20 = 0{,}67;$$

pak jest

$$\max V_3 = P' \Sigma \eta' + P'' \Sigma \eta'' = 16 \cdot 2{,}22 + 13 \cdot 0{,}67 = 44{,}23 \text{ t}.$$

Délkou $\overline{a_4 u_4}$ obsáhneme lokomotivu a tendr, tedy

$$R = 119 \text{ t}, \qquad R \cdot \frac{\overline{a_4 d_4}}{\overline{a_4 u_4}} = 119 \cdot \frac{11{,}2}{13{,}66} = 97{,}6 \text{ t};$$

poslední hodnotu přestoupíme sedmým břemenem, sčítajíce od levého konce soustavy. Položíme tedy sedmé břímě do svislice bodu d a určíme za té polohy soustavy z obrazce

$$\Sigma \eta' = -0{,}22 - 0{,}52 - 0{,}45 - 0{,}39 - 0{,}32 = -1{,}90,$$
$$\Sigma \eta'' = -0{,}14 - 0{,}07 - 0{,}00 = -0{,}21,$$
$$\min V_3 = P' \Sigma \eta' + P'' \Sigma \eta'' = -16 \cdot 1{,}90 - 13 \cdot 0{,}21 = -33{,}13 \text{ t}.$$

e) Příčinkovou čáru osové síly V_5 stanovíme pořadnicí V'_5, pro niž platí vzorec (160), ve kterém je třeba jen nahraditi odchylky horního pasu γ odchylkami spodního pasu δ.[1]) Z obrazce určíme

$$\operatorname{tg}\delta_5 = -\operatorname{tg}\delta_6 = \frac{v_5 - v_4}{a_5} = \frac{0{,}13}{4{,}4},$$

jsou-li δ_5, δ_6 odchylky os pasů D_5, D_6 od vodorovnice; pak jest

$$V'_5 = 1 \cdot \frac{x_5}{v_5}(\operatorname{tg}\delta_6 - \operatorname{tg}\delta_5) = -\frac{20}{5{,}75} \cdot \frac{2.0{,}13}{4{,}4} = -0{,}206 = \overline{a_5 a'_5}.$$

Příčinkovým obrazcem je zde trojúhelník $a_5 n'_5 b_5$, jehož všechny pořadnice jsou záporné. Na celý nosník se vejdou dvě lokomotivy s tendry a jeden nákladní vůz; lokomotivy umístíme komíny proti sobě. Pak jest

$$R = 260\text{ t}, \qquad R \cdot \frac{\overline{a_5 n_5}}{a_5 b_5} = 260 \cdot \frac{1}{2} = 130\text{ t},$$

což se přestupuje první nápravou druhé lokomotivy, sčítají-li se břemena od levého konce soustavy; první nápravu druhé lokomotivy položíme tedy do svislice bodu n. Tím je dána poloha soustavy, ve které určíme

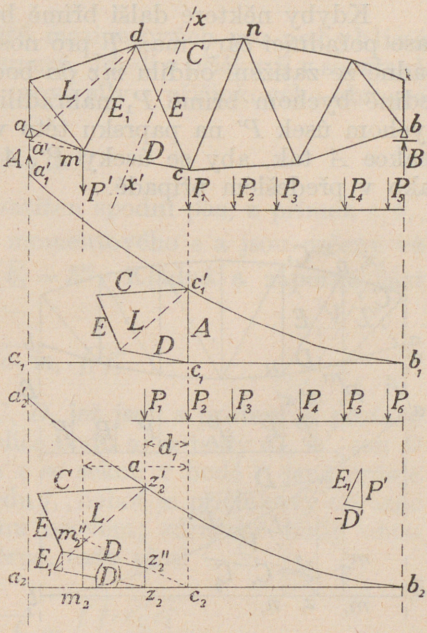
$$\Sigma\eta' = -0{,}05 - 0{,}06 - 0{,}06 - 0{,}07 - 0{,}08 - 0{,}10 - 0{,}10 - 0{,}9 - 0{,}08 - 0{,}07 = -0{,}76,$$
$$\Sigma\eta'' = -0{,}01 - 0{,}02 - 0{,}03 - 0{,}05 - 0{,}05 - 0{,}04 = -0{,}20,$$
$$\Sigma\eta''' = -0{,}02 - 0{,}01 = -0{,}03,$$
$$\min V_5 = P'\,\Sigma\eta' + P''\,\Sigma\eta'' + P'''\,\Sigma\eta''' = -16 \cdot 0{,}76 - 13 \cdot 0{,}20 - 11 \cdot 0{,}03 = -15{,}09\text{ t}.$$

β) ***Přímé řešení.*** Všechny polohy břemene na prostém nosníku příhradovém přičiňují k osové síle libovolného prutu horního pasu záporně, k osové síle prutu spodního pasu kladně. Pohyblivým zatížením rovnoměrným vyvodíme tedy největší tlaky v prutech horního pasu a největší tahy v prutech spodního pasu, zatížíme-li prostý nosník plně. Toto zatížení lze pak řešiti jako zatížení stálé na př. graficky methodou bodů styčných; řešíme-li počtem, užijeme na př. vzorců

$$C\cos\gamma = -\frac{M_c}{v_c}, \qquad D\cos\delta = \frac{M_d}{v_d}.$$

Z týchž vzorců lze odvoditi přímé řešení pro pohyblivou soustavu osamělých břemen. Osové síly prutů pasových se počítají z momentů k přidruženým středům momentovým, jež jsou shodné s ohybovými momenty prostého nosníku. Stanovíme-li $\max M_c$, $\max M_d$, jsou tím podle hořejších vzorců určeny krajní hodnoty $\min C$ (největší tlak) a $\max D$ (největší tah) v prutech pasových.

Pro pruty mezipasové stanovíme nejúčinnější polohy pohyblivé soustavy osamělých břemen kriteriem Winklerovým, jak bylo ukázáno v řešení krajních hodnot z příčinkových čar; těchto čar k tomu není třeba, poněvadž lze sestrojiti svislice obojetných poloh přímo v mnohostranu osovém (viz obr. 144, 148). Hledáme-li $\max E$ v příčce sestupné, což žádá zatížení pravé strany, a vyjde-li tu na př. prvé břímě P_1 do pravého styčného bodu c prořatého zatíženého pasu D (obr. 153), působí po levé straně řezu $x\,x'$ pouze levá reakce A. Odejmeme-li část nosníku vpravo od řezu $x\,x'$ a nahradíme-li její působení osovými silami prořatých prutů C, D, E, jsou tyto síly



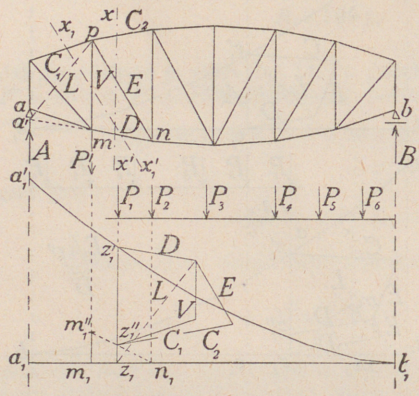
Obr. 153.

[1]) Viz prvý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1940), str. 199.

v rovnováze s reakcí A, jejíž hodnotu $A = \overline{c_1 c_1'}$ určíme jakožto pořadnici v paprsku P_1 čáry $a_1' c_1' b_1$ největších sil posouvajících pro nosník prostý (viz obr. 32). Výslednice sil C, E působí pak v témž paprsku $L \equiv a' d$ jako výslednice sil A, D; z toho plynou úseky sil C, D, E, poslední by znamenal max E.

Přijde-li však následující břímě P_2 do svislice bodu c, padne břímě P_1 do oddílu mc a dá do bodu m složku $P' = P_1 \frac{d_1}{a}$, je-li d_1 vzdálenost paprsků P_1, P_2 a a vodorovná délka oddílu mc. Určovací úsek složky P' sestrojíme, naneseme-li $P_1 = \overline{m_2' m_2}$ a spojíme-li $m_2'' c_2$; v paprsku P_1 je pak $P' = \overline{z_2'' z_2}$. Po levé straně řezu $x x'$ působí nyní síly A, P', jež jsou v rovnováze s osovými silami protatých prutů C, D, E, odnímáme-li část nosníku vpravo od řezu. Určovací úsek reakce $A = \overline{z_2 z_2'}$ je zase dán pořadnicí čáry $a_2' z_2' b_2$ největších sil posouvajících pro nosník prostý v paprsku P_1. Síly C, D, E vyšetřiti lze nyní tak, že zvláště stanovíme účinek reakce A i břemene P' a výsledky sečteme algebraicky, což provedeme v jediném obrazci.[1]) Z rovnováhy sil A, C, D, E stanovíme sílu (D), vedeme-li bodem z_2 rovnoběžku s osou prutu D a bodem z_2' rovnoběžku s přímkou $L \equiv a' d$, v níž by působila výslednice sil C, E i A, (D). Uvažujeme-li dále pouze síly P', C, D', E, jež mají být také v rovnováze, vyjde výslednice sil C, E v témž paprsku $E_1 \equiv d m$ jako výslednice sil P', D'; vedeme-li jedním koncem úseku P' rovnoběžku s E_1, druhým rovnoběžku s D, určíme úsek síly D', jež je tu tlakem. Správná síla D má pak hodnotu $D = (D) + D'$; síla (D) je tahem, prostou hodnotu D' třeba tedy od úseku (D) odečísti, což se stane, vedeme-li bodem z_2'' rovnoběžku s osou prutu D a levým koncem úseku (D) rovnoběžku s E_1. Pak jest D správný úsek osové síly ve spodním pase, neboť se rovná skutečně algebraickému součtu (rozdílu prostých hodnot) úseků (D) a D'. Vrátíme-li se k původní rovnováhové soustavě sil A, P', C, D, E, doplníme obrazec silový, v němž jsou již geometricky sečteny úseky D, P', A, rovnoběžkami s osami prutů C, E, čímž určíme přímo úsek síly E.

Kdyby některé další břímě bylo ve svislici bodu c, byl by úsek reakce A dán zase pořadnicí čáry max T pro nosník prostý v paprsku P_1. Úsek složky P', jež připadne ze zatížení oddílu mc do bodu m, stanovili bychom jako v předešlém případě, jedině bychom břímě P_1 nahradili výslednicí břemen působících v oddílu a obdrželi bychom úsek P' na paprsku této výslednice. Úsek P' bychom pak přenesli na úsek reakce A tak, aby se úseky P', A geometricky sčítaly, a postupovali bychom dále jako v předešlém případě.

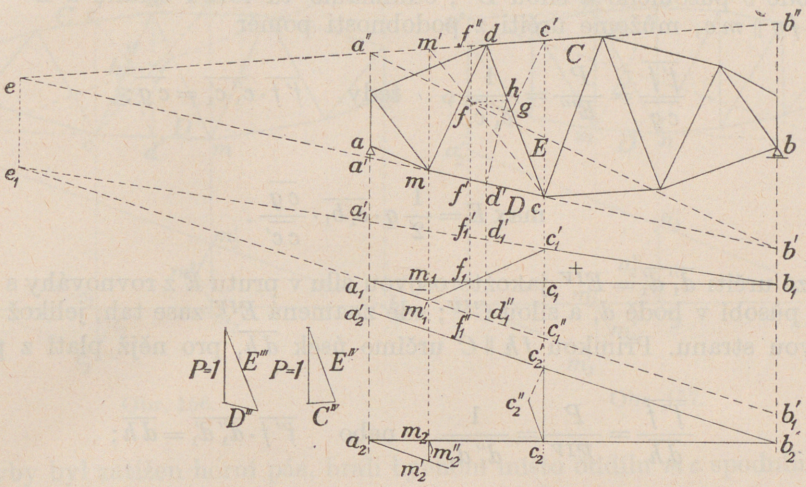


Obr. 154.

Vyjde-li u nosníku pravoúhlé soustavy (obr. 154) pro max E břímě P_2 do pravého styčného bodu n zatíženého pasu D, protatého řezem $x x'$, působí vlevo od řezu $x x'$ vnější síly A, P', jež jsou v rovnováze s osovými silami C_2, D, E. Úsek reakce $A = \overline{z_1 z_1'}$ je dán pořadnicí čáry max T pro nosník prostý v paprsku P_1. Složka P' břemene P_1 do bodu m má úsek $P' = \overline{z_1'' z_1}$, jenž plyne jako dříve z úseku $P_1 = \overline{m_1'' m_1}$ spojnicí $m_1'' n_1$. Paprsky sil C_2, E, P' jdou bodem p, jímž jde též paprsek jejich výslednice; tato výslednice se musí rušiti s výslednicí sil A, D, jdoucí bodem a'. Pak je spojnice $L \equiv a' p$ společným paprskem obou výslednic. Reakce A je v rovnováze se silou D a s výslednicí sil C_2, E, P', jež působí v paprsku L; tím je síla D určena. Vrátíme-li se k původní rovnováhové soustavě sil A, P', C_2, D, E, můžeme konečně stanoviti síly C_2, E.

[1]) Viz *Jos. Melan* „Der Brückenbau," III. Bd., 1. H. (Lipsko 1914), str. 313.

Žádá-li u téhož nosníku min V, aby břímě P_2 působilo v bodě n, jsou po levé straně řezu $x_1 x_1'$ zase vnější síly A, P', jež jsou v rovnováze s osovými silami C_1, D, V. Reakce $A = \overline{z_1 z_1'}$ a složka $P' = \overline{z_1'' z_1}$ břemene P_1 do bodu m se určí, jak bylo ukázáno. Paprsky sil C_1, P', V jdou tu jedním bodem p, jímž jde i paprsek L jejich výslednice; v témž paprsku $L \equiv a'\,p$ působí výslednice zbývajících sil A, D. Reakce A je v rovnováze se silou D a s výslednicí sil C_1, P', V, jejímž paprskem je L; z toho určíme sílu D. Z rovnováhy původní soustavy sil A, P', C_1, D, V stanovíme pak síly C_1, V.



Obr. 155.

Přímé řešení krajních hodnot osových sil prutů mezipasových pro pohyblivé zatížení rovnoměrné odvodíme z příčinkových obrazců. Jde-li o příčku E v soustavě kosoúhlé (obr. 155), vypočteme krajní hodnoty její osové síly z příčinkového obrazce podle vzorců (162)

$$\max E = q\,\mathfrak{U}_+, \qquad \min E = q\,\mathfrak{U}_-.$$

Příčinkový obrazec (viz obr. 144) se skládá, je-li zatížen spodní pás, z přímek $c_1' b_1$, $a_1 m_1'$, jež se sekou na svislici přidruženého středu momentového e a jsou určeny ve svislicích podporových pořadnicemi $\overline{a_1 a_1'} = E'$, $\overline{b_1 b_1'} = E''$. Kladná a záporná část příčinkového obrazce mají obsahy

$$\mathfrak{U}_+ = \tfrac{1}{2}\,\overline{c_1 b_1} \cdot \overline{f_1 f_1'}, \qquad \mathfrak{U}_- = \tfrac{1}{2}\,\overline{a_1 m_1} \cdot \overline{f_1 f_1''}.$$

Prodlužme v mnohostranu osovém osy pasů C, D, jež jsou s prutem E protaty řezem podle methody průsečné; na ose C určují svislice bodů a, m body a'', m', osu D protíná svislice bodu b v bodě b'. Spojnice $a''\,b'$, $m'\,c$ se sekou v bodě f, jenž určuje obojetnou polohu břemene a stanoví tedy svislici bodu f_1, neboť je příčinkový obrazec $a_1 m_1' c_1' b_1$ afinní s obrazcem $a'' m' c\, b'$ v mnohostranu osovém; sdružené body obou obrazců jsou na svislicích, sdružené úseky jsou úměrné, tedy platí

$$\frac{\overline{f_1 f_1'}}{\overline{f' f}} = \frac{\overline{a_1 a_1'}}{\overline{a' a''}} = \frac{\overline{c_1'' c_1'}}{\overline{c\, c'}} \qquad \text{nebo} \qquad \overline{f_1 f_1'} = \frac{\overline{f' f} \cdot \overline{c_1'' c_1'}}{\overline{c\, c'}},$$

$$\frac{\overline{f_1 f_1''}}{\overline{f'' f}} = \frac{\overline{b_1 b_1'}}{\overline{b'' b'}} = \frac{\overline{d_1' d_1''}}{\overline{d\, d'}} \qquad \text{nebo} \qquad \overline{f_1 f_1''} = \frac{\overline{f'' f} \cdot \overline{d_1' d_1''}}{\overline{d\, d'}}.$$

Dosazením plyne

$$\max E = \frac{1}{2} q \cdot \overline{c_1 b_1} \cdot \frac{\overline{f_1 f_1'}}{} = \frac{1}{2} q \cdot \overline{c_1 b_1} \cdot \frac{\overline{f' f} \cdot \overline{c_1'' c_1'}}{\overline{c c'}},$$

$$\min E = \frac{1}{2} q \cdot \overline{a_1 m_1} \cdot \frac{\overline{f_1 f_1''}}{} = \frac{1}{2} q \cdot \overline{a_1 m_1} \cdot \frac{\overline{f'' f} \cdot \overline{d_1' d_1''}}{\overline{d d'}}.$$

Úsek $\overline{c_1'' c_1'} = E'''$ znamená osovou sílu prutu E, jež je v rovnováze s břemenem $P = 1$ v bodě c působícím a silou D'''; odnímáme tu levou stranu a E''' je kladné. Vedeme-li $fg \parallel mc$, můžeme určiti z podobnosti poměr

$$\frac{\overline{f' f}}{\overline{c g}} = \frac{P}{E'''} = \frac{1}{\overline{c_1'' c_1'}}, \qquad \text{tedy} \qquad \overline{f' f} \cdot \overline{c_1'' c_1'} = \overline{c g};$$

pak jest

$$\max E = \frac{1}{2} q \cdot \overline{c_1 b_1} \cdot \frac{\overline{c g}}{\overline{c c'}}.$$

Podobně lze určiti $\overline{d_1'' d_1'} = E^{IV}$ jakožto osovou sílu v prutu E z rovnováhy s břemenem $P = 1$, jež působí v bodě d, a silou C^{IV}; zde znamená E^{IV} zase tah, jelikož si myslíme odňatu levou stranu. Přímkou $fh \parallel C$ určíme úsek $\overline{dh}$, pro nějž platí z podobnosti poměr

$$\frac{\overline{f'' f}}{\overline{d h}} = \frac{P}{E^{IV}} = \frac{1}{\overline{d_1'' d_1'}} \qquad \text{nebo} \qquad \overline{f'' f} \cdot \overline{d_1'' d_1'} = \overline{d h};$$

dosazením plyne

$$\min E = -\frac{1}{2} q \cdot \overline{a_1 m_1} \cdot \frac{\overline{d h}}{\overline{d d'}}.$$

Přenesme $\overline{a_2 a_2'} = \frac{1}{2} q l = \frac{1}{2} q \cdot \overline{a_2 b_2}$; spojnice $a_2' b_2$ určí ve svislici bodu c pořadnici

$$\overline{c_2 c_2'} = \overline{a_2 a_2'} \cdot \frac{\overline{c_2 b_2}}{\overline{a_2 b_2}} = \frac{1}{2} q \cdot \overline{c_1 b_1}$$

a přímka $a_2 m_2' \parallel a_2' b_2$ omezuje na svislici bodu m pořadnici

$$\overline{m_2 m_2'} = \overline{a_2 a_2'} \cdot \frac{\overline{a_2 m_2}}{\overline{a_2 b_2}} = \frac{1}{2} q \cdot \overline{a_1 m_1}.$$

Veďme dále $c_2 c_2'' \parallel E$, $c_2' c_2'' \parallel c' g$; pak jest

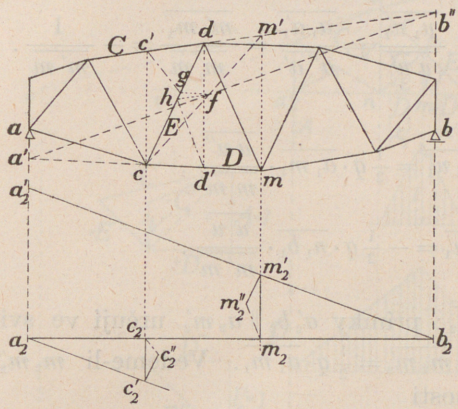
$$\overline{c_2 c_2''} = \overline{c_2 c_2'} \cdot \frac{\overline{c g}}{\overline{c c'}} = \max E.$$

Podobně určí přímky $m_2 m_2'' \parallel E$, $m_2' m_2'' \parallel d' h$ úsek

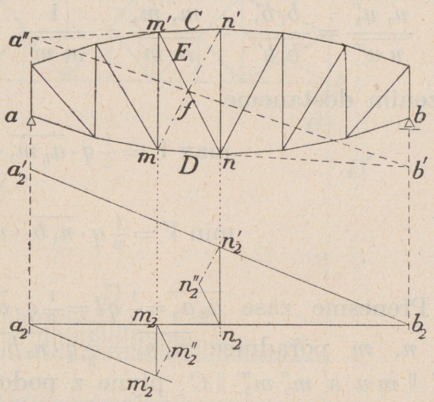
$$\overline{m_2 m_2''} = \overline{m_2 m_2'} \cdot \frac{\overline{d h}}{\overline{d d'}} = -\min E.$$

Jde-li o výstupnou příčku (obr. 156), odvodíme při zatížení spodního pasu sestrojení z předešlého případu, vyměníme-li levou a pravou stranu a změníme znaménka. Prodloužíme tedy osu pasu C vpravo do bodu b'', osu pasu D vlevo do bodu a' a promítneme pravý styčný bod m pasu D svisle na prodlouženou osu prutu C do bodu m';

přímky $a'b''$, cm' se sekou v bodě f, jenž určuje obojetnou polohu břemene. Vedeme pak $fg \parallel D$, $fh \parallel C$ a přeneseme zase $\overline{a_2 a_2'} = \frac{1}{2} q\, l$; ve svislici bodu m určí spojnice $a_2' b_2$ pořadnici $\overline{m_2 m_2'} = \frac{1}{2} q \cdot \overline{m_2 b_2}$ a přímky $m_2' m_2'' \parallel E$, $m_2 m_2'' \parallel d'h$ omezí úsek $\min E = -\overline{m_2' m_2''}$. Dále vedeme $a_2 c_2' \parallel a_2' b_2$, tím dostaneme ve svislici bodu c pořadnici $\overline{c_2 c_2'} = \frac{1}{2} q \cdot \overline{a_2 c_2}$ a přímkami $c_2' c_2'' \parallel E$, $c_2 c_2'' \parallel c'g$ sestrojíme konečně úsek $\max E = \overline{c_2' c_2''}$.



Obr. 156.

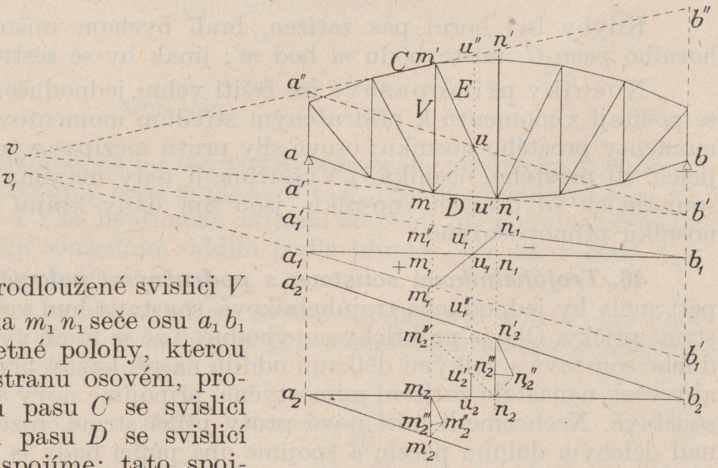


Obr. 157.

Kdyby byl zatížen horní pás, brali bychom místo oddílu mc spodního pasu protatý oddíl horního pasu; jinak by se sestrojení v podstatě neměnilo.

V soustavě pravoúhlé se předešlé řešení značně zjednoduší, jde-li o krajní hodnoty osové síly v příčce E (obr. 157); tu platí také totéž sestrojení pro zatížení horního nebo spodního pasu. Prodlužujeme podle obr. 155 osu pasu C vlevo do bodu a'' a osu pasu D vpravo do bodu b'; spojnice $a''b'$ seče osu příčky E v obojetné poloze f, jež zde splyne s body g, h. Pak určíme přenesením $\overline{a_2 a_2'} = \frac{1}{2} q\, l$ a přímkami $n_2 n_2'' \parallel E$, $n_2' n_2'' \parallel n'f$ úsek $\max E = \overline{n_2 n_2''}$, dále přímkami $a_2 m_2' \parallel a_2' b_2$, $m_2 m_2'' \parallel E$, $m_2' m_2 \parallel mf$ úsek $\min E = -\overline{m_2 m_2''}$.

Pro osovou sílu ve svislici V (obr. 158) užijeme k odvození krajních hodnot zase příčinkového obrazce (viz obr. 148), jejž tvoří při zatížení spodního pasu přímky $a_1 m_1'$, $n_1' b_1$, které se sekou na svislici přidruženého středu momentového v a omezují v prodloužené svislici V pořadnici $\overline{m_1'' m_1'} = 1$. Přímka $m_1' n_1'$ seče osu $a_1 b_1$ v bodě u_1 na svislici obojetné polohy, kterou sestrojíme přímo v mnohostranu osovém, protneme-li prodlouženou osu pasu C se svislicí bodu a, prodlouženou osu pasu D se svislicí bodu b a průsečíky a'', b' spojíme; tato spojnice seče osu příčky $m'n$ v bodě u na svislici



Obr. 158.

obojetné polohy, jak plyne z afinity obrazců $a_1 m_1' n_1' b_1$ a $a'' m' n b'$. Podle vzorců (162) určíme zase

$$\max V = q \cdot \text{pl.}\, a_1 m_1' u_1, \qquad \min V = q \cdot \text{pl.}\, u_1 n_1' b_1,$$

kde jest

$$\text{pl.}\, a_1 m_1' u_1 = \tfrac{1}{2}\, \overline{a_1 m_1} \cdot \overline{u_1 u_1''}, \qquad \text{pl.}\, u_1 n_1' b_1 = \tfrac{1}{2}\, \overline{n_1 b_1} \cdot \overline{u_1 u_1'}.$$

Z afinity příčinkového obrazce s obrazcem $a'' m' n b'$ plyne

$$\frac{\overline{u_1 u_1''}}{\overline{u u''}} = \frac{\overline{b_1 b_1'}}{\overline{b' b''}} = \frac{\overline{m_1'' m_1'}}{\overline{m m'}} = \frac{1}{\overline{m m'}}, \qquad \frac{\overline{u_1 u_1'}}{\overline{u u'}} = \frac{\overline{a_1 a_1'}}{\overline{a'' a'}} = \frac{\overline{m_1' m_1''}}{\overline{m' m}} = -\frac{1}{\overline{m' m}}.$$

Dosazením dostaneme

$$\max V = \tfrac{1}{2} q \cdot \overline{a_1 m_1} \cdot \overline{u_1 u_1''} = \tfrac{1}{2} q \cdot \overline{a_1 m_1} \cdot \frac{\overline{u u''}}{\overline{m m'}},$$

$$\min V = \tfrac{1}{2} q \cdot \overline{n_1 b_1} \cdot \overline{u_1 u_1'} = -\tfrac{1}{2} q \cdot \overline{n_1 b_1} \cdot \frac{\overline{u u'}}{\overline{m' m}}.$$

Přenesme zase $\overline{a_2 a_2'} = \tfrac{1}{2} q l = \tfrac{1}{2} q \cdot \overline{a_2 b_2}$; přímky $a_2' b_2 \parallel a_2 m_2'$ určují ve svislicích bodů n, m pořadnice $\overline{n_2 n_2'} = \tfrac{1}{2} q \cdot \overline{n_1 b_1}$, $\overline{m_2 m_2'} = \tfrac{1}{2} q \cdot \overline{a_1 m_1}$. Vedeme-li $m_2 m_2'' \parallel E$, $m_2' m_2'' \parallel m u$ a $m_2'' m_2''' \parallel C$, plyne z podobnosti

$$\overline{m_2 m_2'''} = \overline{m_2 m_2'} \cdot \frac{\overline{u u''}}{\overline{m m'}} = \max V.$$

Podobně určíme přímkami $n_2' n_2'' \parallel E$, $n_2 n_2'' \parallel m u$, $n_2'' n_2''' \parallel D$ úsek

$$\overline{n_2 n_2'''} = \overline{n_2 n_2'} \cdot \frac{\overline{u u'}}{\overline{m' m}} = -\min V.$$

Jinak sestrojíme týž úsek, vedeme-li $n_2' m_2^{IV} \parallel a_2 b_2$ a spojíme-li body m_2^{IV}, n_2; na svislici bodu u je pak úsek

$$\overline{u_2 u_2'} = \overline{m_2 m_2^{IV}} \cdot \frac{\overline{u u'}}{\overline{m' m}} = \overline{n_2 n_2'''} = -\min V.$$

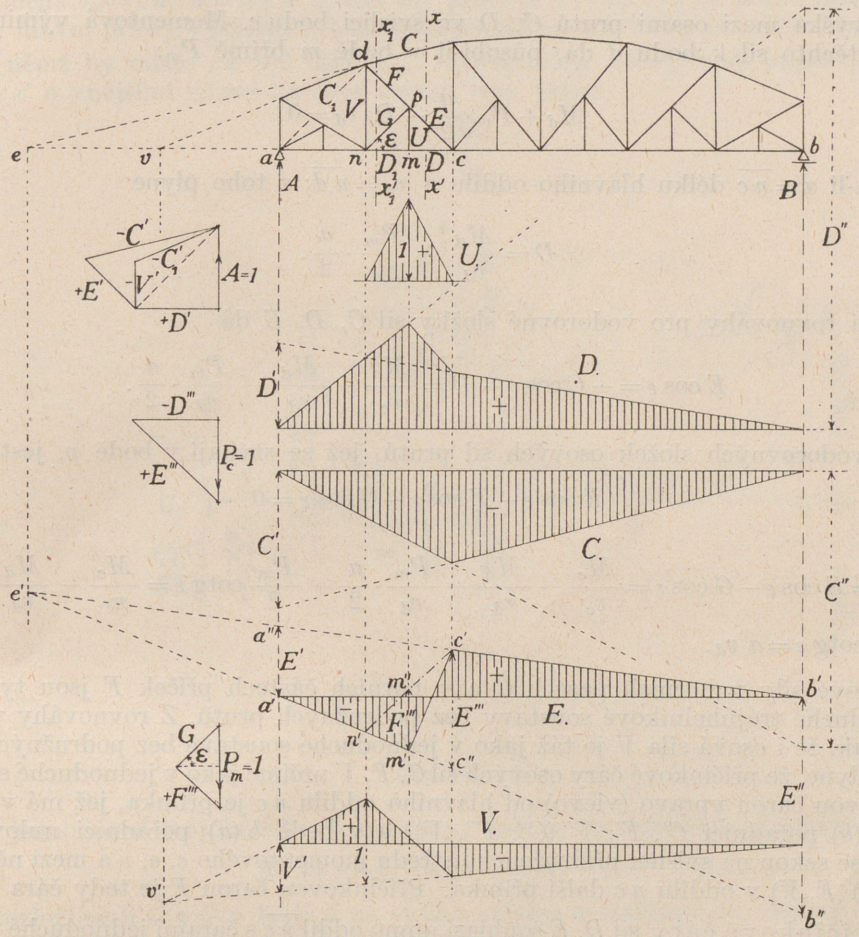
Kdyby byl horní pás zatížen, brali bychom místo oddílu $m n$ protatý oddíl horního pasu C, místo bodu m bod m'; jinak by se sestrojení neměnilo.

Nosníky přímopasové lze řešiti velmi jednoduše. Osové síly prutů pasových se počítají z momentů k přidruženým středům momentovým, shodných s ohybovými momenty prostého nosníku; osové síly prutů mezipasových určujeme pak z posouvajících sil prostého nosníku.[1]) Vyšetříme-li tedy maxima a minima momentů a posouvajících sil prostého nosníku, jsou tím dány krajní hodnoty osových sil prutů nosníku přímopasového.

46. ***Trojúhelníková soustava s podružnými poloviční pruty.*** Při větším rozpětí měla by jednoduchá trojúhelníková soustava buď velké délky oddílů nebo příliš strmé příčky. Obé je prakticky nevýhodné. Lze se tomu vyhnouti, rozdělíme-li v jednoduché soustavě s velkými délkami oddílů na př. každý prut dolního pasu na polovinu; aby však nenastalo zatížení mimostyčné, připojíme nový styčný bod prutem k ostatní soustavě. Nechceme-li míti nové pruty příliš strmé, rozdělíme na polovinu i příčku nad děleným dolním pasem a spojíme oba půlící body m, p svislým prutem U, horní

[1]) Viz prvý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1940), str. 207 a d.

bod p pak připojíme prutem G ke spodnímu styčníku n (obr. 159). Takto vytvořená soustava je určitá, neboť díl ndc je vytvořen trojúhelníkovou soustavou a styčný bod horního pasu nad bodem c je k této soustavě připojen dvěma pruty. Nové poloviční *pruty* U, G nazveme *podružnými*, pruty původní jednoduché soustavy *hlavními*.



Obr. 159.

Podružná svislice U je namáhána na tah pouze břemenem působícím v bodě m, je-li spodní pás přímý; z rovnováhy v bodě m plyne $U = P_m$, takže příčinková čára P_m je zároveň příčinkovou čarou U. Za nepřímého zatížení se mění při pohybu břemene styčníkové břímě P_m v každém sousedním oddílu podle přímky, jež má v bodě n, c pořadnici nulovou, v bodě m pořadnici $P = 1$.

Je-li bod p uprostřed $\overline{dc}$ a m uprostřed $\overline{nc}$, svírají osy prutů G a E (F) týž úhel ε s vodorovnou; výslednice sil E, F v bodě p je pak souměrná se silou P a této síle rovna, pročež z rovnováhy v bodě p plyne

$$\frac{U}{2} = -G \sin \varepsilon, \qquad \text{tedy} \qquad G = -\frac{P_m}{2 \sin \varepsilon}. \tag{163a}$$

Příčinková čára síly G je podle toho téhož tvaru jako U, měla by však ve svislici bodu m místo jedničky pořadnici $-\frac{1}{2 \sin \varepsilon}$.

Z rovnováhy osových sil C, D, E prutů proťatých řezem $x\,x'$ s vnějšími silami na levé straně řezu plyne jako u jednoduché soustavy trojúhelníkové

$$C\cos\gamma = -\frac{M_c}{v_c}, \tag{164^a}$$

je-li v_c výška mezi osami prutů C, D ve svislici bodu c. Momentová výminka rovnováhy těchto sil k bodu d dá, působí-li v bodě m břímě P_m:

$$M_d + P_m \cdot \frac{a}{2} - D \cdot v_d = 0,$$

znamená-li $a = \overline{n\,c}$ délku hlavního oddílu a $v_d = \overline{n\,d}$; z toho plyne

$$D = \frac{M_d}{v_d} + \frac{P_m}{v_d} \cdot \frac{a}{2}. \tag{165^a}$$

Výminka rovnováhy pro vodorovné složky sil C, D, E dá

$$E\cos\varepsilon = -C\cos\gamma - D = \frac{M_c}{v_c} - \frac{M_d}{v_d} - \frac{P_m}{v_d} \cdot \frac{a}{2}. \tag{166^a}$$

Součet vodorovných složek osových sil prutů, jež se stýkají v bodě p, jest

$$E\cos\varepsilon - F\cos\varepsilon - G\cos\varepsilon = 0$$

čili

$$F\cos\varepsilon = E\cos\varepsilon - G\cos\varepsilon = \frac{M_c}{v_c} - \frac{M_d}{v_d} - \frac{P_m}{v_d} \cdot \frac{a}{2} + \frac{P_m}{2}\operatorname{cotg}\varepsilon = \frac{M_c}{v_c} - \frac{M_d}{v_d}, \tag{167^a}$$

jelikož $\operatorname{cotg}\varepsilon = a/v_d$.

Osové síly v horních pasech C a v horních částech příček F jsou tytéž jako u jednoduché trojúhelníkové soustavy bez podružných prutů. Z rovnováhy v bodě d plyne pak, že i osová síla V je táž jako v jednoduché soustavě bez podružných prutů. Z toho plyne, že příčinkové čáry osových sil C, F, V určíme jako v jednoduché soustavě: příčinkovou čarou vpravo (vlevo) od hlavního oddílu $n\,c$ je přímka, jež má ve svislici bodu a (b) pořadnici C', F', V' (C'', F'', V'') a v bodě b (a) pořadnici nulovou; obě přímky se sekou na svislici přidruženého středu momentového c, e, v a mezi ně se vloží (u prutů F, V) v oddílu $n\,c$ další přímka. Příčinkovou čarou F je tedy čára $a'\,n'\,c'\,b'$.

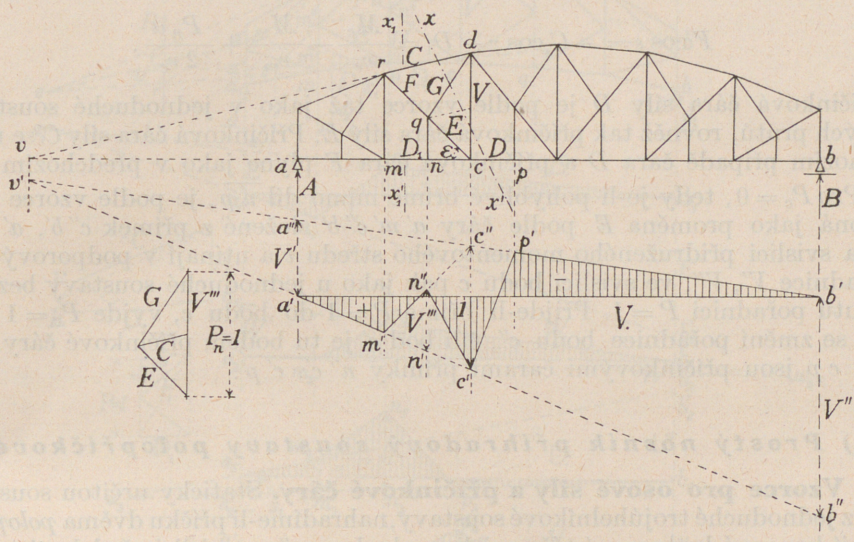
Příčinkové čáry sil D, E souhlasí mimo oddíl $\overline{n\,c}$ s čarami jednoduché trojúhelníkové soustavy bez podružných prutů, neboť je-li pohyblivé břímě mimo díl $\overline{n\,c}$, je $P_m = 0$, tedy i $U = G = 0$ a $E = F$. To plyne i z rovnováhy osových sil C, D, E prutů proťatých řezem $x\,x'$ s vnějšími silami na jedné straně řezu, jež ukazuje, že se síly D, E i C vlevo (vpravo) od oddílu $\overline{m\,c}$ mění úměrně k reakci B (A), tedy podle přímky, dané ve svislici bodu a (b) pořadnicí nulovou, ve svislici bodu b (a) pořadnicí D'', E'', C'' (D', E', C'), kterou určíme jako osovou sílu prutu D, E, C, působí-li vpravo (vlevo) od řezu $x\,x'$ pouze reakce $B = 1$ ($A = 1$) jako jediná vnější síla. Levá přímka platí u prutů D, E, C až ke svislici bodu m, mezi obě přímky se pak vloží (při prutech D, E) v oddílu $m\,c$ další přímka. Příčinkovou čarou E je tedy čára $a'\,m'\,c'\,b'$. Pořadnice E''' mezi levou a pravou přímkou příčinkovou ve svislici bodu c plyne jako osová síla ze samotného břemene $P_c = 1$, a to z rovnováhy sil P_c, C, D, E; tu vyjde $C = 0$ a zbývají v rovnováze pouze síly $P_c = 1$, D''', E'''. Není-li v m břemene, je $E = F$, tedy mimo díl $n\,c$ souhlasí čáry E, F. V bodě m se liší čáry E, F o hodnotu F''', jež plyne z břemene $P_m = 1$ na základě rovnováhy sil P_m, F, G; jelikož vyjde $F''' = \frac{1}{2}E'''$, jsou body n', m'', c' na přímce, což potvrzuje dřívější výsledek.

Spojíme-li středy hlavních příček podružnými polovičními příčkami s horními styčnými body (obr. 160), je svislice $q\,n$ zase tažena silou rovnou břemeni P_n a z rovnováhy v bodě q plyne pro osovou sílu G svislá složka

$$G \sin \varphi = P_n \cdot \frac{v_c - u}{v_c}, \qquad (163^b)$$

kde znamená $v_c = \overline{c\,d}$, $u = \overline{n\,q}$ a φ úhel osy prutu G s vodorovnou; neboť nahradíme-li oba díly hlavní příčky výslednicí, bude obrazec silový pro bod q podobný trojúhelníku $c\,d\,q$, v němž by místo $\overline{c\,d}$ byl úsek P_n. Z rovnováhy osových sil prutů proťatých řezem $x\,x'$ s vnějšími silami na levé straně řezu plyne

$$D = \frac{M_d}{v_d} \qquad (165^b)$$



Obr. 160.

jako u jednoduché trojúhelníkové soustavy; dále je momentová výminka k bodu c

$$(C \cos \gamma + G \cos \varphi)\, v_c + M_c = 0,$$

neboť rozložíme-li C a G v bodě d na složku svislou a vodorovnou, nemají obě svislé složky i síla V k bodu d momentů. Z toho určíme

$$C \cos \gamma = -\frac{M_c}{v_c} - G \cos \varphi = -\frac{M_c}{v_c} - P_n \frac{v_c - u}{v_c} \operatorname{cotg} \varphi.$$

Z obrazce plyne $\operatorname{cotg} \varphi = \dfrac{a}{2\,(v_c - u)}$, znamenáme-li $\overline{n\,c} = \frac{1}{2}\,\overline{m\,c} = \frac{1}{2}\,a$; vyjde tedy

$$C \cos \gamma = -\frac{M_c}{v_c} - \frac{P_n\, a}{2\, v_c}. \qquad (164^b)$$

Užijme dále momentové výminky rovnováhy týchž sil k bodu r; přitom rozložíme G v bodě q do směru E a do směru svislého, čímž dostaneme ve svislém směru sílu P_n vzhůru směřující, která se ruší s břemenem P_n. Síly G a P_n z momentové výminky rovnováhy k bodu r tedy odpadají a vyjde

$$M_m + P_c \cdot a - D \cdot v_m - V \cdot a = 0.$$

Dosadíme-li za D ze vzorce (165^b), dostaneme

$$V = \left(\frac{M_m}{v_m} - \frac{M_d}{v_d} \right) \frac{v_m}{a} + P_c . \tag{168}$$

Z rovnováhy v bodě c plyne pak

$$E \sin \varepsilon + V - P_c = 0 , \quad \text{z toho} \quad E \sin \varepsilon = P_c - V_c = \left(\frac{M_d}{v_d} - \frac{M_m}{v_m} \right) \frac{v_m}{a}$$

a vodorovná složka

$$E \cos \varepsilon = \left(\frac{M_d}{v_d} - \frac{M_m}{v_m} \right) \frac{v_m}{a} \operatorname{cotg} \varepsilon = \frac{M_d}{v_d} - \frac{M_m}{v_m} . \tag{166^b}$$

Z řezu $x_1 x_1'$ určíme konečně

$$F \cos \varepsilon = - C_1 \cos \gamma - D_1 = \frac{M_c}{v_c} - \frac{M_m}{v_m} + \frac{P_n a}{2 v_c} . \tag{167^b}$$

Příčinková čára síly D je podle vzorce táž jako v jednoduché soustavě bez podružných prutů, rovněž tak příčinková čára síly E. Příčinková čára síly C se určí jako v předchozím případě čára D a příčinková čára F plyne jako v předchozím případě čára E. Pro $P_c = 0$, tedy je-li pohyblivé břímě mimo díl $\overline{np}$, je podle vzorce proměna V obdobná jako proměna E podle čáry $a' m' c'' b'$ složené z přímek $c'' b'$, $a' c'$, jež se sekou na svislici přidruženého momentového středu v a utínají v podporových svislicích pořadnice V', V'', ve svislici bodu c pak jako u jednoduché soustavy bez podružných prutů pořadnici $P = 1$. Přijde-li břímě $P = 1$ do bodu c, vyjde $P_c = 1$ a o tuto hodnotu se změní pořadnice bodu c'', čili bod c' je tu bodem příčinkové čáry. V oddílech nc, cp jsou příčinkovými čarami přímky $n'' c'$, $c' p'$.

b) Prostý nosník příhradový soustavy polopříčkové.

47. Vzorce pro osové síly a příčinkové čáry. Staticky určitou soustavu dostaneme z jednoduché trojúhelníkové soustavy, nahradíme-li příčku dvěma *polopříčkami*, jež spojují koncové body n, n' téže svislice s bodem m'' na svislici předchozí (obr. 161). Při souměrném uspořádání je soustava určitá, sbíhají-li se polopříčky od středu k podporám, neboť pak lze celou soustavu vytvořiti z trojúhelníka $n'' p p'$, připojujeme-li k němu každý další bod dvěma pruty. Předpokládáme svislé zatížení.

Odvodíme nejprve vzorce pro osové síly k početnímu řešení. U šikmých prutů C, D, E, F znamenejme odchylky jejich os od vodorovné γ, δ, ε, φ. Vedeme-li řez $x_1 x_1'$, jenž seče pasy C, D a oba díly svislice $m m'$, jsou osové síly prořatých prutů v rovnováze s vnějšími silami vlevo od řezu, odnímáme-li část soustavy vpravo od řezu. Momentová výminka rovnováhy k bodu m dá

$$C \cos \gamma \cdot v_m + M_m = 0 ,$$

je-li M_m ohybový moment prostého nosníku k bodu m při daném zatížení a $v_m = \overline{m m'}$. Z toho plyne

$$C \cos \gamma = - \frac{M_m}{v_m} ;$$

je tedy osová síla v horním pase C táž jako při jednoduché soustavě trojúhelníkové, jež by měla místo polopříček E, F jedinou příčku $m n'$. Podobně plyne z momentové výminky rovnováhy k bodu m'

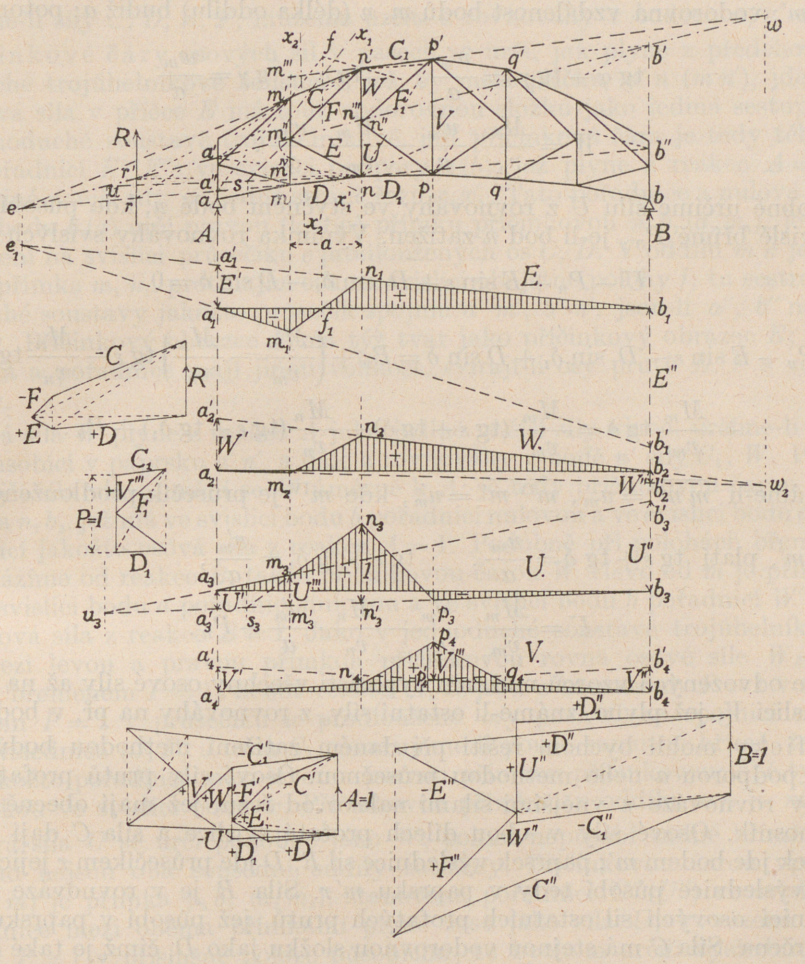
$$D \cos \delta = \frac{M_m}{v_m} = - C \cos \gamma ; \tag{169}$$

tedy osová síla ve spodním pase D je táž jako v jednoduché soustavě, jež by měla v příhradě $m\,m'\,n'\,n$ jedinou příčku $m'\,n$. Z rovnováhy ve styčném bodě m'' plyne

$$E\cos\varepsilon = -F\cos\varphi. \tag{170^a}$$

Předpokládejme dále, že je zatížen spodní pás. Z rovnováhy osových sil C, F, W, C_1, jež se stýkají v bodě n', plyne pro vodorovné složky výminka

$$F\cos\varphi + C\cos\gamma - C_1\cos\gamma_1 = 0$$



Obr. 161.

a pro svislé složky

$$W + F\sin\varphi + C\sin\gamma - C_1\sin\gamma_1 = 0\,.$$

Dosazením $C\cos\gamma = -M_m/v_m$ a obdobně $C_1\cos\gamma_1 = -M_n/v_n$ dostaneme

$$F\cos\varphi = -C\cos\gamma + C_1\cos\gamma_1 = \frac{M_m}{v_m} - \frac{M_n}{v_n}\,. \tag{170^b}$$

Vodorovná složka síly F je podle toho táž jako vodorovná složka výstupné příčky $m\,n'$, kterou bychom v příhradě $m\,m'\,n'\,n$ nahradili obě polopříčky; obdobně je vodo-

rovná složka síly E táž jako při jediné sestupné příčce $m'n$ v příhradě $mm'n'n$. Z druhé výminky rovnováhy určíme

$$W = -C\sin\gamma + C_1\sin\gamma_1 - F\sin\varphi = \frac{M_m}{v_m}\operatorname{tg}\gamma - \frac{M_n}{v_n}\operatorname{tg}\gamma_1 - \left(\frac{M_m}{v_m} - \frac{M_n}{v_n}\right)\operatorname{tg}\varphi =$$

$$= \frac{M_n}{v_n}(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\gamma_1) - \frac{M_m}{v_m}(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\gamma).$$

Poznamenejme $\overline{m''m'} = w_m$, $\overline{m''m'''} = w'_m$, je-li m''' průsečík prodloužené osy C_1 se svislicí mm'; vodorovná vzdálenost bodů m, n (délka oddílu) budiž a; potom jest

$$\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{w'_m}{a}, \qquad \operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\gamma = \frac{w_m}{a},$$

$$W = \frac{M_n}{v_n}\cdot\frac{w'_m}{a} - \frac{M_m}{v_m}\cdot\frac{w_m}{a}. \tag{171}$$

Podobně určíme sílu U z rovnováhy ve styčném bodě n, kde působí síly D, E, U, D_1 a svislé břímě P_n, je-li bod n zatížen. Výminka rovnováhy svislých složek jest

$$U - P_n + E\sin\varepsilon + D_1\sin\delta_1 - D\sin\delta = 0$$

a dá

$$U = P_n - E\sin\varepsilon - D_1\sin\delta_1 + D\sin\delta = P_n + \left(\frac{M_m}{v_m} - \frac{M_n}{v_n}\right)\operatorname{tg}\varepsilon - \frac{M_n}{v_n}\operatorname{tg}\delta_1 +$$

$$+ \frac{M_m}{v_m}\operatorname{tg}\delta = \frac{M_m}{v_m}(\operatorname{tg}\varepsilon + \operatorname{tg}\delta) - \frac{M_n}{v_n}(\operatorname{tg}\varepsilon + \operatorname{tg}\delta_1) + P_n.$$

Poznamenáme-li $\overline{mm''} = u_m$, $\overline{m^{IV}m''} = u'_m$, kde m^{IV} je průsečík prodloužené osy D_1 se svislicí mm', platí $\operatorname{tg}\varepsilon + \operatorname{tg}\delta = \frac{u_m}{a}$, $\operatorname{tg}\varepsilon + \operatorname{tg}\delta_1 = \frac{u'_m}{a}$,

$$U = \frac{M_m}{v_m}\cdot\frac{u_m}{a} - \frac{M_n}{v_n}\cdot\frac{u'_m}{a} + P_n. \tag{172}$$

Podle odvozených vzorců můžeme vypočísti všechny osové síly až na sílu v prostřední svislici V, jež plyne, známe-li ostatní síly, z rovnováhy na př. v bodě p'.

Graficky mohli bychom řešiti při daném zatížení methodou bodů styčných počínajíce podporou a nebo methodou průsečnou. Osové síly prutů proťatých řezem $x_1x'_1$ jsou v rovnováze s vnějšími silami nalevo od řezu, jež mají obecně výslednici R mimo nosník. Osové síly v obou dílech proťaté svislice a síla C dají výslednici, jejíž paprsek jde bodem m'; paprsek výslednice sil R, D jde průsečíkem r jejich paprsků. Obě tyto výslednice působí tedy v paprsku $m'r$. Síla R je v rovnováze se silou D a s výslednicí osových sil ostatních proťatých prutů, jež působí v paprsku $m'r$; tím je síla D určena. Síla C má stejnou vodorovnou složku jako D, čímž je také stanovena. Z řezu $x_2x'_2$ plyne, že je R v rovnováze se silami C, D, E, F; ke všem pěti uvedeným silám náleží tedy uzavřený obrazec silový, jímž určíme síly E, F.

Můžeme však určiti též přímo výslednici sil C, F i výslednici sil D, E. Síly E, F mají svislou výslednici jdoucí bodem m''; síly C, D mají též svislou výslednici jdoucí průsečíkem e prodloužených os prutů C, D. Mysleme si sílu C (D) rozloženu v bodě e na složku svislou a složku působící ve spojnici em''; stejně sílu F (E) rozložme v bodě m'' na složku svislou a složku ve spojnici em''. Délku $\overline{nn'}$ můžeme pokládati za úsek výslednice sil C, D a v jiném měřidle za úsek výslednice sil E, F. Při uvedeném rozkladu mají svislé složky sil C, D poměr $\overline{n'''n'} : \overline{nn'''}$, seče-li spojnice em'' svislici nn' v bodě n'''; týž poměr mají svislé složky sil F, E. Svislá výslednice sil C, D a svislá výslednice sil E, F jsou v rovnováze se silou R; výslednice všech čtyř sil C, D, E, F působí tedy

v paprsku R a s touto silou se ruší. Rozdělíme-li obě svislé výslednice (C, D) i (E, F) v témž poměru, budou míti obě části výslednici v témž paprsku R. Při uvedeném rozkladu působí výslednice svislých složek sil C, F v paprsku R, neboť obě složky mají k výslednicím (C, D) a (E, F) stejný poměr $\overline{n''' n'} : \overline{n n'}$. Z téhož důvodu působí za uvedeného rozkladu i výslednice svislých složek sil D, E v paprsku R. Každá z uvažovaných osových sil má mimoto složku v paprsku $e m''$; prochází proto výslednice sil C, F i výslednice sil D, E průsečíkem r' paprsku R a přímky $e m''$. Výslednice sil C, F má tedy paprsek $r' n'$ a výslednice sil D, E působí v paprsku $r' n$. Obě tyto výslednice jsou v rovnováze se silou R, čímž jsou určeny.

Známe-li síly C, D, E, F, můžeme určiti z rovnováhy v bodech n, n' síly U, W.

Příčinkové čáry osových sil v pasech se určí, jak plyne z předchozího, jako v jednoduché trojúhelníkové soustavě, jež by měla příčku $m' n$ $(m n')$, jde-li o prut D (C). Osová síla v příčce E má touž vodorovnou složku jako jediná sestupná příčka $m' n$ v jednoduché soustavě trojúhelníkové, její příčinková čára je tedy téhož tvaru; je dána pořadnicí E' (E'') ve svislici podpory a (b), jež plyne z reakce $A = 1$ $(B = 1)$ jakožto jediné vnější síly po jedné straně řezu $x_2 x_2'$. Tato pořadnice a nulová pořadnice ve svislici bodu b (a) určí pravou (levou) přímku příčinkovou $n_1 b_1$ $(a_1 m_1)$, jež se sekou v prodloužení na svislici průsečíku e prodloužených os C, D. V oddílu $m n$ je příčinkovou čarou přímka $m_1 n_1$, protínající osu na svislici obojetné polohy f; tu sestrojíme jako u jednoduché soustavy jakožto průsečík spojnic $a'' m'$, $b'' n'$, jsou-li a'', b'' na prodloužené ose D. Příčinkový obrazec F má týž tvar jako příčinkový obrazec E; znaménka jsou opačná a pořadnice mají jinou velikost, svírají-li osy prutů E, F s vodorovnou různé úhly.

Osová síla W plyne z reakce A jako jediné vnější síly vlevo, určíme-li výslednici sil C, F, působící v paprsku $a' n'$, a dále z rovnováhy v bodě n' síly C_1, W. Pokud je A jediná vnější síla vlevo, mění se W úměrně k A; je tedy příčinkovou čarou W vpravo od n přímka $n_2 b_2$, jež má ve svislici bodu b pořadnici nulovou a ve svislici bodu a pořadnici W', plynoucí jakožto osová síla z reakce $A = 1$. Podobně při polohách břemene vlevo od m vycházíme od reakce B, takže příčinkovou čarou W vlevo od m je přímka $a_2 m_2$, určená ve svislici bodu a pořadnicí nulovou a ve svislici bodu b pořadnicí W'', plynoucí jakožto osová síla z reakce $B = 1$. Jako v jednoduché soustavě trojúhelníkové je pořadnice mezi levou a pravou přímkou příčinkovou rovna osové síle W_P vyvozené samotným břemenem $P = 1$, neboť reakce A, B jsou s břemenem $P = 1$ v rovnováze. Při břemeni $P = 1$ v průsečíku w prodloužené osy pasu C_1 se spojnicí $e m''$ splyne paprsek výslednice (C, F) s osou C_1, uvažujeme-li pouze samotné břímě, takže vyjde $W_P = 0$ jakožto pořadnice mezi levou a pravou přímkou příčinkovou; obě tyto přímky se tedy sekou ve svislici bodu w. Příčinkovou přímkou v oddílu $m n$ je $m_2 n_2$.

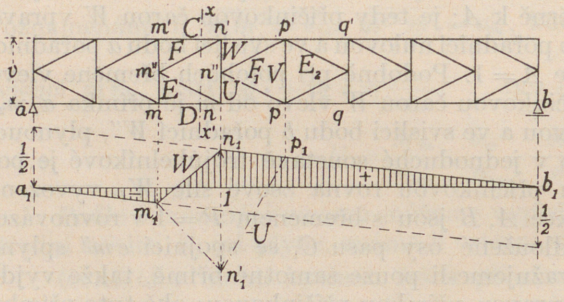
Osová síla U se určí podobně jako W, pokud nepůsobí žádné břímě v bodě n, tedy pokud nejsou oba sousední oddíly zatíženy. Příčinkovou čarou vpravo od p (vlevo od m) je přímka $p_3 b_3$ $(a_3 m_3)$, stanovená pořadnicí U' (U'') ve svislici bodu a (b). Pořadnice mezi oběma přímkami plyne zase jako síla U_P vyvozená samotným břemenem $P = 1$ v příslušné poloze působícím; tu bychom určili výslednici sil D, E, působící ve spojnici bodu n s průsečíkem paprsku břemene s přímkou $e m''$, a z toho stanovíme dále síly U, D_1, jež jsou s výslednicí sil D, E v rovnováze. Obě přímky příčinkové se proto protínají na svislici průsečíku u přímky $e m''$ s prodlouženou osou prutu D_1. Pořadnice U''' mezi levou a pravou přímkou příčinkovou ve svislici bodu m plyne zase jako účinek samotného břemene $P = 1$ v bodě m působícího; tu jest $M_m = 0$, $M_n = -1 \cdot a$, $P_n = 0$ a ze vzorce (172) vychází $U''' = 1 \cdot \frac{u'_m}{v_n}$. Tuto hodnotu měříme od přímky $a'_3 b_3$, poněvadž jsme při stanovení U''' vycházeli s levé strany a tedy musíme spojovati účinek břemene s účinkem levé reakce. Břímě $P_n = 1$ samotné dá konečně sílu $U^{IV} = P_n = 1$, kterou nanášíme od pravé přímky příčinkové $a'_3 b_3$, poněvadž při zatížení břemenem $P_n = 1$ můžeme určiti síly D, E, U, D_1 nejprve z reakce

A s vynecháním břemene P_n a pak z břemene $P_n = 1$ samotného určíme sílu U^{IV}. Z poměru $U''' : U^{IV} = u'_m : v_n$, tedy $\overline{m'_3 m_3} : \overline{n'_3 n_3} = \overline{m^{IV} m''} : \overline{n n'}$ plyne, že se přímky $m_3 n_3$ a $a'_3 b_3$ sekou na svislici průsečíku s prodloužených os prutů D_1, F. V oddílech $m n$, $n p$ jsou příčinkovými čarami přímky $m_3 n_3$, $n_3 p_3$.

Příčinková čára osové síly v prostřední svislici V stanoví se opět tak, že se určí síla V' (V'') z reakce $A = 1$ ($B = 1$); graficky se tyto síly určí, vyšetříme-li z rovnováhy v bodech n, n', n'' osové síly v prutech oddílu $n p$. Osová síla v pase $p q$ rovná se podle předchozího osové síle v témž prutu jednoduché soustavy, jež by měla příčku $p q'$ místo obou polopříček; osová síla v pase $p' q'$ má stejnou vodorovnou složku jako síla v pase $p q$. Nyní můžeme snadno doplniti obrazec silový a stanoviti z něho sílu V'. Při souměrném nosníku vyšlo by $V'' = V'$. Pořadnicemi $V' = \overline{a_4 a'_4}$, $V'' = \overline{b_4 b'_4}$ určíme příčinkové přímky $q_4 b_4$, $a_4 n_4$, jež se sekou na svislici bodu p. Skutečnou příčinkovou pořadnici ve svislici bodu p určíme, jestliže k účinku reakce B, danému pořadnicí přímky $a_4 b'_4$, přičteme algebraicky účinek samotného břemene $P = 1$ v bodě p na pravý díl nosníku působícího. Tu nejsou napjaty všechny pruty vpravo od p a břímě $P_p = 1$ je v rovnováze se silami čtyř prutů ležících vlevo od svislice V. Osová síla C_1 plyne jako v jednoduché soustavě, ve které by obě polopříčky $n'' p'$, $n'' p$ byly nahrazeny jedinou příčkou $n p'$; D_1 má stejnou vodorovnou složku jako C_1. Poněvadž pruty vpravo od $p p'$ nejsou napjaty, je V v rovnováze s osovými silami C_1, F_1. Takto určenou sílu V''' je třeba nanésti ve svislici bodu p od bodu p'_4, čímž jsou dány i příčinkové přímky $n_4 p_4$, $p_4 q_4$.

Polopříčkový nosník přímopasový (obr. 162) má stálou výšku $v_m = v$, a jsou-li svislice styčníky m'', n'', ... půleny, je $\varepsilon = \varphi$ při stejných oddílech pro všechny příčky stejné. Z obecného případu plyne tu $E = -F$ a

$$D = -C = \frac{M_m}{v}. \qquad (173)$$



Obr. 162.

Rozdělíme-li nosník řezem $x x'$, platí pro svislé složky sil působících na levou část

$$T + F \sin \varepsilon - E \sin \varepsilon = 0,$$

značí-li T posouvající sílu v probatém oddílu $m n$, a z toho určíme

$$E = -F = \frac{T}{2 \sin \varepsilon}. \qquad (174)$$

Je-li zatížen spodní pás, dá rovnováha v bodě n'

$$W = -F \sin \varepsilon = \frac{T}{2} \qquad (175^a)$$

a rovnováha v bodě n

$$U = -E \sin \varepsilon + P_n = -\frac{T}{2} + P_n. \qquad (175^b)$$

Osová síla v prostřední svislici při spodním pase zatíženém plyne z rovnováhy v bodě p', jež dá

$$V = -(F_1 + E_2) \sin \varepsilon, \qquad \text{kde} \qquad F_1 \sin \varepsilon = -\tfrac{1}{2} T_p, \qquad E_2 \sin \varepsilon = \tfrac{1}{2} T_q,$$

znamenáme-li T_p (T_q) posouvající sílu oddílu $n p$ ($p q$). Z toho vychází

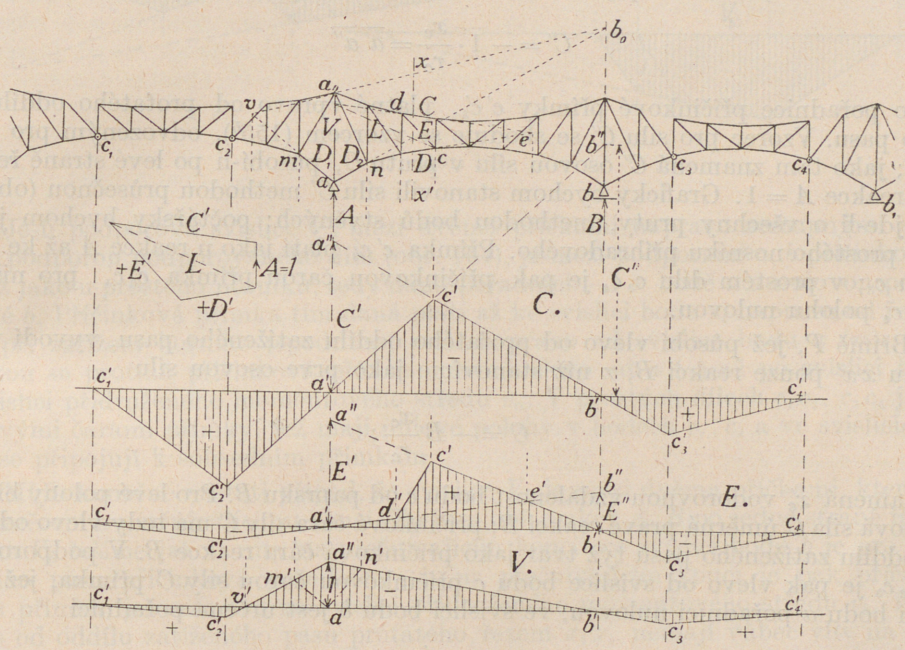
$$V = \tfrac{1}{2}(T_p - T_q) = \tfrac{1}{2} P_p. \qquad (176)$$

Při zatížení horního pasu obrátilo by se znaménko.

Příčinkové čáry sil E, F mají tvar příčinkové čáry T; příčinkovou čarou W je čára $\frac{1}{2}\,T$, tedy čára $a_1 m_1 n_1 b_1$ daná v podporových svislicích pořadnicemi $^1/_2$. Příčinková čára $-U$ je vlevo od m a vpravo od p totožná s čarou W. V bodě n je pro čáru $-U = \frac{1}{2}\,T - P_n$ přenésti od čáry $\frac{1}{2}\,T$ pořadnici $P_n = 1 = \overline{n_1 n_1'}$ směrem záporným. V oddílech $m\,n$, $n\,p$ jsou příčinkovými čarami přímky $m_1 n_1'$, $n_1' p_1$.

c) Příhradový spojitý nosník kloubový.

48. Příčinkové čáry osových sil. Příhradový nosník o n polích, jenž má jednu podporu pevnou a n podpor posouvatelných, je staticky určitý, je-li jako plnostěnný nosník složen z dílů spojených $(n-1)$ klouby. Každý díl nosníku musí býti sám o sobě určitý; nesmí tedy míti žádný díl mezi dvěma klouby více než dvě podpory, neboť by byl staticky neurčitý, a v žádném poli nosníku nesmí býti více než dva klouby, neboť by pak byl příslušný díl nosníku staticky přeurčitý. Obyčejně se střídá pole bez kloubů s polem se dvěma klouby (obr. 163). Klouby rozdělují pak nosník na *díly prosté* $c_1 c_2$, $c_3 c_4$, jež nemají vnitřních podpor, a *díly podporované*, na př. $c_2 c_3$.



Obr. 163.

Je-li jedna podpora nosníku pevná, ostatní posouvatelné po vodorovné, jsou za svislého zatížení všechny podporové reakce svislé; rovněž síly, jimiž díly nosníku působí navzájem v kloubech, jsou pak svislé. Reakce podporové i síly v kloubech působící určí se jako pro obdobný nosník plnostěnný. Pro osové síly prutů v soustavě trojúhelníkové platí všechny vzorce, jež byly odvozeny v prvém dílu tohoto spisu pro nosník prostý téže soustavy; za momenty M jest dosazovati ovšem momenty ohybové plnostěnného spojitého nosníku kloubového, jenž by měl touž délku, totéž rozdělení podpor a kloubů i totéž zatížení jako daný nosník příhradový.

Prosté díly nosníku se mají jako nosníky prosté a podle toho se řeší.

U podporovaného dílu $c_2 c_3$ vyvodí zatížení, jež působí pouze mezi podporami $a\,b$ (obr. 163), v těchto podporách tytéž reakce A, B jako u prostého nosníku, který

by v podporách a, b končil; za tohoto zatížení by nebyly pruty mimo pole ab vůbec napjaty. Díl podporovaný se tedy má při zatížení mezi vlastními podporami jako nosník prostý, shodný s částí daného nosníku mezi těmito podporami. Tím jsou dány příčinkové čáry osových sil prutů mezi podporami a, b v poli ab. Další průběh jejich se snadno vyšetří.

Je-li jediné břímě osamělé $P = 1$ kdekoli vpravo od řezu xx', působí vlevo od řezu pouze reakce A; z momentové výminky rovnováhy sil A, C, D, E, vztažené k přidruženému středu momentovému c, plyne osová síla v horním pase

$$C = -A\frac{x_c}{r_c},$$

znamená-li x_c vodorovnou vzdálenost bodu c od paprsku A a r_c délku kolmice spuštěné z bodu c na osu prutu C. Pohybuje-li se břímě P po nosníku, mění se reakce A podle příčinkové čáry (viz obr. 140); úměrně k reakci A se pak mění osová síla C, pokud je břímě P vpravo od proťatého oddílu zatíženého pasu. Měřicky platí tato souvislost neomezeně. Je-li břímě P v bodě b, dá $A = 0$, $C = 0$; břímě P v bodě a působící vyvodí reakci $A = P = 1$, ze které plyne

$$C' = -1 \cdot \frac{x_c}{r_c} = \overline{a'a''}$$

jakožto pořadnice příčinkové přímky $c'c'_3$, platné vpravo od proťatého oddílu zatíženého pasu. Vzorec pro sílu C' se shoduje se vzorcem (155^b), odvozeným pro nosník prostý; jako tam znamená C' osovou sílu v prutu C, působí-li po levé straně řezu xx' pouze reakce $A = 1$. Graficky bychom stanovili sílu C' methodou průsečnou (obr. 163) nebo, jde-li o všechny pruty, methodou bodů styčných; počtářsky bychom ji řešili jako u prostého nosníku příhradového. Přímka $c'c'_3$ platí jako u reakce A až ke svislici kloubu c_3; v prostém dílu c_3c_4 je pak příčinkovou čarou přímka $c'_3c'_4$, pro niž dává kloub c_4 polohu nulovou.

Břímě P, jež působí vlevo od proťatého oddílu zatíženého pasu, vyvodí vpravo od řezu xx' pouze reakci B, z níž stanovíme jako prve osovou sílu

$$C = -B\frac{x'_c}{r_c};$$

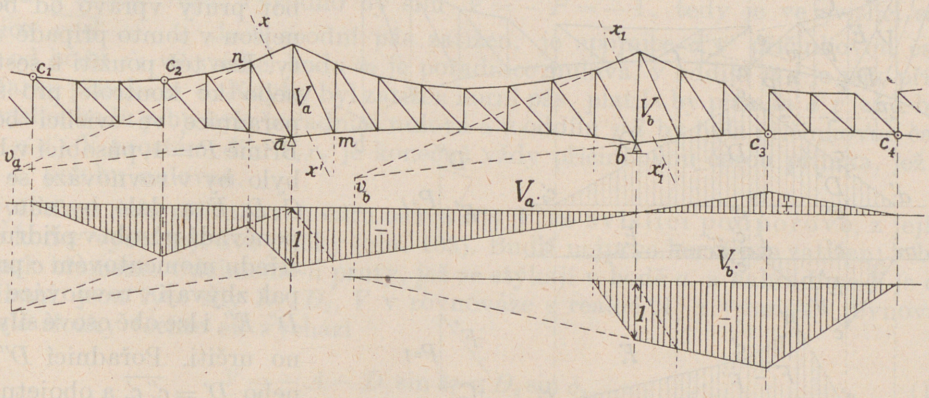
zde znamená x'_c vodorovnou vzdálenost bodu c od paprsku B. Pro levé polohy břemene jest osová síla C úměrná pravé reakci B; příčinková čára síly C má tedy vlevo od proťatého oddílu zatíženého pasu týž tvar jako příčinková čára reakce B. V podporovaném dílu c_2c_3 je pak vlevo od svislice bodu c příčinkovou čarou síly C přímka, jež má ve svislici bodu a pořadnici nulovou, ve svislici bodu b jest určena pořadnicí

$$C'' = -1 \cdot \frac{x'_c}{r_c} = \overline{b'b''},$$

jejíž hodnota souhlasí v podstatě se vzorcem (156^b), platným pro nosník prostý. Zase znamená C'' osovou sílu v prutu C, působí-li po pravé straně řezu xx' pouze reakce $B = 1$. Přímky příčinkové, jež platí vpravo a vlevo od proťatého oddílu zatíženého pasu, sekou se jako u prostého nosníku na svislici přidruženého středu momentového; je-li třeba, vkládáme mezi ně v proťatém oddílu přímku další. V prostém dílu c_1c_2 je příčinkovou čarou síly C přímka $c'_1c'_2$, pro kterou je v bodě c_1 poloha nulová.

Obrazec potvrzuje, co již bylo uvedeno, že mezi podporami a, b je příčinková čára osové síly libovolného prutu C shodná s příčinkovou čarou téže síly v prostém nosníku, který vznikne z daného nosníku, vynecháme-li vše, co je mimo pole ab. Příčinkové přímky platné po obou stranách proťatého oddílu se pak prodlužují ke svislicím bližších kloubů c_2, c_3 a v prostých dílech přilehlých jsou příčinkovými čarami

rovněž přímky, pro něž jsou vzdálenější klouby c_1, c_4 polohami nulovými. Podle toho určíme na př. příčinkovou čáru osové síly E. Pořadnice $E' = \overline{a'a''}$ stanoví přímku $c'b'$, pořadnice $E'' = \overline{b'b''}$ přímku $a'd'$; obě tyto přímky se sekou na svislici přidruženého středu momentového e a platí až ke svislicím kloubů c_2, c_3. Mezi nimi je příčinkovou čarou přímka $d'c'$ a v prostých dílech platí přímky $c_1'c_2'$, $c_3'c_4'$, dané nulovými polohami c_1, c_4 a pořadnicemi ve svislicích bodů c_2, c_3 již určenými. Znaménka příčinkového obrazce plynou ze znaménka jediné pořadnice, na př. E'.



Obr. 164.

Je-li podporová svislice V_a mezi dvěma příčkami napravo sestupnými a bod a levou podporou podporovaného dílu (obr. 164), je mezi podporami a, b příčinková čára V_a táž jako u prostého nosníku, tedy dána pořadnicí -1 v bodě a a nulovou pořadnicí v bodě b. Příčinková přímka tím daná platí až ke svislici bodu c_3 napravo od řezu $x\,x'$, tedy při zatížení horního (spodního) pasu napravo od svislice bodu a (m). S touto přímkou se protíná příčinková přímka, platná vlevo od n (a) až po svislici bodu c_2, na svislici přidruženého momentového středu v_a. V prostých dílech c_1c_2, c_3c_4 jsou příčinkovými čarami přímky, jež mají nulové polohy v bodech c_1, c_4 a ve svislicích bodů c_2, c_3 se připojují k sousedním přímkám.

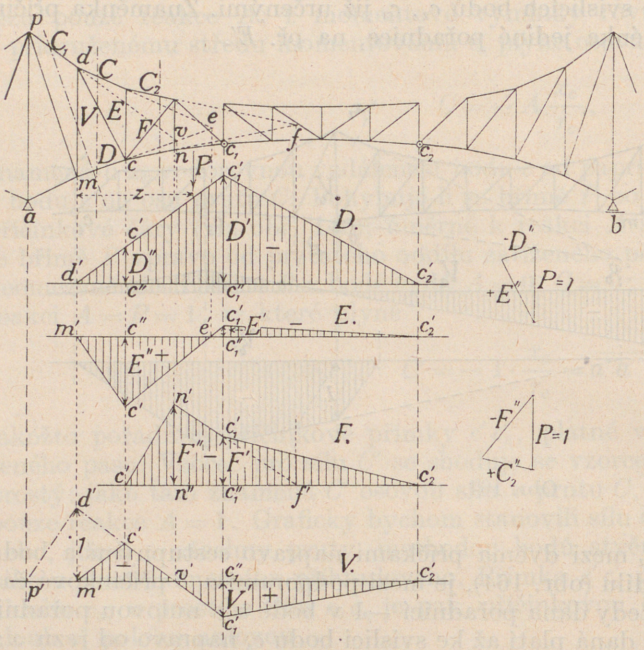
Může konečně nastati případ, že svislice V_b je mezi dvěma příčkami, které sestupují směrem k přečnívajícímu konci. Tu jsou obě reakce A, B po jedné straně řezu x_1x_1' a prut V_b řešíme jako pruty na přečnívajícím konci: ve svislici bodu b je pro zatížení horního pasu příčinková pořadnice -1, na přečnívajícím konci je pak příčinkovou čarou přímka, jež seče osu na svislici přidruženého momentového středu v_b. Břemena vlevo od oddílu zatíženého pasu protatého řezem x_1x_1' nemají vůbec vliv na sílu V_b; příčinkový obrazec končí tedy nulovou pořadnicí ve svislici levého styčného bodu protatého zatíženého pasu. Také v bodě c_4 je nulová poloha. K zatížení spodního pasu náležela by v protatém oddílu spodního pasu čerchovaná přímka.

Jinak se řeší příčinkové čáry osových sil prutů na přečnívajícím konci podporovaného dílu. Hledejme na př. osovou sílu prutu D na přečnívajícím konci ac_1 (obr. 165). Působí-li břímě $P = 1$ na přečnívajícím konci ve vzdálenosti z vpravo od přidruženého středu momentového d, plyne z rovnováhy sil P, C, D, E, odnímáme-li levou část nosníku, momentovou výminkou rovnováhy k bodu d síla

$$D = -P\frac{z}{r},$$

je-li r rámě síly D k bodu d. Za pohybu břemene se mění síla D úměrně ke vzdálenosti z; je-li $z = 0$, vyjde $D = 0$, je tedy na přečnívajícím konci přidružený střed momentový obojetnou polohou pro osovou sílu prutu, což platí pro všechny

pruty. Přímku příčinkovou na přečnívajícm konci určíme pak libovolnou pořadnicí, jíž jest osová síla prutu, vyvozená břemenem $P = 1$ v příslušné poloze působícím. Tu bychom na př. určili osové síly prutů, působí-li břímě $P = 1$ v bodě c_1, a nanesli bychom tyto síly D', E', F', V' jakožto příčinkové pořadnice ve svislici bodu c_1; mohli bychom řešiti na př. graficky methodou bodů styčných, vycházejíce od dvojného bodu c_1, v němž působí břímě $P = 1$, neboť pruty vpravo od bodu c_1 nejsou v tomto případě napjaty. Lze též použíti k sestrojení nebo ke kontrole pro sílu D pořadnice ve svislici bodu c. Břímě $P = 1$, působící v bodě c, bylo by v rovnováze se silami C, D, E a dalo by sílu $C = 0$, poněvadž působí v přidruženém středu momentovém c prutu C; pak zbývají v rovnováze síly P, D'', E'', i lze obě osové síly snadno určiti. Pořadnicí $D'' = \overline{c'' c'}$ nebo $D' = \overline{c_1'' c_1'}$ a obojetnou polohou d jest určena příčinková čára síly D na přečnívajícím konci. Břemena vlevo od bodu d nemají žádného účinku na osovou sílu prutu D, poněvadž tato síla plyne jedině z vnějších sil po pravé straně řezu vedeného prutem. Je tedy příčinková čára síly D vlevo od bodu d shodná s osou příčinkového obrazce. Z toho plyne, že pro pruty na přečnívajícím konci platí pro vztah levé a pravé přímky příčinkové tytéž věty jako u prostého nosníku.



Obr. 165.

Břímě $P = 1$, jež působí na prostý díl $c_1 c_2$, vyvodí v kloubu c_1 svislou sílu, jež by se určila jako podporový tlak prostého nosníku $c_1 c_2$; z této síly bychom určili dále osové síly prutů na přečnívajícím konci. Pohybuje-li se břímě $P = 1$ mezi klouby c_1, c_2, mění se síla v kloubu c_1 po zákonu přímky, jež má v bodě c_2 polohu nulovou; obdobně se pak mění osové síly všech prutů na přečnívajícím konci. Je tedy v prostém dílu $c_1 c_2$ příčinkovou čarou osové síly D přímka $c_1' c_2'$, jež má ve svislici bodu c_2 pořadnici nulovou, ve svislici bodu c_1 pak stanovenou pořadnici D'.

Stejně postupujeme, hledajíce příčinkovou čáru osové síly v příčce E. Příčinkovou čarou na přečnívajícím konci je přímka, stanovená přidruženým středem momentovým e jakožto polohou obojetnou a pořadnicí $E' = \overline{c_1'' c_1'}$ ve svislici bodu c_1 nebo pořadnicí $E'' = \overline{c'' c'}$ ve svislici bodu c; tato přímka platí vpravo od proťatého oddílu zatíženého pasu. Břemena vlevo od bodu m nepůsobí nijak na osovou sílu E; v bodě m je pořadnice nulová, v proťatém oddílu je příčinkovou čarou přímka $m' c'$. V prostém dílu $c_1 c_2$ je příčinkovou čarou přímka $c_1' c_2'$, pro kterou je bod c_2 polohou nulovou.

Padne-li přidružený střed momentový f pro prut F mimo přečnívající konec, nemá statického významu polohy obojetné, měřicky platí však sestrojení předešlé beze změny. Příčinkovou čarou na přečnívajícím konci vpravo od proťatého oddílu zatíženého pasu, tedy vpravo od bodu n je přímka $n' c_1'$, jež seče osu na svislici bodu f

a jest určena mimo to pořadnicí $F' = \overline{c_1'' c_1'}$ nebo $F'' = \overline{n'' n'}$; F'' jest osová síla v prutu F, vyvozená břemenem $P = 1$, jež působí v bodě n a je v rovnováze se silami F'', C_2''. V proťatém oddílu $c\,n$ a v prostém dílu $c_1 c_2$ jsou příčinkovými čarami přímky, jejichž nulovými polohami jsou body c, c_2.

Stejně se určí též příčinková čára osové síly ve svislici V. Přidružený střed momentový v určuje průsečík s osou příčinkové přímky, jež platí na přečnívajícím konci vpravo od proťatého oddílu zatíženého pasu. Tuto přímku stanovíme pořadnicí $V' = \overline{c_1'' c_1'}$ nebo pořadnicí ve svislici V samé. Břímě $P = 1$, jež by působilo ve svislici V po pravé straně řezu, vyvodilo by sílu $V = -P = -1$, tedy je ve svislici samé pořadnice $\overline{m' d'} = -1$. Je-li spodní pás zatížen, je spojnice $d' v'$ příčinkovou čarou vpravo od bodu c'; ve svislici bodu m je pořadnice nulová, v oddílu $m\,c$ je pak příčinkovou čarou přímka $m' c'$. Kdyby byl zatížen horní pás, platila by přímka $d' v'$ až k bodu d'; ve svislici bodu p by byla pořadnice nulová a v oddílu $p\,d$ by byla příčinkovou čarou přímka $p' d'$. V prostém dílu $c_1 c_2$ je konečně vždy příčinkovou čarou přímka, jež má v bodě c_2 polohu nulovou.

Vyšetřme dále příčinkovou čáru osové síly V ve svislici podporové, z jejíhož horního konce vycházejí dvě příčky (obr. 163). Budiž nejprve horní pás zatížen; v bodě a není pak břemene. Odejmeme-li pruty, jež se stýkají v bodě a, a nahradíme-li je osovými silami, jsou tyto síly D_1, D_2, V v rovnováze s reakcí A; z výminky rovnováhy pro svislé složky těchto sil vychází

$$V = -A - D_1 \sin \delta_1 - D_2 \sin \delta_2, \tag{177}$$

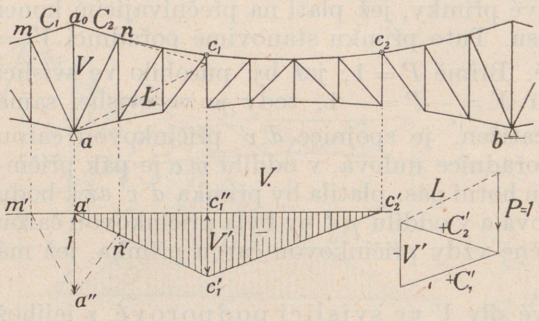
jsou-li δ_1, δ_2 odchylky os prutů D_1, D_2 od vodorovné. Působí-li zatížení vpravo od bodu a, je síla $D_1 = 0$ a zároveň $D_2 = 0$, neboť pro vodorovné složky sil působících na bod a platí výminka

$$D_1 \cos \delta_1 - D_2 \cos \delta_2 = 0.$$

Ze vzorce (177) tedy vychází $V = -A$, z čehož plyne, že se vpravo od bodu a shoduje příčinková čára osové síly V s příčinkovou čarou reakce A až na znaménka, jež jsou u síly V obrácena. Ve svislici bodu a je pak pořadnice $\overline{a' a''} = -1$, jež určuje s nulovou pořadnicí ve svislici bodu b přímku $a'' b'$, platnou až ke svislici bodu c_3; v prostém dílu $c_3 c_4$ je příčinkovou čarou přímka $c_3' c_4'$, určená bodem c_4 jakožto polohou nulovou.

Pro břemena vlevo od bodu a stanovíme osovou sílu V opět ze vzorce (177). Na přečnívajícím konci $c_2 a$ se mění reakce A i osové síly D_1 a D_2 po zákonu přímky, jde-li o jediné pohyblivé břímě $P = 1$; pak se mění i síla V na přečnívajícím konci podle přímky, jež má v bodě a stanovenou již pořadnici $V = -P = -1$. Tato přímka seče osu na svislici obojetné polohy v, kterou přímo určíme, protneme-li prodlouženou osu prutu D_2 s paprskem B v bodě b_0, jejž spojíme s horním koncem a_0 podporové svislice a spojnici $b_0 a_0$ protneme s prodlouženou osou prutu D_1. Neboť břímě P, jež působí v bodě v, vyvozuje reakce A, B. Methodou průsečnou určíme, že výslednice osové síly v horním pase a příčce vlevo od svislice V, jež je v rovnováze se silou D_1 a břemenem P v bodě v působícím, má paprsek $a_0 v$. Podobně plyne, že výslednice osových sil horního pasu a příčky vpravo od svislice V, jež je v rovnováze s reakcí B a osovou silou D_2, působí v paprsku $a_0 b_0$. V bodě a_0 je pak osová síla svislice V v rovnováze s osovými silami ostatních prutů, jež se v bodě a_0 stýkají; nahradíme-li osovou sílu horního pasu a příčky vlevo od svislice V výslednicí v paprsku $a_0 v$, osovou sílu horního pasu a příčky vpravo od svislice V výslednicí v paprsku $a_0 b_0$, vychází osová síla $V = 0$, poněvadž obě uvedené výslednice, jež jsou se silou V v rovnováze, působí v témž paprsku. Obojetnou polohou v a příčinkovou pořadnicí ve svislici bodu a je dána příčinková přímka $c_2' a''$ na přečnívajícím konci $c_2 a$; na prostém dílu $c_1 c_2$ je jako ve všech ostatních případech příčinkovou čarou přímka $c_1' c_2'$, pro niž je bod c_1 polohou nulovou.

Přenáší-li se zatížení do styčných bodů spodního pasu, je v bodě a příčinková pořadnice osové síly V rovna nule, neboť se břímě P v bodě a působící ruší reakcí A a dá sílu $V = 0$. V oddílech $m\,a$, $a\,n$ jsou pak příčinkovými čarami přímky $m'\,a'$, $a'\,n'$, jež mají ve svislicích bodů m, n tytéž pořadnice jako při zatížení horního pasu.



Obr. 166.

Padne-li bod v mimo přečnívající konec $c_2\,a$, nemá statického významu polohy obojetné, znamená však stále bod, na jehož svislici seče osu příčinková přímka, platná na přečnívajícím konci. Jinak se sestrojení příčinkové čáry síly V nemění.

Vycházejí-li dvě příčky ze spodního konce podporové svislice V (obr. 166) a působí-li zatížení na spodní pás, plynou z rovnováhy v bodě a_0 síly V, C_1 ze síly C_2. Příčinková čára osové síly C_2 by se stanovila jako u prutů na přečnívajícím konci (obr. 165); na přečnívajícím konci je příčinkovou čarou přímka, jejíž nulovou polohou je přidružený střed momentový, v prostém dílu $c_1\,c_2$ platí rovněž přímka, končící nulovou pořadnicí ve svislici bodu c_2. Obě přímky mají ve svislici bodu c_1 společnou pořadnici, jež se rovná osové síle prutu C_2, působí-li v kloubu c_1 břímě $P = 1$. Poněvadž za každé polohy břemene jsou síly C_1, C_2, V v rovnováze, je tvar příčinkového obrazce pro všechny tyto síly týž. Příčinkovým obrazcem osové síly V je tedy trojúhelník $a'\,c_1'\,c_2'$, stanovený pořadnicí $V' = \overline{c_1''\,c_1'}$, jež se rovná osové síle ve svislici V, působí-li v bodě c_1 břímě $P = 1$.

Je-li horní pás zatížen, nemění se příčinkové obrazce sil C_1, C_2, změní se však příčinkový obrazec síly V v oddílech $m\,a_0$, $a_0\,n$. Břímě $P = 1$, jež působí v bodě a_0, dá síly $C_1 = C_2 = 0$ a sílu $V = -P = -1$, což je pak příčinková pořadnice $\overline{a'\,a''}$ ve svislici bodu a_0. Ve svislici bodu m je pořadnice nulová, ve svislici bodu n platí pořadnice přímky $a'\,c_1'$ i pro zatížení horního pasu a v oddílech $m\,a_0$, $a_0\,n$ jsou v tomto případě příčinkovými čarami přímky $m'\,a''$, $a''\,n'$.

Příklad 33. Příhradový spojitý nosník kloubový je namáhán stálým zatížením rovnoměrným $q_0 = 2{,}4$ t/m, pohyblivým zatížením rovnoměrným $q' = 0{,}52$ t/m a současně řadou osamělých břemen, danou nákladními vozy o rozměrech a váze náprav i potahu, vyznačených v obr. 167 (tab. 3). Stanoviti jest krajní hodnoty osových sil prutů D_6, E_6, V_5, V_3, C_3, D_3, V_2 a E_3, působí-li zatížení na horní pás. Délky polí jsou $l_1 = l_3 = 9 \times 3{,}2 = 28{,}8$ m, $l_2 = 8 \times 3{,}2 = 25{,}6$ m, délka oddílu $a = 3{,}2$ m a délky svislic $v_0 = v_6 = v_7 = 3{,}4$, $v_1 = v_5 = 3{,}7$, $v_2 = v_4 = 4{,}3$, $v_3 = 6{,}1$ m, nosník je pak souměrný ke střední svislici.

a) Příčinková čára osové síly D_6 jest určena pořadnicí D_6', kterou stanovíme jako u prostého nosníku podle vzorce (158^a)

$$D_6' \cos \delta_6 = 1 \cdot \frac{x_5}{v_5};$$

zde jest

$$x_5 = 2\,a = 6{,}4 \text{ m}, \quad \cos \delta_6 = \frac{a}{d_6}, \quad d_6 = \sqrt{a^2 + (v_5 - v_6)^2} = 3{,}214 \text{ m},$$

tedy

$$D_6' = \frac{6{,}4}{3{,}7} \cdot \frac{3{,}214}{3{,}2} = 1{,}738.$$

Z pořadnice D_6' sestrojíme příčinkový obrazec a z něho odměříme (nebo vypočteme) jeho největší pořadnice

$$\eta_I = -1{,}954, \qquad \eta_{II} = 1{,}301, \qquad \eta_{III} = -0{,}651;$$

obsahy příčinkových obrazců v jednotlivých polích jsou pak

$$\mathfrak{U}_1 = \frac{1}{2} l_1 \eta_I = -28{,}08\,\mathrm{m}, \qquad \mathfrak{U}_2 = \frac{1}{2} l_2 \eta_{II} = 16{,}64\,\mathrm{m}, \qquad \mathfrak{U}_3 = \frac{1}{2} l_3 \eta_{III} = -9{,}36\,\mathrm{m}.$$

Zatížení stálé vyvodí sílu

$$D_6 = q_0 (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2 + \mathfrak{U}_3) = -2{,}4 \cdot 20{,}80 = -49{,}92\,\mathrm{t},$$

pohyblivé zatížení rovnoměrné dá krajní hodnoty

$$\max D_6 = q' \mathfrak{U}_2 = 0{,}52 \cdot 16{,}64 = 8{,}66\,\mathrm{t}, \qquad \min D_6 = q' (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_3) = -0{,}52 \cdot 37{,}44 = -19{,}47\,\mathrm{t}.$$

Osamělými břemeny vyvodíme $\max D_6$, zatížíme-li co nejvíce druhé pole, do něhož se vejdou tři povozy; nejúčinnější polohu stanovíme kriteriem Winklerovým. Je tu

$$R = 28{,}5\,\mathrm{t}, \qquad R \frac{x}{l} = 28{,}5 \cdot \frac{2}{8} = 7{,}1\,\mathrm{t},$$

což se přestupuje druhou nápravou vozu; potah a ostatní povozy jsou vpravo. Za polohy soustavy takto určené stanovíme součet příčinkových pořadnic v paprscích břemen $P' = 4$ t

$$\Sigma \eta' = 0{,}83 + 1{,}30 + 0{,}88 + 0{,}69 + 0{,}27 + 0{,}08 = 4{,}05,$$

dále součet příčinkových pořadnic v paprscích břemen $P'' = 1{,}5$ t, z nichž jedno je v třetím poli,

$$\Sigma \eta'' = 1{,}09 + 0{,}48 - 0{,}13 = 1{,}44$$

a určíme

$$\max D_6 = P' \Sigma \eta' + P'' \Sigma \eta'' = 4 \cdot 4{,}05 + 1{,}5 \cdot 1{,}44 = 18{,}36\,\mathrm{t}.$$

Největší tlak v prutu D_6 vzniká zatížením prvého a třetího pole. Do prvého pole se vejdou tři povozy, i jest

$$R = 28{,}5\,\mathrm{t}, \qquad R \frac{x}{l} = R \frac{l_1'}{l_1} = 28{,}5 \cdot \frac{6}{9} = 19\,\mathrm{t};$$

do polohy největšího příčinku c_1 lze klásti břímě šesté nebo sedmé, poněvadž se součet prvých šesti břemen rovná právě 19 t. Z obrazce stanovíme pak

$$\Sigma \eta' = -0{,}12 - 0{,}41 - 1{,}04 - 1{,}32 - 1{,}95 - 1{,}39 = -6{,}23, \qquad \Sigma \eta'' = -0{,}72 - 1{,}64 - 0{,}75 = -3{,}11;$$

z toho plyne

$$\min D_6^{(1)} = P' \Sigma \eta' + P'' \Sigma \eta'' = -4 \cdot 6{,}23 - 1{,}5 \cdot 3{,}11 = -29{,}59\,\mathrm{t}.$$

Příčinkový obrazec v třetím poli má týž tvar jako v prvém poli, vyměníme-li pravou a levou stranu; $\min D_6^{(3)}$ žádá pak zatížení souměrného se zatížením v prvém poli vzhledem ke středu nosníku. Poněvadž veškeré pořadnice příčinkové v třetím poli plynou z pořadnic v prvém poli, násobíme-li je poměrem největších pořadnic $\eta_{III} : \eta_I$, určíme prostě

$$\min D_6^{(3)} = \min D_6^{(1)} \cdot \frac{\eta_{III}}{\eta_I} = -29{,}59 \cdot \frac{0{,}651}{1{,}954} = -9{,}86\,\mathrm{t}.$$

Zatížením pole prvého a třetího vychází celkem

$$\min D_6 = \min D_6^{(1)} + \min D_6^{(3)} = -39{,}45\,\mathrm{t}.$$

b) Pro prut E_6 stanovíme příčinkové pořadnice E_6', E_6'' podle vzorců (158^a), (158^b), jež dají

$$E_6' \cos \varepsilon_6 = 1 \cdot \frac{x_6}{v_6} - 1 \cdot \frac{x_5}{v_5} = \frac{9{,}6}{3{,}4} - \frac{6{,}4}{3{,}7} = 1{,}094,$$

$$E_6'' \cos \varepsilon_6 = 1 \cdot \frac{x_6'}{v_6} - 1 \cdot \frac{x_5'}{v_5} = \frac{16{,}0}{3{,}4} - \frac{19{,}2}{3{,}7} = -0{,}483.$$

Dále jest

$$\cos \varepsilon_6 = \frac{e_6}{a}, \qquad e_6 = \sqrt{a^2 + v_6^2} = 4{,}669\,\mathrm{m},$$

tedy

$$E_6' = 1{,}094 \cdot \frac{4{,}669}{3{,}2} = 1{,}597, \qquad E_6'' = -0{,}483 \cdot \frac{4{,}669}{3{,}2} = -0{,}705.$$

Z pořadnic E'_6, E''_6 sestrojíme celý příčinkový obrazec; kontrolou jest, že se přímky, jež spojují koncové body pořadnic E'_6, E''_6, sekou na svislici přidruženého středu momentového e_6. Z příčinkového obrazce odměříme největší pořadnice příčinkové

$$\eta_I = 0{,}264, \qquad \eta_{II} = -0{,}176, \qquad \eta_{III} = 0{,}998, \qquad \eta_{IV} = -0{,}599$$

a vypočteme obsahy částí obrazce

$$\mathfrak{U}_1 = \frac{1}{2} l_1 \eta_I = 3{,}80\ \text{m}, \qquad \mathfrak{U}_2 = \frac{1}{2} 6{,}86 \cdot \eta_{II} = -0{,}60\ \text{m},$$

$$\mathfrak{U}_3 = \frac{1}{2} 18{,}74 \cdot \eta_{III} = 9{,}35\ \text{m}, \qquad \mathfrak{U}_4 = \frac{1}{2} l_3 \eta_{IV} = -8{,}63\ \text{m}.$$

Stálé zatížení vyvodí sílu

$$E_6 = q_0 \cdot \Sigma \mathfrak{U} = 2{,}4 \cdot 3{,}92 = 9{,}41\ \text{t},$$

pohyblivé zatížení rovnoměrné dá

$$\max E_6 = q' (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_3) = 0{,}52 \cdot 13{,}15 = 6{,}85\ \text{t}, \qquad \min E_6 = q' (\mathfrak{U}_2 + \mathfrak{U}_4) = -0{,}52 \cdot 9{,}23 = -4{,}80\ \text{t}.$$

Příčinkový obrazec v poli prvém a třetím má týž tvar jako pro sílu D_6; zmenšíme-li $\min D_6^{(1)}$, vyvozené pohyblivou soustavou břemen, v poměru největších pořadnic příčinkových síly E_6 (v poli prvém a třetím) a síly D_6, dostaneme přímo

$$\max E_6^{(1)} = -\min D_6^{(1)} \cdot \frac{0{,}264}{1{,}954} = +4{,}00\ \text{t}, \qquad \min E_6^{(3)} = \min D_6^{(1)} \cdot \frac{0{,}599}{1{,}954} = -9{,}08\ \text{t}.$$

V druhém poli se vejdou do části kladně přičiňující dva vozy; tu jest

$$R = 19\ \text{t}, \qquad R \frac{x}{l} = 19 \cdot \frac{2{,}74}{18{,}74} = 2{,}8\ \text{t},$$

což se přestupuje již prvým břemenem 4 t, položíme tedy poslední nápravu druhého vozu do svislice bodu *6*. Za této polohy soustavy jest

$$\Sigma \eta' = 1{,}00 + 0{,}82 + 0{,}44 + 0{,}26 = 2{,}52, \qquad \Sigma \eta'' = 0{,}63 + 0{,}07 = 0{,}70,$$

z čehož plyne

$$\max E_6^{(2)} = P' \Sigma \eta' + P'' \Sigma \eta'' = 4 \cdot 2{,}52 + 1{,}5 \cdot 0{,}70 = 11{,}13\ \text{t}.$$

Celkem vyvodí soustava břemen

$$\max E_6 = \max E_6^{(1)} + \max E_6^{(2)} = 15{,}13\ \text{t}.$$

Délkou záporně přičiňující v druhém poli obsáhneme pouze jeden vůz; jeho zadní nápravu dáme do svislice bodu *5*, přední nápravu a potah vlevo, což by vyšlo též z kriteria. Pak je podle obrazce

$$\min E_6^{(2)} = \Sigma P \eta = -1{,}5 \cdot 0{,}01 - 4 \cdot (0{,}10 + 0{,}18) = -1{,}14\ \text{t}$$

a celkem

$$\min E_6 = \min E_6^{(2)} + \min E_6^{(3)} = -10{,}22\ \text{t}.$$

c) Příčinková čára osové síly V_5 jest určena pořadnicemi V'_5, V''_5, jež vypočteme ze vzorců (159*a*), (159*b*); obdržíme

$$V'_5 = \frac{1}{a} \left(\frac{x_5}{v_5} v_6 - x_6 \right) = \frac{1}{3{,}2} \left(\frac{6{,}4}{3{,}7} \cdot 3{,}4 - 9{,}6 \right) = -1{,}162,$$

$$V''_5 = \frac{1}{a} \left(\frac{x'_5}{v_5} v_6 - x'_6 \right) = \frac{1}{3{,}2} \left(\frac{19{,}2}{3{,}7} \cdot 3{,}4 - 16{,}0 \right) = 0{,}514.$$

Příčinkové přímky, jež spojují koncové body pořadnic V'_5, V''_5, sekou se na svislici přidruženého středu momentového e_6, což je kontrolou. Z příčinkového obrazce vypočteme obsahy trojúhelníkových částí v poli prvém ($\mathfrak{U}_1$), druhém ($\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_3$) a třetím ($\mathfrak{U}_4$); vyjde

$$\mathfrak{U}_1 = -\tfrac{1}{2} 28{,}8 \cdot 0{,}193 = -2{,}78\ \text{m}, \qquad \mathfrak{U}_2 = \tfrac{1}{2} 3{,}42 \cdot 0{,}064 = 0{,}11\ \text{m},$$

$$\mathfrak{U}_3 = -\tfrac{1}{2} 22{,}18 \cdot 0{,}872 = -9{,}23\ \text{m}, \qquad \mathfrak{U}_4 = \tfrac{1}{2} 28{,}8 \cdot 0{,}436 = 6{,}28\ \text{m}.$$

Zatížení stálé dá pak sílu

$$V_5 = q_0 \cdot \Sigma \mathfrak{U} = -2{,}4 \cdot 5{,}62 = -13{,}49 \text{ t},$$

pohyblivé zatížení rovnoměrné vyvodí

$$\max V_5 = q' (\mathfrak{U}_2 + \mathfrak{U}_4) = 0{,}52 \cdot 6{,}39 = 3{,}32 \text{ t}, \qquad \min V_5 = q' (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_3) = -0{,}52 \cdot 12{,}01 = -6{,}25 \text{ t}.$$

Z řady osamělých břemen obsáhne kladně přičiňující díl druhého pole jediný vůz, jehož potah vyjde do prvého pole; zadní nápravu umístíme do svislice bodu *4* a vypočteme

$$\max V_5^{(2)} = 4 \cdot (0{,}06 + 0{,}01) - 1{,}5 \cdot 0{,}05 = 0{,}20 \text{ t}.$$

V třetím poli platí pro prut V_5 totéž nejúčinnější zatížení jako pro pruty D_6, E_6; z podobnosti příčinkového obrazce síly V_5 v třetím poli a síly D_6 v prvém poli určíme redukcí v poměru největších pořadnic

$$\max V_5^{(3)} = -\min D_6^{(1)} \cdot \frac{0{,}436}{1{,}954} = 6{,}60 \text{ t}.$$

Celkem jest

$$\max V_5 = \max V_5^{(2)} + \max V_5^{(3)} = 6{,}80 \text{ t}.$$

V prvém poli užijeme pro prut V_5 téhož zatížení jako pro prut D_6 a stanovíme opět z podobnosti obrazců redukcí v poměru největších pořadnic

$$\min V_5^{(1)} = \min D_6^{(1)} \cdot \frac{0{,}193}{1{,}954} = -2{,}92 \text{ t}.$$

V druhém poli se vejdou na délku záporně přičiňující dva vozy; z kriteria Winklerova určíme, že do svislice bodu *5* položiti jest zadní nápravu druhého vozu, jak je naznačeno v obr. 167. Z příčinkového obrazce určíme pak

$$\Sigma \eta' = -0{,}87 - 0{,}74 - 0{,}46 - 0{,}34 = -2{,}41, \qquad \Sigma \eta'' = -0{,}60 - 0{,}20 = -0{,}80,$$

$$\min V_5^{(2)} = -4 \cdot 2{,}41 - 1{,}5 \cdot 0{,}80 = -10{,}84 \text{ t},$$

tedy dohromady

$$\min V_5 = \min V_5^{(1)} + \min V_5^{(2)} = -13{,}76 \text{ t}.$$

d) Příčinkovou čáru osové síly V_3 ve svislici podporové stanovíme pořadnicí $V_2' = -1{,}0$ v podpoře a_1 a pořadnicí V_3'' v bodě c_1, kterou určíme jakožto osovou sílu, vyvozenou v prutu V_3 břemenem $P = 1$, jež působí v bodě c_1. Užijeme tu vzorce (86*b*) z prvého dílu tohoto spisu (3. vyd., str. 199), jenž zde dá, nahradíme-li břímě P zápornou reakcí A_1,

$$V_3 = \frac{M_3}{v_3} (\operatorname{tg} \delta_4 - \operatorname{tg} \delta_3) - A_1.$$

Břímě $P = 1$ v bodě c_1 působící vyvodí

$$A_1 = P \frac{l_2 + x_0}{l_2} = 1 \cdot \frac{11}{8}, \quad M_3 = -P x_0 = -1 \cdot 9{,}6 \text{ m};$$

dále jest

$$-\operatorname{tg} \delta_4 = \operatorname{tg} \delta_3 = \frac{v_3 - v_2}{a} = \frac{1{,}8}{3{,}2},$$

vyjde tedy

$$V_3'' = 2 \cdot \frac{9{,}6}{6{,}1} \cdot \frac{1{,}8}{3{,}2} - \frac{11}{8} = 0{,}395.$$

Pořadnice V_3', V_3'' stanoví příčinkovou přímku na přečnívajícím konci $c_1 a_1$; tato přímka seče osu na svislici obojetné polohy u, kterou sestrojíme pro kontrolu přímo podle obr. 163. Z příčinkového obrazce vypočteme obsah kladné části v prvém poli ($\mathfrak{U}_1$), záporné části v prvém a druhém poli ($\mathfrak{U}_2$) a kladné části v třetím poli ($\mathfrak{U}_3$), jež mají hodnoty

$$\mathfrak{U}_1 = \frac{1}{2} 21{,}92 \cdot 0{,}395 = 4{,}33 \text{ m}, \qquad \mathfrak{U}_2 = -\frac{1}{2} 32{,}48 \cdot 1 = -16{,}24 \text{ m}, \qquad \mathfrak{U}_3 = \frac{1}{2} 28{,}8 \cdot 0{,}375 = 5{,}40 \text{ m}.$$

Pak vyvodí stálé zatížení sílu

$$V_3 = q_0 \cdot \Sigma \mathfrak{U} = -2{,}4 \cdot 6{,}51 = -15{,}62 \text{ t},$$

pohyblivé zatížení rovnoměrné síly

$$\max V_3 = q' (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_3) = 0{,}52 \cdot 9{,}73 = 5{,}06 \text{ t}, \qquad \min V_3 = q' \mathfrak{U}_2 = -0{,}52 \cdot 16{,}24 = -8{,}40 \text{ t}.$$

Délkou kladně přičiňující v prvém poli obsáhneme dva celé vozy a jednu nápravu; zadní nápravu posledního vozu vpravo umístíme do svislice bodu c_1, jak by plynulo z kriteria, a určíme z příčinkového obrazce

$$\Sigma \eta' = 0{,}02 + 0{,}15 + 0{,}21 + 0{,}34 + 0{,}40 = 1{,}12, \qquad \Sigma \eta'' = 0{,}09 + 0{,}27 = 0{,}36,$$

$$\max V_3^{(1)} = 4 \cdot 1{,}12 + 1{,}5 \cdot 0{,}36 = 5{,}02 \text{ t}.$$

V třetím poli užili bychom téhož zatížení jako pro prut D_6; z podobnosti obrazců D_6 v prvém poli a V_3 v třetím poli plyne

$$\max V_3^{(3)} = -\min D_6^{(1)} \cdot \frac{0{,}375}{1{,}954} = 5{,}68 \text{ t}.$$

Osamělá břemena dají dohromady

$$\max V_3 = \max V_3^{(1)} + \max V_3^{(3)} = 10{,}70 \text{ t}.$$

Na délku záporně přičiňující se vejdou tři povozy a jest

$$R = 28{,}5 \text{ t}, \qquad R \frac{x}{l} = 28{,}5 \cdot \frac{6{,}88}{32{,}48} = 6{,}0 \text{ t},$$

což se přestoupí druhým břemenem, jež tedy umístíme do svislice bodu a_1. Za polohy soustavy tím určené (obr. 167) jest

$$\Sigma \eta' = -0{,}59 - 1{,}00 - 0{,}76 - 0{,}65 - 0{,}41 - 0{,}30 = -3{,}71,$$

$$\Sigma \eta'' = -0{,}88 - 0{,}53 - 0{,}18 = -1{,}59, \qquad \min V_3 = -4 \cdot 3{,}71 - 1{,}5 \cdot 1{,}59 = -17{,}23 \text{ t}.$$

e) Pro příčinkovou čáru osové síly prutu C_3 na přečnívajícím konci $c_1 a_1$ stačí určiti pořadnici C_3' ve svislici bodu c_1 jakožto osovou sílu vyvozenou břemenem $P = 1$ v bodě c_1 působícím. Obecně je podle vzorce (82*b*) v prvém dílu tohoto spisu (3. vyd., str. 196)

$$C_3 = -\frac{M_2}{v_2};$$

v tomto případě vyvodí břímě $P = 1$, jež působí v bodě c_1, moment

$$M_2 = -1 \cdot 6{,}4 \text{ m}.$$

tedy

$$C_3' = 1 \cdot \frac{6{,}4}{4{,}3} = 1{,}488.$$

Na přečnívajícím konci je příčinkovou čarou přímka, jejíž nulová poloha je ve svislici přidruženého středu momentového, tedy ve svislici bodu 2. Příčinkový obrazec má obsah

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{2} \cdot 25{,}6 \cdot 1{,}488 = 19{,}05 \text{ m};$$

stálé zatížení dá sílu

$$C_3 = q_0 \mathfrak{U} = 2{,}4 \cdot 19{,}05 = 45{,}72 \text{ t},$$

pohyblivé zatížení rovnoměrné vyvodí

$$\max C_3 = q' \mathfrak{U} = 0{,}52 \cdot 19{,}05 = 9{,}91 \text{ t}.$$

Délkou kladně přičiňující obsáhneme tři vozy; tu jest

$$R = 28{,}5 \text{ t}, \qquad R \frac{x}{l} = 28{,}5 \cdot \frac{6}{8} = 21{,}4 \text{ t},$$

což vede k poloze soustavy, naznačené v obr. 167. Z příčinkového obrazce určíme

$$\Sigma \eta' = 0{,}10 + 0{,}32 + 0{,}80 + 1{,}01 + 1{,}49 + 0{,}84 = 4{,}56, \qquad \Sigma \eta'' = 0{,}56 + 1{,}25 + 0{,}12 = 1{,}93,$$

$$\max C_3 = 4 \cdot 4{,}56 + 1{,}5 \cdot 1{,}93 = 21{,}14 \text{ t}.$$

f) Pro sílu D_3 stanovíme obdobně pořadnici D_3' ve svislici bodu c_1. Obecně platí

$$D_3 \cos \delta_3 = \frac{M_3}{v_3};$$

pro břímě $P = 1$ působící v bodě c_1 vyjde

$$M_3 = -1 \cdot 9{,}6\,\mathrm{m},$$

dále jest

$$\cos \delta_3 = \frac{a}{d_3}, \qquad d_3 = \sqrt{a^2 + (v_3 - v_2)^2} = 3{,}672\,\mathrm{m},$$

tedy

$$D_3' = -\frac{9{,}6}{6{,}1} \cdot \frac{3{,}672}{3{,}2} = -1{,}806.$$

Nulová poloha je v přidruženém středu momentovém *3*. Obsah příčinkového obrazce jest

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{2} D_3' l_1 = -26{,}01\,\mathrm{m},$$

tedy účinek stálého zatížení

$$D_3 = q_0 \mathfrak{U} = -2{,}4 \cdot 26{,}01 = -62{,}42\,\mathrm{t}$$

a největší účinek pohyblivého zatížení rovnoměrného

$$\min D_3 = q' \mathfrak{U} = -0{,}52 \cdot 26{,}01 = -13{,}53\,\mathrm{t}.$$

Nejúčinnější poloha pohyblivé soustavy osamělých břemen je táž jako pro prut D_6 v prvém poli; z podobnosti příčinkových obrazců D_3 a D_6 v prvém poli plyne

$$\min D_3 = \min D_6^{(1)} \cdot \frac{1{,}806}{1{,}954} = -27{,}45\,\mathrm{t}.$$

g) Pro osovou sílu prutu V_2 na pravém přečnívajícím konci $a_2 c_2$ platí obecně vzorec (85e) z prvého dílu tohoto spisu (3. vyd., str. 198), tedy zde

$$V_2 = \frac{1}{a}\left(\frac{M_2}{v_2} v_1 - M_1\right) - P'.$$

Břímě $P' = 1$, působící v bodě c_2, vyvodí momenty

$$M_1 = -1 \cdot 3{,}2\,\mathrm{m}, \qquad M_2 = -1 \cdot 6{,}4\,\mathrm{m};$$

zároveň jest $P' = 0$, tedy ve svislici V_2 obdržíme sílu

$$V_2' = \frac{1}{3{,}2}\left(-\frac{6{,}4}{4{,}3} \cdot 3{,}7 + 3{,}2\right) = -0{,}721.$$

Břímě $P = 1$, jež působí v bodě *(2)*, vyvodí sílu $V_2'' = -1$, čímž je příčinkový obrazec určen. Pořadnice V_2', V_2'' stanoví přímku, jež seče osu na svislici přidruženého středu momentového v_2, což je kontrolou. Příčinkovým obrazcem je čtyrúhelník, jenž se liší málo od trojúhelníka; obsah jeho jest

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{2} V_2' \cdot 8a + \frac{1}{2} V_2'' \cdot 3a = -14{,}03\,\mathrm{m}.$$

Zatížení stálé vyvodí pak sílu

$$V_2 = q_0 \mathfrak{U} = -2{,}4 \cdot 14{,}03 = -33{,}67\,\mathrm{t}$$

a pohyblivé zatížení rovnoměrné dá

$$\min V_2 = q' \mathfrak{U} = -0{,}52 \cdot 14{,}03 = -7{,}30\,\mathrm{t}.$$

Pohyblivá soustava osamělých břemen vyvodí min V_2, má-li polohu naznačenou v obr. 167; stanovíme ji přibližně podle kriteria Winklerova, poněvadž se příčinkový obrazec málo odchyluje od trojúhelníka. Přesně bychom řešili jako u následujícího prutu E_3. Z příčinkového obrazce určíme

$$\Sigma \eta' = -0{,}18 - 0{,}29 - 0{,}52 - 0{,}62 - 0{,}88 - 1{,}00 = -3{,}49,$$
$$\Sigma \eta'' = -0{,}06 - 0{,}40 - 0{,}74 - 0{,}03 = -1{,}23,$$
$$\min V_2 = -4 \cdot 3{,}49 - 1{,}5 \cdot 1{,}23 = -15{,}81\,\mathrm{t}.$$

h) Osovou sílu prutu E_3 stanovíme ze vzorce

$$E_3 \cos \varepsilon_3 = \frac{M_2}{v_2} - \frac{M_3}{v_3},$$

v němž jest

$$\cos \varepsilon_3 = \frac{a}{e_3}, \qquad e_3 = \sqrt{a^2 + v_2^2} = 5{,}360\,\mathrm{m}.$$

Břímě $P = 1$, jež působí v bodě c_2 vpravo od bodů (2), (3), dá

$$M_2 = -1 \cdot 6{,}4\ \text{m}, \qquad M_3 = -1 \cdot 9{,}6\ \text{m}, \qquad E'_3 = \left(-\frac{6{,}4}{4{,}3} + \frac{9{,}6}{6{,}1}\right) \cdot \frac{5{,}360}{3{,}2} = 0{,}144;$$

působí-li břímě $P = 1$ v bodě (2), jest

$$M_2 = 0, \qquad M_3 = -1 \cdot 3{,}2\ \text{m}, \qquad E''_3 = \frac{3{,}2}{6{,}1} \cdot \frac{5{,}360}{3{,}2} = 0{,}879.$$

Pořadnicemi E'_3, E''_3 jest určena příčinková přímka, jež seče osu na svislici přidruženého středu momentového e_3, čímž obrazec kontrolujeme. Příčinkový obrazec má tvar čtyrúhelníka; obsah jeho jest

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{2} E'_3 \cdot 8a + \frac{1}{2} E''_3 \cdot 3a = 6{,}06\ \text{m}.$$

Ze stálého zatížení plyne síla

$$E_3 = q_0 \mathfrak{U} = 2{,}4 \cdot 6{,}06 = 14{,}55\ \text{t},$$

z pohyblivého zatížení rovnoměrného

$$\max E_3 = q' \mathfrak{U} = 0{,}52 \cdot 6{,}06 = 3{,}15\ \text{t}.$$

Délkou třetího pole obsáhneme dva vozy a potah. Nejúčinnější poloha soustavy musí hověti nerovnici (32), platné pro příčinkový obrazec ve tvaru čtyrúhelníka. Body a, b jsou zde na svislicích bodů a_2, a_3, body m, n na svislicích bodů (2), (0) a bod x na svislici průsečíku x' prvé a třetí přímky příčinkové. Za polohy soustavy, naznačené v obr. 167, dostaneme, čítáme-li břímě ve svislici bodu (2) buď k pravé nebo k levé straně, součty břemen

$$Q_{am} = \begin{cases} 1{,}5\ \text{t}, \\ 5{,}5\ \text{t}, \end{cases} \qquad Q_{mn} = \begin{cases} 9{,}5\ \text{t}, \\ 5{,}5\ \text{t}, \end{cases} \qquad Q_{ab} = 30\ \text{t};$$

z obrazce odměříme úseky

$$\overline{ab} = l_3 = 28{,}8\ \text{m}, \qquad \overline{mn} = 2a = 6{,}4\ \text{m}, \qquad \overline{ax} = 0{,}62\ \text{m}, \qquad \overline{mx} = -2{,}58\ \text{m}.$$

Pak jest

$$Q_{ab} \cdot \frac{\overline{ax}}{\overline{ab}} = 30 \cdot \frac{0{,}62}{28{,}8} = 0{,}65\ \text{t}, \qquad Q_{am} + Q_{mn} \cdot \frac{\overline{mx}}{\overline{mn}} = \begin{cases} 1{,}5 - 9{,}5 \cdot \dfrac{2{,}58}{6{,}4} = -2{,}35\ \text{t}, \\ 5{,}5 - 5{,}5 \cdot \dfrac{2{,}58}{6{,}4} = 3{,}28\ \text{t}, \end{cases}$$

což vyhovuje kriteriu (32); zvolená poloha soustavy vyvodí tedy $\max E_3$. Z obrazce příčinkového určíme

$$\Sigma \eta' = 0{,}88 + 0{,}56 + 0{,}12 + 0{,}10 + 0{,}06 + 0{,}04 = 1{,}76, \qquad \Sigma \eta'' = 0{,}03 + 0{,}20 + 0{,}08 + 0{,}01 = 0{,}32,$$

$$\max E_3 = 4 \cdot 1{,}76 + 1{,}5 \cdot 0{,}32 = 7{,}52\ \text{t}.$$

Výsledky výpočtu jsou sestaveny v tabulce; v ní znamená S_0 osovou sílu, vyvozenou stálým zatížením, $\max S'_q$ a $\min S'_q$ krajní hodnoty z pohyblivého zatížení rovnoměrného, $\max S'_P$ a $\min S'_P$ krajní hodnoty z pohyblivé soustavy osamělých břemen. Z těchto hodnot vypočteme pak celkové krajní hodnoty osových sil

$$\max S = S_0 + \max S'_q + \max S'_P, \qquad \min S = S_0 + \min S'_q + \min S'_P.$$

V tabulce jsou osové síly v tunách.

Prut	S_0	$\max S'_q$	$\min S'_q$	$\max S'_P$	$\min S'_P$	$\max S$	$\min S$
D_6	− 49,92	+ 8,66	− 19,47	+ 18,36	− 39,45	− 22,90	− 108,84
E_6	+ 9,41	+ 6,85	− 4,80	+ 15,13	− 10,22	+ 31,39	− 5,61
V_5	− 13,49	+ 3,32	− 6,25	+ 6,80	− 13,76	− 3,37	− 33,50
V_3	− 15,62	+ 5,06	− 8,40	+ 10,70	− 17,23	+ 0,14	− 41,25
C_3	+ 45,72	+ 9,91	−	+ 21,14	−	+ 76,77	+ 45,72
D_3	− 62,42	−	− 13,53	−	− 27,45	− 62,42	− 103,40
V_2	− 33,67	−	− 7,30	−	− 15,81	− 33,67	− 56,78
E_3	+ 14,55	+ 3,15	−	+ 7,52	−	+ 25,22	+ 14,55

d) Příhradový oblouk o třech kloubech.

49. Příčinkové čáry reakcí a osových sil. Příhradový nosník budiž složen ze dvou dílů spojených kloubem c a podepřených v obou *opěrách* a, b pevně (obr. 168). V každé pevné opěře působí dvě neznámé složky reakce; celkem jsou tedy čtyři složky reakcí neznámy. Vnější síly vůbec jsou vázány třemi obecnými statickými výminkami rovnováhy; kloub c dává pak zvláštní výminku tvaru $M_c = 0$, znamená-li M_c součet momentů k bodu c vnějších sil po jedné straně bodu c působících. Z rovnosti počtu neznámých složek reakcí a počtu výminek rovnováhy plyne, že daný nosník, jejž nazýváme *příhradovým obloukem o třech kloubech*, je staticky určitý, jsou-li ovšem oba jeho díly tvarově určité, tedy jsou-li to na př. soustavy trojúhelníkové.

Opěrové reakce by se řešily přímo, jak bude ukázáno později u plnostěnného oblouku o třech kloubech (v třetím dílu tohoto spisu). I svislé zatížení vyvozuje v opěrách šikmé reakce; pro osové síly prutů bychom tedy užili vzorců, uvedených na str. 199, 200 prvého dílu tohoto spisu (3. vyd.), jež platí pro vnější síly jakéhokoli směru. Obírejme se pouze příčinkovými čarami opěrových reakcí i osových sil prutů.

Působí-li na nosník jakákoli břemena svislá, vyvodí v opěrách reakce šikmé, jejichž svislé složky znamenejme A, B a vodorovné složky H_a, H_b (obr. 168). Obecné výminky rovnováhy sil vnějších, týkající se složek vodorovných, svislých a momentů k bodu b, jsou

$$H_a - H_b = 0, \qquad A + B - \sum_0^l P = 0, \qquad A\,l - \sum_0^l P\,p' = 0,$$

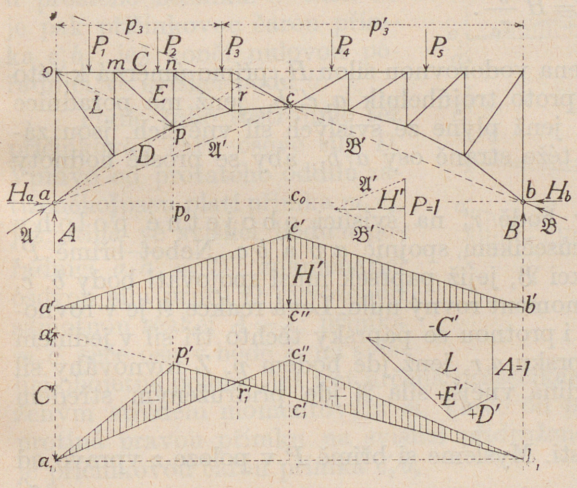
jsou-li opěrové body a, b na vodorovnici ve vzdálenosti $\overline{a\,b} = l$. Poslední dvě výminky rovnováhy se shodují s výminkami rovnováhy pro nosník prostý téhož rozpětí l, na nějž by působila táž břemena. Svislé složky reakcí se tedy rovnají reakcím prostého nosníku téhož rozpětí a zatížení. Z prvé výminky rovnováhy plyne $H_a = H_b$; vodorovné složky opěrových reakcí jsou tedy za svislého zatížení rovny a protivny. Znamenejme je krátce H a nazývejme je *vodorovnou silou* oblouku.

Vodorovnou sílu H určíme ze zvláštní výminky rovnováhy, kterou dává kloub c; má tvar, je-li $\overline{a\,c_0} = c$, $\overline{c_0\,c} = h$,

$$M_c = A\,c - H\,h - \sum_0^c P\,(c - p) = 0,$$

z něhož plyne

$$H = \frac{A\,c - \sum_0^c P\,(c-p)}{h}. \qquad (178)$$



Obr. 168.

Jediné břímě P, jež působí vlevo od bodu c ve vzdálenosti $p = z$ od svislice bodu a a $p' = z' = l - z$ od svislice bodu b, vyvodí svislou reakci $A = P\frac{z'}{l}$ a podle vzorce (178) vodorovnou sílu

$$H = \frac{1}{h}\left|P\frac{z'}{l}\,c - P\,(c - z)\right| = \frac{P\,c'}{h\,l}\,z. \qquad (179^a)$$

Pohybuje-li se břímě po levém dílu nosníku $a\,c$, mění se vodorovná síla H po zákonu přímky, jež má ve svislici bodu a $(z = 0)$ pořadnici $H = 0$, ve svislici bodu c $(z = c)$ pořadnici

$$H' = \frac{P\,c\,c'}{h\,l}. \qquad (180)$$

Je-li jediné břímě P v poloze z vpravo od bodu c, vychází opět $A = P\frac{z'}{l}$ a vzorec (178) dá

$$H = \frac{Pc}{hl} z', \tag{179^b}$$

což znamená zase přímku, jež má ve svislici bodu b pořadnici nulovou a ve svislici bodu c pořadnici $H' = \overline{c'' c'}$.

Příčinkovým obrazcem vodorovné síly H je trojúhelník $a' c' b'$, jehož výška H' znamená vodorovnou sílu, působí-li na nosník břímě $P = 1$ v bodě c. Lze ji též přímo sestrojiti. Je-li na nosníku jediné břímě $P = 1$ v bodě c, musí paprsek $\mathfrak{A}'$ výslední levé reakce procházeti bodem a i c, poněvadž jsou v těchto bodech klouby, k nimž musí míti reakce $\mathfrak{A}'$ jakožto jediná vnější síla po levé straně momenty rovné nule. Rovněž tak paprsek $\mathfrak{B}'$ výslední pravé reakce musí jíti body b a c. Břímě $P = 1$ je pak v rovnováze s reakcemi $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, jejichž paprsky známe; určovací úseky těchto tří sil tvoří trojúhelník a H' je společnou vodorovnou složkou obou reakcí.

Vyšetřujíce dále příčinkovou čáru osové síly libovolného prutu, berme zvláště svislé síly vnější a vodorovnou sílu H. Svislé síly vnější jsou zde tytéž jako u prostého nosníku téhož rozpětí a zatížení; z nich plyne tedy táž příčinková čára osové síly prutu C jako u prostého nosníku. Čára ta je stanovena pořadnicí $C' = \overline{a_1 a_1'}$, jež se rovná osové síle prutu C, působí-li po levé straně pouze svislá reakce $A = 1$, z níž se určí osové síly C', D', E' na př. methodou průsečnou. Spojnice $a_1' b_1$ je příčinkovou čarou vpravo od svislice bodu p; s ní se protíná levá přímka příčinková $a_1 p_1'$ na svislici přidruženého středu momentového p. Vodorovná síla H v bodě a by dala sama osovou sílu C_H, jež plyne z momentové výminky rovnováhy sil H, C, D, E k bodu p; tato výminka má, je-li r_c rámě prutu C k bodu p a $\overline{p_0 p} = y$, tvar

$$C_H \cdot r_c - H \cdot y = 0,$$

z něhož plyne

$$C_H = H \frac{y}{r_c}.$$

Je tedy ona část síly osové, jež je vyvozena vodorovnou silou H, přímo úměrná k této síle; příčinkovým obrazcem síly C_H je proto trojúhelník $a_1 c_1'' b_1$, jenž má pořadnice kladné. Pořadnice trojúhelníka $a_1 p_1' b_1$, jenž plyne ze svislých sil vnějších, jsou záporné, i naznačíme oba trojúhelníky po téže straně osy $a_1 b_1$, aby se prosté hodnoty jejich pořadnic odčítaly.

Přímka $a_1 c_1''$ seče přímku $p_1' b_1$ v bodě r_1' na svislici o b j e t n é p o l o h y břemene, která je též přímo určena průsečíkem spojnic $a\,p$ a $b\,c$. Neboť břímě P, jež působí v bodě r, vyvodí pravou reakci $\mathfrak{B}$, jejíž paprsek musí spojovati body b, c, poněvadž reakce $\mathfrak{B}$ má míti k bodu b i c moment rovný nule. Levá reakce $\mathfrak{A}$ je v rovnováze s břemenem P a pravou reakcí $\mathfrak{B}$, i protnou se paprsky těchto tří sil v jediném bodě r. Působí tedy levá reakce $\mathfrak{A}$ v paprsku $a\,r$, jenž jde bodem p. Z rovnováhy sil $\mathfrak{A}$, C, D, E plyne pak $C = 0$, jelikož jediná vnější síla $\mathfrak{A}$ jde přidruženým středem momentovým p.

Obojetnou polohu r lze též vypočísti. Mysleme si břímě P v poloze z vpravo od bodu p a vlevo od bodu c, kde je též r. Tato poloha břemene vyvodí reakci $A = P\frac{z'}{l}$ a vodorovnou sílu H, danou vzorcem (179^a), jež jsou v rovnováze s osovými silami C, D, E. Momentová výminka rovnováhy k bodu p jest, znamenáme-li $\overline{a\,p_0} = x$, $\overline{p_0\,p} = y$ a r_c rámě síly C k bodu p,

$$A\,x - H\,y + C\,r_c = 0;$$

plyne z ní

$$C = \frac{H y - A x}{r_c} = \frac{P (c' y z - h x z')}{h l r_c}.$$

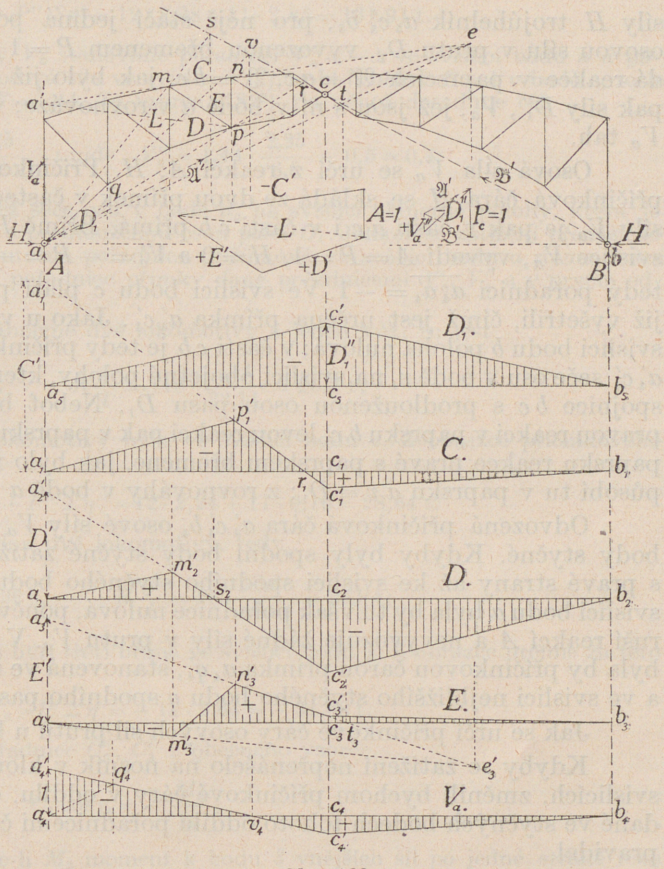
Břímě v obojetné poloze r, jejíž úsečky znamenejme z_0 a $z'_0 = l - z_0$, vyvodí sílu $C = 0$, platí tedy

$$c' y z_0 - h x z'_0 = 0,$$

což dá

$$z_0 = \frac{h l x}{c' y + h x}. \qquad (181)$$

Čáry $a_1 p'_1 b_1$ a $a_1 c''_1 b_1$ omezují příčinkový obrazec síly C, jehož znaménka jsou dána znaménkem pořadnic $C' = \overline{a_1 a'_1}$; příčinkové pořadnice síly C měříme od lomené čáry základní $a_1 c''_1 b_1$. Snadno lze rýsovati příčinkový obrazec síly C tak, aby jeho osa byla přímá. Příčinková čára se tu bude skládati (obr. 169) z přímky $p'_1 c'_1$, jež je dána pořadnicí $\overline{a_1 a'_1} = C'$ a seče osu v bodě r_1 na svislici obojetné polohy r, stanovené na přímce $b\,c$ spojnicí bodu a s přidruženým středem momentovým p. S přímkou $p'_1 c'_1$ se protíná levá přímka $a_1 p'_1$ na svislici přidruženého středu momentového p jako u prostého nosníku. V části $c\,b$ je pak příčinkovou čarou přímka $c'_1 b_1$, jež končí nulovou pořadnicí ve svislici bodu b.



Obr. 169.

Podle toho sestrojíme též příčinkovou čáru osové síly D. Vpravo od proťatého oddílu zatíženého pasu platí přímka $m'_2 c'_2$, jež utíná ve svislici bodu a pořadnici $\overline{a_2 a'_2} = D'$, znamenající osovou sílu prutu D vyvozenou samotnou reakcí $A = 1$; přímka $m'_2 c'_2$ seče osu v bodě s_2 na svislici obojetné polohy, jež jest určena průsečíkem s přímky $b\,c$ se spojnicí bodu a s přidruženým středem momentovým m. Vlevo od proťatého oddílu platí přímka $a_2 m'_2$, jež protíná pravou přímku na svislici přidruženého středu momentového m, v části $c\,b$ je příčinkovou čarou přímka $c'_2 b_2$.

Obdobně postupujeme u všech prutů. Pro mezipasový prut E určíme z reakce $A = 1$ osovou sílu E', jež dá pořadnici $\overline{a_3 a'_3} = E'$ příčinkové přímky $n'_3 c'_3$, platné vpravo od proťatého oddílu zatíženého pasu; tato přímka seče osu v bodě t_3 na svislici průsečíku t přímky $b\,c$ se spojnicí bodu a s přidruženým středem momentovým e. Padne-li bod t vpravo od kloubu c, nemá ovšem statického významu polohy obojetné. Prodloužená přímka $n'_3 c'_3$ a přímka $a_3 m'_3$, jež platí vlevo od proťatého oddílu, sekou

se v bodě e_3' na svislici přidruženého středu momentového jako u prostého nosníku, v proťatém oddílu je pak příčinkovou čarou přímka $m_3' n_3'$ a v části $c\,b$ přímka $c_3' b_3$.

Jinak třeba postupovati, jde-li o krajní pruty, na př. D_1, V_a. Osové síly těchto prutů jsou v bodě a v rovnováze se složkami A, H levé reakce. Výminka rovnováhy pro vodorovné složky dá

$$D_1 \cos \delta_1 = -H \tag{182a}$$

a z výminky rovnováhy pro svislé složky plyne

$$V_a = -A - D_1 \sin \delta_1 = H \operatorname{tg} \delta_1 - A\,, \tag{182b}$$

není-li v bodě a břemene. Příčinkovým obrazcem síly D_1 je pak jako u vodorovné síly H trojúhelník $a_5 c_5' b_5$, pro nějž stačí jediná pořadnice $D_1'' = \overline{c_5 c_5'}$, znamenající osovou sílu v prutu D_1, vyvozenou břemenem $P = 1$ v bodě c působícím. Toto břímě dá reakce v paprscích $\mathfrak{A}' \equiv a\,c$, $\mathfrak{B}' \equiv b\,c$, jak bylo již dovozeno, z reakce $\mathfrak{A}'$ stanovíme pak síly D_1'', V_a', jež jsou s ní v bodě a v rovnováze; vyjde tu v prutu D_1 tlak, v prutu V_a tah.

Osová síla V_a se určí z reakcí A, H. Příčinkovou čarou A je jediná přímka, příčinková čára H se skládá ze dvou přímek v částech $a\,c$, $c\,b$; příčinková čára osové síly V_a je pak v části $a\,c$ i v části $c\,b$ přímá. Břímě $P = 1$, jež působí v horním konci svislice V_a, vyvodí $A = P = 1$, $H = 0$ a $V_a' = -P = -1$; ve svislici bodu a přeneseme tedy pořadnici $\overline{a_4 a_4'} = -1$. Ve svislici bodu c platí pořadnice $V_a'' = \overline{c_4 c_4'}$, kterou jsme již vyšetřili, čímž jest určena přímka $a_4' c_4'$. Jako u všech ostatních sil je také zde ve svislici bodu b poloha nulová; v části $c\,b$ je tedy příčinkovou čarou přímka $c_4' b_4$. Přímka $a_4' c_4'$ seče osu v bodě v_4 na svislici obojetné polohy, která je též přímo dána průsečíkem v spojnice $b\,c$ s prodlouženou osou pasu D_1. Neboť břímě v bodě v působící vyvodí pravou reakci v paprsku $b\,c$, levou reakci pak v paprsku, spojujícím bod a s průsečíkem v paprsku reakce pravé s paprskem břemene, jak bylo vyloženo u prutu C. Levá reakce působí tu v paprsku $a\,v \equiv D_1$; z rovnováhy v bodě a plyne síla $V_a = 0$.

Odvozená příčinková čára $a_4' c_4' b_4$ osové síly V_a platí, působí-li zatížení na horní body styčné. Kdyby byly spodní body styčné zatíženy, zůstala by stanovená čára s pravé strany až ke svislici spodního styčného bodu q nejbližšího ke svislici V_a. Ve svislici bodu a byla by tu však pořadnice nulová, poněvadž se břímě, jež působí v bodě a, ruší reakcí A a nevyvozuje žádné síly v prutu V_a. V prvém oddílu spodního pasu $a\,q$ byla by příčinkovou čarou přímka $a_4 q_4'$, stanovená ve svislici bodu a pořadnicí nulovou a ve svislici nejbližšího styčného bodu q spodního pasu pořadnicí přímky $a_4' c_4'$.

Jak se určí příčinkové čáry osových sil prutů u bodu c, bude ukázáno v příkladě.

Kdyby se zatížení nepřenášelo na nosník v kloubu c, nýbrž pouze v sousedních svislicích, změnili bychom příčinkové čáry v oddílu, obsahujícím kloub c, na přímky, dané ve styčných bodech tohoto oddílu pořadnicemi čar rýsovaných podle předchozích pravidel.

Příklad 34. Příhradový oblouk o třech kloubech (obr. 170, tab. 3) má rozpětí $l = 10\,a = 36$ m a vzepětí $h = \overline{c_0 c} = 6{,}25$ m; body spodního pasu jsou nad spojnicí $a\,b$ ve výši $y_1 = 2{,}25$, $y_2 = 4{,}00$, $y_3 = 5{,}25$, $y_4 = 6{,}00$, $y_5 = h = 6{,}25$ m a svislice mají délky $v_0 = 5{,}20$, $v_1 = 3{,}85$, $v_2 = 2{,}80$, $v_3 = 2{,}05$, $v_4 = 1{,}60$ m. Vypočísti jest krajní hodnoty sil H, V_0, C_3, D_3, E_3 V_3, C_5, D_5, přenáší-li se do styčných bodů spodního pasu pohyblivé zatížení soustavou osamělých břemen, danou vlakem podle normy II mostního řádu z. r. 1904, složeným ze dvou tendrových lokomotiv a nákladních vozů.

Příčinkové čáry všech sil vyšetříme přesně počtem.

a) Příčinková čára vodorovné síly H jest určena pořadnicí H' ve svislici bodu c, kterou vypočteme ze vzorce (180), do něhož dosadíme $P = 1$, $c = c' = \frac{1}{2} l$; vyjde

$$H' = 1 \cdot \frac{l}{4\,h} = \frac{36}{4 \cdot 6{,}25} = 1{,}44\,.$$

Za soustavy břemen naznačené v obr. 170, jejíž nejúčinnější poloha musí vyhověti kriteriu Winklerovu, jest

$$R = 8 \cdot 12 + 5 \cdot 11 = 151 \text{ t}, \qquad R\frac{x}{l} = \frac{R}{2} = 75{,}5 \text{ t},$$

což žádá, aby sedmé břímě působilo ve svislici bodu c. Soustava břemen obsahuje dvojí břemena $P' = 12$ t a $P'' = 11$ t; určíme tedy ve všech případech zvláště součet příčinkových pořadnic η' v paprscích břemen P' a součet příčinkových pořadnic η'' v paprscích břemen P''. V tomto případě obdržíme z obrazce

$$\Sigma\eta' = 8{,}38, \qquad \Sigma\eta'' = 2{,}85,$$

odměřujeme-li pořadnice η v měřidle, podle něhož jsme přenesli H', a dosazujeme-li je jako čísla nepojmenovaná. Pak jest

$$\max H = P'\Sigma\eta' + P''\Sigma\eta'' = 12 \cdot 8{,}38 + 11 \cdot 2{,}85 = 131{,}91 \text{ t}.$$

b) Příčinkovou čáru osové síly V_0 stanovíme pořadnicí $V_0' = -1$ ve svislici bodu a a pořadnicí V_0'' ve svislici bodu c. V_0'' jest osová síla ve svislici V_0, působí-li břímě $P = 1$ v bodě c; toto břímě vyvodí reakce $A = 0{,}5$, $H = H' = 1{,}44$. Ze vzorce (182^b), do něhož dosadíme též

$$\operatorname{tg}\delta_1 = \frac{y_1}{a} = \frac{2{,}25}{3{,}6}, \quad \text{vyjde} \quad V_0'' = 1{,}44 \cdot \frac{2{,}25}{3{,}6} - 0{,}5 = 0{,}4.$$

Pořadnice V_0', V_0'' stanoví přímku, jež seče osu v bodě u_0' na svislici obojetné polohy, která je též určena průsečíkem u_0 přímky $b\,c$ s prodlouženou osou pasu D_1. Jelikož se zatížení přenáší do styčných bodů spodního pasu, je skutečná pořadnice příčinková ve svislici bodu a rovna nule; ve svislici styčného bodu *1* platí pak pořadnice přímky dané pořadnicemi V_0', V_0'' a v prvém oddílu je příčinkovou čarou přímka.

Délkou kladně přičiňující obsáhneme dvě lokomotivy a jeden vůz; tu jest

$$R = 118 \text{ t}, \qquad R\frac{x}{l} = 118 \cdot \frac{5{,}14}{23{,}14} = 26{,}2 \text{ t},$$

což žádá, aby třetí náprava prvé lokomotivy byla ve svislici bodu c. Z obrazce příčinkového určíme pak $\Sigma\eta' = 2{,}24$, $\Sigma\eta'' = 0{,}16$ a

$$\max V_0 = P'\Sigma\eta' + P''\Sigma\eta'' = 12 \cdot 2{,}24 + 11 \cdot 0{,}16 = 28{,}64 \text{ t}.$$

Na délku záporně přičiňující se vejdou dvě lokomotivy, tedy

$$R = 8 \cdot 12 = 96 \text{ t}, \qquad R\frac{x}{l} = 96 \cdot \frac{3{,}6}{12{,}86} = 26{,}9 \text{ t};$$

za nejúčinnější polohy soustavy musí býti třetí břímě ve svislici bodu *1*. Z obrazce určíme za této polohy $\Sigma\eta' = -2{,}64$ a

$$\min V_0 = P'\Sigma\eta' = -12 \cdot 2{,}64 = -31{,}68 \text{ t}.$$

c) Pro prut C_3 vypočteme pořadnice C_3', C_3'' z obecného vzorce

$$C_3 \cos\gamma_3 = -\frac{M_3}{v_3},$$

platného pro jakékoli síly vnější, je-li M_3 moment k bodu *3* vnějších sil po jedné straně řezu vedeného prutem C_3 podle methody průsečné. C_3' znamená osovou sílu, vyvozenou pouhou reakcí $A = 1$; pak jest $M_3 = 1 \cdot x_3 = 10{,}8$ m, dále určíme

$$\cos\gamma_3 = \frac{a}{c_3}, \qquad c_3 = \sqrt{a^2 + (y_3 + v_3 - y_2 - v_2)^2} = 3{,}635 \text{ m},$$

čímž vyjde

$$C_3' = -\frac{10{,}8}{2{,}05} \cdot \frac{3{,}635}{3{,}6} = -5{,}319.$$

C_3'' jest osová síla, vyvozená v prutu C_3 břemenem $P = 1$, jež působí v bodě c; tu jest

$$A = 0{,}5, \quad H = 1{,}44, \quad M_3 = A\,x_3 - H\,y_3 = 0{,}5 \cdot 10{,}8 - 1{,}44 \cdot 5{,}25 = -2{,}16 \text{ m},$$

$$C_3'' = \frac{2{,}16}{2{,}05} \cdot \frac{3{,}635}{3{,}6} = 1{,}064.$$

Pořadnice C_3', C_3'' určují přímku, jež seče osu na svislici obojetné polohy, dané průsečíkem r_3 přímek $b\,c$, $a\,3$, což je kontrolou. Zatížení, jež vyvozují krajní hodnoty osové síly C_3, naznačena jsou v obr. 170; kontrolovali bychom je počtem podle kriteria Winklerova nebo graficky jako u obecné lomené čáry příčinkové (viz obr. 119). Pro $\max C_3$ stanovíme z obrazce $\Sigma\eta' = 5{,}83$, $\Sigma\eta'' = 0{,}28$ a

$$\max C_3 = 12 \cdot 5{,}83 + 11 \cdot 0{,}28 = 73{,}04 \text{ t}.$$

Rovněž z obrazce určíme, počítajíce $\min C_3$, $\Sigma\eta' = -6{,}39$ a

$$\min C_3 = -12 \cdot 6{,}39 = -76{,}68 \text{ t}.$$

d) Osovou sílu D_3 řešíme z obecného vzorce

$$D_3 \cos \delta_3 = \frac{M_2'}{v_2},$$

jenž platí pro jakékoli síly vnější, je-li M_2' moment vnějších sil po jedné straně řezu, vedeného prutem, vzhledem k bodu $2'$; výšku tohoto bodu nad spojnicí $a\,b$ znamenejme $y_2' = y_2 + v_2 = 6{,}80$ m. Zde jest

$$\cos \delta_3 = \frac{a}{d_3}, \qquad d_3 = \sqrt{a^2 + (y_3 - y_2)^2} = 3{,}811 \text{ m}.$$

Pořadnice D_3' se určí jako osová síla prutu z reakce $A = 1$; tu jest

$$M_2' = 1 \cdot x_2 = 7{,}2 \text{ m}, \qquad D_3' = \frac{7{,}2}{2{,}8} \cdot \frac{3{,}811}{3{,}6} = 2{,}722.$$

Břímě $P = 1$, jež působí v bodě c, vyvodí $A = 0{,}5$, $H = 1{,}44$ a

$$M_2' = A\,x_2 - H\,y_2' = 0{,}5 \,.\, 7{,}2 - 1{,}44 \,.\, 6{,}8 = -6{,}192 \text{ m},$$

v prutu D_3 vzniká pak osová síla

$$D_3'' = -\frac{6{,}192}{2{,}8} \cdot \frac{3{,}811}{3{,}6} = -2{,}341.$$

Příčinková přímka, daná pořadnicemi D_3', D_3'', seče osu v bodě s_3' na svislici obojetné polohy, určené průsečíkem s_3 přímek $b\,c$, $a\,2'$. Krajní hodnoty osové síly D_3 žádají poloh soustavy břemen, naznačených v obr. 170. Pro $\max D_3$ určíme z obrazce $\Sigma\eta' = 2{,}14$ a dostaneme

$$\max D_3 = 12 \cdot 2{,}14 = 25{,}68 \text{ t}.$$

Pro $\min D_3$ platí $\Sigma\eta' = -13{,}48$, $\Sigma\eta'' = -1{,}29$, což dá

$$\min D_3 = -12 \cdot 13{,}48 - 11 \cdot 1{,}29 = -175{,}95 \text{ t}.$$

e) Pro osovou sílu E_3 užijeme vzorce (84^a) z prvého dílu tohoto spisu (3. vyd., str. 199), jenž platí pro jakékoli síly vnější a dá

$$E_3 \cos \varepsilon_3 = \frac{M_3}{v_3} - \frac{M_2}{v_2},$$

jsou-li M_3, M_2 momenty vnějších sil po levé straně řezu, vedeného prutem, vzhledem k bodům *3*, *2* téhož pasu. Určíme nejprve

$$\cos \varepsilon_3 = \frac{a}{e_3}, \qquad e_3 = \sqrt{a^2 + (y_2 + v_2 - y_3)^2} = 3{,}920 \text{ m}.$$

Pořadnici E_3' určíme jako osovou sílu z pouhé reakce $A = 1$, jež dá

$$M_3 = 1 \cdot x_3, \qquad M_2 = 1 \cdot x_2,$$

tedy

$$E_3' = \left(\frac{x_3}{v_3} - \frac{x_2}{v_2}\right) \cdot \frac{1}{\cos \varepsilon_3} = \left(\frac{10{,}8}{2{,}05} - \frac{7{,}2}{2{,}8}\right) \cdot \frac{3{,}920}{3{,}6} = 2{,}939.$$

Skutečná příčinková pořadnice E_3'' ve svislici bodu c se rovná osové síle prutu E_3, vyvozené břemenem $P = 1$ v bodě c působícím. Tu jest $A = 0{,}5$, $H = 1{,}44$ a

$$M_2 = A\,x_2 - H\,y_2 = 0{,}5 \,.\, 7{,}2 - 1{,}44 \cdot 4{,}0 = -2{,}16,$$
$$M_3 = A\,x_3 - H\,y_3 = 0{,}5 \cdot 10{,}8 - 1{,}44 \cdot 5{,}25 = -2{,}16,$$

z čehož plyne

$$E_3'' = \left(-\frac{2{,}16}{2{,}05} + \frac{2{,}16}{2{,}8}\right) \cdot \frac{3{,}920}{3{,}6} = -0{,}306.$$

Konečně lze určiti pořadnici E_3''' mezi první a třetí přímkou příčinkovou ve svislici bodu c jako u prostého nosníku ze samotného břemene $P = 1$ v bodě c jakožto jediné síly vnější po jedné straně řezu. Myslíme-li si odňatu část nosníku vlevo od řezu, tedy pokládáme-li P za výslednici vnějších sil po pravé straně řezu, dostaneme

$$M_3 = -P \cdot 2a = -1 \cdot 7{,}2\,\text{m}, \quad M_2 = -P \cdot 3a = -1 \cdot 10{,}8\,\text{m},$$

$$E_3''' = \left(-\frac{7{,}2}{2{,}05} + \frac{10{,}8}{2{,}8}\right) \cdot \frac{3{,}920}{3{,}6} = 0{,}378,$$

což znamená algebraicky pořadnici, měřenou ve svislici bodu c od první k třetí přímce příčinkové. Tím jest úplně určena příčinková čára síly E_3. Kontrolovati ji lze přidruženým středem momentovým e_3, na jehož svislici se protíná prvá a třetí přímka příčinková, a obojetnou polohou ve svislici průsečíku t_3 přímek $b\,c$, $a\,e_3$, ve kteréž svislici seče třetí přímka příčinková osu.

Největší tah v prutu E_3 vyvozuje zatížení jedinou lokomotivou podle obr. 170, což plyne z kriteria Winklerova; tu jest $\Sigma\eta' = 4{,}85$ a

$$\max E_3 = 12 \cdot 4{,}85 = 58{,}20\,\text{t}.$$

Největší tlak vznikne zatížením levé nebo pravé části záporně přičiňující. Do levé části se vejde jediná lokomotiva; nejúčinnější poloha je naznačena v obr. 170 a dá $\Sigma\eta' = -0{,}82$, tedy

$$\min E_3^{(1)} = -12 \cdot 0{,}82 = -9{,}84\,\text{t}.$$

Zatížením vpravo od bodu t_3 dvěma lokomotivami a jednou nápravou nákladního vozu podle obr. 170 dostaneme $\Sigma\eta' = -1{,}67$, $\Sigma\eta'' = -0{,}05$ a

$$\min E_3^{(2)} = -12 \cdot 1{,}67 - 11 \cdot 0{,}05 = -20{,}59\,\text{t}.$$

Nepřipouštíme-li současně dva vlaky na mostě, vezmeme z obou posledních hodnot větší hodnotu prostou jakožto

$$\min E_3 = \min E_3^{(2)} = -20{,}59\,\text{t}.$$

f) Osová síla ve svislici V_3 je dána pro jakékoli síly vnější vyjma svislé břímě P ve spodním konci svislice vzorcem

$$V_3 = \frac{1}{a_3}\left(M_2' - \frac{M_3'}{v_3} \cdot v_2'\right) + P,$$

jenž plyne ze vzorce (85^b) v prvém dílu tohoto spisu (3. vyd., str. 197). Počítáme-li pořadnice V_3', V_3'', jež stanoví příčinkovou čáru, dosadíme $P = 0$, jelikož tu není břemen ve svislici V_3. Délka v_2' jest omezena na svislici bodu *2* prodlouženými osami prutů C_3, D_4; vypočteme ji neb odměříme z obrazce $v_2' = 2{,}30$ m. Pořadnice V_2' se rovná osové síle vyvozené pouhou reakcí $A = 1$; pak jest $M_2' = 1 \cdot x_2$, $M_3' = 1 \cdot x_3$ a

$$V_3' = \frac{1}{a_3}\left(x_2 - \frac{x_3}{v_3}\,v_2'\right) = \frac{1}{3{,}6}\left(7{,}2 - \frac{10{,}8}{2{,}05} \cdot 2{,}30\right) = -1{,}368.$$

Břímě $P = 1$, jež působí v bodě c, dá $A = 0{,}5$, $H = 1{,}44$. Reakce $A = 0{,}5$ dala by sama sílu $\frac{1}{2}V_2'$; k tomu přistupuje účinek síly H, jež vyvodí momenty $M_2' = -Hy_2'$, $M_3' = -Hy_3'$, tedy celkem jest

$$V_2'' = \frac{1}{2}V_3' - \frac{H}{a_3}\left(y_2' - \frac{y_3'}{v_3}\,v_2'\right) = -0{,}684 - \frac{1{,}44}{3{,}6}\left(6{,}80 - \frac{7{,}30}{2{,}05} \cdot 2{,}30\right) = -0{,}128.$$

Pořadnice V_3', V_3'' určují třetí přímku příčinkovou, od níž k prvé přímce je ve svislici bodu *3* jako u prostého nosníku pořadnice $V_3''' = 1$, znamenající osovou sílu v prutu V_3, působí-li v bodě *3* břímě $P = 1$ jakožto výslednice vnějších sil po levé straně řezu. Tím jest určena celá čára příčinková. První a třetí přímka příčinková se mají protínati na svislici přidruženého středu momentového v_3 a třetí přímka seče osu na svislici průsečíku u_3 spojnic $b\,c$, $a\,v_3$ což jsou kontroly řešení.

Největší tah v prutu V_3 žádá zatížení dvěma lokomotivami v části kladně přičiňující podle obr. 170; tu jest $\Sigma\eta' = 1{,}48$,

$$\max V_3 = 12 \cdot 1{,}48 = 17{,}76\,\text{t}.$$

Největší tlak vyvodíme zatížením části záporně přičiňující dvěma lokomotivami a třemi nápravami nákladních vozů v poloze naznačené v obr. 170; nejúčinnější poloha musí hověti nerovnici (32), platné pro čtyrúhelníkový obrazec příčinkový, nebo se kontroluje graficky podle obr. 119. Pak jest $\Sigma\eta' = -1{,}39$, $\Sigma\eta'' = -0{,}09$ a

$$\min V_3 = -12 \cdot 1{,}39 - 11 \cdot 0{,}09 = -17{,}67\,\text{t}.$$

g) Osovou sílu D_5 lze řešiti methodou průsečnou; platí tedy pro ni jako u ostatních prutů spodního pasu vzorec

$$D_5 \cos \delta_5 = \frac{M'_4}{v_4},$$

do něhož dosadíme

$$\cos \delta_5 = \frac{a}{d_5}, \qquad d_5 = \sqrt{a^2 + (y_5 - y_4)^2} = 3{,}609 \text{ m}.$$

Z reakce $A = 1$ plyne moment $M'_4 = 1 \cdot x_4 = 1 \cdot 14{,}4$ m, což dá sílu

$$D'_5 = \frac{14{,}4}{1{,}6} \cdot \frac{3{,}609}{3{,}6} = 9{,}025.$$

Břímě $P = 1$ v bodě c působící vyvodí moment

$$M'_4 = A\, x_4 - H\, y'_4 = 0{,}5 \cdot 14{,}4 - 1{,}44 \cdot 7{,}6 = -3{,}744 \text{ m},$$

tedy

$$D''_5 = -\frac{3{,}744}{1{,}6} \cdot \frac{3{,}609}{3{,}6} = -2{,}346.$$

Pořadnicemi D'_5, D''_5 je stanoven úplně příčinkový obrazec síly D_5; obě zmíněné pořadnice určují přímku, jež seče osu na svislici průsečíku s_5 přímek $b\,c$, $a\,4'$.

Prvá přímka příčinková má velmi malé pořadnice; přibližně lze určiti nejúčinnější polohu soustavy podle kriteria Winklerova, jako by prvé přímky příčinkové nebylo. Vyjde poloha naznačená v obr. 170, jež dá $\Sigma \eta' = -12{,}90$, $\Sigma \eta'' = -0{,}62$ a

$$\min D_5 = -12 \cdot 12{,}90 - 11 \cdot 0{,}62 = -161{,}62 \text{ t}.$$

h) Osová síla prutu C_5 plyne z rovnováhy v bodě $4'$; je-li tento bod nezatížen anebo působí-li v něm svislé břímě, platí

$$C_5 \cos \gamma_5 = C_4 \cos \gamma_4 = -\frac{M_4}{v_4},$$

kdež

$$\cos \gamma_5 = \frac{a}{c_5}, \qquad c_5 = \sqrt{a^2 + (y_4 + v_4 - y_5)^2} = 3{,}845 \text{ m}.$$

Břímě $P = 1$ v bodě c působící vyvodí moment

$$M_4 = A\, x_4 - H\, y_4 = 0{,}5 \cdot 14{,}4 - 1{,}44 \cdot 6{,}0 = -1{,}44,$$

pročež jest

$$C'_5 = -\frac{M_4}{v_4} \cdot \frac{1}{\cos \gamma_5} = \frac{1{,}44}{1{,}6} \cdot \frac{3{,}845}{3{,}6} = 0{,}962,$$

což znamená skutečnou příčinkovou pořadnici ve svislici bodu c. Podobně určíme skutečnou příčinkovou pořadnici C''_5 ve svislici bodu *4*. Působí-li břímě $P = 1$ v bodě *4*, vyvodí pravou reakci v paprsku $b\,c$; složky její jsou

$$B = 1 \cdot \frac{x_4}{l} = 0{,}4, \qquad H = B \frac{l}{2h} = 1{,}152,$$

což musí souhlasiti též s příčinkovou pořadnicí příslušné reakce ve svislici bodu *4*. Pak jest

$$M_4 = B\, x'_4 - H\, y_4 = 0{,}4 \cdot 21{,}6 - 1{,}152 \cdot 6{,}0 = 1{,}728$$

a

$$C''_5 = -\frac{1{,}728}{1{,}6} \cdot \frac{3{,}845}{3{,}6} = -1{,}153.$$

Pořadnice C'_5, C''_5 stanoví přímku, jež protíná osu na svislici obojetné polohy, dané průsečíkem r_5 přímek $b\,c$, $a\,4$. Vlevo od svislice bodu *4* a vpravo od svislice bodu c jsou příčinkovými čarami síly C_5 přímky končící nulovými pořadnicemi ve svislicích bodů a, b, neboť příčinková čára síly C_5 má týž tvar jako příčinková čára síly C_4.

Délkou kladně přičiňující obsáhneme dvě lokomotivy a jednu nápravu nákladního vozu; nejúčinnější poloha naznačená v obr. 170 dá $\Sigma \eta' = 5{,}21$, $\Sigma \eta'' = 0{,}14$ a

$$\max C_5 = 12 \cdot 5{,}21 + 11 \cdot 0{,}14 = 64{,}06 \text{ t}.$$

Na délku záporně přičiňující se vejdou pouze dvě lokomotivy; poloha podle obr. 170 vyvodí $\Sigma \eta' = -5{,}51$ a

$$\min C_5 = -12 \cdot 5{,}51 = -66{,}12 \text{ t}.$$

e) Zvláštní methody řešení.

50. Methoda náhradných prutů. Řešíme-li prutovou soustavu methodou náhradných prutů,[1]) vyjmeme ze soustavy prut s' a nahradíme jej prutem s_0, jejž volíme tak, aby bylo lze změněnou soustavu co nejsnáze řešiti. Dané zatížení vyvodí v obecném prutu s_i změněné soustavy osovou sílu $\mathfrak{S}_i$, v náhradném prutu s_0 sílu $\mathfrak{S}_0$. Vyňatý prut s' nahradíme v koncových bodech osovou silou S' a určíme ze sil $S' = 1$ v prutu s_i osovou sílu σ_i, v prutu s_0 osovou sílu σ_0; neznámé síly S', nahrazující prut s', vyvodily by v týchž prutech síly $\sigma_i S'$, $\sigma_0 S'$. Působí-li na změněnou soustavu současně dané zatížení i síly S', nahrazující prut s' v obou koncových bodech, vznikne v prutu s_i osová síla

$$S_i = \mathfrak{S}_i + \sigma_i S' \tag{183}$$

a v prutu s_0 osová síla

$$S_0 = \mathfrak{S}_0 + \sigma_0 S'.$$

V původní soustavě není prutu s_0, tedy je síla $S_0 = 0$; z toho plyne

$$S' = -\frac{\mathfrak{S}_0}{\sigma_0}. \tag{184}$$

Známe-li sílu S', určíme osové síly v ostatních prutech podle vzorce (183).

Pohybuje-li se břímě $P = 1$ po nosníku, mění se síly $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_i$, jak ukazují jejich příčinkové čáry. Je-li změněná soustava toho rázu, že lze příčinkové čáry sil $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_i$ snadno určiti, tedy je-li to na př. soustava trojúhelníková, jsou tím dány podle vzorců (184), (183) i příčinkové čáry osových sil S', S_i. Příčinkový obrazec síly S' je patrně téhož tvaru jako obrazec osové síly $\mathfrak{S}_0$, neboť σ_0 je stálé. Příčinkový obrazec síly S_i určíme pak podle vzorce (183) součtem obrazců $\mathfrak{S}_i$ a $\sigma_i S' = -\frac{\sigma_i}{\sigma_0}\mathfrak{S}_0$.

Stejně postupujeme, jestliže místo prutu s' odejmeme podporu, v níž působí reakce A', a nahradíme ji prutem s_0. Platí tu předešlé vzorce, jen je třeba osovou sílu S' nahraditi reakcí A' v odňaté podpoře. V tomto případě určujeme i podporové reakce jako osové síly prutů. Vyvodí-li v podpoře a_i změněné soustavy dané zatížení reakci $\mathfrak{A}_i$ a zatížení silou $A' = 1$ reakci α_i, je správná reakce A_i obdobně ke vzorci (183) dána rovnicí

$$A_i = \mathfrak{A}_i + \alpha_i A'. \tag{185}$$

Příčinkový obrazec reakce A' je podle vzorce (184), v němž jest psáti A' místo S', zase téhož tvaru jako obrazec síly $\mathfrak{S}_0$. Příčinkový obrazec síly S_i se určí z obrazců sil $\mathfrak{S}_i$ a A' podle vzorce (183) a obrazec reakce A_i se stanoví podle vzorce (185) součtem obrazců reakce $\mathfrak{A}_i$ a

$$\alpha_i A' = -\frac{\alpha_i}{\sigma_0}\mathfrak{S}_0.$$

Příklad 35. Stanovíme příčinkové čáry obecné osové síly a podporových reakcí prutové soustavy, naznačené v obr. 171.

Soustava jest určitá, jak ukáže řešení. Odejmeme-li posouvatelnou podporu a' a nahradíme-li ji prutem $s_0 \equiv a'c$, dostaneme soustavu trojúhelníkovou, jež je podepřena v bodě a pevně, v bodě b posouvatelně po vodorovné. Pro tuto soustavu určíme snadno příčinkové čáry osové síly $\mathfrak{S}_0$ v prutu s_0, síly $\mathfrak{S}_i$ v prutu s_i a reakcí $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ v podporách a, b. Proveďme řešení početářsky.

Prut s_0 je svislicí, z jejíhož horního konce vycházejí dvě příčky. Osová síla takové svislice je dána vzorcem (86^b) v prvém dílu tohoto spisu (3. vyd., str. 199), tedy

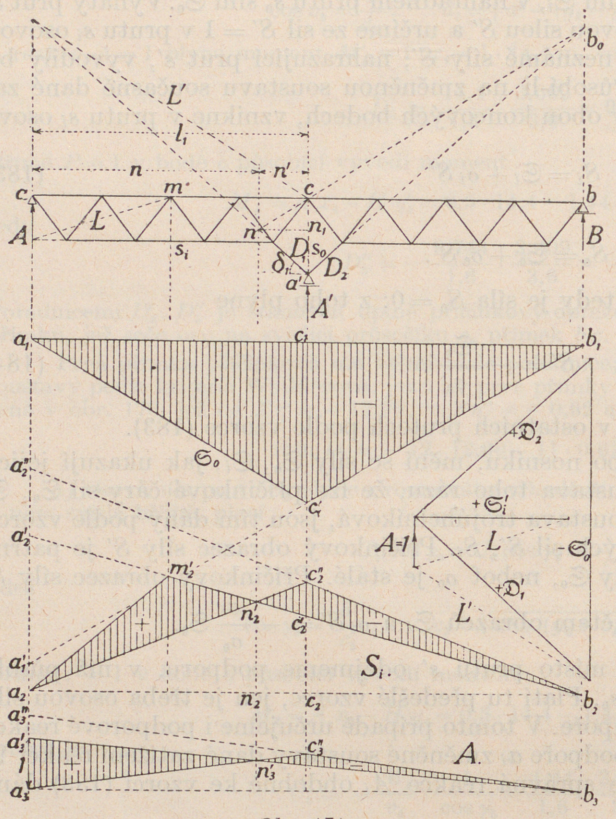
$$S_0 = \frac{M_c}{s_0}(\operatorname{tg}\delta_2 - \operatorname{tg}\delta_1) + P,$$

[1]) Viz prvý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1940), str. 168 a d.

jsou-li δ_1, δ_2 odchylky os pasů D_1, D_2 od vodorovné a P svislé břímě ve spodním konci a' prutu s_0 působící. Předpokládejme, že je soustava souměrná ke svislici s_0, tedy $\delta_1 = -\delta_2$; úhel δ_1 pokládáme za kladný. Zatížení nechť se přenáší do styčných bodů horního pasu.

Hledáme-li sílu $\mathfrak{S}_0$, dosaďme $P = 0$, jelikož změněná soustava nemá podpory a' a břemena působí v horních styčných bodech. Břemena, jež působí na změněnou soustavu, vyvodí v bodech a, b reakce $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ a v bodě c moment $\mathfrak{M}_c$; pak je podle hořejšího vzorce

$$\mathfrak{S}_0 = -\frac{2\,\mathfrak{M}_c}{s_0}\operatorname{tg}\delta_1 .$$



Obr. 171.

Příčinkovým obrazcem $\mathfrak{M}_c$ by byl trojúhelník, jehož pravá strana by byla určena ve svislici bodu a pořadnicí $\overline{ac} = l_1$; příčinkový obrazec $\mathfrak{S}_0$ je téhož tvaru, je to tedy trojúhelník $a_1 c'_1 b_1$, jehož pravá strana má ve svislici bodu a pořadnici

$$\mathfrak{S}'_0 = -\frac{2\,l_1}{s_0}\operatorname{tg}\delta_1 = \overline{a_1 a'_1} .$$

Graficky bychom určili $\mathfrak{S}'_0$ jako osovou sílu prutu s_0, působí-li vlevo pouze reakce $A = 1$, jak je naznačeno v obr. 171.

Činitel σ_0 znamená osovou sílu, jež vznikne v prutu s_0, působí-li na změněnou soustavu pouze reakce $A' = 1$ vzhůru. Toto zatížení vyvodí v podporách a, b souměrné soustavy reakce

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$$

a v bodě c moment

$$M_c = \alpha\, l_1 = -\frac{1}{2} l_1 .$$

Zároveň dosadíme $P = -A' = -1$ do obecného vzorce pro sílu S_0 a dostaneme

$$\sigma_0 = \frac{l_1}{s_0}\operatorname{tg}\delta_1 - 1 = \frac{1}{2}\mathfrak{S}'_0 - 1 .$$

Grafické řešení by bylo snadné.

V podpoře a' působí reakce

$$A' = -\frac{\mathfrak{S}_0}{\sigma_0} ,$$

jejíž příčinková čára má týž tvar jako čára síly $\mathfrak{S}_0$; pravá přímka příčinková reakce A' by byla ve svislici bodu a dána pořadnicí

$$A'_1 = -\frac{\mathfrak{S}'_0}{\sigma_0} = \frac{2\,l_1 \operatorname{tg}\delta_1}{l_1 \operatorname{tg}\delta_1 - s_0} .$$

V obecném prutu s_i jest osová síla dána vzorcem (183)

$$S_i = \mathfrak{S}_i + \sigma_i A' .$$

Příčinková čára $a_2 m'_2 b_2$ síly $\mathfrak{S}_i$ jest určena ve svislici podpory a pořadnicí $\overline{a_2 a'_2} = \mathfrak{S}'_i$, jež znamená osovou sílu v prutu s_i, vyvozenou reakcí $A = 1$; síla ta se stanoví snadno graficky, počtem pak z obecného vzorce

$$\mathfrak{S}'_i = \pm 1 \cdot \frac{x_i}{r_i} ,$$

je-li x_i vodorovná vzdálenost přidruženého středu momentového od paprsku A a r_i rámě síly S_i k přidruženému středu momentovému. Působí-li na změněnou soustavu reakce $A' = 1$, vyvodí v bodě a reakci $\alpha = -\frac{1}{2}$ a v prutu s_i osovou sílu

$$\sigma_i = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{S}'_i .$$

Příčinkovým obrazcem hodnoty $\sigma_i A'$ je trojúhelník $a_2 c''_2 b_2$, jehož pravá strana $c''_2 b_2$ utíná na svislici bodu a pořadnici

$$\overline{a''_2 a_2} = \sigma_i A'_1 = -\frac{1}{2} A'_1 \mathfrak{S}'_i = \mp \frac{x_i}{r_i} \cdot \frac{l_1 \operatorname{tg}\delta_1}{l_1 \operatorname{tg}\delta_1 - s_0} .$$

S příčinkovým obrazcem hodnoty $\sigma_i A'$ máme algebraicky sčítati obrazec síly $\mathfrak{S}_i$; oba obrazce mají protivná znaménka, neboť ve vzorcích pro $\mathfrak{S}_i'$, $\overline{a_2'' a_2}$ platí současně buď znaménka horní (na př. pro spodní pasy) nebo znaménka spodní (na př. pro horní pasy). Přeneseme tedy pořadnice $\overline{a_2 a_2'}$, $\overline{a_2 a_2''} = -\sigma_i A_1'$ na touž stranu od osy $a_2 b_2$ a obdržíme mezi čarou $a_2 c_2'' b_2$ a čarou $a_2 m_2' b_2$ příčinkový obrazec síly S_i.

V prvém poli jest obojetná poloha n, pro kterou platí, jde-li o nosník souměrný,

$$\frac{n}{n'} = \frac{\overline{a_2 n_2}}{\overline{n_2 c_2}} = \frac{\overline{a_2 a_2'}}{\overline{c_2' c_2''}} = \frac{\overline{a_2 a_2'}}{\frac{1}{2}(\overline{a_2 a_2''} - \overline{a_2 a_2'})} = \frac{2\,\mathfrak{S}_i'}{-\sigma_i A_1' - \mathfrak{S}_i'} = \frac{2}{\frac{1}{2}A_1' - 1} = \frac{2\,(l_1 \operatorname{tg} \delta_1 - s_0)}{s_0}.$$

Z toho plyne

$$\frac{n'}{n + n'} = \frac{s_0}{2\,l_1 \operatorname{tg} \delta_1 - s_0}$$

a dosazením $n + n' = l_1$ vyjde

$$n' = \frac{l_1 s_0}{2\,l_1 \operatorname{tg} \delta_1 - s_0}.$$

Polohu n sestrojíme, protneme-li prodlouženou osu pasu D_2 se svislicí bodu b v bodě b_0 a spojnici $b_0 c$ s prodlouženou osou pasu D_1. Neboť pak jest

$$\overline{b\,b_0} = l_2 \operatorname{tg} \delta_1 - s_0 = l_1 \operatorname{tg} \delta_1 - s_0, \qquad \overline{n_1 c} = s_0 - n' \operatorname{tg} \delta_1,$$

$$n' = \overline{n\,n_1} = \overline{n_1 c} \cdot \frac{\overline{c\,b}}{\overline{b\,b_0}} = \frac{(s_0 - n' \operatorname{tg} \delta_1)\, l_2}{l_1 \operatorname{tg} \delta_1 - s_0},$$

z čehož plyne pro n' hodnota stanovená. Obojetná poloha n nezávisí na poloze prutu i přidruženého středu momentového, je tedy společná všem prutům v prvém poli.

Reakci A počítáme podle vzorce (185), t. j.

$$A = \mathfrak{A} + \alpha A'.$$

Příčinkovou čarou $\mathfrak{A}$ je přímka $a_3' b_3$, jež má ve svislici bodu a pořadnici $\overline{a_3 a_3'} = 1$. Příčinková čára $a_3 c_3'' b_3$ hodnoty $\alpha A'$ je stanovena ve svislici bodu a pořadnicí $\overline{a_3'' a_3} = \alpha A_1' = -\frac{1}{2}A_1'$. Pořadnice ve svislici bodu a mají poměr

$$\frac{\overline{a_3 a_3'}}{\overline{a_3 a_3''}} = \frac{1}{-\alpha A_1'} = \frac{2}{A_1'} = \frac{\overline{a_2 a_2'}}{\overline{a_2 a_2''}};$$

z toho plyne, že je bod n obojetnou polohou též pro reakci A. Na svislici bodu n pak seče přímka $a_3' b_3$ lomenou čáru $a_3 c_3'' b_3$; mezi oběma těmito čarami je příčinkový obrazec reakce A.

51. Methoda součtů momentových. Narýsujme k osovému mnohostranu $a\,b\,c\ldots$ obrazec pomocný $a'\,b'\,c'\ldots$ tak, aby všechny strany tohoto obrazce byly rovnoběžné se sdruženými pruty vyjma stranu sdruženou s prutem s_i. Osová síla prutu s_i se pak určí ze vzorce[1])

$$S_i = \frac{\Sigma\,(P_m)_{m'}}{r_i'' - r_i'}, \tag{186}$$

v němž znamená $(P_m)_{m'}$ statický moment vnější síly P_m ve styčném bodě m působící ke sdruženému bodu m' a r_i', r_i'' ramena osové síly S_i, kterou nahrazujeme prut s_i v obou koncových bodech, vzhledem k bodům, jež jsou v obrazci $a'\,b'\,c'\ldots$ sdruženy s koncovými body prutu s_i. Neznámou sílu S_i pokládáme za tah a zvolíme moment síly S_i na rameni r_i' za kladný; podle toho určujeme pak znaménka ostatních momentů statických. Vzorec (186) předpokládá, že jsou ramena r_i', r_i'' po téže straně osy prutu s_i; kdyby tomu tak nebylo, dosazovali bychom rámě r_i'' se znaménkem záporným. K silám vnějším patří zde ovšem i reakce podporové.

[1]) Viz prvý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1940), str. 178 a d.

Za svislých sil vnějších dosaďme

$$(P_m)_{m'} = P_m \cdot r_m,$$

znamenajíce r_m vodorovnou vzdálenost bodu m' od paprsku P_m. Rámě r_m jest dosazovati algebraicky tak, aby součin $P_m \cdot r_m$ dal moment správného znaménka. Otáčí-li tedy síla P_m kolem bodu m' v tom smyslu jako síla S_i na rameni r_i', dosadíme r_m kladně, v opačném případě záporně. Pak platí vzorec

$$S_i = \frac{\Sigma P_m r_m}{r_i'' - r_i'}. \tag{187}$$

Lze ovšem též určitý smysl ramen r_m zvoliti za kladný a předložiti momentu $P_m r_m$ příslušné znaménko.

Nechť jde o prutovou soustavu prostě podepřenou na koncích, a to v bodě a pevně, v bodě b posouvatelně po vodorovné. Vyšetřujíce příčinkovou čáru osové síly S_i, mysleme si na soustavě jediné svislé břímě P ve styčném bodě m, jenž měj k bodům a, b vodorovné úsečky x, x'. Břímě P vyvodí v podporách a, b svislé reakce

$$P_a = P\frac{x'}{l}, \qquad P_b = P\frac{x}{l},$$

znamená-li l vodorovnou vzdálenost paprsků P_a, P_b. Pak vychází

$$S_i = \frac{P r_m - P_a r_a - P_b r_b}{r_i'' - r_i'} = \frac{P}{r_i'' - r_i'}\left(r_m - \frac{r_a x' + r_b x}{l}\right),$$

bereme-li zde ramena r_a, r_b kladně v témž smyslu jako rámě r_m. Úsek

$$r_m' = \frac{r_a x' + r_b x}{l}$$

jest určen ve svislici bodu m pořadnicí přímky, jež spojuje koncové body pořadnic r_a, r_b, přenesených od libovolné osy na svislice podporové. Znamenejme

$$r_m - r_m' = m, \qquad r_i'' - r_i' = n_i; \tag{188a}$$

pak jest

$$S_i = P\frac{m}{n_i}. \tag{188b}$$

Úseky m jsou rovny svislým pořadnicím mezi přímkou, stanovenou v podporách pořadnicemi r_a, r_b, a lomenou čarou, jež má ve svislicích styčných bodů pořadnice r_m. Platí to i pro polohy břemene P mimo styčné body, přenáší-li se na soustavu prutovou zatížení do styčných bodů, neboť pak je příčinkovou čarou mezi každými dvěma sousedními body styčnými přímka. Obrazec o pořadnicích m je podle vzorce (188b) příčinkovým obrazcem síly S_i.

Příklad 36. Vyšetřme příčinkové čáry některých osových sil prutů v soustavě naznačené v obr. 172, působí-li na ni svislé zatížení, jež se přenáší do spodních styčných bodů.

Styčné body soustavy jsou $a, b, c \ldots n$. Začněme prutem $s_1 \equiv a\,i$; sestrojíme obrazec $a_1' b_1' c_1' \ldots$ tak, aby všechny jeho strany vyjma $a_1' i_1'$ byly rovnoběžné se sdruženými stranami (osami prutů) mnohostranu osového $a\,b\,c \ldots$ Zvolíme na př. $b_1' \equiv b$, $n_1' \equiv n$, $l_1' \equiv n$ a určíme přímkami $n_1' e_1' \parallel n\,e$, $b_1' e_1' \parallel b\,e$ bod $e_1' \equiv e$, přímkami $l_1' d_1' \parallel l\,d$, $e_1' d_1' \parallel e\,d$ bod $d_1' \equiv e$, přímkami $b_1' k_1' \parallel b\,k$, $l_1' k_1' \parallel l\,k$ bod k_1'; obdobně stanovíme z bodů k_1', d_1' bod $c_1' \equiv d$, z bodů e_1', k_1' bod i_1', z bodů i_1', d_1' bod $h_1' \equiv i_1'$, z bodů c_1', h_1' bod f_1', z bodů f_1', h_1' bod g_1' a z bodů f_1', c_1' bod a_1'. Rámě r_1' budiž kolmice, spuštěná z bodu i_1' na osu prutu s_1, a r_1'' kolmice, spuštěná z bodu a_1' na osu prutu s_1. Síla S_1 v bodě i, jsouc tahem, otáčela by kolem bodu i_1' proti ručičkám hodinovým, což je kladný smysl momentu statického v tomto případě. Břemena P_c, P_d mají k bodům c_1', d_1' kladný moment, jsou tedy ramena $r_c = \overline{c\,c_1'}$, $r_d = \overline{d\,d_1'}$ vpravo kladná. V témž smyslu

pokládejme za kladné rámě $r_a = \overline{a\,a'_1}$ a sestrojme z pořadnic $\overline{a'_1 a''_1} = r_a$, $\overline{c''_1 c'''_1} = r_c$, $\overline{d''_1 d'''_1} = r_d$, $r_e = 0$, $r_b = 0$ lomenou čáru $a'''\,c'''_1\,d'''_1\,e''_1\,b''_1$, kterou vztahujeme k přímce $a'''_1\,b''_1$. Určíme tím pořadnice m, jež jsou nad (pod) přímkou $a'''_1\,b''_1$ kladné (záporné). Podle vzorce (188^b) jest

$$S_1\,n_1 = S_1\,(r''_1 - r'_1) = P\,m\,;$$

obrazec o pořadnicích m je tedy příčinkovým obrazcem součinu $S_1\,(r'' - r')$.

Obdobně řešíme u ostatních prutů. Kdyby šlo o osovou sílu S_2, určili bychom jako dříve obrazec $a'_2\,b'_2\,c'_2\,\ldots$; zvolíme-li $b'_2 \equiv b'_1$, $l'_2 \equiv l'_1$, $n'_2 \equiv n'_1$, vyjde $e'_2 \equiv e'$, $d'_2 \equiv d'_1$, $k'_2 \equiv k'_1$, $i'_2 \equiv i'_1$, $c'_2 \equiv c'_1$, $h'_2 \equiv h'_1$, $f'_2 \equiv f'_1$, načež stanovíme pouze přímkami $i_2\,a'_2 \parallel i\,a$, $f'_2\,a'_2 \parallel f\,a$ bod $a'_2 \equiv f'_1$. Síla S_2 má k bodům a'_2, c'_2 ramena $r''_2 = \overline{a'_1\,a'_2}$, $r'_2 = 0$. Síla S_2 na rameni r''_2, t. j. síla S_2 v bodě a působící, má dáti k bodu a'_2 záporný moment; kladný by tu pak byl moment, jenž otáčí ve smyslu ručiček hodinových. Ramena r_a, r_c, r_d, r_e, r_b jsou zde táž jako pro sílu S_1, mají však protivná znaménka. Ponecháme-li táž znaménka jako u prutu s_1, bude platiti podle vzorce (187)

$$S_1\,(r''_1 - r'_1) = \Sigma P_m\,r_m = -S_2\,r''_2,$$

což bychom odvodili též z rovnováhy sil působících na bod a. Příčinková čára součinu $S_1\,(r''_1 - r'_1)$ je tedy zároveň příčinkovou čarou hodnoty $-S_2\,r''_2$ a

$$S_2 = -P\frac{m}{n_2},$$

je-li m příčinková pořadnice součinu

$$S_1\,(r''_1 - r'_1) \text{ a } n_2 = r''_2.$$

Jde-li o sílu S_8, zvolme $b'_8 \equiv b'_1$, $l'_8 \equiv l'_1$, $n'_8 \equiv n'_1$; pak bude $e'_8 \equiv e'_1$, $d'_8 \equiv d'_1$, $k'_8 \equiv k'_1$, $i'_8 \equiv i'_1$, $c'_8 \equiv c'_1$. Dále sestrojíme přímkami $i'_8\,a'_8 \parallel i\,a$, $c'_8\,a'_8 \parallel c\,a$ bod $a'_8 \equiv c$, obdobně z bodů a'_8, c'_8 bod f'_8 a z bodů i'_8, f'_8 bod $h'_8 \equiv f'_8$. Poněvadž jest $d'_1 \equiv d'_8$, není spojnice $d'_8\,h'_8$ rovnoběžná s $d\,h$. Znamenejme r'' kolmici spuštěnou z bodu $d'_8 \equiv d'_1$ na prodlouženou osu $d\,h$; pak jest $r'_8 = 0$. Síla S_8 v bodě d, je-li tahem, otáčí kolem bodu d'_1 jako ručičky na hodinách, což je záporný smysl momentový. Pak jsou ramena r_m kladná, otáčí-li břímě P_m kolem bodu m' proti ručičkám hodinovým, tedy je-li bod m' vpravo od paprsku P_m. Ramena $r_a = \overline{a\,a'_8}$, $r_c = \overline{c\,c'_1}$, $r_d = \overline{d\,d'_1}$ jsou zde kladná a $r_e = 0$, $r_b = 0$. Z pořadnic $r_a = a'_8\,a'''_8$, $r_c = c''_8\,c'''_8$, $r_d = d''_8\,d'''_8$, $r_e = 0$, $r_b = 0$ sestrojíme lomenou čáru $a'''_8\,c'''_8\,d'''_8\,e'_8\,b''_8$, kterou vztahujeme ke spojnici $a''_8\,b''_8$, nad (pod) níž jsou pořadnice kladné (záporné). Znamenáme-li pořadnice tohoto obrazce m, jest

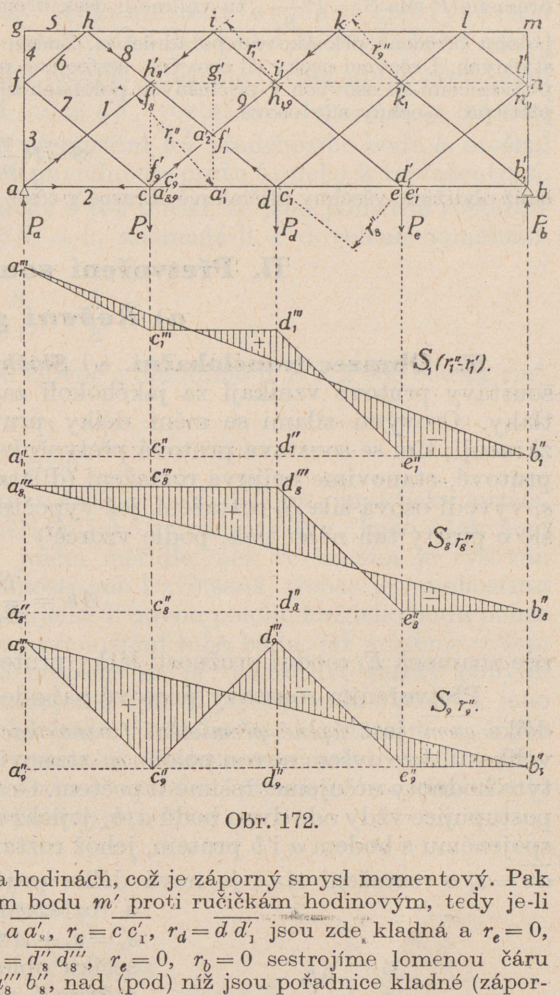
$$S_8 = P\frac{m}{n_8}, \text{ kde } \quad n_8 = r''_8.$$

Obrazec o pořadnicích m je příčinkovým obrazcem součinu $S_8\,r''_8$.

Také osovou sílu S_9 lze řešiti obdobně. Zvolme $b'_9 \equiv b'_1$, $l'_9 \equiv l'_1$, $n'_9 \equiv n'_1$ a sestrojme pak body $e'_9 \equiv e'_1$, $d'_9 \equiv d'_1$, $k'_9 \equiv k'_1$, $i'_9 \equiv i'_1$, $h'_9 \equiv h'_1$, dále přímkami $i'_9\,a'_9 \parallel i\,a$, $d'_9\,a'_9 \parallel d\,a$ bod $a'_9 \equiv c$, z bodů h'_9, a'_9 bod $f'_9 \equiv c$ a z bodů f'_9, a'_9 bod $c'_9 \equiv c$. Spojnice $c'_9\,k'_9$ není rovnoběžná s osou prutu $c\,k$, lze tedy určiti sílu S_9 podle vzorce (187). K bodu $k_9 \equiv k'_1$ má síla S_9 rámě r''_9, k bodu c'_9 rámě $r'_9 = 0$. Moment síly S_9, jež působí v bodě k a je tahem, k bodu k'_1 má býti záporný; kladný je tedy moment, jenž otáčí ve smyslu ručiček hodinových. Sdružené body jsou zde vpravo od paprsků břemen, jsou tedy ramena $r_a = \overline{a\,a'_9}$, $r_d = \overline{d\,d'_9} = \overline{d\,d'_1}$ záporná a ostatní jsou $r_c = 0$, $r_e = 0$, $r_b = 0$. Přenesme $r_a = \overline{a''_9\,a'''_9}$, $r_d = \overline{d''_9\,d'''_9}$ a sestrojme lomenou čáru $a'''_9\,c''_9\,d'''_9\,e''_9\,b''_9$, mezi níž a přímkou $a''_9\,b''_9$ je v paprsku pohyblivého břemene P pořadnice m, kladná (záporná) pod (nad) přímkou $a''_9\,b''_9$. Tu jest

$$S_9 = P\frac{m}{n_9}, \quad \text{kde} \quad n_9 = r''_9.$$

Pořadnice m jsou příčinkovými pořadnicemi součinu $S_9\,n_9 = S_9\,r''_9$.



Obr. 172.

Danou soustavu lze též řešiti tak, že stanovíme příčinkový obrazec jediné síly osové methodou součtů momentových. Pak určíme příčinkové pořadnice ostatních sil osových, řešíme-li osové síly ve všech prutech pro břímě P působící postupně ve všech styčných bodech. Určíme-li na př. methodou součtů momentových příčinkový obrazec síly S_1, z něhož plyne pro libovolnou polohu břemene P síla $S_1 = P\frac{m}{n_1}$, tu volíme-li úsek břemene $P = n_1$, jest úsek síly S_1 dán pro libovolnou polohu břemene příčinkovou pořadnicí m. Známe-li sílu S_1, určíme ostatní síly methodou bodů styčných. Určovací úseky sil osových, sestrojené pro různé polohy břemene P, jsou příčinkovými pořadnicemi sil osových v příslušných polohách břemene. Znamenáme-li příčinkové pořadnice m, platí pro všechny síly osové

$$S = P\frac{m}{n_1},$$

čímž obdržíme všechny příčinkové obrazce v témž měřidle.

II. Přetvoření soustav prutových.

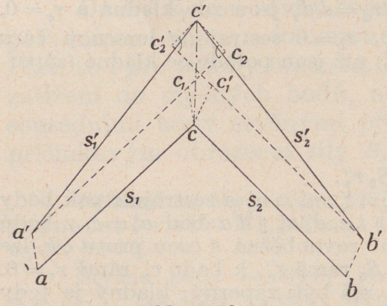
a) Řešení grafické.

52. Obrazec translokační. *α) Složky úplného přemístění.* Ve všech prutech soustavy prutové vznikají za jakéhokoli zatížení osové síly, jež jsou buď tahy nebo tlaky. Osovými silami se mění délky prutů: pruty tažené se prodlužují, tlačené zkracují; tím se soustava prutová přetvořuje. Určujíce *přetvoření (deformaci)* soustavy prutové, stanovíme nejprve roztažení (dilataci) všech prutů. V obecném prutu délky s_i vyvodí osová síla S_i roztažení, jež vypočteme, nedbajíce vlastní váhy prutu, jako by šlo o prostý tah nebo tlak, podle vzorce[1])

$$\Delta s_i = \frac{S_i s_i}{E_i U_i}; \tag{189}$$

zde znamená E_i modul pružnosti látky prutové a U_i obsah průřezu prutového.

Přetvořením soustavy prutové nabude libovolný styčný bod m *nové polohy* m'; délka $\overline{mm'}$ jest *úplné přemístění (translokace)* bodu m, jež by bylo dáno směrem a velikostí. Lze ovšem novou polohu m' stanoviti též změnami Δx, Δy souřadnic bodu m; tyto hodnoty určujeme, řešíme-li počtem. Graficky řešíme přetvoření soustavy prutové, postupujíce vždy ode dvou bodů a, b, jejichž nové polohy a', b' známe, k bodu třetímu c, spojenému s bodem a i b prutem, jehož roztažení je stanoveno. Změní-li se délka prutu $\overline{ac} = s_1$ o roztažení Δs_1, je nová délka prutu $s_1' = s_1 + \Delta s_1$; podobně z délky $\overline{bc} = s_2$ a roztažení Δs_2 určíme novou délku druhého prutu $s_2' = s_2 + \Delta s_2$. Nová poloha c' bodu c je pak v průsečíku oblouku kruhového, opsaného z bodu a' poloměrem s_1', s obloukem kruhovým, jehož střed je v bodě b' a poloměr se rovná s_2' (obr. 173).



Obr. 173.

Pohyb prutu z *původní polohy* ac do nové polohy $a'c'$ lze si představiti tak, že se prut ac nejdříve posune rovnoběžně a beze změny délky do polohy $a'c_1$, pak se roztáhne o délku $\Delta s_1 = \overline{c_1 c_2}$ a konečně se otočí kolem bodu a' do polohy $a'c'$. Tyto tři pohyby nazýváme *posunutím (translací)*, *roztažením (dilatací)* a *otočením (rotací)*. Tytéž pohyby koná bod c, přecházíme-li k němu z bodu a po prutu ac; z nich se pak skládá úplné přemístění $\overline{cc'}$ bodu c. Posunutí bodu c je $\overline{cc_1} \# \overline{aa'}$; jelikož je $\overline{aa'}$ úplné přemístění bodu a, rovná se posunutí následujícího bodu c úplnému přemístění předchozího bodu a, od něhož jdeme k bodu c spojenému s bodem a

[1]) Viz *Jos. Šolin* „Základy technické nauky o pružnosti a pevnosti“ (Praha 1904), str. 51.

prutem. Roztažení prutu $\Delta s_1 = \overline{c_1 c_2}$ počítáme z osové síly a rozměrů průřezových podle vzorce (189); je-li prut tažen, přenášíme ovšem Δs_1 ve smyslu zvětšení, je-li prut tlačen, ve smyslu zmenšení původní délky s_1. Otočení $c_2 c'$ je kruhovým obloučkem o středu a'; ve skutečnosti bývá přetvoření velmi malé, i lze oblouček $c_2 c'$ nahraditi tečnou, tedy kolmicí k poloměru $a' c_2 \parallel a c$. Můžeme tedy otočení $c_2 c'$ rýsovati přibližně jakožto kolmici k původní ose prutu $a c$ nebo k roztažení $c_1 c_2$.[1])

Jdeme-li od bodu b k bodu c spojenému prutem, můžeme rovněž úplné přemístění bodu c složiti ze tří pohybů: posunutí $\overline{c c_1'} \# \overline{b b'}$, roztažení $\Delta s_2 = \overline{c_1' c_2'}$ a otočení $c_2' c'$. Posunutí $\overline{c c_1'}$ se rovná opět úplnému přemístění $\overline{b b'}$ předchozího bodu b, otočení $c_2' c'$ rýsujeme pak přibližně jakožto kolmici k původní ose prutu $b c$ nebo k roztažení $c_1' c_2'$.

Řešíme-li takto, setkáváme se prakticky s tou obtíží, že jsou poměrná roztažen prutů velmi malá. Neboť jest nejvýše $S/U = k$, znamená-li k dovolené namáhání, tedy podle vzorce (189)

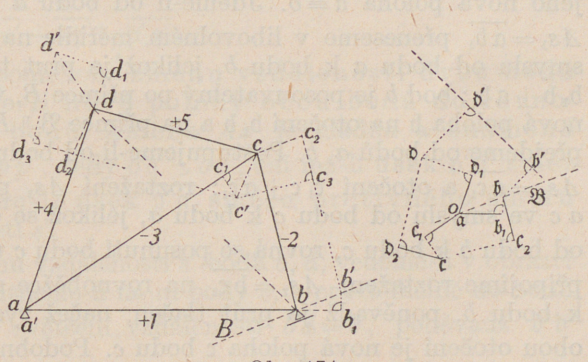
$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{S}{E U} = \frac{k}{E}.$$

Zvolíme-li na př. pro ocel hodnotu $k = 1000$ kg/cm² a dosadíme-li $E = 2\,000\,000$ kg/cm², dostaneme poměr

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{1}{2000},$$

což je tak malé, že by i ve velkém měřidle roztažení Δs proti délkám s prakticky mizela, kdybychom přenášeli roztažení v témž měřidle jako původní délky. Toho však není třeba; roztažení Δs můžeme přenášeti v jiném měřidle, než ve kterém je rýsován mnohostran osový, na př. ve skutečné velikosti neb i zvětšená, třebas je mnohostran osový rýsován zmenšený. Neboť stačí, vztahujeme-li novou polohu každého bodu pouze k jeho poloze původní; tím již určíme úplné přemístění toho bodu, jež můžeme ovšem rýsovati v jakémkoli měřidle. V obr. 173 můžeme na př. jednotlivé složky pohybu bodu c přenášeti v libovolném měřidle, vztahujeme-li nové polohy bodu c pouze k jeho poloze původní; nesmíme tedy nové polohy bodu c vztahovati k ostatním styčným bodům soustavy prutové, což však nevadí, poněvadž vztahem nové polohy bodu k jeho původní poloze je dáno úplné přemístění bodu a úplnými přemístěními všech bodů styčných je nový tvar soustavy prutové úplně určen.

β) ***Postup řešení*** odvodíme na čtyrúhelníku $a b c d$ s jednou úhlopříčnou $a c$, jenž budiž podepřen v bodě a pevně, v bodě b posouvatelně do šikmé přímce B (obr. 174). Těmito *výminkami podporovými* je vázáno přetvoření soustavy; lze z nich zde přímo vycházeti, poněvadž jsou body a, b spolu spojeny prutem a od bodů a, b můžeme dále jíti k bodu c, který je s bodem a i b spojen prutem. Osové síly všech prutů buďtež známy; znaménka jsou připsána v obr. 174. Známe-li též průřezy prutů, určíme podle vzorce (189) roztažení Δs všech prutů.



Obr. 174.

Nová poloha a' pevného bodu a je totožná s polohou původní. Nová poloha b' bodu b musí býti na přímce B, po které se bod b posouvá; setrojíme ji, přejdeme-li

[1]) Přibližnost tohoto řešení jest asi téhož rázu, jako když, určujíce čáru ohybovou, v rovnici $\varrho = \frac{E J}{M}$ nahrazujeme $\varrho \doteq \pm \frac{1}{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2}}$, zanedbávajíce tedy v čitateli $\left(\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}\right)^2$ proti 1.

k bodu b od bodu a, s nímž je spojen prutem. Bod b koná trojí pohyb. Jeho posunutí se rovná úplnému přemístění bodu a, tedy zde nule; roztažení $\Delta s_1 = \overline{b\,b_1}$ prutu $a\,b$ přeneseme, poněvadž je prut tažen, ve smyslu $a\,b$ jakožto zvětšení délky prutu podle libovolného měřidla; otočení $b_1 b'$ rýsujeme pak jakožto kolmici k původní ose prutu $a\,b$ a tím určíme na přímce B novou polohu b'. Od bodů a, b, jejichž nové polohy známe, můžeme jíti k bodu c, jenž je spojen prutem s bodem a i s bodem b. Jdeme-li od bodu a, narýsujeme nejprve v bodě c posunutí rovné úplnému přemístění bodu a, tedy nule; dále přeneseme podle zvoleného měřidla na prut $a\,c$ jeho roztažení $\Delta s_3 = \overline{c\,c_1}$, a to ve smyslu od bodu c k bodu a, poněvadž je prut tlačen, čímž se zkracuje; konečně rýsujeme otočení $c_1 c' \perp a\,c$. Podobně postoupíme od bodu b k bodu c: posunutí bodu c se rovná úplnému přemístění bodu b, tedy $\overline{c\,c_2} \# \overline{b\,b'}$; roztažení $\Delta s_2 = \overline{c_2\,c_3}$ přeneseme podle měřidla na rovnoběžku s osou prutu ve smyslu od bodu c k bodu b, jelikož je prut $b\,c$ tlačen; otočení $c_3 c'$ rýsujeme pak kolmo k prutu $b\,c$, tedy kolmo k roztažení $c_2 c_3$. V průsečíku obou otočení $c_1 c'$ a $c_3 c'$ je nová poloha c' bodu c. Stejně určíme novou polohu bodu d z nových poloh a', c'. Jdeme-li od bodu a k bodu d, odpadá posunutí a zbývá roztažení $\Delta s_4 = \overline{d\,d_1}$ a otočení $d_1 d' \perp a\,d$; roztažení přenášíme zde ve smyslu $a\,d$, poněvadž je prut $a\,d$ tažen. Od bodu c postoupíme k bodu d, přeneseme-li posunutí $\overline{d\,d_2} \# \overline{c\,c'}$ a roztažení $\Delta s_5 = \overline{d_2\,d_3}$ na rovnoběžku s osou prutu $c\,d$ ve smyslu od bodu c k d, jelikož je prut tažen; pak rýsujeme otočení $d_3 d' \perp d_2 d_3$ a v průsečíku obou otočení dostaneme novou polohu d' bodu d.

Novou polohu každého bodu vztahujeme k jeho poloze původní a určíme tím úplná přemístění $\overline{a\,a'} = 0$, $\overline{b\,b'}$, $\overline{c\,c'}$, $\overline{d\,d'}$. Úplná přemístění styčných bodů stanoví nový tvar soustavy; není pak třeba vztahovati novou polohu kteréhokoli bodu styčného k polohám jiného bodu styčného a lze proto obrazce, kterými určujeme nové polohy bodů styčných, rýsovati v libovolném měřidle, i v jiném než mnohostran osový.[1])

Obrazce, rýsované v mnohostranu osovém u jednotlivých bodů styčných, mají některé délky stejné a rovnoběžné, jako $\overline{c\,c_2} \# \overline{b\,b'}$, $\overline{d\,d_2} \# \overline{c\,c'}$. Řešení zjednodušíme, uvedeme-li všechny tyto obrazce do takové polohy, aby se stejné a rovnoběžné délky kryly. Rýsujeme tedy přetvoření ve zvláštním *obrazci translokačním*, v jehož počátku o si myslíme sjednoceny původní polohy všech bodů styčných. Bod a, jsa pevný, zůstane v poloze původní; v obrazci translokačním (obr. 174) bude tedy jeho nová poloha $\mathfrak{a} \equiv o$. Jdeme-li od bodu a k bodu b, odpadá posunutí; roztažení $\Delta s_1 = \overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1}$ přeneseme v libovolném měřidle na rovnoběžku s osou prutu $a\,b$, a to ve smyslu od bodu a k bodu b, jelikož je prut tažen. Bodem $\mathfrak{b}_1$ rýsujeme pak otočení $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b} \perp \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1$; bod b je posouvatelný po přímce B, v obrazci translokačním bude tedy jeho nová poloha $\mathfrak{b}$ na otočení $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}$ a na přímce $\mathfrak{B} \parallel B$, vedené původní polohou o. K bodu c přejdeme od bodů a, b. Postupujeme-li od bodu a, odpadá posunutí a zbývá roztažení $\Delta s_3 = \overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}_1}$ a otočení $\mathfrak{c}_1 \mathfrak{c} \perp \mathfrak{a}\,\mathfrak{c}_1$; roztažení Δs_3 přenášíme na rovnoběžku s osou prutu $a\,c$ ve smyslu od bodu c k bodu a, jelikož se délka prutu tlakem zkracuje. Jdeme-li od bodu b k bodu c, rovná se posunutí bodu c úplnému přemístění $\overline{o\,\mathfrak{b}}$ bodu b; k tomu připojíme roztažení $\Delta s_2 = \overline{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}_2}$ na rovnoběžce s osou prutu $b\,c$ ve smyslu od bodu c k bodu b, poněvadž je prut tlačen, načež rýsujeme otočení $\mathfrak{c}_2 \mathfrak{c} \perp \mathfrak{b}\,\mathfrak{c}_2$. V průsečíku obou otočení je nová poloha $\mathfrak{c}$ bodu c. Podobně postupujeme od bodů a, c k bodu d. Jdeme-li od bodu a, odpadá posunutí a zbývá roztažení $\Delta s_4 = \overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}_1}$, jež přeneseme na rovnoběžku s osou prutu $a\,d$ ve smyslu od bodu a k bodu d, jelikož je prut tažen; k tomu připojíme otočení $\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d} \perp \mathfrak{a}\,\mathfrak{d}_1$. Postupujeme-li od bodu c k bodu d, rovná se posunutí bodu d úplnému přemístění $\overline{o\,\mathfrak{c}}$ bodu c; k tomu přistupuje roztažení $\Delta s_5 = \overline{\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}_2}$,

[1]) V podstatě tímto způsobem řešil přetvoření soustav prutových *V. Bukovský* v pojednání „O grafickém určení deformace zatížených konstrukcí příhrádkových“ („Zprávy Spolku architektů a inženýrů v království Českém,“ r. 1880, str. 4 a d.).

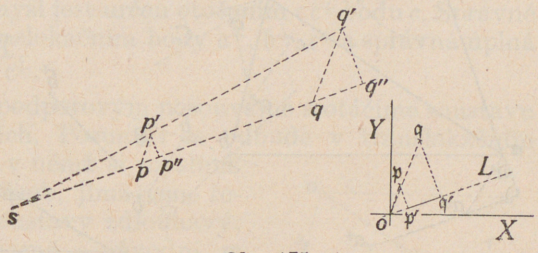
přenesené rovnoběžně s osou prutu cd ve smyslu od bodu c k bodu d, je-li prut tažen, a otočení $\mathfrak{d}_2\mathfrak{d} \perp c\mathfrak{d}_2$. V průsečíku obou otočení je nová poloha $\mathfrak{d}$ bodu d.

Rýsujeme-li obrazec translokační, nemusíme vůbec mluviti o posunutí; přenášíme roztažení každého prutu rovnoběžně s jeho osou z nové polohy toho bodu, od něhož jdeme k bodu spojenému s ním tímto prutem. V obrazci translokačním jsou dána úplná přemístění styčných bodů úseky, jejichž počátkem je původní poloha všech bodů o, koncem nová poloha bodu, o nějž jde; jsou to úseky $\overline{o\mathfrak{a}}$, $\overline{o\mathfrak{b}}$, $\overline{o\mathfrak{c}}$, $\overline{o\mathfrak{d}}$.[1])

γ) ***Změna vzdálenosti dvou bodů prutem nespojených.*** Z translokačního obrazce lze řešiti všechny úlohy, jež se vztahují k přetvoření soustavy prutové. Odvodíme, jak se určí změna vzdálenosti $\overline{pq} = s'$ dvou styčných bodů p, q, jež nejsou prutem spojeny (obr. 175). Kdybychom jako v obr. 174 určili v mnohostranu osovém úplná přemístění $\overline{pp'}$, $\overline{qq'}$ obou bodů p, q a znázornili je v měřidle osového mnohostranu, byla by hledaná změna

$$\Delta s' = \overline{p'q'} - \overline{pq}.$$

Otočme body p', q' kolem průsečíku s přímek pq, $p'q'$ do původní spojnice pq, tedy přenesme $\overline{p'q'} = \overline{p''q''}$; pak jest



Obr. 175.

$$\Delta s' = \overline{p''q''} - \overline{pq} = \overline{p''q} + \overline{qq''} - (\overline{pp''} + \overline{p''q}) = \overline{qq''} - \overline{pp''}.$$

Přetvoření jsou ve skutečnosti velmi malá; kruhový oblouček $p'p''$ o středu s lze proto přibližně nahraditi kolmicí ke spojnici pq a oblouček $q'q''$ rovněž. Pak je $\overline{pp''}$, $\overline{qq''}$ pravoúhlým průmětem úplného přemístění $\overline{pp'}$, $\overline{qq'}$ do spojnice pq. Změna vzdálenosti dvou bodů prutem nespojených se tedy rovná rozdílu průmětů úplného přemístění bodu koncového a počátečního do rovnoběžky s původní spojnicí obou bodů.

V obrazci translokačním by byla úplná přemístění dána úseky $\overline{o\mathfrak{p}} \# \overline{pp'}$, $\overline{o\mathfrak{q}} \# \overline{qq'}$. Vedeme-li počátkem o přímku $L \parallel pq$ a promítneme-li do ní obě přemístění přímkami $\mathfrak{p}\mathfrak{p}' \perp L$, $\mathfrak{q}\mathfrak{q}' \perp L$, vyjde $\overline{pp''} = \overline{o\mathfrak{p}'}$, $\overline{qq''} = \overline{o\mathfrak{q}'}$ a

$$\Delta s' = \overline{o\mathfrak{q}'} - \overline{o\mathfrak{p}'} = \overline{\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'}.$$

V translokačním obrazci určíme podle toho změnu vzdálenosti dvou bodů prutem nespojených, promítneme-li nové polohy obou bodů do rovnoběžky s původní spojnicí obou bodů. Změna $\Delta s'$ je kladná a znamená zvětšení vzdálenosti s', je-li $\overline{qq''} > \overline{pp''}$, tedy $\overline{o\mathfrak{q}'} > \overline{o\mathfrak{p}'}$, čili má-li úsek $\overline{\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'}$ směr souhlasný se vzdáleností pq; vyjde-li úsek $\overline{\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'}$ směru protivného směru pq, znamená to zmenšení vzdálenosti s'.

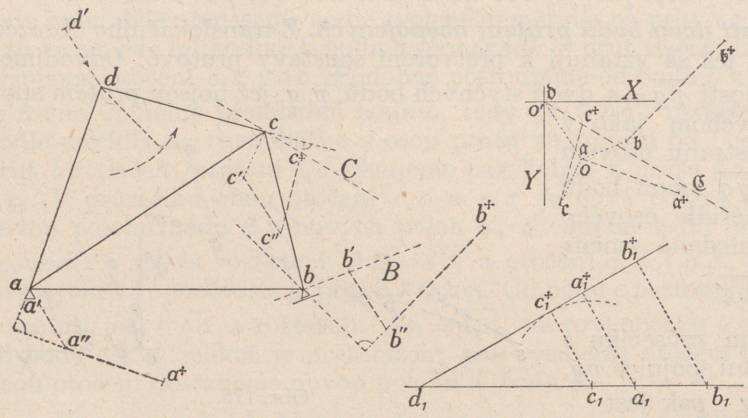
Podle toho určíme v obr. 174 změnu vzdálenosti s' bodů b, d, vedeme-li v obrazci translokačním přímku $\mathfrak{b}'\mathfrak{d}' \parallel bd$ a promítneme-li na ni body $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ pravoúhelně do bodů $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{d}'$. Pak jest $\Delta s' = \overline{\mathfrak{b}'\mathfrak{d}'}$ a znamená zvětšení vzdálenosti $\overline{bd} = s'$, poněvadž $\mathfrak{b}'\mathfrak{d}'$ má týž smysl jako bd.

δ) ***Přechod od zatímních výminek podporových k výminkám původním.*** Často nelze užíti daných výminek podporových, na př. nejsou-li podporové body spojeny prutem. Tu zavádíme příhodné *výminky zatímní*, za nichž lze přetvoření soustavy prutové pohodlně řešiti, a vracíme se pak od nich k původním výminkám podporovým, jak odvodíme zase na čtyrúhelníku $abcd$ s jednou úhlopříčnou (obr. 176). Z výminky,

[1]) Obrazce translokační v tomto tvaru, jež slovou též *obrazci Williotovými*, odvodil prvý *Williot* v „Notions pratiques sur la Statique graphique“ (Paříž 1887).

že je bod a pevný, bod b posouvatelný po přímce B, určili bychom jako v obr. 174 v mnohostranu osovém nové polohy $a' \equiv a$, b', c', d'. Pokládejme nyní tyto výminky za zatímní a vraťme se k původním výminkám, že je na př. bod d pevný a bod c posouvatelný po přímce C.

Nový tvar soustavy prutové jest úplně dán novými délkami prutů a nezávisí nikterak na výminkách podporových. Vracíme-li se tedy k původním výminkám podporovým, nesmíme změniti nový tvar soustavy, daný vzájemnou polohou bodů a', b', c', d'. Můžeme pak obrazec $a'b'c'd'$ pouze jako celek posouvati a otáčeti. Výminec, že bod d má býti pevný, vyhovíme, neměníce tvaru obrazce $a'\,b'\,c'\,d'$, posuneme-li všecky body obrazce $a'\,b'\,c'\,d'$ rovnoběžně o délku $\overline{d'\,d} \# \overline{a'\,a''} \# \overline{c'\,c''} \# \overline{b'\,b''}$.



Obr. 176.

Je-li bod c posouvatelný po přímce C, má býti správná nová poloha c^+ bodu c na přímce C; abychom tomu vyhověli, otočíme obrazec $a''\,b''\,c''\,d$ kolem bodu d, jenž má zůstati na svém místě, tak, aby bod c'' přišel na přímku C. Poněvadž se tvar obrazce $a''\,b''\,c''\,d$ nemá měniti, otočíme všechny body tohoto obrazce kolem bodu d o týž středový úhel. Body a'', b'', c'' opisují za tohoto otáčení obloučky kruhové, jejichž společným středem je bod d. Ve skutečnosti bývá přetvoření velmi malé, lze proto obloučky nahraditi přibližně tečnami, t. j. kolmicemi k poloměrům, a to k poloměrům původním $d\,a$, $d\,b$, $d\,c$, jež se v praktických případech velmi málo liší od nových poloměrů $d\,a''$, $d\,b''$, $d\,c''$. Rýsujeme tedy otočení $a''\,a^+ \perp d\,a$, $b''\,b^+ \perp d\,b$, $c''\,c^+ \perp d\,c$ a v průsečíku otočení $c''\,c^+$ s přímkou C dostaneme správnou novou polohu c^+ bodu c. Všechny body obrazce $a''\,b''\,c''\,d$ otáčíme kolem bodu d o týž středový úhel, i mají se otočení těch bodů k sobě jako jejich poloměry, a to velmi přibližně jako poloměry původní, tedy

$$\overline{c''\,c^+} : \overline{b''\,b^+} : \overline{a''\,a^+} = \overline{d\,c} : \overline{d\,b} : \overline{d\,a}.$$

Známe délky poloměrů a otočení $\overline{c''\,c^+}$; ostatní otočení určíme na základě úměrnosti na př. redukčním úhlem. Přeneseme-li $\overline{d\,a} = \overline{d_1\,a_1}$, $\overline{d\,b} = \overline{d_1\,b_1}$, $\overline{d\,c} = \overline{d_1\,c_1}$ a opíšeme-li z bodu c_1 poloměrem $\overline{c''\,c^+} = \overline{c_1\,c_1^+}$ kruhový oblouk, k němuž vedeme z bodu d_1 tečnu, určí kolmice k ní z bodů a_1, b_1 hledaná otočení $\overline{a_1\,a_1^+} = \overline{a''\,a^+}$, $\overline{b_1\,b_1^+} = \overline{b''\,b^+}$. Tato otočení naneseme z bodů a'', b'' ve smyslu, jejž dává otočení bodu c. Tak určíme správné nové polohy a^+, b^+, c^+ a správná úplná přemístění $\overline{a\,a^+}$, $\overline{b\,b^+}$, $\overline{c\,c^+}$ bodů a, b, c.

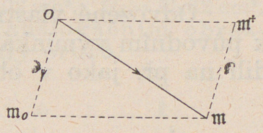
Proveďme totéž v obrazci translokačním (obr. 176), v němž jsme určili ze zatímních výminek zatímní nové polohy $\mathfrak{a} \equiv o$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ bodů a, b, c, d. Vracíme-li se k původním výminkám, že je bod d pevný, c posouvatelný po přímce C, měli bychom nejprve, abychom vyhověli prvé výmince a nezměnili vzájemné polohy styčných bodů, posunouti všechny zatímní nové polohy $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ o délku $\overline{\mathfrak{d}\,o}$ tak, aby se nová poloha bodu d ztotožnila v translokačním obrazci s jeho původní polohou o. Místo toho můžeme kratčeji počátek o translokačního obrazce přeložiti do bodu $o' \equiv \mathfrak{d}$, čímž vyřídíme rázem posunutí celé soustavy; dále znamená již bod o' v obrazci translokačním původní polohu všech bodů styčných.

Bod c se posouvá po přímce C; v obrazci translokačním má tedy býti správná nová poloha $\mathfrak{c}^+$ na přímce $\mathfrak{C} \parallel C$, vedené původní polohou o'. Tomu vyhovíme, otočíme-li přetvořenou soustavu kolem pevného bodu d tak, aby bod c přišel na přímku C; otáčíme všechny body o týž středový úhel, aby se tvar soustavy neměnil. Otočení rýsujeme jakožto kolmice k původním poloměrům, tedy v translokačním obrazci vedeme $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^+ \perp da$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}^+ \perp db$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}^+ \perp dc$; v průsečíku otočení $\mathfrak{c}\mathfrak{c}^+$ s přímkou $\mathfrak{C}$ je v obrazci translokačním správná nová poloha $\mathfrak{c}^+$ bodu c. Z otočení $\overline{\mathfrak{c}\mathfrak{c}^+}$ bodu c určíme otočení ostatních bodů jako dříve podle úměry

$$\overline{\mathfrak{c}\mathfrak{c}^+} : \overline{\mathfrak{b}\mathfrak{b}^+} : \overline{\mathfrak{a}\mathfrak{a}^+} = \overline{dc} : \overline{db} : \overline{da}$$

redukčním úhlem a přeneseme $\overline{a_1 a_1^+} = \overline{\mathfrak{a}\mathfrak{a}^+}$, $\overline{b_1 b_1^+} = \overline{\mathfrak{b}\mathfrak{b}^+}$ ve smyslu, v němž se otáčí přetvořená soustava kolem bodu d; tento smysl jest určen otočením $\overline{\mathfrak{c}\mathfrak{c}^+}$ bodu c. Správné nové polohy bodů a, b, c jsou v obrazci translokačním body $\mathfrak{a}^+, \mathfrak{b}^+, \mathfrak{c}^+$ a správná úplná přemístění jsou dána úseky $\overline{o'\mathfrak{a}^+}$, $\overline{o'\mathfrak{b}^+}$, $\overline{o'\mathfrak{c}^+}$.

Vracejíce se k původním výminkám podporovým posouváme a otáčíme soustavu přetvořenou na základě výminek zatímních. Posunutí se odbude v translokačním obrazci pouhým přeložením jeho počátku, v němž si myslíme původní polohu všech bodů styčných. Způsob, jímž jsme řešili otočení v obr. 176, byl by u složitější soustavy zdlouhavý; lze odvoditi výhodnější řešení. Budiž obecně o původní, $\mathfrak{m}$ zatímní nová poloha bodu m v obrazci translokačním (obr. 177), tedy $\overline{o\mathfrak{m}}$ zatímní přemístění. Bod m otáčíme o délku $\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{m}^+}$, čímž určíme správnou novou polohu $\mathfrak{m}^+$ a správné úplné přemístění $\overline{o\mathfrak{m}^+}$. Toto přemístění se rovná geometrickému součtu zatímního přemístění $\overline{o\mathfrak{m}}$ a otočení $\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{m}^+}$, tedy



Obr. 177.

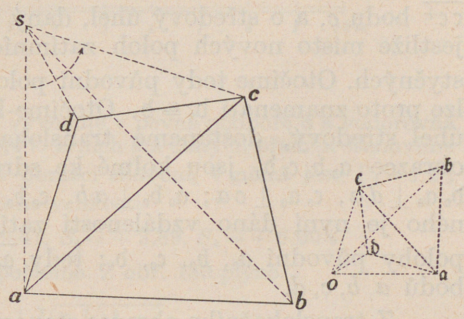
$$\overline{o\mathfrak{m}^+} = \overline{o\mathfrak{m}} + \overline{\mathfrak{m}\mathfrak{m}^+}.$$

Doplníme-li obrazec do rovnoběžníka $o\,\mathfrak{m}_0\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}^+$, jest $\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{m}^+} \# \overline{\mathfrak{m}_0 o}$; pak jest

$$\overline{o\mathfrak{m}^+} = \overline{o\mathfrak{m}} + \overline{\mathfrak{m}_0 o} = \overline{\mathfrak{m}_0\mathfrak{m}}.$$

Bod $\mathfrak{m}_0$ dostaneme, udělíme-li v translokačním obrazci původní poloze o bodu m otočení opačné tomu, jež má vykonati zatímní nová poloha $\mathfrak{m}$, totiž $\overline{o\mathfrak{m}_0} = -\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{m}^+}$. Správné úplné přemístění je pak dáno délkou $\overline{\mathfrak{m}_0\mathfrak{m}}$, tedy vztahem zatímní nové polohy $\mathfrak{m}$ k bodu $\mathfrak{m}_0$, jejž sestrojíme, otočíme-li původní polohu o opačně, než máme otáčeti zatímní novou polohu $\mathfrak{m}$.

Nové zatímní polohy styčných bodů otáčíme o týž středový úhel kolem určitého středu; otáčíme-li opačně původní polohy, otáčíme je kolem téhož středu také o týž středový úhel, což znamená, že otáčíme původní soustavu jako celek, neměníce jejího tvaru. Odvoďme obrazec translokační, který vznikne, otočíme-li původní soustavu $a\,b\,c\,d$ jakožto celek kolem libovolného středu s (obr. 178). Všechny body opisují tu kruhové obloučky, jejichž středem je bod s; středové úhly všech těchto obloučků jsou rovny, poněvadž neměníme za otáčení tvaru obrazce $a\,b\,c\,d$. Obloučky nahradíme přibližně tečnami, t. j. kolmicemi k původním poloměrům; v translokačním obrazci dostaneme pak otočení $o\mathfrak{a} \perp sa$, $o\mathfrak{b} \perp sb$, $o\mathfrak{c} \perp sc$, $o\mathfrak{d} \perp sd$. Budiž na př. délka otočení $\overline{o\mathfrak{a}}$ dána; ostatní otočení plynou z toho, že se za rovných středových úhlů



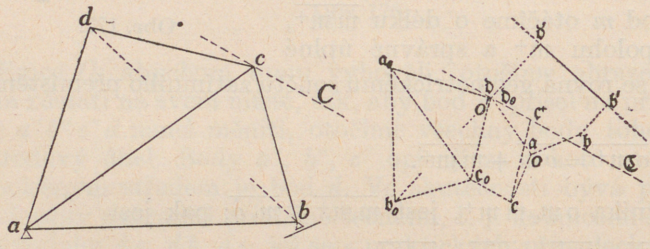
Obr. 178.

mají délky oblouků k sobě jako poloměry, tedy

$$\overline{oa} : \overline{ob} : \overline{oc} : \overline{od} = \overline{sa} : \overline{sb} : \overline{sc} : \overline{sd}.$$

V obrazci translokačním a v mnohostranu osovém jest $\sphericalangle aob = \sphericalangle asb$, poněvadž jsou strany, jež svírají oba ostré úhly, vzájemně kolmé; ony strany jsou též úměrné, pročež jest $\triangle oab \sim \triangle sab$. Z podobnosti trojúhelníků plyne rovnost stejnolehlých úhlů; poněvadž pak jsou dva páry sdružených stran obou trojúhelníků pravoúhelné, je též $ab \perp ab$, čímž jest určena nová poloha b. Podobně jest $\sphericalangle boc = \sphericalangle bsc$, poněvadž jsou stejnolehlé strany obou úhlů k sobě kolmé; strany ty jsou též úměrné, pročež jest $\triangle obc \sim \triangle sbc$. V obou podobných trojúhelnících jsou dva páry sdružených stran pravoúhelné, proto je též $bc \perp bc$; tím je stanoven v obrazci translokačním bod c. Obdobně jest i $cd \perp cd$, $ad \perp ad$ a $ac \perp ac$. Body a, b, c, d tvoří obrazec, jehož strany jsou vesměs kolmé ke sdruženým stranám obrazce $abcd$ a zároveň těmto stranám úměrné. Tedy otočíme-li původní polohy všech bodů soustavy prutové kolem libovolného středu o týž středový úhel, vytvoří nové polohy těchto bodů v obrazci translokačním obrazec, který je podoben mnohostranu osovému; všechny jeho strany jsou pak kolmé ke sdruženým stranám mnohostranu osového.

Odvozené vlastnosti užijeme s výhodou, vracejíce se v obrazci translokačním k původním výminkám podporovým. Ze zatímních výminek podporových jsme odvodili na př. jako v obr. 174 v obrazci translokačním zatímní nové polohy a, b, c, d styčných bodů a, b, c, d (obr. 179); chceme přejíti k původním výminkám podporovým, podle nichž má býti bod d pevný, bod c posouvatelný po přímce C. Prvé výmince vyhovíme, přeložíme-li počátek translokačního obrazce do bodu $o' \equiv d$, jenž dále znamená původní polohu všech bodů styčných. Druhé výmince bychom vyhověli, kdybychom přetvořenou soustavu otočili kolem pevného bodu d tak, aby bod c přišel na přímku C. Stačí, určíme-li v translokačním obrazci pouze otočení bodu c, jež rýsujeme jakožto kolmici k původnímu poloměru, tedy $cc^+ \perp dc$; v průsečíku tohoto otočení s přímkou $\mathfrak{C} \parallel C$, vedenou původní polohou o', je správná nová poloha c^+. Měli bychom nyní otáčeti zatímní nové polohy ostatních bodů styčných ve smyslu, jejž dává otočení $\overline{cc^+}$ bodu c, a o středový úhel, daný rovněž tímto otočením. Kratčeji přijdeme k cíli, jestliže místo nových poloh zatímních otočíme opačně původní polohy všech bodů styčných. Otočíme tedy původní polohu o' bodu c o délku $\overline{o'c_0} \# \overline{c^+c}$. Bod d je pevný; lze proto znamenati $d_0 \equiv d$. Otočíme-li pak původní polohy všech bodů styčných o týž úhel středový, dostaneme translokační obrazec $a_0b_0c_0d_0 \sim abcd$; všechny strany obrazce $a_0b_0c_0d_0$ jsou kolmé ke sdruženým stranám obrazce $abcd$. Vedeme tedy $d_0a_0 \perp da$, $c_0a_0 \perp ca$; $a_0b_0 \perp ab$, $c_0b_0 \perp cb$. Úplné přemístění každého bodu styčného je nyní dáno vzdáleností zatímní nové polohy a, b, c, d od opačně otočené polohy původní a_0, b_0, c_0, d_0; tedy $\overline{a_0a}$, $\overline{b_0b}$, $\overline{c_0c} \# \overline{o'c^+}$, $\overline{d_0d}$ jsou úplná přemístění bodů a, b, c, d.



Obr. 179.

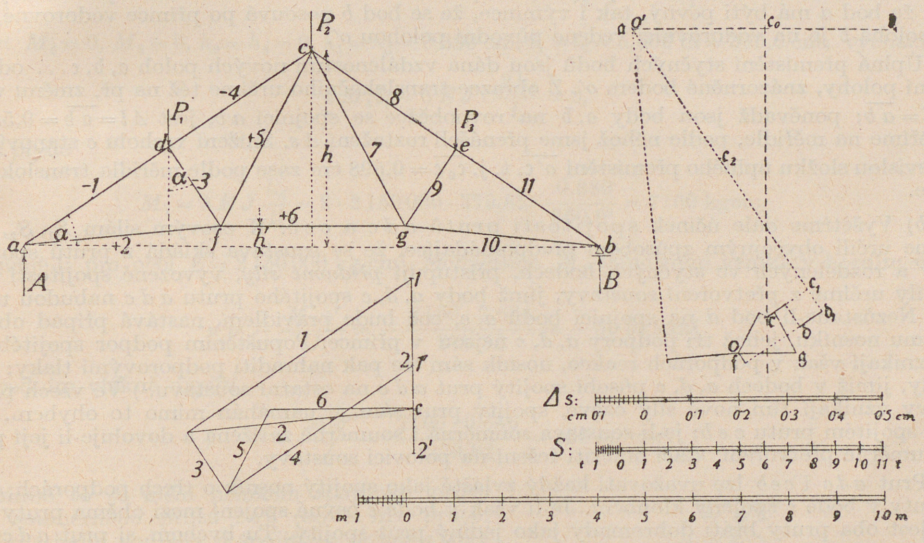
Z translokačního obrazce stanovíme změnu vzdálenosti $s' = \overline{bd}$ bodů b, d prutem nespojených, odečteme-li pravoúhlé průměty úplných přemístění bodu koncového $(\overline{d_0d})$ a počátečního $(\overline{b_0b})$ do rovnoběžky se spojnicí bd. Poněvadž je však $b_0d_0 \perp bd$, sjednotí se průměty počátků b_0, d_0 i stačí promítnouti koncové body b, d úplných přemístění do rovnoběžky se spojnicí bd, čímž určíme $\overline{b'd'} = \Delta s'$. Souhlasí-li smysl

$b'b'$ se smyslem bd, znamená $\Delta s'$ zvětšení vzdálenosti s', jak již bylo dovozeno; v opačném případě znamená $\Delta s'$ zmenšení vzdálenosti s'. Výsledek je týž jako za zatímních výminek podporových, což je přirozeno, neboť nový tvar soustavy jest úplně dán roztažením prutů a nezávisí vůbec na výminkách podporových, které určují jen polohu přetvořené soustavy. Tedy změny vzdáleností bodů pruty nespojených určíme z translokačního obrazce odvozeného z jakýchkoli výminek zatímních.

Někdy můžeme voliti zatímní výminky podporové tak, že uspoříme otáčení, vracíme-li se k výminkám původním, čímž se řešení značně zjednoduší. Je-li na př. soustava prutová souměrná a souměrně zatížena i podepřena, vznikají v souměrných prutech stejné síly osové a soustava zůstává souměrná i po přetvoření, dovoluje-li to její podepření. Zvolíme-li tu zatímní výminky tak, aby této souměrnosti vyhovovaly, nemusíme soustavu otáčeti, vracíme-li se k původním výminkám, jak ukáže příklad.

53. Příklady obrazců translokačních.

Příklad 37. Souměrná soustava prutová (nosník střechový) o rozměrech $\overline{ab} = l = 12$ m, $h = 4$ m, $h' = 0{,}4$ m podle obr. 180 ($df \perp ac$) je zatížena břemeny $P_1 = P_2 = P_3 = 3{,}6$ t; průřezy prutů mají obsahy $U_1 = U_4 = 37{,}18$ cm², $U_2 = 13{,}02$ cm², $U_3 = 11{,}62$ cm², $U_5 = 8{,}50$ cm², $U_6 = 9{,}50$ cm². Jest určiti přetvoření soustavy translokačním obrazcem a stanoviti účinek spojitosti prutů adc, ceb na osové síly prutů.



Obr. 180.

a) Určíme nejprve osové síly prutů. Svislé zatížení vyvozuje v pevné podpoře *a* a vodorovně posouvatelné podpoře *b* svislé reakce $A = B = \frac{1}{2}\Sigma P = 5{,}4$ t. Z nich a z daných břemen stanovíme methodou bodů styčných určovací úseky osových sil v obrazci silovém, v němž jest $P_1 = \overline{1\,1'}$, $P_2 = \overline{2\,2'}$, $A = \overline{c\,1}$. Změříme-li úseky v měřidle sil, obdržíme velikosti

$$S_1 = -11{,}42,\ S_2 = +9{,}54,\ S_3 = -3{,}00,\ S_4 = -9{,}41,\ S_5 = +3{,}89,\ S_6 = +6{,}00 \text{ t}.$$

Délky prutů odměříme z mohostranu osového nebo vypočteme. Z obr. 180 plyne

$$\cos\alpha = \frac{l}{4s_1},\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2h}{l};\qquad s_1 = s_4 = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2} = 3{,}606 \text{ m},$$

$$s_3 = \left(\frac{h}{2} - h'\right)\cdot\frac{1}{\cos\alpha} = 1{,}923 \text{ m},\qquad s_6 = 2\cdot\left[\frac{l}{4} - \left(\frac{h}{2} - h'\right)\operatorname{tg}\alpha\right] = 3{,}866 \text{ m},$$

$$s_2 = s_5 = \sqrt{s_1^2 + s_3^2} = 4{,}086 \text{ m}.$$

Počitajíce roztažení prutů podle vzorce (189) dosazujeme za obsahy průřezové U obsahy plných průřezů; nedbáme oslabení otvory nýtovými, jež se vyskytuje v poměrně malých částech prutů. Částečně vyrovnáme účinek oslabení průřezů, zvolíme-li za modul pružnosti, jenž činí pro ocel 2 150 000 kg/cm², hodnotu poněkud menší $E = 2\,000\,000$ kg/cm² $= 2000$ t/cm². Podle vzorce

$$\Delta s = \frac{S s}{E U}$$

určíme

$$\Delta s_1 = -0{,}055, \quad \Delta s_2 = +0{,}150, \quad \Delta s_3 = -0{,}025, \quad \Delta s_4 = -0{,}046, \quad \Delta s_5 = +0{,}094, \quad \Delta s_6 = +0{,}122 \text{ cm}.$$

Soustava je souměrná a souměrně zatížena; poněvadž je podepřena v bodě a pevně, v bodě b posouvatelně po vodorovné, bude souměrná i po přetvoření, tedy prut $f g$ zůstane vodorovný. Zvolme zatímní výminky podporové tak, aby této souměrnosti vyhověly; pokládejme zatím bod f za pevný, g za posouvatelný po vodorovné. V translokačním obrazci je pak $\mathfrak{f} \equiv o$ a $\overline{\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}} = \Delta s_6$. Od bodu $\mathfrak{f}$ přeneseme rovnoběžně s osou prutu $f c$ jeho roztažení Δs_5 ve smyslu $f c$ a vedeme kolmo k němu otočení; z bodu $\mathfrak{g}$ přeneseme podobně roztažení prutu $g c$ rovné Δs_5 a rýsujeme kolmo k němu otočení. V průsečíku obou otočení je nová poloha $\mathfrak{c}$ bodu c; svislice bodu $\mathfrak{c}$ jest osou souměrnosti obrazce translokačního, proto stačí sestrojiti dále pouze nové polohy bodů d, a. Z bodu $\mathfrak{f}$ přeneseme ve smyslu $d f$ roztažení Δs_3 a rýsujeme k němu kolmé otočení; z bodu c přeneseme ve smyslu $d c$ roztažení Δs_4 a vedeme k němu kolmé otočení, čímž určíme v průsečíku obou otočení bod $\mathfrak{d}$. Z bodu $\mathfrak{f}$ přeneseme ve smyslu $f a$ roztažení Δs_2 a vedeme k němu kolmé otočení; z bodu $\mathfrak{d}$ přeneseme ve smyslu $a d$ roztažení Δs_1 a rýsujeme k němu kolmé otočení, v průsečíku obou otočení je pak bod $\mathfrak{a}$. Poněvadž je translokační obrazec pro celou soustavu souměrný ke svislici bodu $\mathfrak{c}$, je bod $\mathfrak{b}$ na vodorovnici bodu $\mathfrak{a}$ ve vzdálenosti $\overline{\mathfrak{c}_0\,\mathfrak{b}} = \overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}_0}$. K původním výminkám se pak vrátíme v obrazci translokačním, přeložíme-li počátek o do bodu $o' \equiv \mathfrak{a}$. Tím vyhovíme jak výmince, že bod a má býti pevný, tak i výmince, že se bod b posouvá po přímce vodorovné, neboť nová poloha $\mathfrak{b}$ je na vodorovnici vedené původní polohou o'.

Úplná přemístění styčných bodů jsou dána vzdálenostmi nových poloh $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots$ od jejich původní polohy, znázorněné bodem o'. Z obrazce translokačního určíme též na př. změnu vzdálenosti $l = \overline{a\,b}$; poněvadž jsou body $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ na rovnoběžce se spojnicí $a b$, jest $\Delta l = \overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}} = 0{,}555$ cm, což měříme na měřidle, podle něhož jsme přenášeli roztažení Δs. Snížení vrcholu c stanovíme jakožto svislou složku úplného přemístění $\overline{o'\,\mathfrak{c}}$, t. j. $\overline{\mathfrak{c}_0\,\mathfrak{c}} = 0{,}598$ cm zase podle měřidla translokačního obrazce.

b) Vyšetřme dále účinek spojitosti prutů $a d c$ a $c e b$. K osovým silám $S_1, S_2, S_3 \ldots$, jež jsme určili obyčejným způsobem předpokládajíce, že se soustava skládá z prutů spojených klouby a rozdělených ve styčných bodech, přistupují *přídavné síly*, vyvozené spojitostí prutů. Tyto síly určíme z přetvoření soustavy, jímž body a, d, c spojitého prutu $a d c$ nabudou nových poloh. Nezůstane-li bod d na spojnici bodů a, c, což bude pravidlem, nastává případ obdobný spojitému nosníku, jehož tři podpory a, d, c nejsou v přímce. Popuštěním podpor spojitého nosníku vznikají však v podporách reakce, nosník sám lze pak nahraditi podporovými tlaky; tak se určí síly, jimiž v bodech a, d, c působí spojitý prut $a d c$ na ostatní soustavu.[1]) Ve všech prutech soustavy vznikají tím nové síly osové, spojitý prut sám je namáhán mimo to ohybem. Totéž platí o spojitém prutu $c e b$; je-li soustava souměrná i souměrně zatížena a dovoluje-li její podepření souměrné přetvoření, stačí omeziti řešení na polovici soustavy.

Prut $a d c$ i $c e b$ lze uvažovati každý zvláště jako spojitý nosník o třech podporách, jsou-li oba pruty v bodě c spojeny kloubem. Je-li však v bodě c pevné spojení mezi oběma pruty spojitými, jest oba pruty bráti dohromady jako jediný prut spojitý. Tu bychom si prut $a d c$ i $c e b$ otočili do vodorovné polohy, přenesli bychom ve styčných bodech od přímé osy složky přemístění bodů a, d, c, e, b kolmé v původním osám prutů a stanovili bychom tak popuštění podpor spojitého nosníku, jež nahrazují styčné body. Z popuštění podpor bychom vyšetřili podporové tlaky a ohybové momenty; těmito podporovými tlaky bychom nahradili spojité pruty ve styčných bodech. Po obou stranách bodu c brali bychom ovšem příslušné síly posouvající, jimiž bychom nahradili prut levý a pravý. Ze sil, které bychom tak určili ve styčných bodech, stanovili bychom osové síly prutů.

Předpokládáme-li v bodě c kloub, máme určiti snížení bodu d proti spojnici bodů a, c po přetvoření soustavy. Přetvořením nabývají body d, c nových poloh d', c' (obr. 181) a jde o vzdálenost bodu d' od spojnice $a\,c'$; pevný bod a zůstane ovšem v poloze původní. Poněvadž jde ve skutečnosti o přetvoření proti původním délkám velmi malá, lze kolmici z bodu d' ke spojnici $a\,c'$ bráti velmi přibližně za kolmici k původní poloze $a c$ a vypočísti hledané snížení z rovnice

$$\overline{d''\,d'} = \overline{d''\,d'} - \overline{d''\,d'''}.$$

[1]) Srovnej účinek prutů spojitých za mimostyčného zatížení, o němž bylo pojednáno v prvém dílu tohoto spisu, 3. vyd. (1940), str. 186 a d.

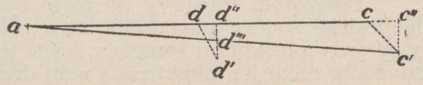
Je-li $\overline{a\,d} = \overline{d\,c}$ jako v tomto případě, platí velmi přibližně

$$\overline{d''\,d'''} = \overline{c''\,c'} \cdot \frac{\overline{a\,d}}{\overline{a\,c}} = \frac{1}{2}\overline{c''\,c'}, \text{ tedy } \overline{d'''\,d'} = \overline{d''\,d'} - \frac{1}{2}\overline{c''\,c'}.$$

Zde znamená $\overline{d''\,d'}$ posunutí bodu d ve směru kolmém k ose prutu $a\,c$, což je dáno v translokačním obrazci průmětem $\overline{o'\,b_1}$ úplného přemístění $\overline{o'\,b}$ do kolmice k ose prutu $a\,c$. Obdobně jest $\overline{c''\,c'}$ posunutí bodu c ve směru kolmém k ose prutu $a\,c$, tedy je v translokačním obrazci $\overline{c''\,c'}$ dáno délkou $\overline{o'\,c_1}$, je-li c_1 kolmý průmět bodu c na přímku $o'\,c_1 \perp a\,c$. Pak má snížení bodu d proti spojnici $a\,c$ hodnotu

$$h_d = \overline{o'\,b_1} - \tfrac{1}{2}\overline{o'\,c_1} = \overline{o'\,b_1} - \overline{o'\,c_2} = \overline{c_2\,b_1} = 0{,}380 \text{ cm},$$

je-li $\overline{o'\,c_2} = \frac{1}{2}\overline{o'\,c_1}$.



Obr. 181.

Spojitý prut $a\,d\,c$ měj stálý průřez tvaru ⌐||⌐, složený ze dvou rovnoramenných úhelníků o rozměrech $\frac{90 \cdot 90}{11}$ mm; jeho obsah jest $U = 37{,}18$ cm², moment setrvačnosti k vodorovné ose centrálné $J = 2 \cdot 139{,}91 = 379{,}82$ cm⁴ a vzdálenost krajních vláken od vodorovné osy centrálné nahoře $e' = 2{,}654$ cm, dole $e'' = 6{,}346$ cm. Uvažujeme-li pouze snížení h_d střední podpory spojitého nosníku o dvou rovných polích $\overline{a\,d} = \overline{d\,c} = 3{,}606$ m, určíme moment ve střední podpoře z tří-momentové rovnice

$$M_0 l_1 + 2 M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 + 6 E J \left(\frac{h_2 - h_1}{l_2} - \frac{h_1 - h_0}{l_1} \right) = 0.$$

Zde jest $M_0 = 0$, $M_2 = 0$, $h_0 = h_2 = 0$, $h_1 = h_d = 0{,}380$ cm, $l_1 = l_2 = 3{,}606$ m $= 360{,}6$ cm; vychází tedy

$$4 M_1 l_1 - 6 E J \cdot \frac{2 h_d}{l_1} = 0,$$

z čehož plyne

$$M_1 = 3 E J \frac{h_d}{l_1^2} = 3 \cdot 2\,150\,000 \cdot 379{,}82 \cdot \frac{0{,}380}{360{,}6^2} = 7160 \text{ kgcm},$$

dosazujeme-li pro ocel $E = 2\,150\,000$ kg/cm². Momentem M_1 samotným vzniká v horním vlákně napětí

$$\nu' = -\frac{M_1 e'}{J} = -\frac{7160 \cdot 2{,}654}{379{,}82} = -50 \text{ kg/cm}^2$$

a ve spodním vlákně napětí

$$\nu'' = \frac{M_1 e''}{J} = \frac{7160 \cdot 6{,}346}{379{,}82} = 120 \text{ kg/cm}^2.$$

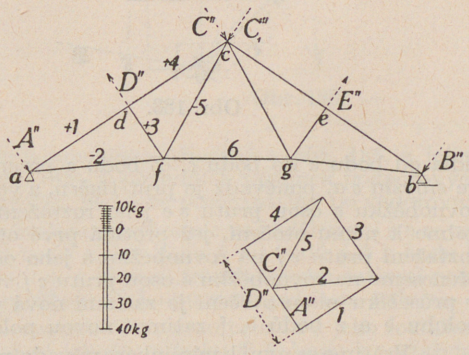
Mimo to se mění účinkem spojitosti prutu $a\,d\,c$ a souměrného prutu $c\,e\,b$ osové síly prutů. Snížením střední podpory d spojitého nosníku $a\,d\,c$ o dvou polích rovných vznikají v podporách reakce

$$A'' = C'' = T_0' = \frac{M_1 - M_0}{l_1} = \frac{7160}{360{,}6} = 20 \text{ kg},$$

$$D'' = -T_1 + T_1' = -\frac{M_1 - M_0}{l_1} + \frac{M_2 - M_1}{l_1} =$$

$$= -2\frac{M_1}{l_1} = -2A'' = -40 \text{ kg};$$

posouvající síly $\mathfrak{T}$ odpadají, jelikož mezi styčnými body není zatížení. Podporové tlaky, rovné reakcím A'', D'', C'' a protivného smyslu, připojíme v bodech a, d, c jakožto příčné složky působení spojitého prutu $a\,d\,c$. Souměrnými silami $C_1'' = C''$, $E'' = D''$, $B'' = A''$ nahradili bychom v bodech c, e, b spojitý prut $c\,e\,b$ a stanovíme pak osové síly prutů, jež se přičítají k silám původním. Připojené příčné síly jsou samy o sobě v rovnováze, nevyvodí tedy žádných reakcí podporových.



Obr. 182.

Jelikož je zde úplná souměrnost, stačí řešiti polovici soustavy, jak je provedeno pro levou polovici methodou bodů styčných v obr. 182. Z obrazce silového odměříme síly

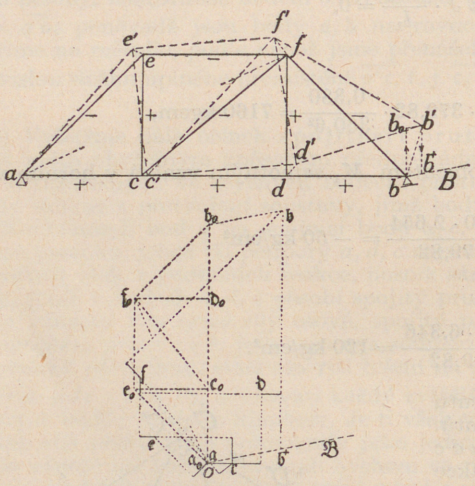
$$S_1 = +38,\ S_2 = -42,\ S_3 = +40,\ S_4 = +38,\ S_5 = -42\ \text{kg};$$

v prutu $f\,g$ je síla $S_6 = 0$. Vycházejí zde síly velmi malé a vesměs protivného znaménka než síly, jež jsme určili ze zatížení, předpokládajíce jako obyčejně pruty v bodech styčných rozděleny. Osové síly prutů se tedy spojitostí prutů $a\,d\,c$, $c\,e\,b$ v tomto případě nepatrně zmenšují. Tím se zmenšují nepatrně napětí prutů; ve spojitých prutech $a\,d\,c$, $c\,e\,b$ se však mění napětí značněji o napětí v', v'', vyvozená v bodech d, e ohybovým momentem M_1.

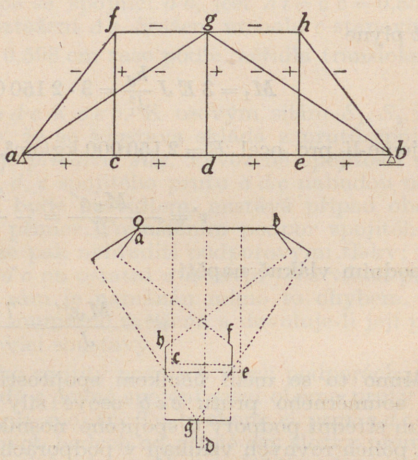
Přetvoření soustavy by mělo býti ovšem vyšetřeno ze správných sil osových, jimiž jsou algebraické součty původních sil a přídavných sil, vzniklých spojitostí prutů $a\,d\,c$, $c\,e\,b$. Mělo by se tedy přetvoření soustavy řešiti ještě jednou ze správných sil osových. V tomto případě se osové síly mění jen nepatrně, i není druhého řešení třeba.

Příklad 38. Vyšetřme přetvoření trojúhelníkové soustavy v obr. 183 (dvojnásobného věšadla); osové síly prutů a jejich průřezy budtež známy.

Soustava je podepřena v bodě a pevně, v bodě b posouvatelně po šikmé přímce B. Od bodu a bychom mohli přejíti přímo k bodu b, poněvadž je mezi nimi několik prutů, jejichž osy jsou v přímce. Jdeme-li v takovém případě od bodu a k c, dále k d a b, jsou roztažení i otočení u všech bodů rovnoběžná; tu se sčítají algebraicky roztažení všech prutů a od bodu a přešli bychom přímo k bodu b, kdybychom přenesli z bodu a v obrazci translokačním algebraický součet roztažení všech prutů mezilehlých na rovnoběžce s přímkou $a\,b$ a vedli kolmo k tomu otočení. Od bodů a, b bychom však nemohli jíti dále, poněvadž není bodu, který by byl spojen s bodem a i s bodem b prutem. Musíme tedy vyjíti od výminek zatímních, na př. že je bod a pevný, bod c posouvatelný po vodorovné. Z osových sil, jejichž znaménka jsou v obr. 183 připsána, a z průřezů prutů vypočetli bychom podle vzorce (189) roztažení prutů Δs. Znamená-li pak v obrazci translokačním o původní polohu všech bodů styčných, jest $\mathfrak{a} \equiv o$ a bod c je podle zatímní výminky na vodorovnici bodu o, tedy otočení odpadá a zbývá jen roztažení prutu $a\,c$, jež přeneseme podle zvoleného mě-



Obr. 183.



Obr. 184.

řidla od bodu $\mathfrak{a}$ do bodu $\mathfrak{c}$. Z bodu $\mathfrak{a}$ přeneseme roztažení prutu $a\,e$ na rovnoběžku s jeho osou ve smyslu $e\,a$, poněvadž je prut tlačen, a vedeme k němu kolmo otočení; z bodu $\mathfrak{c}$ přeneseme na rovnoběžku s osou prutu $c\,e$ jeho roztažení ve smyslu $c\,e$, poněvadž je prut tažen, a rýsujeme kolmo k němu otočení, jež protíná prvé otočení v zatímní nové poloze $\mathfrak{e}$. Z bodu $\mathfrak{e}$ přeneseme roztažení prutu $e\,f$ na rovnoběžku s jeho osou ve smyslu $f\,e$ a vedeme kolmé otočení, z bodu $\mathfrak{c}$ přeneseme na rovnoběžku s osou prutu $c\,f$ ve smyslu $f\,c$ jeho roztažení a rýsujeme kolmé otočení; v průsečíku obou otočení je zatímní nová poloha $\mathfrak{f}$. Obdobně určíme z bodů $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$ zatímní novou polohu $\mathfrak{d}$ a z bodů $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$ zatímní novou polohu $\mathfrak{b}$.

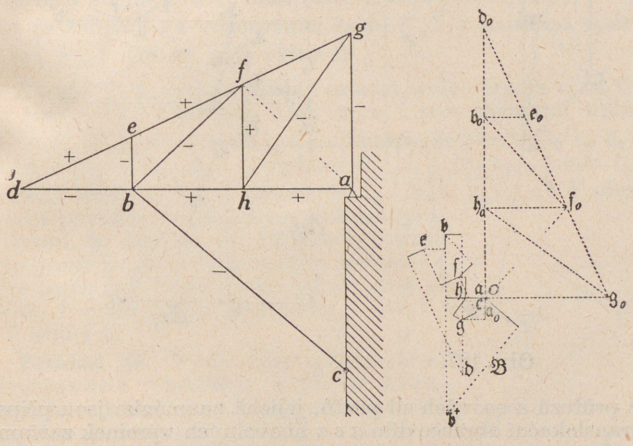
Vrátíme se nyní k výminkám původním, z nichž není splněna pouze výminka, že bod b má býti posouvatelný po šikmé přímce B, poněvadž nová poloha $\mathfrak{b}$ není na přímce $\mathfrak{B} \parallel B$ vedené původní polohou o. K této výmince se vrátíme, otočíme-li celou soustavu přetvořenou kolem pevného bodu a, až bod b přijde na přímku B. Přetvořenou soustavu $a\,c'\,d'\,b'\,f'\,e'$ bychom obdrželi v mnohostranu osovém, kdybychom přenesli zatímní úplná přemístění $\overline{o\,\mathfrak{b}}$, $\overline{o\,\mathfrak{c}}$, $\overline{o\,\mathfrak{d}}$, $\overline{o\,\mathfrak{e}}$, $\overline{o\,\mathfrak{f}}$ v měřidle mnohostranu

osového z bodů b, c, d, e, f. Soustavu $a\,c'\,d'\,b'\,f'\,e'$ máme nyní otočiti kolem bodu a, neměníce jejího tvaru, až bod b' přijde na přímku B. Bod b' opisuje oblouk kruhový, jehož středem je bod a; otočení $b'\,b^+$ je velmi přibližně kolmé k původnímu poloměru $a\,b$. V obrazci translokačním rýsujeme otočení $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}^+ \perp a\,b$ a určíme na přímce $\mathfrak{B}$ správnou novou polohu $\mathfrak{b}^+$ bodu b. V témž smyslu a o týž středový úhel jako bod b' měli bychom otočiti zatímní nové polohy všech ostatních bodů styčných. Kratčeji místo toho otočíme v obráceném smyslu původní polohy všech bodů styčných a vztahujeme k nim pak zatímní polohy nové. V mnohostranu osovém bychom otočili bod b do polohy b_0 o délku $\overline{b\,b_0} \# \overline{b^+\,b'}$ a obdrželi bychom přemístění $\overline{b_0\,b'} \# \overline{b\,b^+}$; v obrazci translokačním přeneseme $\overline{o\,\mathfrak{b}_0} \# \overline{\mathfrak{b}^+\,\mathfrak{b}}$. Otočením původních poloh o týž středový úhel dostaneme translokační obrazec $a_0\,c_0\,b_0\,b_0\,f_0\,e_0 \sim a\,c\,d\,b\,f\,e$; všechny strany obrazce $a_0\,c_0\,b_0 \ldots$ jsou kolmé ke sdruženým stranám obrazce $a\,c\,d \ldots$ Poněvadž je bod a pevný, jest $\mathfrak{a}_0 \equiv a$. Z bodů $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$ sestrojíme celý obrazec $\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{c}_0\,\mathfrak{b}_0 \ldots$, vedeme-li $\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{f}_0 \perp b\,f$, $\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{f}_0 \perp a\,f$; $\mathfrak{f}_0\,\mathfrak{e}_0 \perp f\,e$, $\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{e}_0 \perp a\,e$; $\mathfrak{e}_0\,\mathfrak{c}_0 \perp e\,c$, $\mathfrak{f}_0\,\mathfrak{b}_0 \perp f\,d$. Úplná přemístění styčných bodů jsou nyní dána vzdáleností zatímní polohy nové od polohy, ke které jsme dospěli opačným otočením původní polohy, tedy $\overline{\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{b}} \# \overline{o\,\mathfrak{b}^+}$, $\overline{\mathfrak{c}_0\,\mathfrak{c}}$, $\overline{\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{b}}$, $\overline{\mathfrak{e}_0\,\mathfrak{e}}$, $\overline{\mathfrak{f}_0\,\mathfrak{f}}$.

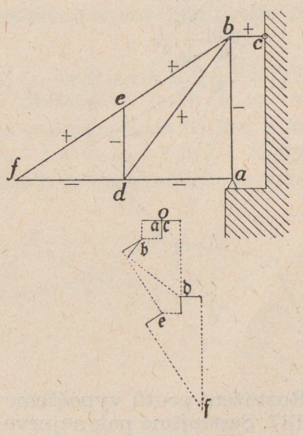
Příklad 39. Stanovme translokační obrazec soustavy v obr. 184 (trojnásobného věšadla).

Osové síly, jejichž znaménka jsou připsána v obr. 184, a průřezy prutů buďtež známy; z nich vypočteme roztažení prutů podle vzorce (189). Soustava není trojúhelníková, lze ji však snadno řešiti a lze i přímo užíti původních výminek podporových. Soustava měj bod a pevný, bod b posouvatelný po vodorovné. V obrazci translokačním jest $\mathfrak{a} \equiv o$, bod $\mathfrak{b}$ je pak na vodorovnici bodu o ve vzdálenosti $\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}$ rovné součtu roztažení prutů mezi body a, b, jejichž osy jsou ve přímce. Od bodů a, b můžeme jíti k bodu g, pak od bodů a, g k bodu d a k bodu f, od bodů a, f k bodu c, od bodů b, g k bodu h a od bodů b h k bodu e. Úplná přemístění bodů $b, c, d, \ldots$ jsou $\overline{o\,\mathfrak{b}}$, $\overline{o\,\mathfrak{c}}$, $\overline{o\,\mathfrak{d}}, \ldots$

Příklad 40. Trojúhelníková soustava prutová $a\,d\,g$ (obr. 185) je podepřena v bodě a pevně a v bodě b prutem, který končí v pevném bodě c mimo soustavu. Určiti jest její přetvoření.



Obr. 185.



Obr. 186.

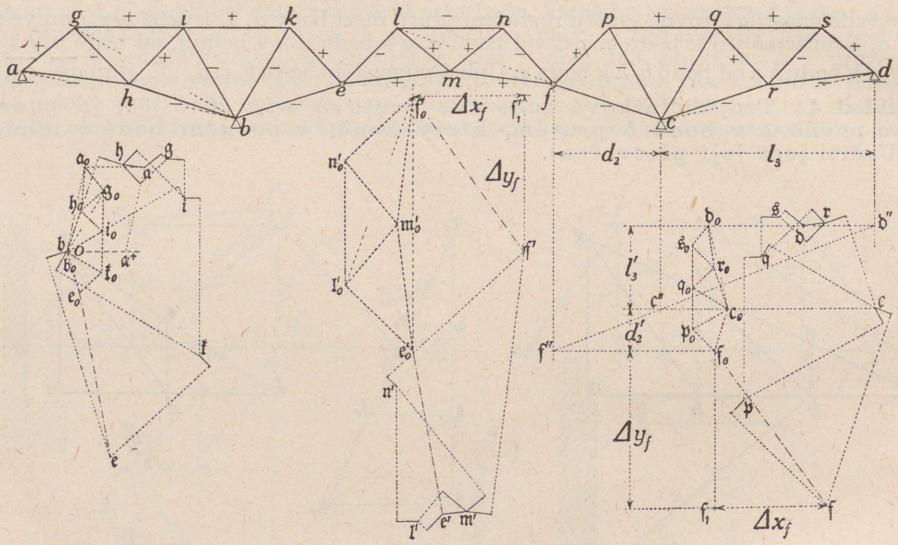
Předem buďtež známy osové síly prutů, jež mají znaménka připsaná v obr. 185, a jejich průřezy; pak lze vypočísti roztažení prutů podle vzorce (189). Z původních výminek podporových vyjíti nemůžeme, zvolíme tedy zatím na př. bod a za pevný, bod h za posouvatelný po vodorovné. Pak je v obrazci translokačním bod $\mathfrak{a} \equiv o$ a bod $\mathfrak{h}$ je na vodorovnici bodu o ve vzdálenosti $\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{h}}$ rovné roztažení prutu $a\,h$. Od bodů a, h jdeme k bodu g, od bodů g, h k bodu f, od bodů f, h k bodu b, od bodů b, f k bodu e a od bodů b, e k bodu d. Určíme tak v obrazci translokačním zatímní nové polohy $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{d}$. Nová poloha pevného bodu c se ztotožňuje s jeho původní polohou, tedy $\mathfrak{c} \equiv o$. Od bodu c přejdeme k bodu b, přeneseme-li z bodu $\mathfrak{c}$ na rovnoběžku s osou prutu $b\,c$ jeho roztažení ve smyslu $b\,c$, jelikož je prut tlačen, a rýsujeme-li otočení jakožto přímku $\mathfrak{B}$ kolmou k roztažení; na tomto otočení $\mathfrak{B}$ má býti správná nová poloha bodu b, aby bylo vyhověno druhé původní výmince podporové, že je bod b spojen prutem s pevným bodem c. Poněvadž zatímní nová poloha $\mathfrak{b}$ není na otočení $\mathfrak{B}$, musíme přetvořenou soustavu z polohy, ke které jsme dospěli ze zatímních výminek podporových, otočiti kolem pevného bodu a, až bod b přijde v obrazci translokačním

na přímku $\mathfrak{B}$. Otočení bodu b rýsujeme jakožto kolmici k původnímu poloměru, tedy $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}^+ \perp a\,b$; tím určíme správnou novou polohu $\mathfrak{b}^+$. Zatímní nové polohy ostatních bodů styčných měli bychom otočiti kolem bodu a o týž středový úhel a v témž smyslu jako bod b. Místo toho lépe otočíme opačně původní polohy všech bodů styčných; obdržíme tím translokační obrazec $\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{g}_0\ldots$, jehož všechny strany jsou kolmé ke sdruženým stranám obrazce $a\,d\,g$, jemuž je podoben. Obrazec $\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{g}_0\ldots$ je stanoven bodem $\mathfrak{a}_0 \equiv \mathfrak{a}$, poněvadž je bod a pevný, a bodem $\mathfrak{b}_0$, jejž určíme délkou $\overline{o\,\mathfrak{b}_0} \# \overline{\mathfrak{b}^+\mathfrak{b}}$, rovnou opačnému otočení $\overline{\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}^+}$. Ostatní body $\mathfrak{f}_0$, $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{e}_0$, $\mathfrak{d}_0$ určíme přímkami $\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{f}_0 \perp b\,f$, $\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{f}_0 \perp a\,f$; $\mathfrak{f}_0\,\mathfrak{g}_0 \perp f\,g$, $\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{g}_0 \perp a\,g$; $\mathfrak{f}_0\,\mathfrak{h}_0 \perp f\,h$; $\mathfrak{f}_0\,\mathfrak{e}_0 \perp f\,e$, $\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{e}_0 \perp b\,e$; $\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{d}_0 \perp b\,d$, $\mathfrak{e}_0\,\mathfrak{d}_0 \perp e\,d$. Úplná přemístění styčných bodů jsou nyní dána vzdálenostmi zatímních nových poloh od opačně otočených poloh původních, totiž $\overline{\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{b}}$, $\overline{\mathfrak{d}_0\,\mathfrak{d}}$, $\overline{\mathfrak{e}_0\,\mathfrak{e}}$, ...

Příklad 41. Vyšetřme přetvoření trojúhelníkové soustavy $a\,b\,f$, jejíž bod a je pevný a bod b je spojen prutem s pevným bodem c mimo soustavu (obr. 186).

V tomto případě lze přímo užíti původních výminek podporových. Poněvadž je bod a i bod c pevný, je v obrazci translokačním $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{c} \equiv o$. Od bodů a, c můžeme jíti do bodu b, který je s bodem a i s bodem c spojen prutem. Od bodů a, b postoupíme pak k bodu d, od bodů b, d k bodu e a od bodů d, e k bodu f. V obrazci translokačním stanovíme tak správné nové polohy $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ a správná úplná přemístění $\overline{o\,\mathfrak{b}}$, $\overline{o\,\mathfrak{d}}$, $\overline{o\,\mathfrak{e}}$, $\overline{o\,\mathfrak{f}}$.

Příklad 42. Příhradový spojitý nosník kloubový podle obr. 187 je podepřen v bodě b pevně, v bodech a, c, d posouvatelně po vodorovné; jde o jeho přetvoření.[1])



Obr. 187.

Roztažení prutů vypočteme z průřezů a osových sil prutů, jejichž znaménka jsou připsána v obr. 187. Sestrojíme pak nejprve translokační obrazec dílu $a\,e$ z libovolných výminek zatímních, na př. že bod a je pevný, h posouvatelný ve směru $a\,h$; tu je v obrazci translokačním úsek $\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{h}}$ roven roztažení prutu $a\,h$. Od bodů a, h jdeme postupně k bodům g, i, b, k, e a určíme v translokačním obrazci jejich zatímní nové polohy $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{e}$. Nyní se vrátíme k výminkám původním. Je-li bod b pevný, je nová jeho poloha v poloze původní, označíme tedy $\mathfrak{b} \equiv o$, pokládajíce o za původní polohu všech bodů styčných. Správná nová poloha $\mathfrak{a}^+$ má býti na vodorovnici původní polohy o; dostaneme ji tam, otočíme-li soustavu $a\,e$ kolem pevného bodu b, až bod a přijde na vodorovnici původní polohy. Otočení bodu a jest $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^+ \perp a\,b$, čímž je bod $\mathfrak{a}^+$ určen. Úplná přemístění ostatních bodů styčných stanovíme nejsnáze, otočíme-li původní polohy jejich kolem bodu b o týž úhel středový, o jaký se otáčí bod a, avšak v protivném smyslu; obdržíme tím translokační obrazec $\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{e}_0\ldots$ jehož všechny strany jsou kolmé ke sdruženým stranám mnohostranu osového $a\,b\,e\ldots$ Poněvadž je bod b pevný, je jeho otočení $\overline{o\,\mathfrak{b}_0} = 0$; pro bod a platí $\overline{o\,\mathfrak{a}_0} \# \overline{\mathfrak{a}^+\mathfrak{a}}$. Další body sestrojíme, vedeme-li $\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{g}_0 \perp a\,g$, $\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{g}_0 \perp b\,g$; $\mathfrak{g}_0\,\mathfrak{h}_0 \perp g\,h$, $\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{h}_0 \perp a\,h$; $\mathfrak{g}_0\,\mathfrak{i}_0 \perp g\,i$, $\mathfrak{h}_0\,\mathfrak{i}_0 \perp h\,i$; ... Úplná přemístění styčných bodů jsou pak $\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}_0\,\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_0\,\mathfrak{h}$, ... $\mathfrak{e}_0\,\mathfrak{e}$.

[1]) Srovnej *H. F. B. Müller-Breslau*, „Die graphische Statik der Baukonstruktionen" Bd. II, 1. Abt. (Lipsko 1892), str. 64 a d.

Dále sestrojíme translokační obrazec dílu $e\,f$, pokládajíce zatím bod e za pevný, bod m za posouvatelný ve směru $e\,m$; v obrazci translokačním se pak rovná úsek $\overline{\mathfrak{e}'\,\mathfrak{m}'}$ roztažení prutu $e\,m$, s jehož osou je rovnoběžný, a od bodů e, m můžeme jíti k bodům l, n, f, jež mají v obrazci translokačním zatímní nové polohy $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{n}'$, $\mathfrak{f}'$. Také translokační obrazec dílu $f\,d$ sestrojíme zatím na př. z výminek, že bod d je pevný, bod r posouvatelný ve směru $d\,r$; tu se rovná $\overline{\mathfrak{d}\,\mathfrak{r}}$ roztažení prutu $d\,r$, od bodů d, r jdeme pak k bodům s, q, c, p, f, jejichž zatímní nové polohy jsou $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{f}$.

K původním výminkám se vrátíme u dílu $e\,f$ v obrazci translokačním, přeložíme-li jeho počátek a otočíme-li přiměřeně původní polohy všech styčných bodů tohoto dílu; otočením původních poloh obdržíme translokační obrazec $\mathfrak{e}'_0\,\mathfrak{f}'_0$, jehož všechny strany jsou kolmé ke sdruženým stranám osového mnohostranu $e\,f$. Kdybychom měli obrazec $\mathfrak{e}'_0\,\mathfrak{f}'_0$, bylo by $\overline{\mathfrak{e}'_0\,\mathfrak{e}'}$ správné úplné přemístění bodu e; toto přemístění jsme však již určili z přetvoření dílu $a\,e$ délkou $\overline{\mathfrak{e}_0\,\mathfrak{e}}$, proto jest $\overline{\mathfrak{e}'_0\,\mathfrak{e}'} \# \overline{\mathfrak{e}_0\,\mathfrak{e}}$. Dále musí býti $\mathfrak{e}'_0\,\mathfrak{f}'_0 \perp e\,f$; tím jest určena jedna přímka, na níž je bod $\mathfrak{f}'_0$. Obdobně se v translokačním obrazci dílu $f\,d$ vrátíme k původním výminkám podporovým, přeložíme-li počátek a otočíme-li původní polohy všech styčných bodů tohoto dílu; tímto otočením vzniká translokační obrazec $\mathfrak{f}_0\,\mathfrak{d}_0$ podobný osovému mnohostranu $f\,d$, k jehož stranám jsou sdružené strany obrazce $\mathfrak{f}_0\,\mathfrak{d}_0$ kolmé. Kdybychom měli tento obrazec, byla by $\overline{\mathfrak{c}_0\,\mathfrak{c}}$, $\overline{\mathfrak{d}_0\,\mathfrak{d}}$ správná úplná přemístění bodů c, d; body c, d jsou však posouvatelné po vodorovné, jsou tedy body $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{d}_0$ na vodorovnicích bodů $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$. Z podobnosti obrazců $f\,d$ a $\mathfrak{f}_0\,\mathfrak{d}_0$ plyne, že vodorovné vzdálenosti bodů f, c, d mají týž poměr jako svislé vzdálenosti bodů $\mathfrak{f}_0$, $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{d}_0$, tedy za označení podle obr. 187

$$l_3 : d_2 = l'_3 : d'_2 .$$

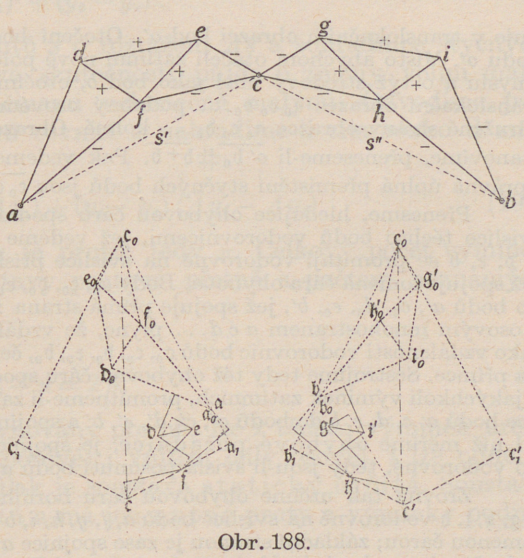
Tomu vyhovíme, promítneme-li body c, d svisle na vodorovné přímky $\mathfrak{c}_0\,\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}_0\,\mathfrak{d}$ do bodů $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$, jejichž spojnici protneme svislicí bodu f v bodě $\mathfrak{f}''$; na vodorovnici bodu $\mathfrak{f}''$ je pak bod $\mathfrak{f}_0$. Vzdálenost bodu $\mathfrak{f}$ od vodorovnice bodu $\mathfrak{f}''$ znamená tedy svislé posunutí (svislou složku úplného přemístění) $\Delta\,y_f$ bodu f. Přeneseme-li v translokačním obrazci dílu $e\,f$ posunutí $\Delta\,y_f = \overline{\mathfrak{f}'_1\,\mathfrak{f}'}$ na svislici bodu $\mathfrak{f}'$ a vedeme-li bodem $\mathfrak{f}'_1$ vodorovnou, seče přímku $\mathfrak{e}'_0\,\mathfrak{f}'_0 \perp e\,f$ v bodě $\mathfrak{f}'_0$. Délka $\overline{\mathfrak{f}'_0\,\mathfrak{f}'}$ znamená již správné úplné přemístění bodu f; jeho vodorovnou složku $\Delta\,x_f = \overline{\mathfrak{f}'_0\,\mathfrak{f}'_1}$ přeneseme do translokačního obrazce dílu $f\,d$ na vodorovnici bodu $\mathfrak{f}$, kdež sestrojíme $\overline{\mathfrak{f}_1\,\mathfrak{f}} = \overline{\mathfrak{f}'_0\,\mathfrak{f}'_1}$. Na svislici bodu $\mathfrak{f}_1$ je pak bod $\mathfrak{f}_0$, jenž je zároveň na vodorovnici bodu $\mathfrak{f}''$; $\overline{\mathfrak{f}_0\,\mathfrak{f}}$ znamená opět správné úplné přemístění bodu f a jest $\overline{\mathfrak{f}_0\,\mathfrak{f}} \# \overline{\mathfrak{f}'_0\,\mathfrak{f}'}$, čemuž jsme vyhověli.

Z bodů $\mathfrak{e}'_0$, $\mathfrak{f}'_0$ určíme snadno ostatní body obrazce $\mathfrak{e}'_0\,\mathfrak{m}'_0\,\mathfrak{f}'_0\,\mathfrak{n}'_0\,\mathfrak{l}'_0$, vedeme-li $\mathfrak{e}'_0\,\mathfrak{l}'_0 \perp e\,l$, $\mathfrak{f}'_0\,\mathfrak{l}'_0 \perp f\,l$; $\mathfrak{l}'_0\,\mathfrak{m}'_0 \perp l\,m$, $\mathfrak{e}'_0\,\mathfrak{m}'_0 \perp e\,m$; $\mathfrak{l}'_0\,\mathfrak{n}'_0 \perp l\,n$, $\mathfrak{m}'_0\,\mathfrak{n}'_0 \perp m\,n$. Správná úplná přemístění bodů l, m, n jsou nyní $\overline{\mathfrak{l}'_0\,\mathfrak{l}'}$, $\overline{\mathfrak{m}'_0\,\mathfrak{m}'}$, $\overline{\mathfrak{n}'_0\,\mathfrak{n}'}$. Z bodu $\mathfrak{f}_0$ a z výminek, že jsou body $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{d}_0$ na vodorovnicích bodů $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, určíme obdobně obrazec $\mathfrak{f}_0\,\mathfrak{c}_0\,\mathfrak{d}_0 \ldots$, vedeme-li $\mathfrak{f}_0\,\mathfrak{c}_0 \perp f\,c$; $\mathfrak{c}_0\,\mathfrak{d}_0 \perp c\,d$; $\mathfrak{f}_0\,\mathfrak{p}_0 \perp f\,p$, $\mathfrak{c}_0\,\mathfrak{p}_0 \perp c\,p$; ... Body c, d, p, ... mají správná úplná přemístění $\overline{\mathfrak{c}_0\,\mathfrak{c}}$, $\overline{\mathfrak{d}_0\,\mathfrak{d}}$, $\overline{\mathfrak{p}_0\,\mathfrak{p}}$, ... V obrazcích translokačních je vyhověno jak všem původním výminkám podporovým, tak i tomu, že díly $a\,e$, $e\,f$, $f\,d$ jsou v bodech e, f spojeny; musí tedy k bodu e náležeti v dílu $a\,e$ totéž úplné přemístění jako v dílu $e\,f$ a k bodu f totéž úplné přemístění v dílu $e\,f$ jako v dílu $f\,d$.

Příklad 43. Vyšetřme přetvoření příhradového oblouku o třech kloubech a, b, c, který je v bodě a i v bodě b podepřen pevně (obr. 188).[1])

Sestrojíme translokační obrazec dílu $a\,c$, pokládajíce zatím na př. bod d za pevný, bod e za posouvatelný ve směru $d\,e$; určíme tím zatímní nové polohy $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, při čemž jest úsek $\overline{\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}}$ rovnoběžný s osou prutu $d\,e$ a rovná se roztažení tohoto prutu. Z tohoto obrazce translokačního určíme změnu vzdálenosti $\overline{a\,c} = s'$, vedeme-li $\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_1 \parallel a\,c$, $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1 \perp a\,c$; tu jest $\Delta\,s' = \overline{\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{c}}$ a znamená zmenšení vzdálenosti s', jelikož úseky $a\,c$, $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{c}$ mají smysly protivné.

Obdobně sestrojíme translokační obrazec dílu $b\,c$ na př. zatím z výminek, že je bod g pevný, bod i posouvatelný po přímce $g\,i$;



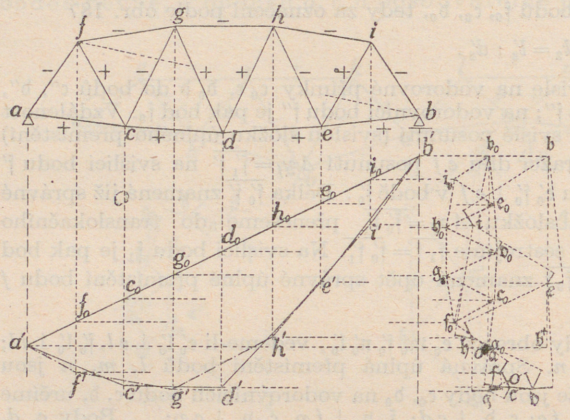
Obr. 188.

[1]) Srovnej *H. F. B. Müller-Breslau* „Die graphische Statik der Baukonstruktionen“, Bd. II, 1. Abt. (Lipsko 1892), str. 67.

dostaneme zatímní nové polohy b', c', g', h', i', úsek $g'i'$ je pak rovnoběžný s osou prutu $g\,i$ a rovná se jeho roztažení. Stanovíme nyní změnu vzdálenosti $\overline{b\,c} = s''$, vedeme-li $c'b_1' \parallel b\,c$, $b'b_1' \perp b\,c$; tím vyjde $\Delta s'' = \overline{b_1'c'}$ a znamená zmenšení vzdálenosti s'', poněvadž jsou úseky $b\,c$ a $b_1'c'$ smyslu nesouhlasného.

Ze změn $\Delta s'$, $\Delta s''$ určíme správné úplné přemístění $\overline{c_0\,c} \# \overline{c_0'\,c'}$ bodu c, přeneseme-li z bodu c změnu $\Delta s'' = \overline{b_1'c'} = \overline{c_1\,c}$ na rovnoběžku se spojnicí $b\,c$ a vedeme-li $c_1\,c_0 \perp b\,c$; v průsečíku s $a_1\,a \perp a\,c$ dostaneme bod c_0. V druhém obrazci translokačním přeneseme $\Delta s' = \overline{a_1\,c} = \overline{c_1'c'}$ na rovnoběžku se spojnicí $a\,c$ a vedeme $c_1'c_0' \perp a\,c$; tím sestrojíme na přímce $b'b_1' \perp b\,c$ bod c_0'. Poněvadž je bod a pevný, jest $a_0 \equiv a$; z bodů a_0, c_0 sestrojíme obrazec $a_0\,f_0\,c_0\,e_0\,b_0$, jehož všechny strany jsou kolmé ke sdruženým stranám osového mnohostranu $a\,f\,c\,e\,d$. Správná úplná přemístění bodů c, d, e, ... jsou $\overline{c_0\,c}$, $\overline{b_0\,b}$, $\overline{e_0\,e}$, ... Obdobně je v dílu $b\,c$ bod b pevný, poznačíme tedy $b_0' \equiv b'$ a z bodů b_0', c_0' sestrojíme obrazec $b_0'\,h_0'\,c_0'\,g_0'\,i_0'$, jehož všechny strany jsou kolmé ke sdruženým stranám osového mnohostranu $b\,h\,c\,g\,i$. Body c, g, h... mají správná úplná přemístění $\overline{c_0'c'} \# \overline{c_0\,c}$, $\overline{g_0'g'}$ $\overline{h}$

Příklad 44. Sestrojme z translokačního obrazce ohybovou čáru příhradového nosníku soustavy trojúhelníkové (obr. 189).



Obr. 189.

Translokačním obrazcem jsou dána úplná přemístění všech bodů styčných, tedy i jejich svislá posunutí jakožto svislé složky úplných přemístění. Přeneseme-li svislá posunutí téhož pasu jakožto pořadnice od přímé osy, spojuje koncové body ohybová čára toho pasu; je-li soustava mezipasových prutů kosoúhlá, lze ovšem sestrojiti najednou ohybovou čáru pro oba pasy. Translokační obrazec sestrojíme z jakýchkoli výminek zatímních, na př. že je bod c pevný, bod d posouvatelný po přímce $c\,d$; tu jest $c \equiv o$, úsek $\overline{c\,b}$ je pak rovnoběžný s osou prutu $c\,d$ a rovná se jeho roztažení. Z bodů c, b určíme postupně zatímní nové polohy g, f, a a h, e, i, b. Příhradový nosník je podepřen v bodě a pevně, v bodě b posouvatelně po vodorovné; tomu vyhovíme, přeložíme-li počátek translokačního obrazce do bodu $o' \equiv a$ a otočíme-li přetvořenou soustavu kolem pevného bodu a tak, aby byla nová poloha bodu b na vodorovnici, vedené polohou původní, kterou znázorňuje v translokačním obrazci bod o'. Otočení bodu b jest $b\,b^+ \perp a\,b$ a bod b^+ je na vodorovnici bodu o'. Místo abychom otáčeli zatímní nové polohy všech bodů styčných kolem bodu a v témž smyslu a o týž středový úhel jako bod b, otočíme opačně jejich polohy původní. Obdržíme tím translokační obrazec $a_0\,c_0\,b_0$... podobný osovému mnohostranu $a\,c\,d$..., k jehož stranám jsou sdružené strany obrazce $a_0\,c_0\,b_0$... kolmé. Obrazec ten jest určen bodem $a_0 \equiv a$ a bodem b_0, jejž stanovíme, přeneseme-li $o'\,b_0 \# b^+\,b$. Pak vedeme $a_0\,f_0 \perp a\,f$, $b_0\,f_0 \perp b\,f$; $a_0\,c_0 \perp a\,c$, $f_0\,c_0 \perp f\,c$; ... Správná úplná přemístění styčných bodů jsou $\overline{c_0\,c}$, $\overline{b_0\,b}$, $\overline{e_0\,e}$, ...

Přenesme, hledajíce ohybovou čáru spodního pasu, svislá posunutí bodů a, c, d, e, b na svislice těchto bodů vodorovnicemi, jež vedeme koncovými body úplných přemístění. Body a, c, b, e, b se promítají vodorovně na svislice příslušných bodů styčných do bodů a', c', d', e', b', jež spojuje lomená čára ohybová. Body a_0, c_0, b_0, e_0, b_0 se pak promítají vodorovně na tytéž svislice do bodů a', c_0, d_0, e_0, b', jež spojuje přímá strana základní, neboť z podobnosti obrazce $a_0\,c_0\,b_0$ ... s osovým mnohostranem $a\,c\,d$... plyne, že vzdálenosti svislic bodů a, c, d, e, b mají týž poměr jako vzdálenosti vodorovnic bodů a_0, c_0, b_0, e_0, b_0, čemuž je vyhověno jen, jsou-li body a', c_0, d_0, e_0, b' na přímce. Sestrojíme tedy též ohybovou čáru spodního pasu z translokačního obrazce odvozeného z jakýchkoli výminek zatímních, promítneme-li zatímní nové polohy a, c, b, e, b vodorovně na svislice bodů a, c, d, e, b do bodů a', c', d', e', b' a spojíme-li tyto body lomenou čarou; základní stranou, od níž měříme ohybové pořadnice, je spojnice $a'\,b'$, je-li bod a pevný, bod b posouvatelný po vodorovné, tedy jsou-li svislá posunutí bodů a, b rovna nule.

Zrovna tak určíme ohybovou čáru horního pasu, promítneme-li zatímní nové polohy a, f, g, h, i, b vodorovně na svislice bodů a, f, g, h, i, b do bodů a', f', g', h', i', b' a spojíme-li tyto body lomenou čarou; základní stranou je zase spojnice a', b', na níž jsou podle předchozího též vodorovné průměty f_0, g_0, h_0, i_0 bodů f_0, g_0, h_0, i_0 na svislice bodů f, g, h, i. Je-li ve styčných bodech spojení kloubové, zůstanou pruty i po přetvoření přímé; ohybová čára pasu dává tedy ohybové pořadnice všech, i mimostyčných bodů pasu.

Obrazec $a_0 c_0 b_0 \ldots$ je translokačním obrazcem původní soustavy, jejíž všechny body otáčíme kolem bodu a o týž středový úhel, neměnice tvaru soustavy. Vodorovné průměty f_0, c_0, g_0, ... bodů f_0, c_0, g_0, ... na svislice styčných bodů f, c, g, ... spojuje ohybová čára soustavy pro uvedené přetvoření. Z toho plyne, že nemění-li prutová soustava svého tvaru, jest její ohybovou čarou přímka za jakéhokoli přetvoření, jež se pak omezuje jen na posouvání a otáčení.

b) Řešení počtářské.

54. Věta o virtuálných pracích. Theoreticky lze obecně vždy stanoviti veškeré neznámé síly (reakce podporové i síly osové) a zároveň přetvoření jakékoli soustavy prutové, jež bude dáno počtářsky změnami souřadnic styčných bodů. Neboť obsahuje-li soustava β styčných bodů, π prutů, α_1 podpor posouvatelných a α_2 podpor pevných, má π neznámých sil osových a $\alpha_1 + 2\alpha_2$ neznámých složek reakcí podporových. Přetvoření soustavy určíme změnami souřadnic styčných bodů; těchto změn je 2β, poněvadž je poloha každého bodu určena dvěma souřadnicemi. Celkový počet neznámých sil i změn souřadnic je tedy $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\beta + \pi$.

Neznámé síly jsou vázány 2β výminkami rovnováhy ve všech styčných bodech, neboť odejmeme-li pruty a nahradíme-li každý prut osovou silou v obou jeho koncových bodech, dostaneme v každém styčném bodě rovnováhovou soustavu sil osových i vnějších, jež působí v paprscích téhož svazku. Pro přetvoření soustavy platí především výminky podporové. V každé pevné podpoře jsou dvě výminky $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, jelikož pevný bod svého místa nemění; v každé posouvatelné podpoře jsou změny souřadnic vázány jednou výminkou tvaru

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha,$$

je-li α odchylka přímky, po které se podpora posouvá, od osy X. Ve všech α_1 podporách posouvatelných a α_2 podporách pevných dostaneme $\alpha_1 + 2\alpha_2$ výminek podporových. Další výminky pro přetvoření soustavy plynou ze spojení styčných bodů pruty. Pro libovolný prut $s = \overline{m_1 m_2}$ (obr. 190), jehož krajní body m_1, m_2 mají v soustavě X, Y souřadnice x_1, y_1 a x_2, y_2, platí

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Přetvořením soustavy se mění délky prutů s o roztažení Δs a souřadnice styčných bodů x, y o změny Δx, Δy. Poněvadž ve skutečnosti půjde o změny velmi malé, lze přibližně počítati s nimi jako s veličinami nekonečně malými. Odvodíme pak základní rovnici, diferencujeme-li poslední rovnici a nahradíme-li znaménko d znaménkem Δ, tedy

$$s \cdot \Delta s = (x_2 - x_1)(\Delta x_2 - \Delta x_1) + (y_2 - y_1)(\Delta y_2 - \Delta y_1). \qquad (190)$$

Takových rovnic lze napsati tolik, kolik je prutů, tedy π. Celkový počet výminek $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\beta + \pi$ souhlasí u každé soustavy prutové přesně s počtem neznámých sil i změn souřadnic.

Je-li neznámých sil

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \pi = 2\beta,$$

t. j. tolik, kolik je statických výminek rovnováhy pro ně, lze z těchto výminek určiti veškeré neznámé síly vnější (reakce podporové) i vnitřní (síly osové), i lze odděliti vyšetřování neznámých sil a přetvoření. Pak je soustava staticky určitá. Soustava staticky určitá je zároveň tvarově určitá a má jen nutné pruty a výminky podporové.

Předpokládejme dále, že jde o staticky určitou soustavu prutovou, jejíž osové síly jsme již určili; průřezy prutů buďtež známy. Pak lze vypočísti roztažení prutů

Δs podle vzorce (189). Chceme nyní řešiti počtem přetvoření soustavy, pro něž platí π výminek ve tvaru rovnic (190) a $\alpha_1 + 2\alpha_2$ výminek podporových. Neznámých změn souřadnic bodů styčných jest 2β; jelikož pak je soustava staticky určitá, platí

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \pi = 2\beta,$$

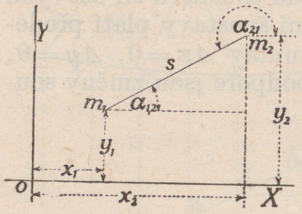
tedy se počet výminek rovná počtu neznámých. Lze proto z rovnic (190) napsaných pro všechny pruty a z výminek podporových stanoviti změny souřadnic Δx, Δy všech bodů styčných.

Rovnici (190) upravme na příhodnější tvar dělením délkou s a dosazením

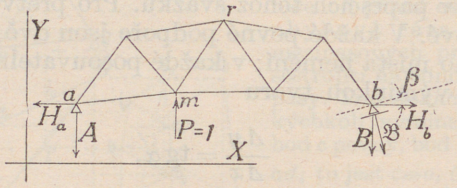
$$\frac{x_2 - x_1}{s} = \cos \alpha_{1,2} = -\cos \alpha_{2,1}, \qquad \frac{y_2 - y_1}{s} = \sin \alpha_{1,2} = -\sin \alpha_{2,1},$$

znamená-li $\alpha_{1,2}$ úhel přímky $m_1 m_2$ s kladnou polovicí osy X a $\alpha_{2,1} = \alpha_{1,2} + 180°$ úhel přímky $m_2 m_1$ s kladnou polovicí osy X (obr. 190). Z rovnice (190) vyjde

$$\Delta s = -\Delta x_1 \cos \alpha_{1,2} - \Delta x_2 \cos \alpha_{2,1} - \Delta y_1 \sin \alpha_{1,2} - \Delta y_2 \sin \alpha_{2,1}. \qquad (190^a)$$



Obr. 190.



Obr. 191.

Taková rovnice platí pro každý prut. Vzhledem k neznámým změnám souřadnic Δx, Δy jsou tyto rovnice i výminky podporové lineárné. Jde-li o jedinou neznámou, na př. o změnu Δy_m pro styčný bod m, lze ji vypočísti z rovnic (190^a), napsaných pro všechny pruty, eliminační methodou Bézoutovou: násobíme každou rovnici jistým součinitelem σ, sečteme všechny rovnice a zvolíme součinitele σ tak, aby všechny neznámé až na Δy_m vymizely. Zároveň musíme ovšem dbáti též výminek podporových. Násobíme-li rovnici (190^a) součinitelem σ a sečteme-li pak tyto rovnice pro všechny pruty, vyjde

$$\Sigma \sigma \cdot \Delta s = -\Sigma(\Delta x_i \cdot \Sigma_i \sigma \cos \alpha) - \Sigma(\Delta y_i \cdot \Sigma_i \sigma \sin \alpha). \qquad (191)$$

Na pravé straně sčítáme podle styčných bodů; v bodě i vyjde $-\Delta x_i$ násobené součtem $\sigma \cos \alpha$ pro všechny pruty, jež se v tom bodě stýkají, a $-\Delta y_i$ násobené součtem $\sigma \sin \alpha$ pro tytéž pruty.

Jde-li o Δy_m, stanovíme součinitele σ jako osové síly prutů, působí-li na danou soustavu prutovou v bodě m ve smyslu hledaného přetvoření břímě $P = 1$ (obr. 191). Neboť pak platí v každém nezatíženém styčném bodě r výminky rovnováhy

$$\Sigma_r \sigma \cos \alpha = 0, \qquad \Sigma_r \sigma \sin \alpha = 0.$$

V pevné podpoře a jest $\Delta x_a = 0$, $\Delta y_a = 0$. V podpoře b, jež se posouvá po přímce odchýlené od osy X o úhel β, platí

$$\frac{\Delta y_b}{\Delta x_b} = \operatorname{tg} \beta;$$

reakce $\mathfrak{B}$ působí v podpoře b kolmo ke směru posouvání a má svislou složku B, vodorovnou H_b, jež jsou vázány rovnicí

$$\frac{H_b}{B} = \operatorname{tg} \beta.$$

V bodě b platí výminky rovnováhy

$$-B+\Sigma_b\,\sigma\sin\alpha=0,\qquad H_b+\Sigma_b\,\sigma\cos\alpha=0;$$

proto jest

$$-\Delta x_b\cdot\Sigma_b\,\sigma\cos\alpha-\Delta y_b\cdot\Sigma_b\,\sigma\sin\alpha=\Delta x_b\cdot H_b-\Delta y_b\cdot B=\Delta x_b\cdot H_b-\Delta x_b\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\frac{H_b}{\operatorname{tg}\beta}=0.$$

Pro bod m máme konečně výminky rovnováhy

$$\Sigma_m\,\sigma\cos\alpha=0,\qquad \Sigma_m\,\sigma\sin\alpha+1=0;$$

z poslední plyne

$$\Sigma_m\,\sigma\sin\alpha=-1.$$

Všemi odvozenými hodnotami vychází z rovnice (191)

$$\Delta y_m=\Sigma\sigma\cdot\Delta s; \tag{192}$$

tato rovnice platí pro libovolnou polohu souřadných os X, Y.

Mysleme si v bodě m místo $P=1$ libovolné břímě P_m téhož směru a znamenejme $\Delta y_m=\Delta p_m$ jakožto posunutí bodu m ve směru pomocného břemene P_m. Vyvodí-li břímě $P=1$ v libovolném prutu sílu σ, vyvodí břímě P_m, jež působí v témž bodě m a v témž směru jako $P=1$, v témž prutu sílu σ. $P_m=S_m$. Násobíme-li rovnici (192) velikostí břemene P_m, vyjde

$$P_m\cdot(\Delta p_m)=\Sigma S_m\cdot(\Delta s). \tag{193}$$

Roztažení Δs a posunutí Δp_m mohou býti vyvozena čímkoli, nesouvisí tedy se silami S_m a P_m, jež jsou zde pouhými silami pomocnými; to je naznačeno v posledním vzorci závorkami. Nechť působí dále na soustavu prutovou soustava vnějších sil $P_1, P_2, P_3, \ldots$; vyvodí-li břímě $P_1, P_2, P_3, \ldots$ v libovolném prutu osovou sílu $S_1, S_2, S_3, \ldots$, vyvodí v témž prutu všechna břemena osovou sílu

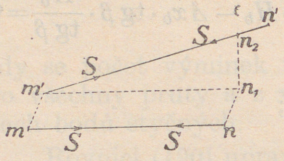
$$S=S_1+S_2+S_3+\ldots.$$

Pro každé břímě lze si mysliti jinou polohu os X, Y, a to tak, aby osa Y byla rovnoběžná s paprskem břemene a byla kladná ve směru, v němž působí břímě. Pak platí pro každé břímě vzorec tvaru (193). Sečteme-li tyto vzorce pro všechna břemena, obdržíme rovnici

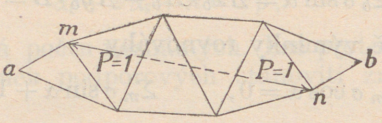
$$\Sigma P\cdot(\Delta p)=\Sigma S\cdot(\Delta s). \tag{194}$$

Roztažení (Δs) a posunutí (Δp) mohou býti vyvozena čímkoli, na př. jakýmkoli zatížením nebo změnou teploty, po případě popuštěním podpor a p.; nesouvisí tedy (Δs) a (Δp) obecně s vnějšími silami P a osovými silami S jimi vyvozenými, jež jsou zde pouhými myšlenými, pomocnými silami. Třeba jen předpokládati, že jsou (Δs) libovolná, možná a velmi malá roztažení prutů, (Δp) příslušná posunutí styčných bodů ve směrech břemen P. Takovéto možné, velmi malé změny nazýváme *virtuálnými změnami*; součin $P\cdot(\Delta p)$ je pak *virtuálnou prací* vnější síly. Prut mn (obr. 192) nahrazujeme v obou bodech styčných osovou silou S, jež působí od bodu styčného, je-li kladná (tah). Přetvořením nabude prut mn polohy $m'n'$, ke které přejdeme z původní polohy třemi pohyby: posunutím $\overline{mm'}\#\overline{nn_1}$, otočením $n_1n_2\perp mn$ a roztažením $\overline{n_2n'}=(\Delta s)$. Poněvadž jde prakticky o změny velmi malé, rýsujeme přibližně otočení jakožto kolmici k poloměru a můžeme předpokládati, že v původní i přetvořené soustavě působí tytéž síly osové. Při posunutí konají síly S práce rovné a protivné, jež se ruší; při otočení nekonají síly S žádné práce a za roztažení koná síla S, jež působí v bodě n, práci $-S\cdot(\Delta s)$, což je virtuálná práce síly osové. Nehledíme-li ke znaménku, můžeme součin $S\cdot(\Delta s)$ pokládati za virtuálnou práci osové síly.

K vnějším silám P lze čítati též reakce podporové, s nimiž jsou daná břemena v rovnováze. Jsou-li podpory pevné, nekonají reakce podporové žádné práce, poněvadž nenastane posunutí ve směru reakcí; popustí-li však podpory, konají i reakce virtuálnou práci, jež se určí jako u břemen, a tuto práci třeba též uvažovati. Rovnici (194) lze vysloviti *větou o virtuálných pracích*, jíž použil k řešení soustav prutových nejprve *Otto Mohr*:[1]) Působí-li na soustavu prutovou rovnováhová soustava sil vnějších, je součet virtuálných prací sil vnějších roven součtu virtuálných prací sil vnitřních, bereme-li za virtuálnou práci síly vnitřní (osové) pouhý součin $S \cdot (\Delta s)$.



Obr. 192.



Obr. 193.

55. Užití věty o virtuálných pracích. α) ***Řešení přetvoření.*** Posunutí styčného bodu m v libovolném směru Y vypočteme ze vzorce (192), dosazujíce za σ osové síly prutů, vyvozené břemenem $P = 1$, jež působí v bodě m ve směru hledaného posunutí. Lze však větou o virtuálných pracích stanoviti i jiná přetvoření. Jde-li o jakékoli přetvoření, zvolíme nejlépe pomocné síly vnější tak, aby jejich virtuálná práce dala přímo hledané přetvoření. Hledáme-li na př. změnu vzdálenosti $s' = \overline{mn}$ dvou styčných bodů prutem nespojených (obr. 193), dáme v bodech m, n působiti silám $P = 1$ ve smyslu zvětšení vzdálenosti s' (do bodů m, n); tyto vnější síly jsou samy v rovnováze, nevyvodí tedy reakcí v podporách, je-li mezi body m, n jediná tvarově určitá soustava prutová. Vnější síly $P = 1$, jež působí na body m, n, dají virtuálnou práci $1 \cdot \Delta s'$, změní-li se přetvořením soustavy prutové, jež pochodí z jakékoli příčiny, vzdálenost s' o $\Delta s'$; lze si totiž mysliti, že bod m zůstane na svém místě a bod n změní svou polohu, složka přemístění bodu n do směru s' je pak $\Delta s'$. Znamenáme-li σ osové síly, jež uvedené vnější síly v prutech soustavy vyvozují, plyne z rovnice (194) vzorec

$$\Delta s' = \Sigma \sigma \cdot \Delta s. \qquad (192^a)$$

Obdobně by se řešila i jiná přetvoření.

Příklad 45. Vypočtěme snížení bodu c prutové soustavy v obr. 194 (jednoduchého věšadla).

V bodě c dáme působiti dolů svislému břemeni $P = 1$ a určíme osové síly σ. V podporách a, b vznikají svislé reakce souměrné $A = B = \frac{1}{2}$, je-li dána soustava souměrná. Rovnováha sil A, σ_1, σ_2, jež působí na bod a, dává výminky

$$\sigma_1 + \sigma_2 \cos \alpha = 0, \qquad \frac{1}{2} + \sigma_2 \sin \alpha = 0,$$

z nichž plyne

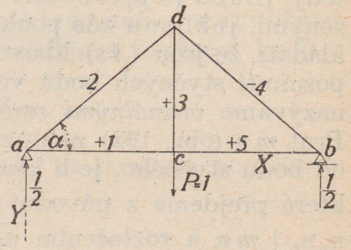
$$\sigma_2 = -\frac{1}{2 \sin \alpha}, \qquad \sigma_1 = -\sigma_2 \cos \alpha = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Poněvadž je souměrná soustava i vnější síly, jsou v souměrných prutech rovné síly osové, tedy

$$\sigma_1 = \sigma_5, \qquad \sigma_2 = \sigma_4.$$

Z rovnováhy v bodě c určíme pak

$$\sigma_3 = 1.$$



Obr. 194.

[1]) Viz „Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover", r. 1874, str. 223 a d., kde je použito věty o virtuálných pracích k řešení prutové soustavy staticky neurčité; v časopise „Zivilingenieur", r. 1885, str. 289 a d. užívá *Mohr* téže věty i u soustav staticky určitých. Srovnej *O. Mohr* „Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik" (Berlín 1906), str. 431.

Podle vzorce (192) vypočteme hledané snížení

$$\Delta y_c = \sigma_1 \cdot \Delta s_1 + \sigma_2 \cdot \Delta s_2 + \sigma_3 \cdot \Delta s_3 + \sigma_4 \cdot \Delta s_4 + \sigma_5 \cdot \Delta s_5 .$$

Šlo by na př. o přetvoření souměrné, tedy $\Delta s_1 = \Delta s_5$, $\Delta s_2 = \Delta s_4$; pak jest

$$\Delta y_c = 2\,\sigma_1 \cdot \Delta s_1 + 2\,\sigma_2 \cdot \Delta s_2 + \sigma_3 \cdot \Delta s_3 = \frac{\Delta s_1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{\Delta s_2}{\sin\alpha} + \Delta s_3 .$$

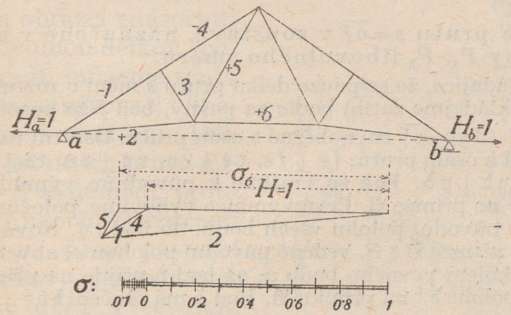
Příklad 46. Vypočísti jest změnu rozpětí Δl a snížení vrcholu Δy_c soustavy prutové, jejíž přetvoření jsme řešili graficky v příkl. 37.

V příkladě 37 jsme určili roztažení prutů

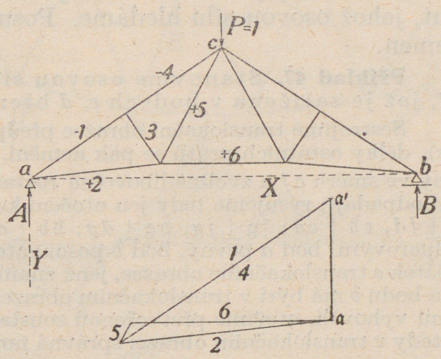
$$\Delta s_1 = -0{,}055, \quad \Delta s_2 = +0{,}150, \quad \Delta s_3 = -0{,}025, \quad \Delta s_4 = -0{,}046, \quad \Delta s_5 = +0{,}094, \quad \Delta s_6 = +0{,}122 \text{ cm}.$$

a) Změnu vzdálenosti $\overline{a\,b} = l$ určíme podle vzorce (192^a)

$$\Delta l = \Sigma \sigma \cdot \Delta s,$$



Obr. 195.



Obr. 196.

dosazujíce za součinitele σ osové síly prutů, jež jsou vyvozeny vnějšími silami $H_a = 1$, $H_b = 1$ (obr. 195), působícími v bodech a, b ve smyslu zvětšení vzdálenosti l. Obě vnější síly jsou v rovnováze, nevyvodí tedy podporových reakcí; osové síly σ určíme na př. graficky methodou bodů styčných a dostaneme

$$\sigma_1 = \sigma_4 = -0{,}21, \quad \sigma_2 = +1{,}18, \quad \sigma_3 = 0, \quad \sigma_5 = +0{,}13, \quad \sigma_6 = +1{,}11.$$

V souměrných prutech jsou roztažení Δs i síly σ rovny, proto platí

$$\Delta l = 2 \cdot \sum_1^5 \sigma \cdot \Delta s + \sigma_6 \cdot \Delta s_6 = 2 \cdot (0{,}21 \cdot 0{,}055 + 1{,}18 \cdot 0{,}150 + 0 + 0{,}21 \cdot 0{,}046 + 0{,}13 \cdot 0{,}094) + 1{,}11 \cdot 0{,}122 = 0{,}557 \text{ cm};$$

grafickým řešením v příkladě 37 vyšlo $\Delta l = 0{,}555$ cm.

b) Snížení vrcholu vypočteme podle vzorce (192)

$$\Delta y_c = \Sigma \sigma \cdot \Delta s,$$

jsou-li σ osové síly prutů, vyvozené břemenem $P = 1$ (obr. 196), jež působí v bodě c dolů (ve směru hledaného posunutí). Toto břímě vyvodí svislé reakce $A = B = \frac{1}{2}$; osové síly σ určíme na př. graficky methodou bodů styčných, jež dá (v měřidle, připojeném k obr. 195)

$$\sigma_1 = \sigma_4 = -1{,}06, \quad \sigma_2 = +0{,}88, \quad \sigma_3 = 0, \quad \sigma_5 = +0{,}10, \quad \sigma_6 = +0{,}83.$$

V souměrných prutech jsou rovná roztažení Δs a rovné síly σ, tedy

$$\Delta y_c = 2 \cdot \sum_1^5 \sigma \cdot \Delta s + \sigma_6 \cdot \Delta s_6 = 2 \cdot (1{,}06 \cdot 0{,}055 + 0{,}88 \cdot 0{,}150 + 0 + 1{,}06 \cdot 0{,}046 + 0{,}10 \cdot 0{,}094) + 0{,}83 \cdot 0{,}122 = 0{,}597 \text{ cm};$$

grafické řešení v příkladě 37 dalo $\Delta y_c = 0{,}598$ cm.

*β) **Řešení osových sil.*** Větou o virtuálných pracích lze stanoviti též osové síly prutů. Hledáme-li osovou sílu S libovolného prutu s za daného zatížení, dosadíme do rovnice (194) za vnější síly daná břemena; za virtuálné přetvoření soustavy zvolíme pak takové přetvoření, aby odpadly všechny osové síly až na sílu S, kterou hledáme. Zvolíme tedy v prutu s, o jehož osovou sílu S jde, libovolné kladné roztažení (Δs) a ve všech ostatních prutech položíme roztažení $\Delta s = 0$. Z rovnice (194) pak plyne

$$\Sigma P \cdot \Delta p) = S \cdot (\Delta s),$$

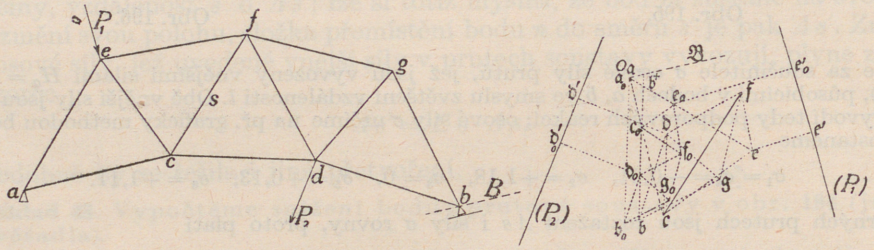
což dá

$$S = \frac{\Sigma P \cdot (\Delta_v p)}{(\Delta s)}. \tag{195}$$

V tomto vzorci značí (Δp) posunutí styčných bodů, v nichž působí břemena P, ve směru břemen, a to za přetvoření soustavy, jež je vyvozeno pouze prodloužením daného prutu o (Δs); délky ostatních prutů se nemění. Toto přetvoření lze řešiti translokačním obrazcem, jejž snadno sestrojíme, poněvadž odpadají roztažení všech prutů až na prut, jehož osovou sílu hledáme. Posunutí (Δp) jsou kladná, mají-li směr příslušných břemen.

Příklad 47. Stanovme osovou sílu S prutu $s = \overline{cf}$ v soustavě, naznačené v obr. 197, jež je zatížena v bodech e, d břemeny P_1, P_2 libovolného směru.

Sestrojíme translokační obrazec předpokládajíce, že se pouze délka prutu s mění o roztažení (Δs), délky ostatních prutů se pak nemění. Pokládejme zatím bod c za pevný, bod f za posouvatelný ve směru cf a zvolme libovolně roztažení $(\Delta s) = \overline{\mathfrak{c}\mathfrak{f}}$ rovnoběžné s osou prutu. Ostatní roztažení odpadají; rýsujeme tedy jen otočení kolmá k osám prutů: $\mathfrak{f}\mathfrak{e} \perp fe$, $\mathfrak{c}\mathfrak{e} \perp ce$; $\mathfrak{e}\mathfrak{a} \perp ea$, $\mathfrak{c}\mathfrak{a} \perp ca$; $\mathfrak{f}\mathfrak{d} \perp fd$, $\mathfrak{c}\mathfrak{d} \perp cd$; $\mathfrak{f}\mathfrak{g} \perp fg$, $\mathfrak{d}\mathfrak{g} \perp dg$; $\mathfrak{d}\mathfrak{b} \perp db$, $\mathfrak{g}\mathfrak{b} \perp gb$. Pak se vrátíme k původním výminkám podporovým: bod a pevný, bod b posouvatelný po přímce B. Prvé výmince vyhovíme, položíme-li počátek o translokačního obrazce, jenž znamená původní polohu všech bodů, do bodu $\mathfrak{a}$. Nová poloha bodu b má býti v translokačním obrazci na přímce $\mathfrak{B} \parallel B$, vedené původní polohou o; abychom tomu vyhověli, otočíme přetvořenou soustavu kolem pevného bodu a, až bod b přijde na přímku B, tedy v translokačním obrazci správná nová poloha $\mathfrak{b}^+$ na přímku $\mathfrak{B}$. Bod b má otočení $\mathfrak{b}\mathfrak{b}^+ \perp ab$.



Obr. 197.

Úplná přemístění ostatních bodů sestrojíme nejlépe tak, že otočíme původní polohy všech bodů opačně, než máme otáčeti zatímní polohy nové. Obdržíme tím translokační obrazec $\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{c}_0\,\mathfrak{d}_0\,\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{g}_0\,\mathfrak{f}_0\,\mathfrak{e}_0$, jehož strany jsou kolmé ke sdruženým stranám osového mnohostranu $a\,c\,d\,b\,g\,f\,e$; dán je bodem $\mathfrak{a}_0 \equiv \mathfrak{a}$ a bodem $\mathfrak{b}_0$, jejž určuje otočení $\overline{o\,\mathfrak{b}_0} \# \overline{\mathfrak{b}^+\,\mathfrak{b}}$. Úplná přemístění bodů e, d jsou pak dána délkami $\overline{\mathfrak{e}_0\,\mathfrak{e}}$, $\overline{\mathfrak{d}_0\,\mathfrak{d}}$. Určíme složky těchto přemístění ve směrech P_1, P_2, promítneme-li ona přemístění pravoúhle na paprsky $(P_1) \parallel P_1$, $(P_2) \parallel P_2$. Pak jest $(\Delta p_1) = \overline{\mathfrak{e}'_0\,\mathfrak{e}'}$, $(\Delta p_2) = \overline{\mathfrak{d}'_0\,\mathfrak{d}'}$; posunutí (Δp_1) je kladné, jelikož má týž směr jako břímě P_1, posunutí (Δp_2) je pak protivné břemeni P_2, tedy je záporné. Podle vzorce (195) jest

$$S = \frac{P_1 \cdot (\Delta p_1) + P_2 \cdot (\Delta p_2)}{(\Delta s)};$$

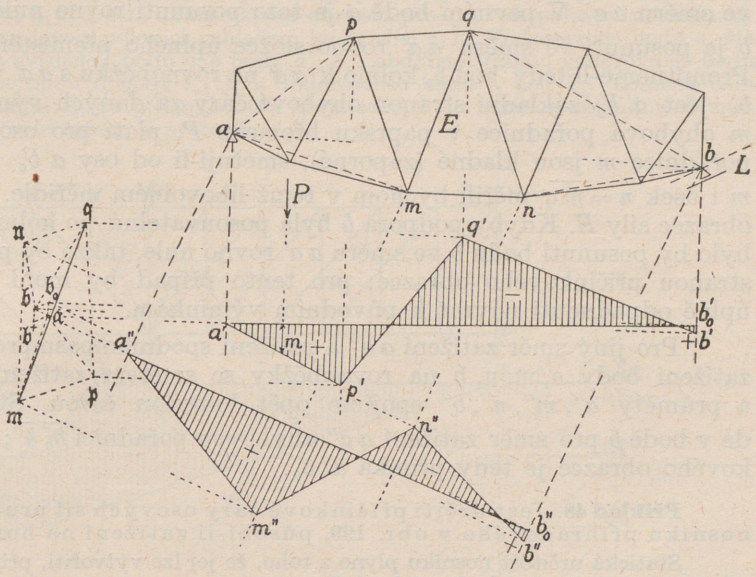
posunutí (Δp_1), (Δp_2) a roztažení (Δs) bychom odměřili v témž libovolném měřidle.

56. Stanovení příčinkových čar osových sil větou o virtuálných pracích. Působí-li na soustavu prutovou jediné svislé břímě pohyblivé P a znamenáme-li $(\Delta p) = m$, $(\Delta s) = n$, plyne ze vzorce (195) vzorec

$$S = P\frac{m}{n}. \tag{196}$$

Pro různé polohy břemene P znamenají m svislá posunutí působišť břemene, tedy svislá posunutí bodů toho pasu, do jehož styčných bodů se pohyblivé zatížení přenáší; posunutí m jsou kladná, mají-li směr břemene, tedy směřují-li dolů. Svislá posunutí m zatíženého pasu, přenesena ve svislicích poloh břemene, dají ohybovou čáru zatíženého pasu. Nehledíme-li ke stálému jmenovateli n, určíme tedy příčinkovou čáru osové síly libovolného prutu jako ohybovou čáru zatíženého pasu, změní-li se pouze délka prutu, o jehož osovou sílu jde, o libovolné kladné roztažení $(\Delta s) = n$; ve všech ostatních prutech je $\Delta s = 0$.

Příčinkovou čáru osové síly E v prutu mq prutové soustavy trojúhelníkové (obr. 198), jež je podepřena v bodě a pevně, v bodě b posouvatelně po šikmé přímce L, určíme jako ohybovou čáru zatíženého pasu, mění-li se pouze délka prutu E o roztažení velmi malé, jež však můžeme v translokačním obrazci znázorniti libovolnou délkou, poněvadž můžeme tento obrazec rýsovati v libovolném zvětšení. Délky ostatních prutů mimo E se nemění, proto také nemění tvaru části amp, bnq původní soustavy, jež jsou tvarově určité. Přetvoření každé té části se pak skládá pouze z roztažení a otočení, jež jsou lineárnými funkcemi úsečky, omezíme-li se na pohyby velmi malé, při nichž otočení nahrazujeme kolmicemi k původním poloměrům. Je tedy ohybovou čarou v oboru každé části nosníku, jež za uvažovaného přetvoření nemění svého tvaru, jediná přímka[1]). Vynecháním prutu E rozdělí se původní soustava prutová ve dvě části tvarově určité amp, bnq; v oboru každé té části je, jak plyne z předchozího, příčinkovou čarou osové síly E přímka, kterou stanovíme dvěma body. Stačí proto pro každou takovou část soustavy určiti pouze přemístění jejích krajních bodů.



Obr. 198.

Ohybovou čáru odvodíme z translokačního obrazce, pro jehož sestrojení předpokládáme zatím na př. bod m pevný, bod q posouvatelný ve směru prutu mq; zatímní nové polohy $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{q}$ jsou pak v translokačním obrazci na rovnoběžce s osou prutu mq a libovolná délka $\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{q}} = n$ toho smyslu jako mq znamená kladné roztažení prutu mq. Poněvadž ostatní pruty nemění délek, odpadají jejich roztažení a zbývají jen otočení kolmá k původním osám prutů; přímkami $\mathfrak{m}\mathfrak{p} \perp mp$, $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \perp qp$, $\mathfrak{m}\mathfrak{n} \perp mn$, $\mathfrak{q}\mathfrak{n} \perp qn$ určíme nové polohy $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{n}$. Pro část amp, jejíž tvar se nemění, je ohybovou čarou přímka, kterou určíme dvěma body. Vzdálenosti $\overline{am}$, $\overline{ap}$ se nemění; lze si tedy mysliti místo části amp původní soustavy trojúhelník amp, jehož strany nemění délek, takže přímky $\mathfrak{m}\mathfrak{a} \perp ma$, $\mathfrak{p}\mathfrak{a} \perp pa$ stanoví novou polohu $\mathfrak{a}$. Obdobně můžeme

[1]) Tato vlastnost byla již dokázána v příkladě 44, kde jsme otočením původních poloh styčných bodů o týž středový úhel, jímž se tvar soustavy nemění, dostali přímou čáru ohybovou $a' f_0 c_0 g_0 \ldots$

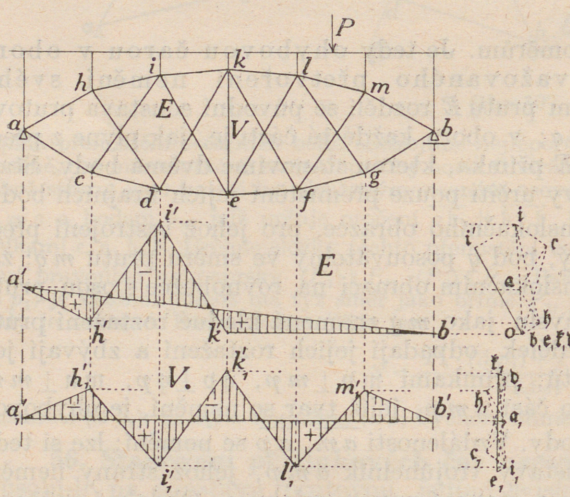
část $b\,n\,q$ původní soustavy nahraditi trojúhelníkem $b\,n\,q$, jehož strany nemění délek; přímky $\mathfrak{n}\,\mathfrak{b} \perp n\,b$, $\mathfrak{q}\,\mathfrak{b} \perp q\,b$ určí pak novou polohu $\mathfrak{b}$. K původním výminkám podporovým vrátíme se v translokačním obrazci, myslíme-li si v $\mathfrak{a}$ původní polohu všech bodů a vedeme-li $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}^+ \perp a\,b$, $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^+ \parallel L$; správné přemístění bodu b jest $\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^+} \# \overline{\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{b}}$, je-li $\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_0} \# \overline{\mathfrak{b}^+\,\mathfrak{b}}$. Pro ostatní body nemusíme určovati správné přemístění, poněvadž se můžeme vraceti k původním výminkám v obrazcích ohybových.

Z translokačního obrazce odvozeného ze zatímních výminek sestrojíme ohybovou čáru zatíženého pasu. Působí-li pohyblivé zatížení ve směru $a\,a'$ a přenáší-li se do styčných bodů horního pasu, promítneme zatímní nové polohy $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{b}$ kolmo k $a\,a'$ do bodů a', p', q', b' na rovnoběžkách se směrem zatížení, vedených body a, p, q, b, a průměty spojíme lomenou čarou. Přímou základní stranu určí správná posunutí bodů a, b ve směru $a\,a'$. V pevném bodě a je toto posunutí rovno nule; v posouvatelném bodě b je posunutí ve směru $a\,a'$ rovno složce úplného přemístění $\overline{\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{b}}$, rovnoběžné s $a\,a'$. Promítneme-li tedy bod $\mathfrak{b}_0$ kolmo k $a\,a'$ na rovnoběžku s $a\,a'$ vedenou bodem b do bodu b'_0, jest $a'\,b'_0$ základní stranou ohybové čáry za daných výminek podporových. Je-li m ohybová pořadnice v paprsku břemene P, platí pro osovou sílu E vzorec (196); pořadnice m jsou kladné (záporné), směřují-li od osy $a'\,b'_0$ dolů (vzhůru). Pořadnice m i úsek $n = \overline{\mathfrak{m}\,\mathfrak{q}}$ měřili bychom v témž libovolném měřidle. Tím je určen příčinkový obrazec síly E. Kdyby podpora b byla posouvatelná po kolmici ke směru zatížení $a\,a'$, bylo by posunutí bodu b ve směru $a\,a'$ rovno nule, takže by přímka $a'\,b'$ byla základní stranou příčinkového obrazce; pro tento případ by mohl v translokačním obrazci úplně odpadnouti návrat k původním výminkám.

Pro jiný směr zatížení $a\,a''$ a zatížení spodního pasu promítneme kolmo ke směru zatížení body $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{b}$ na rovnoběžky se směrem zatížení vedené body a, m, n, b a průměty a'', m'', n'', b'' spojíme opět lomenou čarou. Stejný průmět b''_0 bodu $\mathfrak{b}_0$ dá v bodě b pro směr zatížení $a\,a''$ ohybovou pořadnici $\overline{b''_0\,b''}$; základní stranou příčinkového obrazce je tedy přímka $a''\,b''_0$.

Příklad 48. Jest určiti příčinkové čáry osových sil prutů E, V staticky určitého nosníku příhradového v obr. 199, působí-li zatížení na horní pás.

Statická určitost nosníku plyne z toho, že jej lze vytvořiti, připojují-li se na př. k trojúhelníku $e\,i\,k$ další styčné body vždy dvěma pruty.



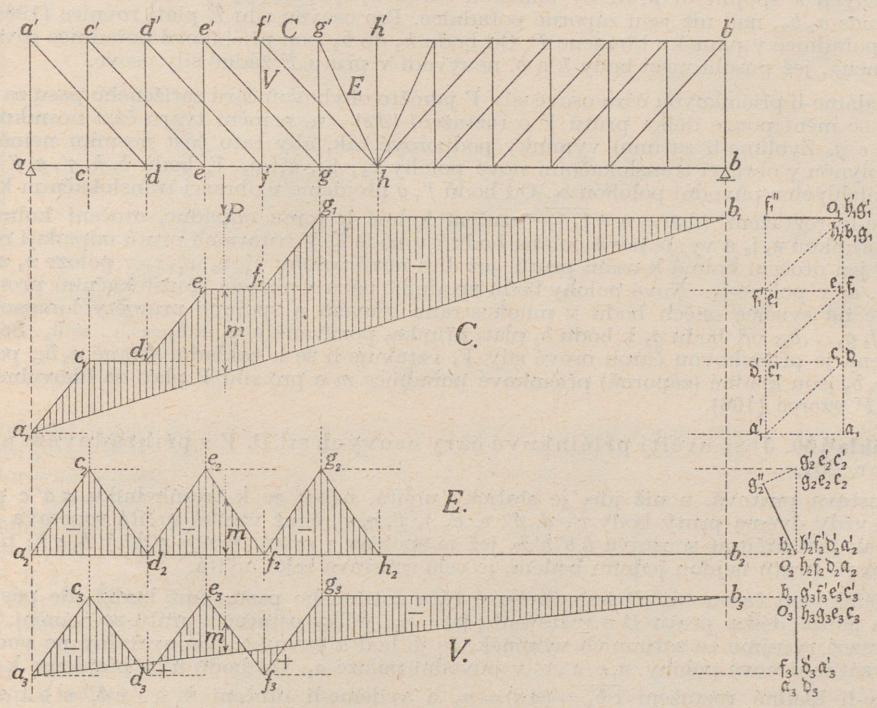
Obr. 199.

Pohyblivá břemena působí na př. na vodorovnou podlahu (mostovku), jež se opírá svislými pruty o styčné body horního pasu. Příčinkovou čarou osové síly E jest ohybová čára zatíženého pasu, mění-li se pouze délka prutu E o libovolné roztažení $(\Delta s) = n$. Poněvadž se délky ostatních prutů nemění, nemění vůbec tvaru část soustavy $d\,k\,b$. Zvolme zatímní výminky tak, aby tato část neměnila ani své polohy; pokládejme na př. zatím bod d za pevný, e za posouvatelný ve směru prutu $d\,e$. Nemění-li se délka prutu $d\,e$, zůstanou pak body d, e a tedy i body k, f, l, g, m, b v původní poloze, kterou znázorňuje v obrazci translokačním počátek o; i jest $\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{e} \equiv \mathfrak{f} \equiv \mathfrak{b} \equiv \ldots \equiv o$. Od bodů e, k jdeme k bodu i; přeneseme libovolný úsek $\overline{\mathfrak{e}\,\mathfrak{i}'} = (\Delta s) = n$ ve smyslu $e\,i$ (kladně) a vedeme $\mathfrak{i}'\,\mathfrak{i} \perp e\,i$, $\mathfrak{f}\,\mathfrak{i} \perp k\,i$, čímž určíme polohu i. Ve všech ostatních prutech odpadají roztažení a zbývají jen otočení kolmá k osám prutů: $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} \perp d\,c$, $\mathfrak{i}\,\mathfrak{c} \perp i\,c$; $\mathfrak{b}\,\mathfrak{h} \perp d\,h$, $\mathfrak{i}\,\mathfrak{h} \perp i\,h$; $\mathfrak{c}\,\mathfrak{a} \perp c\,a$, $\mathfrak{h}\,\mathfrak{a} \perp h\,a$.

Z translokačního obrazce odvodíme ohybovou čáru horního pasu, promítneme-li zatímní nové polohy $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{f}$, ... $\mathfrak{b}$ vodorovně na svislice bodů $a, h, i, k, \ldots b$ a spojíme-li průměty lomenou

čarou $a'\,h'\,i'\,k'\,\ldots b'$. Od bodu k' do b' je ohybovou (příčinkovou) čarou jediná přímka, neboť polohy $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ jsou též v bodě o. Je-li bod a pevný, bod b posouvatelný po vodorovné, jsou svislá posunutí obou bodů podporových rovna nule; základní strana ohybové (příčinkové) čáry tedy spojuje body a', b'. Pod (nad) základní stranou jsou pořadnice kladné (záporné). Znamená-li m pořadnici příčinkového obrazce v paprsku břemene P, platí pro osovou sílu E vzorec (196); pořadnici m a úsek $n = \overline{e\,i'}$ bychom odměřili v témž měřidle, jinak libovolném.

Obdobně určíme příčinkovou čáru osové síly V jakožto ohybovou čáru zatíženého pasu, mění-li se pouze délka prutu V o roztažení $(\Delta s) = n$; ve všech ostatních prutech jsou roztažení rovna nule. Je-li nosník ke svislici V souměrný, zůstane souměrným i po uvedeném přetvoření; zvolíme-li zatímní výminky tak, aby této souměrnosti vyhověly, můžeme rýsovati translokační obrazec pouze pro polovici nosníku, neboť by byl pro druhou polovici souměrný. Pokládejme tedy zatím bod e za pevný, bod k za posouvatelný po přímce svislé. Přeneseme-li libovolný úsek $(\Delta s) = n = \overline{e_1\,\mathfrak{k}_1}$ na rovnoběžku s osou prutu $e\,k$ ve smyslu kladném $(e\,k)$, dostaneme zatímní nové polohy bodů e, k. Dále vedeme $e_1\,\mathfrak{d}_1 \perp e\,d$, $\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{d}_1 \perp k\,d$; $e_1\,i_1 \perp e\,i$, $\mathfrak{k}_1\,i_1 \perp k\,i$; $\mathfrak{d}_1\,c_1 \perp d\,c$, $i_1\,c_1 \perp i\,c$; $\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{h}_1 \perp d\,h$, $i_1\,\mathfrak{h}_1 \perp i\,h$; $c_1\,a_1 \perp c\,a$, $\mathfrak{h}_1\,a_1 \perp h\,a$. Translokační obrazec pro pravou polovici nosníku by byl souměrný s obrazcem pro levou polovici vzhledem ke svislici $e_1\,\mathfrak{k}_1$. Vodorovnice bodu a_1 šla by tedy i bodem $\mathfrak{b}_1$ a určí na svislicích bodů a, b body a'_1, b'_1; obdobně stanoví vodorovnice bodu $\mathfrak{h}_1$ body h'_1, m'_1, vodorovnice bodu i_1 body i'_1, l'_1 a vodorovnice bodu $\mathfrak{k}_1$ bod k'_1. Lomená čára $a'_1\,h'_1\,i'_1\,k'_1\,l'_1\,m'_1\,b'_1$ je hledanou čarou příčinkovou a spojnice $a'_1\,b'_1$ je stranou základní. O znaménkách a měřidle platí, co bylo řečeno u prutu E.



Obr. 200.

Příklad 49. Stanovíme příčinkové čáry osových sil C, E, V prutů přímopasového nosníku staticky určitého, naznačeného v obr. 200, pro zatížení spodního pasu.

Nosník lze vytvořiti z trojúhelníka $g'\,h\,h'$, připojuje-li se k němu každý další bod styčný dvěma pruty; proto je tento příhradový nosník staticky určitý.

Příčinkovou čarou osové síly C jest ohybová čára zatíženého pasu nosníku, mění-li se pouze délka prutu C o roztažení $(\Delta s) = n$; roztažení ostatních prutů se rovnají nule. Část nosníku vpravo od svislice $g\,g'$ nemění pak vůbec tvaru; zvolme zatímní výminky podporové tak, aby tato část neměnila ani své polohy, pokládejme tedy zatím na př. bod g za pevný, h za posouvatelný po vodorovné. Pak se ztotožňují zatímní nové polohy $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{h}_1\,\mathfrak{g}'_1$, $\mathfrak{h}'_1, \ldots \mathfrak{b}_1$ v obrazci translokačním s původní polohou všech bodů o_1. Od bodů g', h přejdeme k bodu f', přeneseme-li kladné roztažení $(\Delta s) = n = \overline{\mathfrak{g}'_1\,\mathfrak{f}''_1}$ a vedeme-li otočení $\mathfrak{f}''_1\,\mathfrak{f}'_1 \perp g'\,f'$ jakož i $\mathfrak{h}_1\,\mathfrak{f}'_1 \perp h\,f'$. Všechna ostatní roztažení

se rovnají nule a zbývají jen otočení $g_1 f_1 \perp g f$, $f'_1 f_1 \perp f' f$; $g_1 e'_1 \perp g e'$, $f'_1 e'_1 \perp f' e'$;..., jež dají zatímní nové polohy f_1, $e'_1 \equiv f'_1$, $e_1 \equiv f_1$, b'_1, b_1, $c'_1 \equiv b'_1$, $c_1 \equiv b_1$, a'_1, a_1. Ohybovou čáru zatíženého spodního pasu sestrojíme, promítneme-li body $a_1, c_1, b_1, e_1, f_1, g_1, \ldots b_1$ vodorovně na svislice příslušných bodů styčných do bodů $a_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1, \ldots b_1$ a spojíme-li každé dva sousední body přímkou. V celé části $g\,b$ jest ohybovou (příčinkovou) čarou jediná přímka, poněvadž ona část nosníku nemění svého tvaru. Je-li bod a pevný, bod b posouvatelný po přímce vodorovné, rovnají se svislá posunutí bodů a, b nule, i je spojnice $a_1 b_1$ základní stranou ohybového obrazce; pod (nad) základní stranou jsou kladné (záporné) pořadnice. Znamená-li m ohybovou pořadnici v paprsku břemene P, platí pro osovou sílu C vzorec (196); pořadnice m i úsek $n = \overline{g'_1 f''_1}$ jest měřiti v témž měřidle.

Obdobně určíme příčinkovou čáru osové síly E, stanovíme-li ohybovou čáru zatíženého pasu za předpokladu, že je pouze v prutu E roztažení $(\Delta s) = n$; ve všech ostatních prutech jsou roztažení rovna nule. Pak část nosníku vpravo od svislice $h\,h'$ nemění svého tvaru. Pokládejme zatím bod h za pevný, h' za posouvatelný po svislici; pak nemění část $b\,h\,h'\,b'$ ani své polohy a zatímní nové polohy $\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}'_2, \ldots \mathfrak{b}_2$ se ztotožní v translokačním obrazci s původní polohou o_2. Novou polohu $\mathfrak{g}'_2$ bodu g' určíme, přeneseme-li kladné roztažení $(\Delta s) = n = \overline{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{g}''_2}$ a vedeme-li otočení $\mathfrak{g}''_2 \mathfrak{g}'_2 \perp g' h$, $\mathfrak{h}'_2 \mathfrak{g}'_2 \perp h' g'$. Dále sestrojujeme pouze otočeními kolmými k osám prutů zatímní nové polohy bodů $g, f', f, e', e, \ldots a', a$ a dostaneme body $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{e}'_2, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{c}'_2, \mathfrak{c}_2$ v poloze $\mathfrak{g}'_2$ a body $\mathfrak{f}'_2, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{d}'_2, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{a}'_2, \mathfrak{a}_2$ v poloze o_2. Z translokačního obrazce odvodíme ohybovou čáru spodního pasu, promítneme-li vodorovně nové polohy $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2, \ldots \mathfrak{b}_2$ na svislice příslušných bodů styčných a spojíme-li průměty lomenou čarou $a_2 c_2 d_2 e_2 f_2 g_2 h_2 \ldots b_2$; základní stranou je zase spojnice $a_2 b_2$, nad níž jsou záporné pořadnice. Pro osovou sílu E platí rovnice (196), je-li m ohybová pořadnice v paprsku břemene P. Od bodu h_2 do b_2 jsou příčinkové pořadnice rovny nule, tedy břemena, jež působí mezi body h a b, nevyvodí v prutu E žádné síly osové.

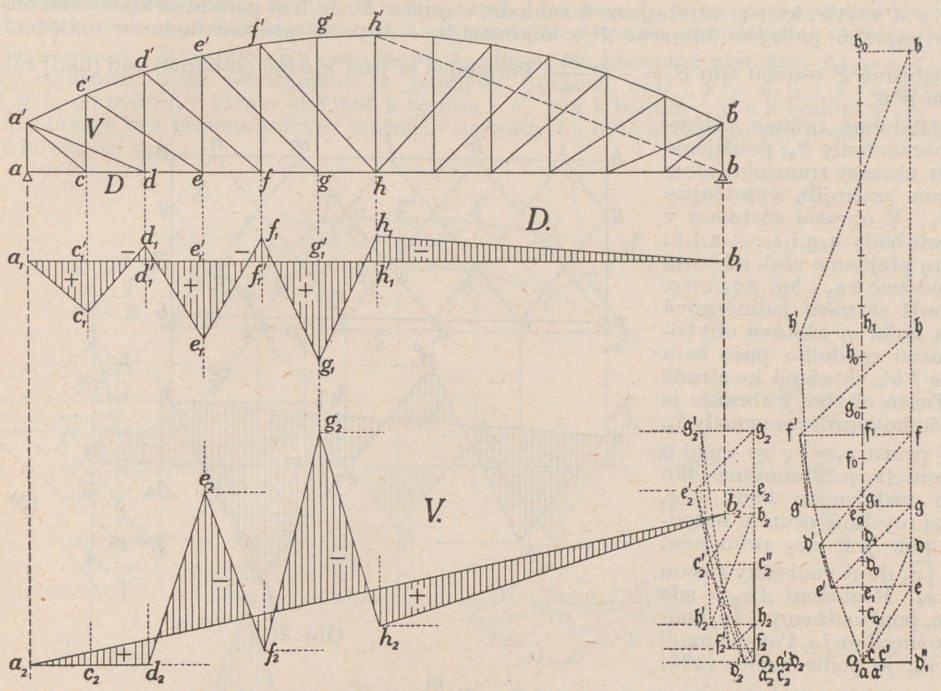
Hledáme-li příčinkovou čáru osové síly V jakožto ohybovou čáru zatíženého pasu za předpokladu, že se mění pouze délka prutu V o roztažení $(\Delta s) = n$, nemění tvaru část nosníku vpravo od prutu $e'\,g$. Zvolíme-li zatímní výminky podporové tak, aby tato část nosníku neměnila ani polohy, splynou v obrazci translokačním nové polohy $\mathfrak{b}_3, \mathfrak{h}_3, \mathfrak{g}'_3, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{f}'_3$ bodů b, h, g', g, f' a všech bodů mezilehlých s původní polohou o_3. Od bodů f', g přejdeme v obrazci translokačním k bodu f, přeneseme-li roztažení $(\Delta s) = n = \overline{\mathfrak{f}'_3 \mathfrak{f}_3}$; otočení kolmé k tomu odpadne, otočení kolmé k $f\,g$ splyne s přímkou $\mathfrak{g}_3 \mathfrak{f}_3$ a vyjde nová poloha bodu f v bodě $\mathfrak{f}_3$. U ostatních prutů odpadají roztažení a zbývají jen otočení kolmá k osám prutů, jež dají nové polohy $\mathfrak{e}'_3, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{c}'_3, \mathfrak{c}_3$ v poloze o_3 a polohy $\mathfrak{d}'_3, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{a}'_3, \mathfrak{a}_3$ v poloze $\mathfrak{f}_3$. Nové polohy bodů spodního pasu v obrazci translokačním promítneme vodorovně na svislice oněch bodů v mnohostranu osovém a spojíme průměty lomenou čarou $a_3 c_3 d_3 e_3 f_3 g_3 \ldots b_3$; od bodu g_3 k bodu b_3 platí přímka, poněvadž je $\mathfrak{g}_3 \equiv \mathfrak{h}_3 \equiv \ldots \equiv \mathfrak{b}_3$. Sestrojená čára lomená je příčinkovou čarou osové síly V, vztahuje-li se k základní straně $a_3 b_3$; pod (nad) stranou $a_3 b_3$ jsou kladné (záporné) příčinkové pořadnice m a pro sílu V platí za libovolné polohy břemene P vzorec (196).

Příklad 50. Jest určiti příčinkové čáry osových sil D, V v příhradovém nosníku podle obr. 201.

Soustava prutová, o niž jde, je staticky určitá, neboť se k trojúhelníku $a\,a'\,c$ připojují postupně vždy dvěma pruty body $c', d, d', e, e', f, f', g, g'$, čímž vzniká určitá soustava $a\,a'\,g'\,g$. Rovněž tak jest určitou soustava $b\,b'\,h'\,h$, jež je spojena s prvou pruty $g'\,h'$, $f'\,h$, $g\,h$; poněvadž osy těchto tří prutů nejdou jedním bodem, je celá soustava také určitá.

Příčinkovou čarou síly D jest ohybová čára zatíženého pasu, jímž budiž zde pás spodní, mění-li se pouze délka prutu D o roztažení $(\Delta s) = n_1$; délky ostatních prutů se nemění. Translokační obrazec rýsujme ze zatímních výminek, že je bod a pevný, c posouvatelný po vodorovné; pak jsou zatímní nové polohy $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{a}', \mathfrak{c}'$ v původní poloze o_1. Od bodů a', c přejdeme k bodu d, přeneseme-li kladné roztažení $\overline{\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}''_1} = (\Delta s) = n_1$ a vedeme-li otočení $\mathfrak{d}''_1 \mathfrak{d} \perp c\,d$, $\mathfrak{a}'\mathfrak{d} \perp a'\,d$. Zatímní nové polohy ostatních bodů vyšetříme jen z otočení kolmých k osám prutů: $\mathfrak{c}'\mathfrak{b}' \perp c'\,d'$, $\mathfrak{d}\,\mathfrak{b}' \perp d\,d'$; $\mathfrak{c}'\mathfrak{e} \perp c'\,e$, $\mathfrak{d}\,\mathfrak{e} \perp d\,e$; $\mathfrak{b}'\mathfrak{e}' \perp d'\,e'$, $\mathfrak{e}\,\mathfrak{e}' \perp e\,e'$,... Tak postupujeme až k bodům $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$. Soustava $h\,h'\,b'\,b$ nemění tvaru, lze ji tedy uvažovati jako celek; novou polohu $\mathfrak{b}$ sestrojíme, vedeme-li $\mathfrak{h}\,\mathfrak{b} \perp h\,b$, $\mathfrak{h}'\mathfrak{b} \perp h'\,b$, poněvadž se vzdálenosti $\overline{h\,b}$ i $\overline{h'\,b}$ nemění. Vrátíme se nyní k původním výminkám. Poněvadž je bod b posouvatelný po vodorovné, je jeho úplné přemístění $\overline{\mathfrak{b}_0 \mathfrak{b}}$ vodorovné; bod $\mathfrak{b}_0$ plyne otočením původní polohy bodu b kolem bodu a, tedy přímkou $o_1 \mathfrak{b}_0 \perp a\,b$. Měli bychom dále sestrojiti obrazec podobný mnohostranu osovému, jehož bodům a, b odpovídají body $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_0$. Poněvadž jde pouze o svislá posunutí styčných bodů spodního pasu, stačí rozděliti úsek $\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_0}$ body $\mathfrak{c}_0, \mathfrak{d}_0, \mathfrak{e}_0, \ldots$ v tom poměru, v jakém je délka $\overline{a\,b}$ dělena body $c, d, e \ldots$ (v obr. 201 na dvanáct stejných dílů). Pak jsou $\overline{\mathfrak{c}_0 \mathfrak{c}}$, $\overline{\mathfrak{d}_0 \mathfrak{d}}$, $\overline{\mathfrak{e}_0 \mathfrak{e}}, \ldots$ správná úplná přemístění bodů $c, d, e, \ldots$ Přenesme jejich svislé složky od vodorovné osy $a_1 b_1$ jakožto pořadnice ve svislicích styčných bodů: $\overline{\mathfrak{c}_0 \mathfrak{c}} = \overline{c'_1 c_1}$, $\overline{\mathfrak{d}_0 \mathfrak{d}_1} = \overline{d'_1 d_1}$, $\overline{\mathfrak{e}_0 \mathfrak{e}_1} = \overline{e'_1 e_1}$, $\overline{\mathfrak{f}_0 \mathfrak{f}_1} = \overline{f'_1 f_1}$, $\overline{\mathfrak{g}_0 \mathfrak{g}_1} = \overline{g'_1 g_1}$, $\overline{\mathfrak{h}_0 \mathfrak{h}_1} = \overline{h'_1 h_1}$. Tím určíme příčinkové pořadnice ve svislicích styčných bodů; jejich koncové body spojuje příčinková čára síly D, jež

je v každém oddílu přímá a v celé části hb rovněž přímá. Pod (nad) základní stranou $a_1 b_1$ jsou kladné (záporné) pořadnice příčinkové m. Pro sílu D, vyvozenou jediným břemenem P, platí podle vzorce (196) $D = P\frac{m}{n_1}$.



Obr. 201.

Obdobně řešíme příčinkovou čáru síly V. Rýsujeme translokační obrazec, předpokládajíce, že se mění pouze délka prutu V o roztažení $(\Delta s) = n_2$; pokládáme zatím na př. bod a za pevný, c za vodorovně posouvatelný a obdržíme zatímní nové polohy $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}'_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2$ v původní poloze o_2. Od bodu $\mathfrak{c}_2$ přeneseme kladné roztažení $\overline{\mathfrak{c}_2 \mathfrak{c}''_2} = (\Delta s) = n_2$ a vedeme otočení $\mathfrak{c}''_2 \mathfrak{c}'_2 \perp c\,c'$, $\mathfrak{a}'_2 \mathfrak{c}'_2 \perp a'\,c'$, čímž určíme novou polohu $\mathfrak{c}'_2$. Dále rýsujeme jen otočení: $\mathfrak{c}'_2 \mathfrak{d}'_2 \perp c'\,d'$, $\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}'_2 \perp d\,d'$; $\mathfrak{d}_2 \mathfrak{e}_2 \perp d\,e$, $\mathfrak{c}'_2 \mathfrak{e}_2 \perp c'\,e \ldots$, až dospějeme k polohám $\mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}'_2$. Od bodů h, h' přejdeme přímo k bodu b, vedouce $\mathfrak{h}_2 \mathfrak{b}_2 \perp h\,b$, $\mathfrak{h}'_2 \mathfrak{b}_2 \perp h'\,b$, jelikož celá soustava $h\,h'\,b'\,b$ nemění tvaru a tedy se též vzdálenosti $\overline{h\,b}$, $\overline{h'\,b}$ nemění. Ohybovou čáru odvodíme zde na př. z translokačního obrazce, rýsovaného ze zatímních výminek podporových, promítajíce body $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{e}_2, \ldots$ vodorovně na svislice bodů $a, c, d, e, \ldots$. Průměty spojíme lomenou čarou $a_2\,d_2\,e_2\,f_2\,g_2\,h_2\,b_2$, jež je čarou ohybovou a zároveň příčinkovou čarou síly V; v částech $a\,d, h\,b$ vyjdou přímky. Stanovenou čáru vztahujeme k základní straně $a_2 b_2$, od níž měříme příčinkové pořadnice m síly V. Jediné břímě P v libovolné poloze působící dá podle vzorce (196) sílu $V = P\frac{m}{n_2}$.

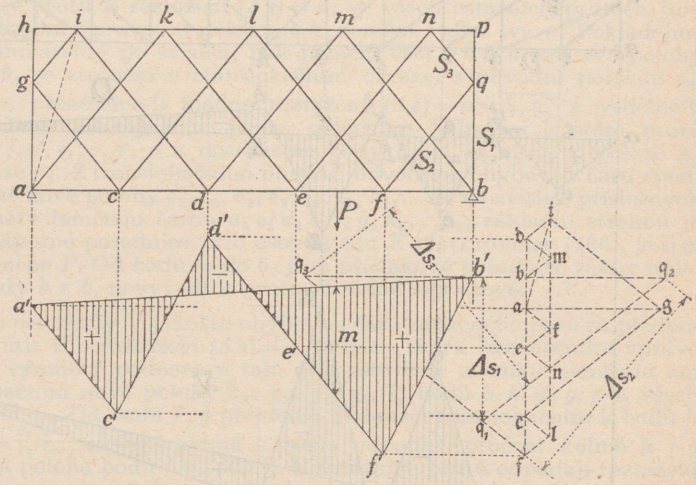
Příklad 51. Sestrojme příčinkové čáry osových sil prutů v soustavě naznačené v obr. 202.[1])

Prutová soustava je zde toho rázu, že nelze přímo sestrojovati translokační obrazce. Její statická určitost se ukáže řešením. Jde-li o příčinkovou čáru osové síly S_1 prutu $b\,q$, zvolme místo roztažení Δs_1 tohoto prutu libovolně na př. změnu $\Delta s'$ vzdálenosti $s' = \overline{a\,i}$ a s touto změnou $\Delta s' = \overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{i}}$ sestrojme obrazec translokační třeba z výminek, že je bod a pevný, bod i posouvatelný po přímce $a\,i$. Zatímní nové polohy dalších bodů styčných sestrojujeme, rýsujíce pouze otočení kolmá k osám prutů, neboť se roztažení všech prutů, vyjma s_1, rovnají nule. Vedeme tedy $\mathfrak{i}\,\mathfrak{g} \perp i\,g$, $\mathfrak{a}\,\mathfrak{g} \perp a\,g$; $\mathfrak{g}\,\mathfrak{c} \perp g\,c$, $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c} \perp a\,c$; $\mathfrak{c}\,\mathfrak{d} \perp c\,d$, $\mathfrak{i}\,\mathfrak{d} \perp i\,d$; ... a sestrojíme tak zatímní nové polohy $\mathfrak{g}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$. Od bodů f, m jdeme k bodu b, od bodů f, n k bodu q a určíme zase jen z otočení nové

[1]) Srovnej *L. Vianello* „Der Eisenbau" (Mnichov 1905), str. 196.

polohy $\mathfrak{b}$, q_1. Poněvadž jsme nešli po prutu $s_1 = \overline{b\,q}$, nezachová tento prut za zvoleného přetvoření původní délku. Jeho roztažení Δs_1 určíme jako změnu vzdálenosti bodů b, q, které si myslíme prutem nespojeny; je tedy Δs_1 svislým průmětem úseku $\overline{\mathfrak{b}\,q_1}$ a je záporné, poněvadž je bod $\mathfrak{b}$ nad bodem q_1. Pak sestrojíme ohybovou čáru zatíženého pasu, jímž budiž na př. spodní pás; promítneme vodorovně body $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{b}$ na svislice odpovídajících styčných bodů a rýsujeme lomenou čáru $a'\,c'\,d'\,e'\,f'\,b'$, kterou vztahujeme k základní straně $a'\,b'$. Je-li m pořadnice stanovené ohybové čáry v paprsku jediného břemene P a znamená-li $-\Delta s_1 = n_1$ prostou hodnotu roztažení Δs_1, vyvodí břímě P osovou sílu $S_1 = -P\dfrac{m}{n_1}$. Pořadnice m jsou kladné (záporné) pod (nad) základní stranou $a'\,b'$.

Obdobně určíme příčinkový obrazec síly S_2; použijeme k tomu obrazce translokačního, jejž jsme sestrojili, vyšetřujíce sílu S_1. V obrazci zůstanou v platnosti body $\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{i}, \mathfrak{c}, \ldots\ \mathfrak{n}, \mathfrak{f}, \mathfrak{b}$; k bodu q přejdeme však od bodů b, n, vedoucí $\mathfrak{b}\,q_2 \perp b\,q$, $\mathfrak{n}\,q_2 \perp n\,q$. Poněvadž se mění jedině nová poloha bodu q, zůstává ohybovou čarou spodního pasu čára $a'c'd'e'f'b'$, vztažená ke straně $a'b'$. Tento ohybový obrazec je též příčinkovým obrazcem síly S_2. Délka prutu $s_2 = \overline{f\,q}$ se mění o roztažení Δs_2, jež stanovíme jako změnu vzdálenosti bodů f, q, které si myslíme prutem nespojeny; pak jest Δs_2 průmětem úseku $\overline{\mathfrak{f}\,q_2}$ do rovnoběžky s osou prutu s_2. Roztažení Δs_2 je zde kladné, poněvadž smysl $\mathfrak{f}\,q_2$ souhlasí se smyslem $f\,q$. Poznačíme-li $\Delta s_2 = n_2$, je podle vzorce (196) účinek jediného břemene P dán rovnicí $S_2 = P\dfrac{m}{n_2}$.



Obr. 202.

Týmž obrazcem příčinkovým lze řešiti též osovou sílu S_3 prutu $s_3 = \overline{n\,q}$. Obrazec translokační zůstává až na bod q, ke kterému přejdeme od bodů f, b, rýsujíce $\mathfrak{f}\,q_3 \perp f\,q$, $\mathfrak{b}\,q_3 \perp b\,q$. Čára ohybová se nemění, je tedy obrazec $a'\,c'\,d'\,e'\,f'\,b'$ také příčinkovým obrazcem síly S_3. Roztažení Δs_3 určíme jako změnu vzdálenosti bodů n, q, tedy jakožto průmět úseku $\overline{\mathfrak{n}\,q_3}$ do rovnoběžky s osou prutu s_3; je pak Δs_3 záporné, poněvadž průmět úseku $\overline{\mathfrak{n}\,q_3}$ má smysl protivný smyslu $n\,q$. Znamenejme prostou hodnotu $-\Delta s_3 = n_3$ a dostaneme $S_3 = -P\dfrac{m}{n_3}$.

Obdobně bychom určili též osové síly některých jiných prutů, na př. $m\,n$, $m\,b$, $e\,n$. Také pruty $f\,l$, $e\,k$ a j. lze zde takto řešiti, neboť lze při rýsování translokačního obrazce pruty, jejichž osy jsou v jedné přímce, brát za jediný prut. Jinak bychom mohli sestrojiti příčinkové pořadnice ve styčných bodech zatíženého pasu tím, že bychom stanovili obrazce silové celého nosníku pro břímě $P = 1$, jež působí postupně ve všech styčných bodech zatíženého pasu. Osovou sílu S_1 (S_2, S_3) pro různé polohy břemene $P = 1$ stanoví určený obrazec příčinkový; volíme-li úsek n_1 (n_2, n_3) za jednotku měřidla příčinkových pořadnic, je pro břímě $P = 1$ úsek síly S_1 (S_2, S_3) roven příčinkové pořadnici m. Ostatní síly osové lze řešiti methodou bodů styčných.

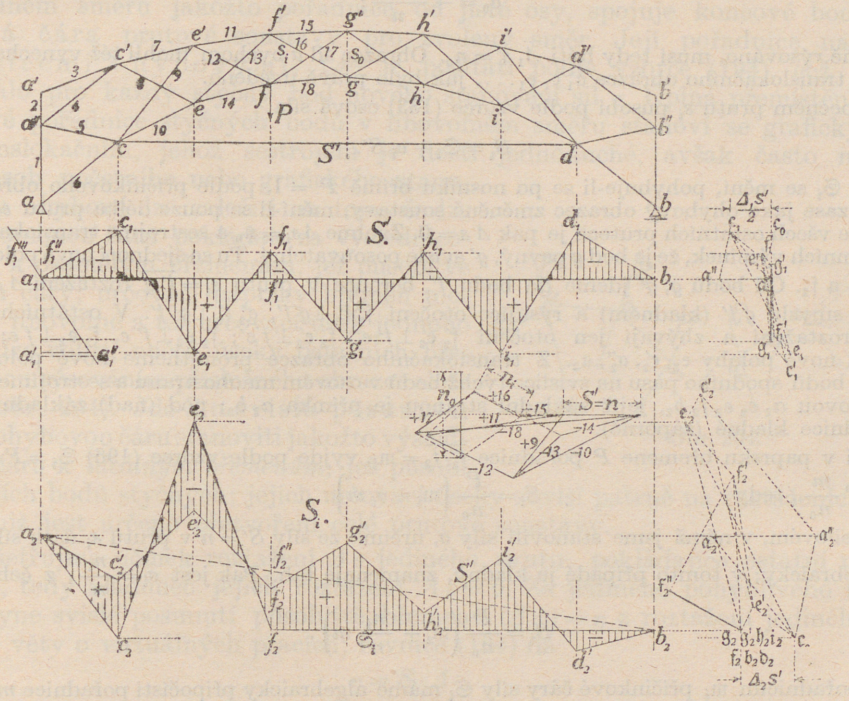
Příklad 52. Jest určiti příčinkové čáry osových sil prutů $s' = \overline{c\,d}$ a $s_i = \overline{f'\,g}$ v soustavě podle obr. 203.[1])

Daná soustava je staticky určitá, jak se přesvědčíme řešením. Její translokační obrazec nelze přímo stanoviti; užijeme tu methody náhradných prutů. Vyjmeme ze soustavy prut $s' = \overline{c\,d}$ a nahradíme jej prutem $s_0 = \overline{g\,g'}$. V této změněné soustavě vyvodí jakékoli dané zatížení v prutu s_i osovou sílu $\mathfrak{S}_i$, v prutu s_0 osovou sílu $\mathfrak{S}_0$. Dáme-li na změněnou soustavu působiti silám $S' = 1$, jež nahrazují prut $c\,d$ v jeho obou bodech koncových a působí v prutu od bodů styčných, jsouce tahy, obdržíme v prutu s_i osovou sílu σ_i a v prutu s_0 sílu σ_0. Pak jest obecně podle rovnice (184) $S' = -\dfrac{\mathfrak{S}_0}{\sigma_0}$. Působí-li na nosník pohyblivé břímě $P = 1$, mění se síla $\mathfrak{S}_0$, jak naznačuje

[1]) Jiný případ řeší podobně *A. F. Zschetzsche* v „Handbuch der Baustatik", I. Bd. (Düsseldorf 1912), str. 344 a d.; řešení to se však omezuje pouze na náhradný prut.

její příčinková čára; je tedy až na stálého činitele $-\frac{1}{\sigma_0}$ příčinková čára síly $\mathfrak{S}_0$ zároveň příčinkovou čarou síly S'.

Příčinkovou čáru síly $\mathfrak{S}_0$ určíme jako ohybovou čáru změněného nosníku (bez prutu s' a s prutem s_0), mění-li se pouze délka prutu s_0 o roztažení Δs_0; ve všech ostatních prutech jsou roztažení rovna nule. Změněná soustava je zde souměrná ke svislici s_0 a bude souměrnou i po uvedeném přetvoření. Zvolíme-li zatím bod g za pevný, g' za posouvatelný ve směru svislém, vyhovíme zmíněné souměrnosti a můžeme pak rýsovati translokační obrazec jen pro polovici soustavy. Rovnoběžně s osou prutu s_0 přeneseme libovolné roztažení $\Delta s_0 = \overline{\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_1'}$. Nové polohy ostatních bodů sestrojujeme z pouhých otočení: $\mathfrak{g}_1 \mathfrak{f}_1' \perp g f'$, $\mathfrak{g}_1' \mathfrak{f}_1' \perp g' f'$; $\mathfrak{g}_1 \mathfrak{f}_1 \perp g f$, $\mathfrak{g}_1' \mathfrak{f}_1 \perp g' f$; od bodů f, f' jdeme obdobně k bodům e, e', pak k bodům c, c' a k bodům a'', a. Translokační obrazec pro pravou polovici změněné soustavy by byl s obrazcem pro levou polovici souměrný ke svislici $\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_1'$.



Obr. 203.

Sestrojme nyní ohybovou čáru zatíženého pasu, jímž budiž zde spodní pás $a\,c\,e\,f\,g\ldots$ Promítneme vodorovně nové polohy $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{g}_1$ na svislice příslušných bodů styčných do bodů a_1, c_1, e_1, f_1, g_1; souměrné body by byly v translokačním obrazci a tedy i v ohybové čáře na vodorovnicích, čímž jsou dány též body h_1, i_1, d_1, b_1. Ohybovou čarou je lomená čára $a_1\,c_1\,e_1\,f_1\ldots$, její základní stranou přímka $a_1\,b_1$; pod základní stranou jsou kladné, nad ní záporné pořadnice příčinkové. Znamenejme roztažení $\Delta s_0 = \overline{\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_1'} = n$ a pořadnici ohybové čáry v paprsku břemene P obecně $\overline{f_1' f_1} = m$; podle vzorce (196) jest $\mathfrak{S}_0 = P\frac{m}{n}$.

Stanovíme dále osové síly σ. Zvolme nejlépe v prutu s' sílu $S' = n = \overline{\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_1'}$ a sestrojme z ní silový obrazec změněné soustavy (obr. 203). V prutech $s_1, s_2, s_3\ldots, s_8$ vyjdou síly $\sigma = 0$; ze známé síly S' určíme v bodě c neznámé síly σ_9, σ_{10}, pak postupujeme dále methodou bodů styčných do bodů e, e', f, f' a g. Poněvadž se šikmé pruty mezipasové sekou a v průsečících není bodů styčných, třeba v obrazci silovém úseky těchto sil (čárkované) opakovati. Obrazec silový pro celou soustavu by byl souměrný k prodlouženému úseku S'; v souměrných prutech jsou síly σ rovny. Pro prut s_0 obdržíme v obrazci silovém ze síly $S' = n$ úsek n_0; síla $S' = 1$ by vyvodila v prutu s_0 zápornou sílu osovou $\sigma_0 = -\frac{n_0}{n}$, bereme-li úsek n_0 prostě. Pak dá břímě P sílu

$$S' = -\frac{\mathfrak{S}_0}{\sigma_0} = P\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{n_0} = P\frac{m}{n_0}.$$

Příčinková čára síly $\mathfrak{S}_0$ je zároveň příčinkovou čarou síly S'; pořadnice m jest děliti úsekem n_0, jejž odměříme v témž měřidle jako příčinkové pořadnice m. Také znaménka v příčinkovém obrazci $\mathfrak{S}_0$ a S' jsou táž, je-li σ_0 záporné jako v tomto případě.

Kontrolu řešení odvodíme, užijeme-li věty o virtuálných pracích na změněnou soustavu za zatížení $S' = 1$ a roztažení $\Delta s_0 = n$, ve všech ostatních prutech pak $\Delta s = 0$. Kladné síly $S' = 1$ konají zápornou práci, zvětšuje-li se vzdálenost $\overline{c\,d} = s'$; podle rovnice (194) tedy vyjde

$$-1 \cdot \Delta_1 s' = \sigma_0 \cdot \Delta s_0 = \sigma_0 n;$$

$\Delta_1 s'$ znamená změnu vzdálenosti bodů c, d ve změněné soustavě za uvažovaného přetvoření, jemuž odpovídá translokační obrazec $a_1 c_1 e_1 \ldots$ Vzdálenost bodu c_1 od osy souměrnosti $g_1 g_1'$ tohoto obrazce dá $\frac{1}{2} \Delta_1 s' = \overline{c_1 c_0}$. Pak jest

$$\sigma_0 = -\frac{\Delta_1 s'}{n};$$

je-li správně rýsováno, musí tedy býti $\Delta_1 s' = n_0$. Obrazec sil σ bychom mohli též vynechati a úsek n_0 určiti z translokačního obrazce $a_1 c_1 e_1 \ldots$, jak bylo právě uvedeno.

V obecném prutu s_i působí podle vzorce (183) osová síla

$$S_i = \mathfrak{S}_i + \sigma_i S'.$$

Osová síla $\mathfrak{S}_i$ se mění, pohybuje-li se po nosníku břímě $P = 1$, podle příčinkového obrazce, jejž vyšetříme zase jako ohybový obrazec změněné soustavy, mění-li se pouze délka prutu s_i o roztažení Δs_i, ve všech ostatních prutech je pak $\Delta s = 0$. Zvolme $\Delta s_i = n_0$ a sestrojme translokační obrazec ze zatímních výminek, že je bod g pevný, g' svisle posouvatelný. Tu se sjednotí nové polohy $g_2, g_2', \mathfrak{h}_2, i_2, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{b}_2$ a f_2. Od bodů g, g' jdeme do bodu f', berouce v prutu $s_i = \overline{f'\,g}$ roztažení $\Delta s_i = n_0 = \overline{g_2\,f_2''}$ ve smyslu $g\,f'$ (kladném) a rýsujíce otočení $f_2'' f_2' \perp g\,f'$, $g_2' f_2' \perp g'\,f'$. V ostatních prutech odpadají roztažení a zbývají jen otočení $f_2' e_2' \perp f' e'$, $f_2 e_2' \perp f e'$; $f_2' e_2 \perp f' e$, $f_2 e_2 \perp f e$; ... Tak určíme též nové polohy c_2, c_2', a_2'', a_2. Z translokačního obrazce promítneme nové polohy $a_2, c_2, e_2, f_2, \ldots b_2$ bodů spodního pasu na svislice týchž bodů v osovém mnohostranu a sestrojíme lomenou čáru ohybovou $a_2 c_2 e_2 f_2 b_2$, jejíž základní stranou je přímka $a_2 b_2$; pod (nad) základní stranou jsou pořadnice kladné (záporné).

Je-li v paprsku břemene P pořadnice $\overline{f_2''\,f_2} = \mathfrak{m}_i$, vyjde podle vzorce (196) $\mathfrak{S}_i = P\frac{\mathfrak{m}_i}{n_0}$. Dále jest $S' = P\frac{m}{n_0}$, tedy

$$S_i = \frac{P}{n_0}\left(\mathfrak{m}_i + \sigma_i m\right).$$

V obrazci silovém, v němž jsme stanovili síly σ, určíme ze síly $S' = n$ v prutu s_i úsek síly n_i, jejž berme algebraicky; v tomto případě je kladný, znamenaje tah. Pak jest $\sigma_i = \frac{n_i}{n}$, z čehož plyne

$$S_i = \frac{P}{n_0}\left(\mathfrak{m}_i + \frac{n_i}{n} m\right).$$

K pořadnicím $\mathfrak{m}_i$ příčinkové čáry síly $\mathfrak{S}_i$ máme algebraicky připočísti pořadnice $m' = m\frac{n_i}{n}$, jež stanovíme graficky. Přeneseme svisle $\overline{a_1 a_1'} = n$ a vodorovně $\overline{a_1' a_1''} = n_i$; k pořadnici $m = \overline{a_1 f_1''}$ stanoví přímka $a_1 a_1''$ úsečku $m' = \overline{f_1''' f_1''}$. Tak určíme k pořadnicím m ve všech styčných bodech pořadnice m', jež přičteme algebraicky k pořadnicím čáry $\mathfrak{S}_i$, přeneseme-li redukované pořadnice m' čáry S' od osy $a_2 b_2$, a to pořadnice m', jež plynou z kladných (záporných) pořadnic m, vzhůru (dolů), je-li n_i kladné, a v opačném smyslu, je-li n_i záporné. V tomto případě je n_i kladné, ve svislici bodu f je m záporné, i přeneseme $m' = \overline{f_2'\,f_2''}$ pod osu $a_2 b_2$. Učiníme-li podobně ve všech bodech styčných, dostaneme čáru $a_2 c_2' e_2' f_2' \ldots$, jejíž pořadnice m' se sčítají algebraicky s pořadnicemi příčinkové čáry síly $\mathfrak{S}_i$; mezi oběma čarami je příčinkový obrazec síly S'. V paprsku břemene P má tento obrazec pořadnici

$$m_i = \mathfrak{m}_i + m\frac{n_i}{n} = \mathfrak{m}_i + m' = \overline{f_2''\,f_2} + \overline{f_2'\,f_2''} = \overline{f_2'\,f_2};$$

je tedy

$$S_i = P\frac{m_i}{n_0},$$

čímž je stanoven příčinkový obrazec síly S_i v témž měřidle jako obrazec síly S'.

Pro kontrolu řešení užijme věty o virtuálných pracích na změněnou soustavu, berouce za vnější síly $S' = 1$ a předpokládajíce v prutu s_i roztažení $\Delta s_i = n_0$, v ostatních prutech roztažení rovná nule. Zvětšuje-li se délka s', konají síly $S' = 1$ práci zápornou a rovnice (194) dá

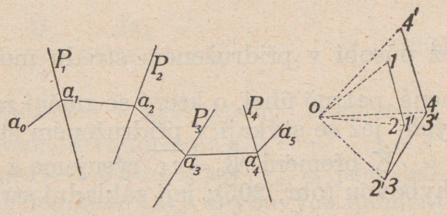
$$-1 \cdot \Delta_2 s' = \sigma_i \cdot \Delta s_i = \sigma_i n_0;$$

z toho plyne

$$\sigma_i = -\frac{\Delta_2 s'}{n_0}.$$

Zde znamená $\Delta_2 s'$ změnu vzdálenosti bodů c, d prutem nespojených za uvažovaného přetvoření změněné soustavy. Určíme ji jakožto vodorovný průmět úseku $\overline{c_2 d_2}$; je záporná, jelikož má smysl protivný smyslu $c\,d$. Je-li správně rýsováno, je prostá hodnota $-\Delta_2 s' = n_i \frac{n_0}{n}$; obrazce, jímž jsme řešili síly σ, nebylo by potřebí, neboť úseky n_i, n_0 a tím i síla σ_i se též určí z translokačních obrazců $a_2 c_2 e_2 \ldots$, $a_1 c_1 e_1 \ldots$

57. Stanovení ohybové čáry prutové soustavy trojúhelníkové jakožto čáry výslednicové. *α) Ideálná břemena.* Přeneseme-li posunutí styčných bodů v libovolném směru jakožto pořadnice od jisté osy, spojuje koncové body jejich ohybová čára prutové soustavy pro zvolený směr. Její pořadnice nazývejme pořadnicemi ohybovými. Lze je počítati podle vzorce (194), což by však vyžadovalo pro každý styčný bod nového stanovení sil σ. Úplná přemístění a tedy i ohybové pořadnice styčných bodů v libovolném směru stanoví se graficky obrazcem translokačním, jehož sestrojení je dosti jednoduché, avšak často nepřesné. Jiný způsob početního nebo grafického stanovení čáry ohybové lze založiti na tom, že lze každou lomenou čáru pokládati za výslednicovou čáru k osamělým břemenům, jež působí ve vrcholech čáry; určovací paprsky břemen mohou býti libovolné a též určovací úsek jednoho břemene lze voliti, načež úseky ostatních břemen plynou rýsováním příslušného obrazce složkového (obr. 204). Jde-li o svislá posunutí, můžeme ohybovou čáru stanoviti jakožto výslednicovou čáru k *ideálným břemenům*, jež působí ve svislicích bodů styčných; jejich určovací úseky závisí patrně na roztaženích prutových, jimiž jest určeno přetvoření celé prutové soustavy.



Obr. 204.

Vyšetřujme účinek roztažení Δs jediného prutu, pokládajíce ostatní pruty za nepružné, tedy kladouce jejich roztažení $\Delta s = 0$. Za jediného pohyblivého břemene $P = 1$ plyne svislé posunutí působiště břemene $(\Delta p) = \eta$ z roztažení jediného prutu Δs podle věty o virtuálných pracích; rovnice (194) dá

$$\eta = S \cdot \Delta s, \tag{197}$$

znamená-li S osovou sílu prutu vyvozenou břemenem $P = 1$. Osová síla S se mění za pohybu břemene podle příčinkové čáry síly S. Tedy roztažení Δs jediného prutu vyvodí ohybovou čáru, jejíž pořadnice se rovnají příčinkovým pořadnicím osové síly S onoho prutu, násobeným roztažením Δs. Tato věta platí obecně pro jakýkoli tvar a uspořádání prutové soustavy. Příčinkovou čarou osové síly S prutu staticky určité soustavy je vždy čára lomená, již bychom mohli stanoviti jakožto výslednicovou čáru ke svislým břemenům, plynoucím z tvaru příčinkové čáry. Násobíme-li tato břemena roztažením Δs, dostaneme břemena, jejichž výslednicovou čarou jest ohybová čára dané prutové soustavy plynoucí z roztažení jediného prutu s.

Omezíme se na soustavu trojúhelníkovou, kterou si mysleme na koncích prostě podepřenu; není-li soustava skutečně takto podepřena, můžeme vycházeti vždy z tohoto podepření jakožto zatímního a vrátiti se na konec ke skutečnému podepření. Osová síla obecného prutu horního pasu C a spodního pasu D určí se podle vzorců (82ª) a (83ª) v prvém dílu tohoto spisu (3. vyd., str. 195)

$$C = -\frac{M_c}{r_c}, \qquad D = -\frac{M_d}{r_d},$$

jsou-li M_c, M_d ohybové momenty k přidruženým středům momentovým c, d a r_c, r_d ramena sil C, D k týmž středům. Pohybuje-li se břímě $P = 1$ po nosníku, mění se M_c (M_d) jakožto ohybový moment prostého nosníku podle příčinkové čáry, jež se podle odst. 2 shoduje s výslednicovou čarou k břemeni $P = 1$, působícímu v momentovém středu c (d). Podle vzorce pro sílu C (D) je pak příčinková čára této síly výslednicovou čarou ke svislému břemeni $-\frac{1}{r_c}\left(\frac{1}{r_d}\right)$, jež působí v bodě c (d). Násobíme-li toto břímě roztažením prutu, obdržíme ideálné břímě, jehož výslednicová čára jest ohybovou čarou prutové soustavy, plynoucí z roztažení jediného uvažovaného prutu. Roztažení Δc obecného prutu horního pasu vyvodí tedy ohybovou čáru, jež je výslednicovou čarou k břemeni

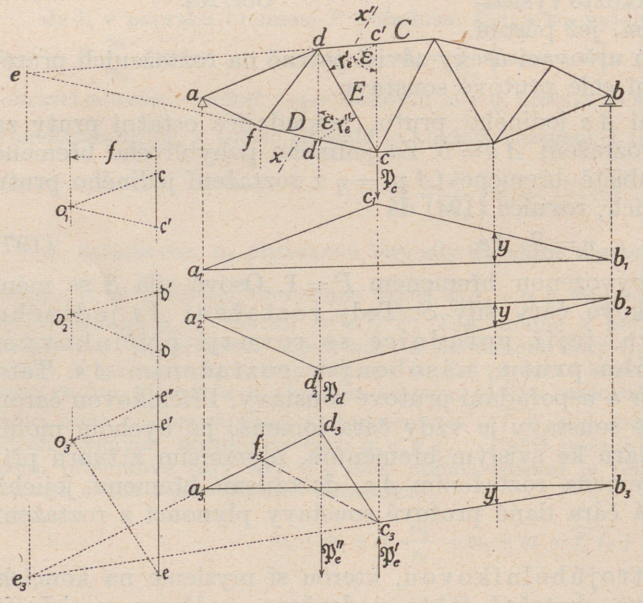
$$\mathfrak{P}_c = -\frac{\Delta c}{r_c}, \tag{198}$$

jež působí v přidruženém středu momentovém c. Obdobně jest ohybová čára, vyvozená roztažením Δd obecného prutu spodního pasu, výslednicovou čarou k ideálnému břemeni

$$\mathfrak{P}_d = \frac{\Delta}{r_d}, \tag{199}$$

jež působí v přidruženém středu momentovém d (obr. 205). Pod $\frac{\Delta c}{r_c}\left(\frac{\Delta d}{r_d}\right)$ znamená patrně úhel, o který se změní roztažením Δc (Δd) odchylka os prutů mezipasových, jež se stýkají v přidruženém středu momentovém c (d).

K břemeni $\mathfrak{P}_c = \overline{c\,c'}$ rýsujeme z pólu o_1 výslednicovou čáru $a_1 c_1 b_1$, jež je čarou ohybovou (obr. 205); její základní strana spojuje body a_1, b_1, je-li bod a pevný, bod b posouvatelný po vodorovné, tedy svislé posunutí v obou bodech podporových rovno nule. Obdobně sestrojíme k břemeni $\mathfrak{P}_d = \overline{d\,d'}$ z pólu o_2 výslednicovou čáru $a_2 d_2 b_2$, jež znamená ohybovou čáru, vztahujeme-li ji k základní straně $a_2 b_2$. Prvá strana každé výslednicové čáry platí staticky vlevo, druhá strana vpravo od řezu xx', vedeného příslušným prutem podle pravidel methody průsečné; za obyčejného uspořádání soustavy trojúhelníkové platí pro pasy prvá strana vlevo, druhá vpravo od svislice přidruženého středu momentového. Kladné roztažení Δc prutu horního pasu vyvodilo by záporné (vzhůru směřující) pořadnice ohybové; odpovídá mu tedy ideálné břímě $\mathfrak{P}_c$ dolů směřující, volíme-li pól o_1 vlevo od čáry složkové. Kladné roztažení Δd prutu spodního pasu dalo by kladné (dolů směřující) pořadnice ohybové; z toho plyne, že ideálné břímě $\mathfrak{P}_d$ musí působiti vzhůru, je-li pól o_2 vlevo od čáry složkové. Podle vzorce (198) má $\mathfrak{P}_c$ znaménko protivné znaménku Δc a podle (199) má $\mathfrak{P}_d$ a Δd totéž znaménko. Budou tedy kladná ideálná břemena působiti vzhůru, záporná dolů.



Obr. 205.

Řešíme-li graficky, měli bychom bráti pólovou vzdálenost $f = 1$, neboť jen pak je výslednicová čára k břemeni $P = 1$ příčinkovou čarou momentu ohybového, na čemž jsme odvození založili. Vzdáleností pólovou $f = 1$ určíme výslednicové čáry, jejichž pořadnice znamenají přímo ohybové pořadnice η, a to v měřidle břemen $\mathfrak{P}$, rovná-li se f jednotce v měřidle délkovém, a naopak. Zvolíme-li libovolnou vzdálenost pólovou, pak jest ohybová pořadnice η, jež znamená vlastně ohybový moment, jsouc pořadnicí výslednicové čáry rýsované pólovou vzdáleností $f = 1$, dána vzorcem

$$\eta = f y, \tag{200}$$

je-li y pořadnice výslednicové čáry k ideálnému břemeni $\mathfrak{P}$. Z úseků f, y měřili bychom jeden na měřidle délkovém, druhý na měřidle břemen $\mathfrak{P}$.

Pro mezipasový prut v soustavě kosoúhlé platí obecně vzorec (84^b) v prvém dílu tohoto spisu odvozený (3. vyd., str. 196), totiž

$$E \cos \varepsilon = \frac{M_c}{v_c} - \frac{M_d}{v_d};$$

z toho plyne

$$E = \frac{M_c}{v_c \cos \varepsilon} - \frac{M_d}{v_d \cos \varepsilon} = \frac{M_c}{r'_e} - \frac{M_d}{r''_e}. \tag{201}$$

Vzorec platí obecně pro osovou sílu prutu sestupného i výstupného, znamená-li c spodní, d horní konec prutu, ε odchylku osy prutové od vodorovné a $v_c = \overline{c\,c'}$, $v_d = \overline{d'\,d}$ svislé výšky mezi osami pasů C, D, proťatých s prutem E řezem $x\,x'$; r'_e, r''_e jsou délky kolmic, spuštěných z bodů c', d' na osu prutu E. Příčinkové čáry ohybových momentů M_c, M_d jsou výslednicovými čarami k břemeni $P = 1$, jež působí v bodě c, d. Pak se příčinková čára osové síly E určí podle posledního vzorce jakožto výslednicová čára k břemeni $\frac{1}{r'_e}$, jež působí v bodě c, a současně k břemeni $-\frac{1}{r''_e}$ v bodě d působícímu. Roztažením Δe prutu E vzniká ohybová čára, jež je výslednicovou čarou k břemenům, plynoucím z uvedených břemen, násobíme-li je roztažením Δe, tedy k břemenům

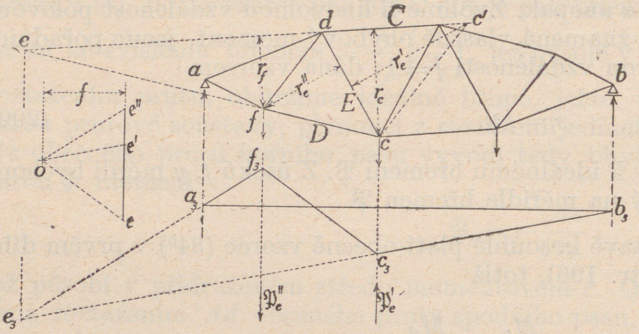
$$\mathfrak{P}'_e = \frac{\Delta e}{r'_e}, \qquad \mathfrak{P}''_e = -\frac{\Delta e}{r''_e}, \tag{202}$$

z nichž prvé působí v bodě c, druhé v bodě d. Kladnému roztažení Δe odpovídá břímě $\mathfrak{P}'_e$ vzhůru směřující (kladné) a břímě $\mathfrak{P}''_e$ záporné, tedy dolů působící. K břemenům $\mathfrak{P}''_e = \overline{e''\,e}$, $\mathfrak{P}'_e = \overline{e\,e'}$ bychom sestrojili z pólu o_3 výslednicovou čáru $a_3\,d_3\,c_3\,b_3$ (obr. 205), již vztahujeme k základní straně $a_3\,b_3$ a dostaneme tak čáru ohybovou. Poněvadž má ohybová čára tvar příčinkové čáry síly E, protnou se strany $a_3\,d_3$, $c_3\,b_3$ v bodě e_3 na svislici přidruženého středu momentového e. Ohybové pořadnice η odpovídají pólové vzdálenosti $f = 1$; volíme-li libovolnou vzdálenost f, určíme z pořadnic y výslednicové čáry ohybové pořadnice η podle vzorce (200). Prvá strana $a_3\,d_3$ výslednicové čáry určuje ohybové pořadnice všech styčných bodů vlevo od řezu $x\,x'$, poslední strana $c_3\,b_3$ platí pro styčné body vpravo od řezu $x\,x'$. Čára $a_3\,d_3\,c_3\,b_3$ dává pak ohybové pořadnice ve styčných bodech obou pasů. Ohybová čára spodního pasu by byla dána v témž obrazci čarou $a_3\,f_3\,c_3\,b_3$.

Lze však přímo určiti z roztažení Δe ohybovou čáru jediného pasu, na př. spodního; bude míti tvar příčinkové čáry osové síly E v případě, že se zatížení přenáší pouze do styčných bodů spodního pasu. Pak by nebylo v bodě d břemene, i daly by vnější síly po levé straně řezu $x\,x'$, jež jsou v rovnováze s osovými silami C, D, E proťatých prutů, k bodu f moment M_f rovný ohybovému momentu prostého nosníku. Momen-

tová výminka rovnováhy uvedené soustavy sil má za označení podle obr. 206 tvar

$$M_f + E\,r_e'' + C\,r_f = 0;$$



Obr. 206.

z toho vychází po dosazení $C = -\frac{M_c}{r_c}$ síla

$$E = \frac{M_c}{r_c} \cdot \frac{r_f}{r_e''} - \frac{M_f}{r_e''}.$$

Z obrazce plyne

$$\frac{r_f}{r_c} = \frac{\overline{f\,d}}{\overline{c\,c'}} = \frac{r_e''}{r_e'},$$

je-li $c\,c' \parallel f\,d$; pak vyjde

$$E = \frac{M_c}{r_e'} - \frac{M_f}{r_e''}. \qquad (203)$$

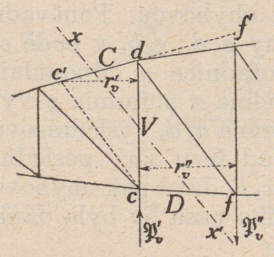
Podle předešlého vyvozuje roztažení Δe ohybovou čáru, která je výslednicovou čarou k ideálným břemenům

$$\mathfrak{P}_e' = \frac{\Delta e}{r_e'}, \qquad \mathfrak{P}_e'' = -\frac{\Delta e}{r_e''},$$

z nichž prvé působí ve spodním konci c prutu E, druhé v druhém konci f proťatého prutu D; poslední vzorce souhlasí se vzorci (202). Je-li roztažení Δe kladné, působí břímě $\mathfrak{P}_e'$ (kladné) vzhůru, břímě $\mathfrak{P}_e''$ (záporné) dolů. K břemenům $\mathfrak{P}_e'' = \overline{e''\,e}$, $\mathfrak{P}_e' = \overline{e\,e'}$ sestrojíme z pólu o_3 výslednicovou čáru $a_3 f_3 c_3 b_3$, jež je hledanou ohybovou čarou; strany $a_3 f_3$, $c_3 b_3$ se mají zase protínati v bodě e_3 na svislici přidruženého středu momentového e.

Obdobně bychom určili ideálná břemena ve styčných bodech proťatého prutu horního pasu, kdyby šlo o ohybovou čáru horního pasu; vyměnili bychom jen v předešlém odvození spodní a horní pás. Ideálné břímě $\mathfrak{P}_e''$ v horním konci prutu E by mělo znaménko protivné znaménku Δe a břímě $\mathfrak{P}_e'$ v druhém konci prutu C působící bylo by téhož znaménka jako Δe, jak ukazují poslední vzorce.

V pravoúhlé soustavě mezipasových prutů lze stanoviti jedinou čarou pouze ohyb jednoho pasu. Ohybová čára spodního pasu, vyvozená roztažením Δv svislice V, je jako u příčky E výslednicovou čarou k ideálným břemenům



Obr. 207.

$$\mathfrak{P}_v' = \frac{\Delta v}{r_v'}, \qquad \mathfrak{P}_v'' = -\frac{\Delta v}{r_v''}; \qquad (204)$$

břímě $\mathfrak{P}_v$ působí ve spodním konci c svislice V, břímě $\mathfrak{P}_v''$ v druhém styčném bodě f pasu D, jenž je proťat s prutem V řezem $x\,x'$ podle methody průsečné (obr. 207). Ramena r_v', r_v'' jsou zde vodorovné vzdálenosti osy svislice V od bodů c', f, je-li $c\,c' \parallel f\,d$. Utíná-li prodloužená osa pasu C na svislici bodu f úsek $\overline{f\,f'} = v'$ a je-li $\overline{c\,d} = v$, plyne z podobnosti

$$r_v' = r_v'' \frac{v}{v'}; \qquad (205)$$

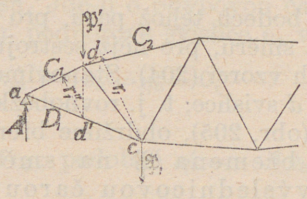
přímky $c\,c'$ není pak třeba.

Kdyby šlo o ohybovou čáru horního pasu, brali bychom horní pás C místo spodního pasu D a podle toho bychom pozměnili sestrojení ramen r_v', r_v''. Vzorce (204) zůstanou v platnosti; v horním konci svislice působí tu břímě $\mathfrak{P}_v''$, jež má opačné

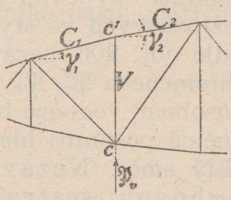
znaménko než Δv, a ve druhém konci prutu C působí břímě $\mathfrak{P}'_v$, jež má totéž znaménko jako Δv.

Má-li soustava v podpoře výšku rovnou nule (obr. 208), můžeme u kratšího krajního pasu C_1 řešiti podobně jako u vnitřního pasu. Jde-li o ohybovou čáru spodního pasu, jež je vyvozena roztažením Δc_1, určí se z příčinkové čáry osové síly C_1 pro zatížení spodního pasu, násobí-li se její pořadnice roztažením Δc_1. Působí-li břemena ve styčných bodech spodního pasu, plyne z rovnováhy sil A, C_1, D_1 momentovou výminkou k bodu c jako u obecného prutu horního pasu

$$C_1 = -\frac{M_c}{r_1}.$$



Obr. 208.



Obr. 209.

Jako v obecném případě soudíme i zde, že ohybová čára spodního pasu, vyvozená roztažením Δc_1, je výslednicovou čarou k ideálnému břemeni

$$\mathfrak{P}_1 = -\frac{\Delta c_1}{r_1},$$

působícímu v bodě c, což souhlasí s obecným vzorcem (198) i se vzorcem (202) pro břímě $\mathfrak{P}''_e$, řešíme-li u prutu mezipasového druhým způsobem.

Hledáme-li ohybovou čáru horního pasu (nebo obou pasů současně), počítejme, předpokládajíce břemena ve styčných bodech horního pasu, z rovnováhy sil A, C_1, D_1 momentovou výminkou k bodu d' sílu

$$C_1 = -\frac{M_d}{r''_1}.$$

Podle toho vyvozuje roztažení Δc_1 ohybovou čáru, jež je výslednicovou čarou k ideálnému břemeni

$$\mathfrak{P}'_1 = -\frac{\Delta c_1}{r''_1},$$

působícímu ve svislici bodu d. Poslední vzorec jest obdobný ke vzorci (202) pro břímě $\mathfrak{P}''_e$. Můžeme tedy u prutu C_1 postupovati jako u obecného prutu mezipasového, uvažujíce pouze břímě $\mathfrak{P}'_e$.

Končí-li nosník podporovou svislicí, lze ji uvažovati jako prut C_1 prvým způsobem.

Zvláštního odvození žádá svislice V, z jejíhož jednoho konce, na př. spodního, vycházejí dvě příčky (obr. 209). Pro osovou sílu této svislice platí, je-li spodní pás zatížen, podle vzorce (86[a]) v prvém dílu tohoto spisu (3. vyd., str. 198)

$$V = \frac{M_c}{v_c}(\operatorname{tg}\gamma_1 - \operatorname{tg}\gamma_2),$$

je-li $v_c = \overline{cc'}$ a znamenají-li γ_1, γ_2 odchylky os pasů C_1, C_2 od vodorovné. Příčinková čára momentu M_c je výslednicovou čarou k břemeni $P = 1$, jež působí v bodě c. Roztažení Δv jediného prutu V vyvozuje pak ohybovou čáru spodního pasu, jež je výslednicovou čarou k ideálnému břemeni

$$\mathfrak{P}_v = \frac{\Delta v_c}{v_c}(\operatorname{tg}\gamma_1 - \operatorname{tg}\gamma_2), \tag{206}$$

působícímu v bodě c. Z ohybové pořadnice spodního pasu určíme ohybovou pořadnici

horního pasu ve svislici V, jak bude dále uvedeno. Vycházejí-li dvě příčky z horního konce svislice, postupujeme obdobně jako v tomto případě; horní pás bychom tu nahradili spodním pasem.

Ideálná břemena $\mathfrak{P}_c$, $\mathfrak{P}_d$, jimiž nahrazujeme roztažení prutů pasových a jež působí v přidružených středech momentových, nezávisí nijak na směru, v němž hledáme posunutí ohybovou čarou. Rovněž tak břemena, jimiž nahrazujeme roztažení prutů mezipasových ve styčných bodech téhož pasu, pro něž tedy určujeme ramena r'_e, r''_e podle obr. 206, nezávisí na směru, pro nějž sestrojujeme čáru ohybovou; totéž platí o břemenech $\mathfrak{P}'_v$, $\mathfrak{P}''_v$, daných vzorci (204). Stanovíme-li u příčky ramena r'_e, r''_e prvým způsobem, vedouce body c, d svislice, t. j. rovnoběžky s paprsky $\mathfrak{P}$, tedy i se směrem, v němž posunutí hledáme (obr. 205), obdržíme břemena $\mathfrak{P}'_e$, $\mathfrak{P}''_e$, jež platí pouze pro svislý směr. Nezávisí-li břemena $\mathfrak{P}$ na směru, pro nějž hledáme čáru ohybovou, sestrojíme výslednicovou čarou k těmto břemenům v libovolném zaměření posunutí styčných bodů ve zvoleném směru břemen $\mathfrak{P}$.

*β) **Nosník prostý.*** Ohybovou čáru nosníku, jež plyne z roztažení všech prutů, stanovíme jakožto výslednicovou čáru k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$, působícím ve styčných bodech. Z roztažení každého pasového prutu určíme jediné břímě, jež působí v přidruženém středu momentovém, tedy v protějším styčném bodě druhého pasu. Roztažení každého prutu mezipasového nahrazujeme dvěma břemeny, jež působí v koncových bodech prutu, jde-li o ohybovou čáru pro oby pasy, nebo ve styčných bodech téhož pasu, hledáme-li pouze ohyb tohoto pasu. U svislic mezi dvěma příčkami sestupnými nebo výstupnými užíváme pouze druhého způsobu; pro svislici, z jejíhož jednoho konce vycházejí dvě příčky (obr. 209), platí břímě $\mathfrak{P}_v$ dané vzorcem (206). Ideálná břemena, jež připadají do téhož bodu styčného, se ovšem algebraicky sčítají. Jde-li na př. o ohybovou čáru spodního pasu, dají dva sousední pruty mezipasové do téhož bodu spodního pasu břemena téhož znamení jako roztažení obou prutů; poněvadž se však pravidlem znaménka osových sil prutů mezipasových střídají, ruší se částečně ideálná břemena $\mathfrak{P}$, jimiž nahrazujeme roztažení dvou sousedních prutů mezipasových v témž bodě styčném. U nosníku příhradového, který je na koncích prostě podepřen, jsou za svislého zatížení horní pasy tlačeny, spodní pasy taženy; podle vzorců (198), (199) mají pak břemena $\mathfrak{P}_c$ i $\mathfrak{P}_d$, jimiž nahrazujeme roztažení prutů pasových, znaménka kladná.

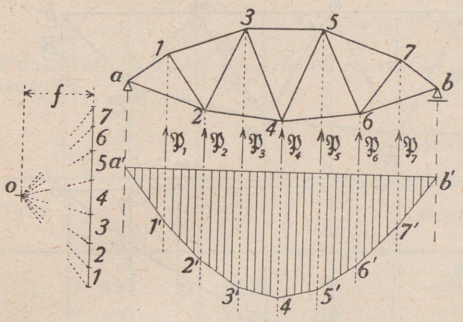
Výslednicová čára k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$ toho zaměření, v němž hledáme ohyb, jest ohybovou čarou nosníku. Její základní strana je stanovena výminkami podporovými. V podpoře pevné i v podpoře posouvatelné po vodorovné je svislé posunutí rovno nule; jde-li tedy o ohybovou čáru, jejíž pořadnice znamenají svislá posunutí příslušných bodů nosníku, je tím dána základní strana ohybové čáry. U nosníku soustavy kosoúhlé (obr. 210) lze určiti jedinou ohybovou čarou ohybové pořadnice styčných bodů obou pasů; rovná-li se tu v podporách výška nosníku nule, spojuje základní strana ohybové čáry její průsečíky a', b' se svislicemi podpor a, b. Břemena $\mathfrak{P}$ bychom musili určiti v tomto případě u mezipasových prutů způsobem prvým, berouce ramena r'_e, r''_e, podle obr. 205. Užijeme-li pro mezipasové pruty způsobu druhého (viz obr. 206), stanovíme výslednicovou čarou k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$ pouze ohybové pořadnice ve styčných bodech toho pasu, v jehož styčných bodech působí břemena $\mathfrak{P}$, kterými nahrazujeme roztažení prutů mezipasových. Pruty pasové dávají ovšem břemena $\mathfrak{P}$ ve styčných bodech obou pasů; břemena, jež působí ve styčných bodech toho pasu, jehož ohyb nehledáme, mohli bychom, jako by šlo o nepřímé zatížení, rozložiti po zákonu prostého nosníku do sousedních styčných bodů onoho pasu, pro nějž sestrojujeme čáru ohybovou. Rýsujíce ohybovou čáru, měli bychom užívati pólové vzdálenosti $f = 1$, čímž bychom dostali v příslušném měřidle správné pořadnice ohybové η. Užijeme-li libovolné vzdálenosti pólové f, obdržíme pořadnice y, z nichž se vypočtou ohybové pořadnice η podle vzorce (200); měříme-li f na měřidle délkovém, změříme y na měřidle sil $\mathfrak{P}$ a naopak.

U nosníku soustavy pravoúhlé určíme jedinou čarou ohybovou pouze ohyb jediného pasu, jde-li o směr svislý. Ohybová čára je zase výslednicovou čarou k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$, jejichž stanovení je známo. Roztažení prutů mezipasových nahrazujeme zde břemeny ve styčných bodech toho pasu, jehož ohyb hledáme. Je-li nosník podepřen v bodě a pevně, v bodě b posouvatelně po vodorovné (obr. 211), platí pro ohyb ve svislém směru v podporách výminky $\eta_a = 0$, $\eta_b = 0$, jež stanoví základní stranu ohybové čáry spodního pasu. Jde-li o ohybovou čáru horního pasu, platí pro svislé posunutí η'_a horního konce a' podporové svislice v_a vztah

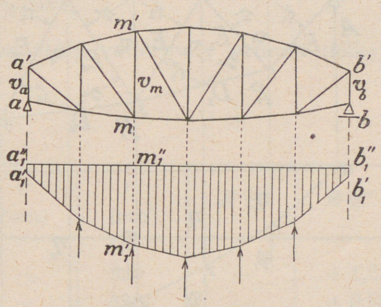
$$\eta'_a + \Delta v_a = \eta_a = 0,$$

z něhož plyne

$$\eta'_a = -\Delta v_a; \text{ podobně } \eta'_b = -\Delta v_b. \tag{207}$$



Obr. 210.



Obr. 211.

Tím jest určena základní strana ohybové čáry horního pasu, z níž plynou také ohybové pořadnice spodního pasu podle rovnice

$$\eta'_m + \Delta v_m = \eta_m; \tag{208}$$

zde znamená η'_m svislé posunutí bodu m', η_m svislé posunutí bodu m a Δv_m roztažení svislice $v_m = \overline{m\,m'}$.

Rýsujeme-li výslednicovou čáru k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$ libovolnou vzdáleností pólovou f, určíme pořadnice y, z nichž se vypočtou správné ohybové pořadnice η podle vzorce (200). Pak je podle vzorců (207)

$$y'_a = \overline{a''_1\,a'_1} = \frac{\eta'_a}{f} = -\frac{\Delta v_a}{f}, \qquad y'_b = \overline{b''_1\,b'_1} = \frac{\eta'_b}{f} = -\frac{\Delta v_b}{f}.$$

Body a''_1, b''_1 spojuje základní strana ohybové čáry horního pasu, od níž měříme ve svislici bodu m' pořadnici $y'_m = \overline{m''_1\,m'_1}$; vzorec (200) dává skutečnou pořadnici ohybovou

$$\eta'_m = f\,y'_m = f \cdot \overline{m''_1\,m'_1}.$$

Pořadnice y jsou kladné, směřují-li od základní strany dolů.

Ohybovou čáru lze řešiti jakožto výslednicovou čáru k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$ též počtem. Pořadnice výslednicové čáry, měřené od tětivy spojující průsečíky čáry se svislicemi koncových bodů soustavy prutové, určí se jako momentové pořadnice nosníku na koncích prostě podepřeného. Nesouhlasí-li to se skutečným podepřením nosníku, přejdeme snadno ke správné straně základní, dané skutečnými výminkami podporovými, jak jest uvedeno dále u spojitého nosníku kloubového.

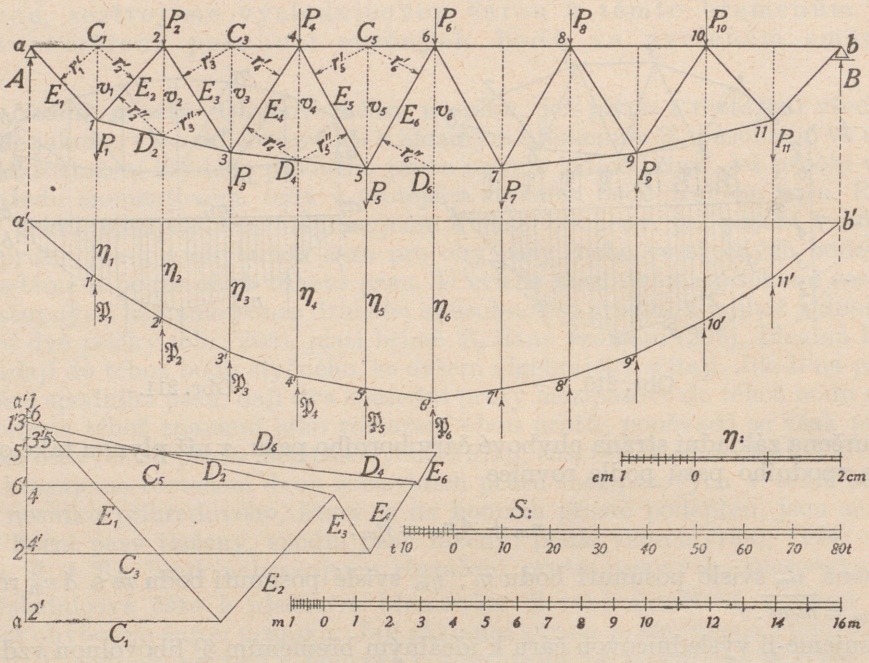
Příklad 53. Určíme počtem ohybovou čáru prostého nosníku příhradového soustavy kosoúhlé o rozměrech $\overline{ab} = l = 25{,}2\,\text{m} = 12 \times 2{,}1\,\text{m}$, $v_1 = 2{,}3\,\text{m}$, $v_3 = 3{,}3\,\text{m}$, $v_5 = 3{,}8\,\text{m}$, na nějž působí ve styčných bodech břemena $P_1 = P_3 = P_5 = 3{,}0\,\text{t}$, $P_2 = P_4 = P_6 = 14{,}0\,\text{t}$ (obr. 212).

Z daných rozměrů určíme výšky $v_2 = 2{,}8\,\text{m}$, $v_4 = 3{,}55\,\text{m}$, $v_6 = v_5$ a délky prutů uvedené dále v tab. I. K danému zatížení stanovíme pak osové síly prutů na př. graficky methodou bodů styčných.[1]) Z osových sil S plynou roztažení prutů podle vzorce

$$\Delta s = \frac{S\,s}{E\,U},$$

do něhož dosadíme $E = 2000\,\text{t/cm}^2$. Pro jednodušší a rychlejší výpočet vynechme E a stanovme

$$E \cdot \Delta s = \frac{S\,s}{U}.$$



Obr. 212.

Průřezové obsahy U jednotlivých prutů mějtež hodnoty uvedené v tab. I.

Z roztažení prutů Δs počítáme ideálná břemena $\mathfrak{P}$ podle vzorců dříve odvozených, jež mají obecně tvar

$$\mathfrak{P} = \pm \frac{\Delta s}{r};$$

určujeme-li $E \cdot \Delta s$ místo Δs, dostaneme

$$E\,\mathfrak{P} = \pm \frac{E \cdot \Delta s}{r}.$$

Pro pruty horního pasu je $r_c = v_c$ a

$$E\,\mathfrak{P}_c = -\frac{E \cdot \Delta c}{v_c},$$

Pro pruty spodního pasu určíme ramena $r_d = v_d \cos\delta$ a vypočteme podle (199)

$$E\,\mathfrak{P}_d = \frac{E \cdot \Delta d}{r_d}.$$

[1]) Počtářské řešení osových sil téhož nosníku je pro obtížení pětkrát menší provedeno v prvém dílu tohoto spisu, 3. vyd. (1940), str. 200 a d.

Roztažení Δs každého prutu mezipasového nahradíme na př. v obou jeho koncových bodech ideálnými břemeny, pro něž platí podle vzorců (202)

$$E\,\mathfrak{P}' = \frac{E \cdot \Delta s}{r'}, \qquad E\,\mathfrak{P}'' = -\frac{E \cdot \Delta s}{r''};$$

břímě $\mathfrak{P}'$ působí ve spodním, $\mathfrak{P}''$ v horním konci prutu. Výslednicová čára k břemenům $\mathfrak{P}$ takto určeným dá ohyb obou pasů.

Ramena r', r'' by stačilo odměřiti z mnohostranu osového, rýsovaného v měřidle co největším, což se doporučuje zvláště u soustavy kosoúhlé, jde-li o ohybovou čáru jediného pasu; počtářské řešení ramen r', r'' (viz obr. 206) by tu bylo složité. Jde-li o ohyb obou pasů, lze řešiti snadno počtem. Pro sestupnou příčku E_m platí

$$r'_m = v_m \cos \varepsilon_m, \quad r''_m = v_{m-1} \cos \varepsilon_m;$$

podle toho určíme ramena r', r'' u prutů E_1, E_3, E_5, jež jsou uvedena v tab. I. Pro výstupnou příčku E_n počítáme podle vzorců

$$r'_n = v_{n-1} \cos \varepsilon_n, \quad r''_n = v_n \cos \varepsilon_n.$$

Obecně pak jest $\cos \varepsilon_m = \frac{a}{e_m}$, kdež $a = 2{,}1$ m znamená stálý vodorovný průmět délky prutů mezipasových.

Tabulka I.

Prut	s (cm)	S (t)	U (cm²)	$E \cdot \Delta s$	r' (cm)	r'' (cm)	$E\,\mathfrak{P}'$	$E\,\mathfrak{P}''$
C_1	420	− 40,2	60,3	− 280	—	230	−	+ 1,22
C_3	420	− 70,8	106,7	− 279	—	330	−	+ 0,85
C_5	420	− 80,7	121,0	− 280	—	380	−	+ 0,74
D_2	431,7	+ 65,5	70,5	+ 401	272,4	—	+ 1,47	−
D_4	423	+ 81,0	86,0	+ 398	352,5	—	+ 1,13	−
D_6	420	+ 84,6	89,0	+ 399	380	—	+ 1,05	−
E_1	311,4	+ 59,6	62,5	+ 297	155,1	—	+ 1,91	−
E_3	391,2	+ 14,0	23,7	+ 231	177,1	150,3	+ 1,31	− 1,54
E_5	434,2	+ 0,5	17,5	+ 12,4	183,8	171,7	+ 0,07	− 0,07
E_2	311,4	− 35,0	63,0	− 173	155,1	188,8	− 1,12	+ 0,92
E_4	391,2	− 17,1	41,0	− 163	177,1	190,6	− 0,92	+ 0,86
E_6	434,2	− 8,0	24,0	− 145	183,8	183,8	− 0,79	+ 0,79

Břemena $E\,\mathfrak{P}$, jež připadají do téhož bodu, sečteme algebraicky. Do bodu *1* dají břemena pruty C_1, E_1, E_2 (břímě $\mathfrak{P}'$), tedy celkem

$$E\,\mathfrak{P}_1 = + 1{,}22 + 1{,}91 - 1{,}12 = + 2{,}01;$$

v bodě *2* dostaneme z prutů D_2, E_2 (břímě $\mathfrak{P}''$) a E_3 (břímě $\mathfrak{P}''$) celkem

$$E\,\mathfrak{P}_2 = + 1{,}47 + 0{,}92 - 1{,}54 = + 0{,}85,$$

v bodě *3* z prutů C_3, E_3 (břímě $\mathfrak{P}'$) a E_4 (břímě $\mathfrak{P}'$) úhrnem

$$E\,\mathfrak{P}_3 = + 0{,}85 + 1{,}31 - 0{,}92 = + 1{,}24,$$

v bodě *4* z prutů D_4, E_4 (břímě $\mathfrak{P}''$) a E_5 (břímě $\mathfrak{P}''$) celkem

$$E\,\mathfrak{P}_4 = + 1{,}13 + 0{,}86 - 0{,}07 = + 1{,}92,$$

v bodě *5* z prutů C_5, E_5 (břímě $\mathfrak{P}'$) a E_6 (břímě $\mathfrak{P}'$) úhrnem

$$E\,\mathfrak{P}_5 = + 0{,}74 + 0{,}07 - 0{,}79 = + 0{,}02$$

a v bodě *6* z prutů D_6, E_6 (břímě $\mathfrak{P}''$) a E_7 (totéž jako z prutu E_6) dohromady

$$E\,\mathfrak{P}_6 = + 1{,}05 + 0{,}79 + 0{,}79 = + 2{,}63.$$

Ohybová čára nosníku je výslednicovou čarou k břemenům $\mathfrak{P}$, z nichž se určí graficky nebo počtářsky. Kdybychom řešili graficky, obdrželi bychom k břemenům $E\,\mathfrak{P}$ pólovou vzdáleností $f=E$ (místo $f=1$ pro břemena $\mathfrak{P}$) momentové pořadnice rovné skutečným pořadnicím ohybovým. Přenášíme-li f podle měřidla sil $E\,\mathfrak{P}$, měříme ohybové pořadnice v měřidle délkovém a naopak. Kdybychom chtěli ohybové pořadnice ve skutečné velikosti, je-li nosník rýsován v poměru zmenšení $1:\mu$, zvolili bychom vzdálenost pólovou

$$f' = \frac{f}{\mu} = \frac{E}{\mu};$$

přeneseme-li ji v měřidle sil $E\,\mathfrak{P}$, dostaneme ohybové pořadnice ve skutečné velikosti jakožto délky.

Snadno řešíme též počtem. Nejprve vypočteme z břemen $\mathfrak{P}$ posouvající síly $\mathfrak{T}$, vycházejíce z posouvající síly v oddílu *5-6*, jež má zde hodnotu

$$\mathfrak{T}_6 = \frac{1}{2}\mathfrak{P}_6,$$

poněvadž se pro souměrnost vnějších sil reakce $\mathfrak{A}$ rovná polovici součtu všech břemen $\mathfrak{P}$. V oddílech předchozích platí

$$\mathfrak{T}_5 = \mathfrak{T}_6 + \mathfrak{P}_5, \qquad \mathfrak{T}_4 = \mathfrak{T}_5 + \mathfrak{P}_4, \qquad \mathfrak{T}_3 = \mathfrak{T}_4 + \mathfrak{P}_3 \ldots;$$

sčítáme tedy břemena $\mathfrak{P}$ se silou $\mathfrak{T}_6$ postupně od středu nosníku k podpoře. Momenty určujeme postupně ze vzorců

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{T}_1 \cdot a, \qquad \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{T}_2 \cdot a, \qquad \mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{T}_3 \cdot a, \ldots$$

nebo kratčeji ze vzorců

$$\frac{\mathfrak{M}_1}{a} = \mathfrak{T}_1, \qquad \frac{\mathfrak{M}_2}{a} = \frac{\mathfrak{M}_1}{a} + \mathfrak{T}_2, \qquad \frac{\mathfrak{M}_3}{a} = \frac{\mathfrak{M}_2}{a} + \mathfrak{T}_3, \ldots$$

podle nichž vypočteme podíly $\frac{\mathfrak{M}}{a}$, sčítajíce síly $\mathfrak{T}$ od podpory ke středu nosníku.

Bereme-li místo břemen $\mathfrak{P}$ součiny $E\,\mathfrak{P}$, určíme týmž postupem síly posouvající $\mathfrak{T}$ i podíly $\frac{\mathfrak{M}}{a}$; ovšem je třeba pak děliti modulem E. Ohybové pořadnice se rovnají momentům $\mathfrak{M}$, vyvozeným břemeny $\mathfrak{P}$; musíme proto odstraniti jmenovatele a ve zlomcích $\frac{\mathfrak{M}}{a}$. Z podílů $\frac{\mathfrak{M}}{a}$, určených z břemen $E\,\mathfrak{P}$, stanovíme tedy správné ohybové pořadnice podle vzorce

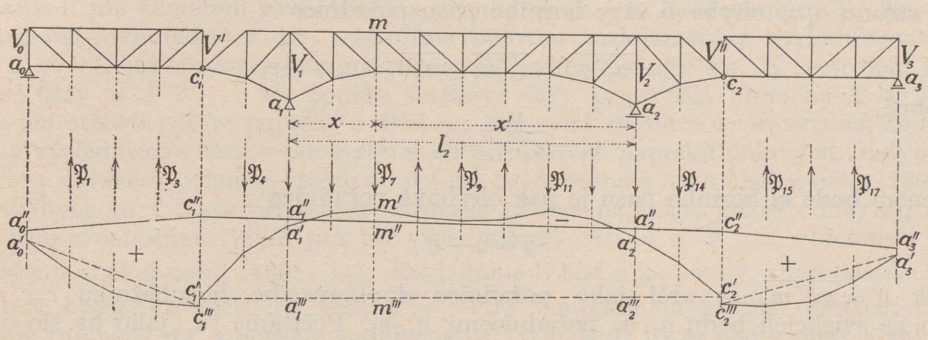
$$\eta = \frac{\mathfrak{M}}{a} \cdot \frac{a}{E},$$

do něhož dosadíme $a = 2{,}1\ \mathrm{m} = 210\ \mathrm{cm}$, $\frac{a}{E} = \frac{210}{2000} = 0{,}105$. Dosazovali jsme síly v tunách, délky v cm; ohybové pořadnice η vyjdou pak v cm. Výpočet je v tab. II; podle ní je narýsována ohybová čára v obr. 212.

Tabulka II.

m	$E\,\mathfrak{P}_m$	$\mathfrak{T}_m$	$\frac{\mathfrak{M}_m}{a}$	η_m
1	2,01	7,36	7,36	0,773
2	0,85	5,35	12,71	1,335
3	1,24	4,50	17,21	1,807
4	1,92	3,26	20,47	2,149
5	0,02	1,34	21,81	2,290
6	2,63	1,32	23,13	2,429

γ) Spojitý nosník kloubový. Ideálná břemena $\mathfrak{P}$ ve styčných bodech příhradového spojitého nosníku kloubového (obr. 213) stanovíme zase podle vzorců (198), (199), (202), (204), (206) týmž postupem jako u prostého nosníku příhradového. Jde-li na př. o ohybovou čáru horního pasu, nahrazujeme mezipasové pruty břemeny ve styčných bodech horního pasu. Břemena působící v témž bodě styčném sečteme algebraicky a stanovíme pak výslednicovou čáru $c_1' m' c_2'$ k břemenům $\mathfrak{P}$ v části $c_1 c_2$ na př. libovolnou vzdáleností pólovou f.



Obr. 213.

Základní stranu určíme z výminek podporových. Je-li podpora a_1 pevná, ostatní posouvatelné po vodorovné, rovnají se ohybové pořadnice ve všech podporách nule. Horní konce podporových svislic V_1, V_2 mají pak podle vzorců (207) snížení (kladné pořadnice ohybové) rovná $-\Delta v_1$, $-\Delta v_2$. V ohybové čáře rýsované pólovou vzdáleností f máme podle vzorce (200) pořadnice $y = \frac{\eta}{f}$, je-li η skutečná pořadnice ohybová; je tedy

$$\overline{a_1'' a_1'} = -\frac{\Delta v_1}{f}, \qquad \overline{a_2'' a_2'} = -\frac{\Delta v_2}{f},$$

čímž jest určena přímá strana základní, platná pro část $c_1 c_2$. Od základní strany $c_1'' c_2''$ měříme ve svislici bodu c_1 ohybovou pořadnici $\overline{c_1'' c_1'}$, jež náleží k bodu c_1. Od tohoto bodu přejdeme k hornímu konci svislice V', přeneseme-li opět

$$\overline{c_1' c_1'''} = -\frac{\Delta v'}{f},$$

načež narýsujeme k břemenům $\mathfrak{P}$ v části $a_0 c_1$ výslednicovou čáru $a_0' c_1'''$ bodem c_1'''. V podpoře a_0 je skutečná pořadnice ohybová rovna nule, pro horní konec svislice V_0 přeneseme

$$\overline{a_0''' a_0'} = -\frac{\Delta v_0}{f}$$

a určíme tak základní stranu $a_0'' c_1''$ pro část $a_0 c_1$. Obdobně postupujeme u části $c_2 a_3$; tu přeneseme

$$\overline{c_2' c_2'''} = -\frac{\Delta v''}{f},$$

rýsujeme bodem c_2''' výslednicovou čáru $c_2''' a_3'$ k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$ v části $c_2 a_3$ a přeneseme

$$\overline{a_3'' a_3'} = -\frac{\Delta v_3}{f}.$$

Základní stranou pro část nosníku $c_2 a_3$ je pak přímka $c_2'' a_3''$.

Kdybychom řešili počtem, určili bychom si v části $c_1 c_2$ nejprve pořadnice $\eta = \overline{m''' m'}$ výslednicové čáry k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$, měřené od její tětivy $c'_1 c'_2$; pořadnice η znamenají momentové pořadnice nosníku zatíženého břemeny $\mathfrak{P}$ a prostě podepřeného na svislicích bodů c_1, c_2. V bodech a_1, a_2 dostaneme tak pořadnice

$$\eta_1 = \overline{a'''_1 a'_1}, \qquad \eta_2 = \overline{a'''_2 a'_2}.$$

Předpokládáme-li pro počtářské řešení pólovou vzdálenost $f = 1$, obdržíme pro základní stranu $a''_1 a''_2$ ohybové čáry horního pasu pořadnice

$$\eta'_1 = \overline{a''_1 a''_1} = \overline{a'''_1 a'_1} + \overline{a'_1 a''_1} = \eta_1 + \Delta v_1$$

a obdobně

$$\eta'_2 = \overline{a'''_2 a''_2} = \eta_2 + \Delta v_2.$$

V obecném bodě m horního pasu je pak ohybová pořadnice

$$y = \eta - \eta';$$

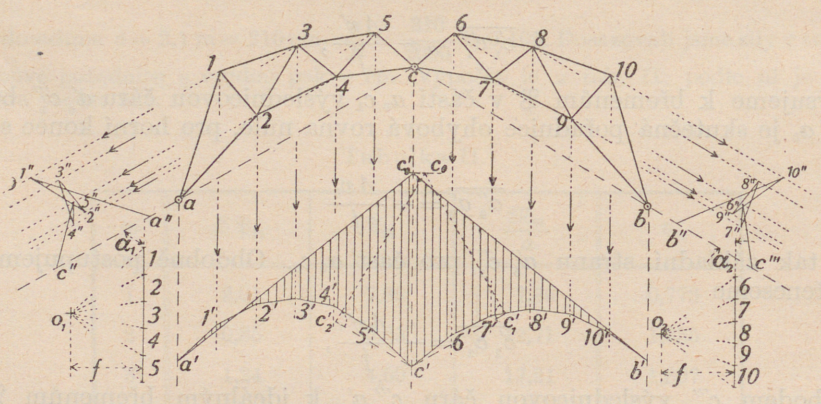
doplněk $\eta' = \overline{m''' m''}$ se určí jako pořadnice doplňovacího lichoběžníka $c'_1 c''_1 c''_2 c'_2$, daného ve svislicích bodů a_1, a_2 pořadnicemi η'_1, η'_2. Počítáme tu, jako by šlo o momentový doplněk M' spojitého nosníku, tedy podle vzorce

$$\eta' = \frac{\eta'_1 x' + \eta'_2 x}{l_2},$$

platí-li označení podle obr. 213.

Podobně bychom vypočetli též ohybové pořadnice v částech nosníku $a_0 c_1$, $c_2 a_3$. Určili bychom zase nejprve jako u prostého nosníku pořadnice výslednicových čar k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$, měřené od jejich tětiv $a'_0 c'''_1$, $c'''_2 a'_3$; pak bychom přešli jako ve vnitřní části $c_1 c_2$ ke správné straně základní $a''_0 c''_1$, $c''_2 a''_3$.

δ) ***Oblouk o třech kloubech.*** Roztažení prutů nahradíme tu zase ideálnými břemeny $\mathfrak{P}$, jež stanovíme podle vzorců shora odvozených tak, aby nezávisela na směru, ve kterém ohyb hledáme; musíme tedy roztažení každého prutu mezipasového nahraditi břemeny $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ ve styčných bodech téhož pasu. K břemenům $\mathfrak{P}$ v části $a\,c$ (obr. 214)



Obr. 214.

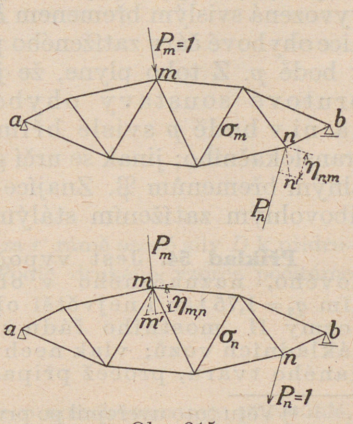
stanovíme z pólu o_1 ve vzdálenosti f od složkové čáry zvoleného výslednicovou čáru $a'\,1'\,2' \ldots c'$ a k břemenům $\mathfrak{P}$ v části $c\,b$ sestrojíme z pólu o_2 zase ve vzdálenosti f od čáry složkové výslednicovou čáru $c'\,6'\,7' \ldots b'$. Přímé základní strany ohybových

čar pro části ac, cb určíme ohybovými pořadnicemi bodů a, c, b. V obou opěrách a, b jsou ohybové pořadnice rovny nule, procházejí tedy základní strany body a', b'. Ohybovou pořadnici bodu c vyšetříme, stanovíme-li nejprve změny vzdáleností $\overline{ac} = s'$, $\overline{cb} = s''$.

Nezávisí-li břemena $\mathfrak{P}$ na směru, v němž ohyb hledáme, určuje výslednicová čára k břemenům $\mathfrak{P}$ v libovolném zaměření posunutí styčných bodů v tomto směru. Lze pak i změny $\Delta s'$, $\Delta s''$ určiti výslednicovými čarami k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$, dáme-li jim zaměření rovnoběžná s přímkami ac, cb. K břemenům $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_5$, jež působí rovnoběžně s ac, sestrojíme pólovou vzdáleností f výslednicovou čáru $a''1''2'' \ldots c''$, jež stanoví posunutí styčných bodů ve směru ac. K sestrojení výslednicové čáry $a''1''2'' \ldots$ lze použíti složkové čáry pro svislá břemena $\mathfrak{P}$ a pólu o_1; třeba jen otáčeti pólové paprsky o úhel α_1, jejž svírá spojnice ac se svislicí, tedy vésti strany výslednicové čáry v odchylce α_1 od příslušných paprsků pólových. Kdybychom složkový obrazec s pólem o_1 otočili do polohy rovnoběžné s ac o úhel α_1 nebo $(180^0 - \alpha_1)$, dostali bychom v obou případech sdružené pólové paprsky, jež se odchylují o 180^0, tedy jsou rovnoběžné; vyjde pak táž výslednicová čára $a''1''2'' \ldots$, otáčíme-li pólové paprsky o úhel α_1 nebo $(180^0 - \alpha_1)$. Pokládáme-li bod a za pevný, znamená úsek $\overline{a''c''}$ posunutí bodu c ve směru ac, tedy $\overline{a''c''} = \Delta s'$ v měřidle ohybového obrazce; v tomto případě znamená $\Delta s'$ zmenšení vzdálenosti s', poněvadž by se bod c pohyboval k pevnému bodu a ve smyslu $a''c''$.

Obdobně určíme výslednicovou čarou k břemenům $\mathfrak{P}$ v části cb změnu vzdálenosti $\overline{cb} = s''$. Břemenům $\mathfrak{P}_6, \mathfrak{P}_7, \ldots \mathfrak{P}_{10}$ dáme působiti rovnoběžně se spojnicí cb a sestrojíme k nim pólovou vzdáleností f výslednicovou čáru $c'''6''7'' \ldots b''$; k tomu můžeme užíti složkové čáry pro svislá břemena $\mathfrak{P}$ a pólu o_2, vedeme-li strany výslednicové čáry od příslušných paprsků pólových v odchylce α_2, kterou tvoří spojnice bc se svislicí. Úsek $\overline{b''c'''} = \Delta s''$ znamená zmenšení vzdálenosti s'', poněvadž má smysl protivný smyslu bc.

Ze známých změn $\Delta s'$, $\Delta s''$ sestrojíme správné úplné přemístění bodu c translokačním obrazcem, jejž narýsujeme tak, aby úplné přemístění bodu c končilo v bodě c'. Poněvadž tu vycházíme z nové polohy c', přeneseme $\Delta s' = \overline{a''c''} = \overline{c_1'c'}$ do rovnoběžky s ac v tom smyslu, jaký by odpovídal postupu z bodu c do bodu a, který se k bodu c blíží; obdobně přeneseme $\Delta s'' = \overline{b''c'''} = \overline{c_2'c'}$ do rovnoběžky s bc, jako bychom šli od bodu c k bodu b, jenž se k bodu c přibližuje. Otočení $c_1'c_0 \perp c_1'c'$, $c_2'c_0 \perp c_2'c'$ sekou se v bodě c_0, jenž znamená původní polohu bodu c; úsek $\overline{c_0c'}$ jest úplné přemístění bodu c. Promítneme-li $\overline{c_0c'}$ do svislice, vedouce bodem c_0 vodorovnici c_0c_0', dostaneme v úseku $\overline{c_0'c'}$ ohybovou pořadnici bodu c v měřidle ohybového obrazce. Základní stranou ohybové čáry v části ac je pak přímka $a'c_0'$ a v části cb přímka $c_0'b'$; od základních stran měříme ohybové pořadnice k výslednicovým čarám $a'1'2' \ldots, c'6'7' \ldots$ Z pořadnic y, jež odpovídají pólové vzdálenosti f, určíme správné ohybové pořadnice η podle vzorce (200).



Obr. 215.

58. Věta o vzájemnosti posunutí a příčinkové čáry ohybu. Na styčný bod m soustavy prutové (obr. 215) nechť působí vnější síla $P_m = 1$ v libovolném paprsku; v obecném prutu s vznikne tímto zatížením prutové soustavy osová síla σ_m, jež vyvodí v prutu s roztažení

$$\Delta s_m = \frac{\sigma_m s}{E U}.$$

Soustava se přetvoří; bod n nabude polohy n' a posune se ve směru paprsku P_n o délku $\eta_{n,m}$. Toto posunutí vyšetříme podle vzorce (192), dáme-li na soustavu působiti vnější síle $P_n = 1$, jež vyvodí v prutu s osovou sílu σ_n; pak jest

$$\eta_{n,m} = \Sigma \sigma_n \cdot \Delta s_m = \Sigma \frac{\sigma_m \sigma_n s}{E U}.$$

Naopak také břímě $P_n = 1$ vyvozuje v prutu s roztažení

$$\Delta s_n = \frac{\sigma_n s}{E U}$$

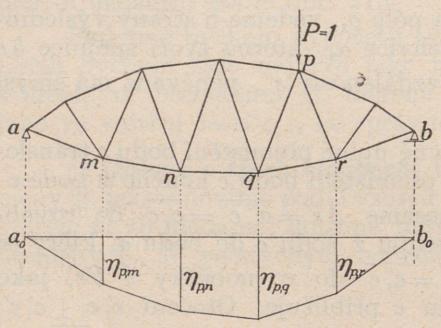
a přetvoří soustavu tak, že bod m nabude na př. nové polohy m'; ve směru paprsku P_m posune se bod m o délku $\eta_{m,n}$, pro niž obdobně platí

$$\eta_{m,n} = \Sigma \sigma_m \cdot \Delta s_n = \Sigma \frac{\sigma_m \sigma_n s}{E U}.$$

Srovnáním výsledků plyne

$$\eta_{m,n} = \eta_{n,m}, \tag{209}$$

čímž jest odvozena *věta o vzájemnosti posunutí* (*Maxwellova*): Posunutí bodu m ve směru P_m účinkem břemene $P_n = 1$ rovná se posunutí bodu n ve směru P_n účinkem břemene $P_m = 1$. Z obou přípon posunutí $\eta_{m,n}$ naznačuje prvá bod (m), o jehož posunutí jde, i směr (P_m) posunutí; druhá přípona značí působiště (n) i směr (P_n) břemene $P = 1$, jež posunutí vyvozuje. Za tohoto označení lze podle věty právě odvozené zaměniti dvojité přípony posunutí η.[1])



Obr. 216.

Větou o vzájemnosti posunutí určíme snadno *příčinkovou čáru ohybu* libovolného bodu soustavy prutové; je to čára, jejíž pořadnice naznačují, jak přičiňují jednotlivé polohy pohyblivého břemene $P = 1$ k ohybu (svislému posunutí) libovolného bodu p prutové soustavy (obr. 216). Pořadnicemi této čáry jsou ve svislicích styčných bodů m, n, q, r zatíženého pasu svislá posunutí $\eta_{p,m}$, $\eta_{p,n}$, $\eta_{p,q}$, $\eta_{p,r}$ bodu p, vyvozená svislým břemenem $P = 1$, jež působí postupně v bodech m, n, q, r. Podle věty o vzájemnosti posunutí jest

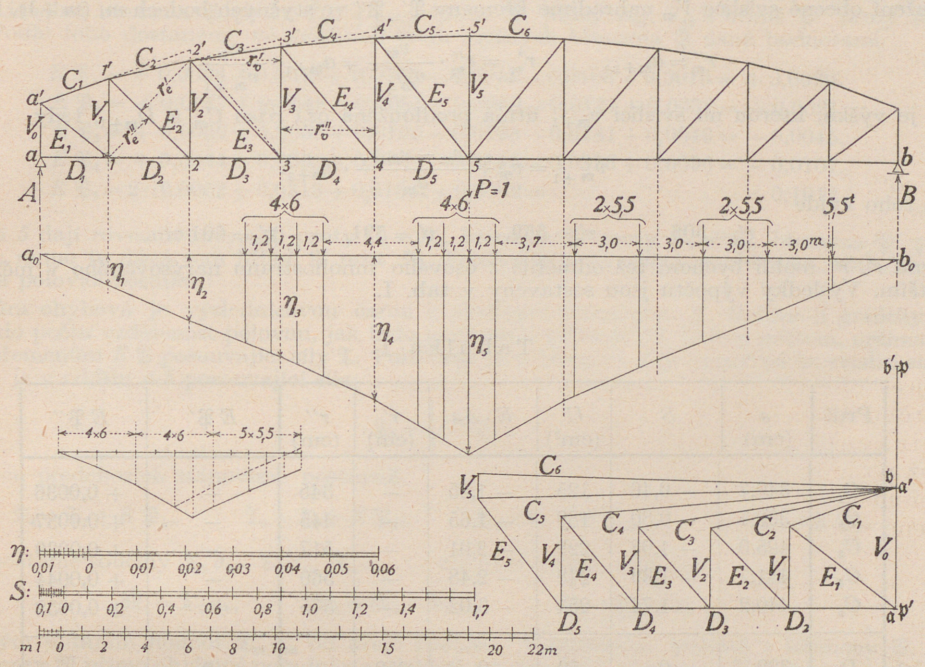
$$\eta_{p,m} = \eta_{m,p}, \quad \eta_{p,n} = \eta_{n,p}, \quad \eta_{p,q} = \eta_{q,p}, \quad \eta_{p,r} = \eta_{r,p}:$$

$\eta_{m,p}$, $\eta_{n,p}$, $\eta_{q,p}$, $\eta_{r,p}$ jsou pak svislá posunutí (ohybové pořadnice) bodů m, n, q, r, vyvozená svislým břemenem $P = 1$, jež působí v bodě p. Tato posunutí znamenají pořadnice ohybové čáry zatíženého pasu za zatížení prutové soustavy svislým břemenem $P = 1$ v bodě p. Z toho plyne, že je příčinkovou čarou ohybu libovolného bodu p prutové soustavy ohybová čára zatíženého pasu soustavy, působí-li na ni v bodě p svislé břímě $P = 1$. Tato ohybová čára se vyšetří graficky z obrazce translokačního; jinak se určí graficky nebo počtářsky jakožto výslednicová čára k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$. Znajíce příčinkovou čáru ohybu, určíme snadno ohyb vyvozený libovolným zatížením stálým i pohyblivým.

Příklad 54. Jest vypočísti příčinkovou čáru ohybu středu nosníku příhradového, naznačeného v obr. 217, a stanoviti ohyb vyvozený stálým zatížením $q_0 = 1{,}75$ t/m i největší ohyb, jenž vzniká pohyblivým zatížením vlakem podle normy II mostního řádu z r. 1904, složeným ze dvou tendrových lokomotiv a nákladních vozů; vlak nechť se pohybuje po mostě, jenž má dva hlavní nosníky daného tvaru, pročež připadají na každý nosník poloviční tlaky náprav.

[1]) Větu tuto uveřejnil po prvé *J. Cl. Maxwell* ve „Philosophical Magazine and Journal of Science“ r. 1864, sv. 27, str. 294 a d.

Tvar nosníku buď dán rozměry: $a_1 = \overline{a\ 1} = 3{,}2$, $a_2 = \overline{1\ 2} = 3{,}8$, $a_3 = \overline{2\ 3} = 4{,}2$, $a_4 = \overline{3\ 4} = 4{,}4$, $a_5 = \overline{4\ 5} = 4{,}4$ m, tedy $l = \overline{a\ b} = 40$ m; $v_0 = 2{,}5$, $v_1 = 3{,}67$, $v_2 = 4{,}58$, $v_3 = 5{,}23$, $v_4 = 5{,}62$, $v_5 = 5{,}75$ m. Z těchto rozměrů určíme délky prutů s, uvedené v tab. I.



Obr. 217.

Příčinková čára ohybu středu nosníku jest ohybovou čarou nosníku při zatížení břemenem $P = 1$ t v bodě 5, jehož průhyb hledáme. Toto břímě vyvodí reakce $A = B = \frac{1}{2}$ t a v prutech nosníku osové síly S, jež určíme na př. graficky methodou bodů styčných (obr. 217); v obrazci silovém jest $\overline{\mathfrak{p}\ \mathfrak{p}'} = P = 1$ t, $\overline{\mathfrak{a}\ \mathfrak{a}'} = A = \frac{1}{2}$ t, $\overline{\mathfrak{b}\ \mathfrak{b}'} = B = \frac{1}{2}$ t. Průřezy prutů buďtež známy; jejich obsahy U jsou uvedeny v tabulce I. Roztažení prutů jsou dána vzorcem

$$\Delta s = \frac{S\,s}{E\,U};$$

abychom měli příhodnější čísla, vypočteme součiny

$$E \cdot \Delta s = \frac{S\,s}{U}$$

a zrušíme násobitele E na konec dělením výsledků hodnotou E.

Z roztažení prutů plynou ideálná břemena

$$\mathfrak{P}' = \frac{\Delta s}{r'}, \qquad \mathfrak{P}'' = -\frac{\Delta s}{r''}.$$

Podle prvého vzorce počítáme u prutů spodního pasu, dosazujíce za r' rámě osové síly D k přidruženému středu momentovému; pro prut D_m jest $r'_m = v_{m-1}$. Podle druhého vzorce počítáme u prutů horního pasu, kde je pro prut C_m

$$r''_m = v_m \cos \gamma_m = v_m \frac{a_m}{c_m}.$$

Pro pruty mezipasové počítáme břemena $\mathfrak{P}'$ i $\mathfrak{P}''$. Poněvadž jde o nosník soustavy pravoúhlé, lze určiti jedinou ohybovou čarou pouze ohyb jednoho pasu; řešme ohyb zatíženého pasu, jímž

budiž pás spodní. Pak nahrazujeme roztažení příčky E_m břemeny $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ ve styčných bodech m, $(m—1)$ spodního pasu, při čemž jest

$$r'_m = v_m \cos \varepsilon_m = v_m \frac{a_m}{e_m}, \qquad r''_m = v_{m-1} \cos \varepsilon_m = v_{m-1} \frac{a_m}{e_m}.$$

Roztažení obecné svislice V_m nahradíme břemeny $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ ve styčných bodech m, $(m+1)$, berouce

$$r''_m = a_{m+1}, \qquad r'_m = r''_m \cdot \frac{v_m}{v'_{m+1}} = a_{m+1} \cdot \frac{v_m}{v'_{m+1}};$$

v'_{m+1} je výška, kterou na svislici v_{m+1} utíná prodloužená osa pasu C_m a D_{m+1}, tedy

$$v'_{m+1} = v_m + \frac{v_m - v_{m-1}}{a_m} \cdot a_{m+1}.$$

Podle toho vyjde

$$v'_2 = 506, \qquad v'_3 = 559, \qquad v'_4 = 591, \qquad v'_5 = 601 \text{ cm}.$$

Ramena r', r'' mohli bychom též odměřiti z osového mnohostranu narýsovaného v měřidle co největším. Výsledky výpočtu jsou sestaveny v tab. I.

Tabulka I.

Prut	s (cm)	S	U (cm²)	$E \cdot \Delta s$	r' (cm)	r'' (cm)	$E\,\mathfrak{P}'$	$E\,\mathfrak{P}''$
C_1	340,7	− 0,46	125	− 1,25	—	345	—	+ 0,0036
C_2	390,7	− 0,80	189	− 1,65	—	445	—	+ 0,0037
C_3	425,0	− 1,08	228	− 2,01	—	517	—	+ 0,0039
C_4	441,7	− 1,39	248	− 2,48	—	560	—	+ 0,0044
C_5	440,2	− 1,74	254	− 3,02	—	575	—	+ 0,0052
D_1	320	0	50	0	250	—	0	—
D_2	380	+ 0,44	94	+ 1,78	367	—	+ 0,0048	—
D_3	420	+ 0,77	147	+ 2,20	458	—	+ 0,0048	—
D_4	440	+ 1,07	180	+ 2,62	523	—	+ 0,0050	—
D_5	440	+ 1,39	198	+ 3,09	562	—	+ 0,0055	—
E_1	406,1	+ 0,55	118	+ 1,89	289	197	+ 0,0066	− 0,0096
E_2	528,3	+ 0,47	89	+ 2,79	330	264	+ 0,0085	− 0,0106
E_3	621,4	+ 0,44	73	+ 3,74	353	310	+ 0,0106	− 0,0121
E_4	683,5	+ 0,49	55	+ 6,09	362	337	+ 0,0168	− 0,0181
E_5	713,8	+ 0,57	36	+11,30	355	347	+ 0,0318	− 0,0326
V_0	250	− 0,50	204	− 0,61	—	320	—	+ 0,0019
V_1	367	− 0,34	104	− 1,20	276	380	− 0,0043	+ 0,0032
V_2	458	− 0,33	73	− 2,07	344	420	− 0,0060	+ 0,0049
V_3	523	− 0,33	41	− 4,21	389	440	− 0,0108	+ 0,0096
V_4	562	− 0,38	36	− 5,93	411	440	− 0,0144	+ 0,0135
V_5	575	+ 0,10	36	+ 1,60	—	—	+ 0,0002	—

Pro svislici V_0 vypočteme břímě $\mathfrak{P}''$ jako v ostatních svislicích, dosazujíce $r'' = a_1$; rámě r' a břímě $\mathfrak{P}'$ tu odpadá. Svislice V_5 žádá zvláštního řešení; její roztažení nahradíme břemenem $\mathfrak{P}_v$ v bodě *5*, jež počítáme podle vzorce (206). Zde jest

$$\operatorname{tg} \gamma_5 = - \operatorname{tg} \gamma_6 = \frac{v_5 - v_4}{a} = \frac{13}{440},$$

$$E\,\mathfrak{P}_v = \frac{V_5}{U} \cdot 2 \operatorname{tg} \gamma_5 = \frac{0{,}10}{36} \cdot 2 \cdot \frac{13}{440} = 0{,}0002.$$

Jsou-li určena břemena $\mathfrak{P}$, jimiž nahrazujeme roztažení jednotlivých prutů, sčítáme algebraicky břemena, jež připadají do téhož bodu styčného. Spodní pasy dají sice břemena do styčných bodů horního pasu; poněvadž však jde o svislá posunutí, působí břemena $\mathfrak{P}$ svisle, a pak se sčítají břemena v téže svislici působící. Kdyby šlo o posunutí v jiném směru než svislém, musili bychom bráti zvláště břemena v horních i spodních bodech styčných. V tomto případě dají do svislice bodu m ideálná břemena $\mathfrak{P}$ pruty C_m, D_{m+1}, břímě $\mathfrak{P}'$ pruty E_m, V_m a břímě $\mathfrak{P}''$ pruty E_{m+1}, V_{m-1}. Podle toho dostaneme ve svislicích bodů styčných břemena $\mathfrak{P}$ daná hodnotami

$$
\begin{aligned}
E\,\mathfrak{P}_1 &= +0{,}0036 + 0{,}0048 + 0{,}0066 - 0{,}0043 - 0{,}0106 + 0{,}0019 = +0{,}0020,\\
E\,\mathfrak{P}_2 &= +0{,}0037 + 0{,}0048 + 0{,}0085 - 0{,}0060 - 0{,}0121 + 0{,}0032 = +0{,}0021,\\
E\,\mathfrak{P}_3 &= +0{,}0039 + 0{,}0050 + 0{,}0106 - 0{,}0108 - 0{,}0181 + 0{,}0049 = -0{,}0045,\\
E\,\mathfrak{P}_4 &= +0{,}0044 + 0{,}0055 + 0{,}0168 - 0{,}0144 - 0{,}0326 + 0{,}0096 = -0{,}0107,\\
E\,\mathfrak{P}_5 &= 2\cdot(0{,}0052 + 0{,}0318 + 0{,}0135) + 0{,}0002 = +0{,}1012.
\end{aligned}
$$

Do bodu *5* dají rovná břemena $\mathfrak{P}$ pruty C_5 a C_6, břemena $\mathfrak{P}'$ pruty E_5 a E_6, břemena $\mathfrak{P}''$ pruty V_4 a V_6; mimo to dává sem břímě $\mathfrak{P}$ prut V_5. Poněvadž je tu úplná souměrnost, stačí omeziti řešení na polovici nosníku.

Čára ohybová je výslednicovou čarou k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$. Řešíme-li graficky, zavádíme do počtu vzdálenost pólovou, jak bylo uvedeno v příkladě 53. Řešíce počtem, určíme nejprve k břemenům $E\,\mathfrak{P}$ posouvající síly $\mathfrak{T}$. Poněvadž jsou břemena $E\,\mathfrak{P}$ souměrná ke svislici středu nosníku, je v oddílu *4-5* posouvající síla

$$\mathfrak{T}_5 = \frac{1}{2} E\,\mathfrak{P}_5\,;$$

v oddílech předchozích stanovíme postupně

$$\mathfrak{T}_4 = \mathfrak{T}_5 + E\,\mathfrak{P}_4, \qquad \mathfrak{T}_3 = \mathfrak{T}_4 + E\,\mathfrak{P}_3, \qquad \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_3 + E\,\mathfrak{P}_2, \qquad \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2 + E\,\mathfrak{P}_1.$$

Pak vypočteme součiny $\mathfrak{T}_1 a_1$, $\mathfrak{T}_2 a_2$, $\mathfrak{T}_3 a_3, \ldots$ a z nich určíme momenty

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{T}_1 a_1, \qquad \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{T}_2 a_2, \qquad \mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{T}_3 a_3, \ldots$$

postupným sčítáním hodnot $\mathfrak{T}_m a_m$ od kraje nosníku. Kdybychom počítali s břemeny $\mathfrak{P}$, daly by momenty $\mathfrak{M}$ přímo ohybové pořadnice η; jelikož jsme počítali s břemeny $E\,\mathfrak{P}$, musíme výsledky děliti E, i vyjde

$$\eta = \frac{\mathfrak{M}}{E}\,.$$

Pro ocel zavedeme $E = 2\,000$ t/cm² (místo $2\,150$ t/cm²), abychom poněkud vyrovnali oslabení prutů otvory nýtovými, s nímž jsme nepočítali. Výpočet ohybových pořadnic z břemen $E\,\mathfrak{P}$ je sestaven v tab. II. Z vypočtených pořadnic η je narýsována příčinková čára ohybu středu nosníku v obr. 217.

Tabulka II.

m	$E\,\mathfrak{P}_m$	$\mathfrak{T}_m$	a_m (cm)	$\mathfrak{T}_m a_m$	$\mathfrak{M}_m$	η_m
1	+0,0020	+0,0395	320	12,64	12,64	0,0063
2	+0,0021	+0,0375	380	14,25	26,89	0,0134
3	−0,0045	+0,0354	420	14,86	41,75	0,0209
4	−0,0107	+0,0399	440	17,55	59,30	0,0297
5	+0,1012	+0,0506	440	22,26	81,56	0,0408

Příčinkový obrazec má obsah

$$\begin{aligned}\mathfrak{U} &= \eta_1(a_1 + a_2) + \eta_2(a_2 + a_3) + \eta_3(a_3 + a_4) + \eta_4(a_4 + a_5) + \eta_5 a_5 =\\ &= 0{,}0063\cdot 700 + 0{,}0134\cdot 800 + 0{,}0209\cdot 860 + 0{,}0297\cdot 880 + 0{,}0408\cdot 440 = 77{,}19\,.\end{aligned}$$

Stálé zatížení $q_0 = 1{,}75$ t/m $= 0{,}0175$ t/cm vyvodí v bodě *5* průhyb

$$y'_5 = q_0\,\mathfrak{U} = 0{,}0175\cdot 77{,}19 = 1{,}35\text{ cm}\,;$$

za jednotky byly vzaty t a cm, je tedy q_0 dosaditi v t/cm.

Soustava osamělých břemen, složená z tlaků kol dvou lokomotiv a řady nákladních vozů, umístí se tak, aby největší břemena přišla poblíže bodu největšího příčinku (středu nosníku). Nejúčinnější polohu soustavy zvolíme zkusmo a kontrolujeme ji graficky podle obr. 119. Vyhovuje-li poloha soustavy, určíme součet příčinkových pořadnic η' v paprscích břemen $P' = 6$ t

$$\Sigma \eta' = 0{,}0178 + 0{,}0200 + 0{,}0223 + 0{,}0247 + 0{,}0347 + 0{,}0376 + 0{,}0408 + 0{,}0376 = 0{,}2355$$

a součet příčinkových pořadnic η'' v paprscích břemen $P'' = 5{,}5$ t

$$\Sigma \eta'' = 0{,}0286 + 0{,}0224 + 0{,}0167 + 0{,}0115 + 0{,}0058 = 0{,}0850 .$$

Pohyblivá soustava osamělých břemen vyvodí tedy největší průhyb

$$\max y_5'' = P' \Sigma \eta' + P'' \Sigma \eta'' = 6 \cdot 0{,}2355 + 5{,}5 \cdot 0{,}0850 = 2{,}48 \text{ cm} .$$

Zatížení stálé i pohyblivé dá dohromady celkový největší průhyb

$$\max y_5 = y_5' + \max y_5'' = 1{,}35 + 2{,}48 = 3{,}83 \text{ cm} .$$

Seznam věcný.

(Čísla znamenají stránky.)

Bod obratníkový 91
— základní levý 91
— — pravý 93
břímě aritmeticky střední 20
— ideálné 64, 75, 273
— osamělé pohyblivé 5
— — jediné: grafické řešení v jediném poli zatíženém 105; počtářské řešení v jediném poli ženém 99.

Čára momentu příslušného nejmenší síle posouvající 32, 35
— — — největší síle posouvající 31, 34
— — setrvačnosti 74
— nejmenší síly posouvající 32, 35
— největších momentů pro nepřímé pohyblivé zatížení: soustavou břemen 49; rovnoměrné 50
— — — pro soustavu břemen: případ výjimkový 23; stanovení grafické 18
— — — pro stálé zatížení rovnoměrné a pohyblivou soustavu břemen 38
— — — v oboru břemene 16
— — — za pohyblivého zatížení rovnoměrného 33
— — — za pohyblivé soustavy břemen 16, 40
— — sil posouvajících 31, 33
— — — — pro zatížení nepřímé 51, 55
— ohybová 57
— — jakožto čára výslednicová: řešení počtářské 75; pro nosník průřezu proměnného 79; pro nosník průřezu stálého 77
— — nosníku na jednom konci volného, na druhém vetknutého 68
— — — příhradového 258, 265, 273
— — — přímého 57
— — — proměnného průřezu 73
— — — s konci přečnívajícími 68
— — prostého nosníku příhradového: soustavy kosoúhlé 278; pravoúhlé 279
— — — — stálého průřezu: grafické stanovení 63
čára ohybová příhradového oblouku o třech kloubech 284
— — — spoj. nosníku kloubového 283
— — spojitého nosníku 114
— — — — kloubového 180
— příčinková 6, 9
— — momentu mezipodporového 125, 128, 145
— — — ohybového nosníku prostého 6
— — — — spojitého nosníku kloubového 183
— — — — v průřezu mimostyčném 48
— — — podporového 125, 127, 145
— — ohybu libovolného bodu styčného 286
— — pro zatížení nepřímé: obecný tvar 47
— — průhybu prostého nosníku 63
— — — spojitého nosníku 137
— — reakce podporové nosníku prostého 5
— — — — — spojitého 130, 144
— — — — — kloubového 182
— — síly posouvající nosníku prostého 8
— — — — průřezu mezipodporového 126, 129, 144
— — — — spojitého nosníku kloubového 183
— — — — v oddílu 50
— — vodorovné síly příhradového oblouku 231
— síly posouvající příslušné největšímu momentu 33
— součtová reakce podporové 31
— — síly posouvající 26
— výslednicová k zatížení rovnoměrnému 59
čáry nejmenších momentů spojitého nosníku za pohyblivého zatížení rovnoměrného 168, 172
— — sil posouvajících spojitého nosníku za pohyblivého zatížení rovnoměrného 169, 172
— největších momentů spojitého nosníku za pohyblivého zatížení rovnoměrného 168, 170
— — sil posouvajících spojitého nosníku za pohyblivého zatížení rovnoměrného 169, 172
— příčinkové osových sil prutů příhradového oblouku o třech kloubech 231, 234
— — — — — — spojitého nosníku kloubového 219, 224

čáry příčinkové osových sil prutů prostého nosníku příhradového 192, 196, 200, 202
— — — — — — — — — s podružnými polovičními pruty 210
— — — — — — — — — — soustavy polopříčkové 217
— — — — — řešené větou o virtuálných pracích z obrazců translokačních 265; methodou náhradných prutů 270
— — řešené methodou náhradných prutů 239
— — — — součtů momentových 241
— — spojitého nosníku: grafické řešení přímé 124; grafické řešení ze vzorců 126; výpočet pořadnic 131
— — — — mimo pole, v němž je průřez 129
— — — — pro zatížení nepřímé 131, 143.

Deformace 244
délka zatížená 57
díl podporovaný spojitého nosníku kloubového 179, 219
— prostý spojitého nosníku kloubového 179, 219
dilatace 244
doplněk momentový 82
— síly posouvající 82.

Hodnota krajní podporové reakce prostého nosníku 30
— — průhybu prostého nosníku 71
hodnoty krajní momentů ohybových spojitého nosníku kloubového 185, 190
— — — — — — při zatížení mimo pole, v němž je průřez 130; za pohyblivého zatížení rovnoměrného 167, 170, 174; za pohyblivé soustavy břemen 140, 143
— — osových sil prutů příhradového nosníku prostého: řešení přímé pro pohyblivou soustavu břemen 205; řešení přímé pro pohyblivé zatížení rovnoměrné 207; řešení z příčinkových čar 199, 202
— — — — — — oblouku o třech kloubech 234
— — — — — — spojitého nosníku kloubového 224
— — reakce podporové spojitého nosníku při zatížení mimo pole, v němž je průřez 131
— — — — spojitého nosníku kloubového 188
— — reakcí podporových spojitého nosníku: za pohyblivého zatížení rovnoměrného 173; za pohyblivé soustavy břemen 143, 147
— — sil posouvajících spojitého nosníku při zatížení mimo pole, v němž je průřez 130
— — — — — — za pohyblivého zatížení rovnoměrného 169, 172, 174; za pohyblivé soustavy břemen 143, 146
— — — — — — kloubového 187, 190
hyperbola obratová levá 118
— — pravá 118.

Kloub 178
konec přečnívající 96
— vetknutý 96
kontroly silového obrazce pro $A = 1$ u trojúhelníkové soustavy 195, 198
kriterium pro moment v průřezu mimostyčném 48
— pro nejúčinnější polohu soustavy břemen a současného zatížení rovnoměrného 142
— — — — — osamělých břemen u příčinkové čáry obecného tvaru 140
— pro největší sílu posouvající 28
— — — — — za nepřímého zatížení 54
— Šolínovo 23
— Winklerovo 12
křivka pólová 74.

Lichoběžník doplňovací 82.

Methoda náhradných prutů 239, 270
— součtů momentových 241
meze oborů břemen 17
— průřezů přechodných 37, 38
moment k bodu základnímu 121
— ohybový největší pod daným břemenem v soustavě 17
— — — v průřezu mimostyčném 48
— — — v určitém místě libovolného zatížení pohyblivého 45
— — — za pohyblivého zatížení rovnoměrného u prostého nosníku 32
— — — za pohyblivé soustavy břemen u prostého nosníku 11; řešení grafické 14; řešení počtářské 13; řešení z příčinkové čáry 14
— — — vůbec za pohyblivého zatížení rovnoměrného 33
— — — — za pohyblivé soustavy břemen 19; případ výjimkový 21, 24; řešení grafické 21; stanovení počtářské 19
— — — — za stálého zatížení rovnoměrného a pohyblivého zatížení složeného 44; za stálého zatížení rovnoměrného a pohyblivé soustavy břemen 38
— — — a nejmenší za pohyblivého zatížení rovnoměrného u spojitého nosníku: řešení grafické 167, 170; řešení počtářské 173
— — — — — — za pohyblivé soustavy břemen: u spojitého nosníku 145, 157; u spojitého nosníku kloubového 185
— — příslušný nejmenší síle posouvající 32, 35; za nepřímého pohyblivého zatížení rovnoměrného 53

moment ohybový příslušný největší síle posouvající 31, 34; za nepřímého pohyblivého zatížení rovnoměrného 52
— — v průřezu mimostyčném 48
— podporový 81
— — nejmenší za pohyblivé soustavy břemen 145, 152, 161
momenty 2. a 3. stupně soustavy břemen 70, 72
— ohybové spojitého nosníku kloubového za stálého zatížení 179
— — v polích nezatížených 89, 95
— v podporách jediného zatíženého pole 99
— vyvozené zatížením přečnívajícího konce 96.

Návrat k původním výminkám podporovým v obrazci translokačním 247, 250, 254
neurčitost statická spojitého nosníku 81, 178
norma I pro zatížení vlakem 13, 20, 143, 202
— II pro zatížení vlakem 185, 234, 286
nosník příhradový prostý 192
— — — soustavy polopříčkové 214
— — spojitý kloubový 219
— přímopasový 210
— — polopříčkový 218
— spojitý 81
— — kloubový 178.

Oblouk příhradový o třech kloubech 231
obor břemene 16
— přímky příčinkové 10
obratník 116
— levý 118
— pravý 118
— řešení grafické 119; řešení početářské 122
obrazce momentové v polích nezatížených 95
— translokační příhradového spojitého nosníku kloubového 256
— — — oblouku o třech kloubech 257
obrazec momentový prostý 82
— — spojitého nosníku kloubového 179
— — úplný 95
— — — v jediném poli zatíženém: obecné řešení 103; pro částečné zatížení rovnoměrné 107; pro jediné břímě osamělé 105; pro zatížení spojité 111; pro plné zatížení rovnoměrné 109; pro soustavu osamělých břemen 105
— momentů ohybových a sil posouvajících za současného zatížení několika polí 112
— ohybový 65
— příčinkový 7
— sil posouvajících spojitého nosníku kloubového 180
— translokační 246, 251
— — pro otočení původních poloh o týž středový úhel 249
obrazec Williotův 247
opěra 231
otočení 244.

Parabola momentová hlavní 33, 167
pole nulové 96
poloha břemene 5, 9
— nejúčinnější pohyblivé soustavy břemen a zatížení rovnoměrného 45, 142
— — — — — u nosníku prostého 12, 15, 48
— — — — — — — spojitého 140, 142
— největšího příčinku kladného 9
— — — záporného 9
— nová 244
— — správná 248
— — zatímní 248
— neutrálná 9
— nulová 9
— obojetná 9
— — pro moment ohybový u spojitého nosníku 120
— — pro osovou sílu nosníku o třech podporách 241
— — — — — v prutu mezipasovém 194
— — — — — — na přečnívajícím konci podporovaného dílu spojitého nosníku kloubového 221
— — — — — v příhradovém oblouku 232
— — pro posouvající sílu v oddílu 50
— — u nosníku spojitého: řešení grafické 120; řešení početářské 122
— přechodná 9
— původní 244
polopříčka 214
poměr sil posouvajících v posloupných polích nezatížených 97
poměry momentů podporových v polích nezatížených 90, 92
popuštění podpor 83, 176
— ve vetknutém konci spojitého nosníku 178
pořadnice ohybová 66, 275, 282
— příčinková 7, 9
posunutí 244, 264, 285
— svislé 258, 273
práce virtuálná síly osové 261
— — — vnější 261
proměna momentu ohybového prostého nosníku: za pohybu jediného břemene 6; za pohyblivé soustavy břemen 11, 14
— reakce prostého nosníku za pohybu jediného břemene 5
— síly posouvající prostého nosníku: za pohybu jediného břemene 8; za pohyblivé soustavy břemen 26

průhyb největší počítaný podle věty Mohrovy 61, 62
— — prostého nosníku stálého průřezu: řešení grafické 66
průhyb největší prostého nosníku proměnného průřezu: řešení grafické 74
průřez obratníkový 5
průřez přechodný 5, 67, 82
prut náhradný 239
— nutný 259
pruty hlavní 211
— podružné 211
přemístění úplné 244
— — správné 248
— zatímní 249
přetvoření soustavy prutové: řešení grafické 244; řešení počtářské 259
— virtuálné 264
příčinek 9
— kladný 9
— záporný 9
přímka příčinková 10.

Rámě druhého stupně 71
reakce opěrová 231
— podporová největší a nejmenší u spojitého nosníku za pohyblivé soustavy břemen 143, 147, 155
— — — — — — — — kloubového za pohyblivé soustavy břemen 188
— podporové prostého nosníku 5
— — největší a nejmenší u spojitého nosníku za pohyblivého zatížení rovnoměrného 173
— — spojitého nosníku 97, 124, 137
— — — — kloubového za stálého zatížení 180
rotace 244
rovnice třímomentová (Clapeyronova) 81, 83
roztažení 244.

Řád mostní 13, 56
řada osamělých břemen 11
řešení grafické momentů ohybových v jediném poli zatíženém: obecně 103; pro částečné zatížení rovnoměrné 107; pro částečné zatížení trojúhelníkové 109; pro jediné břímě osamělé 105; pro zatížení spojité 111; pro plné zatížení rovnoměrné 109; pro plné zatížení trojúhelníkové 110; pro soustavu osamělých břemen 105; pro zatížení momentem 110
— — osových sil prutů nosníku polopříčkového 216
— osové síly prutu větou o virtuálných pracích (z obrazce translokačního) 264
— počtářské v jediném poli zatíženém 97
řešení početní osových sil prutů nosníku polopříčkového 214
— přímé krajních hodnot M, T, A u spojitého nosníku kloubového pro pohyblivé zatížení rovnoměrné 190
— — krajních hodnot osových sil prutů pro pohyblivou soustavu břemen 205; pro pohyblivé zatížení rovnoměrné 207.

Sestrojení bodů základních 93
schemata znamének pro momenty ohybové spojitého nosníku 120
— — pro reakci podporovou spojitého nosníku 124
— — pro síly posouvající spojitého nosníku 123
síla posouvající nejmenší v oddílu: pro pohyblivé zatížení rovnoměrné 53; pro pohyblivou soustavu břemen 56
— — — za pohyblivého zatížení rovnoměrného 35
— — — za pohyblivé soustavy břemen 32; řešení grafické 32
— — největší v oddílu: pro pohyblivé zatížení rovnoměrné 51; pro pohyblivou soustavu břemen 53
— — — za pohyblivého zatížení rovnoměrného 33
— — — za pohyblivé soustavy břemen 26; řešení grafické 30; řešení počtářské 28
— — — a nejmenší za pohyblivého zatížení rovnoměrného u spojitého nosníku: řešení grafické 169, 172; řešení počtářské 175
— — — — — za pohyblivé soustavy osamělých břemen: u nosníku spojitého 143, 146, 153, 160; u spojitého nosníku kloubového 187, 190
— — oddílu 50
— — příslušná největšímu momentu 14, 16, 33
— přídavná 252
— vodorovná oblouku příhradového 231
síly posouvající v polích nezatížených 96
— — spojitého nosníku kloubového za stálého zatížení 179
směr ideálných břemen 274
snížení bodu styčného 260
— podpor 83
— vrcholu soustavy 252, 263
soustava nejúčinnější 11, 20, 48, 53
— osamělých břemen 9
— — — pohyblivá 11
— — — u spojitého nosníku; řešení grafické v jediném poli zatíženém 105; řešení počtářské v jediném poli zatíženém 100
— polopříčková 214
— staticky určitá 259
— trojúhelníková kosoúhlá 192

soustava trojúhelníková pravoúhlá 193
— — s podružnými polovičními pruty 210
— tvarově určitá 259
souvislost dvou čar výslednicových 57
strana základní přemístěná 82
střed momentový přidružený 193.

Translace 244
translokace úplná 244.

Účinek jediného břemene stanovený z čáry příčinkové 9
— konců přečnívajících 96
— — vetknutých 96
— popuštění jediné podpory 176
— — podpor 176
— — ve vetknutém konci 178
— soustavy břemen stanovený z příčinkové čáry 9
— spojitosti prutů 252
— zatížení rovnoměrného stanovený z příčinkové čáry 10.

Veličina statická 9
věta Maxwellova 286
— Mohrova 60
— o virtuálných pracích 259
— o vzájemnosti posunutí 285
vlak I podle mostního řádu 13, 29, 30, 49, 55, 56, 71, 157
— II podle mostního řádu 56
vlastnosti obecné čar příčinkových 9
vyjádření grafické veličin $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$: obecně 93; pro částečné zatížení rovnoměrné 84; pro částečné zatížení trojúhelníkové 86; pro jediné břímě osamělé 93; pro plné zatížení rovnoměrné 86; pro plné zatížení trojúhelníkové 88; pro soustavu břemen osamělých 84; pro zatížení momentem 89
výminka podporová 245, 259
— přetvárná 81
— původní 247
— statická zvláštní 178
— zatímní 247
výpočet krajních hodnot M, T, A i průhybu u spojitého nosníku 148
— největšího průhybu prostého nosníku při pohyblivé soustavě břemen 69
— — momentu podle mostního řádu 56
— největší síly posouvající podle mostního řádu 57
— příčinkových pořadnic M, T, A u spojitého nosníku 131.

Zatížení krajní levé strany průřezu 32, 35, 143
— — pravé strany průřezu 26, 33, 143
zatížení momentem v jediném poli: řešení grafické 110, řešení počtářské 103
— nahodilé 36
— nepřímé 47
— — u spojitého nosníku 143
— — — — — — kloubového 185
— pohyblivé 5, 116, 192
— — jediným břemenem osamělým 5, 116
— — na nosníku spojitém 116
— — nepřímé 47, 143, 185, 193
— — rovnoměrné 32, 166, 207
— — soustavou osamělých břemen 11, 140, 202
— — — břemen a rovnoměrné; polohy nejúčinnější 38, 46, 142
— proměnné 5
— průměrné 13, 23
— rovnoměrné částečné 10
— — — v jediném poli: řešení grafické 107; řešení počtářské 100
— — náhradné 56
— — plné v jediném poli: řešení grafické 109; řešení počtářské 101
— — pohyblivé nejúčinnější u spojitého nosníku: momenty ohybové 166; síly posouvající a reakce podporové 166
— spojité v jediném poli: řešení grafické 111
— stálé 5, 36, 81, 178, 185, 200, 224
— — i pohyblivé rovnoměrné 37
— — — — současné 36
— — rovnoměrné a pohyblivá soustava břemen 38
— — — a pohyblivé zatížení složené 44
— trojúhelníkové částečné v jediném poli: řešení grafické 109, řešení počtářské 102
— — plné v jediném poli: řešení grafické 110, řešení počtářské 102
změna rozpětí 252, 263
— virtuálná 261
— vzdálenosti dvou bodů prutem nespojených 247, 250, 262
změny souřadnic bodů styčných 244, 260
— zatížení 5
znaménka ideálných břemen 274
— momentů vzniklých popuštěním jediné podpory vnitřní 176
— — — — ve vetknutých koncích 178
— osových sil 193
— — — prutů mezipasových 197
— reakcí vzniklých popuštěním jediné podpory vnitřní 177
znaménko momentu ohybového spojitého nosníku při jediném břemeni osamělém 116
— — při methodě součtů momentových 241
— posouvající síly spojitého nosníku při jediném břemeni osamělém 123.

Seznam jmenný.

(Čísla značí stránky).

Andrée W. L. 195.

Bukovský V. 246.

Clapeyron 81.

Farský J. 108
Flamant A. 95.

Henkel O. 45.

Laciný J. 86.
Lévy M. 17, 39.

Maxwell J. Cl. 286.
Melan Jos. 207.
Mohr O. 7, 60, 262,
Müller-Breslau H. F. B. 256, 257.

Rameš J. 108.

Šolín Jos. 3, 15, 22, 23, 32, 35, 60, 61, 62, 65, 66, 74, 75, 79, 81, 95, 143, 148, 170, 177, 244.

Velflík A. V. 56.
Vianello L. 269.

Weyrauch J. J. 7.
Williot 247.
Winkler E. 7, 12, 176.

Zelený N. 53.
Zschetzsche A. F. 270.

Seznam značek.

(V tomto seznamu jsou uvedeny značky častěji užívané).

a_1, a_2 ... délky oddílů; podpory spojitého nosníku
a, b podpory nosníku
a, b, c díly, na něž dělí délku pole ab spojitého nosníku základní body λ, π
c, d, e přidružený střed momentový a délka prutu horního pasu, spodního pasu a příčky
d délka oddílu
e půdice; obojetná poloha pro sílu posouvající za nepřímého zatížení
$e_1, e_2, \ldots$ klouby plnostěnného spojitého nosníku kloubového
f, f_1 vzdálenost pólová
g druhá vzdálenost pólová
h vzepětí oblouku o třech kloubech
$h_1, h_2, \ldots$ popuštění podpor a_1, $a_2 \ldots$ spojitého nosníku
i, j obratníky v poli $a\,b$ spojitého nosníku
k dovolené namáhání
l rozpětí nosníku
$l_1, l_2 \ldots$ délky polí $a_0\,a_1$, $a_1\,a_2$, ... spojitého nosníku
m příčinková pořadnice
m, n styčné body pro zatížení nepřímé; úseky ve svislicích podpor a, b spojitého nosníku, z nichž se stanoví přemístěná strana základní
$n, n_1, \ldots$ stálý dělitel příčinkových pořadnic
o pól; počátek obrazce translokačního
p, p' vzdálenost působiště p břemene P od podpor a, b
q zatížení poměrné
q_0, q' poměrné zatížení stálé, pohyblivé
r_c, r_d rámě osové síly C, D k přidruženému středu momentovému
s délka prutu
s' vzdálenost dvou bodů prutem nespojených
u, v body, jež dělí délku $\overline{ab}$ na třetiny
v délka svislice
v_c, v_d výška mezi osami pasů ve svislici bodu c, d
x, x' vzdálenosti bodu x od podpor a, b
$x_1, x_2, \ldots$ meze oborů břemen $P_1, P_2, \ldots$
x_c, x_c' vodorovné vzdálenosti bodu c od svislic podpor a, b
$y, y_1, \ldots$ pořadnice momentová; pořadnice ohybová; pořadnice styčného bodu soustavy prutové
$z, z_1, z_2, \ldots$ působiště pohyblivých břemen P, P_1, P_2, ... a jejich vzdálenosti od podpory a
z' vzdálenost působiště z pohyblivého břemene P od podpory b.
A, B svislé reakce v podporách a, b
C, D, E osová síla v horním pase, spodním pase a příčce
E modul pružnosti
$E_1, E_2, \ldots$ síly v kloubech $e_1, e_2 \ldots$ spojitého nosníku kloubového
F, F_1 vzdálenost pólová pro rýsování čáry ohybové
H vodorovná síla příhradového oblouku o třech kloubech
H_a, H_b vodorovné složky reakcí v podporách a, b
J, J_0 moment setrvačnosti průřezu nosníku k ose neutrálné
M moment ohybový
M' moment z pohyblivého zatížení; moment z nepřímého zatížení; doplněk momentový
M_0, M_1, M_r moment spojitého nosníku v podpoře a_0, a_1, a_r
M_a, M_b moment spojitého nosníku v podpoře a, b
M_c, M_d ohybový moment prostého nosníku k bodu c, d
$M_{(m)}$ moment příslušný největší síle posouvající
$M_{(n)}$ moment příslušný nejmenší síle posouvající
P břímě osamělé; pohyblivé břímě osamělé
$P_{1 \ldots n}$ výslednice břemen P_1, P_2, ... P_n
P_m, P_n složka zatížení oddílu do styčného bodu m, n
$(P_m)_m$ statický moment síly P_m k bodu m'
Q_{ab}, Q_{ax} zatížení délky $\overline{ab}$, $\overline{ax}$
R výslednice soustavy břemen
R_1 výslednice břemen vlevo od průřezu x
S veličina statická; osová síla prutu
S_0 osová síla ze stálého zatížení
S' osová síla z pohyblivého zatížení
S_P' osová síla z pohyblivé soustavy břemen
S_q' osová síla z pohyblivého zatížení rovnoměrného
T síla posouvající
T' síla posouvající z pohyblivého zatížení; síla posouvající z nepřímého zatížení; doplněk síly posouvající
T_k, T_k' síla posouvající vlevo a vpravo od podpory a_k

$T_{(m)}$ síla posouvající příslušná největšímu momentu

$T_{(n)}$ síla posouvající příslušná nejmenšímu momentu

U obsah průřezu prutového

V obsah prostého obrazce momentového; osová síla ve svislici.

$\overline{aa'}, \overline{bb'}, \overline{pp'}, \overline{qq'}$ určovací úseky sil A, B, P, Q

a, b, c nové polohy bodů a, b, c v obrazci translokačním; body složkové čáry příslušné bodům a, b, c na ose nosníku

a_0, b_0, c_0 body vzniklé v obrazci translokačním opačným otočením původních poloh bodů a, b, c

c základní bod čáry složkové

η pořadnice momentu $M_{(m)}$; pořadnice momentu $\mathfrak{M}$; pořadnice určovací plochy spojitého zatížení; výška prostého trojúhelníka momentového

δ obojetná poloha břemene pro moment ohybový průřezu v krajním dílu pole spojitého nosníku.

$\mathfrak{A}_i$ reakce v podpoře a_i změněné soustavy za daného zatížení

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ reakce prostého nosníku; výslední reakce šikmé

$\mathfrak{M}$ moment ohybový prostého nosníku; moment ohybový k břemenům $\mathfrak{P}$

$\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$ funkce zatížení v poli spojitého nosníku

$\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ ideálné břímě

$\mathfrak{P}_c, \mathfrak{P}_d, \mathfrak{P}_e, \mathfrak{P}_v$ ideálná břemena nahrazující roztažení prutů c, d, e, v

$\mathfrak{R}$ moment druhého stupně soustavy břemen

$\mathfrak{S}$ moment třetího stupně soustavy břemen

$\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_i$ osové síly v prutech s_0, s_i změněné soustavy za daného zatížení

$\mathfrak{T}$ posouvající síla prostého nosníku; posouvající síla k břemenům $\mathfrak{P}$

$\mathfrak{U}$ určovací plocha spojitého zatížení

$\mathfrak{U}_{mn}$ obsah příčinkového obrazce v zatížené délce $\overline{mn}$

$\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$...obsahy dílů příčinkového obrazce

$\mathfrak{U}_+, \mathfrak{U}_-$ obsah kladné a záporné části příčinkového obrazce.

α_1, α_2 počet podpor posouvatelných a pevných

α_i reakce v podpoře a_ξ změněné soustavy při zatížení $S' = 1$

α, β, ξ body osy obrazce sil posouvajících na svislicích bodů a, b, x

α', β', ξ' body čáry sil posouvajících na svislicích bodů a, b, x

β počet bodů styčných

$\gamma, \delta, \varepsilon$ odchylky os prutů c, d, e od vodorovné

δ, δ' poměr délek sousedních polí spojitého nosníku

ζ, ζ_1 působiště výslednice R, R_1 a jeho vzdálenost od podpory a

η, η_1, η' pořadnice momentová; pořadnice příčinková; největší pořadnice prostého obrazce momentového

η_m, n posunutí bodu m ve směru břemene P_m účinkem břemene $P_n = 1$

λ poměr posloupných momentů podporových v levé části nezatížené; základní bod levý a jeho dělicí poměr

μ číslo udávající poměr zmenšení

π poměr posloupných momentů podporových v pravé části nezatížené; základní bod pravý a jeho dělicí poměr; počet prutů

ϱ rámě druhého stupně soustavy břemen

σ osová síla prutu ze zatížení břemenem $P = 1$

σ_0, σ_i osové síly v prutech s_0, s_i změněné soustavy pro zatížení $S' = 1$

φ odchylka tečny ke křivce

ω pól.

$\Delta c, \Delta d, \Delta e$, ... roztažení prutu c, d, e...

(Δp) virtuálné posunutí styčného bodu ve směru břemene P

(Δs) virtuálné roztažení prutu

$\Delta s'$ změna vzdálenosti s'.

$\overline{1\,1'}, \overline{2\,2'}, \overline{3\,3'}$ určovací úseky břemen P_1, P_2, P_3

I, II, III vrcholy čáry výslednicové k břemenům P_1, P_2, P_3.

Obsah.

Strana

Předmluva k prvému vydání 3
Předmluva k třetímu vydání 4

A) Plnostěnný nosník prostý za pohyblivého zatížení a jeho čára ohybová.

I. Zatížení pohyblivé.

1. Změny zatížení 5

a) Jediné břímě osamělé.

2. Příčinkové čáry reakcí podporových, momentů ohybových a sil posouvajících 5
3. Obecné vlastnosti čar příčinkových 9

b) Pohyblivá soustava osamělých břemen.

4. Největší moment v daném průřezu:
   α) Řešení početářské 11
   Příklad 1, 2 13
   β) Řešení grafické 14
   Příklad 3 15
5. Čára největších momentů:
   α) Tvar čáry 16
   β) Grafické stanovení 18
6. Největší moment vůbec:
   α) Řešení početářské 19
   Příklad 4 20
   β) Řešení grafické 21
   Příklad 5 21
   γ) Případ výjimkový 21
   Příklad 6 24
7. Největší síla posouvající:
   α) Řešení početářské 26
   Příklad 7, 8, 9 28
   β) Řešení grafické 30
8. Nejmenší síla posouvající 32

c) Pohyblivé zatížení rovnoměrné.

9. Krajní hodnoty momentů ohybových a sil posouvajících:
   α) Největší moment ohybový a příslušná síla posouvající 32
   β) Největší síla posouvající a příslušný moment ohybový 33
   γ) Nejmenší síla posouvající a příslušný moment ohybový 35

d) Současné zatížení stálé i pohyblivé. Strana

10. Stálé i pohyblivé zatížení rovnoměrné:
α) Krajní hodnoty momentů ohybových i sil posouvajících 36
β) Meze průřezů přechodných 37
11. Stálé zatížení rovnoměrné a pohyblivá soustava osamělých břemen:
α) Meze průřezů přechodných 38
β) Čára největších momentů 38
γ) Největší moment vůbec 43
12. Stálé zatížení rovnoměrné, pohyblivé zatížení složené 44
Příklad 10 46

e) Pohyblivé zatížení nepřímé.

13. Obecný tvar příčinkových čar 47
14. Moment ohybový v průřezu mimostyčném:
α) Příčinková čára 48
β) Největší moment 48
Příklad 11 49
γ) Čára největších momentů 49
15. Posouvající síla v oddílu:
α) Příčinková čára a poloha obojetná 50
β) Pohyblivé zatížení rovnoměrné 51
γ) Pohyblivá soustava osamělých břemen 53
Příklad 12 55

f) Výpočet největších momentů ohybových a sil posouvajících podle mostního řádu.

16. 56

II. Ohybová čára přímého nosníku.

a) Nosník průřezu stálého.

17. Ohybová čára jakožto čára výslednicová:
α) Souvislost dvou čar výslednicových 57
β) Věta Mohrova 59
Příklad 13, 14, 15, 16 59
18. Grafické stanovení ohybové čáry pro různé nosníky:
α) Nosník prostý 63
Příklad 17 66
β) Nosník s konci přes podpory přečnívajícími 68
γ) Nosník na jednom konci volný, na druhém vetknutý 68
19. Výpočet největšího průhybu prostého nosníku při pohyblivé soustavě břemen 69
Příklad 18 72

b) Nosník průřezu proměnného.

20. Grafické stanovení čáry ohybové 73
Příklad 19 74
21. Počtářské řešení čáry ohybové jakožto čáry výslednicové 75
Příklad 20, 21 77

B) Theorie spojitého nosníku stálého průřezu.

I. Zatížení stálé.

a) Příprava k řešení grafickému.

22. Obrazec momentů ohybových a sil posouvajících 81
23. Grafické vyjádření veličin $\mathfrak{N}$ a $\mathfrak{N}'$ 83

b) Jediné pole nosníku zatíženo.

Strana

24. Momenty ohybové v polích nezatížených:
α) Levé body základní . . . 89
β) Pravé body základní . . . 92
γ) Sestrojení bodů základních . . . 93
δ) Momentové obrazce v polích nezatížených . . . 95
ε) Účinek konců vetknutých a přečnívajících . . . 96
25. Posouvající síly v polích nezatížených . . . 96
26. Počtářské řešení v jediném poli zatíženém:
α) Obecné vzorce . . . 97
β) Jediné břímě osamělé . . . 99
γ) Soustava osamělých břemen . . . 100
δ) Rovnoměrné zatížení částečné v délce $\overline{z\,z_1}$ . . . 100
ε) Rovnoměrné zatížení v délce $\overline{z\,b}$ . . . 101
ζ) Plné zatížení rovnoměrné . . . 101
η) Částečné zatížení trojúhelníkové v délce $\overline{z\,z_1}$ . . . 102
ϑ) Plné zatížení trojúhelníkové . . . 102
ι) Zatížení momentem . . . 103
27. Grafické řešení momentů ohybových v jediném poli zatíženém:
α) Obecné řešení . . . 103
β) Jediné břímě osamělé . . . 105
γ) Soustava osamělých břemen . . . 105
δ) Částečné zatížení rovnoměrné v délce $\overline{z\,z_1}$ . . . 107
ε) Částečné zatížení rovnoměrné v délce $\overline{z\,b}$ . . . 108
ζ) Plné zatížení rovnoměrné . . . 109
η) Částečné zatížení trojúhelníkové v délce $\overline{z\,z_1}$ . . . 109
ϑ) Plné zatížení trojúhelníkové . . . 110
ι) Zatížení momentem . . . 110
ϰ) Zatížení spojité . . . 111

c) Několik polí nosníku zatíženo.

28. Obrazec momentů ohybových a sil posouvajících . . . 112
Příklad 22 . . . 112
29. Ohybová čára . . . 114
Příklad 23 . . . 114

II. Zatížení pohyblivé.

a) Jediné břímě osamělé.

30. Znaménka momentů ohybových:
α) Břímě v obecné poloze . . . 116
β) Hyperboly obratové . . . 117
γ) Obojetná poloha břemene . . . 119
δ) Schemata znamének . . . 120
ε) Počtářské stanovení obratníků a polohy obojetné . . . 121
31. Znaménka posouvajících sil:
α) Břímě v obecné poloze . . . 123
β) Schemata znamének . . . 123
32. Příčinkové čáry:
α) Přímé řešení grafické . . . 124
β) Grafické řešení založené na vzorcích . . . 126
γ) Řešení mimo pole, v němž je průřez . . . 129
δ) Příčinková čára reakce podporové . . . 130
ε) Výpočet příčinkových pořadnic M, T, A . . . 131
Příklad 24 . . . 133
ζ) Příčinková čára průhybu . . . 137

b) Pohyblivá soustava osamělých břemen.

33. Krajní hodnoty momentů ohybových, sil posouvajících i reakcí podporových řešené z příčinkových čar . . . 140
Příklad 25 . . . 143

Strana

34. Přímý výpočet krajních hodnot M, T, A i průhybu:
α) Ohybové momenty 148
β) Posouvající síla 153
γ) Podporové reakce 154
δ) Průhyb 156
Příklad 26. 157

c) Pohyblivé zatížení rovnoměrné.

35. Nejúčinnější zatížení:
α) Momenty ohybové 166
β) Síly posouvající a reakce podporové 166
36. Řešení grafické:
α) Krajní hodnoty momentů ohybových v jediném poli zatíženém 167
β) Krajní hodnoty sil posouvajících v jediném poli zatíženém 169
γ) Účinek zatížení všech polí 170
Příklad 27 170
37. Řešení počtářské 173

III. Účinek popuštění podpor.

38. Znaménka momentů ohybových a sil posouvajících:
α) Popuštění vnitřní podpory 176
β) Popuštění ve vetknutém konci 178

IV. Spojitý nosník kloubový.

a) Zatížení stálé.

39. Obrazec momentů ohybových a sil posouvajících 178
Příklad 28 179

40. Ohybová čára 180
Příklad 29 180

b) Zatížení pohyblivé.

41. Příčinkové čáry a jejich použití 181
Příklad 30 185
42. Přímé řešení krajních hodnot M, T, A pro pohyblivé zatížení rovnoměrné 190

C) Staticky určité soustavy prutové za pohyblivého zatížení a jejich přetvoření.

I. Zatížení pohyblivé.

a) Prostý nosník příhradový soustavy trojúhelníkové.

43. Příčinkové čáry osových sil prutů v soustavě kosoúhlé 192
44. Příčinkové čáry osových sil prutů v soustavě pravoúhlé 196
45. Krajní hodnoty osových sil prutů:
α) Řešení z příčinkových čar 199
Příklad 31, 32 200
β) Přímé řešení 205
46. Trojúhelníková soustava s podružnými polovičními pruty 210

b) Prostý nosník příhradový soustavy polopříčkové.

47. Vzorce pro osové síly a příčinkové čáry 214

c) Příhradový spojitý nosník kloubový.

48. Příčinkové čáry osových sil 219
Příklad 33 224

d) Příhradový oblouk o třech kloubech.

Strana

49. Příčinkové čáry reakcí a osových sil 231
Příklad 34 234

e) Zvláštní methody řešení.

50. Methoda náhradných prutů 239
Příklad 35 239
51. Methoda součtů momentových 241
Příklad 36 242

II. Přetvoření soustav prutových.

a) Řešení grafické.

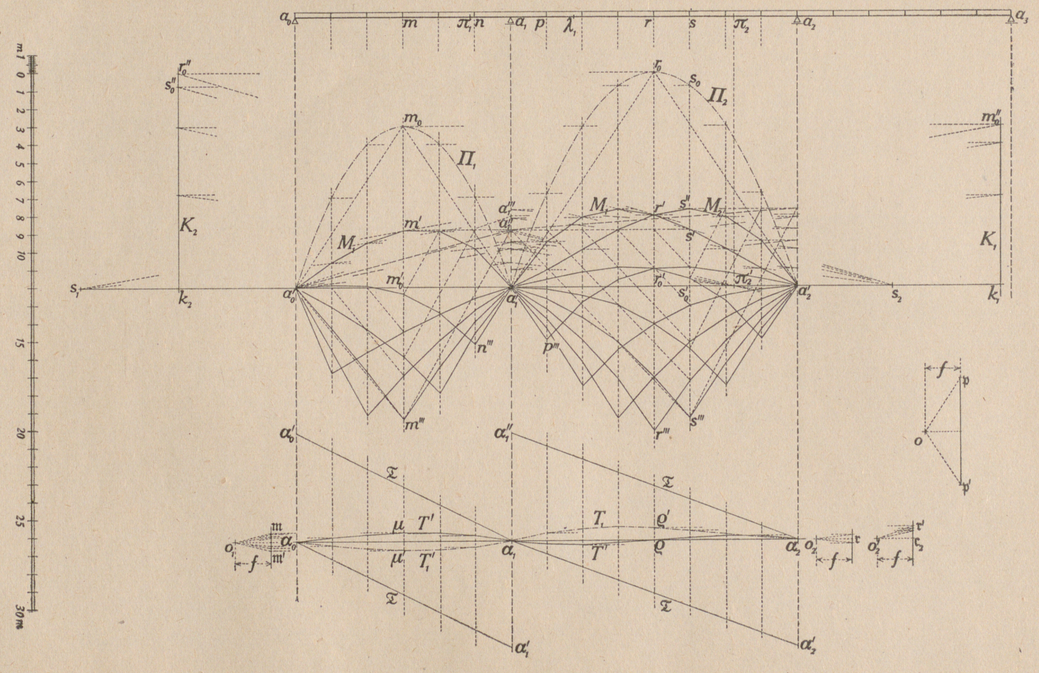
52. Obrazec translokační:
α) Složky úplného přemístění 244
β) Postup řešení 245
γ) Změna vzdálenosti dvou bodů prutem nespojených 247
δ) Přechod od zatímních výminek podporových k výminkám původním 247
53. Příklady obrazců translokačních:
Příklad 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44 251

b) Řešení počtářské.

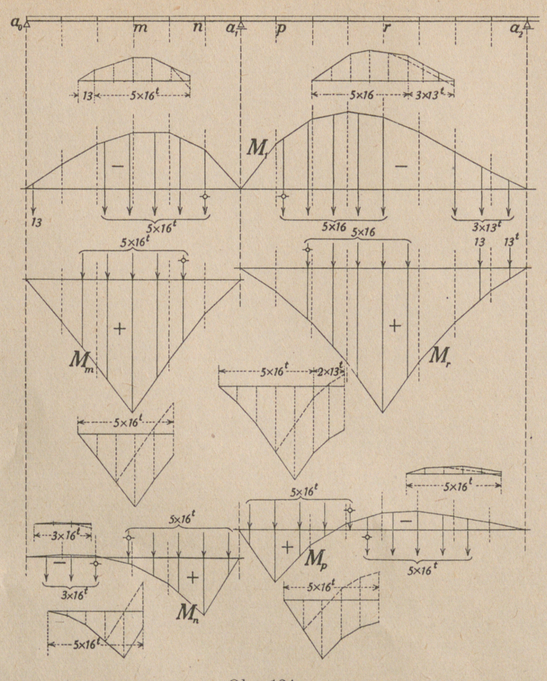
54. Věta o virtuálných pracích 259
55. Užití věty o virtuálných pracích:
α) Řešení přetvoření 262
Příklad 45, 46 262
β) Řešení osových sil 264
Příklad 47 264
56. Stanovení příčinkových čar osových sil větou o virtuálných pracích 264
Příklad 48, 49, 50, 51, 52. 266
57. Stanovení ohybové čáry prutové soustavy trojúhelníkové jakožto čáry výslednicové:
α) Ideálná břemena 273
β) Nosník prostý 278
Příklad 53 280
γ) Spojitý nosník kloubový 283
δ) Oblouk o třech kloubech 284
58. Věta o vzájemnosti posunutí a příčinkové čáry ohybu 285
Příklad 54 286
Seznam věcný 291
Seznam jmenný 296
Seznam značek 297
Obsah 299

Knihovna
Knižního oddělení
ministerstva informací

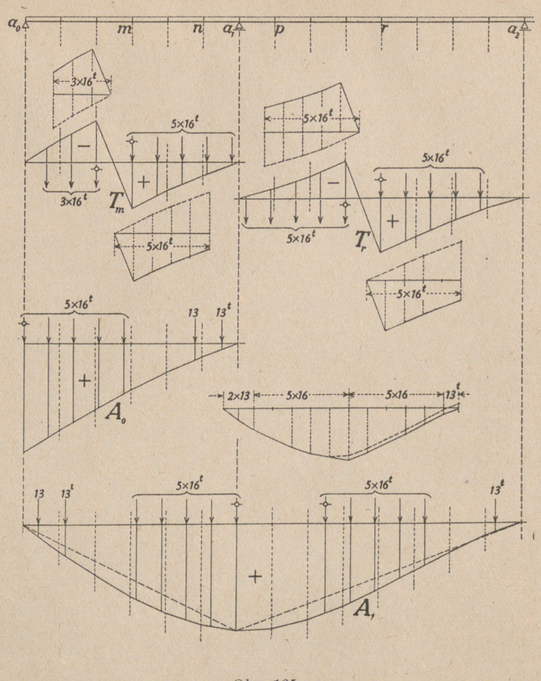
Autor	Prof. Dr. Ing. Zdeněk Bažant
Název díla	Stavebná mechanika, díl II.
Vydala	Česká matice technická
Roku	1946
Vytiskla	Práce, Praha
Vydání	třetí
Cena	Kčs 150,—
Počet výtisků	4000



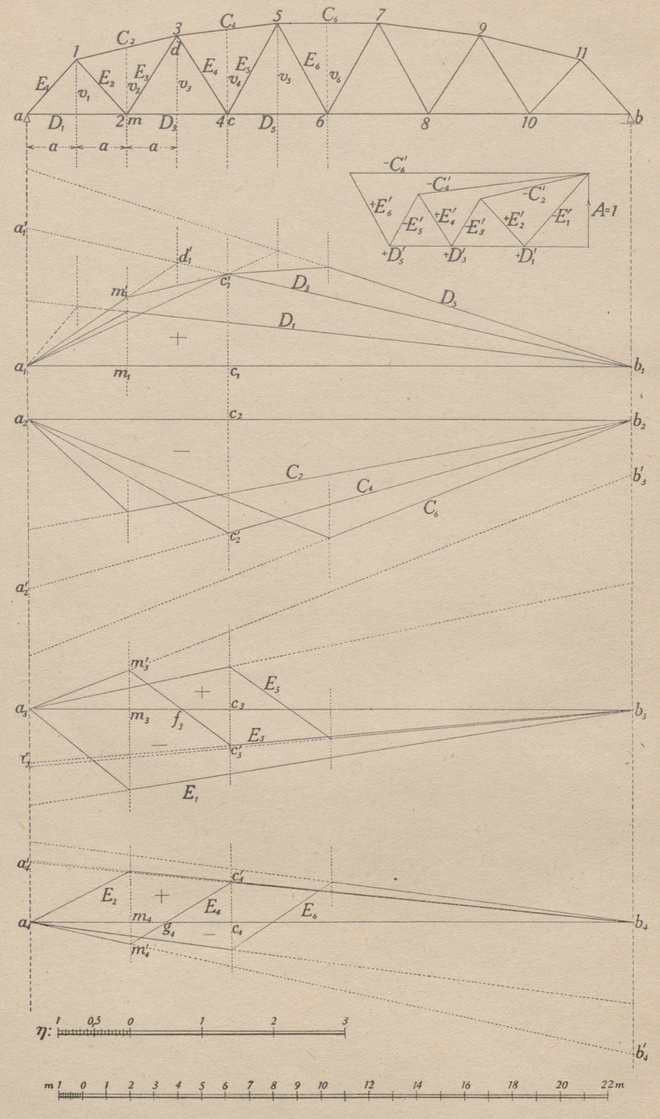
Obr. 123.



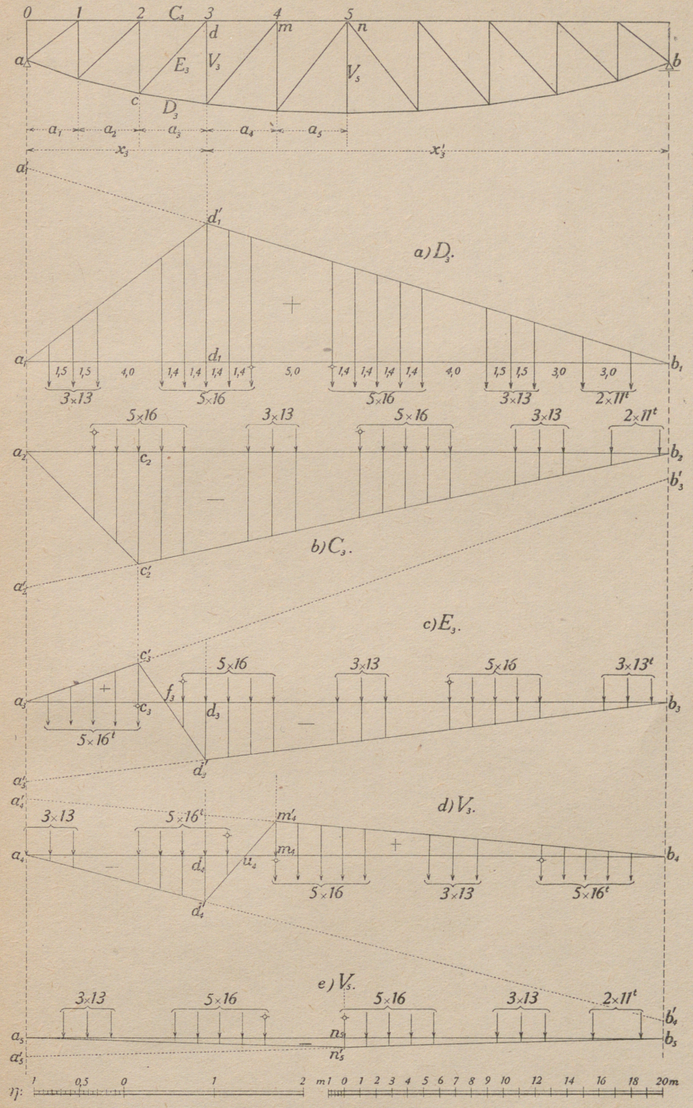
Obr. 124.



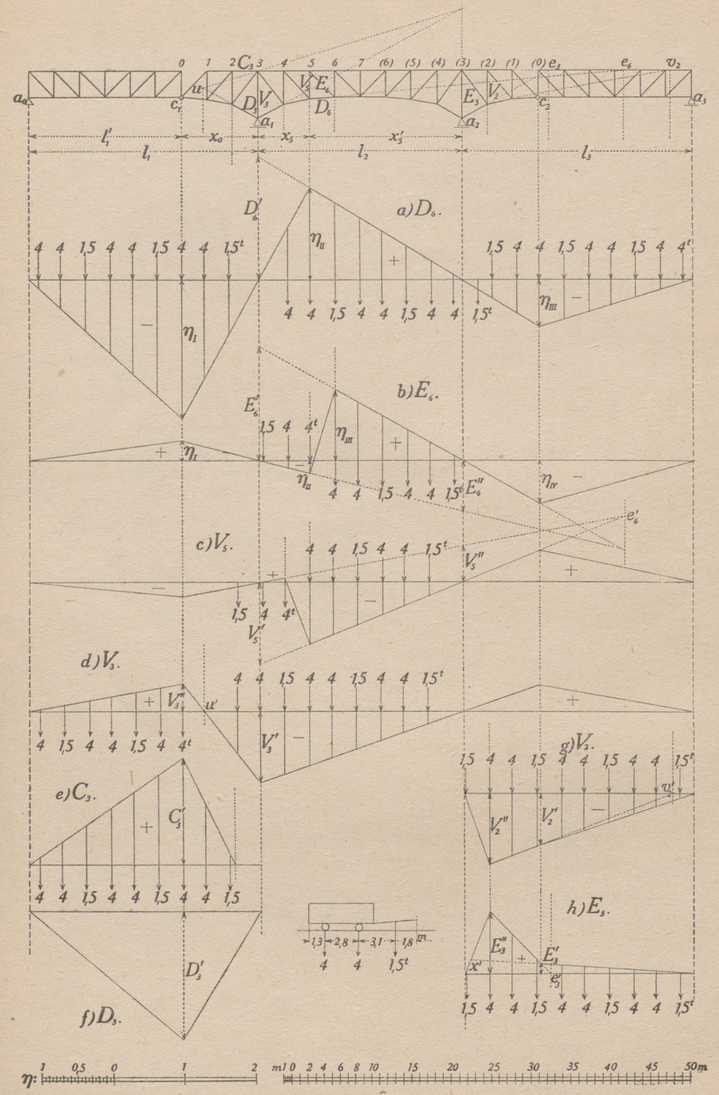
Obr. 125.



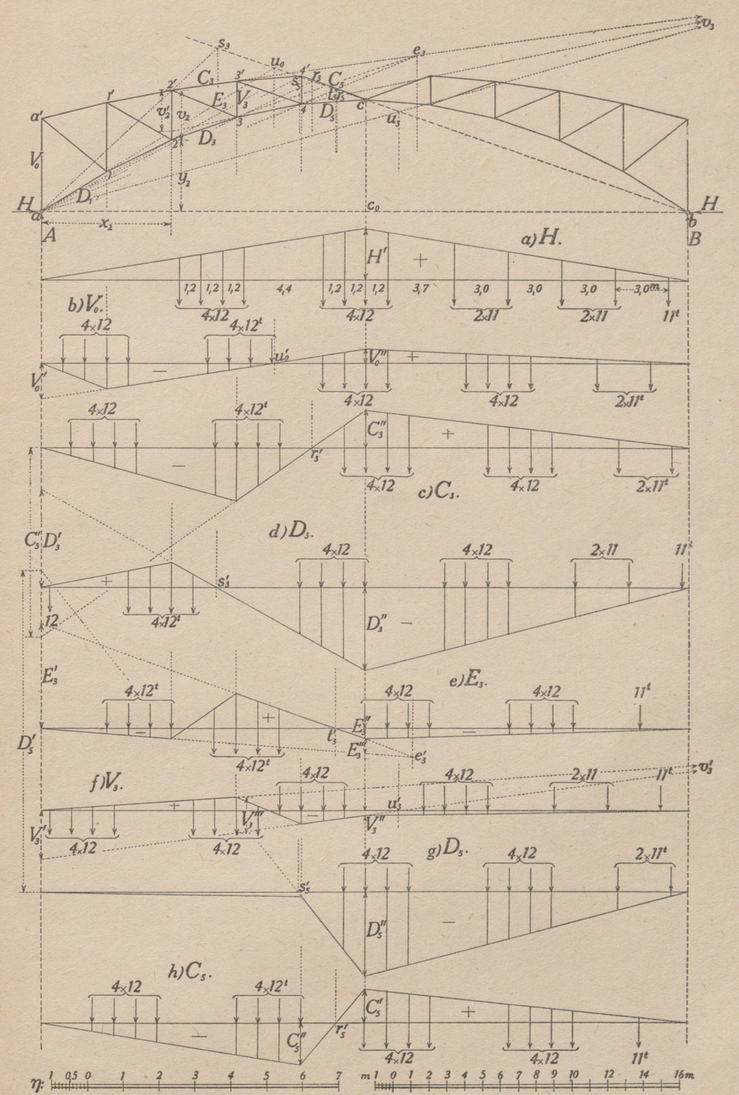
Obr. 151.



Obr. 152.



Obr. 167.



Obr. 170.

	Číslo spisu	Člen. cena Kčs
Stejskal, Hlavní poruchy železničních vozidel	214	30,—
Šubrt, Theorie elektrotechniky slabých proudů		v tisku
Teyssler, Technická měření ve strojnictví, 2. vyd.	225	v tisku
Tolman, Zakládání staveb, díl II., sv. 7	165	56,—
Velflík, Dějiny vys. učení techn., díl II., seš. 2.	133	5,—

SVĚT A PRÁCE:

Vojáček, Vývoj secích a rozmetacích strojů	5	2,—
Fleury-List, Intensivní výroba a její vliv na ceny	11	2,—
Chlumecký, Přechodnice v theorii a praxi	15	4,—
Fiala, Volba zobrazení pro čs. stát s úvodem do kartografie	16	16,—
Vlček, O lnářství belgickém a za novým lnářstvím českým	18	3,—
Srbek, Kamna, sporáky a jejich obsluha, 2. vyd.	23	v tisku
Nussberger, Metronomie délek	28	16,—
Ryska, Vývoj mechanické technologie	29	6,—
Vachtl, O kamenné příměsi malt a betonů	30	rozebráno
Jareš, Ocel, 3. vydání	31	20,—

B) SPISY DONÁTOVA FONDU BRNO:

Čupr, Matematika I., tisk	142	42,—
„ „ IIA		26,—
„ Užití integrálního počtu ve vědách technických a přírodních, lit.	143	32,—
Ducháček, Sladařské rozbory, tabulky	94	3,—
Hruban, Stavitelství betonové, litografie	146	117,—
Kieswetter, Jeřáby a zdvihadla I., litografie, text a tabulky		205,—
Nedoma, Pružnost a pevnost I. a II. díl, litografie		110,—
Závodník, Tabulky encyklopedie inž. stavitelství, litografie	139	50,—
Záruba, Výpočty ztužených průřezů v beton. konstr. s tab.		80,—
„ Pružnost a pevnost, litografie		100,—

Ve vydávání dalších spisů se pokračuje.

C) PŘEDNÁŠKY SPOLKU POSLUCHAČŮ STROJ. A EL. TECHN. INŽ. SPASEI:

Brunhofer, Techn. mechanika, část 2a-hydraulika, litogr.	9	56,—
„ „ „ „2b-thermomechanika	10	64,—
Šubrt, Elektrotechnika slabých proudů, telefony manuální	1	120,—
„ „ „ „ automatické	2	
„ „ „ „ telegrafie	3	

Ve vydávání dalších přednášek se pokračuje.

Dodáváme všechny spisy vydané Ústavem pro učebné pomůcky škol průmyslových a odborných. Spisy vydané Elektrotechnickým svazem československým a Jednotou čs. matematiků a fysiků objednávejte přímo u těchto nakladatelství s odkazem na členství v Matici.

Při objednávkách spisů Matice hradíme poštovné, přesahuje-li částka za objednávku 500 Kčs.

Spisy Čs. keramické společnosti a Čs. zkušebního svazu prodává nyní Technické knihkupectví SIA, Praha I, čp. 100. U tohoto nakladatelství objednávejte také normy ČSN s odkazem na členství v Matici.

Spisy Matice v seznamu neuvedené jsou t. č. rozebrány a z valné části vyjdou znovu. Zejména svazky Technického průvodce budou opět znovu vydány.

PŘEDSEDNICTVO
ČESKÉ MATICE TECHNICKÉ

Tiskem „PRÁCE“ v Praze.