ČESKÁ MATICE TECHNICKÁ.

SPISŮ ČÍSLO 19. A 25.

ZÁKLADY TECHNICKÉ NAUKY O PRUŽNOSTI A PEVNOSTI.

Z. 300

NAPSAL

JOSEF ŠOLÍN,

řádný professor stavebné mechaniky při c. k. české vysoké škole technické, t. č. n. o., c. k. dvor. rada, rytíř řádu železné koruny III. třídy, čestný doktor nauk technických, řádný člen České Akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění, řádný člen král. české Společnosti náuk, čestný člen Spolku architektů a inženýrů v království Českém, čestný člen Jednoty českých mathematiků, čestný člen Spolku posluchačů inženýrství při c. k. české vysoké škole technické v Praze.

Товариство українських студентів вис. шкіл техніч. „ОСНОВА“ в Празі

DÍL I.

(S 81 OBRAZCI V TEXTU.)

VYDÁNÍ DRUHÉ.

V PRAZE.

Ê. — V KOMMISSI KNIHKUPECTVÍ FR. ŘIVNÁČE V PRAZE.

1911.

Zakládající členové České Matice technické.



Bartelmus, Donát a spol. v Brně, závod elektrotechnický, architekt Viktor Beneš v Praze, stavitel Josef Blecha v Karlíně (†), Boda Martin, em. docent v Českých Budějovicích, továrník Leon Bondy v Praze, Bořkovec B., úř. aut. staveb. inženýr na Král. Vinohradech, továrna dř. Breitfeldova, Daňkova a spol. v Karlíně, Brejcha Karel, centrální inspektor rakouské severozápadní dráhy ve Vídni, Bohumil Čerych, majitel cukrovaru v Černožicích, První česko-moravská továrna na stroje v Praze, Český akciový pivovar v Českých Budějovicích, továrníci Antonín Dvořák a Karel Fischer (†) v Letkách, Alois Elhenický, stavitel, starosta města Smíchova, ředitel Jan Fischer v Libni, inženýr Jarosl. Gröger, vrch. stav. rada a em. ředitel stav. úřadu král. hlav. města Prahy, majetníci tiskárny Grund a Svatoň na Kr. Vinohradech, inženýr Fr. Havlíček v Praze (†), ředitel František Hering, praesident dr. techn. Josef Hlávka (†), podnikatelé Hrůza a Rosenberg v Praze, ředitel Josef Janatka v Karlíně, inženýr Ladislav Jarkovský v Bukovině, ředitel Václav Jiřina ve Vinoři, město Karlín, inženýr Jos. Kasalovský (†), civ. inženýr Jan Kodl v Písku (†), inženýr Jan Kroužek (†), ředitel Václav Křídlo, továrník Jos. Křivánek v Kijevě, továrník dr. techn. Frant. Křižík, ředitel Karel Kubeš, továrník J. Kudlicz v Praze-Bubnech, inženýr Jos. Lexa na Kr. Vinohradech (†), Gustav Lustig, em. vrch. ředitel cukrovarů ve Vídni, továrník J. V. Machovský v Karlíně, vrchní inženýr J. Mareš v Čes. Budějovicích, ředitel Boh. Mařík, továrníci Märky, Bromovský a Schulz v Praze, inženýr Otakar Materna v Praze, Mrňávek Josef, c. k. ředitel české reálky v Čes. Budějovicích, professor Frant. Müller (†), cís. rada V. Nekvasil v Karlíně (†), továrníci Novák a Jahn v Praze-Bubnech, F. Novotný, professor c. k. české vys. školy technické, ředitel dr. techn. Vojtěch Novotný (†), Občanská záložna v Karlíně, Okresní výbor v Berouně, Okresní výbor v Karlíně, Otakar Ott, královský český zemský stavební rada, Robert Patočka, ředitel raffinerie v Nestomicích n. L., Ferdinand Perner, továrník v Labské Týnici, Kristian Petrlík, professor české techniky v Praze (†), statkář Jos. Pillmann v Čes. Budějovicích (†), král. město Plzeň, chef-inženýr Podhájský Otokar, Warren (Amerika), královské hlavní město Praha, továrníci bratří Prášilové a spol. v Praze-Libni, dvorní rada prof. Ant. Pravda, vrch. inženýr Václav Pražák (†), továrník Frant. baron Ringhoffer na Smíchově, vrchní inženýr J. Sedláček na Hluboké, město Smíchov, vrchní stavební kommissař Frant. Spejchal v Plzni, Spolek architektů a inženýrů v království Českém, Spolek techniků z Plzně a okolí, Spolek českých techniků v markrabství Moravském v Brně, inženýr Bohumil Staněk na Kr. Vinohradech (†), inženýr Jos. Šupich v Něm. Brodě, c. k. stavební rada Rud. Tereba (†), c. k. vládní rada Jan Tille (†), „Unie“, Česká grafická společnost v Praze, M. Valtera, majitel [illegible] Lounech, město Královské Vinohrady, staros[illegible] Jos. Vášek, prof. Karel Vosyka (†), velkostat[illegible] táček, c. k. stav. rada Ant. Wichl (†), majetní [illegible] Wiesner, vrchní inženýr Václav Wofek, [illegible] Wolf (†), Záložna vinohradská, podn[illegible] Životski.

ČESKÁ MATICE TECHNICKÁ.

ROČNÍK XVI. (1911). SPISŮ ČÍSLO 19. A 25.

MAJETEK
ČESKO-UKR. KOMITÉTU
V Č.S.R.

r: 300

ZÁKLADY TECHNICKÉ NAUKY O PRUŽNOSTI A PEVNOSTI.

300-4685

NAPSAL

JOSEF ŠOLÍN,

řádný professor stavebné mechaniky při c. k. české vysoké škole technické, t. č. n. o., c. k. dvor. rada, rytíř řádu železné koruny III. třídy, čestný doktor nauk technických, řádný člen České Akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění, řádný člen král. české Společnosti náuk, čestný člen Spolku architektů a inženýrů v království Českém, čestný člen Jednoty českých mathematiků, čestný člen Spolku posluchačů inženýrství při c. k. české vysoké škole technické v Praze.

A D
AKADEMICKÉHO DOMU V PRAZE

DÍL I.

(S 81 OBRAZCI V TEXTU.)

Товариство Українських студентів вис. шкіл і техніч. „ОСВІТА" в Празі
VYŘADENO Z KNIHOVNY KOMITÉTU PRO UMOŽNĚNÍ STUDIA RUSKÝCH STUDENTŮ V Č.S.R.

VYDÁNÍ DRUHÉ.

MAJETEK
ČESKO-UKR. KOMITÉTU
V Č.S.R.

V PRAZE.

NÁKLADEM ČESKÉ MATICE TECHNICKÉ. — V KOMMISSI KNIHKUPECTVÍ FR. ŘIVNÁČE V PRAZE.

1911.

TISKEM ALOISA WIESNERA V PRAZE,
KNIHTISKAŘE ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ
A C. K. ČESKÉ VYSOKÉ ŠKOLY TECHNICKÉ V PRAZE.

Slovo k vydání druhému.

První vydání přítomného spisu jest úplně rozebráno a nastala potřeba pořídití vydání nové. Toto jest proti prvnímu v podstatě nezměněno; aby se věc urychlila, a churavému auktoru ušetřilo práce, uvolil se p. professor Zdeněk Bažant ochotně, že obstará korrekturu sazby a tisku, což vykonal s obvyklou svědomitostí, za kterouž vzácnou ochotu jest mu auktor povinen vřelými díky.

V Roztokách n. V. v červnu 1911.





ÚVOD.

§ 1. Jestliže v těleso pevného skupenství dáme působiti silám zevnitřním, jež vespolek jsou v rovnováze, změní se vzájemná poloha hmotných jeho částic; tím změní se i síly vnitřní, které před tím působily mezi částicemi, nebo — jinými slovy — k původním silám vnitřním, za jichž působení byly částice v stabilní rovnováze, přistoupí nové síly vnitřní, které, rostouce zároveň se změnou polohy částic, odporují silám zevnitřním. Nepřestoupí-li zevnitřní síly jisté meze, nastane konečně rovnováha mezi nimi a vyvozenými silami vnitřními. Za tohoto nového stavu rovnováhového mají částice jinou polohu vzájemnou, než měly před tím; těleso nabylo jiného poněkud tvaru i objemu; jeví se přetvoření, deformace tělesa. Přestanou-li síly zevnitřní působiti, snaží se síly vnitřní vyvoditi původní stav rovnováhový, čímž přetvoření tělesa do jisté míry pomíjí. Vlastnost tuto zoveme pružností, elasticitou těles. Rozeznáváme: *a*) přetvoření pomíjející, pružné, elastické, *b*) přetvoření trvalé, nepružné, plastické; z obou skládá se přetvoření celkové, totalné.

Čím menší jsou síly zevnitřní, tím menší jest přetvoření a tím větší měrou pomíjí. Po jistou mez bývá trvalé přetvoření tak nepatrné, že v praxi technické můžeme ho nedbati a pokládati tedy těleso dokonale pružným. V této příčině mluví se o mezi pružnosti; jak patrno, je to pojem nepříliš určitý.

Přestoupena-li zevnitřními silami mez pružnosti, vzrůstá nejen totalné přetvoření ale i trvalá jeho část víc a více; konečně dostoupí se meze, za kterou již nepřibývá sil vnitřních dalším přetvořováním, ale počíná jich naopak ubývati, což vede konečně k porušení celistvosti tělesa — po případě k takovému přetvoření, že těleso svému účelu již nehoví. Příslušnou mez nazýváme mezí pevnosti.

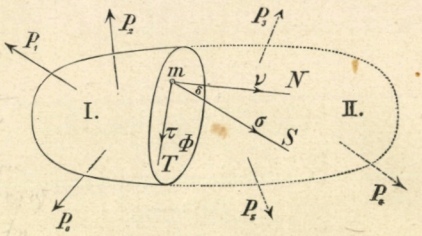
Úloha nauky o pružnosti a pevnosti jest pak tato: 1. *dáno-li těleso a síly zevnitřní, vyšetřiti síly vnitřní a přetvoření*; na této — theoretické — úloze zakládá se pak úloha další, praktická: 2. *sestrojiti za danými výminkami těleso, či k danému tělesu stanoviti jisté síly zevnitřní tak, aby přetvoření v nižádném místě nepřestoupilo určité meze* ze zkušenosti odvozené.

MAJETEK
ČESKO-UKR. KOMITÉTU
V Č. S. R.

ČÁST I.

Základy obecné theorie pružnosti.

§ 2. **O silách vnitřních.** V tělese, v něž působí rovnováhová soustava sil zevnitřních P_1, P_2, P_3, ... (obr. 1.), mějme na zřeteli určitý bod m a přisuďme jej určité ploše Φ. Kdybychom plochou Φ těleso rozdělili ve dvé, nezůstal by v rovnováze ani díl I. ani II., poněvadž rozdělením tělesa jsme zrušili síly vnitřní, jimiž oba díly působily v sebe vzájemně. Síly vnitřní, jimiž v jednotlivých bodech plochy Φ díl I. působil v díl II., rušily se vzájemně se silami, jimiž naopak díl II. působil v I., a byly tedy těmto rovny a směrů protivných. Kdybychom, odejmouce díl II. od I., dali těmto působiti ve způsobě sil zevnitřních, zachoval by se stav rovnováhový dílu I. Síly vnitřní, kterými před rozdělením tělesa působí díl II. v I., jsou dle toho v rovnováze se silami zevnitřními dílu I., a právě tak jsou síly vnitřní, jimiž díl I. působí v díl II., v rovnováze se silami zevnitřními dílu II.



Obr. 1.

Přihlížejme k dílu I., odejměme II. a nahraďme jeho působení příslušnými silami. Pomysleme si při bodě m prvek u plochy Φ; s budiž pak vnitřní síla, kterouž uvnitř tohoto prvku působí díl II. v I.; podílem

$$\sigma = \frac{s}{u}$$

čísel, vyjadřujících dotčenou sílu a plošný obsah prvku, měří se napětí tělesa v bodě m plochy Φ. Napětí σ může míti všeliké směry S a pokládá se za veličinu prostou. Značíc vnitřní sílu, jež by připadla jedničce plošné, vyjádřeno bude počtem jedniček silových na jedničku čtverečnou na př. kilogrammů na čtverečný centimetr, což pišme kg/cm^2.

Budiž N normála plochy Φ v bodě m; normalná rovina NS nechť tečnou rovinu, kterou si myslíme v bodě m ku ploše Φ, protíná v tečně T. Rozložme napětí σ ve složky ν, τ do přímek N, T, tak že

$$\nu = \sigma \cos \delta,$$
$$\tau = \sigma \sin \delta,$$

kde δ znamená odchylku přímky S, vzaté směrem napětí σ, od normály N, za jejíž positivnou polovici pokládáme tu, jež není obsažena v dílu I.; tu zove se ν normalným, τ tangencialným napětím tělesa v bodu m plochy Φ. Úhel δ jest obsažen mezi 0^0 a 180^0; proto může býti ν positivné či negativné, τ však jest vždy positivné.

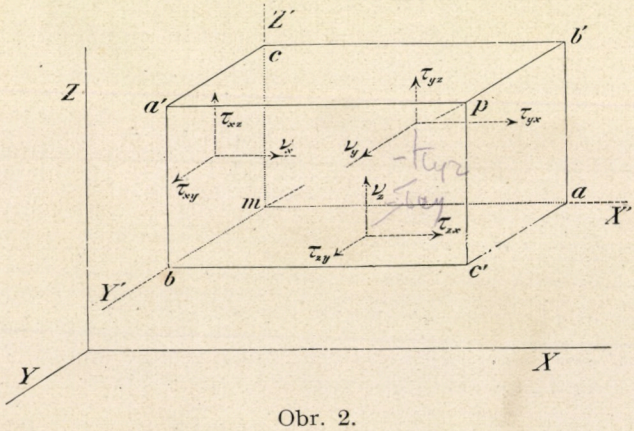
Jest-li ν $\left\{\begin{matrix}\text{positivné}\\\text{negativné}\end{matrix}\right\}$, působí $\left\{\begin{matrix}\text{ven z}\\\text{dovnitř}\end{matrix}\right\}$ dílu I. a snaží se částici m $\left\{\begin{matrix}\text{od}\\\text{k}\end{matrix}\right\}$ sousední $\left\{\begin{matrix}\text{vzdáliti}\\\text{přiblížiti}\end{matrix}\right\}$; pak říkáme, že je to napětí v $\left\{\begin{matrix}\text{tahu}\\\text{tlaku}\end{matrix}\right\}$.

Tangencialné napětí τ může míti v rovině tečné všeliké směry a jest proto veličinou prostou; rozložíme-li je však ve dvě pravoúhelné osy A, B, jež si myslíme bodem m v oné rovině tečné, vzniknou složky

$$\tau_a = \tau \cos (A\,T),$$
$$\tau_b = \tau \cos (B\,T).$$

Jest-li příslušný úhel $(A\,T)$, $(B\,T)$ $\left\{\begin{matrix}\text{ostrý}\\\text{tupý}\end{matrix}\right\}$, jest složka τ_a, τ_b $\left\{\begin{matrix}\text{positivní}\\\text{negativní}\end{matrix}\right\}$, působíc v $\left\{\begin{matrix}\text{positivním}\\\text{negativním}\end{matrix}\right\}$ směru příslušné osy A, B. Nazývejme $\left\{\begin{matrix}\tau_a\\\tau_b\end{matrix}\right\}$ tangencialným napětím v bodě m plochy Φ směrem $\left\{\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right\}$.

Pokud jde o jediný bod m tělesa, lze obecnou plochu Φ nahraditi vždy rovinou — tečnou to rovinou plochy Φ v bodě m.



Obr. 2.

§ 3. **O napětích působících ve tři plošné prvky vzájemně pravoúhelné.** Vztahujme bod m (obr. 2.) souřadnicemi x, y, z k soustavě tří pravoúhelných os X, Y, Z a postupme od něho v libovolném směru k nekonečně blízkému bodu p, jenž tedy v oné soustavě má souřadnice $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ a proto v soustavě stejnosměrné X', Y', Z', jejíž počátkem jest bod m, souřadnice dx, dy, dz. Pokládejme mp za tělesnou úhlopříčnu pravoúhelného rovnoběžnostěnu, jehož hrany jsou $\overline{ma} = dx$, $\overline{mb} = dy$, $\overline{mc} = dz$.

Postupujíce jako v § 2., zvolme za plochu Φ po řadě rovinu $\begin{Bmatrix} Y'\ Z' \\ Z'\ X' \\ X'\ Y' \end{Bmatrix}$, za plošný prvek pak obdélníček $\begin{Bmatrix} m\,b\,a'\,c = d\,y\,d\,z \\ m\,c\,b'\,a = d\,z\,d\,x \\ m\,a\,c'\,b = d\,x\,d\,y \end{Bmatrix}$; normálou N jest osa $\begin{Bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{Bmatrix}$; positivnou polovici každé osy pokládejme zároveň za positivnou polovici normály a přihlížejme tedy ku vnitřním silám, jimiž hmota, obsažená v dotčeném rovnoběžnostěnu, působí ve hmotu obsaženou mimo rovnoběžnostěn. Tu náleží k bodu m roviny $\begin{Bmatrix} Y'\ Z' \\ Z'\ X' \\ X'\ Y' \end{Bmatrix}$ určité napětí $\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix}$, jež se rozkládá jednak v napětí normalné $\begin{Bmatrix} \nu_x \\ \nu_y \\ \nu_z \end{Bmatrix}$ působící v přímce $\begin{Bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{Bmatrix}$, jednak v napětí tangencialné $\begin{Bmatrix} \tau_{(x)} \\ \tau_{(y)} \\ \tau_{(z)} \end{Bmatrix}$, které působíc v určité přímce roviny $\begin{Bmatrix} Y'\ Z' \\ Z'\ X' \\ X'\ Y' \end{Bmatrix}$ rozkládá se dále ve složky $\begin{Bmatrix} \tau_{xy},\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz},\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx},\ \tau_{zy} \end{Bmatrix}$ směrem $\begin{Bmatrix} Y', Z' \\ Z', X' \\ X', Y' \end{Bmatrix}$. Tak dospíváme k d e v í t i složkám $\begin{Bmatrix} \nu_x,\ \tau_{xy},\ \tau_{xz} \\ \nu_y,\ \tau_{yz},\ \tau_{yx} \\ \nu_z,\ \tau_{zx},\ \tau_{zy} \end{Bmatrix}$, které v obr. 2. vesměs jsou naznačeny směry positivnými.

Postoupíme-li ku protější stěně $\begin{Bmatrix} a\,b'\,\not{p}\,c' \\ b\,c'\,\not{p}\,a' \\ c\,a'\,\not{p}\,b' \end{Bmatrix}$ rovnoběžnostěnu, obdržíme obdobná napětí

$$\nu_x' = \nu_x + \frac{\partial \nu_x}{\partial x} d\,x,\quad \tau'_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} d\,x,\quad \tau'_{xz} = \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} d\,x,$$

$$\nu_y' = \nu_y + \frac{\partial \nu_y}{\partial y} d\,y,\quad \tau'_{yz} = \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} d\,y,\quad \tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} d\,y,$$

$$\nu_z' = \nu_z + \frac{\partial \nu_z}{\partial z} d\,z,\quad \tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} d\,z,\quad \tau'_{zy} = \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} d\,z.$$

Postoupíme-li totiž na př. od stěny $m\,b\,a'\,c$ ku protější stěně $a\,c'\,\not{p}\,b'$, změní se pouze x v $x + d\,x$; následkem toho změní se napětí $\nu_x,\ \tau_{xy},\ \tau_{xz}$ o příslušné differencialy částečné $\frac{\partial \nu_x}{\partial x} d\,x$, $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} d\,x$, $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} d\,x$ atd.

Těmito posléze uvedenými napětími naznačeno jest působení hmoty, obsažené mimo rovnoběžnostěn, ve hmotu rovnoběžnostěnu.

Kdybychom rovnoběžnostěn z tělesa vyňali žádajíce, by jeho stav rovnováhový při tom se nezměnil, musili bychom připojiti síly vnitřní, jimiž odňatá hmota okolní působila ve hmotu zůstalou. Jsou to jednak síly

$$\begin{aligned} &-\nu_x\, dy\, dz, \quad -\tau_{xy}\, dy\, dz, \quad -\tau_{xz}\, dy\, dz, \\ &-\nu_y\, dz\, dx, \quad -\tau_{yz}\, dz\, dx, \quad -\tau_{yx}\, dz\, dx, \\ &-\nu_z\, dx\, dy, \quad -\tau_{zx}\, dx\, dy, \quad -\tau_{zy}\, dx\, dy, \end{aligned}$$

jež působí ve stěny obsahující bod m; předložené znaménko (minus) plyne z toho, že nyní jde o působení hmoty, položené na stranách negativných polovic osových; dále máme síly

$$\begin{aligned} &\nu_x'\, dy\, dz, \quad \tau'_{xy}\, dy\, dz, \quad \tau'_{xz}\, dy\, dz, \\ &\nu_y'\, dz\, dx, \quad \tau'_{yz}\, dz\, dx, \quad \tau'_{yx}\, dz\, dx, \\ &\nu_z'\, dx\, dy, \quad \tau'_{zx}\, dx\, dy, \quad \tau'_{zy}\, dx\, dy, \end{aligned}$$

jež působí ve stěny protější, obsahující bod p; konečně může v rovnoběžnostěn působiti ještě síla zevnitřní (na př. tíže), jejížto složky směrem os souřadnicových, vztažené k jedničce obsahu tělesného, buďte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, tak že v rovnoběžnostěn působí směrem X, Y, Z síly zevnitřní

$$\mathfrak{x}\, dx\, dy\, dz, \quad \mathfrak{y}\, dx\, dy\, dz, \quad \mathfrak{z}\, dx\, dy\, dz.$$

Veškeré tyto síly jsou v rovnováze, což vyjadřuje se šesti rovnicemi výminkovými. Tři z nich znamenají, že součet složek rovnoběžných s každou z os souřadnicových rovná se nulle, ostatní tři pak, že součet statických momentů veškerých sil vzhledem ke třem různoběžným osám, neobsaženým v téže rovině, rovná se nulle. Užijme nejprve těchto rovnic, vztahujíce statické momenty k osám X'', Y'', Z'', jež si myslíme středem rovnoběžnostěnu stejnosměrně s osami souřadnicovými.*)

Přihlížíme-li především k ose X'', nemají momentu síly s osou tou rovnoběžné, tedy z normalných sil vnitřních obě ty, kde ν má příponu x, z tangencialných pak ty, kde τ má x za příponu druhou; statické momenty sil $-\tau_{yz}\, dz\, dx$, $\tau'_{yz}\, dz\, dx$ a $-\tau_{zy}\, dx\, dy$, $\tau'_{zy}\, dx\, dy$, majících ramena nekonečně malá řádu prvního, jsou nekonečně malé veličiny řádu třetího; statické momenty sil ostatních (majících ramena nekonečně malá řádu druhého) jsou nekonečně malé veličiny řádu čtvrtého; momenty sil zevnitřních jsou dokonce nekonečně malé veličiny řádu pátého. V rovnici rovnováhové lze tedy nedbati veličin nekonečně malých řádu čtvrtého a vyššího; proto netřeba dbáti ani rozdílu mezi τ_{yz} a τ'_{yz}, τ_{zy} a τ'_{zy}, tak že zbývají na konec jen dvě dvojice silové, skládající se ze sil tangencialných, při kterých τ má přípony yz a zy.

Máme tedy rovnici

$$\tau_{yz}\, dz\, dx\, dy - \tau_{zy}\, dx\, dy\, dz = 0,$$

z níž plyne, že

*) Osy X'', Y'', Z'' v obrazci 2. nejsou naznačeny.

(1) ..... $\tau_{yz} = \tau_{zy}$,

t. j. *tangencialné napětí, jež v rovině pravoúhelné k ose Y působí směrem osy Z, rovná se tangencialnému napětí, jež v rovině pravoúhelné k ose Z působí směrem osy Y.*

Obě ostatní výminky rovnováhy vedou obdobně k tomu, že

ku (1) ..... $\begin{cases} \tau_{zx} = \tau_{xz}, \\ \tau_{xy} = \tau_{yx}, \end{cases}$

tak že napětí tangencialná, označená týmiž dvěma příponami, ale položenými v pořádku opačném, jsou rovna. Pišme dále kratšeji

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_x,$$
$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_y,$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z,$$

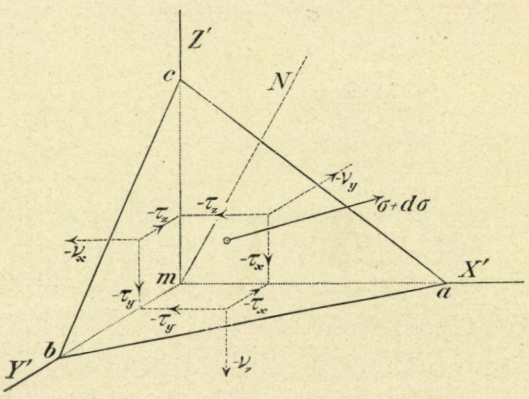
kladouce za příponu místo písmene dvou os souřadnicových písmě osy třetí, totiž té, kterouž určovací paprsky obou rovných napětí protínají pravoúhelně; napětí ta působí buď obě od této osy neb obě k této ose.

V prvních třech rovnicích rovnováhových, kterých jsme ještě neužili, dělme všecky členy součinem $dx\,dy\,dz$; tak obdržíme

(2) ..... $\begin{cases} \frac{\partial \nu_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \mathfrak{x} = 0, \\ \frac{\partial \nu_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \mathfrak{y} = 0, \\ \frac{\partial \nu_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \mathfrak{z} = 0. \end{cases}$

Známe-li 6 složek ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z, můžeme stanoviti napětí σ náležející k libovolné ploše Φ vedené bodem m, jak vyloženo bude v § následujícím.

§ 4. **O napětí náležejícím k prvku libovolné plochy.** Mysleme si bodem m libovolnou rovinu φ; polohu její stanovme úhly α, β, γ, které normála její N svírá s osami souřadnicovými X', Y', Z'; tytéž úhly svírá rovina φ sama s rovinami souřadnicovými $Y'Z'$, $Z'X'$, $X'Y'$. Jest nám stanoviti napětí tělesa v bodě m roviny φ, totiž hodnotu σ tohoto napětí, pak úhly α', β', γ', které směr S toho napětí svírá s osami souřadnicovými X', Y', Z'.



Obr. 3.

Vedeme-li k rovině φ takto stanovené rovinu rovnoběžnou ve vzdálenosti nekonečně malé od bodu m, obsažen jest mezi ní a rovinami souřadnicovými $Y'Z'$, $Z'X'$, $X'Y'$ nekonečně malý čtyřstěn $m\,a\,b\,c$ (obr. 3.), který budiž z tělesa vyňat, a okolní hmota nahrazena příslušnými silami vnitřními. Ve stěnu $\left\{\begin{matrix} m\,b\,c \\ m\,c\,a \\ m\,a\,b \end{matrix}\right\}$ čtyřstěnu působí dle § 3. napětí, jehož složky jsou

$$\left\{\begin{matrix} -\nu_x, & -\tau_y, & -\tau_z \\ -\nu_y, & -\tau_z, & -\tau_x \\ -\nu_z, & -\tau_x, & -\tau_y \end{matrix}\right\};$$

ve stěnu $a\,b\,c$ působí napětí $\sigma + d\,\sigma$, jehož přímka, vzatá směrem napětí, svírá s osami souřadnicovými úhly $\alpha' + d\,\alpha'$, $\beta' + d\,\beta'$, $\gamma' + d\,\gamma'$, tak že složky tohoto napětí směrem os souřadnicových jsou

$$(\sigma + d\,\sigma)\cos(\alpha' + d\,\alpha'),\ (\sigma + d\,\sigma)\cos(\beta' + d\,\beta'),\ (\sigma + d\,\sigma)\cos(\gamma' + d\,\gamma').$$

Znamenáme-li písmenem u plošný obsah trojúhelníka $a\,b\,c$, jsou $u\cos\alpha$, $u\cos\beta$, $u\cos\gamma$ obsahy trojúhelníků $m\,b\,c$, $m\,c\,a$, $m\,a\,b$. Užijme výminek rovnováhy, jimiž se vyjadřuje, že součet sil směrem každé z os souřadnicových rovná se nulle. Hledíce k ose X obdržíme rovnici následující:

$$-\nu_x\,u\cos\alpha - \tau_z\,u\cos\beta - \tau_y\,u\cos\gamma + (\sigma + d\,\sigma)\,u\cos(\alpha' + d\,\alpha') = 0.$$

Dělíme-li činitelem u a nedbáme-li veličin nekonečně malých proti konečným, vyplývá

$$(3)\ \ldots\ldots\ \sigma\cos\alpha' = \nu_x\cos\alpha + \tau_z\cos\beta + \tau_y\cos\gamma,$$

a z ostatních dvou výminek obdobně

$$\text{ku (3)}\ \ldots\ldots\ \left\{\begin{matrix} \sigma\cos\beta' = \tau_z\cos\alpha + \nu_y\cos\beta + \tau_x\cos\gamma, \\ \sigma\cos\gamma' = \tau_y\cos\alpha + \tau_x\cos\beta + \nu_z\cos\gamma. \end{matrix}\right.$$

Mimo to platí relace

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1,$$

z kterýchžto čtyř rovnic možno stanoviti čtyři neznámé σ, α', β', γ'.

V prvé z rovnic (3) máme na pravé straně napětí ν_x, τ_z, τ_y; jsou to patrně složky napětí σ_x (§ 3.) směrem os X, Y, Z (hledíme-li tu k působení hmoty, položené na positivní straně osy X, ve hmotu ostatní); jestliže ν_x, τ_z, τ_y rozložíme do normály N a do dalších dvou os k ní pravoúhelných, obdržíme do N složky $\nu_x\cos\alpha$, $\tau_z\cos\beta$, $\tau_y\cos\gamma$; součet jejich dává obdobně složku napětí σ_x do normály N, totiž

$$\sigma_x\cos N\,S_x = \nu_x\cos\alpha + \tau_z\cos\beta + \tau_y\cos\gamma,$$

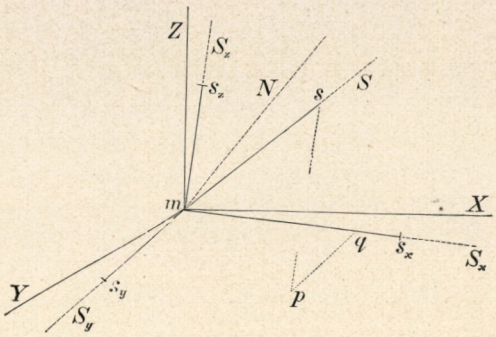
kde S_x jest směr napětí σ_x; píšeme-li $X\,S$ místo α', nabývá první z rovnic (3) tvaru

$$\sigma \cos X\,S = \sigma_x \cos N\,S_x.$$

Rovnice tato vyjadřuje obecnou větu o vzájemnosti napětí, kteroužto větu — užívajíce názvu zavedeného v § 2. o složkách napětí tangencialného — můžeme vysloviti, jak následuje.

Jsou-li X, N dva libovolné směry, tu napětí tělesa v bodě m plochy, pravoúhelné ku N, směrem X rovná se napětí v bodě m plochy, pravoúhelné ku X, směrem N.

Z této obecné věty plynou rovnice (1) jakožto sousledky, týkající se směrů pravoúhelných.



Obr. 4.

§ 5. **O ellipsoidu napiatosti.** Pokládejme bod m (obr. 4.) za počátek pravoúhelné soustavy souřadnicové, jejíž osy znamenejme nyní X, Y, Z. K rovině $\begin{Bmatrix} Y\,Z \\ Z\,X \\ X\,Y \end{Bmatrix}$, pravoúhelné k ose $\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$, náleží napětí $\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix}$, jehožto složky směrem os souřadnicových X, Y, Z jsou $\begin{Bmatrix} \nu_x, \tau_z, \tau_y \\ \tau_z, \nu_y, \tau_x \\ \tau_y, \tau_x, \nu_z \end{Bmatrix}$. Napětí $\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix}$ má směr $\begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{Bmatrix}$ stanovený úhly $\begin{Bmatrix} X\,S_x = \alpha_x', & Y\,S_x = \beta_x', & Z\,S_x = \gamma_x' \\ X\,S_y = \alpha_y', & Y\,S_y = \beta_y', & Z\,S_y = \gamma_y' \\ X\,S_z = \alpha_z', & Y\,S_z = \beta_z', & Z\,S_z = \gamma_z' \end{Bmatrix}$, o nichž platí relace

$$\cos \alpha_x' = \frac{\nu_x}{\sigma_x}, \quad \cos \beta_x' = \frac{\tau_z}{\sigma_x}, \quad \cos \gamma_x' = \frac{\tau_y}{\sigma_x},$$

$$\cos \alpha_y' = \frac{\tau_z}{\sigma_y}, \quad \cos \beta_y' = \frac{\nu_y}{\sigma_y}, \quad \cos \gamma_y' = \frac{\tau_x}{\sigma_y},$$

$$\cos \alpha_z' = \frac{\tau_y}{\sigma_z}, \quad \cos \beta_z' = \frac{\tau_x}{\sigma_z}, \quad \cos \gamma_z' = \frac{\nu_z}{\sigma_z}.$$

K libovolné jiné rovině φ stanovené normálou N, náleží určité napětí σ působící určitým směrem S. Dejme tomu, že napětí σ na základě případného měřidla jest vyjádřeno délkou a tato přenesena od bodu m na přímku S, tak že

$$\overline{m\,s} = \sigma.$$

Vztahujme bod s k soustavě os S_x, S_y, S_z souřadnicemi $\xi = \overline{m\,q}$, $\eta = \overline{q\,p}$, $\zeta = \overline{p\,s}$, jimiž vyjadřují se dle téhož měřidla složky napětí σ do přímek S_x, S_y, S_z. Známá věta, že průmět (v osu X) úseku $\overline{m\,s}$ rovná se průmětu lomené čáry $m\,q\,p\,s$, dává

$$\sigma \cos \alpha' = \xi \cos \alpha_x' + \eta \cos \alpha_y' + \zeta \cos \alpha_z' = \xi \frac{\nu_x}{\sigma_x} + \eta \frac{\tau_z}{\sigma_y} + \zeta \frac{\tau_y}{\sigma_z}.$$

Přirovnáním této rovnice k první z rovnic (3) seznáváme, že

$$\cos \alpha = \frac{\xi}{\sigma_x}, \quad \cos \beta = \frac{\eta}{\sigma_y}, \quad \cos \gamma = \frac{\zeta}{\sigma_z},$$

a poněvadž

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

vychází souvislost

$$\left(\frac{\xi}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{\sigma_z}\right)^2 = 1,$$

což jest rovnice plochy ellipsoidické, vztažené ku trojině sdružených průměrů S_x, S_y, S_z. *Jestliže tedy ustanovíme napětí σ náležející k různým rovinám obsahujícím bod m a vyjádříme je po každé úsekem $\overline{m\,s}$, přeneseným od bodu m na přímku S téhož napětí, jsou koncové body s všech těchto úseků na povrchu ellipsoidu.* Napětí σ_x, σ_y, σ_z náležející k rovinám souřadnicovým $Y\,Z$, $Z\,X$, $X\,Y$, jichžto normály jsou osy X, Y, Z, dávají trojinu sdružených poloměrů téhož ellipsoidu. Poněvadž jsme však za osy X, Y, Z zvolili libovolné tři vzájemně pravoúhlé přímky, patrno, že *každou trojinou sdružených poloměrů ellipsoidu jsou vyjádřena napětí náležející ke třem vzájemně pravoúhelným plochám.* Ellipsoid tento zove se e l l i p s o i d e m n a p i a t o s t i t ě l e s a v b o d ě m.

Napětí σ v bodě m plochy pravoúhelné ku N lze rozložiti ve složku normalnou a tangencialnou. Složka normalná

$$\nu = \sigma \cos \delta,$$

kde δ jest úhel $N\,S$; leč

$$\cos \delta = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma',$$

tak že, užijeme-li rovnic (3), vyjde

$$\nu = \cos \alpha (\nu_x \cos \alpha + \tau_z \cos \beta + \tau_y \cos \gamma) + \cos \beta (\tau_z \cos \alpha + \nu_y \cos \beta + \tau_x \cos \gamma) + \cos \gamma (\tau_y \cos \alpha + \tau_x \cos \beta + \nu_z \cos \gamma)$$

neboli

$$(4)\ldots \nu = \nu_x \cos^2 \alpha + \nu_y \cos^2 \beta + \nu_z \cos^2 \gamma + 2\tau_x \cos \beta \cos \gamma + 2\tau_y \cos \gamma \cos \alpha + 2\tau_z \cos \alpha \cos \beta.$$

Ustanovme na normále N bod n tak, aby

$$\overline{m\,n} = \frac{1}{\sqrt{\pm \nu}},$$

kde $\pm \nu$ jest prostá hodnota napětí normálného; pak má bod n v soustavě $X\,Y\,Z$ souřadnice

$$x = \overline{m\,n}\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\pm \nu}}, \quad y = \frac{\cos\beta}{\sqrt{\pm \nu}}, \quad z = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{\pm \nu}}.$$

Dělíme-li všecky členy rovnice (4) činitelem $\pm \nu$, nabývá rovnice ta tvaru

$$\pm 1 = \nu_x x^2 + \nu_y y^2 + \nu_z z^2 + 2\tau_x y z + 2\tau_y z x + 2\,{}_z x y,$$

z čehož plyne, že měřickým místem bodu n jest plocha druhého stupně. Zvolíme-li osy této plochy osami souřadnicovými, vyloučí se z rovnice plochy členové, kteří obsahují součiny $y z$, $z x$, $x y$; za takové soustavy souřadnicové musí tedy

$$\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0.$$

Z toho seznáváme, že každým bodem m vésti lze tři vzájemně pravoúhelné roviny tak, aby příslušná napětí tangencialná τ_x, τ_y, τ_z rovnala se nulle, a tedy napětí σ_x, σ_y, σ_z byla pravoúhelná k příslušným rovinám $Y\,Z$, $Z\,X$, $X\,Y$. Pak

$$\nu_x = \pm \sigma_x, \quad \nu_y = \pm \sigma_y, \quad \nu_z = \pm \sigma_z.$$

Napětí ν_x, ν_y, ν_z (s příslušnými znaménky) zovou se hlavními napětími v bodě m. Znamenejme je ν_1, ν_2, ν_3; příslušná napětí σ_1, σ_2, σ_3, prosté to veličiny, jsou vyjádřena třemi sdruženými poloměry $\overline{m\,s_1}$, $\overline{m\,s_2}$, $\overline{m\,s_3}$ ellipsoidu napiatosti; poněvadž pak tyto sdružené poloměry jsou vzájemně pravoúhelné, jsou poloosami ellipsoidu. Z toho plyne, že prostá hodnota jednoho z hlavních napětí jest maximum, prostá hodnota jednoho z obou ostatních pak minimum všelikých napětí σ působících v bodu m.

§ 6. **Kterak se stanoví napětí hlavní.** Dány-li za pravoúhelné soustavy $X\,Y\,Z$ veličiny ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z, možno hlavní napětí stanoviti, jak následuje.

Dejme tomu, že by ku ploše Φ pravoúhelné k N (obr. 4.) náleželo napětí hlavní ν_h; v tom případě má přímka S týž směr jako normála N anebo směr protivný, tak že

$$\sigma\cos\alpha' = \nu_h\cos\alpha, \quad \sigma\cos\beta' = \nu_h\cos\beta, \quad \sigma\cos\gamma' = \nu_h\cos\gamma,$$

a rovnice (3) nabývají tu tvaru

$$(5)\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} (\nu_x - \nu_h)\cos\alpha + \tau_z\cos\beta + \tau_y\cos\gamma = 0, \\ \tau_z\cos\alpha + (\nu_y - \nu_h)\cos\beta + \tau_x\cos\gamma = 0, \\ \tau_y\cos\alpha + \tau_x\cos\beta + (\nu_z - \nu_h)\cos\gamma = 0, \end{cases}$$

k čemu náleží ještě připojiti relaci

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Eliminujeme-li z rovnic (5) veličiny $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, vychází výminka, že determinant

$$\begin{vmatrix} \nu_x - \nu_h & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \nu_y - \nu_h & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \nu_z - \nu_h \end{vmatrix} = 0,$$

rozvinutím pak

$$(\nu_x - \nu_h)(\nu_y - \nu_h)(\nu_z - \nu_h) - (\nu_x - \nu_h)\tau_x^2 - (\nu_y - \nu_h)\tau_y^2 - (\nu_z - \nu_h)\tau_z^2 + 2\tau_x\tau_y\tau_z = 0$$

a spořádáním dle mocností neznámé ν_h konečně

$$(6)\ldots \nu_h^3 - (\nu_x + \nu_y + \nu_z)\nu_h^2 + (\nu_y\nu_z + \nu_z\nu_x + \nu_x\nu_y - \tau_x^2 - \tau_y^2 - \tau_z^2)\nu_h - \nu_x\nu_y\nu_z + \nu_x\tau_x^2 + \nu_y\tau_y^2 + \nu_z\tau_z^2 - 2\tau_x\tau_y\tau_z = 0;$$

kořeny této rovnice jsou hlavními napětími ν_1, ν_2, ν_3.

Stanoveny-li hodnoty napětí hlavních, vycházejí směry jejich S_1, S_2, S_3 z rovnic (5). Vyloučíme-li $\cos\gamma$ jednou z druhé a třetí, po druhé z třetí a první rovnice (5), obdržíme

$$(7^a)\ldots \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{(\nu_y - \nu_h)(\nu_z - \nu_h) - \tau_x^2}{\tau_x\tau_y - (\nu_z - \nu_h)\tau_z}, \quad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\tau_x\tau_y - (\nu_z - \nu_h)\tau_z}{(\nu_z - \nu_h)(\nu_x - \nu_h) - \tau_y^2}$$

a znásobením obou těchto výrazů

$$\frac{\cos^2\alpha}{(\nu_y - \nu_h)(\nu_z - \nu_h) - \tau_x^2} = \frac{\cos^2\beta}{(\nu_z - \nu_h)(\nu_x - \nu_h) - \tau_y^2};$$

vyloučíme-li dále $\cos\alpha$ jednou z třetí a první, po druhé z první a druhé rovnice (5), vyjde obdobně

$$(7^b)\ldots \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{(\nu_x - \nu_h)(\nu_z - \nu_h) - \tau_y^2}{\tau_y\tau_z - (\nu_x - \nu_h)\tau_x}, \quad \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{\tau_y\tau_z - (\nu_x - \nu_h)\tau_x}{(\nu_x - \nu_h)(\nu_y - \nu_h) - \tau_z^2}$$

a znásobením

$$\frac{\cos^2\beta}{(\nu_x - \nu_h)(\nu_z - \nu_h) - \tau_y^2} = \frac{\cos^2\gamma}{(\nu_y - \nu_h)(\nu_x - \nu_h) - \tau_x^2}.$$

Položme kratšeji

$$(8) \quad \ldots\ldots\ldots \begin{cases} (\nu_y - \nu_h)(\nu_z - \nu_h) - \tau_x^2 = A, \\ (\nu_z - \nu_h)(\nu_x - \nu_h) - \tau_y^2 = B, \\ (\nu_x - \nu_h)(\nu_y - \nu_h) - \tau_z^2 = C; \end{cases}$$

pak lze napsati úměru

$$(9) \quad \ldots\ldots \frac{\cos^2\alpha}{A} = \frac{\cos^2\beta}{B} = \frac{\cos^2\gamma}{C} = \frac{1}{A+B+C},$$

z čehož vychází

$$(9^a) \quad \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{A}{A+B+C}}, \\ \cos\beta = \pm\sqrt{\dfrac{B}{A+B+C}}, \\ \cos\gamma = \pm\sqrt{\dfrac{C}{A+B+C}}. \end{cases}$$

Položíme-li ve výrazech A, B, C za ν_h hodnotu $\begin{Bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{Bmatrix}$, obdržíme z rovnic (9^a) úhly $\begin{Bmatrix} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \end{Bmatrix}$, jimiž se stanoví směr $\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix}$. Před jednu z odmocnin lze položiti kterékoli z obou znamének; při ostatních dvou vyplývá pak znaménko z úměr (7^a), (7^b).

Zvolíme-li přímky S_1, S_2, S_3 za osy souřadnicové, vyloučí se z rovnic (3) členy obsahující napětí tangencialná, a rovnice nabudou tím tvaru

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \sigma\cos\alpha' = \nu_1\cos\alpha, \\ \sigma\cos\beta' = \nu_2\cos\beta, \\ \sigma\cos\gamma' = \nu_3\cos\gamma, \end{cases}$$

z čehož zdvojmocněním a sečtením vyplývá

$$(11) \quad \ldots\ldots \sigma^2 = \nu_1^2\cos^2\alpha + \nu_2^2\cos^2\beta + \nu_3^2\cos^2\gamma;$$

rovnice (4) mění se pak takto:

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots \nu = \nu_1\cos^2\alpha + \nu_2\cos^2\beta + \nu_3\cos^2\gamma.$$

Napíšeme-li rovnici (11) a (12) o kterýchkoli třech vzájemně pravoúhelných plochách, jichž normály X, Y, Z s osami souřadnicovými S_1, S_2, S_3 svírají úhly α_x, β_x, γ_x; α_y, β_y, γ_y; α_z, β_z, γ_z, obdržíme sečtením

$$(13) \quad \ldots\ldots\ldots \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2,$$

$$(14) \quad \ldots\ldots\ldots \nu_x + \nu_y + \nu_z = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3,$$

KNIHOVNA ČVUT ARCHIVNÍ VÝTISK

poněvadž

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1,$$
$$\cos^2 \beta_x + \cos^2 \beta_y + \cos^2 \beta_z = 1,$$
$$\cos^2 \gamma_x + \cos^2 \gamma_y + \cos^2 \gamma_z = 1.$$

Máme tedy věty:

Součet druhých mocnin napětí σ, jež náležejí ke třem vzájemně pravoúhelným plochám, jest stálý.

Součet normálných napětí v, jež náležejí ke třem pravoúhelným plochám, jest stálý.

§ 7. **O ploše směrové.** V soustavě souřadnicové $S_1 S_2 S_3$ má ellipsoid napiatosti rovnici

$$(15) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{x^2}{v_1^2} + \frac{y^2}{v_2^2} + \frac{z^2}{v_3^2} = 1.$$

Ellipsoid ten stanoví měřicky hodnotu σ napětí náležejícího ku všeliké ploše, kterou si myslíme bodem m, a č z n á m e - l i s m ě r S t o h o t o n a p ě t í. Abychom i tento směr určili měřicky, postupujme takto. Dané rovině, k nížto jest ustanoviti směr napětí σ, náleží v soustavě $S_1 S_2 S_3$ rovnice

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0;$$

směr S příslušného napětí σ určen jest úhly α', β', γ', o nichž platí rovnice (10). Levými stranami rovnic (10) vyjádřeny jsou však souřadnice x', y', z' bodu s, v němžto přímka S protíná ellipsoid napiatosti. Proto

$$\cos \alpha = \frac{x'}{v_1}, \quad \cos \beta = \frac{y'}{v_2}, \quad \cos \gamma = \frac{z'}{v_3},$$

tak že rovnici dané roviny lze psáti takto:

$$\frac{xx'}{v_1} + \frac{yy'}{v_2} + \frac{zz'}{v_3} = 0.$$

To však značí rovinu, která jdouc počátkem soustavy souřadnicové jest rovnoběžna s tečnou rovinou plochy dané rovnicí

$$(16) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{x^2}{v_1} + \frac{y^2}{v_2} + \frac{z^2}{v_3} = \pm k^2;$$

příslušný bod dotyčný má souřadnice x', y', z' anebo souřadnice k těmto úměrné, jest tedy položen na přímce S. *Rovina daná normálou N a přímka S jsou vespolek sdruženy vzhledem ku ploše dané rovnicí* (16).

Plocha stupně druhého, daná rovnicí (16), v kteréžto k jest libovolná konstanta, stanoví tak ku každé rovině φ, kterou si myslíme bodem m, přímku S; je to průměr sdružený s rovinou φ vzhledem k oné ploše

druhého stupně, kterou nazývejme proto plochou směrovou. Poloměr $\overline{m\,s}$ ellipsoidu napiatosti, obsažený v přímce S, dává pak, jak vyloženo v § 6., hodnotu příslušného napětí σ, tak že plochou směrovou a ellipsoidem napiatosti jest úloha po stránce měřické zcela vyřízena.

Volíme-li různé (realné) hodnoty konstanty k, vycházejí různé plochy směrové stupně druhého; plochy tyto jsou vesměs soustředné a homothetické (podobné a stejně položené); všem náleží vzhledem k dané rovině φ týž sdružený průměr S. Plocha směrová má tytéž (nekonečné) osy a hlavní roviny jak ellipsoid napiatosti. Co se týče druhu plochy směrové, sluší pamatovati toto. Jsou-li hlavní napětí ν_1, ν_2, ν_3 vesměs $\left\{\begin{matrix}\text{positivná}\\ \text{negativná}\end{matrix}\right\}$, předložme v rovnici (16) před k^2 znaménko $\left\{\begin{matrix}+\\ -\end{matrix}\right\}$*); plochou směrovou jest pak ellipsoid, jehož poloosy jsou úměrny k odmocninám z prostých hodnot napětí hlavních; v tomto případě má dle rovnice (12) všeliké normalné napětí v bodě m totéž znaménko, jako napětí hlavní. Má-li však jedno z hlavních napětí, na př. ν_3, znaménko protivné, položme před k^2 znaménka obě; plocha směrová skládá se pak ze dvou hyperboloidů — jednotného a dvoudílného — jež mají společnou asymptotickou plochu kuželovou

$$\frac{x^2}{\nu_1}+\frac{y^2}{\nu_2}+\frac{z^2}{\nu_3}=0.$$

K tečným rovinám této plochy kuželové náležejí — jak známo — dotyčné jejich přímky jakožto sdružené průměry, tak že napětí σ, náležející v tomto případě k tečným rovinám asymptotické plochy kuželové, působí v těchto rovinách samých a jsou tedy pouhými napětími tangencialnými; napětí normalná k tečným rovinám těm náležející rovnají se nulle. Normaly N vedené bodem m k těmto rovinám tečným vyplňují plochu kuželovou, jež odděluje směry positivných napětí normálných od negativných.

§ 8. **O největších napětích tangencialných.** K rovině, dané úhly α, β, γ, náleží napětí tangencialné, jež obdržíme z rovnice

$$\tau^2=\sigma^2-\nu^2,$$

vložíme-li sem hodnoty z rovnic (11) a (12). Píšeme-li kratšeji

$$\cos^2\alpha=a,\quad \cos^2\beta=b,\quad \cos^2\gamma=c,$$

vychází

$$(17)\ \ldots\ \tau^2=a\,\nu_1^2+b\,\nu_2^2+c\,\nu_3^2-(a\,\nu_1+b\,\nu_2+c\,\nu_3)^2,$$

při čemž

$$a+b+c=1.$$

*) Jinak by směrová plocha nebyla realná.

Stanovme hodnoty a, b, c, jež vedou k maximu τ^2. Tu musejí býti naplněny výminky

$$\nu_1^2\, d\,a + \nu_2^2\, d\,b + \nu_3^2\, d\,c - 2\,(a\,\nu_1 + b\,\nu_2 + c\,\nu_3)\,(\nu_1\, d\,a + \nu_2\, d\,b + \nu_3\, d\,c) = 0,$$
$$d\,a + d\,b + d\,c = 0.$$

Znásobme poslední rovnici neurčitým činitelem ε a přičtěme ku předešlé; činitele ε zvolme tak, aby součinitelé veličin $d\,a$, $d\,b$, $d\,c$ každý o sobě rovnali se nulle, tedy

$$\varepsilon + \nu_1^2 - 2\,(a\,\nu_1 + b\,\nu_2 + c\,\nu_3)\,\nu_1 = 0,$$
$$\varepsilon + \nu_2^2 - 2\,(a\,\nu_1 + b\,\nu_2 + c\,\nu_3)\,\nu_2 = 0,$$
$$\varepsilon + \nu_3^2 - 2\,(a\,\nu_1 + b\,\nu_2 + c\,\nu_3)\,\nu_3 = 0.$$

Odečteme-li na vzájem druhou a třetí, třetí a první, první a druhou z těchto rovnic, obdržíme výminky

$$\nu_2 + \nu_3 = 2\,(a\,\nu_1 + b\,\nu_2 + c\,\nu_3),$$
$$\nu_3 + \nu_1 = 2\,(a\,\nu_1 + b\,\nu_2 + c\,\nu_3),$$
$$\nu_1 + \nu_2 = 2\,(a\,\nu_1 + b\,\nu_2 + c\,\nu_3),$$

jež mají býti naplněny za všelikých hodnot ν_1, ν_2, ν_3; což vymáhá, aby

$$a = 0,\ b = c = \tfrac{1}{2},\ \text{t. j. } \alpha = 90^0,\ \beta = \pm\gamma = \pm 45^0,$$
$$b = 0,\ c = a = \tfrac{1}{2},\ \text{t. j. } \beta = 90^0,\ \gamma = \pm\alpha = \pm 45^0,$$
$$c = 0,\ a = b = \tfrac{1}{2},\ \text{t. j. } \gamma = 90^0,\ \alpha = \pm\beta = \pm 45^0.$$

Největší napětí tangencialná působí tedy v šesti rovinách, jež obsahujíce každá jednu z přímek S_1, S_2, S_3 rozpolují úhly obou ostatních; v obou rovinách, obsahujících touže přímku S_1 či S_2 či S_3, mají napětí ta touž hodnotu. Vložíme-li sdružené hodnoty veličin a, b, c do rovnic (17), obdržíme

$$\tau'^2 = \frac{\nu_2^2 + \nu_3^2}{2} - \frac{(\nu_2 + \nu_3)^2}{4} = \frac{(\nu_2 - \nu_3)^2}{4}$$

a obdobně, tak že největší napětí tangencialná jsou

$$(18)\ \ldots\ \tau' = \pm\frac{\nu_2 - \nu_3}{2},\ \tau'' = \pm\frac{\nu_3 - \nu_1}{2},\ \tau''' = \pm\frac{\nu_1 - \nu_2}{2}.$$

Co se týče směru největších napětí tangencialných, plyne z rovnic (10), že

jest-li $\alpha = 90^0$, musí též $\alpha' = 90^0$,
„ $\beta = 90^0$, „ „ $\beta' = 90^0$,
„ $\gamma = 90^0$, „ „ $\gamma' = 90^0$,

tak že napětí $\left\{\begin{matrix}\sigma' \\ \sigma'' \\ \sigma'''\end{matrix}\right\}$ a tedy obě jeho složky $\left\{\begin{matrix}\nu', & \tau' \\ \nu'', & \tau'' \\ \nu''', & \tau'''\end{matrix}\right\}$ jsou pravoúhelny ku

$\left\{\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix}\right\}$ neboli ku $\left\{\begin{matrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{matrix}\right\}$. *Největší napětí tangencialná* τ', τ'', τ''' *jsou tedy pravoúhelna ku příslušným hlavním napětím* ν_1, ν_2, ν_3.

§ 9. **O případech zvláštních.** *a*) Dejme tomu, že absolutní člen rovnice (6) odpadá, totiž že

$$\nu_x \nu_y \nu_z - \nu_x \tau_x^2 - \nu_y \tau_y^2 - \nu_z \tau_z^2 + 2 \tau_x \tau_y \tau_z = 0;$$

tu rovná se nulle jedno z hlavních napětí, na př. ν_3; obě ostatní jsou pak kořeny rovnice

$$(19) \ldots\ldots \nu_h^2 - (\nu_x + \nu_y + \nu_z) \nu_h + \nu_y \nu_z + \nu_z \nu_x + \nu_x \nu_y - \tau_x^2 - \tau_y^2 - \tau_z^2 = 0.$$

Tento případ se namítá, jestliže ze šesti napětí ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z odpadají tři, jež mají různé přípony a nejsou ani vesměs normalná, ani vesměs tangencialná.

Jsou-li to dvě napětí normalná a jedno tangencialné, na př.

$$\nu_y = \nu_z = \tau_x = 0,$$

nabývá rovnice (19) tvaru

$$(19^a) \ldots\ldots\ldots \nu_h^2 - \nu_x \nu_h - \tau_y^2 - \tau_z^2 = 0;$$

jsou-li to dvě tangencialná a jedno normalné, na př.

$$\nu_x = \tau_y = \tau_z = 0,$$

máme

$$(19^b) \ldots\ldots\ldots \nu_h^2 - (\nu_y + \nu_z) \nu_h + \nu_y \nu_z - \tau_x^2 = 0.$$

Poslední z rovnic (10) ukazuje, že v tomto případě jest $\cos \gamma' = 0$ za každého γ, pročež přímky S všech napětí σ jsou obsaženy v rovině XY, t. j. v rovině obou hlavních napětí ν_1, ν_2 rozdílných od nully. Třetí poloosa ellipsoidu napiatosti rovná se nulle; ellipsoid mění se v e l l i p s u

$$\frac{x^2}{\nu_1^2} + \frac{y^2}{\nu_2^2} = 1;$$

plocha směrová mění se v k u ž e l o s e č k u

$$\frac{x^2}{\nu_1} + \frac{y^2}{\nu_2} = \pm k^2,$$

která jest buď ellipsa, buď se skládá ze dvou hyperbol o společných asymptotách.

b) Jestliže v rovnici (6) také součinitel první mocnosti veličiny neznámé ν_h rovná se nulle, totiž

$$\nu_y \nu_z + \nu_z \nu_x + \nu_x \nu_y - \tau_x^2 - \tau_y^2 - \tau_z^2 = 0,$$

pak rovnají se nulle dvě z hlavních napětí, na př. ν_2, ν_3, a třetí

$$(20) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \nu_1 = \nu_x + \nu_y + \nu_z.$$

bb) Případ tento namítá se zvláště, rovnají-li se nulle všecka napětí vyjímajíc jedno normalné, na př. ν_z; tu

$$\nu_1 = \nu_z.$$

Obě poslední z rovnic (10) dávají v tomto případě

$$\cos \beta' = 0, \quad \cos \gamma' = 0,$$

pročež

$$\cos \alpha' = \pm 1;$$

všecky přímky S sjednocují se tedy s osou S_1, a první z rovnic (10) dává

$$\sigma = \frac{\nu_1 \cos \alpha}{\cos \alpha'} = \pm \nu_1 \cos \alpha,$$

pročež

$$\nu = \nu_1 \cos^2 \alpha, \quad \tau = \pm \nu_1 \sin \alpha \cos \alpha = \pm \tfrac{1}{2} \nu_1 \sin 2\alpha.$$

Napětí τ nabývá největší hodnoty za $\alpha = 45^0$ rovnajíc se pak $\pm \frac{1}{2} \nu_1$.

Poněvadž tu dvě poloosy ellipsoidu napiatosti rovnají se nulle, mění se tento ellipsoid v p ř í m ý ú s e k.

c) Jsou-li jen všecka tangencialná napětí rovna nulle, nabývá rovnice (6) tvaru

$$(\nu_x - \nu_h)(\nu_y - \nu_h)(\nu_z - \nu_h) = 0,$$

pročež

$$\nu_1 = \nu_x, \quad \nu_2 = \nu_y, \quad \nu_3 = \nu_z.$$

Z rovnic (8) plyne pak na př. v příčině směru S_1:

$$A = (\nu_2 - \nu_1)(\nu_3 - \nu_1),$$
$$B = C = 0,$$

tak že dle (9*)

$$\cos \alpha = \pm 1, \quad \cos \beta = \cos \gamma = 0.$$

Napětí ν_x, ν_y, ν_z jsou tedy hlavními.

d) Rovnají-li se nulle všecka napětí vyjímajíc jedno tangencialné, na př. τ_x, nabývá rovnice (6) tvaru

$$\nu_h (\nu_h^2 - \tau_x^2) = 0.$$

Kořeny její jsou

$$\nu_1 = \tau_x, \quad \nu_2 = -\tau_x, \quad \nu_3 = 0.$$

Z rovnic (8) plyne tu o směrech S_1, S_2:

$$A = \nu_h^2 - \tau_x^2 = 0,$$
$$B = C = \nu_h^2 = \tau_x^2;$$

rovnice (9) dávají pak

$$\cos\alpha = 0, \quad \cos^2\beta = \cos^2\gamma = \tfrac{1}{2},$$

t. j. přímky S_1, S_2 rozpolují úhly os Y, Z. Ellipsoid napiatosti mění se tu v ellipsu danou rovnicí

$$x^2 + y^2 = \tau_x^2,$$

totiž v kružnici. Křivka směrová má rovnici

$$x^2 - y^2 = \pm k^2 \tau_x$$

a skládá se tedy ze dvou hyperbol o společných pravoúhelných asymptotách.

§ 10. **O prvcích přetvoření.** Bodem m tělesa ještě nepřetvořeného mysleme si přímku N a na ní bod p nekonečně blízký k m; znamenejme pak vzdálenost $\overline{mp}$ písmenem s. Působením sil zevnitřních přetvoří se těleso; body m, p nabudou jiných poloh m', p'. Znamenáme-li $\overline{m'p'} = s'$, vyjadřuje rozdíl $s' - s = \Delta s$ změnu délky prvku $\overline{mp}$ neboli roztažení linearné, a poměr

$$\frac{\Delta s}{s} = \lambda$$

této změny k délce původní zove se poměrným roztažením tělesa v bodě m přímky N. Jest-li $s' \gtrless s$, jest $\Delta s \gtrless 0$, totiž $\left\{\begin{matrix}\text{prodloužením}\\ \text{zkrácením}\end{matrix}\right\}$ prvku $\overline{mp}$, a poněvadž s pokládáme za veličinu prostou, jest pak $\lambda \gtrless 0$. Poměrné roztažení jest vůbec veličina konečná, leč v případech praktických vyjádřena vždy zlomkem malým. Jak patrno,

$$s' = s(1 + \lambda).$$

Vedle poměrného roztažení namítá se však změna ještě jiná. Mysleme si v nepřetvořeném tělese bodem m jakousi plochu Φ, jejíž normálou jest přímka N. Po deformaci nebude přímka $m'p'$ vůbec normálou plochy přetvořené Φ'; myslíme-li si pak v bodě m' tečnou rovinu plochy Φ', dále bodem p' přímku $p'q'$ pravoúhelnou k této tečné rovině, a seče-li přímka $p'q'$ onu tečnou rovinu v bodě q', ukazuje úsek $\overline{m'q'}$, oč při deformaci se

posunul prvek (m) plochy Φ proti bodu p nebo proti prvku plošnému (p), který si myslíme bodem p rovnoběžně k prvku (m). Poměr

$$\frac{\overline{m'q'}}{\overline{mp}} = \gamma$$

lineárného posunutí $\overline{m'q'}$ k původní vzdálenosti $\overline{mp}$ zove se pak poměrným posunutím tělesa v bodě m přímky N (neb i v bodě m plochy Φ).

Přímka $m'p'$ a normála $p'q'$ k oné tečné rovině svírají vespolek jistý úhel γ', o němž platí, že

$$\frac{\overline{m'q'}}{\overline{p'q'}} = \tan \gamma' \doteq \gamma' \text{*)}$$

(úhel γ' jest velmi malý); poněvadž pak i rozdíl úseků $\overline{p'q'}$ a $\overline{mp}$ jest velmi malý proti $\overline{mp}$, můžeme napsati velmi přibližně

$$\gamma' = \frac{\overline{m'q'}}{\overline{mp}} = \gamma,$$

t. j. *poměrným posunutím vyjádřena jest změna pravého úhlu přímky N a plochy Φ.*

Poněvadž $\overline{mp}$ jest prostá délka, $\overline{m'q'}$ pak, mohouc míti všeliký směr Q v tečné rovině plochy Φ', též za prostou veličinu pokládati se musí, *jest poměrné posunutí γ veličinou prostou.*

Mysleme si však v oné rovině tečné bodem m' dvě pravoúhelné osy X, Y a promítněme $\overline{m'q'}$ do obou os, čímž vzniknou průměty

$$\overline{m'q_x'} = \overline{m'q'} \cos XQ,$$
$$\overline{m'q_y'} = \overline{m'q'} \cos YQ;$$

tu zoveme poměry

$$\gamma_{(x)} = \frac{\overline{m'q_x'}}{\overline{mp}} = \gamma \cos XQ,$$
$$\gamma_{(y)} = \frac{\overline{m'q_y'}}{\overline{mp}} = \gamma \cos YQ$$

poměrnými posunutími tělesa v bodě m přímky N (neb i v bodě m plochy Φ) směrem X, Y. Tato posunutí jsou $\left\{\begin{matrix}\text{positivná}\\\text{negativná}\end{matrix}\right\}$, je-li úhel XQ, YQ $\left\{\begin{matrix}\text{ostrý}\\\text{tupý}\end{matrix}\right\}$, totiž shoduje-li se směr průmětů $\overline{m'q_x'}$, $\overline{m'q_y'}$ s $\left\{\begin{matrix}\text{positivným}\\\text{negativným}\end{matrix}\right\}$ směrem příslušné osy X, Y.

*) Tečka nad rovnítkem značí, že jde o rovnost toliko přibližnou.

§ 11. **O přetvoření tělesa v bodě daném.** Bodem m tělesa mysleme si nyní různé přímky N a na nich body p nekonečně blízké ku m; poměrnými roztaženími ve všelikých směrech $m\,p$ stanoveno bude přetvoření libovolného prvku tělesného, jejž si myslíme při bodu m. Vztahujme — jako v § 3. — bod m souřadnicemi x, y, z ku pravoúhelné soustavě souřadnicové $X\ Y\ Z$; nekonečně blízkému bodu p náležejí pak souřadnice

$$x' = x + dx, \qquad y' = y + dy, \qquad z' = z + dz.$$

Přetvořením změní se souřadnice bodu m o jisté hodnoty ξ, η, ζ; co se týče bodu p, budou změny jeho souřadnic tyto:

$$\begin{aligned}
\xi' &= \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz, \\
\eta' &= \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \eta}{\partial z} dz, \\
\zeta' &= \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy + \frac{\partial \zeta}{\partial z} dz.
\end{aligned}$$

Před deformací byly dx, dy, dz projekce úseku $\overline{m\,p}$ v osy X, Y, Z a tedy

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

délka téhož úseku; po deformaci budou projekce

$$dx + \xi' - \xi, \qquad dy + \eta' - \eta, \qquad dz + \zeta' - \zeta,$$

délka pak

$$ds + \Delta ds = ds\left(1 + \frac{\Delta ds}{ds}\right) = ds\,(1 + \lambda);$$

pročež

$$ds^2\,(1 + \lambda)^2 = (dx + \xi' - \xi)^2 + (dy + \eta' - \eta)^2 + (dz + \zeta' - \zeta)^2.$$

Nedbáme-li veličin malých druhého řádu, vychází z toho

$$\lambda = \frac{\xi' - \xi}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\eta' - \eta}{ds} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\zeta' - \zeta}{ds} \cdot \frac{dz}{ds}.$$

Svírá-li přímka $m\,p$ s osami X, Y, Z úhly α, β, γ, jest

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma;$$

užijeme-li toho a vložíme-li zároveň do výrazu veličiny λ hodnoty rozdílů $\xi' - \xi$, $\eta' - \eta$, $\zeta' - \zeta$ z rovnic svrchu položených, vyjde

$$\lambda = \frac{\partial \xi}{\partial x}\cos^2\alpha + \frac{\partial \eta}{\partial y}\cos^2\beta + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\cos^2\gamma$$
$$+\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}+\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\cos\beta\cos\gamma+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)\cos\gamma\cos\alpha$$
$$+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\cos\alpha\cos\beta.$$

V této rovnici znamená λ poměrné roztažení tělesa v bodě m libovolné přímky N, jež s osami X, Y, Z svírá úhly α, β, γ. Applikujme onu rovnici po řadě na přímky X', Y', Z', jež si myslíme bodem m stejnosměrně s osami X, Y, Z. Tu jest po řadě položiti

$$\alpha = 0,\ \beta = \gamma = \frac{\pi}{2},$$
$$\beta = 0,\ \gamma = \alpha = \frac{\pi}{2},$$
$$\gamma = 0,\ \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$$

a obdržíme

$$(21)\ \ldots\ldots\ldots\ \lambda_x = \frac{\partial \xi}{\partial x},\quad \lambda_y = \frac{\partial \eta}{\partial y},\quad \lambda_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

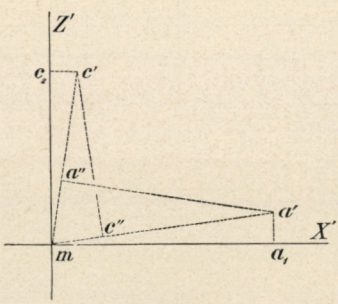
kde λ_x, λ_y, λ_z znamenají poměrná roztažení tělesa v bodě m přímek X', Y', Z'.

Budiž $\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$ bod, jejž si myslíme na přímce $\begin{Bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{Bmatrix}$ nekonečně blízko k bodu m, a který tedy vstupuje na místo bodu p obecné přímky N. Bod $\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$ má souřadnice

$$\begin{Bmatrix} x + d\,x, & y, & z \\ x, & y + d\,y, & z \\ x, & y, & z + d\,z \end{Bmatrix},$$

tak že při něm

$$\begin{Bmatrix} d\,y = d\,z = 0 \\ d\,z = d\,x = 0 \\ d\,x = d\,y = 0 \end{Bmatrix}.$$



Obr. 5.

Přihlédněme nejprve k bodům a, c; body tyto přetvořením tělesa změní svou polohu k bodu m a k osám X', Y', Z', jež si myslíme v neproměnném spojení s bodem m. Jsou-li a', c' (obr. 5.) pravoúhelné průměty nových poloh v rovinu $X'\,Z'$, dále $\begin{Bmatrix} a_1 \\ c_3 \end{Bmatrix}$ pravoúhelný

průmět bodu $\left\{\begin{matrix} a' \\ c' \end{matrix}\right\}$ v osu $\left\{\begin{matrix} X' \\ Z' \end{matrix}\right\}$, platí rovnost

$$\overline{a_1 a'} = \zeta' - \zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial x} d x,$$

$$\overline{c_3 c'} = \xi' - \xi = \frac{\partial \xi}{\partial z} d z$$

neboli

$$\frac{\overline{a_1 a'}}{d x} = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\overline{c_3 c'}}{d z} = \frac{\partial \xi}{\partial z}.$$

Leč

$$\frac{\overline{a_1 a'}}{d x} = \tan a_1 \, m \, a' \doteq \sphericalangle a_1 \, m \, a',$$

$$\frac{\overline{c_3 c'}}{d z} = \tan c' \, m \, c_3 \doteq \sphericalangle c' \, m \, c_3$$

a tedy

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = \sphericalangle a_1 \, m \, a' + \sphericalangle c' \, m \, c_3 = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle a' \, m \, c'.$$

Promítneme-li (obr. 5.) $\left\{\begin{matrix} a' \\ c' \end{matrix}\right\}$ pravoúhelně do přímky $\left\{\begin{matrix} m \, c' \\ m \, a' \end{matrix}\right\}$, a poznamenáme-li příslušný průmět písmenem $\left\{\begin{matrix} a'' \\ c'' \end{matrix}\right\}$, vyjádřeno jest poměrem

$$\left\{\begin{matrix} \frac{\overline{m \, a''}}{\overline{m \, a}} \\ \frac{\overline{m \, c''}}{\overline{m \, c}} \end{matrix}\right\} \text{ aneb i } \left\{\begin{matrix} \frac{\overline{m \, a''}}{\overline{m \, a'}} \\ \frac{\overline{m \, c''}}{\overline{m \, c'}} \end{matrix}\right\}$$

poměrné posunutí bodu m přímky $\left\{\begin{matrix} X' \\ Z' \end{matrix}\right\}$ směrem osy $\left\{\begin{matrix} Z' \\ X' \end{matrix}\right\}$, t. j. $\left\{\begin{matrix} \gamma_{x\,z} \\ \gamma_{z\,x} \end{matrix}\right\}$, nedbáme-li veličin malých řádu druhého;*) oba poměry jsou patrně rovny vyjadřujíce

$$\cos a' \, m \, c' = \sin \left(\frac{\pi}{2} - a' \, m \, c' \right) \doteq \frac{\pi}{2} - \sphericalangle a' \, m \, c',$$

totiž změnu pravého úhlu při ose Y'. Můžeme tedy napsati relaci

$$(22) \ldots\ldots\ldots\ldots \gamma_{x\,z} = \gamma_{z\,x} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z},$$

a obdobně vychází

*) V praxi dopouštějí se jen změny velmi malé.

ku (22).....
$$\begin{cases} \gamma_{yx} = \gamma_{xy} = \dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \gamma_{zy} = \gamma_{yz} = \dfrac{\partial \eta}{\partial z} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial y}. \end{cases}$$

Složky poměrných posunutí, označené týmiž příponami, ale položenými v pořádku opačném, jsou tedy vespolek rovny. Místo $\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$ pišme kratšeji $\begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{Bmatrix}$, kladouce za příponu místo písmen dvou souřadnicových os písmě osy třetí, totiž té, k nížto příslušné posunutí jest pravoúhelné.

Výraz poměrného roztažení λ v bodě m libovolné přímky N lze pak psáti takto:

$$(23).. \quad \lambda = \lambda_x \cos^2 \alpha + \lambda_y \cos^2 \beta + \lambda_z \cos^2 \gamma + \gamma_x \cos \beta \cos \gamma + \gamma_y \cos \gamma \cos \alpha + \gamma_z \cos \alpha \cos \beta.$$

Známe-li veličiny λ_x, λ_y, λ_z, γ_x, γ_y, γ_z, můžeme stanoviti poměrné roztažení λ v bodu m kterékoli přímky N.

Pokládáme-li — jako v § 3. — nekonečně malý úsek $\overline{m\,p}$ za tělesnou úhlopříčnu pravoúhelného rovnoběžnostěnu, jehož hrany jsou rovnoběžny s osami souřadnicovými, stanoví se oněmi šesti veličinami přetvoření tohoto rovnoběžnostěnu. Z rovnoběžnostěnu vzniká tak zase rovnoběžnostěn; hrany jeho, jež měly původně délky dx, dy, dz, přetvořením nabývají délek $dx(1+\lambda_x)$, $dy(1+\lambda_y)$, $dz(1+\lambda_z)$; úhly při těchto hranách, původně pravé, mění se přetvořením v $\frac{\pi}{2}-\gamma_x$, $\frac{\pi}{2}-\gamma_y$, $\frac{\pi}{2}-\gamma_z$.

Připomenutí. Přestávajíce na změně délek hran a změně pravých původně úhlů při hranách, nedbáme změn dalších, jež by byly vyjádřeny malými veličinami vyšších řádů; takovými změnami jsou: pootočení stěn v příslušných rovinách, odchýlení protějších stěn původně rovnoběžných a zkřivení stěn původně rovných.

Mysleme si nyní úseky $\overline{m\,p}$ v různých směrech leč vesměs o téže délce ds. Měřickým místem bodů p jest pak plocha kulová středu m a poloměru ds; v soustavě $X'\,Y'\,Z'$, jejíž osy jdou bodem m stejnosměrně s osami X, Y, Z, náleží jí rovnice

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

neboli

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1;$$

plocha tato omezuje kulový prvek, jehož deformaci vyšetřujme.

Jsou-li $\overline{m\,a}$, $\overline{m\,b}$, $\overline{m\,c}$ poloměry obsažené v positivných polovicích os X', Y', Z', $\overline{m\,p}$ pak kterýkoli jiný poloměr, budou po přetvoření $\overline{m'\,a'}$

$\overline{m' b'}$, $\overline{m' c'}$ vůbec kosoúhelny; souřadnice bodu p' (hrany rovnoběžnostěnu, jehož úhlopříčna tělesná jest $\overline{m' p'}$) vzhledem k osám $m' a'$, $m' b'$, $m' c'$ budou

$$d x' = d x (1 + \lambda_x), \quad d y' = d y (1 + \lambda_y), \quad d z' = d z (1 + \lambda_z),$$

tak že možno psáti:

$$d x = \frac{d x'}{1 + \lambda_x}, \quad d y = \frac{d y'}{1 + \lambda_y}, \quad d z = \frac{d z'}{1 + \lambda_z}.$$

Vložíme-li to v rovnici plochy kulové, obdržíme rovnici

$$\left[\frac{d x'}{d s (1 + \lambda_x)}\right]^2 + \left[\frac{d y'}{d s (1 + \lambda_y)}\right]^2 + \left[\frac{d z'}{d s (1 + \lambda_z)}\right]^2 = 1,$$

jež ukazuje, že kulový povrch tělíska přetvořuje se v povrch ellipsoidický; $\overline{m' a'}$, $\overline{m' b'}$, $\overline{m' c'}$ jsou tři sdružené poloměry ellipsoidu. Zoveme jej ellipsoidem přetvárným neboli deformačním; jím stanoveno jest přetvoření tělesa v bodě m všemi směry. Poněvadž za osy X', Y', Z' možno zvoliti kterékoli tři sdružené (vzájemně pravoúhelné) průměry plochy kulové, patrno, že z každé trojiny sdružených průměrů tělesného prvku kulového vznikají sdružené průměry prvku ellipsoidického.

Ellipsoid přetvárný má tři hlavní poloměry neboli poloosy $\overline{m' a'_0}$, $\overline{m' b'_0}$, $\overline{m' c'_0}$, které tedy tolikéž vznikly z určité trojiny pravoúhelných poloměrů $\overline{m a_0}$, $\overline{m b_0}$, $\overline{m c_0}$ koule. Rovnoběžnostěn sestrojený z hran $\overline{m a_0}$, $\overline{m b_0}$, $\overline{m c_0}$ zůstává tedy pravoúhelným i po deformaci; proto složky poměrných posunutí, náležející k těmto směrům, rovnají se nulle. Poměrná roztažení, jež náležejí ku směrům $m a_0$, $m b_0$, $m c_0$, zoveme roztaženími hlavními. Jedno z nich jest patrně maximum, jedno z obou ostatních jest minimum všelikých roztažení v příslušném bodě.

§ 12. **Kterak se stanoví roztažení hlavní.** Užijme k tomu výminky, že jsou to relativná maxima či minima všelikých roztažení v bodě m. Položme v rovnici (23), jež se týče libovolné pravoúhelné soustavy souřadnicové,

$$\lambda = \lambda (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

a pišme onu rovnici takto:

$$(\lambda_x - \lambda) \cos^2 \alpha + (\lambda_y - \lambda) \cos^2 \beta + (\lambda_z - \lambda) \cos^2 \gamma + \gamma_x \cos \beta \cos \gamma + \\ + \gamma_y \cos \gamma \cos \alpha + \gamma_z \cos \alpha \cos \beta = 0.$$

Maximum i minimum veličiny λ žádá, aby částečné derivace tohoto výrazu dle nezávislých proměnných, za které pokládejme $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ (nikoli α, β, γ), rovnaly se nulle; při derivování pokládati jest závislou proměnnou λ za konstantu, poněvadž hodnota její maximální či minimální se nemění nekonečně malou změnou proměnných nezávislých.

Tak nabýváme výminek

$$(24)\ \ldots\ \begin{cases} 2\,(\lambda_x - \lambda_h)\cos\alpha + \gamma_z \cos\beta + \gamma_y \cos\gamma = 0, \\ 2\,(\lambda_y - \lambda_h)\cos\beta + \gamma_x \cos\gamma + \gamma_z \cos\alpha = 0, \\ 2\,(\lambda_z - \lambda_h)\cos\gamma + \gamma_y \cos\alpha + \gamma_x \cos\beta = 0, \end{cases}$$

kde λ_h znamená roztažení hlavní.

Tyto rovnice shodují se však tvarem docela s rovnicemi (5) § 6. a vycházejí z těchto, položíme-li — vesměs s touže příponou — λ za ν, $\frac{1}{2}\gamma$ za τ; rovnice (24) vedou tedy k obdobné rovnici třetího stupně*)

$$(25)\ldots 4\,(\lambda_x - \lambda_h)\,(\lambda_y - \lambda_h)\,(\lambda_z - \lambda_h) - (\lambda_x - \lambda_h)\,\gamma_x^2 - (\lambda_y - \lambda_h)\,\gamma_y^2 - (\lambda_z - \lambda_h)\,\gamma_z^2 + \gamma_x\,\gamma_y\,\gamma_z = 0,$$

jejíž kořeny jsou žádaná hlavní roztažení λ_1, λ_2, λ_3. Směry jejich N_1, N_2, N_3 vycházejí z rovnic (24), jež uvésti lze ve tvar rovnic (8) a (9) § 6.

Volíme-li přímky N_1, N_2, N_3 za osy souřadnicové, nabývá rovnice (23) tvaru:

$$(26)\ldots\ldots\ldots \lambda = \lambda_1 \cos^2\alpha + \lambda_2 \cos^2\beta + \lambda_3 \cos^2\gamma.$$

Z rovnice (26) vychází — tak jako z obdobné rovnice (12) § 6. — že součet roztažení λ ve třech vzájemně pravoúhelných směrech jest stálý.

Přihlédněme k tomu, co stálý tento součet znamená. Obsah $dx\,dy\,dz$ pravoúhelného rovnoběžnostěnu přetvořením tělesa nabude hodnoty

$$dx\,(1+\lambda_x)\,.\,dy\,(1+\lambda_y)\,.\,dz\,(1+\lambda_z) = dx\,dy\,dz\,(1+\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z),$$

nedbáme-li malých veličin řádů vyšších. Součtem

$$\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z = \omega$$

vyjadřuje se tedy poměrná změna objemová.

Co se týče největších posunutí γ, dospíváme — postupujíce jako v § 8. — k tomu, že se vyskytují v šesti rovinách, jež obsahují každá jednu z přímek N_1, N_2, N_3 a rozpolují úhly obou ostatních přímek; největší tato posunutí mají hodnoty

$$(27)\ldots \gamma' = \pm(\lambda_2 - \lambda_3),\quad \gamma'' = \pm(\lambda_3 - \lambda_1),\quad \gamma''' = \pm(\lambda_1 - \lambda_2).$$

§ 13. **Jak se k sobě mají napětí a přetvoření.** Souvislost tato stanoví se zkouškami. Pravoúhelný rovnoběžnostěn, jehož hmota jest stejnorodá, mějž hrany zdéli a, b, c. V každou z obou protějších stěn obsahu $a\,b$ nechť působí síla N pravoúhelně ku stěně; obě síly mějte směry protivné,

*) Viz rovnici (6).

tak aby vespolek byly v rovnováze. Opatřeno-li, aby působení sil N se rozdělovalo r o v n o m ě r n ě po příslušných stěnách, máme — nedbajíce vlastní váhy rovnoběžnostěnu — ve všech bodech stěn $a\,b$ jakož i ve všech bodech průřezů s nimi rovnoběžných napětí

$$v = \frac{N}{a\,b}.$$

Zkouškami v této příčině konanými shledává se, jak následuje.

Jest-li síla N $\left\{\begin{matrix}\text{tahem, zvětší}\\ \text{tlakem, zmenší}\end{matrix}\right\}$ se rozměr c, zároveň pak se $\left\{\begin{matrix}\text{zmenší}\\ \text{zvětší}\end{matrix}\right\}$ rozměry a, b, tyto však mnohem méně než onen. Jsou-li Δc, Δb, Δa délkové změny příslušných hran, máme poměrná roztažení

$$\lambda_c = \frac{\Delta c}{c}, \quad \lambda_b = \frac{\Delta b}{b}, \quad \lambda_a = \frac{\Delta a}{a}.$$ *)

Poměrné roztažení λ_c má tedy znaménko souhlasné s napětím v (neboli se silou N); λ_b, λ_a mají znaménka protivná a jsou co do prostě hodnoty značně menší než λ_c.

Zkoušky v této příčině konané ukazují dále, že p ř i j i s t ý c h l á t k á c h p o m ě r n á r o z t a ž e n í λ_c, λ_b, λ_a p o j i s t o u m e z j s o u d o s t i ú m ě r n á k n a p ě t í v (neb i k síle N), tak že možno klásti prakticky přibližně

$$\lambda_c = \frac{v}{E}, \quad \lambda_b = -\frac{\lambda_c}{m_2}, \quad \lambda_a = -\frac{\lambda_c}{m_1},$$

kde E, m jsou konstanty — při různých látkách ovšem rozličné.

Konstanta E zove se m o d u l e m p r u ž n o s t i v t a h u či t l a k u; má obecně jinou hodnotu v tahu, jinou v tlaku, větším dílem brává se však jistá hodnota střední pro tah i tlak. Je to veličina prostá a v podstatě téhož rázu jako v (λ jest poměr dvou délek). Reciproká hodnota α modulu E jest s o u č i n i t e l r o z t a ž i t e l n o s t i hmoty napětím.**)

Mez, po kterou platí dosti přibližně úměrnost vyjádřená rovnicemi svrchu položenými, zoveme m e z í ú m ě r n o s t i; při železe kujném, oceli a dřevě shoduje se tato mez dosti s m e z í p r u ž n o s t i.***)

*) Definujíce poměrné roztažení, přihlíželi jsme k linearným p r v k ů m, tedy k úsekům n e k o n e č n ě m a l ý m. Zde však můžeme vycházeti od konečných délek a, b, c, poněvadž všecky jejich prvky mají se v podstatě stejně.

**) V novější době někteří auktoři zamítají pojem modulu pružnosti jakožto příliš hledaný, nenázorný; místo něho užívají součinitele α, jenž vyjadřuje změnu délkové jedničky, způsobenou napětím rovným jedničce silové. Pojem součinitele roztažitelnosti jest ovšem bližší a názornější; leč nepřisuzujeme této reformě zvláštní důležitosti a zůstáváme při modulu pružnosti, kteryžto bývá vyjádřen čísly celistvými (součinitel α zlomky).

***) Zákon úměrnosti mezi napětími a příslušnými roztaženími vyjádřil nejprve H o o k e (1679) slovy „ut tensio sic vis“. Jsou však látky prakticky důležité, jež zákonem Hookovým se neřídí.

Konstanty E, m, o nichžto svrchu dotčeno, že jsou při různých látkách rozličné, mohou se měniti i v témž tělese. Mění-li se bod od bodu, soudíme, že částice tělesa jsou okolo různých bodů skupeny rozličným spůsobem, a říkáme, že těleso jest n e s t e j n o r o d é. V tělese s t e j n o r o d é m jsou konstanty E, m ve všech bodech stejné, mohou však míti v různých směrech hodnoty rozličné, t. j. částice mohou býti v různých směrech skupeny rozličně. Možno-li si mysliti bodem tělesa rovinu tak, že ku směrům vzhledem k této rovině souměrným náležejí tytéž hodnoty E, m, zoveme takovou rovinu h l a v n í r o v i n o u p r u ž n o s t i; průsečnice dvou hlavních rovin jest o s o u p r u ž n o s t i. Kdybychom hodnoty E, m vyjádřili délkami a přenesli tyto délky od bodu daného v příslušných směrech, tu by koncové body přenesených délek vyplňovaly jisté plochy, jež zoveme p l o c h a m i p r u ž n o s t i. Roviny symmetrie a osy těchto ploch jsou hlavními rovinami a osami pružnosti daného tělesa.

Jsou-li konstanty E, m také ve všech směrech stejné, jest plocha pružnosti k u l o v á; každá $\left\{\begin{matrix}\text{přímka}\\ \text{rovina}\end{matrix}\right\}$ bodem daným jdoucí jest $\left\{\begin{matrix}\text{osou}\\ \text{hlavní rovinou}\end{matrix}\right\}$ pružnosti.

Těleso takové zoveme i s o t r o p ý m neboli t ě l e s e m s t e j n é p r u ž n o s t i;*) jinak jest těleso a n i s o t r o p é.

Jest-li plocha pružnosti r o t a č n í, má těleso jednu osu a nesčíslné hlavní roviny pružnosti (roviny obsahující osu). Taková tělesa zoveme j e d n o o s ý m i.**) Jiná tělesa mají tři osy a tři hlavní roviny pružnosti a zovou se t r o j o s ý m i.***)

Přihlížejme dále výhradně k tělesům i s o t r o p ý m.

Myslíme-li si bodem tělesa isotropého pravoúhelnou soustavu os X, Y, Z, a působí-li v bodu tom toliko napětí ν_z (tak že ν_x, ν_y a všecka tangencialná napětí rovnají se nulle), jest ν_z dle § 9. *bb*) napětím hlavním, na př. ν_1. Dle toho, co svrchu pověděno o zkouškách pružnosti pravoúhelného rovnoběžnostěnu, máme

$$(28) \ldots\ldots \lambda_1 = \frac{\nu_1}{E}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{\lambda_1}{m} = -\frac{\nu_1}{mE};$$

konstanty E, m jsou tu ve všech směrech tytéž.

Obdobné rovnice možno napsati, působí-li toliko napětí $\left\{\begin{matrix}\nu_y\\ \nu_x\end{matrix}\right\}$, a jsou-li veškerá ostatní napětí rovna nulle.

Působí-li všecka tři normalná napětí ν_x, ν_y, ν_z (napětí tangencialná buďtež však zase rovna nulle), jsou ona dle § 9. *c*) hlavními (ν_1, ν_2, ν_3);

*) Za isotropé lze pokládati dosti přibližně l i t é k o v y.

**) Ž e l e z o k u j n é, vůbec k o v y v l á k n i t é h o s l o h u, přibližně d ř e v o.

***) D ř e v o v m e n š í c h k u s e c h (hlavními jsou tu: směr přirozených vláken, směr radiálný — pravoúhelně k t. zv. letům — a směr tangencialný — tečný k letům), válcovaný plech a j.

tu lze pokládati, že roztažení, každým jednotlivým napětím ve směrech os X, Y, Z vyvozená, prostě se sčítají,*) pročež

KNIHOVNA A D AKADEMICKÉHO DOMU V PRAZE

$$(29) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{E}\left(\nu_1 - \dfrac{\nu_2+\nu_3}{m}\right), \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{E}\left(\nu_2 - \dfrac{\nu_3+\nu_1}{m}\right), \\ \lambda_3 = \dfrac{1}{E}\left(\nu_3 - \dfrac{\nu_1+\nu_2}{m}\right). \end{cases}$$

Sečtením vychází

$$E\,(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) = \left(1-\frac{2}{m}\right)(\nu_1+\nu_2+\nu_3),$$

kde

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = \omega$$

jest poměrná změna objemová. Proto

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3 = \frac{m}{m-2}\,E\,\omega.$$

Pišme prvou z rovnic (29) takto:

$$m\,\nu_1 - \nu_2 - \nu_3 = m\,E\,\lambda_1;$$

z obou posléze položených rovnic vychází sečtením a řešením dle ν_1 rovnice

$$\nu_1 = \frac{m}{m+1}\,E\left(\lambda_1+\frac{\omega}{m-2}\right).$$

Poznamenejme kratšeji

$$(30) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{2}\,\frac{m}{m+1}\,E = G$$

MAJETEK ČESKO-UKR. KOMITETU V Č.S.R.

a můžeme pak psáti

$$(31) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \nu_1 = 2\,G\left(\lambda_1+\dfrac{\omega}{m-2}\right), \\ \nu_2 = 2\,G\left(\lambda_2+\dfrac{\omega}{m-2}\right), \\ \nu_3 = 2\,G\left(\lambda_3+\dfrac{\omega}{m-2}\right). \end{cases}$$

Lze dovoditi, že rovnice (29) a tedy i (31) mají také platnost, nerovnají-li se tangencialná napětí nulle, nejsou-li tedy ν_x, ν_y, ν_z napětími

*) Zásada superposice.

hlavními. Dle rovnice (12) jest totiž napětí normalné ν ve směru N, který se směry hlavních napětí svírá úhly α, β, γ, dáno výrazem

$$\nu = \nu_1 \cos^2 \alpha + \nu_2 \cos^2 \beta + \nu_3 \cos^2 \gamma$$

a tedy

$$\nu = 2\,G\left(\lambda_1 \cos^2 \alpha + \lambda_2 \cos^2 \beta + \lambda_3 \cos^2 \gamma + \frac{\omega}{m-2}\right),$$

pročež dle rovnice (26)

$$\nu = 2\,G\left(\lambda + \frac{\omega}{m-2}\right).$$

Sjednocuje-li se tedy N po řadě s X, Y, Z, máme

$$\nu_x = 2\,G\left(\lambda_x + \frac{\omega}{m-2}\right),$$

$$\nu_y = 2\,G\left(\lambda_y + \frac{\omega}{m-2}\right),$$

$$\nu_z = 2\,G\left(\lambda_z + \frac{\omega}{m-2}\right);$$

vložíme-li sem zase

$$\omega = \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z,$$

$$G = \frac{1}{2}\,\frac{m}{m+1}\,E,$$

a řešíme-li rovnice ty dle λ_x, λ_y, λ_z, vychází

$$(29^a) \quad \begin{cases} \lambda_x = \dfrac{1}{E}\left(\nu_x - \dfrac{\nu_y + \nu_z}{m}\right), \\ \lambda_y = \dfrac{1}{E}\left(\nu_y - \dfrac{\nu_z + \nu_x}{m}\right), \\ \lambda_z = \dfrac{1}{E}\left(\nu_z - \dfrac{\nu_x + \nu_y}{m}\right). \end{cases}$$

Roztažení λ_x, λ_y, λ_z jsou tedy nezávislá na tangencialných napětích; což platí ovšem i ve zvláštním případě, když $\nu_y = \nu_z = 0$. V tomto případě máme

$$(28^a) \quad \lambda_x = \frac{\nu_x}{E}, \quad \lambda_y = \lambda_z = -\frac{\lambda_x}{m} = -\frac{\nu_x}{m\,E}.$$

Přihlédněme k tomu, co znamená konstanta G zavedená rovnicí (30). Svrchu odvodili jsme z rovnic (29) rovnice (31); poněvadž, jak nyní dokázáno, rovnice (29) platí nejen o hlavních ale vůbec o každých třech vzájemně pravoúhelných směrech X, Y, Z, platí každá z rovnic (31) o všelikém směru N. Tedy vůbec

$$\nu = 2\,G\left(\lambda + \frac{\omega}{m-2}\right).$$

Vložíme-li sem za λ hodnotu z rovnice (23), a užijeme-li relace

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

vztahujíce směr N odchylkami α, β, γ k libovolné soustavě pravoúhelné, nabývá výraz ν tvaru

$$\nu = 2G\left[\lambda_x \cos^2 \alpha + \lambda_y \cos^2 \beta + \lambda_z \cos^2 \gamma + \gamma_x \cos \beta \cos \gamma + \gamma_y \cos \gamma \cos \alpha + \gamma_z \cos \alpha \cos \beta + \frac{\omega}{m-2}(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)\right].$$

Přirovnejme to k rovnici (4)

$$\nu = \nu_x \cos^2 \alpha + \nu_y \cos^2 \beta + \nu_z \cos^2 \gamma + 2\tau_x \cos \beta \cos \gamma + 2\tau_y \cos \gamma \cos \alpha + 2\tau_z \cos \alpha \cos \beta,$$

přihlížejíce zároveň k rovnicím (31); poněvadž obě přirovnávané rovnice platí o všelikém směru N, vyplývá z nich

$$(32) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad G = \frac{\tau_x}{\gamma_x} = \frac{\tau_y}{\gamma_y} = \frac{\tau_z}{\gamma_z},$$

což jsou rovnice obdobné k první z rovnic (28). Konstanta G zove se modulem pružnosti v posouvání neboli ve smyku.*)

Co se týče konstanty m, ustanovil Poisson theoreticky na základě určité hypothese o silách molekularných, že $m = 4$ při všelikých tělesech isotropých. Zkoušky v té příčině konané daly však větším dílem hodnoty poněkud menší než 4 a při různých látkách rozličné. Nechť neshoda ta pochodí z nedokonalosti zkoušek či z toho, že zkoušená tělesa nebyla přesně isotropá, lze zatím říci, že při tělesech obyčejně za isotropá pokládaných konstanta Poissonova $m = 3$ až 4. —

Směry S_1, S_2, S_3 hlavních napětí stanovili jsme v § 5. výminkou, že

$$\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0;$$

jak ukazují rovnice (32), jsou pak i

$$\gamma_x = \gamma_y = \gamma_z = 0,$$

což jest výminka, za kterou λ_x, λ_y, λ_z jsou hlavními roztaženími. Z toho plyne, že *v tělesech isotropých směry hlavních roztažení se směry*

*) Rovnice (28) vázány jsou dvěma výminkami: *a*) nesmí býti přestoupena mez úměrnosti, *b*) napětí normalná ve směrech pravoúhelných X, Y musejí se rovnati nulle. Rovnice (32) vázány jsou jen výminkou *a*); souvislost mezi τ a γ nezávisí na jiných napětích.

hlavních napětí se srovnávají neboli že *ellipsoid přetvárný a ellipsoid napiatosti mají společné (nekonečné) osy a hlavní roviny.*

§ 14. **Kterak obecně stanoviti hlavní roztažení v daném bodě tělesa isotropého.** Buďtež x, y, z souřadnice bodu m, dále ξ, η, ζ změny těchto souřadnic vzniklé přetvořením tělesa; poněvadž rovnice (31) platí v kterékoli pravoúhelné soustavě $X\ Y\ Z$, možno, hledíc k rovnicím (21), psáti:

$$(33)\quad \begin{cases} \nu_x = 2G\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\omega}{m-2}\right), \\ \nu_y = 2G\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\omega}{m-2}\right), \\ \nu_z = 2G\left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial z} + \dfrac{\omega}{m-2}\right), \end{cases}$$

kde znamená

$$\omega = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z};$$

z rovnic (32) pak plyne, hledíc k rovnicím (22),

$$(34)\quad \begin{cases} \tau_x = G\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial z} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \\ \tau_y = G\left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial \xi}{\partial z}\right), \\ \tau_z = G\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right). \end{cases}$$

Z těchto šesti rovnic lze odvoditi derivace napětí ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z dle x, y, z a vložiti jich hodnoty do rovnic (2), čímž vzniknou tři simultanné rovnice o částečných differencialných poměrech druhého řádu; integrováním těchto rovnic stanoví se pak ξ, η, ζ jakožto funkce nezávislých proměnných x, y, z. Integrováním vstoupí do rovnic konstanty či obecně funkce těch dvou proměnných, dle kterých se právě neintegruje; funkce tyto nutno stanoviti z v ý m i n e k p o v r c h o v ý c h plynoucích jednak z toho, že složky $\sigma \cos \alpha'$, $\sigma \cos \beta'$, $\sigma \cos \gamma'$, dané rovnicemi (3), mají v povrchových bodech tělesa známé (zevnitřními silami stanovené) hodnoty, jednak z toho, že v bodech, v nichž těleso dané s jinými (podporami, opěrami) se stýká, změny ξ, η, ζ buď jsou známy, buď jsou v určité souvislosti s příslušnými napětími (výminky podporové).

Stanoveny-li ξ, η, ζ jako funkce souřadnic x, y, z, vycházejí z rovnic (33) a (34) napětí ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z, z rovnice (6) pak hlavní napětí ν_1, ν_2, ν_3 a konečně z rovnic (29) hlavní roztažení λ_1, λ_2, λ_3. Také možno z rovnic (21) a (22) stanoviti roztažení λ_x, λ_y, λ_z i posunutí γ_x, γ_y, γ_z a konečně z rovnice (25) roztažení hlavní λ_1, λ_2, λ_3.

Obecné toto řešení úlohy jest však větším dílem velmi obtížné a dává výsledky komplikované, nespůsobilé k užívání praktickému. Proto se ho pravidlem neužívá a postupuje se na základě hypothesí srovnávajících se pokud možno se skutečností.

§ 15. **O výminkách bezpečné pevnosti. O idealných napětích hlavních.** Praktická úloha nauky o pružnosti a pevnosti jest tato: stanoviti jisté rozměry tělesa, po případě jisté zevnitřní síly tak, aby přetvoření tělesa v nižádném bodě nepřestoupilo meze, kterou učí znáti zkušenost. Přetvoření tělesa v libovolném bodě určeno jest roztaženími λ, která v tom bodě se jeví rozličnými směry. Mezi těmito roztaženími bývají obecně positivná (vlastní roztažení) i negativná (stlačení); znamenejme ona λ', prosté hodnoty těchto λ''. Pak nesmí žádné $\left\{\begin{matrix}\lambda' \\ \lambda''\end{matrix}\right\}$ vystoupiti nad jistou krajní dovolenou hodnotu $\left\{\begin{matrix}\lambda_0' \\ \lambda_0''\end{matrix}\right\}$. Hodnoty λ_0', λ_0'' jsou vůbec rozdílné; každá z nich jest však v isotropém tělese ve všech směrech táž. Nutno tedy vyhověti výminkám

$$\max \lambda' \leqq \lambda_0', \quad \max \lambda'' \leqq \lambda_0''.$$

Jakož jsme seznali v § 11., jest $\max \lambda'$ jedno z roztažení hlavních; $\max \lambda''$ pak rovná se prosté hodnotě jednoho z obou ostatních hlavních roztažení. Mají-li všecka tři hlavní roztažení znaménko stejné, což pak dle rovnice (26) platí o veškerých roztaženích v daném bodě, odpadá jedna z výminek svrchu položených. Zoveme je v ý m i n k a m i b e z p e č n é p e v n o s t i; žádají tedy obecně, aby prostá hodnota žádného z hlavních roztažení nevystoupila nad krajní d o v o l e n o u hodnotu λ_0', λ_0'' roztažení či stlačení.

Působí-li ze šesti složek napětí jen jedna normalná na př. ν_z (§ 9. *bb*), jest $\nu_1 = \nu_z$, $\nu_2 = \nu_3 = 0$; pak (§ 13.) platí rovnice (28)

$$\lambda_1 = \frac{\nu_z}{E}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{\lambda_1}{m};$$

jest-li $\nu_1 \left\{\begin{matrix}\text{tah} \\ \text{tlak}\end{matrix}\right\}$, máme výminky bezpečné pevnosti

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 \leqq \lambda_0', & \frac{\lambda_1}{m} \leqq \lambda_0'' \\ -\lambda_1 \leqq \lambda_0'', & -\frac{\lambda_1}{m} \leqq \lambda_0' \end{matrix}\right\}.$$

Pravidlem neliší se veličiny λ_0', λ_0'' tou měrou, aby jedna z nich byla více než m-krát větší než druhá; tu stačí přihlížeti jen k první z obou výminek.

Znásobíme-li obě strany modulem E, můžeme psáti

$$\left.\begin{matrix} \nu_1 \leqq E\,\lambda_0' \\ -\nu_1 \leqq E\,\lambda_0'' \end{matrix}\right\}.$$

K určité vrchní mezi $\left\{\begin{matrix}\lambda_0' \text{ roztažení} \\ \lambda_0'' \text{ stlačení}\end{matrix}\right\}$ náleží určitá vrchní mez $\left\{\begin{matrix}E\,\lambda_0' \\ E\,\lambda_0''\end{matrix}\right\}$ prosté hodnoty napětí v $\left\{\begin{matrix}\text{tahu} \\ \text{tlaku}\end{matrix}\right\}$; znamenejme ji $\left\{\begin{matrix}k' \\ k''\end{matrix}\right\}$ a nazývejme

dovoleným namáháním v $\left\{\begin{matrix}\text{tahu} \\ \text{tlaku}\end{matrix}\right\}$.

Ve všech ostatních případech, kde dvě z hlavních napětí se nerovnají nulle, nejsou ν_1 a λ_1, ν_2 a λ_2, ν_3 a λ_3 prostě úměrny; každé z hlavních roztažení jest funkcí všech tří hlavních napětí, jak ukazují rovnice (29). Pokud však jde o hodnotu jednoho kteréhokoli z hlavních roztažení, ku př. λ_1, lze si vždy pomysliti určité napětí, které působíc směrem onoho hlavního roztažení by samo o sobě (t. j. kdyby obě ostatní hlavní napětí ν_2, ν_3 jako svrchu se rovnala nulle) vyvodilo ono hlavní roztažení λ_1. Znamenáme-li je ν_I, potřebí, aby

$$\nu_I = E\,\lambda_1.$$

Obdobně položme

$$\nu_{II} = E\,\lambda_2,$$
$$\nu_{III} = E\,\lambda_3.$$

Napětí ν_I, ν_{II}, ν_{III} zoveme idealnými napětími hlavními, a výminky bezpečné pevnosti lze vysloviti též takto: *Prostá hodnota žádného z idealních napětí hlavních nesmí vystoupiti nad dovolené namáhání v tahu, po případě v tlaku.*

§ 16. **O součinitelích pevnosti. O namáhání opětovaném. Kterak se určuje namáhání dovolené.** Mysleme si případ uvažovaný již v § 15., kde z hlavních napětí ν_1, ν_2, ν_3 obě poslední rovnají se nulle, a dejme tomu, že ν_1 nenáhle vzrůstá až ku porušení celistvosti tělesa. Bezprostředně před porušením — na mezi pevnosti — má ν_1 prostou hodnotu $\varkappa$, kterou zoveme namáháním na mezi pevnosti neb i součinitelem pevnosti a to v tahu ($\varkappa'$) či v tlaku ($\varkappa''$). Jestliže napětí ν_1, jehožto prostá hodnota nechť jest menší než $\varkappa$, působí bez proměny, nenastává porušení; jestliže však napětí $\nu_1 = \varepsilon'$ klesajíc vždy k jisté menší hodnotě ε napořád se opětuje, nastává porušení po jistém počtu takových změn. Zkoušky v té příčině vykonané*) ukázaly, že počet ϑ změn, jímž těleso se porušuje, závisí na obou mezích ε, ε' napětí, tedy

$$\vartheta = f(\varepsilon, \varepsilon')$$

*) Wöhlerem, Spangenbergem, Bauschingerem, Bakerem a j.

a to tak, že za určité $\left\{\begin{matrix}\text{spodní}\\ \text{vrchní}\end{matrix}\right\}$ meze $\left\{\begin{matrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{matrix}\right\}$ jest ϑ tím větší, čím jest hodnota $\left\{\begin{matrix}\varepsilon' \text{ menší}\\ \varepsilon \text{ větší}\end{matrix}\right\}$, tedy *za stálé jedné meze jest ϑ tím větší, čím méně obě meze se liší.*

Zvolena-li určitá spodní mez ε, a snižujeme-li mez vrchní ε', roste tedy ϑ víc a více; konečně vzroste tou měrou, že přestupuje počet změn, jež vůbec mohou v praxi se namítnouti po čas trvání konstrukce stavebné či strojnické, k níž dané těleso náleží. Vrchní mez ε', za které se to děje, nazývejme součinitelem pevnosti v opětovaném tahu či tlaku*) a znamenejme $\varkappa_\varepsilon$; příponou jest naznačena spodní mez, na kterou opětující se napětí po každé klesá. Jest-li spodní mez ε rovna nulle, máme součinitele $\varkappa_0$ pevnosti v pomíjejícím tahu či tlaku**); mají-li obě meze znaménka protivná — případ to zvláště nepříznivý — jde o pevnost ve střídavém tahu i tlaku. Jsou-li v tomto případě prosté hodnoty obou mezí ε, ε' rovny, máme pevnost $\varkappa_{-\varkappa}$ nebo kratšeji $\varkappa^{\pm}$ v rovném tahu i tlaku.***)

Jde o to, bychom vyjádřili veličinu $\varkappa_\varepsilon$ pohodlným výrazem, který by se shodoval s výsledky zkoušek.

a) Namítá-li se výhradně tah či výhradně tlak, položme rozdíl

$$\varkappa_\varepsilon - \varepsilon = \delta,$$

kde $\varkappa_\varepsilon$, ε, δ nechť znamenají hodnoty prosté. Dle zkoušek jest $\varkappa_\varepsilon$ tím menší, čím větší jest δ; krajní hodnoty součinitele $\varkappa_\varepsilon$ jsou $\varkappa$ (pevnost za stálého napětí) a $\varkappa_0$ (pevnost v pomíjejícím tahu či tlaku) a to tak, že

jest-li $\varepsilon = \emptyset$, platí rovnost $\varkappa_\varepsilon = \varkappa_0 = \delta$, a
„ $\delta = \emptyset$, „ „ $\varkappa_\varepsilon = \varepsilon = \varkappa$.

Položme

$$\varkappa_\varepsilon = \beta\,\delta,$$

kde jest β neznámý zatím výraz, který musí hověti výminkám svrchu položeným, totiž

za $\delta = \emptyset$ musí $\beta = \infty$, poněvadž $\varkappa_\varepsilon = \varkappa > \emptyset$,
„ $\delta = \varkappa_0$ „ $\beta = 1$, „ $\varkappa_\varepsilon = \varkappa_0$.

Těmto výminkám hoví a zároveň s výsledky zkoušek dobře se srovnává Launhardtův výraz

$$\beta = \frac{\varkappa - \varkappa_0}{\varkappa - \varkappa_\varepsilon},$$

*) Arbeitsfestigkeit dle Launhardta.
**) Ursprungsfestigkeit dle Launhardta.
***) Schwingungsfestigkeit dle Weyraucha.

tak že možno položiti

$$\varkappa_\varepsilon = \frac{\varkappa - \varkappa_0}{\varkappa - \varkappa_\varepsilon}(\varkappa_\varepsilon - \varepsilon)$$

aneb, upravíme-li náležitě,

$$\varkappa_\varepsilon = \varkappa_0\left(1 + \frac{\varkappa - \varkappa_0}{\varkappa_0}\frac{\varepsilon}{\varkappa_\varepsilon}\right).$$

Poněvadž

$$\frac{\varepsilon}{\varkappa_\varepsilon} = \frac{\min \nu}{\max \nu},$$

kteryžto poměr znamenejme krátce písmenem ψ, vychází konečně

$$(35) \ldots\ldots\ldots\ldots \varkappa_\varepsilon = \varkappa_0\left(1 + \frac{\varkappa - \varkappa_0}{\varkappa_0}\psi\right).$$

b) Jsou-li meze, v nichžto napětí se mění, znaménka protivného, tak že s e s t ř í d á t a h s t l a k e m, znamenejme písmeny ε, $\varkappa_\varepsilon$ h o d n o t y p r o s t é; $\varkappa_\varepsilon$ budiž větší z obou. Tu lze položiti

$$\delta = \varepsilon + \varkappa_\varepsilon,$$
$$\varkappa_\varepsilon = \beta\,\delta.$$

Za $\varepsilon = 0$ jest $\varkappa_\varepsilon = \varkappa_0 = \delta$,

„ $\varepsilon = \varkappa^+$ „ $\varkappa_\varepsilon = \varkappa^+ = \frac{\delta}{2}$.

Výraz β musí tedy hověti výminkám

$$\varkappa_\varepsilon = \varkappa_0, \quad \beta = 1,$$
$$\varkappa_\varepsilon = \varkappa^+, \quad \beta = \frac{1}{2}.$$

Oběma hoví

$$\beta = \frac{\varkappa_0 - \varkappa^+}{2\,\varkappa_0 - \varkappa^+ - \varkappa_\varepsilon},$$

tak že

$$\varkappa_\varepsilon = \frac{\varkappa_0 - \varkappa^+}{2\,\varkappa_0 - \varkappa^+ - \varkappa_\varepsilon}(\varepsilon + \varkappa_\varepsilon),$$

z čehož upravením plyne výraz W e y r a u c h ů v

$$(36) \ldots\ldots\ldots\ldots \varkappa_\varepsilon = \varkappa_0\left(1 + \frac{\varkappa_0 - \varkappa^+}{\varkappa_0}\psi\right),$$

kde zase

$$\psi = \frac{\min \nu}{\max \nu}$$

jest poměr — v tomto případě negativný — obou mezí napětí.

Rovnicemi (35) a (36) odvozuje se z hodnot $\varkappa$, $\varkappa_0$, $\varkappa^+$, zkouškami stanovených, hodnota $\varkappa_\varepsilon$, dán-li poměr ψ napětí nejmenšího k největšímu.

Přihlédněme k tak zvanému dovolenému namáhání (§ 15.) a dejme nejprve tomu, že jde o napětí stálé. Namáhání dovolené musí býti nejen přiměřeně menší než součinitel pevnosti $\varkappa$ (aby vyloučeno bylo porušení celistvosti tělesa) ale i menší než prostá hodnota napětí na mezi pružnosti (aby vyloučeno bylo značnější trvalé přetvoření). Obyčejně se klade za dovolené namáhání jistý díl součinitele $\varkappa$. Znamenáme-li dovolené namáhání písmenem k (k' v tahu, k'' v tlaku), platí tedy rovnice

$$k = \frac{\varkappa}{\mu},$$

kde μ jest tak zvaná míra bezpečnosti.

Volíce míru bezpečnosti přihlížíme k podstatným okolnostem, jako jsou: fysikalné vlastnosti látky — čas, jak dlouho má konstrukce trvati (konstrukce zatímná vymáhá menší míry bezpečnosti než trvalá) — jak působí síly zevnitřní (jest-li působení klidné či neklidné, namítají-li se rázy, otřásání) — spolehlivost a přesnost výpočtu sil působících v jednotlivé díly konstrukce atd.

Jde-li o napětí proměnné, nutno klásti součinitele $\varkappa_\varepsilon$ místo $\varkappa$.

Přihlédněme na př. k železu kujnému svářkovému.

V případě *a*), kde se namítá buď jen tah anebo jen tlak, lze dle jistých zkoušek položiti $\varkappa_0 = 2200 \frac{kg}{cm^2}$, mimo to pak $\varkappa = 3300 \frac{kg}{cm^2}$; tu jest

$$\frac{\varkappa - \varkappa_0}{\varkappa_0} = \frac{1100}{2200} = \frac{1}{2}$$

a tedy

$$\varkappa_\varepsilon = 2200 \left(1 + \frac{\psi}{2}\right).$$

Klademe-li na př.

$$\mu = 3\tfrac{2}{3},$$

vychází

$$(35') \ldots\ldots\ldots\ldots k = 600 \left(1 + \frac{\psi}{2}\right).$$

V případě *b*), kde se střídá tah s tlakem, položme $\varkappa_0 = 2200$, $\varkappa^+ = 1200$; tu jest

$$\frac{\varkappa_0 - \varkappa^+}{\varkappa_0} = \frac{1000}{2200} = \frac{5}{11},$$

místo čehož položme nepříznivější ale pohodlnější hodnotu $\frac{1}{2}$.

Pak vychází

$$\varkappa_\varepsilon = 2200\left(1 + \frac{\psi}{2}\right)$$

a za $\mu = 3\frac{2}{3}$

$$k = 600\left(1 + \frac{\psi}{2}\right),$$

tedy týž výraz jako v případě *a*).

Vypočtěme hodnotu k v některých případech.

Za stálého napětí (viz mnohé případy v pozemním stavitelství) jest $\psi = 1$ a tedy

$$k = 900\,\frac{kg}{cm^2}.$$

Za proměnného napětí, klesá-li toto vždy k nulle, máme $\psi = 0$ a tedy

$$k = 600\,\frac{kg}{cm^2}.$$

Střídá-li se tah s tlakem, a jsou-li prosté hodnoty obou rovny, jest $\psi = -1$ a tedy

$$k = 300\,\frac{kg}{cm^2}.$$

Připomenutí. Vzorce (35′) lze užívati též při železe kujném plávkovém (Thomasově, Martinově, Bessemerově); místo $600\,\frac{kg}{cm^2}$ jest však klásti $800\,\frac{kg}{cm^2}$.

MAJETEK ČESKO-UKR. KOMITÉTU V Č.S.R.

ČÁST II.

O pružnosti prutů.

§ 17. **Pojmy základní.** V praxi technické namítají se nejčastěji tělesa tvaru p r u t o v é h o. Po stránce měřické mysleme si následující vytvoření prutu. Rovinný obrazec nechť se pohybuje tak, že jeho těžiště probíhá určitou čáru, a že rovina obrazce jest napořád pravoúhelna k této čáře. Tvar a velikost obrazce tvořicího mohou býti buď stálé nebo mohou za pohybu se měniti určitým způsobem.

Dotčenou čáru, jež obsahuje těžiště všech poloh obrazce tvořícího, zoveme s t ř e d n i c í, každou polohu tvořícího obrazce p ř í č n ý m p r ů ř e z e m prutu. Dle střednice mohou býti pruty p ř í m é či k ř i v é; při těchto může býti střednicí křivka r o v i n n á či p r o s t o r o v á. Střednice prutu přímého zove se o s o u jeho. Dle tvořicího obrazce rozeznáváme p r u t y p r ů ř e z u s t á l é h o a p r o m e n n é h o.

V prut nechť působí j a k á k o l i rovnováhová soustava sil zevnitřních. Libovolným průřezem příčným dělí se prut ve dva díly, I. a II.; přihlížejme k dílu I. a k silám zevnitřním v něj působícím. Jak bylo vyloženo v § 2., kde jsme přihlíželi k tělesu tvaru jakéhokoli (obr. 1.), jsou zevnitřní síly dílu I. v rovnováze se silami vnitřními, jimiž díl II. působí v I.; toho se užívá ku stanovení sil vnitřních v daném průřezu.

Budiž P kterákoli ze sil zevnitřních dílu I.; mysleme si těžištěm o průřezu rovnoběžku ku přímce silové P a dejme v této rovnoběžce působiti silám P', P'', z nichž P'' nechť má týž směr a touž velikost jako daná síla P, P' pak touž velikost ale směr protivný, tak že připojené síly P', P'' vzájemně se ruší. Lze tedy sílu P nahraditi jednak silou P'' téhož směru a téže velikosti ale silou působící v těžišti průřezovém, jednak dvojicí silovou (P, P'). Učiníme-li to při všech silách zevnitřních dílu I., obdržíme jednak soustavu sil P'' působících v bod o směry vůbec různými, jednak soustavu dvojic silových o různých vůbec osách.*) Síly P'' lze složiti ve výslednici R působící v bod o; dvojice pak se skládají ve výslednou dvojici Δ.

*) Osou dvojice silové jest — jak známo — přímka pravoúhelná k její rovině; na této přímce myslíme si úsek, jenž velikostí svou vyjadřuje velikost, směrem svým pak smysl momentu dvojice.

Přímka R bývá vůbec odchýlena od tečny střednice a není tedy obecně pravoúhelna k průřezu; rozložme tuto sílu jednak ve složku normalnou N působící v tečně střednicové, jednak ve složku tangencialnou T působící v přímce, v níž rovina (NR) rovinu průřezovou seče. Obdobně bývá osa dvojice Δ vůbec odchýlena od tečny střednicové; rozložme Δ ve dvě dvojice Δ_k, Δ_0; onano mějž osu rovnoběžnou s tečnou střednice, osa této budiž rovnoběžna s rovinou daného průřezu. Ať soustava sil zevnitřních jest jakákoli, vždy dospíváme naznačeným právě způsobem k silám N, T a ku dvojicím Δ_0, Δ_k, jichžto momenty buďtež M_0, M_k.

Přihlédněme ku zvláštním, jednoduchým případům, kde tři z veličin N, T, M_0, M_k rovnají se nulle nebo jsou tak nepatrny, že možno jich nedbati; tím dospíváme k tak zvaným jednoduchým neboli prostým případům pružnosti prutů.

Abychom zatím povšechně seznali podstatu těchto jednoduchých případů, mysleme si k průřezu danému průřez sousední, nekonečně blízký, a přihlížejme ku stejně položeným bodům m, m' obou průřezů, jakož i k linearným prvkům $\overline{mm'}$ mezi nimi obsaženým.

a) Jde-li jen o sílu normalnou N, jež může býti tahem či tlakem, patrno, že síla ta se snaží body m daného průřezu od stejně položených bodů m' průřezu sousedního vzdáliti či k nim přiblížiti, t. j. změniti délku linearných prvků $\overline{mm'}$. Síla N způsobuje tedy roztažení prvků $\overline{mm'}$ a vyvozuje v bodech m průřezu daného napětí normalná, jež jsou buď vesměs tahy či vesměs tlaky. Normalné vnitřní síly jsou po průřezu rozděleny tak, že mají výslednici N', jež se ruší se silou N. Tu pravíme, že v daném průřezu se namítá prostá pružnost v tahu či tlaku.

b) Jde-li jen o sílu tangencialnou T, snaží se tato plošné prvky (m) daného průřezu proti stejně položeným prvkům (m') průřezu sousedního posunouti, tedy změniti pravé úhly mezi linearnými prvky $\overline{mm'}$ a daným průřezem. Síla T způsobuje tedy posouvání a vyvozuje v daném průřezu napětí tangencialná. Tangencialné síly vnitřní jsou po průřezu tak rozděleny, že se skládají ve výslednici T', jež se ruší se silou T. Případ tento zoveme prostou pružností v posouvání neboli ve smyku.

c) Jde-li jen o dvojici Δ_0, jež má osu rovnoběžnou s průřezem a tedy rovinu pravoúhelnou k průřezu, snaží se tato dvojice — nedbáme-li zatím možného zkřivení průřezů — změniti nekonečně malý úhel rovin obou průřezů sousedních (úhel křivosti střednice) a tedy změniti délku prvků $\overline{mm'}$. Dvojice Δ_0 způsobuje tedy roztažení a vyvozuje v daném průřezu napětí normalná. Normalné síly vnitřní jsou po průřezu tak rozděleny, že se skládají ve výslednou dvojici Δ_0', jež se ruší s Δ_0. Křivost střednice se mění. Případ tento zoveme prostou pružností v ohybu.

d) Jde-li jen o dvojici Δ_k, jež má osu pravoúhelnou k průřezu a tedy rovinu rovnoběžnou s průřezem (lze si pak mysliti Δ_k

v průřezu samém), snaží se tato dvojice daný průřez v rovině jeho po-otočiti proti průřezu sousednímu či — obecněji — posunouti plošné prvky jeho (m) proti stejně položeným prvkům (m') průřezu sousedního a tedy změniti pravé úhly mezi linearnými prvky $\overline{m\,m'}$ a daným průřezem. Dvojice Δ_k způsobuje tedy posouvání a vyvozuje v daném průřezu napětí tangencialná. Vnitřní tangencialné síly jsou po průřezu tak rozděleny, že se skládají ve výslednou dvojici Δ_k', jež se ruší s Δ_k. Případ ten zoveme prostou pružností v točení neboli kroucení.

Dalšími případy zvláštními jsou kombinace dvou nebo tří těchto případů jednoduchých.

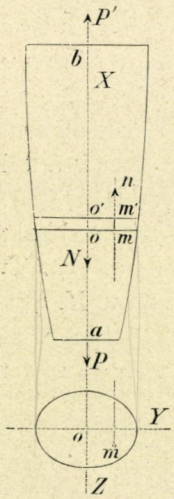
Přihlížejme nejprve k prutům přímým.

A. O pružnosti prutů přímých.

I. Prostá pružnost v tahu či tlaku.

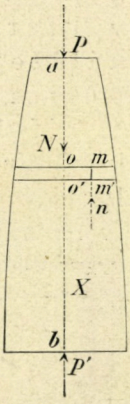
§ 18. **O silách zevnitřních a vnitřních.** Prostá pružnost v tahu či tlaku namítá se v určitém průřezu příčném, jestliže zevnitřní síly, které v prut působí s jedné strany tohoto průřezu, mají výslednici N, jejížto přímka se sjednocuje s osou prutu.

Myslíme-li si příčné průřezy prutu ve vzdálenostech nekonečně malých, rozděluje se jimi prut v prvky tvaru deskového. Aby síly zevnitřní s jedné strany každého průřezu příčného se skládaly v osovou sílu N, musejí zevnitřní síly každého prvku deskového míti výslednici tohoto rázu. Vlastní váha prutu hoví této výmince toliko, jest-li osa prutu svislá. Často bývá však vlastní váha prutu proti ostatním silám zevnitřním tak malá, že jí dbáti netřeba, a pak ovšem může osa prutu býti šikmá neb i vodorovná.



Obr. 6.

Budiž osa prutová $a\,b$ (obr. 6. a 7.) svislá; dejme tomu — jak bývá nejčastěji — že kromě vlastní váhy působí v prut síly zevnitřní toliko v krajních průřezech prutových (a), (b) a to tak, že příslušné výslednice působí v ose prutu; P budiž daná výsledná síla zevnitřní, P' pak reakce tělesa, na kterém prut visí nebo spočívá.



Obr. 7.

Kterýkoli průřez prutu dán jest svým těžištěm o, toto pak stanovme vzdáleností $\overline{a\,o} = x$ od bodu a, pokládajíce osu prutovou za osu X, bod a za počátek úseček. Průřez znamenáme pak krátce (o) neb (x).

Výslednice zevnitřních sil na jedné straně průřezu (o), totiž sil působících v díl prutový $(a\,o)$, jest pak

$$N = \pm (P + Q_x),$$

znamená-li P prostou velikost síly, Q_x pak vlastní váhu dílu prutového $(a\,o)$.*) Jest-li U obsah průřezu, γ poměrná váha látky prutové, platí rovnice

$$Q_x = \gamma \int_0^x U\,dx.$$

Jde-li o průřez (b), máme obdobně

$$N_b = \pm (P + Q),$$

$$Q = \gamma \int_0^l U\,dx,$$

kde l jest délka $\overline{a\,b}$ prutu.

Aby prut byl v rovnováze, musí patrně prostá hodnota reakce

$$P' = \pm N_b = P + Q.$$

Jde-li o prut stálého průřezu neboli prismatický, máme rovnici

$$Q_x = \gamma\,U\,x, \quad Q = \gamma\,U\,l.$$

Vyšetření sil vnitřních v průřezu (x) založme na hypothese, že osa $a\,b$ prutu i po deformaci zůstává přímou, a že hmotné body, jež před tím byly obsaženy v kterémkoli průřezu příčném, i po přetvoření náležejí rovině k ose pravoúhelné. Průřez zůstává tak průřezem, ale vzdálenosti jednotlivých průřezů se mění.**)

Mysleme si (před deformací) průřez $(x + d\,x)$ nekonečně blízký k průřezu (x); m, m' buďte dva stejně položené body obou průřezů. Tu lze tedy pokládati, že linearný prvek mm', rovnoběžný s osou X, přetvořením prutu změní toliko svou původní délku $d\,x$ o $\Delta\,d\,x$, zůstane však pravoúhelným k oběma průřezům; pak není tu posunutí, a namítá se jen poměrné roztažení

$$\lambda_x = \frac{\Delta\,d\,x}{d\,x}.$$

---

*) Síla N jest positivná či negativná, totiž tah či tlak.

**) Hypothesis tato se srovnává dobře se skutečností při prutech prismatických, rozděleno-li působení sil P, P' rovnoměrně po krajních průřezech (a), (b) prutu. Jde-li o prut průřezu proměnného, nebo není-li naplněna výminka posléze dotčená, nejsou příslušné výsledky zcela správné, možno jich však užívati v praktických případech celkem dosti přibližně.

V bodu m průřezu (x) působí proto napětí normalné v_x, a poněvadž $v_y = v_z = 0$, platí po mez úměrnosti rovnice

$$v_x = E \lambda_x = E \frac{\Delta d x}{d x}.$$

Veličiny E, $d x$, $\Delta d x$ mají však ve všech bodech průřezových tytéž hodnoty; proto napětí v_x, jež nyní prostě znamenejme písmenem v bez přípony, jest ve všech bodech téhož průřezu stejné a může se jen měniti, postupujeme-li k průřezům jiným.

Myslíme-li si v průřezu (x) při bodě m plošný prvek $d u$ (jakožto přírostek jistého konečného obsahu u), působí v tento prvek síla vnitřní normalná

$$n = v d u;$$

veškeré vnitřní síly v průřezu (x), vyjadřujíce působení dílu prutového $(o\ b)$ v díl $(a\ o)$, jsou v rovnováze se silami zevnitřními dílu $(a\ o)$, což vysloveno jest výminkou

$$N = \Sigma n = \int v d u = v \int d u = v U.$$

Další dvě výminky, vztahující se ku statickým momentům sil vzhledem k osám pravoúhelným Y, Z, jež si myslíme v průřezu těžištěm jeho, totiž rovnice

$$\Sigma n z = v \int z d u = 0, \quad \Sigma n y = v \int y d u = 0,$$

jsou naplněny, poněvadž statické momenty

$$\int z d u, \quad \int y d u$$

průřezu vzhledem k osám Y, Z, obsahujícím těžiště průřezové, rovnají se nulle.*)

Máme tedy v kterémkoli bodě m průřezu (x) napětí normalné

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots v = \frac{N}{U}.**)$$

*) Zároveň patrno, že rovnost napětí ve všech bodech téhož průřezu nemůže míti místa, neobsahuje-li přímka N těžiště průřezu.

**) Za U bylo by položiti obsah průřezový prutu přetvořeného, kterýž obsah jest za { tahu / tlaku } poněkud { menší / větší } než původní průřezový obsah prutu před deformací. Pravidlem klade se však za U obsah původní; proto dává rovnice (1) napětí v { tahu / tlaku } poněkud { menší / větší }. Rozdíl ten jest nepatrný, nepřestupuje-li $\pm v$ t. zv. namáhání dovoleného; na mezi pevnosti v tahu, kde nastává značné zúžení (kontrakce) průřezu, bývá však značný.

MAJETEK KO-UKR. KOMITÉTU V Č.S.R.

Postupujeme-li průřez od průřezu, mění se vůbec N i U; ν mění se pak úměrně k podílu obou těchto veličin. Dáno-li U jakožto funkce úsečky x, lze stanoviti největší prostou hodnotu tohoto podílu; příslušný průřez nazývejme n e b e z p e č n ý m p r ů ř e z e m prutovým.

Možno-li nedbati vlastní váhy prutu, jest $N = \pm P$, a nebezpečným průřezem jest ten, jehož obsah U jest minimum.

Jest-li p r u t p r i s m a t i c k ý, a dbáme-li vlastní jeho váhy, máme v průřezu (x) napětí

$$\nu = \pm \frac{P + \gamma U x}{U},$$

jehož prostá hodnota dosahuje maxima v průřezu (b), totiž

$$\max (\pm \nu) = \frac{P + \gamma U l}{U}.$$

V ý m i n k y b e z p e č n é p e v n o s t i. Poněvadž zde působí jen jediné napětí normalné $\nu_x = \nu$ (obě ostatní normalná a všecka tangencialná rovnají se nulle) náležejí dle § 15. idealným napětím hlavním hodnoty

$$\nu, \quad -\frac{\nu}{m}.$$

Při látkách, jichžto v praxi technické nejvíce se užívá, stačí vyhověti výmince, aby

$$\pm \nu \leq k,$$

kde k jest dovolené namáhání v tahu (k') či v tlaku (k'').

Průřezové rozměry prutu (po případě dovolená síla P) počítají se pak z rovnice

$$(2) \quad \pm N = k U,$$

kterou jest napsati pro průřez nebezpečný.

O prutu prismatickém, při němž dbáti nutno vlastní jeho váhy, platí rovnice

$$\frac{P + \gamma U l}{U} = k,$$

z nížto plyne

$$(2^a) \quad U = \frac{P}{k - \gamma l}.$$

Nemusíme-li vůbec dbáti vlastní váhy prutu, jest

$$(2^b) \quad U = \frac{P}{k}.$$

Na základě této rovnice stanoví se zkouškami součinitelé pevnosti v tahu ($\varkappa'$) a tlaku ($\varkappa''$). V pruty dává se působiti silám postupně větším a větším až k porušení celistvosti prutu; nastalo-li toto za hodnoty $\pm N = P_0$ (vlastní váhy tu pravidlem dbáti netřeba), jest hledaný součinitel

$$\varkappa = \frac{P_0}{U}. \quad *)$$

Jde-li o součinitele $\varkappa'$, nemusí býti zkušebný prut příliš dlouhý, jen když jest opatřeno, by tažná síla P na obou koncích působila co nejpřesněji v ose prutové. Prut obrobí se tak, aby měl kdes uprostřed délky průřez poněkud menší a přetrhl se tedy v dostatečné vzdálenosti od obou konců, totiž na místě, kde možno se nadíti rovnoměrného rozdělení síly P po průřezu; příslušné rozměry průřezové změří se co nejpřesněji.

Jde-li o součinitele $\varkappa''$, nesmí, aby se vyloučil možný ohyb, býti délka prutu značnější proti rozměrům průřezovým; zkušebná tělesa mívají tu přibližně tvar krychle či rovnostranného válce; zkoušky vymáhají zvláštní opatrnosti a přiměřených opatření, aby tlak se rozdělil dosti rovnoměrně po průřezu. Výjev, který nastává na mezi pevnosti v tlaku, jest mnohem komplikovanější nežli při tahu; různé látky chovají se v této příčině rozličně, a nebývá jasno, kdy porušení počíná. Proto součinitelé $\varkappa''$, již závisí ostatně i na tvaru průřezovém, zvláště pak na poměru délky k rozměrům průřezovým, jsou mnohem méně určití a spolehliví než $\varkappa'$.

Buďtež tu vytčeny hodnoty součinitelů pevnosti látek v praxi technické zvláště důležitých (v kilogrammech na čtvercový centimetr).

Dřevo (směrem přirozených vláken — hodnoty střední):

	$\varkappa'$	$\varkappa''$
borovice	720	250
jedle	550	280
smrk	600	280
modřín	710	320
dřeva jehličná vůbec (průměrně)	640	280
dub	960	340
buk	1030	320

Kovy:

železo lité (šedé) ..... 1000 až 1600 3000 až 8000

železo kujné svářkové**) (střední hodnoty):

*) Jak v připomínce k rovnici (1) dotčeno, mění se obsah U průřezu a to na mezi pevnosti při některých látkách velmi značně; vztahujeme-li výsledky zkoušek k průřezu původnímu, vychází $\left\{\begin{matrix}\varkappa' \text{ menší} \\ \varkappa'' \text{ větší}\end{matrix}\right\}$ než jest skutečné namáhání na mezi pevnosti.

**) Součinitel $\varkappa''$ udává se při železe kujném mnohdy čísly menšími než $\varkappa'$; udání ta vysvětlují se však tím, že při těch kterých zkouškách nešlo o tlak prostý, ale o kombinaci tlaku s ohybem (viz dále pevnost vzpěrnou). Celkem lze říci, že $\varkappa''$ není tu menší než $\varkappa'$, a klásti prakticky při železe kujném (a též při oceli) $\varkappa'' = \varkappa'$.

	$\varkappa'$	$\varkappa''$
pruty	3500	
plech směrem válcování	3400	
plech na příč	2800	
drát (dle tloušťky a jakosti)	5000 až	8000
železo kujné plávkové:		
pruty	3500 „	4500
plech	3800	
drát (dle tvrdosti)	6500 až	8500
ocel plávková:		
pruty (dle tvrdosti)	4500 „	6500
drát „	6500 „	20000
ocel litá kelímková	4500 „	14000
drát z lité oceli	8000 „	25000
měď válcovaná	2200	4000
měděný drát	4000	—
mosaz litý	1500	800
mosazný drát	3600	—
bronz	1600 až 3600	—
bronz fosforový	3400 „ 5200	—
kov deltový	3600	—
olovo válcované	350	500
Kámen: *)		
čedič		1200 až 4000
porfyr		1300 „ 2300
žula		870 „ 2300
vápenec krystallický		500 „ 2000
vápenec celistvý		110 „ 2500
vápenec porovitý		35 „ 600
pískovec		120 „ 2000
slepence		240 „ 1100
Cihly		60 „ 300
Řemeny z dobré kože jádrové	250 až 450	—
Provazy konopné	500 „ 800	—

*) Součinitel $\varkappa'$ jest při kamenech mnohem menší než $\varkappa''$; dle zkoušek Bauschingerových byl by poměr $\frac{\varkappa'}{\varkappa''} = \frac{1}{10}$ až $\frac{1}{70}$ (při žule $\frac{1}{23}$ až $\frac{1}{60}$, při vápenci $\frac{1}{10}$ až $\frac{1}{26}$, při pískovci $\frac{1}{14}$ až $\frac{1}{62}$ atd.). Sluší však konstatovati, že zkouškami v tahu nabývá se při kamenech příliš malých hodnot součinitele $\varkappa'$ a to proto, že jest téměř nemožno opatřiti, by tažná síla se rozdělovala rovnoměrně po průřezu kamenného prutu. Poněvadž ostatně kámen v technické praxi nebývá namáhán prostým tahem, a napětí v tahu se namítá jen při ohybu a může se namítnouti ještě leda při výstředném tlaku, jsou v té příčině zkoušky v ohybu důležitější.

Co se týče pevnosti v opětovaném tahu či tlaku, shledal Wöhler při prutech zrobených ze železných náprav, které dodal porýnský závod Phönix,

pevnost v tahu za stálého napětí ..... $\varkappa' = 3250\ kg/cm^2$,
„ v pomíjejícím tahu ..... $\varkappa'_0 = 2190$ „ ,
„ v rovném tahu i tlaku ..... $\varkappa^{+} = 1170$ „ ,

dále při prutech zrobených z litých ocelových náprav, dodaných od závodu Kruppova,

$$\varkappa' = 7600, \quad \varkappa_0' = 3500, \quad \varkappa^{+} = 2040\ kg/cm^2.$$

Zkoušky Bauschingerovy pak vedly k výsledkům následujícím:

	$\varkappa'$	$\varkappa_0$	$\varkappa^{+}$
Železo kujné svářkové	3480	2000	1770
„ „ plávkové	4360	2400	1980
Ocel Thomasova	6120	3000	3000
„ na kolejnice	5940	2800	2800
Železný plávkový plech na kotly	4050	2400	1900.

Příklad 1. Železný prut okrouhlého průřezu tažen jest silou $P = 3300\ kg$; stanoviti jeho průměr d, dopouští-li se namáhání $k' = 800\ kg/cm^2$.

Nedbáme-li vlastní váhy prutové, platí rovnice (2b)

$$U = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{P}{k'},$$

pročež

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi k'}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3300}{3{\cdot}14 \cdot 800}} = 2{\cdot}3\ cm.$$

Jde-li na př. o prut zdéli $l = 3{\cdot}5\ m$, jest vlastní váha jeho

$$Q = \gamma U l = \frac{7{\cdot}8 \cdot 3{\cdot}14 \cdot 2{\cdot}3^2 \cdot 350}{4 \cdot 1000} \doteq 11\ kg,$$

tedy nepatrná proti síle P.

Příklad 2. Svislé drátěné lano o δ drátech stejné tloušťky taženo jest na spodním konci silou P; stanoviti průměr drátů šetříc vlastní váhy lana.

Vložíme-li do vzorce (2a)

$$U = \frac{P}{k - \gamma l}$$

hodnotu

$$U = \delta \cdot \frac{\pi}{4} d^2,$$

vyjde

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi \delta (k - \gamma l)}},$$

kde — hledíc zároveň k váze duše konopné lana — sluší vzíti γ poněkud větší, než jest poměrná váha látky drátové.*)

§ 19. **O prutech stejného odporu v tahu či tlaku.** V předešlém § dospěli jsme k tomu, že napětí ν jest ve všech bodech téhož průřezu stejné, v různých průřezech vůbec rozličné. Lze však prut zříditi tak, aby napětí ν mělo touž hodnotu ve všech průřezech prutových. Pruty takové zovou se pruty stejného odporu v tahu či tlaku. Při těchto prutech musí tedy dle vzorce (1) podíl $\frac{N}{U}$ míti ve všech průřezech touž hodnotu, za kterou položme dovolené namáhání k v tahu či tlaku. Máme proto výminku

$$P + \gamma \int_0^x U\,dx = k\,U$$

anebo, differencujeme-li tuto rovnici dle x,

$$\gamma\,U\,dx = k\,dU,$$

tedy

$$\frac{dU}{U} = \frac{\gamma}{k}\,dx.$$

Integrováním vychází

$$l\,U = \frac{\gamma\,x}{k} + l\,C$$

neboli

$$U = C\,e^{\frac{\gamma x}{k}}.$$

Integrační konstantu C stanovme z výminky, že v průřezu (a), kde $x = 0$, máme

$$U = \frac{P}{k};$$

proto

$$C = \frac{P}{k}$$

---

*) Váha drátů v délkovém metru lana činí

$$q = \frac{\delta \cdot \pi\,d^2 \cdot 100}{4}\,\frac{\gamma}{1000} = \frac{\gamma\,\delta\,\pi\,d^2}{40}$$

kg, vyjádřen-li průměr d v cm; váží-li tedy délkový metr lana celkem q' kg, nutno ve výraze průměru d za γ položiti $\gamma' = \gamma\,\frac{q'}{q}$.

a rovnice

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots U = \frac{P}{k} e^{\frac{\gamma x}{k}}$$

vyjadřuje tedy závislost obsahu průřezového na úsečce x.*)

Průřez prutu stejného odporu musil by se dle toho měniti spojitě, což v praxi se potkává s obtížemi. Přibližně lze dosíci účelu tak, že složíme prut z prismatických dílů zdéli $l_1, l_2, l_3, \ldots$ o průřezech $U_1, U_2, U_3, \ldots$ stanovených tak, aby při každém dílu napětí v mělo prostou hodnotu k v krajním jeho průřezu (b), v němžto k síle zevnitřní průřezu (a) přistupuje vlastní váha téhož dílu.

Dejme tomu, že jde o prut tažený (na př. dlouhé soutyčí, tahadlo důlní); tu plyne z rovnice (2^a) o průřezu U_1 dílu spodního

$$(k - \gamma l_1) U_1 = P,$$

dále o průřezu U_2 dílu následujícího

$$(k - \gamma l_2) U_2 = P + \gamma U_1 l_1 = k U_1,$$

obdobně

$$(k - \gamma l_3) U_3 = k U_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(k - \gamma l_\mu) U_\mu = k U_{\mu-1}.$$

Znásobením těchto rovnic vyloučí se obsahy $U_1, U_2, U_3, \ldots U_{\mu-1}$ a vyjde

$$(4) \ldots\ldots\ldots U_\mu = \frac{k^{\mu-1} P}{(k - \gamma l_1)(k - \gamma l_2) \ldots (k - \gamma l_\mu)}.$$

Mají-li všecky díly rovnou délku l, nabývá rovnice (4) tvaru

$$(4^a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots U_\mu = \frac{k^{\mu-1} P}{(k - \gamma l)^\mu}.$$

§ 20. **O přetvoření prutu.** Toto záleží ve změně délky prutové a ve změně rozměrů průřezových. Přihlížejme k oné.

Mysleme si (obr. 6. a 7.) dva nekonečně blízké průřezy (x), $(x + d x)$; délka $\overline{m m'} = d x$ linearných prvků, obsažených mezi stejně položenými body m, m' obou průřezů, změní se o $\Delta d x$, tak že

$$\frac{\Delta d x}{d x} = \lambda$$

*) Nedbáme-li vlastní váhy, jest ovšem prut prismatický prutem stejného odporu v tahu i tlaku.

jest poměrné roztažení prutu v průřezu (x). Vložme do této rovnice

$$\lambda = \frac{v}{E} = \frac{N}{E\,U}$$

a uvažme, že

$$\Delta\, d\,x = d\,\Delta\, x;$$

tu vychází integrováním

$$\Delta\, x = \frac{1}{E}\int_0^x \frac{N}{U}\, d\,x$$

a tedy

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta\, l = \frac{1}{E}\int_0^l \frac{N}{U}\, d\,x,$$

kdežto

$$\pm N = P + \gamma \int_0^x U\, d\,x.$$

Známe-li

$$U = f\,(x),$$

lze integrovati a stanoviti tak $\Delta\, l$.

Jde-li o prut stejného odporu, jest v rovnici (5) podíl

$$\frac{N}{U} = v = \text{const.} = \pm\frac{P}{U_0},$$

znamená-li U_0 obsah průřezu (a); proto

$$\pm\,\Delta\, l = \frac{P\,l}{E\,U_0}.$$

Jde-li o prut prismatický, a nutno-li dbáti vlastní jeho váhy, položme

$$\pm N = P + \gamma\, U\, x,$$

tedy

$$\pm\,\Delta l = \frac{1}{E\,U}\int_0^l (P + \gamma\ U\,x)\, d\,x = \frac{(P + \frac{1}{2}\,\gamma\, U\, l)\, l}{E\,U};$$

poněvadž pak

$$\gamma\, U\, l = Q$$

jest vlastní váha prutu, máme rovnici

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pm\,\Delta\, l = \frac{(P + \frac{1}{2}\,Q)\, l}{E\,U}.$$

Nedbá-li se vlastní váhy, platí rovnice

$$(6^a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pm \Delta l = \frac{P l}{E U},$$

jež ovšem se srovnává s rovnicí platnou při prutech stejného odporu.*)

Příklad 3. Stanoviti prodloužení železného prutu, jehož průměr byl vypočten v 1. příkladě § 18.

Jde-li o železo svářkové, máme dle (6^b)

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{k}{E} = \frac{800}{2\,000\,000} = 0{\cdot}0004;$$

za délky $l = 3{\cdot}5\ m = 3500\ mm$ obdržíme tedy

$$\Delta l = 0{\cdot}0004 \,.\, 3500 = 1{\cdot}4\ mm.$$

MAJETEK ČESKO-UKR. KOMITETU V Č.S.R.

Na základě rovnice (6^a) stanoví se zkouškami modul E pružnosti a mez úměrnosti.

Prismatický prut, pravidlem průřezu obdélníkového, co nejdokonaleji obrobený, jehož délka l a průřez U byly stanoveny co nejpřesněji, napíná se silami P_1, P_2, P_3,... postupně většími a většími, a měří po každé příslušná změna délková $\Delta_1 l$, $\Delta_2 l$, $\Delta_3 l$,... Rovnice (6^a) neboli

$$E = \frac{P}{U} \frac{l}{\pm \Delta l}$$

dává k výsledku Δl každé jednotlivé zkoušky hodnotu E_1, E_2, E_3,... modulu pružnosti. Tak postupuje se, až hodnota E počne zřejmě vzrůstati, což znamenám, že mez úměrnosti jest přestoupena. Z hodnot $E_1, E_2, E_3, \ldots E_\mu$, stanovených po mez úměrnosti, odvodí se pak arithmetický střed

$$\frac{E_1 + E_2 + E_3 + \ldots E_\mu}{\mu} = E$$

a pokládá za modul pružnosti, poněvadž rozdíly hodnot E_1, E_2, E_3,... přisuzovati možno chybám pozorovacím a náhodným okolnostem vnějším.

---

*) Položíme-li v ní

$$\frac{P}{U} = k,$$

nabývá rovnice tvaru

$$(6^b) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\pm \Delta l}{l} = \frac{k}{E}.$$

Jde-li o modul pružnosti v tahu, radno užiti zkušebného prutu pokud možno dlouhého; čím větší délka l, tím méně chyby pozorovací působí v poměr $\frac{\pm \Delta l}{l}$.

Jde-li o modul pružnosti v tlaku, nesmí býti prut dlouhý, aby vyloučen byl ohyb; proto jsou tu zkoušky obtížnější a výsledky nedokonalejší. Jak ostatně dotčeno již v § 13., užíváme při vyšetřování, kde se namítá tah i tlak zároveň, jediné (střední) hodnoty modulu E.

Buďtež tu vytčeny střední hodnoty modulu E pružnosti, pak prosté hodnoty v napětí na mezi úměrnosti (v' v tahu, v'' v tlaku) při látkách v praxi technické nejdůležitějších (v kg na cm^2).

		E	v
Dřeva jehličná (směrem přirozených vláken)	v tahu..	120 000	360
	v tlaku .	110 000	130
dřevo dubové (směrem přirozených vláken)	v tahu..	110 000	470
	v tlaku .	100 000	150
Železo kujné svářkové		2 000 000	1300 až 1700
železo kujné plávkové		2 150 000	2000 „ 2400
Ocel plávková		2 200 000	2500 „ 5000.

Z látek prakticky důležitých, jež se neřídí zákonem Hookovým, které tedy nemají stálého modulu pružnosti, sluší jmenovati hlavně železo lité a kámen, při kterých roztažení roste rychleji než napětí, pak kůži, při které platí opak.

Co se týče železa litého, klesl při zkouškách Hodgkinsonových modul pružnosti v tahu s 956 400 kg/cm^2 na 672 300, když napětí v vystoupilo ze 148 kg/cm^2 na 1040; modul pružnosti v tlaku klesl obdobně s 929 300 kg/cm^2 na 853 200, když prostá hodnota napětí ze 145 kg/cm^2 vystoupila na 1015. Jistou zkouškou Bauschingerovou shledán modul pružnosti v tlaku as 1 230 000 kg/cm^2 za napětí $v = 0$ až -224 kg/cm^2, leč jen 621 000 za $v = -2460$ až -2690. Také o mezi pružnosti nelze mluviti při železe litém; již od $v = 300$ kg/cm^2 výše bývá patrno přetvoření trvalé.

Při látkách, kde rovnice

$$\lambda = \frac{v}{E}$$

nemá místa, jest dle Bacha položiti

$$\lambda = \alpha v^{\delta},$$

kde α jest součinitel roztažitelnosti; dle našeho označení $\left(\alpha = \frac{1}{E}\right)$ bylo by

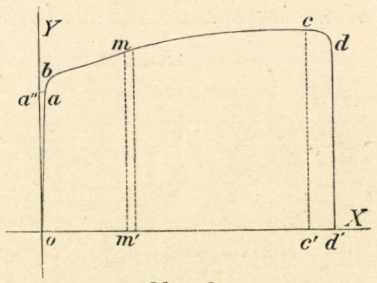
tedy psáti

$$\lambda = \frac{v^{\delta}}{E};$$

při různých látkách jsou E i δ různé.*)

Připomenutí. Abychom ocenili určitou látku po stránce její způsobilosti, vzdorovati bezpečně silám zevnitřním, jest nám přihlížeti nejen k pevnosti ale i k houževnosti její. Oběma těmito činiteli stanoví se jakost neboli kvalita látky v příčině svrchu dotčené. Tetmajer určuje jakost látky na základě práce, které potřebí k roztažení tělesa až po mez pevnosti; touž hodnotu má práce vykonaná současným odporem hmoty.

Dejme tomu, že prismatický prut z kujného železa — na př. svářkového — o průřezu U a délce l podrobíme zkouškám v tahu, napínajíce jej silou P postupně větší a větší a měříce po každé příslušné roztažení Δl. Jestliže na základě měřidel přiměřeně zvolených vyjádříme pozorované hodnoty Δl úsečkami x, příslušné hodnoty P pořadnicemi y v pravoúhelné soustavě souřadnicové, lze souvislost veličin Δl, P měřicky znázorniti diagrammem v obr. 8. naznačeným.**)



Obr. 8.

Body souřadnicemi x, y určené jsou z počátku položeny přibližně na přímce $o\,a$, odchýlené nepatrně od osy Y; v bodě a přestává úměrnost veličin Δl, P (a tedy veličin λ, v); mez úměrnosti dána jest napětím

$$v_{ú} = v' = \frac{\overline{o\,a''}}{U}.$$

Od bodu a roste Δl rychleji než P; čára se křiví a nabývá v jistém bodě b veliké odchylky (skoro 90^0) od osy Y, což znamením, že tu nepatrným zvětšením síly P vzrůstá roztažení Δl nad míru rychle; prut se začíná značně protahovati; bod b stanoví (spodní) mez průtažnosti; příslušné napětí jest $v_t = \frac{\overline{o\,b''}}{U}$, znamená-li b'' pravoúhlý průmět bodu b na osu Y.

Zůstávajíc po jistou délku nepatrně odchýlena od osy X, stoupá pak křivka nenáhle až k vrchovému (kulminačnímu) bodu c, v kterém pořadnice y (síla P) má hodnotu největší; příslušným napětím $v_p = \varkappa' = \frac{\overline{c'\,c}}{U}$ dána jest

*) Bach klade dle dosavadních zkoušek při litém železe, jakého se obyčejně užívá na díly strojové,

v tahu $E' = 1\,250\,000$ kg/cm^2, $\delta' = 1{\cdot}1$,
v tlaku $E'' = 1\,180\,000$ „ $\delta'' = 1{\cdot}05$.

Při žule dospěl k hodnotám

$E' = 240\,000$ kg/cm^2, $\delta' = 1{\cdot}4$,
$E'' = 300\,000$ „ $\delta'' = 1{\cdot}12$.

**) Některé stroje zkoušecí pořizují takový diagramm samočinně.

mez pevnosti. Jakmile tato hodnota jest dostižena, počíná se prut na jednom místě patrně zúžovati t. j. zmenšovati průřez; síla P nemusí již vzrůstati, aby prut dále se roztahoval, ale může naopak nenáhle klesati, a prut se konečně přetrhne za roztažení $\Delta' l = \overline{o\,d'}$ a síly $P = \overline{d'\,d}$.*)

Poněvadž při železe kujném mez úměrnosti pokládati lze dosti přibližně i za mez pružnosti, můžeme říci: Čím větší jest $\overline{o\,a''}$, tím pružnější železo; čím větší jest $\overline{c'\,c}$, tím jest pevnější; čím větší rozdíl $\overline{c'\,c} - \overline{o\,a''}$, tím jest tažnější, houževnější.

Součinem $y\,dx$, zobrazeným měřicky obsahem proužku, položeného jednak mezi osou X a čarou $o\,a\,b\,c\,d$, jednak mezi pořadnicí $\overline{m'\,m}$ a pořadnicí nekonečně blízkou, vyjádřen jest prvek zmíněné svrchu práce; všecka práce až ku přetržení prutu, totiž

$$\Pi = \int_0^{\Delta' l} y\,d\,x,$$

dána jest obsahem obrazce $o\,a\,b\,c\,d\,d'$; $\Delta' l = \overline{o\,d'}$ znamená roztažení prutu na mezi pevnosti. Jest-li $P' = \overline{c'\,c}$ největší hodnota síly P, lze položiti

$$\Pi \doteq \beta\,P' \,.\, \Delta' l,$$

kde β jest určitý součinitel menší než jednička.

Na jedničku krychlovou ($U = 1$, $l = 1$) připadá práce

$$\Pi_1 = \beta\,\varkappa'\,\lambda',$$

kde

$$\varkappa' = \frac{P'}{U}, \quad \lambda' = \frac{\Delta' l}{l};$$

poněvadž pak dle Tetmajera součinitel β při témž druhu železa celkem za stálý pokládati možno, jest práce, které vymáhá roztažení prutu až po mez pevnosti, úměrna k součinu součinitele $\varkappa'$ pevnosti a poměrného roztažení λ' na mezi pevnosti. Součinem $\varkappa'\,\lambda'$ obou čísel, či lépe oběma těmito činiteli stanovena jest tedy jakost železa po stránce, o kterou tu jde.

Jiní stanoví jakost železa součtem dvou čísel, z nichž jedním jest zase součinitel $\varkappa'$ pevnosti, druhé pak vyjadřuje zúžení (kontrakci) průřezu prutového bezprostředně před přetržením prutu a to v procentech průřezu původního.

Tímto způsobem stanoviti lze jakost železa a vůbec kovů; co dřeva se týče, při kterém zkoušky v tahu potkávají se s jistými obtížemi, stanoví Tetmajer jakost zkouškami v ohybu, jak na příslušném místě bude dotčeno.

*) Železo plávkové jeví diagramm v podstatě obdobný; při železe litém a kamenech odpadá přímý díl $o\,a$; čára kříví se již od bodu o. Při dřevě má díl $o\,a$ převahu. Železo lité a kámen mají se ostatně při prvním napětí podstatně jinak než při opětném.

Připomenutí 2. Úplná deformace tělesa, kterou určité síly zevnitřní mohou vyvoditi, vymáhá jistého času — při některých látkách kratičkého, při jiných dlouhého. Tak na př. prut z tvrdé oceli hned po nenáhlém napětí nabývá onoho roztažení, které příslušnou silou zevnitřní vůbec možno vyvoditi; za to roztažení napiatého řemene roste ještě po měsících ano i létech, ovšem čím dále, tím méně.

Také k vyrovnání deformace, když síly zevnitřní přestaly působiti, potřebí jistého času. Okolnost tato bývá často na újmu přesnosti výsledků, kterých nabýváme zkouškami v příčině pružnosti.

II. Prostá pružnost v ohybu.

§ 21. **O silách zevnitřních.** Prostá pružnost v ohybu se namítá v určitém průřezu příčném, jestliže zevnitřní síly, které působí v prut s jedné strany toho průřezu, se skládají ve výslednou dvojici Δ_0, jež má osu rovnoběžnou s průřezem, rovinu tedy pravoúhelnou k průřezu.

Prohlédajíce ku případu, který v praxi nejčastěji se vyskytuje, dejme tomu, že *síly zevnitřní, jež působí v každý z prvků prutových tvaru deskového* (*§ 18.*), *mají výslednici, jejíž přímka protíná osu prutovou pravoúhelně, a že přímky veškerých těchto výslednic jsou v jediné rovině obsahující osu prutu.* Rovinu tuto nazývejme rovinou sil zevnitřních. Vlastní váha prutu hoví této výmince toliko, jest-li osa prutu vodorovná a jsou-li ostatní síly zevnitřní svislé — případ to, který nejčastěji se namítá a který tu budiž vzat v úvahu.

Dejme dále tomu, že *rovina sil zevnitřních dělí prut souměrně* a protíná tedy rovinu každého příčného průřezu v přímce, která jest osou symmetrie průřezu.

Bychom ustanovili jednotlivé body prutu co do jejich polohy, zvolme na nepřetvořené ose prutové počátek a pravoúhelné soustavy souřadnicové; osou X budiž osa prutu, osa Z nechť jest svislá, osa Y vodorovná. Každou hodnotou úsečky x určen jest jistý průřez (x); souřadnicemi y, z určujeme jednotlivé body m průřezu.

Jde-li o body jediného jen průřezu, mysleme si jeho těžištěm o dvě osy Y', Z' stejnosměrné ku Y, Z; Z' jest pak průsečnice roviny sil zevnitřních s průřezem a tedy osou symmetrie průřezu; osa Y' jest obsažena v rovině průřezové, nemusí však průřez děliti souměrně. V soustavě Y', Z' má bod m průřezu (x) souřadnice $y' = y$, $z' = z$.

Co se týče sil zevnitřních, rozeznávejme: *a*) prvotné, totiž vlastní váhu prutu, pak váhu či složky váhy těles na prutu spočívajících, *b*) podružné, totiž odpor těles, na kterých prut sám spočívá a která zoveme jeho podporami. Síly prvotné bývají předem dány neb odhadnuty; podružné nutno stanoviti z prvotných. Síly pod *a*) uve-

dené zoveme břemena; říkáme, že prut břemena nese, a nazýváme jej proto nosníkem. Souhrn břemen zove se obtížením prutu.

Působení břemene rozděluje se často po velmi nepatrném dílu délky nosníkové; tu si myslíme, že břímě působí v jediný jen průřez příčný a zoveme je břemenem osamělým. Rozděluje-li se působení břemene přes větší díl délky nosníkové tak, že prvku dx této délky připadá jen prvek dQ břemene, zoveme břímě spojitě rozděleným neb i spojitým. Poměr

$$\frac{dQ}{dx} = q$$

zoveme poměrným obtížením v průřezu x; hodnota jeho může se vůbec měniti průřez od průřezu. Jest-li q stálé, platí rovnice

$$Q_x = q\,x,$$

kde Q_x znamená obtížení připadající na úsečku x. Obtížení tohoto rázu zove se rovnoměrně rozděleným nebo krátce rovnoměrným.

Nosník tlačí ve své podpory silami rozdělenými vůbec spojitě po těch dílech své délky, v nichžto s podporami se stýká, a podpory vzdorují (reagují) silami oněm rovnými a protivnými. Máme tedy jednak tlaky podporové, jednak reakce podporové. Obyčejně vyrozumíváme těmito názvy výslednice oněch spojitě rozdělených tlaků a protitlaků.

Jestliže spůsobem v § 17. naznačeným složíme síly zevnitřní, jež působí na levé straně kteréhokoli průřezu (x), obdržíme za výminkami svrchu dotčenými jednak výslednou sílu tangencialnou

$$T = \sum_0^x P'' = \sum_0^x P,$$

v kterou se skládají síly P'', jež vznikly přeložením sil daných P do osy Z' průřezu (x), jednak dvojici Δ_0, v kterou se skládají dvojice $(P\,P')$, obsažené zde vesměs v rovině $X\,Z$, kterou jsme svrchu nazvali rovinou sil zevnitřních.

Dvojice Δ_0 jest pak dána momentem

$$M_0 = \sum_0^x P\,r,$$

kde r znamená vzájemnou vzdálenost přímek P, P' a tedy vzdálenost přímky P od těžiště neb od osy Z' průřezu (x). M_0 zove se momentem ohybovým, T pak posouvající neb i příčnou silou daného průřezu. Přímkou síly posouvající jest osa Z' daného průřezu; rovinou dvojice Δ_0 jest rovina sil zevnitřních neb i kterákoli rovina s touto rovnoběžná. Co do hodnoty síly T a momentu M_0 platí tedy tato pravidla:

Síla posouvající určitého průřezu rovná se součtu sil zevnitřních působících na levé straně průřezu.

Moment ohybový určitého průřezu rovná se součtu statických momentů — vzhledem k těžišti průřezovému nebo krátce vzhledem k průřezu — sil zevnitřních působících na levé straně průřezu.

Sčítajíce musíme ovšem šetřiti znaménka sil a momentů. Síly pokládejme za { positivné / negativné }, působí-li { vzhůru / dolů }; momenty buďtež { posi- / nega- } tivné / tivné }, jestliže by příslušné dvojice točily rovinu XZ tak, jak se { točí / netočí } ručičky na hodinách.

Kdybychom týmž způsobem složili síly zevnitřní působící na p r a v é straně průřezu, dospěli bychom obdobně k síle posouvající T' a k momentu ohybovému M_0'. Poněvadž veškeré zevnitřní síly prutu jsou vespolek v rovnováze, musí

$$T + T' = 0, \qquad M_0 + M_0' = 0.$$

Jeví-li se tedy někdy výhodnějším, stanoviti hodnoty T', M_0' náležející ku straně p r a v é, obdržíme hodnoty T, M_0, jež se týkají strany l e v é, pouhou změnou znaménka.

V následujících výkladech budeme znamenati moment ohybový písmenem M bez přípony.

Poněvadž složením zevnitřních sil, působících s jedné strany průřezu, dospíváme nejen k dvojici Δ_0, ale zároveň k síle T, namítá se i za výminkami svrchu položenými p r o s t á p r u ž n o s t v o h y b u přesně jen v průřezech, kde síla T rovná se nulle; v průřezech ostatních jde o k o m b i n a c i o h y b u a s m y k u. Jsou však hojné případy, kdy možno vůbec nedbati účinku síly T, a v těchto případech mluví se o p r o s t é p r u ž n o s t i v o h y b u. Tyto případy mějme tu především na zřeteli; účinek síly T a kombinaci jeho s účinkem momentu M vyšetříme níže.

Za daného obtížení má každý průřez (x) svou sílu posouvající T a svůj moment ohybový M; jdeme-li průřez od průřezu, mění se vůbec T i M jsouce tedy funkcemi úsečky x. Lze dovoditi, že *funkce T jest první derivací funkce M dle x.*

Jestliže totiž průřezem (x) rozdělíme nosník v díly levý a pravý a odejmeme-li onen žádajíce, by rovnováhový stav tohoto byl zachován, musíme levý díl nahraditi silou T a dvojicí Δ o momentu M; kdybychom místo průřezu (x) vedli průřez $(x + dx)$, bylo by levý díl nahraditi silou $T_1 = T + dT$ a dvojicí Δ_1 o momentu $M_1 = M + dM$. Odejmeme-li však zde díl pravý místo levého, nutno připojiti sílu a dvojici téže velikosti ale protivného směru a smyslu. V prvek deskový obsažený mezi oběma průřezy (x), $(x + dx)$ působí tedy: s levé strany T, Δ, s pravé $-T_1$, $-\Delta_1$, a mimo to jistý prvek dQ obtížení; že by v prvek nosníkový (dx) působila konečná síla zevnitřní, vylučme, přisuzujíce případné osamělé

břímě P dílu nosníkovému buď na levé straně průřezu (x) nebo na pravé straně průřezu $(x + dx)$.

Všecky tyto síly lze si mysliti v rovině XZ; za jejich působení jest dotčený prvek nosníka v rovnováze. Máme tedy výminky

$$T - T_1 - dQ = 0,$$
$$M - M_1 + T\,dx - dQ.\,\beta\,dx = 0;$$

poslední rovnice, kde β jest číselný součinitel menší než jednička, obsahuje statické momenty všech sil vzhledem k těžišti o' průřezu $(x + dx)$. Položíme-li za T_1, M_1 hodnoty svrchu vytčené a nedbáme-li nekonečně malého členu řádu druhého, vyjde jednak

$$(7) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dT}{dx} = -\frac{dQ}{dx} = -q,$$

jednak

$$(8) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dM}{dx} = T,$$

jak svrchu vysloveno.

P ř i p o m e n u t í. Poněvadž síla posouvající T jest vždy veličinou k o n e č n o u, náleží k nekonečně malé změně úsečky x vždy jen nekonečně malá změna momentu M; moment ohybový má za daného obtížení v každém průřezu hodnotu j e d i n o u. O síle posouvající platí to jen za obtížení spojitého.

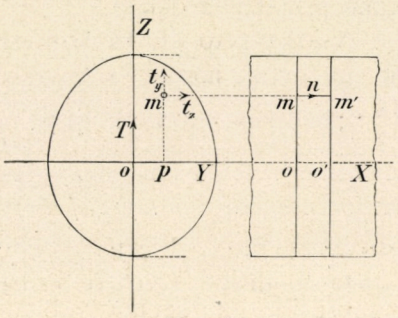
§ 22. **O silách vnitřních vůbec a normalných zvlášť.** Přihlédněme k silám vnitřním kteréhokoli průřezu (x). Kdykoli jde o body průřezu jediného, znamenejme příslušné osy souřadnicové prostě Y, Z (místo Y', Z'). V libovolném bodě m průřezu působí směrem osy X napětí normalné ν_x, pak jistým směrem napětí tangencialné $\tau_{(x)}$, jež rozkládáme ve složky τ_{xy} a τ_{xz} směrem os Y, Z. Složky tyto znamenejme jako v § 3. krátce τ_z, τ_y. Napětí ν_x, τ_y, τ_z náležejí k bodu m, přisuzujeme-li jej rovině průřezu příčného; mimo to mohou působiti obecně ještě napětí ν_y, ν_z, τ_z (viz § 3.). Tato však bývají zde rovna nulle neb aspoň nepatrna proti oněm, tak že jich v praxi dbáti nemusíme.*) Poněvadž pak ν_x jest jediným napětím normalným, znamenejme je krátce písmenem ν bez přípony.

Myslíme-li si při bodě m plošný prvek obsahu du, náležejí k němu vnitřní síly

$$n = \nu\,du, \quad t_y = \tau_y\,du, \quad t_z = \tau_z\,du$$

*) K napětí ν_z přihlédneme ostatně v § 40.

(obr. 9.). Takové tři síly vnitřní působí v každý prvek průřezový; myslíme-li si, že naznačují působení pravého dílu nosníkového v díl levý, jsou veškeré tyto vnitřní síly v rovnováze se silami zevnitřními dílu levého, tedy se silou T a dvojicí Δ, což vyjadřuje se šesti rovnicemi, z nichž tři se týkají složek všech sil směrem každé z os X, Y, Z, ostatní tři pak statických momentů všech sil vzhledem k těmto osám. Máme tedy výminky rovnováhy



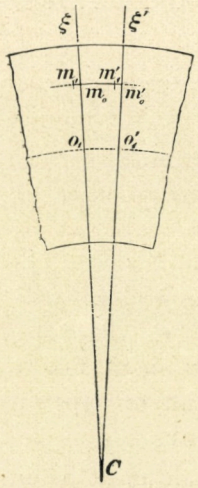
Obr. 9.

$$\Sigma n = 0, \quad \Sigma t_z = 0, \quad T + \Sigma t_y = 0,$$
$$\Sigma (t_z z - t_y y) = 0, \quad M + \Sigma n z = 0, \quad \Sigma n y = 0$$

nebo, vložíme-li v ně příslušná napětí

$$(a) \begin{cases} \int \nu \, d u = 0, \quad \int \tau_z \, d u = 0, \quad T + \int \tau_y \, d u = 0, \\ \int (\tau_z z - \tau_y y) \, d u = 0, \quad M + \int \nu z \, d u = 0, \quad \int \nu y \, d u = 0. \end{cases}$$

Souměrností prutu i zevnitřních sil vzhledem k rovině XZ vymíněna jest i souměrnost vnitřních sil vzhledem k této rovině; tím jest vyhověno d r u h é, č t v r t é a š e s t é z rovnic (a), jež tedy nepřispívají dále ku stanovení sil vnitřních.



Obr. 10.

Vyšetřujme nejprve napětí ν, které jest obsaženo jen v rovnici p r v n í, p á t é a šesté.

K danému průřezu (x) mysleme si průřez nekonečně blízký $(x + dx)$, a přihlížejme ku stejně položeným bodům m, m' obou průřezů, omezujícím linearný prvek $\overline{m\,m'} = dx$ (obr. 9.). Působením sil zevnitřních přetvořuje se nosník; těžiště o, o', ... jednotlivých průřezů přetvořením nabývají nových poloh o_1, o_1', ..., které již nejsou na přímce, ale vyplňují křivku, kterou zoveme k ř i v k o u o h y b o v o u. Ze zmíněné svrchu souměrnosti nosníku a sil zevnitřních i vnitřních vzhledem k rovině XZ vyplývá, že čára ohybová nemůže míti bodů mimo rovinu XZ a jest tedy k ř i v k a r o v i n n á.*)

Mysleme si ku křivce ohybové v bodech o_1, o_1' (obr. 10.) normalné roviny ξ, ξ'; společná přímka C obou těchto rovin jest o s o u k ř i v o s t i čáry ohybové

*) Kdyby totiž křivka ohybová měla v některém průřezu bod mimo rovinu XZ, musel by jí náležeti též bod k onomu souměrný vzhledem k rovině XZ, což nemožno.

v bodě o_1. Přímka C jest pravoúhelna k rovině XZ a proniká tuto rovinu v bodě c, středu to křivosti čáry ohybové.

Nová poloha $\left\{\begin{matrix} m_1 \\ m_1' \end{matrix}\right\}$ bodu $\left\{\begin{matrix} m \\ m' \end{matrix}\right\}$ obecně není obsažena v rovině $\left\{\begin{matrix} \xi \\ \xi' \end{matrix}\right\}$; body m_1, m_1' vyplňují po přetvoření nosníku jakési křivé plochy. Založme vyšetřování na *hypothese, že tyto plochy* (m_1), (m_1'), *jež přetvořením nosníka vznikly z průřezů nekonečně blízkých, jsou vespolek shodny a k příslušným normalným rovinám* ξ, ξ' *stejně položeny.*

Tu lze body m_1, m_1' pokládati za rovně vzdálené od osy C křivosti a mysliti si jimi kruhový obloučeк, jehož střed jest na ose C, a jehož rovina jest pravoúhelna k této ose. Seče-li tento obloučeк rovinu $\left\{\begin{matrix} \xi \\ \xi' \end{matrix}\right\}$ v bodě $\left\{\begin{matrix} m_0 \\ m_0' \end{matrix}\right\}$, plyne z dotčené hypothese, že $\overline{m_1 m_0} = \overline{m_1' m_0'}$ a tedy $\overline{m_1 m_1'} = \overline{m_0 m_0'}$; délková změna prvku $\overline{m m'}$ jest tedy tatáž, jako by bod $\left\{\begin{matrix} m_1 \\ m_1' \end{matrix}\right\}$ náležel rovině $\left\{\begin{matrix} \xi \\ \xi' \end{matrix}\right\}$.*) V bodě m průřezu (x) jeví se tedy poměrné roztažení

$$\lambda = \frac{\overline{m_1 m_1'} - d\,x}{d\,x} = \frac{\overline{m_0 m_0'} - d\,x}{d\,x},$$

pročež

$$\overline{m_0 m_0'} = (1 + \lambda)\, d\,x.$$

Poměrné roztažení mění se v průřezu (x) bod od bodu; má-li v těžišti hodnotu λ_0, platí obdobná relace

$$\overline{o_1 o_1'} = (1 + \lambda_0)\, d\,x,$$

tak že poměr

$$\frac{\overline{m_0 m_0'}}{\overline{o_1 o_1'}} = \frac{1 + \lambda}{1 + \lambda_0}.$$

Leč

$$\frac{\overline{m_0 m_0'}}{\overline{o_1 o_1'}} = \frac{\varrho + z}{\varrho} = 1 + \frac{z}{\varrho},$$

kde $\varrho = c\,\overline{o_1}$ jest poloměr křivosti čáry ohybové; proto

$$\frac{1 + \lambda}{1 + \lambda_0} = 1 + \frac{z}{\varrho}.$$

*) Větším dílem užívá se hypothese, že hmotné body, které před deformací náležely průřezu, i po přetvoření náležejí průřezu, totiž rovině normálné ku čáře ohybové (hypothesis Navierova). Jak patrno, vedou obě hypothese k témuž výsledku, co se týče roztažení.

Vyloučíme-li jmenovatele $1 + \lambda_0$, vyjde

$$1 + \lambda = 1 + \lambda_0 + \frac{z}{\varrho} + \lambda_0 \frac{z}{\varrho}.$$

V případech praktických jsou λ, λ_0, $\frac{z}{\varrho}$ zlomky velmi malé; součin $\lambda_0 \frac{z}{\varrho}$ jest tedy veličina malá řádu vyššího a může se ho nedbati proti činitelům jednotlivým. Tak dospíváme k rovnici

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{z}{\varrho}.$$

Poněvadž zde klademe $\nu_y = \nu_z = 0$, platí po mez úměrnosti rovnice

$$\nu = E\,\lambda, \quad \nu_0 = E\,\lambda_0,$$

tak že možno psáti

$$(b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \nu = \nu_0 + \frac{E\,z}{\varrho},$$

a tím vyjádřen zákon, jak napětí ν v průřezu se mění bod od bodu.

Bychom ustanovili konstanty ν_0, ϱ, vložme za ν výraz (b) do první a páté z dotčených svrchu rovnic rovnováhových (a). Tak vychází

$$(c) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \nu_0 \int du + \frac{E}{\varrho} \int z\,du = 0 \\ M + \nu_0 \int z\,du + \frac{E}{\varrho} \int z^2\,du = 0. \end{cases}$$

Z integralů v těchto rovnicích obsažených, jež se vztahují ke všem prvkům průřezu, znamená

$$\int du = U$$

plošný obsah průřezu;

$$\int z\,du = 0$$

jakožto statický moment průřezu vzhledem k ose Y jdoucí těžištěm průřezovým; zbývající integral

$$\int z^2\,du = J,$$

jenž se zove momentem setrvačnosti (momentum inertiae) průřezu vzhledem k ose Y, bude nám stanoviti při všech důležitých tvarech průřezových.

Rovnice (*c*) nabývají tedy tvaru

$$(d) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad v_0 = 0,$$

$$(e) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad M + \frac{EJ}{\varrho} = 0.$$

V poslední rovnici znamená M moment ohybu, totiž moment dvojice Δ_0 neboli moment sil zevnitřních levého dílu nosníkového vzhledem k ose Y; s ním musí se rušiti obdobný moment M' sil vnitřních, jimiž pravý díl působí v levý. Moment M' nazývejme momentem odporu. Rovnice (*e*) ukazuje, že

$$M' = \frac{EJ}{\varrho}.$$

Na základě rovnic (*d*), (*e*) nabývá rovnice (*b*) tvaru

$$(9) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad v = -\frac{Mz}{J}$$

neb i

$$v = \frac{M'z}{J},$$

tak že základní rovnice prostého ohybu možno psáti takto:

$$(10) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} M + M' = 0, \\ M' = \dfrac{vJ}{z} = \dfrac{EJ}{\varrho}, \end{cases}$$

t. j. součet momentu ohybu a momentu odporu rovná se nulle; moment odporu pak dán jest dvěma výrazy: v jednom obsaženo napětí v, v druhém poloměr ϱ křivosti čáry ohybové. Onoho se užívá, jde-li o napětí, tohoto, jde-li o přetvoření nosníku.

Jak ukazuje rovnice (9), nezávisí napětí v na souřadnici y a má tedy touž hodnotu ve všech bodech každé přímky s osou Y rovnoběžné. V bodech samé osy Y napětí v rovná se nulle; na protivných stranách osy Y má v znaménka protivná (na jedné jest tahem, na druhé tlakem). Osa Y zove se proto nullovou neboli neutralnou osou průřezu; je to přímka vodorovná obsahující těžiště průřezové.*) Vyvozený zákon lze tedy vyjádřiti takto: *Postupujeme-li v průřezu bod od bodu, mění se normalné napětí úměrně ku vzdálenosti bodu od osy neutralné.*

Rovnice (9) dává i znaménko napětí v, šetříme-li vytčeného svrchu pravidla o znaménku momentu M, a pokládáme-li vzhůru směřující polo-

*) Nejsou-li síly zevnitřní svislé, obsahuje osa neutralná těžiště průřezové a jest pravoúhelna k silám zevnitřním.

vici osy Z za positivnou; což plyne z úvahy následující. Neutralná osa dělí průřez v díl hořejší a dolejší; v jednom z nich máme napětí v tahu, v druhém napětí v tlaku. Budiž $\left\{\begin{matrix} N_1 \\ N_2 \end{matrix}\right\}$ výslednice normalných sil vnitřních dílu $\left\{\begin{matrix} \text{hořejšího} \\ \text{dolejšího} \end{matrix}\right\}$, tedy

$$N_1 = \int_0^{e_1} v\,du, \quad N_2 = \int_{-e_2}^{0} v\,du,$$

kde e_1, $-e_2$ jsou krajní hodnoty souřadnice z. Poněvadž dle první z rovnic (*a*)

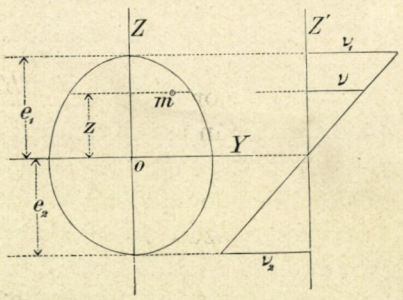
$$\int_{-e_2}^{e_1} v\,du = \int_{-e_2}^{0} v\,du + \int_0^{e_1} v\,du = N_2 + N_1 = 0,$$

máme

$$-N_2 = N_1;$$

moment dvojice $(N_1 N_2)$ jest pak momentem M' odporu. Jest-li M $\left\{\begin{matrix} \text{positivný} \\ \text{negativný} \end{matrix}\right\}$, musí M' býti $\left\{\begin{matrix} \text{negativný} \\ \text{positivný} \end{matrix}\right\}$, tedy N_1 býti $\left\{\begin{matrix} \text{tlakem} \\ \text{tahem} \end{matrix}\right\}$, N_2 $\left\{\begin{matrix} \text{tahem} \\ \text{tlakem} \end{matrix}\right\}$. Hořejší díl průřezový jest pak $\left\{\begin{matrix} \text{tlačen} \\ \text{tažen} \end{matrix}\right\}$, dolejší $\left\{\begin{matrix} \text{tažen} \\ \text{tlačen} \end{matrix}\right\}$. Rovnice (9) dává pak skutečně za $\left\{\begin{matrix} \text{positivného} \\ \text{negativného} \end{matrix}\right\}$ M k positivnému z napětí $\left\{\begin{matrix} \text{negativné} \\ \text{positivné} \end{matrix}\right\}$, k negativnému z napětí $\left\{\begin{matrix} \text{positivné} \\ \text{negativné} \end{matrix}\right\}$.

Jestliže napětí v, náležející ku vzdálenosti z, na základě zvoleného měřidla vyjádříme přímým úsekem a pokládáme tento úsek za pořadnici náležející k úsečce z, stanoví rovnice (9) přímku, kterou nazývejme **přímkou napětí** v (obr. 11.). Krajní hodnoty napětí náležejí ku krajním hodnotám $e_1, -e_2$ pořadnice z; jsou to



Obr. 11.

$$v_1 = -\frac{M e_1}{J}, \quad v_2 = \frac{M e_2}{J}.$$

Která z nich jest tahem a která tlakem, závisí na znaménku momentu M.

Výminky bezpečné pevnosti. Jde-li o prostou pružnost v ohybu, totiž o případy, kde netřeba dbáti účinku síly posouvající T, jest nám přihlížeti jen k napětí v, jež působí směrem osy X. Pak mají — jako při prosté pružnosti v tahu či tlaku — hlavní idealná napětí hodnoty

$$v, -\frac{v}{m}$$

a stačí pravidlem zase vyhověti výmince, že

$$\pm v \leqq k.$$

Jde-li o určitý průřez, vyskytují se krajní hodnoty napětí v v bodech od osy neutralné nejvzdálenějších. Jest-li v' největší napětí v tahu, v'' největší prostá hodnota napětí v tlaku, e', e'' pak příslušné vzdálenosti krajních míst průřezových od osy neutralné, nutno, aby

$$v' = \frac{M e'}{J} \leqq k',$$

$$v'' = \frac{M e''}{J} \leqq k'',$$

kde M znamená prostou hodnotu momentu ohybového. Musí tedy

$$\frac{M}{J} \leqq \frac{k'}{e'},$$

$$\frac{M}{J} \leqq \frac{k''}{e''}.$$

Největší dovolená hodnota podílu $\frac{M}{J}$ smí se tedy nejvýše rovnati menšímu z obou podílů $\frac{k'}{e'}$, $\frac{k''}{e''}$; znamenáme-li tento menší podíl $\frac{k}{e}$, máme jedinou výminku

$$\frac{M}{J} = \frac{k}{e}$$

neboli

$$\frac{J}{e} = \frac{M}{k}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

e znamená krajní hodnotu vzdálenosti z od osy Y na té straně, ku které náleží menší z obou podílů $\frac{k'}{e'}$, $\frac{k''}{e''}$.

Podíl $\frac{J}{e}$ jest funkce rozměrů průřezových; zove se obyčejně modulem průřezovým. Rozměry průřezové stanovíme pak z rovnice (11), jež vyslovuje, že *modul průřezový musí se rovnati podílu z ohybového momentu a dovoleného namáhání.*

Dejme na př. tomu, že

$$\frac{k'}{e'} < \frac{k''}{e''};$$

pak nutno přihlížeti ku straně t a ž e n é a stanoviti průřezové rozměry z rovnice

$$\frac{J}{e'} = \frac{M}{k'};$$

tu

$$\frac{M}{J} = \frac{k'}{e'} < \frac{k''}{e''},$$

neboli

$$\frac{M e'}{J} = k', \quad \frac{M e''}{J} < k'',$$

t. j. krajní napětí na straně tažené dosahuje dovolené hodnoty k', na tlačené však zůstává prostá hodnota krajního napětí pod dovolenou hodnotou k''. To není výhodné po stránce hospodářské; žádoucno tedy, by

$$\frac{k'}{e'} = \frac{k''}{e''}$$

neboli

$$\frac{e''}{e'} = \frac{k''}{k'};$$

jen za touto výminkou v y u ž i j e s e o d p o r u h m o t y n a s t r a n ě t a ž e n é i t l a č e n é s t e j n o u m ě r o u.

Jest-li tato výminka naplněna, lze rovnici (11) napsati pro kteroukoli z obou stran průřezových, taženou či tlačenou.*)

Co jsme tu dosud vyložili, týkalo se jediného průřezu nosníkového. Postupujeme-li průřez od průřezu, mění se moment ohybový M a p ř i n o s n í k u p r ů ř e z u p r o m ě n n é h o mění se i podíly $\frac{J}{e'}$, $\frac{J}{e''}$. Proto mění se i hodnoty ν', ν'', a sluší přihlížeti k max ν', max ν'' žádajíc, aby

$$\max \nu' \leqq k', \quad \max \nu'' \leqq k''$$

neboli

$$\frac{\max \nu'}{k'} \leqq 1, \quad \frac{\max \nu''}{k''} \leqq 1.$$

*) Při železe kujném a oceli brává se $k'' = k'$, tak že se doporučuje, by $e'' = e'$. Při železe litém, o kterém však rovnice (9) vlastně neplatí, poněvadž při něm není úměrnosti mezi napětím a roztažením, brává se $k'' = 2\,k'$, z čehož by vycházelo $e'' = 2\,e'$. Při dřevě nevolíme poměr $\frac{e''}{e'}$ sami, jsouce vázáni přírodou.

Obě výminky bezpečné pevnosti lze pak nahraditi jedinou, totiž že *větší z obou těchto podílů smí se rovnati jedničce.*

Průřez, k němuž náleží větší z obou podílů

$$\frac{\max \nu'}{k'}, \qquad \frac{\max \nu''}{k''},$$

zove se nebezpečným průřezem nosníkovým.

Jde-li o nosník prismatický t. stálého průřezu, jsou podíly $\frac{J}{e'}$, $\frac{J}{e''}$ stálé, a nebezpečným průřezem jest ten, v němž moment ohybový má největší prostou hodnotu. Rovnici (11) sluší pak napsati pro tento průřez; veličiny e, k vztahují se zase k té straně průřezové, k níž náleží menší z obou zlomků $\frac{k'}{e'}$, $\frac{k''}{e''}$.

Součinitel pevnosti v ohybu. Tak jako se zkouší pružnost a pevnost látek v tahu a tlaku, lze podnikati zkoušky pružnosti a pevnosti v ohybu. Při zkouškách pružnosti a pevnosti v tahu známá rovnice

$$\nu = \frac{N}{U}$$

dává napětí ν dosti přibližně až po mez pevnosti a stanoví tedy též součinitele $\varkappa'$ pevnosti. Co však ohybu se týče, má rovnice

$$\nu = \frac{M}{\left(\frac{J}{e}\right)},$$

kde ν znamená krajní hodnotu napětí v průřezu nebezpečném, k němuž nechť se vztahují též ostatní veličiny v rovnici obsažené, platnost jen po mez úměrnosti a to jen při látkách, jež se řídí zákonem Hookovým; proto nelze z ní vypočísti $\max (\pm \nu)$, jakmile mez úměrnosti jest přestoupena. Jestliže tedy nosník namáháme ohybem, a dostupuje-li se meze pevnosti za hodnoty M_0 momentu ohybového, tu podíl

$$\nu_0 = \frac{M_0}{\left(\frac{J}{e}\right)}$$

není skutečným napětím látky na mezi pevnosti v ohybu; jest to veličina pouze myslná, jež by znamenala skutečné napětí na mezi pevnosti v ohybu, kdyby zákon Hookův i hypothesis svrchu při vyšetřování pružnosti v ohybu pronesená, na nichž se zakládá dotčená svrchu rovnice, platily až po mez pevnosti. Prostá hodnota $\varkappa_0$ napětí ν_0 zove se součinitelem pevnosti v ohybu. Jak zkoušky ukazují, závisí $\varkappa_0$

nejen na látce ale i na tvaru průřezovém; závislost tato jeví se menší měrou při látkách, jež hoví zákonu Hookovu, než při těch, které zákonem tím se neřídí. Látky prakticky důležité porušují se ohybem téměř vždy na straně tažené; součinitel $\varkappa_0$ jest však větší než součinitel $\varkappa'$, získaný zkouškami pevnosti v tahu.

Není pochybnosti, že na mezi pevnosti platí jiné zákony než po mez pružnosti; možno-li pak při jistých látkách i přes mez pružnosti připustiti přibližnou úměrnost napětí ku vzdálenosti od neutralné osy, neprochází tato osa těžištěm průřezovým.

Součinitel $\varkappa_0$ má zvláštní důležitost při látkách, jež se neřídí zákonem Hookovým, při kterých tedy nelze namáhání v ohybu vyjádřiti napětím v tahu a tlaku.

Buďtež tu vytčeny některé hodnoty součinitele $\varkappa_0$, vesměs v kg/cm^2.

Dřevo (hodnoty střední):

borovice	420
jedle	440
smrk	430
modřín	530
dub	600
buk	670.

Kámen:

žula	40 až 260
vápenec	50 „ 150
pískovec	20 „ 180
cihly	37 „ 80.

Co se týče železa litého, odvodil Bach ze svých zkoušek, že poměr součinitelů $\varkappa_0$ a $\varkappa'$ vyjádřiti lze přibližně vzorcem

$$\frac{\varkappa_0}{\varkappa'} = \delta \sqrt{\frac{e}{z_0}},$$

kde znamená: e krajní hodnotu vzdálenosti z od osy Y na straně tažené, z_0 vzdálenost těžiště dílu průřezového, položeného na jedné straně osy Y, od této osy, konečně δ součinitele, který při průřezech, ježto v krajních (od Y nejvzdálenějších) místech $\left\{\begin{matrix}\text{jsou}\\\text{nejsou}\end{matrix}\right\}$ omezeny přímkou rovnoběžnou s osou Y, majíce tam tedy šířku $\left\{\begin{matrix}\text{konečnou}\\\text{rovnou nulle}\end{matrix}\right\}$, jako na př. $\left\{\begin{matrix}\text{obdélník}\\\text{kruh}\end{matrix}\right\}$, má hodnotu $\left\{\begin{matrix}\frac{6}{5}\\\frac{4}{3}\end{matrix}\right\}$.*)

*) Při tom se pokládá, že nosník z litého železa jest zbaven kory litím vzniklé; není-li tomu tak, platí součinitelé $\left\{\begin{matrix}1\\1{\cdot}1\end{matrix}\right\}$.

§ 23. **O momentech setrvačnosti a momentu deviačním.** V předešlém § namítl se moment setrvačnosti průřezu vzhledem k ose Y, jež obsahujíc těžiště průřezové, jest pravoúhelna k silám zevnitřním. Poněvadž později namítnou se nám momenty setrvačnosti vzhledem k jiným ještě osám, obírejme se poněkud podrobněji theorií těchto a příbuzných veličin.

Každou přímku v rovině daného obrazce možno pokládati za osu setrvačnosti téhož obrazce; osy obsahující těžiště nazývejme osami těžišťovými neboli centralnými.

Jde-li o libovolnou osu X, a mají-li jednotlivé body obrazce od ní pravoúhelné vzdálenosti y, jest

$$(12) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots J = \int y^2 \, du$$

moment setrvačnosti obrazce vzhledem k ose X.

Pokládáme-li obsahy plošné vůbec a tedy též obsahy du plošných prvků za veličiny prosté, jest J nezbytně positivné a, jak patrno, veličinou čtyř rozměrů. Podíl $\frac{J}{U}$ jest pak tolikéž positivný a veličinou dvou rozměrů; lze tedy položiti

$$(13) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{J}{U} = i^2,$$

kde i znamená délku, kterou zoveme poloměrem setrvačnosti obrazce vzhledem k ose X.*)

a) Jak se k sobě mají momenty a poloměry setrvačnosti vzhledem k osám rovnoběžným. Jsou-li X, X' dvě rovnoběžné osy, z nichž X nechť obsahuje těžiště o obrazce, X' pak nechť má od něho vzdálenost $\mp c$, a znamenáme-li vzdálenost kteréhokoli bodu m obrazce od osy $\left\{\begin{matrix} X \\ X' \end{matrix}\right\}$ písmenem $\left\{\begin{matrix} y \\ y' \end{matrix}\right\}$, platí relace

$$\begin{aligned} y' &= y \mp c, \\ y'^2 &= y^2 \mp 2\,c\,y + c^2; \end{aligned}$$

násobíme-li tu obě strany činitelem du a integrujeme-li v mezích obrazce, vychází

$$\int y'^2 \, du = \int y^2 \, du \mp 2\,c \int y \, du + c^2 \int du$$

---

*) Abychom seznali, co vlastně znamená poloměr setrvačnosti, pomysleme si obsah U daného obrazce v podobě proužku obsaženého mezi dvěma nekonečně blízkými přímkami s osou X rovnoběžnými (proužek jsa nekonečně úzký musil by za to býti nekonečně dlouhý); má-li proužek ten (neb i dva takové proužky, položené souměrně na protivných stranách osy X), od ní vzdálenost $\mp i$, náleží mu týž moment $J = U\,i^2$ setrvačnosti jak obrazci danému.

anebo

$$(14) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots J' = J + U c^2,$$

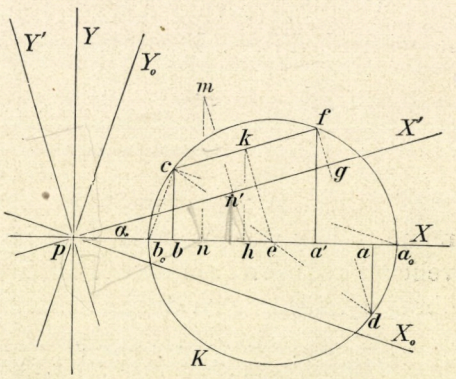
kde $\left\{\begin{matrix} J \\ J' \end{matrix}\right\}$ jest moment setrvačnosti obrazce vzhledem k ose $\left\{\begin{matrix} X \\ X' \end{matrix}\right\}$; moment statický $\int y\, du$ rovná se nulle.

Rozdělíme-li na obou stranách dělitelem U, obdržíme

$$(14^a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots i'^2 = i^2 + c^2,$$

t. j. *poloměr i' setrvačnosti vzhledem k ose necentralné rovná se přeponě pravoúhelného trojúhelníka, jehož jednou odvěsnou jest poloměr i setrvačnosti vzhledem k rovnoběžné ose centralné, druhou odvěsnou pak vzdálenost obou os.*

b) Jak se k sobě mají momenty a poloměry setrvačnosti vzhledem k osám různoběžným. O momentech deviačních. Libovolným bodem p v rovině daného obrazce mysleme si různé osy setrvačnosti. Dvě z nich X, Y, vzájemně pravoúhelné, nechť představují soustavu základní (obr. 12.); kterékoli dvě jiné X', Y', tolikéž vzájemně pravoúhelné, stanoveny jsou úhlem $XX' = \alpha$, $\left\{\begin{matrix} \text{positivným} \\ \text{negativným} \end{matrix}\right\}$ ve smyslu pravého úhlu $\left\{\begin{matrix} XY \\ YX \end{matrix}\right\}$.



Obr. 12.

Libovolný bod m daného obrazce (mysleme si tento bod nejprve v prvním čtverníku obou soustav osových) má v soustavě $\left\{\begin{matrix} X\ Y \\ X'\ Y' \end{matrix}\right\}$ souřadnice

$$\left\{\begin{matrix} x = \overline{p\,n}, & y = \overline{n\,m} \\ x' = \overline{p\,n'}, & y' = \overline{n'\,m} \end{matrix}\right\}.$$

Jestliže lomené čáry $p\,n\,m$, $p\,n'\,m$, jež mají společný počátek p i konec m, promítneme v libovolnou osu, vzniknou průměty rovné. Zvolíme-li X' za osu promítání, dospějeme k rovnici

$$\overline{p\,n'} \cos X'\,X^{\wedge} + \overline{n'\,m} \cos X'\,Y^{\wedge} = \overline{p\,n} \cos X'\,X + \overline{n\,m} \cos X'\,Y$$

neboli

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha.$$

Pokládáme-li Y' za osu promítání, platí obdobně

$$\overline{p\,n'} \cos Y'X' + \overline{n'\,m} \cos Y'Y' = \overline{p\,n} \cos Y'X + \overline{n\,m} \cos Y'Y$$

neboli

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Lze se snadně přesvědčiti, že rovnice tyto nepozbývají platnosti, postoupíme-li k bodům m obsaženým v jiných čtvernících soustav souřadnicových.

Jestliže obě strany rovnic, vyjadřujících souřadnice x', y' souřadnicemi x, y a úhlem α, zdvojmocníme, činitelem du znásobíme a zintegrujeme, vyjde

$$\int x'^2\,du = \cos^2\alpha \int x^2\,du + \sin^2\alpha \int y^2\,du + \sin 2\alpha \int x\,y\,du,$$

$$\int y'^2\,du = \sin^2\alpha \int x^2\,du + \cos^2\alpha \int y^2\,du - \sin 2\alpha \int x\,y\,du.$$

V těchto rovnicích vyskytují se momenty setrvačnosti vzhledem k osám X, Y, X', Y', totiž

$$J_x = \int y^2\,du, \quad J_y = \int x^2\,du,$$

$$J_x' = \int y'^2\,du, \quad J_y' = \int x'^2\,du,$$

mimo to pak veličina nová, totiž integral součinu $x\,y\,du$. Nazýváme tuto veličinu momentem deviačním (také momentem odstředivosti) obrazce vzhledem ku dvojině osové $X\,Y$. Znamenejme

$$(15) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \int x\,y\,du = D^*)$$

a stanovme obdobnou veličinu

$$D' = \int x'\,y'\,du$$

vzhledem k soustavě $X'\,Y'$. Z výrazů souřadnic x', y' plyne

$$\int x'\,y'\,du = \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha \left(\int y^2\,du - \int x^2\,du \right) + \cos 2\alpha \int x\,y\,du.$$

Kratším označením jednotlivých momentů nabýváme rovnic

$$(16) \ldots\ldots \begin{cases} J_y' = J_y \cos^2\alpha + J_x \sin^2\alpha + D \sin 2\alpha, \\ J_x' = J_y \sin^2\alpha + J_x \cos^2\alpha - D \sin 2\alpha, \\ D' = \tfrac{1}{2}(J_x - J_y) \sin 2\alpha + D \cos 2\alpha. \end{cases}$$

*) Moment deviační jest jako moment setrvačnosti veličinou čtyř rozměrů, může však míti znaménko positivné či negativné.

Rovnicemi (16) lze momenty setrvačnosti a moment deviační vzhledem k osám X', Y' stanoviti z obdobných momentů vzhledem k osám X, Y a z úhlu α.

Z prvních dvou rovnic soustavy (16) vychází sečtením

$$(17) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots J_x' + J_y' = J_x + J_y,$$

t. j. *součet momentů setrvačnosti má touž hodnotu vzhledem ku každé dvojině pravoúhelných os vedených týmž bodem.*

Relace, jichž výrazem jsou rovnice (16), lze výhodně vyložiti m ě ř i c k y

Vyjádřeme na základě případného měřidla momenty J_x, J_y, D délkami a přenesme J_x, J_y na tu z obou os X, Y, k níž náleží v ě t š í z obou těchto momentů setrvačnosti. Jest-li to osa X (obr. 12.), učiňme tedy

$$\overline{p\,a} = J_x, \quad \overline{p\,b} = J_y,$$

v bodech a, b vztyčme pak pořadnice

$$\overline{a\,d} = -D, \quad \overline{b\,c} = D,$$

šetříce ovšem znaménka momentu D; pokládajíce úsek $\overline{c\,d}$ za průměr kružnice, sestrojme tuto křivku K, jejížto střed e jest patrně na ose X.

Dána-li pak osa X', odchýlená od X o úhel α, veďme bodem c v kružnici tětivu $c\,f$ rovnoběžnou s osou X' (anebo bodem d tětivu $d\,f$ pravoúhelně k X') a bodem f pořadnici $f\,a'$ pravoúhelně k X.

Seče-li přímka $d\,f$ osu X' v bodě g, jest $\overline{p\,a'}$ průmět lomené čáry $p\,g\,f$ v osu X, $\overline{a'\,f}$ pak se rovná průmětu téže lomené čáry v osu Y; pročež

$$\overline{p\,a'} = \overline{p\,g}\cos\alpha - \overline{g\,f}\sin\alpha,$$
$$\overline{a'\,f} = \overline{p\,g}\sin\alpha + \overline{g\,f}\cos\alpha.$$

Leč $\overline{p\,g}$ jest průmět lomené čáry $p\,a\,d$ v osu X', $\overline{g\,f}$ pak se rovná průmětu lomené čáry $p\,b\,c$ v osu Y', tak že

$$\overline{p\,g} = J_x\cos\alpha - D\sin\alpha,$$
$$\overline{g\,f} = -J_y\sin\alpha + D\cos\alpha.$$

Proto

$$\overline{p\,a'} = J_x\cos^2\alpha + J_y\sin^2\alpha - D\sin 2\alpha,$$
$$\overline{a'\,f} = \tfrac{1}{2}(J_x - J_y)\sin 2\alpha + D\cos 2\alpha,$$

a tedy dle druhé a třetí z rovnic (16)

$$J_x' = \overline{p\,a'}, \quad D' = \overline{a'\,f}.$$

Kružnice K, určená průměrem $\overline{c\,d}$, kterou tedy možno sestrojiti, dány-li momenty J_x, J_y vzhledem ku dvěma pravoúhelným osám X, Y a pří-

slušný moment deviační D, dává dle toho moment setrvačnosti vzhledem k libovolné třetí ose X', jakož i moment deviační vzhledem k libovolné pravoúhelné dvojině osové X', Y'. Točí-li se osa X' (s ní pak osa Y') okolo bodu p, točí se i tetiva $c\,f$ s osou X' rovnoběžná okolo bodu c; při tom mění se moment deviační tak, jak ukazuje pořadnice $\overline{a'\,f}$ koncového bodu tetivy, a moment setrvačnosti tak, jak ukazuje vzdálenost $\overline{p\,a'}$ této pořadnice od bodu p. Moment deviační jest $\left\{\begin{matrix}\text{positivný}\\ \text{negativný}\end{matrix}\right\}$, jest-li f na $\left\{\begin{matrix}\text{positivné}\\ \text{negativné}\end{matrix}\right\}$ straně osy X; přišel-li bod f do jednoho z průsečíků a_0, b_0 kružnice K s osou X, rovná se deviační moment nulle. Příslušné osy X_0, Y_0, rovnoběžné s tetivami $c\,a_0$, $c\,b_0$, zovou se hlavními osami setrvačnosti, příslušné momenty

$$J_2 = \overline{p\,a_0},\quad J_1 = \overline{p\,b_0}$$

hlavními momenty setrvačnosti v bodě p; onen jest maximum, tento minimum všech momentů setrvačnosti vzhledem k osám obsahujícím bod p. Osu $\left\{\begin{matrix}Y_0\\ X_0\end{matrix}\right\}$, k níž náleží $\left\{\begin{matrix}\text{nejmenší}\\ \text{největší}\end{matrix}\right\}$ moment setrvačnosti, nazývejme $\left\{\begin{matrix}\text{první}\\ \text{druhou}\end{matrix}\right\}$ hlavní osou setrvačnosti v bodě p.

Jest-li bod p těžištěm daného obrazce, dospíváme konstrukcí svrchu vyloženou ku hlavním centralným osám a momentům setrvačnosti.

Hledíce zároveň k rovnici (14) můžeme říci, že ku první hlavní ose centralné náleží absolutní minimum momentů setrvačnosti (nejmenší ze všech možných momentů setrvačnosti) daného obrazce.

Jak z obou momentů setrvačnosti J_x, J_y vzhledem ku dvěma pravoúhelným osám X, Y a z příslušného momentu deviačního D stanoviti graficky hlavní osy a momenty, bylo právě vyloženo. Z obr. 12. vychází však i řešení úlohy, známe-li místo deviačního momentu D moment $J_{x'}$ setrvačnosti vzhledem k libovolné třetí ose X'.

Přímka $e\,k$, vedená středem e kružnice K pravoúhelně k tetivě $\overline{c\,f}$ (obr. 12.), rozpoluje totiž tuto tetivu v bodě k, a pravoúhelným průmětem h bodu k v osu X rozpoluje se úsek $\overline{b\,a'}$. Dány-li tedy momenty setrvačnosti vzhledem k osám X, Y, X', učiňme

$$\overline{p\,a} = J_x,\quad \overline{p\,b} = J_y,\quad \overline{p\,a'} = J_{x'};$$

rozpolením úseku $\overline{b\,a}$ obdržíme střed e kružnice K, rozpolením úseku $\overline{b\,a'}$ bod h. Veďme $h\,k$ pravoúhelně k X, $e\,k$ pravoúhelně k X'; přímky $h\,k$, $e\,k$ mají společný bod k, jímž prochází přímka $c\,f$ rovnoběžná s X'. Přímka $c\,f$ seče pořadnice bodů b, a' v bodech c, f, jimiž jde kružnice K; máme-li tuto kružnici, lze úlohu řešiti způsobem svrchu vyloženým.

Velmi často jsou hlavní osy centralné známy předem. *Má-li daný obrazec osu symmetrie*, která pak ovšem obsahuje těžiště jeho, *jest tato osa symmetrie jednou hlavní osou centralnou, na př. Y; osa druhá X jde pak těžištěm pravoúhelně k oné.*

Jsou-li totiž m', m'' dva body obrazce, položené souměrně vzhledem k ose Y, dále x', y' a x'', y'' jejich souřadnice, a přisoudíme-li souměrným bodům i souměrné prvky plošné du' a du'', platí rovnice

$$x' y' du' + x'' y'' du'' = 0,$$

poněvadž $x'' = -x'$, $y'' = y'$, $du'' = du'$; v tomto případě součet

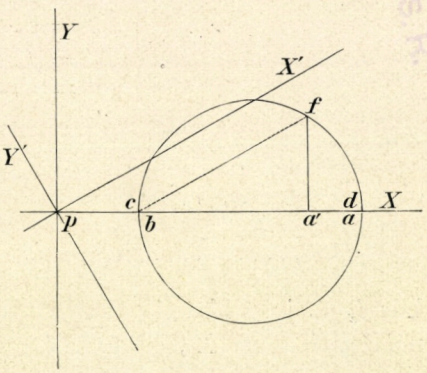
$$D = \int x y \, du$$

skládá se veskrze z takovýchto dvojčlenů hodnoty rovné nulle a rovná se tedy též nulle. To však jest výminkou os hlavních.

Z hlavních os a hlavních momentů setrvačnosti stanoví se momenty setrvačnosti a deviační vzhledem k jiným osám velmi pohodlně. Jsou-li (obr. 13.) X, Y hlavní osy v bodě p a J_x, J_y příslušné hlavní momenty, učiňme

$$\overline{p\,a} = J_x, \quad \overline{p\,b} = J_y;$$

poněvadž $D = 0$, sjednocuje se (přirovn. obr. 12.) bod c s bodem b, bod d s bodem a, pročež kružnice K má $\overline{b\,a}$ průměrem. Jde-li o kteroukoli jinou osu X' (a jest-li Y' osa k ní pravoúhelná), veďme $c\,f$ rovnoběžně k X', $f\,a'$ pravoúhelně k X; pak



Obr. 13.

$$J_{x'} = \overline{p\,a'}, \quad D' = \overline{a'\,f}.$$

Početně stanovíme hlavní osy na základě rovnic (16). Buďtež (jako v obr. 12.) X, Y dvě pravoúhelné osy setrvačnosti v bodě p a J_x, J_y, D příslušné momenty setrvačnosti a moment deviační. Aby X', Y', byly hlavními osami X_0, Y_0, musí $D' = D_0 = 0$; znamenáme-li úhel $X X_0$ písmenem α_0, dává třetí z rovnic (16)

$$(18) \ldots\ldots\ldots\ldots \tan 2\alpha_0 = -\frac{2D}{J_x - J_y}.$$

Rovnice tato stanoví dvě hodnoty úhlu α_0; hoví-li jí totiž úhel dutý $2\alpha_0'$, platí to též o vypuklém úhlu $2\alpha_0'' = 2\alpha_0' + 180^0$, tak že obdržíme

jakožto odchylku hlavní osy setrvačnosti od osy X dva úhly α_0', $\alpha_0'' = \alpha_0' + 90^0$, čímž jsou určeny obě osy hlavní X_0, Y_0. Příslušné hlavní momenty obdržíme z jedné z obou ostatních rovnic (16), na př. z druhé, totiž

$$J_h = J_x \cos^2 \alpha_0 + J_y \sin^2 \alpha_0 - D \sin 2\alpha_0,$$

kde jest položiti za α_0 po řadě obě hodnoty α_0', α_0''.

Dán-li místo deviačního momentu D moment J_x' setrvačnosti vzhledem ke třetí ose X', jež s osou X svírá úhel α, stanovme z druhé z rovnic (16)

$$D = \frac{J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_x'}{\sin 2\alpha},$$

vložme tuto hodnotu do rovnice (18) a postupujme pak jako svrchu.

Buďtež X, Y hlavní osy setrvačnosti v bodě p, dále X', Y' dvě libovolné osy vzájemně pravoúhelné. Tu $D = 0$, a rovnice (16) nabývají tvaru:

$$(16^a) \quad \begin{cases} J_y' = J_y \cos^2 \alpha + J_x \sin^2 \alpha, \\ J_x' = J_y \sin^2 \alpha + J_x \cos^2 \alpha, \\ D' = \frac{1}{2}(J_x - J_y) \sin 2\alpha. \end{cases}$$

Jestliže v druhé z těchto rovnic rozdělíme všecky členy obsahem U obrazce daného, vyjde

$$(19) \quad i_x'^2 = i_x^2 \cos^2 \alpha + i_y^2 \sin^2 \alpha,$$

kde i_x, i_y jsou hlavní poloměry setrvačnosti, i_x' pak poloměr setrvačnosti náležející k ose X', odchýlené od X o úhel α.

Na základě rovnice (19) lze jiným způsobem vyjádřiti měřicky souvislost momentů setrvačnosti obrazce vzhledem k osám různoběžným. Mysleme si na obou stranách osy X' přímky, jež jsouce s ní rovnoběžny mají od ní vzdálenost i_x'; točí-li se osa X' okolo bodu p, pohybují se i tyto rovnoběžky spojitě a mají určitou čáru obalovou. Lze dovoditi, že *touto čarou obalovou jest ellipsa, jejíž osy se sjednocují s hlavními osami setrvačnosti; poloosy ellipsy rovnají se hlavním poloměrům setrvačnosti.*

Dána-li totiž ellipsa v soustavě pravoúhelné $X\,Y$ středovou rovnicí

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

a myslíme-li si k ellipse tečny odchýlené od osy X o úhel α, mají tyto tečny od středu ellipsy vzdálenost d stanovenou výrazem

$$d^2 = b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha.$$

Přirovnáním této rovnice k rovnici (19) dovozen jest výrok svrchu položený. Ellipsu tuto zoveme ellipsou setrvačnosti daného

obrazce pro bod p. Ku každému bodu p v rovině obrazce náleží určitá ellipsa setrvačnosti; tato stanoví ku každé ose X' bodem p vedené *poloměr setrvačnosti jakožto vzdálenost bodu p od jedné z obou tečen, jež k ellipse vésti možno rovnoběžně s osou X'*. Ellipsa setrvačnosti, jež náleží k těžišti obrazce, zove se e l l i p s o u c e n t r a l n o u.*)

§ 24. **O momentech setrvačnosti a deviačních v soustavě kosoúhlé.** Vztahujme body m daného obrazce k ose X pořadnicemi jednou pravoúhelnými y, po druhé kosoúhelnými y'; jest-li úhel $Y\,Y' = \varepsilon$, platí relace

$$y = y' \cos \varepsilon.$$

Jestliže na obou stranách dvojmocníme, násobíme činitelem $d\,u$ a integrujeme, vychází rovnice

$$J = J' \cos^2 \varepsilon,$$

kde J jest pravoúhelný, J' kosoúhelný moment setrvačnosti obrazce vzhledem k ose X.

Dělme obě strany rovnice dělitelem U a položme jako svrchu

$$\frac{J}{U} = i^2, \quad \frac{J'}{U} = i'^2;$$

tak vyjde

$$i = i' \cos \varepsilon.$$

Abychom obdrželi tečny ellipsy setrvačnosti, veďme rovnoběžky s osou X a to jednou v pravoúhelné vzdálenosti $\pm i$, po druhé v kosoúhelné vzdálenosti $\pm i'$; jak patrno, dospějeme obojím způsobem k t ý m ž tečnám, a opětujeme-li to při dalších osách vedených bodem p v rovině obrazce, vychází táž ellipsa setrvačnosti. *Ellipsa setrvačnosti nezávisí tedy na směru, v kterém vzdálenosti od os měříme.*

---

*) Také jiná ellipsa dává poloměry setrvačnosti. Přeneseme-li na každou osu X' s obou stran bodu p délku $\overline{p\,q}$ úměrnou k reciproké hodnotě příslušného poloměru i setrvačnosti, tak že na př. $\overline{p\,q} = \frac{1}{i}$, jest měřickým místem bodu q ellipsa, jejíž poloosy, obsažené v příslušných hlavních osách X, Y setrvačnosti, jsou $\frac{1}{i_1}$, $\frac{1}{i_2}$, znamenají-li i_1, i_2 hlavní poloměry setrvačnosti. Neboť vztahujeme-li bod q ku hlavním osám X, Y, jest $\cos \alpha = \frac{x}{\overline{p\,q}} = i\,x$, $\sin \alpha = \frac{y}{\overline{p\,q}} = i\,y$; vložíme-li tyto hodnoty do rovnice (19), která nynějším označením nabývá tvaru

$$i^2 = i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 a,$$

vyjde rovnice

$$i_1^2 x^2 + i_2^2 y^2 = 1,$$

kterou, poněvadž na hlavní osy jsou obdobně přeneseny délky $a = \frac{1}{i_1}$, $b = \frac{1}{i_2}$, psáti možno i ve tvaru

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mysleme si dále dva affinné obrazce Φ, Φ'; souvislost jejich je stanovena třemi družinami bodovými p a p', q a q', n a n'. Vztahujme obrazec $\left\{\begin{matrix}\Phi\\ \Phi'\end{matrix}\right\}$ ku přímkám $\left\{\begin{matrix}p\,q, & p\,n\\ p'\,q', & p'\,n'\end{matrix}\right\}$ jakož osám $\left\{\begin{matrix}X, & Y\\ X', & Y'\end{matrix}\right\}$.

Jsou-li m, m' kterékoli dva sdružené body obou obrazců, x a y, x' a y' jejich souřadnice v soustavách $X\ Y$, $X'\ Y'$, má každý z obou poměrů $\frac{x'}{x}$, $\frac{y'}{y}$ při všech takových družinách m, m' touž hodnotu, totiž

$$\frac{x'}{x} = \frac{\overline{p'\,q'}}{\overline{p\,q}} = \alpha, \qquad \frac{y'}{y} = \frac{\overline{p'\,n'}}{\overline{p\,n}} = \beta,$$

a obsahy plošné sdružených částí obou obrazců Φ, Φ' jsou též ve stálém poměru δ. O momentech

$$J_x = \int y^2\,du, \qquad J_y = \int x^2\,du, \qquad D = \int x\,y\,du,$$

$$J_x' = \int y'^2\,du', \qquad J_y' = \int x'^2\,du', \qquad D' = \int x'\,y'\,du'$$

platí tedy relace

$$J_x' = \beta^2\,\delta\,J_x, \qquad J_y' = \alpha^2\,\delta\,J_y,$$
$$D' = \alpha\,\beta\,\delta\,D;$$

jestliže pak obě strany prvních dvou z těchto rovnic rozdělíme dělitelem

$$U' = \delta\,U$$

a odmocníme, vyjde

$$\frac{i_x'}{i_x} = \beta, \qquad \frac{i_y'}{i_y} = \alpha.$$

Vedeme-li ve vzdálenosti $\left\{\begin{matrix}\pm i_x\\ \pm i_y\end{matrix}\right\}$ od osy $\left\{\begin{matrix}X\\ Y\end{matrix}\right\}$ rovnoběžky $\left\{\begin{matrix}X_1, & X_2\\ Y_1, & Y_2\end{matrix}\right\}$ s touto osou, jsou to tečny ellipsy setrvačnosti obrazce Φ pro bod p; vedeme-li ve vzdálenosti $\left\{\begin{matrix}\pm i_x'\\ \pm i_y'\end{matrix}\right\}$ od osy $\left\{\begin{matrix}X'\\ Y'\end{matrix}\right\}$ rovnoběžky $\left\{\begin{matrix}X_1', & X_2'\\ Y_1', & Y_2'\end{matrix}\right\}$ s touto osou, máme tečny ellipsy setrvačnosti obrazce Φ' pro bod p'. Z posledních rovnic pak plyne, že tečny

$$X_1 \text{ a } X_1', \qquad X_2 \text{ a } X_2',$$
$$Y_1 \text{ a } Y_1', \qquad Y_2 \text{ a } Y_2'$$

jsou sdruženými paprsky obou affinných soustav (Φ) a (Φ'). Poněvadž pak p a p', q a q', n a n' jsou libovolné tři družiny bodové obou affinných obrazců Φ a Φ', můžeme pronésti následující větu.

Jsou-li Φ *a* Φ' *dva obrazce affinné, náležejí ku každým dvěma sdruženým bodům* p *a* p' *těchto obrazců ellipsy setrvačnosti* E, E', *jež jsou sdruženými útvary obou soustav affinných.*

Dejme tomu, že X, Y jsou hlavní osy setrvačnosti obrazce Φ pro bod p a tedy osami příslušné ellipsy E setrvačnosti; pak jsou X', Y' obecně sdruženými průměry ellipsy E' setrvačnosti obrazce Φ' pro bod p' a tedy vůbec vespolek kosoúhelny. Hlavní osy X, Y jsou vázány výminkou

$$D = 0;$$

z rovnice svrchu odvozené, vyjadřující souvislost momentů deviačních D, D', plyne však, že i

$$D' = 0.$$

Naplněna-li tedy tato výminka v soustavě kosoúhelné, jsou příslušné osy X', Y' sdruženými průměry ellipsy setrvačnosti E'. Nazývejme takové přímky sdruženými osami setrvačnosti. Svírají-li sdružené osy úhel pravý, jsou osami hlavními.

O momentech deviačních D, D' vzhledem ku dvěma rovnoběžným soustavám osovým X, Y a X', Y' platí obdobná souvislost jak o momentech J, J' setrvačnosti vzhledem ku dvěma osám rovnoběžným X, X'.

Buďtež X, Y dvě — obecně kosoúhelné — osy jdoucí těžištěm daného obrazce; X', Y' nechť jsou osy s oněmi rovnoběžné jdoucí bodem p, jenž v soustavě X, Y má souřadnice c, d. Dán-li kterýkoli bod m obrazce v soustavě $\begin{Bmatrix} X, & Y \\ X', & Y' \end{Bmatrix}$ souřadnicemi $\begin{Bmatrix} x, & y \\ x', & y' \end{Bmatrix}$, platí relace

$$x' = x - c, \quad y' = y - d,$$

tak že

$$x'\,y' = (x - c)\,(y - d) = x\,y - c\,y - d\,x + c\,d,$$

$$\int x'\,y'\,du = \int x\,y\,du - c\int y\,du - d\int x\,du + c\,d\int du.$$

Poněvadž

$$\int y\,du = 0, \quad \int x\,du = 0, \quad \int du = U,$$

vychází rovnice

$$(20) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots D' = D + U\,c\,d$$

obdobná k rovnici (14).

Jsou-li X, Y osy sdružené, jest $D = 0$ a

$$(20^a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad D' = U\,c\,d.$$

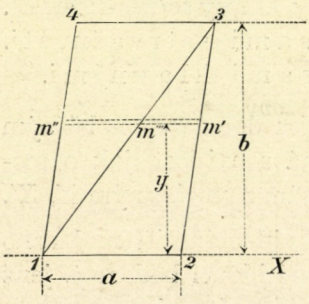
§ 25. **O momentech setrvačnosti obrazců prakticky důležitých.** Z pojmu momentu setrvačnosti obrazce jakožto součtu součinů dvou činitelů, z nichž jedním jest obsah du plošného prvku, druhým pak čtverec vzdálenosti y téhož prvku od osy setrvačnosti, plynou přímo následující věty:

1. *Moment setrvačnosti obrazce složeného rovná se součtu momentů setrvačnosti jednotlivých dílů.*

2. *Jsou-li dva obrazce vespolek souměrny vzhledem k ose setrvačnosti, mají rovné momenty setrvačnosti.*

3. *Moment setrvačnosti obrazce nemění se, posouváme-li obrazec nebo jednotlivé jeho díly rovnoběžně s osou setrvačnosti.*

Úvodem k momentům setrvačnosti mnohoúhelníků jakož obrazců průřezových stanovme moment rovnoběžníka a trojúhelníka.



Obr. 14.

Obsahuje-li osa X setrvačnosti jednu stranu a rovnoběžníka 1 2 3 4 (obr. 14.), a jest-li b jeho výška pravoúhelně ku straně a, mysleme si v rovnoběžníku příčky rovnoběžné s osou X ve vzdálenostech y a $y + dy$; proužku mezi nimi obsaženému, jehož všecky body mají od osy vzdálenost y, náleží obsah $a\,dy$, pročež

$$J = \int_0^b y^2\,du = a\int_0^b y^2\,dy = \tfrac{1}{3}\,a\,b^3.$$

Jde-li osa X setrvačnosti vrcholem 1 trojúhelníka 1 3 4 (obr. 14.) a to rovnoběžně s protější stranou $\overline{34} = a$, mysleme si zase plošný prvek obsažený mezi příčkami, vedenými rovnoběžně s osou X ve vzdálenostech y a $y + dy$; prvek ten má šířku $\xi = a\,\frac{y}{b}$ a tedy obsah

$$du = \xi\,dy = \frac{a}{b}\,y\,dy.$$

Proto

$$J = \int_0^b y^2\,du = \frac{a}{b}\int_0^b y^3\,dy = \tfrac{1}{4}\,a\,b^3.$$

Obsahuje-li osa X setrvačnosti stranu $\overline{12} = a$ trojúhelníka 1 2 3 (obr. 14.), a jest-li zase b výška jeho pravoúhelně k a, veďme $14 \parallel 23$, $34 \parallel 21$ a obdržíme tak rovnoběžník 1 2 3 4 složený z trojúhelníků 1 2 3, 1 3 4. Proto náleží trojúhelníku 1 2 3 moment

$$J = \tfrac{1}{3}\,a\,b^3 - \tfrac{1}{4}\,a\,b^3 = \tfrac{1}{12}\,a\,b^3.$$

Přistupme nyní k důležitějším mnohoúhelníkům jakož obrazcům průřezovým.

Obdélník. Jde-li osa X setrvačnosti těžištěm obdélníku $a \,.\, b$ a to rovnoběžně se stranami a, dělí se jí obdélník ve dva vzhledem k ní souměrné obdélníky o rozměrech a, $e = \frac{b}{2}$, pročež

$$J = 2 \,.\, \tfrac{1}{3}\, a\, e^3 = \tfrac{1}{12}\, a\, b^3.$$

Jest-li tento obdélník průřezem nosníku za prostého ohybu, X příslušnou osou neutralnou, máme modul průřezový

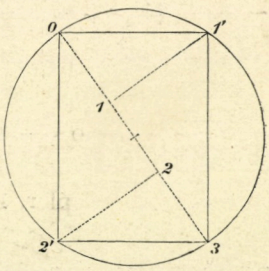
$$\frac{J}{e} = \tfrac{1}{6}\, a\, b^2.$$

Jde-li o nosník dřevěný, jehož obdélníkový průřez vzniká přitesáním okrouhlého kmene, namítá se otázka, *jak v kružnici daného průměru d vepsati obdélník, aby jeho modul průřezový $\frac{J}{e}$ a tím i moment odporu k $\frac{J}{e}$ byl maximum.* Poněvadž

$$a^2 + b^2 = d^2,$$

lze proměnného činitele výrazu $\frac{J}{e}$ psáti ve tvaru

$$a\, b^2 = a\,(d^2 - a^2) = f\,(a).$$



Obr. 15.

Položíme-li první derivaci

$$f'\,(a) = d^2 - 3\, a^2 = 0,$$

vyjde

$$a^2 = \frac{d^2}{3}, \quad b^2 = \frac{2}{3} d^2,$$

t. strana $\left\{ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\}$ jest střední měřickou úměrnou ku $\left\{ \begin{matrix} d \text{ a } \frac{1}{3}\, d \\ d \text{ a } \frac{2}{3}\, d \end{matrix} \right\}$. Rozdělíme-li tedy průměr $\overline{03}$ kruhu (obr. 15.) ve třetiny $\overline{01} = \overline{12} = \overline{23}$ a vztyčíme-li pořadnice $11'$, $22'$ pravoúhelně k průměru $\overline{03}$, jest $\overline{01'} = a$, $\overline{02'} = b$ a tedy $0\,1'\,3\,2'$ obdélník žádaný.

Co se týče poměru mezi rozměry a, b, máme

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

a tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq \frac{1}{1{\cdot}4} = \frac{5}{7}.^{*})$$

Osy X, Y, jdoucí těžištěm obdélníka rovnoběžně se stranami a, b, dělí obdélník souměrně a jsou tedy hlavními osami centralnými; k nim náležejí hlavní momenty

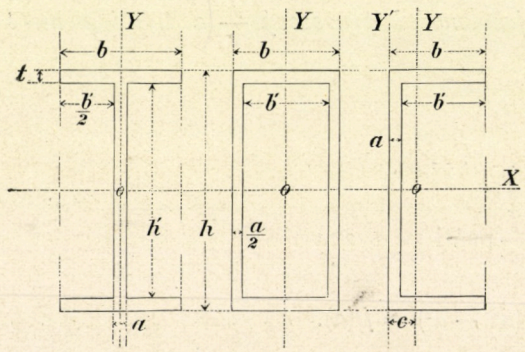
$$J_x = \tfrac{1}{12}\, a\, b^3, \quad J_y = \tfrac{1}{12}\, b\, a^3$$

a tedy hlavní poloměry setrvačnosti dané rovnicemi

$$i_x^2 = \frac{b^2}{12}, \quad i_y^2 = \frac{a^2}{12};$$

těmito poloměry stanovena jest ellipsa centralná.

Čtverec. Jest-li a strana čtverce, máme



Obr. 16.—18.

$$J_x = J_y = \frac{1}{12}\, a^4,$$

$$i_x^2 = i_y^2 = \frac{a^2}{12};$$

čtverec má tedy centralnou kružnici. Ke všem osám centralným náleží týž moment i poloměr setrvačnosti.

Obrazce průřezové složené z obdélníků. Jde-li o moment setrvačnosti průřezů v obr. 16., 17. a 18. naznačených a to vzhledem k ose X, jež všecky dělí souměrně, pokládejme každý z nich za rozdíl dvou obdélníků o rozměrech b, h a b', h', tak že

$$J = \tfrac{1}{12}\,(b\,h^3 - b'\,h'^3);$$

poněvadž pak $e = \frac{h}{2}$, jest modul průřezový

$$\frac{J}{e} = \frac{b\,h^3 - b'\,h'^3}{6\,h}.$$

---

*) Poměr $\frac{a}{b} \doteq \frac{5}{7}$ vede k největší hodnotě momentu odporu; hledíc zároveň k jiným stránkám praktickým doporučují se poměry poněkud jiné, na př. poměr $\frac{3}{4}$.

Připomenutí. Pohodlnější k počítání ale jen přibližný výraz odvoditi lze takto. Jest-li $h_0 = h - t$ vzdálenost těžišť obou obdélníků t. zv. pasových (o rozměrech b, t a tedy obsahu $u = b\,t$), počítejme jejich momenty setrvačnosti tak, jako by to byly proužky nekonečně úzké, totiž znásobme obsah čtvercem vzdálenosti od osy X kladouce $\frac{h_0}{2}$ za tuto vzdálenost. Poněvadž pak obdržíme takto při dílech pasových hodnotu poněkud menší (poloměr setrvačnosti obdélníka $b\,t$ jest poněkud větší než $\frac{h_0}{2}$), počítejme moment setrvačnosti středního dílu tak, jako by měl výšku h_0. Tak vychází

$$J \doteq 2\,u\left(\frac{h_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\,a\,h_0^3 = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{6}\,a\,h_0\right)h_0^2,$$

$$\frac{J}{e} = \left(u + \frac{1}{6}\,a\,h_0\right)\frac{h_0^2}{h}.$$

Ještě pohodlnější výraz vyjde, nedbáme-li vůbec obdélníka středního a položíme-li za to místo poloměru setrvačnosti obdélníků pasových rozměr $e = \frac{h}{2}$. Tak obdržíme

$$J \doteq 2\,b\,t\,e^2,$$

$$\frac{J}{e} \doteq b\,t\,h,$$

t. j. modul průřezový rovná se přibližně součinu hlavních tří rozměrů průřezových.

Poněvadž osa X dělí souměrně všechny tři obrazce průřezové, jest hlavní osou centralnou a příslušný moment hlavním momentem centralným. Hlavní centralná osa Y jde těžištěm průřezu pravoúhelně k X; v obrazcích 16. a 17. dělí též Y průřez souměrně; v obr. 18. nutno stanoviti těžiště, k čemuž užijme věty, že statický moment obrazce vzhledem k libovolné ose rovná se součinu z obsahu obrazce a vzdálenosti jeho těžiště od osy. V příčině statického momentu vztahujme obrazec výhodně k ose Y' obsahující stranu h; příslušný statický moment

$$\mathfrak{M}' = U\,c,$$

jest-li c vzdálenost těžiště průřezového od osy Y'. Leč

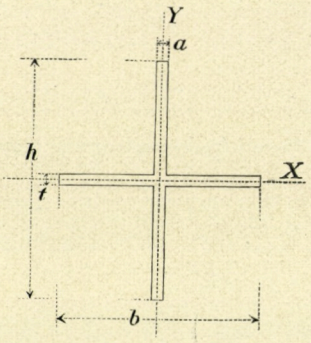
$$U = 2\,b\,t + a\,(h - 2\,t),$$

$$\mathfrak{M}' = b^2\,t + \frac{a^2}{2}\,(h - 2\,t),$$

pročež

$$c = \frac{1}{2}\,\frac{2\,b^2\,t + a^2\,(h - 2\,t)}{2\,b\,t + a\,(h - 2\,t)}.$$

Moment setrvačnosti průřezu vzhledem k ose Y jest v obr. 16. (součet dvou obdélníků o rozměrech t, b, pak obdélníka o rozměrech $h - 2t$, a)



Obr. 19.

$$J_y = \tfrac{1}{12}[2tb^3 + (h - 2t)a^3];$$

dále v obr. 17. (rozdíl dvou obdélníků, jichž rozměry jsou h, b a h', b')

$$J_y = \tfrac{1}{12}(hb^3 - h'b'^3);$$

konečně v obr. 18. (na levé straně osy Y rozdíl dvou obdélníků o rozměrech h, c a h', $c - a$, na pravé straně součet dvou obdélníků o rozměrech t, $b - c$)

$$J_y = \tfrac{1}{3}[hc^3 - h'(c-a)^3 + 2t(b-c)^3].$$

O průřezu křížovém (obr. 19.) platí za označení v obrazci vytčeného

$$J_x = \tfrac{1}{12}[ah^3 + (b-a)t^3].$$

Jde-li o průřez vytčený v obr. 20., stanovme nejprve vzdálenost e těžiště jeho od osy X' obsahující stranu b; e rovná se podílu statického momentu vzhledem k této ose a plošného obsahu průřezu, totiž

$$e = \frac{1}{2}\,\frac{(b-a)t^2 + (b'-a)t'(2h - t') + ah^2}{(b-a)t + (b'-a)t' + ah};$$

$$e' = h - e.$$

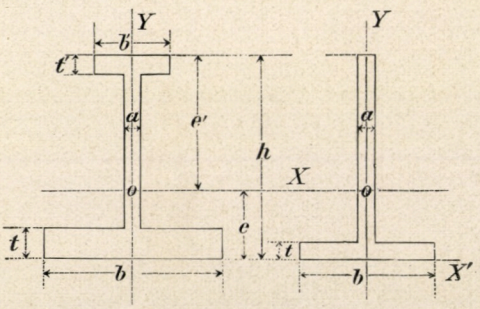
Moment setrvačnosti vzhledem k ose X stanovme tak, že díl průřezový $\left\{\begin{matrix}\text{pod}\\ \text{nad}\end{matrix}\right\}$ osou pokládáme za rozdíl obdélníků $\left\{\begin{matrix} b\,e,\ (b-a)\ (e-t)\\ b'\,e',\ (b'-a)\ (e'-t')\end{matrix}\right\}$, tak že

$$J_x = \tfrac{1}{3}[be^3 - (b-a)(e-t)^3 + b'e'^3 - (b'-a)(e'-t')^3];$$

co se týče momentu setrvačnosti vzhledem k ose Y, myslíme si průřez složený z obdélníků $tb, t'b'$, $(h - t - t')a$, pročež

$$J_y = \tfrac{1}{12}[tb^3 + t'b'^3 + (h - t - t')a^3].$$

Momenty J_x, J_y průřezu naznačeného v obr. 21. obdržíme položíce v předchozích výrazech $b' = a$; tedy



Obr. 20. a 21.

$$e = \frac{1}{2}\,\frac{(b-a)t^2 + ah^2}{(b-a)t + ah},$$

$$J_x = \tfrac{1}{3}\,[b\,e^3 - (b-a)\,(e-t)^3 + a\,e'^3],$$

$$J_y = \tfrac{1}{12}\,[t\,b^3 + (h-t)\,a^3].$$

Jde-li o hlavní osy a hlavní momenty průřezu úhelníka (úhlového železa) nerovnoramenného, který má rozměry a, b, h (obr. 22.), stanovme nejprve vzdálenosti c, d těžiště jeho o od stran h, b, totiž

$$c = \frac{1}{2}\,\frac{(h-a)\,a^2 + a\,b^2}{(h-a)\,a + a\,b} = \frac{1}{2}\,\frac{(h-a)\,a + b^2}{h-a+b},$$

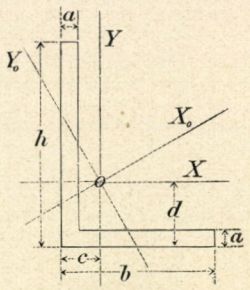
$$d = \frac{1}{2}\,\frac{(b-a)\,a^2 + a\,h^2}{(b-a)\,a + a\,h} = \frac{1}{2}\,\frac{(b-a)\,a + h^2}{b-a+h},$$

dále momenty setrvačnosti vzhledem k osám centralným X, Y, vedeným směrem obou ramen, totiž

$$J_x = \tfrac{1}{3}\,[b\,d^3 - (b-a)\,(d-a)^3 + a\,(h-d)^3],$$

$$J_y = \tfrac{1}{3}\,[h\,c^3 - (h-a)\,(c-a)^3 + a\,(b-c)^3],$$

konečně deviační moment D vhledem k osám X, Y. Tento skládá se z deviačních momentů obdélníků $(b-a)\,a$, $h\,a$, v kteréžto daný průřez lze rozděliti; poněvadž pak osy X, Y jsou rovnoběžny s hlavními centralnými osami těchto obdélníků, platí o každém z nich rovnice (20ª).



Obr. 22.

Vzhledem k osám X, Y má těžiště obdélníka $\left\{\begin{matrix}(b-a)\,a\\ a\,h\end{matrix}\right\}$ souřadnice

$$\left\{\begin{matrix}\dfrac{a+b}{2} - c, & -\left(d - \dfrac{a}{2}\right)\\ -\left(c - \dfrac{a}{2}\right), & \dfrac{h}{2} - d\end{matrix}\right\};$$

proto jest deviační moment průřezu úhelníkového vzhledem k osám X, Y

$$D = -(b-a)\,a\,\frac{a+b-2c}{2}\,\frac{2d-a}{2} - a\,h\,\frac{2c-a}{2}\,\frac{h-2d}{2}$$

$$= -\frac{a}{4}\left[(b-a)\,(a+b-2c)\,(2d-a) + h\,(2c-a)\,(h-2d)\right].$$

Odchylka hlavních os centralných X_0, Y_0 od osy X stanovena jest rovnicí (18)

$$\tan 2\,\alpha_0 = -\frac{2D}{J_x - J_y},$$

jež dává dva úhly: dutý $2\,\alpha_0'$ a vypuklý $2\,\alpha_0'' = 2\,\alpha_0' + 180^0$; osy X_0, Y_0 mají tedy odchylky α_0', $\alpha_0'' = \alpha_0' + 90^0$.

Hlavní centralné momenty stanovíme pak z obou prvních rovnic soustavy (16), totiž

$$J_x' = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - D \sin 2\alpha,$$
$$J_y'' = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + D \sin 2\alpha,$$

položíme-li v nich $\alpha = \alpha_0'$ neb α_0'', aneb i z jedné z těchto rovnic, položíme-li v ní jednou $\alpha = \alpha_0'$, po druhé $\alpha = \alpha_0''$.

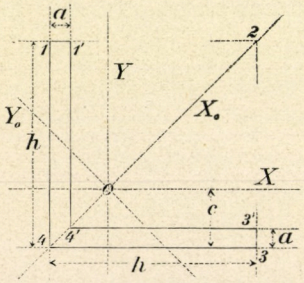
Příklad 4. Při nerovnoramenném úhelníku budiž $a = 1\ cm$, $b = 9\ cm$, $h = 12\ cm$.

Tu máme

$$c = \frac{1}{2} \frac{11 \,.\, 1 + 9^2}{11 + 9} = 2{\cdot}3\ cm,$$

$$d = \frac{1}{2} \frac{8 \,.\, 1 + 12^2}{8 + 12} = 3{\cdot}8\ cm;$$

$$J_x = \tfrac{1}{3}\,[\ 9 \,.\, 3{\cdot}8^3 - \ 8 \,.\, 2{\cdot}8^3 + 1 \,.\, 8{\cdot}2^3] = 289{\cdot}87\ cm^4,$$
$$J_y = \tfrac{1}{3}\,[12 \,.\, 2{\cdot}3^3 - 11 \,.\, 1{\cdot}3^3 + 1 \,.\, 6{\cdot}7^3) = 140{\cdot}87\ cm^4,$$
$$D = 8 \,.\, 1 \,.\, 2{\cdot}7\ (-\ 3{\cdot}3) + 1 \,.\, 12 \,.\, (-\ 1{\cdot}8) \,.\, 2{\cdot}2 = -\ 118{\cdot}80\ cm^4;$$



Obr. 23.

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{237{\cdot}60}{149{\cdot}00},$$

$$2\alpha_0' = 57^0\ 54'\ 28{\cdot}8'',$$

$$\alpha_0' = 28^0\ 57'\ 14{\cdot}4'';$$

$$J_x' = 221{\cdot}94 + \ 33{\cdot}01 + 100{\cdot}65 = 355{\cdot}60\ cm^4,$$
$$J_y'' = \ 67{\cdot}93 + 107{\cdot}86 - 100{\cdot}65 = \ 75{\cdot}14\ cm^4.$$

Úhelník rovnoramenný (obr. 23.) o rozměrech a, $b = h$ má osu souměrnosti (v obr. 23. přímku 42), která jest tedy jednou z os hlavních, na př. X_0; těžištěm o, obsaženým na ose X_0, jde hlavní osa Y_0 pravoúhelně k X_0.

Stanovme souřadnice těžiště, totiž

$$c = d = \frac{1}{2} \frac{(h - a)\, a + h^2}{2h - a},$$

dále momenty setrvačnosti vzhledem k osám X, Y, vedeným směrem ramen, totiž

$$J_x = J_y = \tfrac{1}{3}\,[h\, c^3 - (h - a)\,(c - a)^3 + a\,(h - c)^3],$$

pak moment deviační vzhledem k týmž osám, totiž

$$D = -\frac{a}{4}\,(2c - a)\,[a\,(h - a) + (2h - a)\,(h - 2c)].$$

Poněvadž zde $\alpha_0' = 45^0$, máme hlavní momenty centralné

$$J_0 = J_x \mp D.$$

P ř i p o m e n u t í. Hlavní moment J_x' vzhledem k ose X_0 lze ostatně stanoviti přímo (bez momentu deviačního) jakožto rozdíl momentů setrvačnosti čtverců 1234, 1′2 3′4′. Poněvadž při čtverci jsou všecky centralné momenty setrvačnosti rovny, máme

$$J_x' = \tfrac{1}{12}\,[h^4 - (h-a)^4];$$

hlavní moment J_y'' vzhledem k ose Y_0 plyne pak z rovnic (17) § 24., totiž

$$J_y'' = 2\,J_x - J_x'.$$

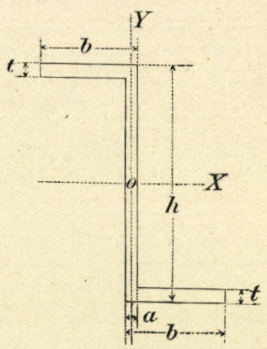
P ř í k l a d 5. Při úhelníku rovnoramenném budiž $a = 1\ cm$, $h = 10\ cm$. Tu máme

$$c = d = 2{\cdot}87\ cm;$$

$$J_x = J_y = \tfrac{1}{3}\,[10 \,.\, 2{\cdot}87^3 - 9 \,.\, 1{\cdot}87^3 + 1 \,.\, 7{\cdot}13^3] = 180{\cdot}00\ cm^4,$$
$$D = -\tfrac{1}{4} \,.\, 4{\cdot}74\,(1 \,.\, 9 + 19 \,.\, 4{\cdot}26) = -106{\cdot}58\ cm^4;$$
$$J_0 = 180{\cdot}00 \pm 106{\cdot}58,$$
$$J_x' = 286{\cdot}58\ cm^4,\quad J_y'' = 73{\cdot}42\ cm^4.$$

Jinak (viz připomenutí) vychází

$$J_x' = \tfrac{1}{12}\,(10^4 - 9^4) = 286{\cdot}58\ cm^4,$$
$$J_y'' = 2 \,.\, 180{\cdot}00 - 286{\cdot}58 = 73{\cdot}42\ cm^4.$$



Obr. 24.

Stanovme dále hlavní centralné osy a momenty setrvačnosti průřezu v obr. 24. vytčeného. Zde jest těžiště o známo předem; mysleme si jím osy X, Y rovnoběžné se stranami b, h. Znamenáme-li

$$b - a = b',\quad h - 2\,t = h',$$

jest

$$J_x = \tfrac{1}{12}\,(b\,h^3 - b'\,h'^3)$$

jako při průřezech naznačených v obrazcích 16., 17., 18.; dále rozkladem v obdélník $a\,h$ a dva obdélníky $(b-a)\,t$

$$J_y = \tfrac{1}{12}\,h\,a^3 + 2 \,.\, \tfrac{1}{3}\,t\left[\left(b - \frac{a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a}{2}\right)^3\right]$$

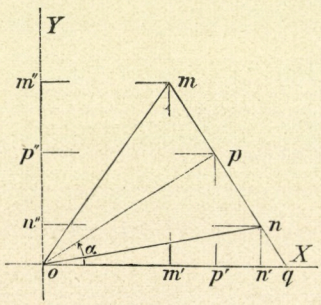
$$= \frac{h\,a^3 + t\,[(2\,b-a)^3 - a^3]}{12},$$

konečně týmž rozkladem (deviační moment obdélníka $a\,h$ rovná se nulle)

$$D = -2\,(b-a)\,t\,\frac{b}{2}\,\frac{h-t}{2} = -\tfrac{1}{2}\,b\,t\,(b-a)\,(h-t).$$

Dále postupuje se jako při nerovnoramenném úhelníku.

Mnohoúhelník pravidelný možno poloměry kružnice opsané, vedenými k vrcholům mnohoúhelníka, rozděliti v rovnoramenné trojúhelníky o stranách a, r', r', kde a jest strana pravidelného mnohoúhelníka, r' poloměr opsané kružnice. Přihlédněme nejprve k jednomu takovému trojúhelníku $o\,m\,n$ (obr. 25.), který budiž zatím obsažen v prvním čtverníku pravoúhelné soustavy osové $X\,Y$; polohu trojúhelníka k ose X stanovme úhlem α, o který jest od osy té odchýlen poloměr $\overline{o\,p} = r$ kružnice vepsané, vedený pravoúhelně ku straně $m\,n$. Rozpolovací bod $\overrightarrow{p}$ strany $m\,n$ má souřadnice $\overline{o\,p'} = x$, $\overline{p'\,p} = y$; průměty strany $\overline{m\,n} = a$ v osy X, Y jsou $\overline{m'\,n'} = a'$, $\overline{m''\,n''} = a''$.



Obr. 25.

Prodloužíme-li stranu $m\,n$ až k průsečíku q s osou X, můžeme trojúhelník $o\,m\,n$ pokládati za rozdíl trojúhelníků $o\,m\,q$, $o\,n\,q$; proto moment setrvačnosti trojúhelníka $o\,m\,n$ vzhledem k ose X jest

$$J_1 = \tfrac{1}{12}\,\overline{o\,q}\,(\overline{m'\,m}^3 - \overline{n'\,n}^3),$$

kdežto

$$\overline{m'\,m} = \overline{p'\,p} + \overline{p''\,m''} = y + \frac{a''}{2},$$

$$\overline{n'\,n} = \overline{p'\,p} - \overline{n''\,p''} = y - \frac{a''}{2},$$

$$\overline{o\,q} = \frac{\overline{o\,p}}{\cos\alpha} = \frac{r}{\cos\alpha}.$$

Proto

$$\left.\begin{matrix}\overline{m'\,m}^3 \\ \overline{n'\,n}^3\end{matrix}\right\} = y^3 \pm 3\,\frac{a''}{2}\,y^2 + 3\,\frac{a''^2}{4}\,y \pm \frac{a''^3}{8}$$

a tedy

$$\overline{m'\,m}^3 - \overline{n'\,n}^3 = 3\,a''\,y^2 + \frac{a''^3}{4},$$

tak že

$$J_1 = \frac{1}{12}\,\frac{r}{\cos\alpha}\left(3\,a''\,y^2 + \frac{a''^3}{4}\right).$$

Poněvadž

$$a' = a\sin\alpha, \qquad a'' = a\cos\alpha,$$

$$y = r\sin\alpha, \qquad x = r\cos\alpha,$$

lze psáti

$$J_1 = \frac{1}{12}\left(3\,r^2 \,.\, a'\,y + \frac{a^2}{4}\,.\,a''\,x\right).$$

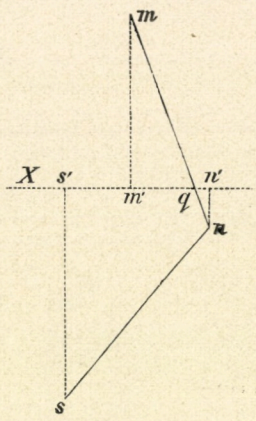
Součiny

$$a'\,y = u',\quad a''\,x = u''$$

značí však obsahy lichoběžníků $m\,n\,n'\,m'$, $m\,n\,n''\,m''$, jimiž se strana $m\,n$ promítá v osy X, Y, pročež

$$J_1 = \tfrac{1}{12}\left(3\,r^2\,u' + \frac{a^2}{4}\,u''\right).$$

Myslíme-li si k trojúhelníku $o\,m\,n$ trojúhelník souměrný $o\,m_1\,n_1$ vzhledem k ose Y, tedy v čtverníku druhém, náleží mu týž moment J_1, pročež nutno obsahy u_1', u_1'' vzíti s týmž znaménkem, totiž positivným. To se srovnává se známým pravidlem o znaménku plošných obsahů,*) myslíme-li si, že trojúhelník v druhém čtverníku jest vytvořen ve smyslu $o\,n_1\,m_1$, což nutno, má-li obvod mnohoúhelníka pravidelného se vytvořiti pohybem bodu ve smyslu jednotném. Obdobné platí, myslíme-li si trojúhelník $o\,m_2\,n_2$, souměrný k $o\,m\,n$ vzhledem k ose X, tedy v čtverníku čtvrtém. Myslíme-li si konečně trojúhelník souměrný k $o\,m_1\,n_1$ vzhledem k ose X anebo k $o\,m_2\,n_2$ vzhledem k ose Y, zůstávají obsahy promítacích lichoběžníků positivnými, čímž platnost výroku svrchu položeného rozšířena i na čtverník třetí.



Obr. 26.

Sečtouce momenty setrvačnosti všech trojúhelníků, z nichž pravidelný mnohoúhelník se skládá, obdržíme moment J setrvačnosti tohoto mnohoúhelníka; tedy

$$J = \tfrac{1}{12}\left[3\,r^2\,\Sigma\,u' + \frac{a^2}{4}\,\Sigma\,u''\right].$$

Součty $\Sigma\,u'$, $\Sigma\,u''$ dávají však obsah U pravidelného mnohoúhelníka,**) tak že

*) Vytvořuje-li se obvod obrazce pohybem bodu m v určitém smyslu, točí se radius vector $\overline{o\,m}$, vedený k bodu m ze zvoleného středu o, tolikéž v určitém smyslu; dle tohoto smyslu přisuzujeme pak obsahu obrazce znaménko positivné či negativné.

**) Jest-li průsečík q strany $m\,n$ s osou X obsažen uvnitř této strany (obr. 26.) skládá se obsah promítacího lichoběžníka $m\,n\,n'\,m'$ z obsahů trojúhelníků $m\,q\,m'$. a $q\,n\,n'$, jež mají znaménka protivná; onen budiž positivný, tento negativný — tento nenáleží však k obsahu mnohoúhelníka pravidelného. Leč při následující straně $n\,s$ objevuje se trojúhelník $q\,n'\,n$ jakožto díl promítacího lichoběžníka $n\,s\,s'\,n'$ a to se znaménkem positivným. Při sčítání obsahů všech promítacích lichoběžníků ruší se onen člen negativný s tímto positivným, a zůstávají jen díly náležející k obsahu pravidelného mnohoúhelníka.

$$J = \tfrac{1}{12} U \left(3 r^2 + \frac{a^2}{4}\right);$$

uvedeme-li pak sem poloměr r' kružnice opsané, o němž platí rovnice

$$r'^2 = r^2 + \frac{a^2}{4},$$

obdržíme

$$J = \tfrac{1}{12} U \left(3 r'^2 - \frac{a^2}{2}\right).$$

Poněvadž výraz momentu J neobsahuje úhlu α, jest moment setrvačnosti nezávislý na poloze mnohoúhelníka k ose X. *Pravidelné mnohoúhelníky mají tedy týž moment setrvačnosti vzhledem ke všem osám centralným a tedy kružnici centralnou.*

K r u h lze pokládati za pravidelný mnohoúhelník o nesčíslných stranách nekonečně malých; položíme-li tedy v odvozených svrchu výrazech momentu J

$$a = 0, \quad r = r',$$

vyjde moment setrvačnosti kruhu vzhledem ku kterémukoli průměru

$$J = \tfrac{1}{4} U r^2 = \tfrac{1}{4} \pi r^4.$$

Zavedeme-li místo poloměru r průměr d, obdržíme

$$J = \tfrac{1}{64} \pi d^4.$$

Poloměr setrvačnosti

$$i = \tfrac{1}{2} r,$$

modul průřezový vzhledem k průměru jakož ose neutralné jest

$$\frac{J}{e} = \tfrac{1}{32} \pi d^3.$$

Moment setrvačnosti e l l i p s y vzhledem k jedné z os jejích lze odvoditi z momentu setrvačnosti kruhu vzhledem k průměru. Buďtež X, Y osami ellipsy; příslušné poloosy nechť jsou a, b. Jde-li o moment setrvačnosti vzhledem k ose X, mysleme si soustředný s ellipsou kruh poloměru b. Mezi rovnoběžkami k ose X, vedenými ve vzdálenostech y, $y + dy$ od téže osy, obsažen jest jednak prvek

$$du = 2 x \, dy$$

ellipsy, jednak prvek

$$du' = 2 x' \, dy$$

kruhu; poněvadž

$$\frac{du}{du'} = \frac{x}{x'} = \frac{a}{b},$$

možno psáti

$$J_x = \int y^2\, du = \frac{a}{b} \int y^2\, du'.$$

Leč

$$\int y^2\, du' = \frac{\pi}{4}\, b^4$$

a tedy

$$J_x = \frac{\pi}{4}\, a\, b^3,$$

obdobně pak

$$J_y = \frac{\pi}{4}\, b\, a^3.$$

Obsah ellipsy

$$U = \pi\, a\, b,$$

pročež

$$i_x = \frac{b}{2}, \quad i_y = \frac{a}{2}.$$

Jsou to hlavní centralné poloměry setrvačnosti; ellipsa centralná jest k dané ellipse soustředná, podobná a stejně položená; poměr podobnosti jest $\frac{1}{2}$.

Omezena-li parabolická úseč tetivou vedenou pravoúhelně k ose X paraboly ve vzdálenosti a od vrcholové tečny Y, přihlédněme k prvku obsaženému mezi rovnoběžkami s osou Y, vedenými ve vzdálenostech x, $x + dx$ od této osy. Poněvadž prvek ten lze pokládati za obdélník o šířce dx a výšce $2\,y$, jsou jeho momenty setrvačnosti vzhledem k osám X, Y

$$d\,J_x = \tfrac{1}{12}\,(2\,y)^3\, dx = \tfrac{2}{3}\, y^3\, dx,$$

$$d\,J_y = 2\,y\, dx\,.\, x^2\,.$$

Buďtež a, $\pm c$ souřadnice krajních bodů tetivy, jež omezuje úseč parabolickou; tu platí relace

$$\frac{y^2}{c^2} = \frac{x}{a},$$

$$x = \frac{a}{c^2}\, y^2, \quad dx = 2\,\frac{a}{c^2}\, y\, dy,$$

tedy

$$J_x = \frac{4\,a}{3\,c^2} \int_0^c y^4 dy, \quad J_y = \frac{4\,a^3}{c^6} \int_0^c y^6 dy,$$

Товариство українських студентів вис. шкіл. техніч. „ОСНОВА“ в Празі

t. j.

$$J_x = \frac{4}{15} a c^3, \quad J_y = \frac{4}{7} c a^3,$$

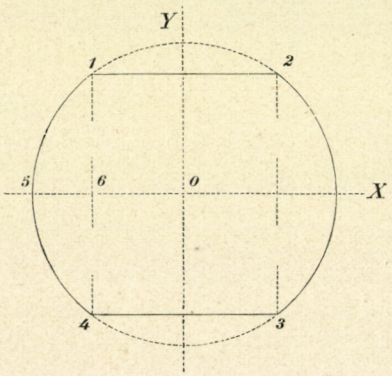
a znamenáme-li

$$2 c = h,$$

máme

$$J_x = \frac{1}{30} a h^3, \quad J_y = \frac{2}{7} h a^3.$$

Přihlédněme ještě k obrazci, který vznikne, odejmou-li se od kruhu dvě úseče tetivami, vedenými s obou stran středu v rovných od něho vzdálenostech; obrazec takový namítá se jakožto průřez dřevěného kmene toliko nahoře a dole přitesaného (obr. 27.).



Obr. 27.

Lze jej rozložiti v obdélník 1234 o rozměrech $b = \overline{12}$, $h = \overline{41}$ a ve dvě kruhové úseče, jež však pokládejme přibližně za parabolické.

Jde-li o moment setrvačnosti vzhledem k ose X, máme tedy

$$J = J_1 + 2 J_2 ;$$

$$J_1 = \frac{1}{12} b h^3, \quad J_2 = \frac{1}{30} a h^3,$$

kde

$$a = \overline{56}.$$

Proto

$$J = \frac{1}{60} (5 b + 4 a) h^3$$

a poněvadž

$$2 a = d - b,$$

jest-li d průměr kmene, vychází žádaný moment setrvačnosti

$$J = \frac{1}{60} (2 d + 3 b) h^3.$$

Modul průřezový má hodnotu

$$\frac{J}{e} = \frac{1}{30} (2 d + 3 b) h^2 = \frac{1}{30} (2 d + 3 b) (d^2 - b^2).$$

Jest-li omezení obrazce komplikované nebo dáno jen empiricky, lze stanoviti moment setrvačnosti jakož i jiné veličiny průřezové, jež se tu namítají, přibližně pravidlem Simpsonovým.

Jde-li totiž o integral omezený

$$\int_{z_0}^{z_n} f(z)\, dz,$$

rozdělme rozdíl $z_n - z_0$ v sudý počet n rovných dílů c; k hodnotám veličiny proměnné nezávislé $z =$

$$z_0,\ z_1 = z_0 + c,\ z_2 = z_0 + 2c,\ z_3 = z_0 + 3c, \ldots\ z_n = z_0 + nc$$

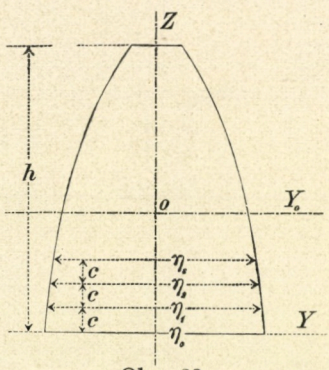
stanovme hodnoty

$$f(z_0),\ f(z_1),\ f(z_2),\ f(z_3), \ldots f(z_n);$$

pak platí přibližně

$$\int_{z_0}^{z_n} f(z)\, dz = \frac{z_n - z_0}{3n}\{f(z_0) + f(z_n) + 4[f(z_1) + f(z_3) + \ldots + f(z_{n-1})] + 2[f(z_2) + f(z_4) + \ldots + f(z_{n-2})]\}.$$

Dáno-li na př. omezení v obr. 28. naznačené, kde Z jest osou symmetrie (výminka to však nikoli nutná), a jde-li o moment J_0 setrvačnosti vzhledem k ose centralné Y_0 pravoúhelné ku Z, vztahujme obrazec zatím k ose Y, která jsouc tolikéž pravoúhelná ku Z jest styčnou přímkou (tečnou) omezení průřezového, rozdělme výšku h (rozměr k ose Y pravoúhelný) na sudý počet rovných dílů $c = \frac{h}{n}$ a k pořadnicím $z =$



Obr. 28.

$$0,\ c,\ 2c,\ 3c, \ldots\ nc = h$$

stanovme šířky průřezové

$$\eta_0,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \ldots\ \eta_n.$$

Vyšetřme obsah

$$U = \int_0^h \eta\, dz,$$

pak moment statický

$$\mathfrak{M} = \int_0^h \eta\, z\, dz,$$

konečně moment setrvačnosti

$$J = \int_0^h \eta\, z^2\, d\, z$$

obrazce vzhledem k ose Y. Při obsahu U jest $f(z) = \eta$, při statickém momentu $\mathfrak{M}$ obdobně $f(z) = \eta\, z$, při momentu J setrvačnosti konečně $f(z) = \eta\, z^2$.

Proto

$$U = \frac{c}{3}\left[\eta_0 + \eta_n + 4\,(\eta_1 + \eta_3 + \ldots + \eta_{n-1}) + 2\,(\eta_2 + \eta_4 + \ldots + \eta_{n-2})\right].$$

$$\mathfrak{M} = \frac{c}{3}\left[\eta_0\, z_0 + \eta_n\, z_n + 4\,(\eta_1\, z_1 + \eta_3\, z_3 + \ldots + \eta_{n-1}\, z_{n-1}) + \right.$$

$$\left. + 2\,(\eta_2\, z_2 + \eta_4\, z_4 + \ldots + \eta_{n-2}\, z_{n-2})\right] =$$

$$= \frac{c^2}{3}\left[n\,\eta_n + 4\,[\eta_1 + 3\,\eta_3 + 5\,\eta_5 + \ldots + (n-1)\,\eta_{n-1}]\right.$$

$$\left. + 2\,[2\,\eta_2 + 4\,\eta_4 + 6\,\eta_6 + \ldots + (n-2)\,\eta_{n-2}]\right],$$

$$J = \frac{c}{3}\left[\eta_0\, z_0^2 + \eta_n\, z_n^2 + 4\,(\eta_1\, z_1^2 + \eta_3\, z_3^2 + \ldots + \eta_{n-1}\, z_{n-1}^2) + \right.$$

$$\left. + 2\,(\eta_2\, z_2^2 + \eta_4\, z_4^2 + \ldots + \eta_{n-2}\, z_{n-2}^2)\right] =$$

$$= \frac{c^3}{3}\left[n^2\,\eta_n + 4\,[\eta_1 + 3^2\,\eta_3 + 5^2\,\eta_5 + \ldots + (n-1)^2\,\eta_{n-1}]\right.$$

$$\left. + 2\,[2^2\,\eta_2 + 4^2\,\eta_4 + 6^2\,\eta_6 + \ldots + (n-2)^2\,\eta_{n-2}]\right].$$

Vzdálenost těžiště od osy Y jest pak

$$e = \frac{\mathfrak{M}}{U}$$

a tedy hledaný moment setrvačnosti

$$J_0 = J - U\, e^2.$$

§ 26. **O křivce ohybové.** Abychom vyšetřili ohyb nosníka, užijme druhého z obou výrazů momentu odporu, jak vytčeny v druhé z rovnic (10), totiž

$$M' = \frac{E\,J}{\varrho}.$$

Křivku ohybovou, obsaženou v rovině sil zevnitřních, vztahujme k soustavě souřadnicové, jejíž osou X budiž původní přímá osa nosníka, po případě přímka k ní rovnoběžná (vodorovná); positivní polovice její

nechť směřuje n a p r a v o. Osa Y nechť jest pravoúhelná k X, tedy svislá; positivní polovice její může směřovati v z h ů r u či d o l ů. Pokládáme-li úsečku x za proměnnou veličinu nezávislou, dán jest poloměr křivosti výrazem

$$\varrho = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}.$$

Tečna křivky ohybové v kterémkoli bodě m odchýlena jest od osy X o úhel φ, o němžto platí relace

$$\operatorname{tan} \varphi = \frac{dy}{dx};$$

poněvadž v technické praxi se dopouští ohyb jen nepatrný, bývá $\frac{dy}{dx}$ malý zlomek; druhá mocnost jeho jest ještě mnohem menší, tak že možno jí nedbati proti jedničce a psáti dosti přibližně

$$\varrho = \pm \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}.$$

Jestliže do svrchupsaného výrazu momentu M' vložíme tuto hodnotu poloměru ϱ, zároveň pak $M' = -M$, vyjde

$$(21) \ldots\ldots\ldots\ldots \pm E J \frac{d^2y}{dx^2} = M,$$

což jest d i f f e r e n c i a l n á r o v n i c e (druhého řádu) k ř i v k y o h y b o v é. Z obého znaménka $\pm$ sluší podržeti to, kterým se zjednává shoda znamének obou stran rovnice (21), což závisí na směru positivné polovice osy Y. Poněvadž E jest veličina prostá, J pak positivná, přihlížeti jest jen ku znaménku veličin $\frac{d^2y}{dx^2}$, M. V průřezech, kde moment ohybový M jest $\left\{\begin{matrix}\text{positivný}\\ \text{negativný}\end{matrix}\right\}$, obrací křivka ohybová dutou stranu $\left\{\begin{matrix}\text{vzhůru}\\ \text{dolů}\end{matrix}\right\}$; míří-li positivná polovice osy Y vzhůru, jest pak derivace $\frac{d^2y}{dx^2}$ $\left\{\begin{matrix}\text{positivná}\\ \text{negativná}\end{matrix}\right\}$ a shoduje se tedy co do znaménka s momentem M, pročež nutno předložiti před levou stranu znaménko plus. Směřuje-li však positivná polovice osy Y dolů, jest derivace $\frac{d^2y}{dx^2}$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativná}\\ \text{positivná}\end{matrix}\right\}$ a nesrovnává se tedy s momentem M co do znaménka, pročež nutno předložiti před levou stranu znaménko minus.

V rovnici (21) jest E konstanta; M a obecně též J jsou funkce úsečky x. Při nosníku prismatickém jest J stálé. Vždy jest tedy integrovati rovnici tvaru

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

náležející určitému dílu nosníkovému, v němž moment ohybový M jest vyjádřen touž funkcí $f(x)$.

Prvním integrováním dospíváme k rovnici

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)\,dx + C = F(x) + C,$$

druhým pak

$$y = \int F(x)\,dx + Cx + D;$$

integrační konstanty C, D stanoví se z t. zv. výminek přetvárných (deformačních), plynoucích z podepření nosníka nebo ze souvislosti příslušného dílu nosníkového s díly sousedními.

Moment ohybový (viz připomenutí ku konci § 21.) má v každém průřezu hodnotu jedinou; mění-li se spojitě též rozměry průřezové a tedy moment J setrvačnosti, má derivace $\frac{d^2y}{dx^2}$ i poloměr ϱ křivosti v každém bodě čáry ohybové hodnotu jedinou. Jestliže však rozměry v některém průřezu náhle se mění, mají $\frac{d^2y}{dx^2}$, ϱ v příslušném bodě křivky ohybové dvě různé hodnoty; křivka má tu diskontinuitu řádu druhého. Diskontinuita řádu prvého není vůbec možna; derivace $\frac{dy}{dx}$ může míti v každém bodě jedinou jen hodnotu. Mění-li se rozměry průřezové spojitě, vyloučena jest i diskontinuita řádu druhého; ovšem pak se mohou namítnouti diskontinuity řádů vyšších. Tak namítá se diskontinuita řádu třetího v průřezu, v němž působí břímě osamělé; v průřezu tom má totiž síla posouvající T dvě hodnoty, jež se liší o hodnotu onoho břemene; poněvadž pak

$$T = \frac{dM}{dx},$$

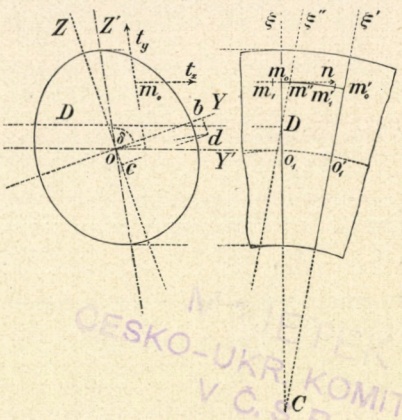
má tam derivace $\frac{d^3y}{dx^3}$ dvě hodnoty.

V průřezu, kde $M = 0$, jest $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $\varrho = \infty$; příslušný bod křivky ohybové jest bodem inflexním neboli obratníkem této křivky. V takovém průřezu mění tedy M a $\frac{d^2y}{dx^2}$ znaménko. Obratníkem

souvisí dva díly křivky ohybové, z nichž obrací jeden dutou, druhý vypuklou stranu vzhůru. Průřez, v němž $M = 0$, zoveme proto obratníkovým průřezem nosníku.

§ 27. **O prostorovém neboli složeném ohybu.** Vyšetřujme nyní pružnost v ohybu prutů přímých obecněji; upusťme totiž od výminky na počátku § 21. vytčené, že rovina sil zevnitřních dělí nosník souměrně.

Není-li rovina sil zevnitřních rovinou symmetrie nosníku, není rovinou symmetrie sil vnitřních, a křivka ohybová nemusí býti v ní obsažena, jsouc pak obecně křivkou prostorovou.*) Těžiště o, o' dvou nekonečně blízkých průřezů (x), $(x+dx)$ nabývají ohnutím nosníka polohy o_1, o_1' (obr. 29.); tečny v těchto dvou nekonečně blízkých bodech ohybové křivky stanoví oskulační rovinu její, kteráž se vůbec nesjednocuje s rovinou sil zevnitřních. Normalné roviny ξ, ξ' křivky ohybové v bodech o_1, o_1' jsou pravoúhelné k rovině oskulační; proto jest k ní pravoúhelna též průsečnice C obou oněch normalných rovin, totiž osa křivosti čáry ohybové v bodě o_1. V obr. 29. zvolena oskulační rovina za průmětnu. Body m průřezu (x) vztahujme k soustavě, jejíž počátkem jest těžiště o průřezu, osou Z' průsečnice roviny průřezové s rovinou sil zevnitřních; osu Y' zvolíme později.



Obr. 29.

Buďtež m, m' dva stejně položené body průřezů (x), $(x+dx)$; po přetvoření nosníku nemusí nová poloha $\left\{\begin{matrix} m_1 \\ m_1' \end{matrix}\right\}$ bodu $\left\{\begin{matrix} m \\ m' \end{matrix}\right\}$ býti obsažena v normalné rovině $\left\{\begin{matrix} \xi \\ \xi' \end{matrix}\right\}$. Užijeme-li zde téže hypothese, na které jsme v § 22. založili vyšetřování ohybu jednoduchého, bude jako tam $\overline{m_1 m_1'} = \overline{m_0 m_0'}$ (obr. 29.), a možno zase body m_1, m_1', m_0, m_0' přisouditi kruhovému obloučku, jehož střed jest na ose C křivosti, a jehož rovina jest pravoúhelna k této ose.

Vedeme-li rovinu ξ'' rovnoběžně s ξ' u vzdálenosti dx, kterou od sebe měly před ohnutím oba průřezy (x), $(x+dx)$, seče ξ'' rovinu ξ v přímce D rovnoběžné s osou C křivosti, oblouček $m_0 m_0'$ pak v bodě m'' tak, že

$$\overline{m_0 m''} = \overline{m_0 m_0'} - \overline{m'' m'_0} = \overline{m_0 m_0'} - dx;$$

$\overline{m_0 m''}$ jest tedy linearné roztažení prvku $\overline{m m'} = dx$; proto jest

*) V rovině sil zevnitřních jsou obecně jen některé, na př. podporové body křivky ohybu, totiž body osy nosníkové, jež i za ohybu nemění svého místa.

$$\lambda = \frac{\overline{m_0 m''}}{dx}$$

roztažení poměrné a

$$\nu = E\lambda = \frac{E}{dx}\overline{m_0 m''}$$

příslušné napětí. Toto jest úměrné k úsečce $\overline{m_0 m''}$, kterou možno pokládati za vzdálenost bodu m'' roviny ξ'' od roviny ξ; za tou příčinou jest $\overline{m_0 m''}$ a tedy i napětí ν úměrné ku vzdálenosti bodu m_0 od průsečnice D rovin ξ, ξ''.*) Tak dospíváme k témuž zákonu jako při jednoduchém ohybu: napětí jest úměrné ku vzdálenosti od jisté neutralné osy; čarou napětí jest přímka. Neutralná osa D jest rovnoběžna s osou C křivosti.

Body m_0 roviny ξ nemají přesně touž polohu vzájemnou jako příslušné body m původního průřezu (x), ale poněvadž v praxi jde vždy o deformaci jen nepatrnou, možno nedbati tohoto rozdílu a pokládati průřez v obr. 29. naznačený za původní průřez (x); osa Y' budiž rovnoběžna ku přímce D.

V průřez působí s levé strany síly zevnitřní, jež se skládají v sílu posouvající T působící v průsečnici Z' roviny průřezové $Y'Z'$ s rovinou sil zevnitřních, dále ve dvojici, kteráž působí v rovině XZ' a jest stanovena momentem ohybovým M; se strany pravé působí síly vnitřní a to normalné $n = \nu\, du$ a tangencialné $t_z = \tau_z\, du$, $t_y = \tau_y\, du$.

V průřez působí tedy prostorová soustava sil, vázaná šesti výminkami rovnováhy: tři vztahují se k složkám směrem os souřadnicových, ostatní tři ku statickým momentům vzhledem k těmto osám. Jsou to rovnice

$$\Sigma n = 0, \quad \Sigma t_z = 0, \quad T + \Sigma t_y = 0$$

$$\Sigma (t_z z' - t_y y') = 0, \quad M + \Sigma n z' = 0, \quad \Sigma n y' = 0$$

obdobné k rovnicím (a) § 22.

Ramena statických momentů měříme tu směrem os souřadnicových; jde tedy o momenty kosoúhelné.

Užijeme-li jen rovnic obsahujících normalné síly n, jež vyjádříme napětími, vyjdou rovnice výminkové

$$\int \nu\, du = 0, \quad M + \int \nu z'\, du = 0, \quad \int \nu y'\, du = 0.$$

Má-li neutralná osa D rovnici

$$z' = a,$$

*) Vzdálenosti bodů m_0 od přímky D můžeme měřiti ve směru pravoúhelném neb i kosoúhelném.

dán jest zákon napětí v výrazem

$$v = \varepsilon (z' - a),$$

kde ε značí neznámého zatím součinitele. Vložíme-li to do první z výminkových rovnic svrchu položených, vyjde

$$\varepsilon \left(\int z' \, du - a \int du \right) = 0,$$

kdežto

$$\int du = U, \quad \int z' \, du = 0,$$

pročež

$$a = 0;$$

osa neutralná D obsahuje těžiště průřezové a sjednocuje se tedy s osou Y'. Napětí dáno jest výrazem

$$v = \varepsilon z'.$$

Druhá výminková rovnice nabývá pak tvaru

$$M + \varepsilon \int z'^2 \, du = 0,$$

kdežto

$$\int z'^2 \, du = J'$$

jest kosoúhelný moment setrvačnosti průřezu vzhledem k ose Y'; z rovnice druhé plyne tedy, že konstanta

$$\varepsilon = - \frac{M}{J'}.$$

Třetí výminková rovnice

$$\varepsilon \int y' \, z' \, du = 0$$

ukazuje konečně, že deviační moment

$$D' = \int y' \, z' \, du$$

průřezu vzhledem k osám Y', Z' rovná se nulle, pročež *neutralná osa Y' jest osou centralnou, sdruženou s přímkou Z', v níž rovina sil zevnitřních protíná rovinu průřezu.*

Na základě těchto výsledků můžeme obecně vysloviti výminku, za kterou se namítá ohyb jednoduchý, totiž za kterou křivka ohybová jest rovinná. V tomto případě jest totiž rovina křivky ohybové — rovina

sil zevnitřních — oskulační rovinou všech bodů křivky, a veškeré osy C křivosti jsou tedy pravoúhelny k rovině sil zevnitřních. Poněvadž pak neutralná osa každého průřezu jest rovnoběžna k příslušné ose křivosti, musí býti pravoúhelná k rovině sil zevnitřních a proto i k průsečnici Z' této roviny s rovinou průřezovou. Osy Y', Z' jsou však sdruženými centralnými osami setrvačnosti průřezu; jsou-li vespolek pravoúhelny, jsou hlavními osami centralnými. *Rovinná křivka ohybová vzniká tedy obecně, obsahuje-li rovina sil zevnitřních jednu z hlavních centralných os každého průřezu.* Dělí-li rovina sil zevnitřních nosník symmetricky, jest průsečnice její Z' s rovinou každého průřezu — jakož osa symmetrie průřezu — osou hlavní; symmetrie ona není však nezbytnou výminkou ohybu jednoduchého.

Vložíme-li hodnotu konstanty ε ve výraz napětí v, vyjde

$$v = -\frac{M z'}{J'},$$

rovnice téhož rázu jako při ohybu jednoduchém. Zůstávají tedy v platnosti všeliké výsledky, jež odvodili jsme z oné v § 22. v příčině výminek bezpečné pevnosti.

Napětí v v libovolném bodu průřezovém lze stanoviti ostatně na základě p r a v o ú h e l n é s o u s t a v y s o u ř a d n i c o v é takto.

Buďtež (v obr. 29.) Y, Z hlavní centralné osy průřezu; rovina sil zevnitřních nechť seče rovinu průřezovou v přímce Z' odchýlené od osy Y o úhel δ. Síly zevnitřní na jedné straně průřezu skládají se ve dvojici Δ působící v rovině $X Z'$ (X znamená tu zase osu nosníka neohnutého); příslušný moment ohybový jest M.

Rozložme dvojici Δ ve dvě dvojice silové: Δ_y působící v rovině $X Z$ a Δ_z působící v rovině $X Y$. Jest-li $o d$ osa dvojice Δ, $\overline{o d}$ pak osový úsek vyjadřující moment M co do velikosti i znaménka, obdržíme osové úseky $\overline{o b}$, $\overline{o c}$ dvojic Δ_y, Δ_z jako pravoúhelné průměty úseku $\overline{o d}$ v osy Y, Z, tak že

$$M_y = \overline{o b} = M \sin \delta,$$
$$M_z = \overline{o c} = M \cos \delta.$$

Kdyby $M_z = 0$, měli bychom ohyb jednoduchý; příslušné napětí

$$v_y = -\frac{M_y z}{J_y} = -\frac{M z \sin \delta}{J_y};$$

kdyby naopak $M_y = 0$, měli bychom obdobně

$$v_z = -\frac{M_z y}{J_z} = -\frac{M y \cos \delta}{J_z}.$$

Nerovná-li se nulle žádný z obou momentů M_y, M_z, působí napětí ν_y a ν_z současně a to v témž bodě a téže přímce; lze tedy pokládati, že se prostě sčítají (dle zásady superposice), tak že napětí celkové

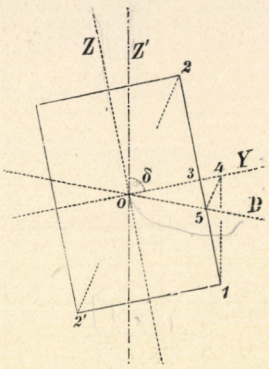
$$(22)\ldots \nu = -M\left(\frac{z\sin\delta}{J_y}+\frac{y\cos\delta}{J_z}\right)=-\frac{M}{U}\left(\frac{z\sin\delta}{i_y^2}+\frac{y\cos\delta}{i_z^2}\right);$$

kteráž rovnice ukazuje zase na známý zákon napětí ν, totiž zákon přímky. Vložíme-li do rovnice (22) za ν určitou hodnotu, obdržíme rovnici přímky, jejíž směrnice nezávisí na hodnotě ν; v bodech této přímky má napětí ν hodnotu zvolenou. Položíme-li $\nu = 0$, obdržíme rovnici nullové neboli neutralné osy D, totiž

$$\frac{z\sin\delta}{J_y}+\frac{y\cos\delta}{J_z}=0;$$

přímka D jde počátkem souřadnic, totiž těžištěm o průřezu a má od osy Y odchylku δ' danou výrazem

$$(23)\ldots. \tan\delta' = -\frac{J_y}{J_z}\cot\delta = -\frac{i_y^2}{i_z^2}\cot\delta.$$



Obr. 30.

Jsou-li y_1, z_1 a y_2, z_2 souřadnice krajních (od osy neutralné nejvzdálenějších) bodů průřezu, lze krajní hodnoty napětí ν vyjádřiti rovnicemi

$$(22^a)\ldots\ldots \begin{cases} \nu_1 = -M\left(\dfrac{z_1\sin\delta}{J_y}+\dfrac{y_1\cos\delta}{J_z}\right), \\ \nu_2 = -M\left(\dfrac{z_2\sin\delta}{J_y}+\dfrac{y_2\cos\delta}{J_z}\right). \end{cases}$$

Budiž na př. průřezem obdélník, jehož hlavní rozměry jsou $b = \overline{12'}$, $h = \overline{12}$ (obr. 30.). Tu

$$J_y = \frac{1}{12}b\,h^3,\quad J_z = \frac{1}{12}h\,b^3,$$

$$\nu = -\frac{12\,M}{b\,h}\left(\frac{z\sin\delta}{h^2}+\frac{y\cos\delta}{b^2}\right).$$

Osa neutralná má rovnici

$$z = -\frac{h^2\cot\delta}{b^2}\,y$$

a seče tedy stranu 12, jejíž rovnice jest

$$y = \frac{b}{2},$$

v bodě 5 tak, že

$$z = \overline{35} = -\frac{h^2}{2b}\cot\delta.$$

Veďme 14 rovnoběžně ku Z', dále 45 rovnoběžně ku $22'$; tak obdržíme

$$\overline{34} = \frac{h}{2}\cot\delta,$$

$$\overline{35} = -\overline{34}\,\frac{h}{b} = -\frac{h^2}{2b}\cot\delta,$$

pročež jest 5 bod osy neutralné D. Jinak možno sestrojiti neutralnou osu D jako průměr ellipsy centralné sdružený s osou Z'.

Krajní hodnoty napětí vyskytují se v bodech 2, $2'$ majících souřadnice

$$y = \pm\frac{b}{2}, \quad z = \pm\frac{h}{2},$$

pročež

$$(24)\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \nu_1 \\ \nu_2 \end{cases} = \mp\frac{6M}{bh}\left(\frac{\sin\delta}{h} + \frac{\cos\delta}{b}\right).$$

§ 28. **Nosníky prosté. Momenty ohybové a síly posouvající za různého podepření a obtížení nosníka. Ohyb nosníků stálého průřezu.** Moment M a sílu T každého průřezu lze stanoviti, známe-li síly zevnitřní. Z těch bývají prvotné (břemena) předem dány; podružné (reakce podporové) nutno však stanoviti z prvotných. To činíme užívajíce výminky, že veškeré síly zevnitřní, prvotné i podružné, jsou vespolek v rovnováze. Poněvadž jde o rovinnou soustavu silovou, vyjádřeny jsou výminky rovnováhy t ř e m i rovnicemi, z nichž tedy možno stanoviti jen t ř i neznámé složky reakcí. Jest-li těchto složek více než 3, nestačují obecné výminky rovnováhové ku stanovení reakcí, a nutno je doplniti t. zv. v ý m i n k a m i p ř e t v á r n ý m i neboli d e f o r m a č n í m i, totiž výminkami, kterým jest podrobeno přetvoření nosníka. V těchto případech nelze řešiti úlohu bez současného vyšetřování ohybu. Nosníky, jichž reakce lze stanoviti z obecných výminek rovnováhy, nazýváme v té příčině s t a t i c k y u r č i t ý m i nebi p r o s t ý m i; není-li tomu tak, říkáme, že nosník jest s t a t i c k y n e u r č i t ý.

Č á r a m o m e n t o v á, č á r a s i l p o s o u v a j í c í c h. Moment M a síla T jsou funkcemi úsečky x stanovící průřez nosníkový a to tak, že

$$M = f(x), \quad T = f'(x)$$

(§ 21.). Vyjádřena-li jednička momentová ($m\,k$ = metrokilogramm) určitou délkou a sestrojeno-li příslušné měřidlo, můžeme moment M každého

průřezu vyjádřiti pořadnicí y náležející k úsečce x. Souřadnicemi $x, y = M$ dány jsou body čáry, jež měřicky vyjadřuje funkci momentovou; čáru tuto nazývejme momentovou čarou nosníka. Obdobně lze vyjádřiti na základě určitého měřidla silového sílu T pořadnicí y', čímž dospíváme k čáře sil posouvajících. Čáry ty ukazují názorněji než algebraické výrazy příslušných funkcí, jak se veličiny M, T mění průřez od průřezu.

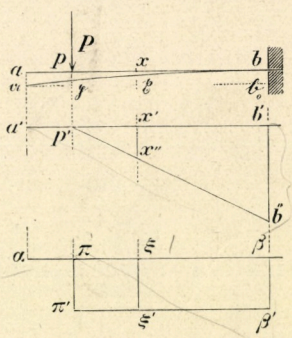
Při nosnících prismatických stanoví se rozměry průřezové z největší prosté hodnoty momentu ohybového; jde tedy o maximum či minimum momentu.

Poněvadž

$$\frac{dM}{dx} = T,$$

musí v příslušném průřezu síla posouvající měniti znaménko a to buď nenáhle procházejíc nullou, anebo tak, že náhle klesá s hodnoty positivné v negativnou (či naopak). Zoveme-li průřez, v němž síla T mění znaménko, průřezem přechodným v příčině této síly, můžeme říci: *K průřezu přechodnému náleží maximum či minimum momentu ohybového.*

a) Nosník na jednom konci volný, na druhém vetknutý. Budiž (v obr. 31., v němž — jakož i v obrazcích následujících — zobrazena jen osa nosníku) levý konec a volný, pravý b však vetknut, v nějaké těleso (na př. zazděn). Zde netřeba stanoviti předem reakce podporové.



Obr. 31.

α) Obtížen-li nosník osamělým břemenem P, které nechť působí v průřezu (p) stanoveném úsečkou $\overline{a\,p} = p$, a jde-li o průřez (x) daný úsečkou $\overline{a\,x} = x$, máme dle pravidel, vytčených v § 21. o momentu M a síle T

$$M = -P\,(x - p), \quad T = -P,$$

pokud $x > p$; v průřezech dílu $a\,p$ jest

$$M = 0, \quad T = 0.$$

Čarou momentovou jest lomená čára $a'\,p'\,b''$, vztažená k ose $a'\,b'$; čarou sil posouvajících jest lomená čára $\alpha\,\pi\,\pi'\,\beta'$, vztažená k ose $\alpha\,\beta$.

Největší prostou hodnotu má moment ohybový v průřezu (b), totiž

$$M_b = -P\,(l - p),$$

znamenáme-li

$$\overline{a\,b} = l.$$

Vyšetřujme tu dále čáru ohybovou, jde-li o nosník stálého průřezu. Vetknutí nosníku budiž přesně vodorovné a zároveň dokonalé, totiž takové, že tečna křivky v b zůstává vodorovnou za každého ohybu.

Křivka ohybová skládá se tu ze dvou různých dílů $a\,p$, $p\,b$, poněvadž moment ohybový v dílech nosníkových $a\,p$, $p\,b$ jest vyjádřen různými funkcemi úsečky x. Vztahujme křivku k ose $a\,b$ jakožto X, dále k ose Y, jež nechť jde počátkem a a směřuje positivnou polovicí svou dolů; tu platí v díle $a\,p$

$$-EJ\frac{d^2y}{dx^2}=\mathfrak{M},$$

v díle $p\,b$

$$-EJ\frac{d^2y}{dx^2}=-P(x-p).$$

Násobme všecky členy těchto rovnic činitelem $-dx$ a integrujme; tu vychází o dílu $a\,p$

$$(a)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots EJ\frac{dy}{dx}=C,$$

o dílu $p\,b$

$$(b)\ldots\ldots\ldots EJ\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}P(x^2-2px)+C'.$$

Integrační konstantu C' stanovme výminkou, že derivace $\frac{dy}{dx}$ t. j. tangenta úhlu φ, o který tečna křivky ohybové se odchyluje od osy X, nabývá v bodě b hodnoty rovné nulle, pročež hodnoty

$$x=l,\quad\frac{dy}{dx}=0$$

musejí hověti rovnici (b); tedy

$$0=\frac{1}{2}Pl(l-2p)+C',$$

$$C'=-\frac{1}{2}Pl(l-2p).$$

Konstantu C stanovme výminkou, že oba díly $a\,p$, $p\,b$ čáry ohybové mají ve společném bodě p i tečnu společnou, pročež pravé strany rovnic (a), (b) za $x=p$ nabývají téže hodnoty. Máme tedy výminkovou rovnici

$$C=C'-\frac{1}{2}Pp^2=-\frac{1}{2}P(l-p)^2.$$

Rovnice (a), (b) lze tedy psáti takto:

$$(a)\ldots\ldots\ldots\ldots EJ\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}P(l-p)^2,$$

$$(\mathfrak{b}) \ldots\ldots\ldots E J \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} P [x^2 - 2 p x - l (l - 2 p)].$$

Násobme všecky členy činitelem dx a integrujme po druhé; tak vychází

$$(\mathfrak{a}') \ldots\ldots\ldots E J y = - \frac{1}{2} P (l - p)^2 x + D,$$

$$(\mathfrak{b}') \ldots\ldots E J y = \frac{1}{6} P [x^3 - 3 p x^2 - 3 l (l - 2 p) x] + D'.$$

Konstanta D' plyne z výminky, že souřadnice

$$x = l, \quad y = \mathfrak{0}$$

hověti musejí rovnici $(\mathfrak{b}')$; pročež

$$\mathfrak{0} = \tfrac{1}{6} P [l^3 - 3 l^2 p - 3 l^2 (l - 2 p)] + D',$$
$$D' = \tfrac{1}{6} P l^2 (2 l - 3 p).$$

Konstantu D odvodíme z výminky, že oba díly $\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}\,b$ křivky ohybové mají společný bod $\mathfrak{p}$ a tedy v něm společnou pořadnici y, pročež pravé strany rovnic $(\mathfrak{a}')$, $(\mathfrak{b}')$ za $x = p$ nabývají téže hodnoty. Tedy

$$- \tfrac{1}{2} P p (l - p)^2 + D = \tfrac{1}{6} P [p^3 - 3 p^3 - 3 l p (l - 2 p)] + \tfrac{1}{6} P l^2 (2 l - 3 p),$$
$$D = \tfrac{1}{6} P (2 l^3 - 3 l^2 p + p^3) = \tfrac{1}{6} P (l - p)^2 (2 l + p) = \tfrac{1}{6} P p'^2 (2 l + p),$$

znamenáme-li kratšeji

$$l - p = p'.$$

Díl $\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}$ čáry ohybové jest přímý; $\mathfrak{p}\,b$ jest oblouk paraboli cké křivky řádu třetího.

V praxi jde hlavně o největší pořadnici y_0 křivky ohybové. V případě přítomném náleží největší pořadnice k úsečce $x = \mathfrak{0}$, nejsouc tu maximem po rozumu analytickém. Jest pak

$$E J y_0 = D,$$

$$(25) \ldots\ldots\ldots\ldots y_0 = \frac{P p'^2 (2 l + p)}{6 E J}.$$

Úhel, o který jest tečna čáry ohybové v bodě $\mathfrak{a}$ a vůbec v dílu $\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}$ odchýlena od osy X, plyne z rovnice $(\mathfrak{a})$, totiž

$$(26) \ldots\ldots\ldots\ldots \tan \alpha = - \frac{P p'^2}{2 E J}.$$

Úhel α jest v praktických případech velmi malý, tak že místo tangenty jeho možno položiti dosti příbližně oblouk neb úhel v míře absolutní.

Jest-li $p = 0$, $p' = l$, máme

$$(25^a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad y_0 = \frac{P\,l^3}{3\,E\,J}.$$

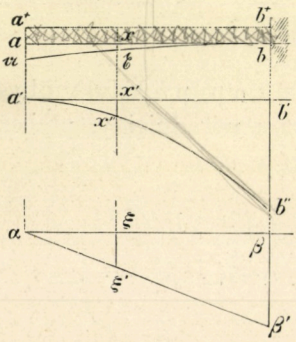
$$(26^a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha = -\frac{P\,l^2}{2\,E\,J}.$$

β) Obtížen-li nosník rovnoměrně po vší délce $a\,b$ (obr. 32., kde obtížení znázorněno obdélníkem $a\,a^{+}\,b^{+}\,b$), a jest-li q obtížení poměrné (obtížení délkové jedničky — metru), připadá na délku $\overline{a\,x} = x$ obtížení, jehožto výslednice

$$Q_x = q\,x,$$

působíc uprostřed délky $\overline{a\,x}$, má vzhledem k bodu x rámě $\frac{1}{2}\,x$; proto

$$M = -\tfrac{1}{2}\,q\,x^2, \quad T = -q\,x.$$



Obr. 32.

Čarou momentovou jest parabola $a'\,x''\,b''$, vztažená k ose $a'\,b'$; bod a jest vrcholem, svislice $a\,a'$ osou paraboly. Čarou sil posouvajících jest přímka $\alpha\,\beta'$, vztažená k ose $\alpha\,\beta$.

Největší prosté hodnoty momentu ohybového a síly posouvající náležejí k průřezu b, totiž

$$M_b = -\tfrac{1}{2}\,q\,l^2, \quad T_b = -q\,l,$$

znamenáme-li zase

$$\overline{a\,b} = l.$$

Křivku ohybovou $\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}\,b$ vztahujme k téže soustavě os souřadnicových jako v případě α). Tu jest integrovati rovnici

$$-E\,J\,\frac{d^2 y}{d\,x^2} = -\frac{1}{2}\,q\,x^2\,;$$

nejprve vychází

$$E\,J\,\frac{d\,y}{d\,x} = C + \frac{1}{6}\,q\,x^3,$$

a poněvadž za

$$x = l \qquad \frac{d\,y}{d\,x} = 0,$$

jest-li vetknutí vodorovné a dokonalé, máme

$$C = -\tfrac{1}{6}\,q\,l^3,$$

pročež

$$E J \frac{d y}{d x} = \frac{1}{6} q (x^3 - l^3).$$

Novým integrováním vyplývá

$$E J y = \tfrac{1}{24} q (x^4 - 4 l^3 x) + D,$$

a poněvadž za

$$x = l \qquad y = 0,$$

jest

$$D = \tfrac{1}{8} q l^4.$$

Největší pořadnice čáry ohybové, která tu jest parabolickou křivkou řádu čtvrtého, náleží zase k průřezu (*a*), kde $x = 0$, pročež

$$E J y_0 = D,$$

$$(27) \ldots\ldots\ldots\ldots y_0 = \frac{q l^4}{8 E J} = \frac{Q l^3}{8 E J},$$

znamenáme-li

$$q l = Q.$$

MAJETEK ČESKO-UKR. KOMITETU V Č.S.R.

Tečna křivky ohybové v bodě a odchýlena jest od osy X o úhel

$$(28) \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha = -\frac{q l^3}{6 E J} = -\frac{Q l^2}{6 E J}.$$

Připomenutí. Obtížen-li nosník *a b* osamělým břemenem P, náleží ku každému průřezu x určitý moment ohybový M_1 a určitá síla posouvající T_1; obtížen-li týž nosník rovnoměrně po délce *a b*, náležejí k témuž průřezu x určité hodnoty M_2, T_2. Z pojmu momentu ohybového a síly posouvající vyplývá, že hodnoty M_1 a M_2, T_1 a T_2 prostě se sčítají, působí-li osamělé břímě i rovnoměrné obtížení současně, tak že

$$M = M_1 + M_2, \quad T = T_1 + T_2.$$

Z tvaru differencialní rovnice čáry ohybové vychází dále, že se obdobně sčítají pořadnice této čáry, jakož i tangenty úhlů, o něž jsou odchýleny tečny její od osy X, tedy

$$y = y_1 + y_2, \quad \tan \alpha = \tan \alpha_1 + \tan \alpha_2$$

anebo dosti přibližně

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Netřeba dokládati, že souvislost tato platí nejen o břemeni osamělém a obtížení po díle *a b* rovnoměrně rozděleném, ale o jakémkoli dvojím obtížení vůbec.

Obtížen-li tedy nosník ab (v a volný, v b vodorovně vetknutý) osamělým břemenem P působícím v průřezu a, zároveň pak břemenem Q rozděleným rovnoměrně po délce $a\,b$, jest největší pořadnice křivky ohybové

$$(29) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y_0 = \frac{(P + \frac{3}{8} Q)\, l^3}{3\, E\, J}$$

a odchylka

$$(30) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \alpha = -\frac{(P + \frac{1}{3} Q)\, l^2}{2\, E\, J}.$$

γ) Působí-li v nosník $a\,b$ soustava břemen osamělých $P_1, P_2, \ldots P_r, P_{r+1}, \ldots P_n$ a to v průřezech $p_1, p_2, \ldots p_r, p_{r+1}, \ldots p_n$, kterýmižto malými písmeny znamenejme nejen průřezy břemen ale i vzdálenosti jejich od levého konce a, jest v libovolném průřezu (x)

$$T = -\sum_0^x P,$$

$$M = -\sum_0^x P\,(x - p).$$

Čára momentová jest lomená: skládá se z přímých stran, jež jsou obsaženy každá mezi svislicemi dvou posloupných břemen a čím dále od svislice bodu a, tím více odchýleny od osy X; každé dvě sousední strany mají společný bod na svislici příslušného břemene. Čára sil posouvajících jest stupňovitá; skládá se z přímých stran vodorovných, mezi něž jsou vloženy strany svislé. Největší prosté hodnoty momentu ohybového a síly posouvající náležejí k průřezu b, totiž

$$M_b = -\sum_0^l P\,(l - p), \quad T_b = -\sum_0^l P.$$

Čára ohybová skládá se z dílu přímého $\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}_1$ a z n oblouků křivek parabolických řádu třetího, působí-li v nosník n osamělých břemen; největší pořadnice její náleží k bodu $\mathfrak{a}$ mající hodnotu

$$(31) \ldots y_0 = \frac{\sum_0^l P\, p'^2\,(2\,l + p)}{6\, E\, J} = \frac{2\,l \sum_0^l P\, p'^2 + \sum_0^l P\, p'^2\, p}{6\, E\, J};$$

tečna její v bodě $\mathfrak{a}$ jest od osy X odchýlena o úhel

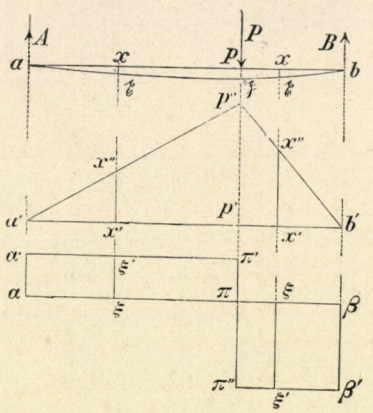
$$(32) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \alpha = -\frac{\sum_0^l P\, p'^2}{2\, E\, J}.$$

Působí-li v nosník mimo soustavu břemen osamělých i obtížení rovnoměrně rozdělené po délce $a\,b$, přistupují k těmto hodnotám ještě

hodnoty stanovené rovnicemi (27) a (28). Čára ohybová skládá se z oblouků křivek parabolických řádu čtvrtého.

b) Nosník na obou koncích prostě podepřený. Zde jest první úlohou, stanoviti reakce podporové, aspoň jednu z nich. Reakce nejsou tu však obecně staticky určity.

Podepřen-li nosník na levo zdéli $\overline{a_2 a_1}$, na pravo zdéli $\overline{b_1 b_2}$, jde nejprve o to, jak se po těchto délkách rozdělují reakce výsledné; s tímto rozdělením souvisí pak poloha působišť jejich. Hledíc k ohybu nosníka není pochybnosti, že tato působiště jsou blíže ku krajům vnitřním a_1, b_1 než k zevnitřním a_2, b_2. Jestliže, pokládajíce určité rozdělení, zvolíme působiště obou reakcí*), neznáme směru jejich; rozložíme-li pak každou z nich ve složku svislou A, B a vodorovnou H_a, H_b, stanoviti jest ze 3 rovnic rovnováhových 4 neznámé složky, tak že reakce nejsou tu staticky určity. Připojme však výminku, že jeden konec nosníka může se volně pohybovati směrem vodorovným.**)



Obr. 33.

Uložen-li takto konec $\left\{\begin{matrix}\text{pravý}\\ \text{levý}\end{matrix}\right\}$, musí za rovnováhy $\left\{\begin{matrix}H_b = 0\\ H_a = 0\end{matrix}\right\}$, a třemi výminkami rovnováhy sil zevnitřních stanoveny jsou ostatní 3 neznámé složky reakcí. Tento případ nazývejme prostým podepřením nosníka na obou koncích.

α) Obtížen-li nosník ab břemenem osamělým P, působícím v průřezu p (obr. 33., kde a, b nechť jsou t. zv. podporové body osy nosníkové, totiž body, v nichž přímky reakcí A, B protínají osu jeho; o těchto bodech si mysleme, že za všelikého ohybu zůstávají na svých místech) a znamenáme-li

$$\overline{a\,b} = l, \quad \overline{a\,p} = p, \quad \overline{p\,b} = p' = l - p,$$

platí tu výminky rovnováhy

$$H = 0,$$
$$A + B - P = 0,$$
$$A\,l - P\,p' = 0;$$

poslední týče se statických momentů sil zevnitřních vzhledem k bodu b.

*) Nejčastěji se kladou vnitřní body a_1, b_1 za působiště výsledných reakcí a tedy $\overline{a_1\,b_1}$ za vzdálenost podporovou nosníka, ač tato vzdálenost jest poněkud větší.

**) Výminka tato naplněna jest přibližně, uložen-li konec ten na hladké desce — dokonaleji pak, uložen-li na válečkách.

Z ní plyne

$$A = \frac{P\,p'}{l},$$

a vložíme-li tuto hodnotu do výminky předposlední anebo — výhodněji — napíšeme-li výminku momentovou ještě jednou, vztahujíce momenty k bodu a, obdržíme obdobně

$$B = \frac{P\,p}{l}.$$

Co se týče momentu ohybového a síly posouvající, nutno rozeznávati díly nosníkové $a\,p$, $p\,b$. Jest-li x libovolný průřez, a znamenáme-li

$$\overline{a\,x} = x, \quad \overline{x\,b} = x' = l - x,$$

platí v dílu $a\,p$

$$M = A\,x = \frac{P\,p'}{l}\,x, \quad T = A = \frac{P\,p'}{l},$$

v dílu $p\,b$ pak

$$M = B\,x' = \frac{P\,p}{l}\,x', \quad T = -B = -\frac{P\,p}{l}.^{*})$$

Čára momentová skládá se ze dvou přímek $a'\,p''$, $p''\,b'$ (obr. 33.); pořadnice $\overline{p'\,p''}$ vyjadřuje moment průřezu p, totiž

$$M_p = \frac{P\,p\,p'}{l},$$

kteráž hodnota plyne z obou výrazů momentu M, položíme-li v prvním $x = p$, v druhém $x' = p'$.

Moment ohybový jest ve všech průřezech positivný; hodnota jeho roste po zákoně přímky od průřezů podporových, v nichž se rovná nulle, k průřezu břemene, kde má hodnotu největší M_p. Síla posouvající má jen dvě hodnoty, positivnou na levé, negativnou na pravé straně břemene; v průřezu břemene má hodnoty dvě, jež se liší o hodnotu břemene. Průřez p břemene jest přechodným; k němu náleží maximum momentové.

Křivka ohybová skládá se ze dvou dílů $a\,p$, $p\,b$, poněvadž v dílech nosníkových $a\,p$, $p\,b$ platí různé funkce momentové. Vztahujeme-li křivku k ose $a\,b$ jakožto X, a jde-li Y počátkem a tak, že positivná polovice její směřuje dolů, máme v dílu

*) Béřeme-li totiž zde v úvahu stranu pravou, při čemž místo M, T obdržíme $-M$, $-T$, vychází

$$-M = -B\,x',$$
$$-T = B$$

a tedy hodnoty svrchu položené.

$$a\,\mathfrak{p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P\,p'}{l}\,x,$$

$$\mathfrak{p}\,b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P\,p}{l}\,(l-x).$$

Položíme-li kratšeji

$$\frac{P}{EJl} = \beta,$$

jest nám integrovati rovnice

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\beta\,p'\,x\,,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\beta\,p\,(l-x).$$

Obdržíme pak

$$(\mathfrak{a}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dy}{dx} = C - \tfrac{1}{2}\beta\,p'\,x^2,$$

$$(\mathfrak{b}) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dy}{dx} = C' - \tfrac{1}{2}\beta\,p\,(2\,l\,x - x^2).$$

Jednu z integračních konstant C, C' lze vyloučiti na základě výminky, že obě čáry $a\,\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}\,b$ mají v bodě $\mathfrak{p}$ společnou tečnu; za $x = p$ tedy pravé strany obou rovnic ($\mathfrak{a}$), ($\mathfrak{b}$) nabývají téže hodnoty. Proto

$$C - \tfrac{1}{2}\beta\,p'\,p^2 = C' - \tfrac{1}{2}\beta\,p^2\,(2\,l - p),$$

$$C' = C + \tfrac{1}{2}\beta\,l\,p^2,$$

čímž rovnice ($\mathfrak{b}$) nabývá tvaru

$$(\mathfrak{b}) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dy}{dx} = C + \tfrac{1}{2}\beta\,p\,(l\,p - 2\,l\,x + x^2).$$

Dalším integrováním vychází

$$(\mathfrak{a}') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y = D + C\,x - \tfrac{1}{6}\beta\,p'\,x^3,$$

$$(\mathfrak{b}') \ldots\ldots y = D' + C\,x + \tfrac{1}{6}\beta\,p\,x\,(3\,l\,p - 3\,l\,x + x^2).$$

Integrační konstanty stanovíme z výminek přetvárných, jež se týkají bodů a, $\mathfrak{p}$, b.

Bod a náleží čáře $a\,\mathfrak{p}$; proto souřadnice

$$x = 0, \quad y = 0$$

hoví rovnici ($\mathfrak{a}'$), z čehož plyne, že

$$D = 0.$$

Bod $\mathfrak{p}$ náleží oběma křivkám $a\,\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}\,b$; proto pravé strany rovnic ($\mathfrak{a}'$), ($\mathfrak{b}'$) za $x = p$ nabývají téže hodnoty, t. j.

$$C\,p - \tfrac{1}{6}\,\beta\,p^3\,p' = D' + C\,p + \tfrac{1}{6}\,\beta\,p^3\,(3\,l - 3\,l + p),$$
$$D' = -\tfrac{1}{6}\,\beta\,l\,p^3.$$

Bod b konečně náleží křivce $\mathfrak{p}\,b$; proto jeho souřadnice

$$x = l, \quad y = \mathfrak{0},$$

hoví rovnici ($\mathfrak{b}'$), tak že

$$\mathfrak{0} = -\tfrac{1}{6}\,\beta\,l\,p^3 + C\,l + \tfrac{1}{6}\,\beta\,l\,p\,(3\,l\,p - 3\,l^2 + l^2),$$
$$C = \tfrac{1}{6}\,\beta\,p\,(2\,l^2 - 3\,l\,p + p^2) = \tfrac{1}{6}\,\beta\,p\,p'\,(2\,l - p) = \tfrac{1}{6}\,\beta\,p'\,(l^2 - p'^2).$$

Čára $a\,\mathfrak{p}$ má tedy rovnici

$$y = \tfrac{1}{6}\,\beta\,p'\,x\,(l^2 - p'^2 - x^2),$$

a vložíme-li sem hodnotu za β, vyjde

$$(\mathfrak{a}'') \ldots\ldots\ldots\ldots y = \frac{P\,p'}{6\,E\,J\,l}\,x\,(l^2 - p'^2 - x^2)$$

Rovnici čáry $\mathfrak{p}\,b$ obdrželi bychom obdobně; rychleji nabýváme jí z rovnice ($\mathfrak{a}''$), směníme-li levou a pravou stranu nosníka, t. j. směníme-li veličiny p a p', x a x'. Tak vychází

$$(\mathfrak{b}'') \ldots\ldots\ldots\ldots y = \frac{P\,p}{6\,E\,J\,l}\,x'\,(l^2 - p^2 - x'^2).$$

O vzájemnosti prohybu. Mysleme si dva libovolné průřezy m, n nosníku $a\,b$ a znamenejme $\overline{a\,m} = m$, $\overline{m\,b} = m'$, $\overline{a\,n} = n$, $\overline{n\,b} = n'$. Budiž na př. $m < n$. Působí-li břímě P v průřezu n, vyvodí se jím v průřezu m prohnutí, jež obdržíme z rovnice ($\mathfrak{a}''$), položíme-li $x = m$, $p' = n'$, totiž

$$y_m = \frac{P\,n'\,m}{6\,E\,J\,l}\,(l^2 - n'^2 - m^2);$$

dáme-li naopak břemeni P působiti v průřezu m, vyvodí se tím v průřezu n prohnutí, jež obdržíme z rovnice ($\mathfrak{b}''$), položíme-li $x' = n'$, $p = m$, totiž

$$y_n = \frac{P\,m\,n'}{6\,E\,J\,l}\,(l^2 - m^2 - n'^2).$$

Jak patrno, $y_m = y_n$, čímž dovozena věta:

Prohnutí, jež v průřezu m vzniká břemenem P působícím v průřez n, rovná se prohnutí, jež vzniká v průřezu n břemenem P působícím v průřez m.*)

Náleží-li největší pořadnice y_0 čáry ohybové k dílu $a\,\mathfrak{p}$, stanovíme příslušný průřez x_0, kladouce v rovnici (a)

$$\frac{dy}{dx} = 0;$$

tím nabýváme výminky

$$(c) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots l^2 - p'^2 - 3x_0^2 = 0,$$

z níž plyne

$$(c') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_0 = \sqrt{\frac{l^2 - p'^2}{3}};$$

kořen negativný nemá platnosti statické.

Rovnice tato, týkající se čáry $a\,\mathfrak{p}$, platí jen, pokud

$$\sqrt{\frac{l^2 - p'^2}{3}} \leqq p,$$

tedy pokud

$$p \geqq \frac{l}{2};$$

t. j. největší pořadnice náleží k d e l š í m u z obou dílů nosníkových $a\,p$, $p\,b$. Budiž $\overline{a\,p} > \overline{p\,b}$; největší pořadnice má pak hodnotu

$$y_0 = \frac{P\,p'}{6\,E\,J\,l}\,x_0\,(l^2 - p'^2 - x_0^2)$$

anebo, poněvadž dle rovnice (c)

$$l^2 - p'^2 - x_0^2 = 2\,x_0^2,$$

$$(d) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y_0 = \frac{P\,p'}{3\,E\,J\,l}\,x_0^3.$$

Bylo by tedy vypočísti x_0 z rovnice (c') a pak y_0 z rovnice (d). Vložíme-li však x_0, jak vyjádřeno rovnicí (c'), do rovnice (d), vyjde

$$(33) \ldots\ldots\ldots\ldots y_0 = \frac{\sqrt{3}}{27}\,\frac{P\,p'}{E\,J\,l}\,\sqrt{(l^2 - p'^2)^3}.$$

---

*) Jest to applikace věty M a x w e l l o v y, platné o soustavách pružných vůbec, na přímý nosník prostý.

Jestliže v rovnici (a) položíme $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = \alpha$, obdržíme $\alpha = C$ a tedy

$$(34) \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha = \frac{P\,p'\,(l^2 - p'^2)}{6\,E\,J\,l},$$

čímž stanoven úhel, o který tečna křivky ohybové v bodě a jest odchýlena od osy X.

Velmi často bývá

$$p = p' = \frac{l}{2};$$

pak jest největší moment ohybový

$$M_p = \tfrac{1}{4} P\,l.$$

Co se týče ohybu, dává tu rovnice (c')

$$x_0 = \frac{l}{2},$$

jak vyplývá ostatně již ze souměrnosti nosníku i obtížení; rovnice (b) a (34) mění se takto:

$$(35) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y_0 = \frac{P\,l^3}{48\,E\,J},$$

$$(36) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \alpha = \frac{P\,l^2}{16\,E\,J}.$$

Posledního tohoto případu podepření a obtížení užívá se při zkouškách na stanovenou součinitele pevnosti v ohybu; součinitel ten (§ 22. str. 66.) počítá se z rovnice

$$k_0 = \frac{M_0}{\left(\frac{J}{e}\right)} = \frac{P_0\,l}{4\,\frac{J}{e}};$$

P_0 jest obtížení na mezi pevnosti.

Připomenutí. Jakost látek (viz připomenutí v § 20. na str. 54.) stanoviti lze také zkouškami v ohybu; Tetmajer činí tak při dřevě, poněvadž zde zkoušky v tahu k tomu se nehodí.

Dřevěný nosník prismatický, spočívající oběma konci svými na klínových podporách, zatěžuje se uprostřed vzdálenosti podporové osamělým břemenem P postupně větším a větším a měří po každé největší pořadnice y čáry ohybové. Mez úměrnosti jeví se tím, že pořadnice y počíná vzrůstati rychleji než síla P.

Napětí v na mezi úměrnosti stanoví se rovnicí obdobnou k té, kterou svrchu vyjádřen součinitel k_0 pevnosti v ohybu, tedy

$$v = \frac{P_v\, l}{4\,\frac{J}{e}}.$$

Zatěžuje-li se nosník nejen po mez úměrnosti, ale i dále až k mezi pevnosti,*) lze sestrojiti diagramm obdobný k obr. 8. (na str. 53.); úsečkami jsou tu hodnoty prohybu y, pořadnicemi příslušné hodnoty síly P. Obsah obrazce diagrammového, totiž

$$\Pi = \int P\, dy,$$

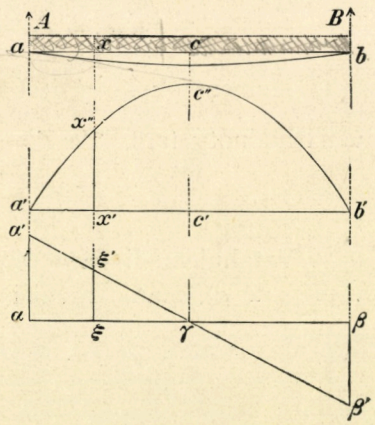
kde tedy P znamená prohýbající sílu, dy pak prvek dráhy vykonané působištěm síly v jejím směru, jest zase měrou práce, kterou prohýbající síla vykonává až ku zlomení nosníka, a proto i měrou práce, kterou nosník současně vzdoruje.

Jest-li y_0 prohyb na mezi pevnosti, P_0 pak příslušná hodnota břemene, lze zase položiti

$$\Pi = \beta\, P_0\, y_0,$$

kde β jest jakýsi součinitel menší než jednička. Součinitel tento však při dřevě není ani přibližně stálý (dle zkoušek Tetmajerových $\beta = 0{\cdot}3$ až $0{\cdot}85$ dle houževnosti dřeva).

Jde-li tedy o přirovnání dřev v příčině odporu proti působení sil zevnitřních, nutno přihlížeti jednak ku pevnosti (hlavně v tlaku), jednak k deformační práci Π při ohybu. Výsledky závisí podstatně i na vlhkosti dřeva.



Obr. 34.

Obdobně lze postupovati při železe litém, které však se neřídí zákonem Hookovým. Stanoviti jest jednak pevnost (v tahu), jednak deformační práci Π při ohybu.

β) Rozděleno-li obtížení rovnoměrně po délce $a\,b$ nosníka (obr. 34.), dává momentová výminka rovnováhy sil zevnitřních

$$A = B = \tfrac{1}{2}\, q\, l = \tfrac{1}{2}\, Q,$$

*) Nosník porušuje se tu vždy přetržením krajních vláken na straně tažené. Poněvadž pevnost stavebních dřev v tlaku nerovná se ani polovici pevnosti v tahu, vysvětluje se ona okolnost tím, že za mezí úměrnosti vůbec a na mezi pevnosti zvláště vrstva neutralná neobsahuje osu prutovou, ale jest posunuta směrem ku krajní vrstvě tlačené.

jak ostatně plyne již ze symmetrie nosníka i obtížení; v libovolném průřezu x máme

$$M = A\,x - q\,x \cdot \frac{x}{2},$$
$$T = A - q\,x;$$

vložíme-li pak sem hodnotu reakce A, vyjde

$$M = \tfrac{1}{2}\,q\,x\,(l-x) = \tfrac{1}{2}\,q\,x\,x',$$
$$T = q\left(\frac{l}{2} - x\right).$$

Čarou momentovou jest p a r a b o l a $a'\,c''\,b'$; poněvadž moment M se nemění, směníme-li vzájemně x a x', náležejí k průřezům, položeným souměrně vzhledem k rozpolovacímu průřezu c, momenty rovné, pročež svislice $c'\,c''$ jest osou paraboly. Čarou sil posouvajících jest p ř í m k a $\alpha'\,\beta'$ stanovená krajními pořadnicemi

$$\overline{\alpha\,\alpha'} = T_a = \tfrac{1}{2}\,q\,l, \quad \overline{\beta\,\beta'} = T_b = -\tfrac{1}{2}\,q\,l.$$

Moment ohybový jest ve všech průřezech positivný a nabývá největší hodnoty tam, kde $T = 0$, totiž v průřezu $x = \frac{l}{2}$. Jest to hodnota

$$M_c = \tfrac{1}{8}\,q\,l^2 = \tfrac{1}{8}\,Q\,l.$$

Vztahujeme-li čáru ohybovou k téže soustavě souřadnicové jako v případě α), máme rovnici

$$-E\,J\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\,q\,x\,(l-x)$$

anebo

$$\beta\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\,l\,x + x^2,$$

klademe-li kratšeji

$$\beta = \frac{2\,E\,J}{q}.$$

Integrováním vychází

$$(\mathfrak{a}) \ldots\ldots\ldots\ldots \beta\,\frac{dy}{dx} = C - \tfrac{1}{2}\,l\,x^2 + \tfrac{1}{3}\,x^3,$$

$$(\mathfrak{b}) \ldots\ldots\ldots\ldots \beta\,y = D + C\,x - \tfrac{1}{6}\,l\,x^3 + \tfrac{1}{12}\,x^4.$$

Integrační konstanty stanoví se z výminek, že body a, b náležejí křivce ohybové; dvojiny souřadnic

$$x = 0,\ y = 0,$$
$$x = l,\ y = 0$$

hoví tedy rovnici křivky. Z toho plyne, že

$$D = 0, \quad C = \tfrac{1}{12} l^3,$$

tak že křivka ohybová má rovnici

$$(c) \ldots\ldots\ldots y = \frac{q}{24 E J} x (l^3 - 2 l x^2 + x^3);$$

je to křivka parabolická řádu čtvrtého. Položíme-li v rovnici (a) $\frac{dy}{dx} = 0$, bychom stanovili největší pořadnici křivky, vyjde

$$4 x_0^3 - 6 l x_0^2 + l^3 = 0,$$

rovnice stupně třetího, kterou lze psáti ve tvaru

$$(2 x_0 - l)(2 x_0^2 - 2 l x_0 - l^2) = 0.$$

Kořeny její jsou

$$x_0 = \frac{l}{2}, \quad \frac{l}{2}(1 \pm \sqrt{3});$$

statickou platnost má jen první z nich; druhý jest větší než l, třetí negativný. Že největší pořadnice čáry ohybové náleží k rozpolovacímu bodu c délky $a b$, souditi ostatně již ze symmetrie nosníku i obtížení.

Hodnotou $x_0 = \frac{l}{2}$ vychází z rovnice (c) největší pořadnice

$$(37) \ldots\ldots\ldots y_0 = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{E J} = \frac{5}{384} \frac{Q l^3}{E J}.$$

Úhel α, o který jest tečna křivky ohybové v bodě a odchýlena od osy X, vychází z rovnice (a) hodnotou $x = 0$, totiž

$$(38) \ldots\ldots\ldots \alpha = \frac{q l^3}{24 E J} = \frac{Q l^2}{24 E J}.$$

Působí-li v nosník osamělé břímě P v průřezu p a zároveň rovnoměrné obtížení $Q = q l$, sčítají se v každém průřezu momenty, síly posouvající a pořadnice křivky ohybové, jež jsou vyvozeny každým z těchto obtížení jednotlivých. Působí-li na př. P uprostřed délky $\overline{a b}$, má největší pořadnice hodnotu

$$(39) \ldots\ldots\ldots y_0 = \frac{(P + \frac{5}{8} Q) l^3}{48 E J}.$$

Na základě této rovnice stanoví se modul E pružnosti zkouškami v ohybu. Nosník prismatický přiměřeného průřezu (obdélníkového či kruhového) a vhodné délky uloží se na klínových podporách, zatěžuje uprostřed délky silou P nenáhle rostoucí a měří po každé prohyb y_0. Tak postupuje se potud, pokud nenastává značnější trvalé prohnutí, a pokud hodnoty vypočtené z rovnice

$$E = \frac{(P + \frac{5}{8} Q) l^3}{48 J y_0}$$

rostoucími rozdíly svými neukazují, že přestoupena mez úměrnosti.

γ) Obtížen-li nosník soustavou břemen osaměl ých $P_1, P_2, \ldots P_r, P_{r+1}, \ldots P_n$, působících v průřezech $p_1, p_2, \ldots p_r, p_{r+1}, \ldots p_n$, a znamenáme-li zase obecně $\overline{a\,p_r} = p_r$, $\overline{p_r\,b} = p_r'$, máme reakce

$$A = \frac{1}{l} \sum_0^l P\,p', \quad B = \frac{1}{l} \sum_0^l P\,p.$$

K libovolnému průřezu x náleží moment ohybový

$$M = A\,x - \sum_0^x P\,(x - p)$$

a síla posouvající

$$T = A - \sum_0^x P.$$

Čára momentová jest lomená; vrcholy má na svislicích břemen. Čára sil posouvajících jest stupňovitá; skládá se ze stran vodorovných, jež souvisí stranami svislými. Obě čáry ukazují, že maximum momentu se vyskytuje vůbec v průřezu některého břemene, jak plyne též z úvahy následující. Pokud síla T jest $\left\{\begin{matrix}\text{positivná, roste}\\ \text{negativná, klesá}\end{matrix}\right\}$ moment ohybový za rostoucí úsečky x; maximum momentové vyskytuje se v průřezu, v němž moment přestává vzrůstati a počíná klesati; v průřezu tom musí tedy

$$T = A - \sum_0^x P \gtrless 0$$

neboli

$$\sum_0^x P \lesseqgtr A\,;$$

znaménko $\left\{\begin{matrix}\text{vrchní}\\ \text{spodní}\end{matrix}\right\}$ týče se průřezů $\left\{\begin{matrix}\text{předchozích}\\ \text{následujících}\end{matrix}\right\}$. Z toho plyne pravidlo: *Sčítejme břemena postupujíce od levého konce na pravo a to potud, až součet břemen právě přestoupí hodnotu reakce A; pod posledním z přičtených břemen namítá se maximum momentové*, jež pak stanovíme způsobem známým.

Příklad 6. Stanoviti max M nosníka, jehožto vzdálenost podporová $l = 10\ m$, obtížen-li břemeny $P_1 = 1200\ kg$, $P_2 = 500\ kg$, $P_3 = 900\ kg$, $P_4 = 600\ kg$, $P_5 = 1800\ kg$, $P_6 = 1000\ kg$, jež působí ve vzdálenostech $p_1 = 1\ m$, $p_2 = 2\ m$, $p_3 = 4\ m$, $p_4 = 6\ m$, $p_5 = 7\ m$, $p_6 = 9\ m$ od bodu a (obr. 35.).

Z výminky rovnováhy

$$A \,.\, 10 - 1200 \,.\, 9 - 500 \,.\, 8 - 900 \,.\, 6 - 600 \,.\, 4 - 1800 \,.\, 3 - 1000 \,.\, 1 = 0$$

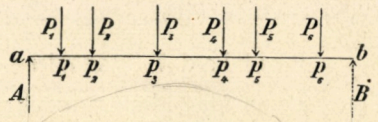
vychází reakce

$$A = 2900\ kg.$$

Sčítáme-li břemena od levé ku pravé, přestupuje součet reakci A v průřezu břemene P_4; průřez p_4 jest proto přechodným, a příslušné

$$\max M = 2900 \,.\, 6 - 1200 \,.\, 5 - 500 \,.\, 4 - 900 \,.\, 2 = 7600\ mk.$$

Čára ohybová skládá se z parabolických oblouků řádu třetího; každé dva sousední oblouky mají na svislici příslušného břemene společný bod a v něm společnou tečnu.



Obr. 35.

Abychom stanovili pořadnici y, náležející k libovolné úsečce x, užijme rovnic $(\mathfrak{a}'')$, $(\mathfrak{b}'')$ platných za jediného břemene osamělého; rovnice $\left\{\begin{matrix}(\mathfrak{b}'')\\(\mathfrak{a}'')\end{matrix}\right\}$ platí o břemenech působících na $\left\{\begin{matrix}\text{levé}\\\text{pravé}\end{matrix}\right\}$ straně průřezu x. Celkem tedy

$$(40)\ldots\ldots\ y = \frac{1}{6\,E\,J\,l}\left[x'\sum_0^x P\,p\,(l^2 - p^2 - x'^2) + x\sum_x^l P\,p'\,(l^2 - p'^2 - x^2)\right]$$

$$= \frac{1}{6\,E\,J\,l}\left[x'\sum_0^x P\,p\,(l^2 - p^2) - x'^3\sum_0^x P\,p + x\sum_x^l P\,p'\,(l^2 - p'^2) - x^3\sum_x^l P\,p'\right].$$

Tečna křivky ohybové odchýlena jest od osy X o úhel daný výrazem

$$\tan\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{6\,E\,J\,l}\left[-\sum_0^x P\,p\,(l^2 - p^2) + 3\,x'^2\sum_0^x P\,p\right.$$

$$\left. + \sum_x^l P\,p'\,(l^2 - p'^2) - 3\,x^2\sum_x^l P\,p'\right],$$

což přetvořiti lze takto:

$$\tan\varphi = \frac{1}{2\,E\,J}\left[\frac{1}{3\,l}\sum_0^l P\,p\,p'\,(l + p') + \sum_0^x P\,p^2 - 2\,x\sum_0^x P\,p - T\,x^2\right],$$

MAJETEK ČESKO-UKR. KOMITÉTU V Č. S. R.

kde

$$T = A - \sum_{0}^{x} P$$

jest síla posouvající průřezu x.

V průřezu x_0, k němuž náleží největší pořadnice křivky ohybové, musí tedy

$$(41)\ldots\ T x_0^2 + 2 x_0 \sum_{0}^{x_0} P p - \sum_{0}^{x_0} P p^2 - \frac{1}{3l} \sum_{0}^{l} P p p' (l + p') = 0.$$

Řešení této rovnice však vymáhá, bychom věděli, mezi kterými břemeny posloupnými sluší hledati průřezu x_0; průřez x_0 jest obsažen mezi břemeny P_r a P_{r+1}, má-li levá strana rovnice (41) za $\left\{\begin{matrix} x = p_r \\ x = p_{r+1} \end{matrix}\right\}$ hodnotu $\left\{\begin{matrix} \text{negativnou} \\ \text{positivnou} \end{matrix}\right\}$. Stanoven-li průřez x_0, vychází příslušná největší pořadnice y_0 z rovnice (40).

Příklad 7. Stanoviti prohyb nosníku vytčeného v příkladě 6.

Poněvadž žádané největší pořadnice křivky ohybové jest se nadíti dle všeho v dílu $p_3 p_4$, stanovme znaménka levé strany rovnice (41) za $x = p_3 = 4\ m$, pak za $x = p_4 = 6\ m$. V dílu $p_3 p_4$ platí hodnoty:

$$T = 2900 - 1200 - 500 - 900 = 300\ kg,$$

$$\sum_{0}^{x} P p = 1200 \,.\, 1 + 500 \,.\, 2 + 900 \,.\, 4 = 5800\ mk,$$

$$\sum_{0}^{x} P p^2 = 1200 \,.\, 1 + 500 \,.\, 2^2 + 900 \,.\, 4^2 = 17.600\ m^2 .\ k,$$

$$\sum_{0}^{l} P p p' (l + p') = 1200 \,.\, 1 \,.\, 9 \,.\, 19 + 500 \,.\, 2 \,.\, 8 \,.\, 18 + 900 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 16 + 600 \,.\, 6 \,.\, 4 \,.\, 14$$
$$+ 1800 \,.\, 7 \,.\, 3 \,.\, 13 + 1000 \,.\, 9 \,.\, 1 \,.\, 11 = 1\,486\,800\ m^3 \,.\, k.$$

Rovnici (29) lze tedy po případném zkrácení psáti takto:

$$30 x_0^2 + 1160 x_0 - 6716 = 0.$$

Poněvadž levá strana této rovnice jest za $\left\{\begin{matrix} x = 4 \text{ negativná} \\ x = 6 \text{ positivná} \end{matrix}\right\}$, obsažen hledaný průřez x_0 skutečně v dílu $p_3 p_4$, a obdržíme jeho úsečku rozřešíce tuto rovnici. Positivný kořen její jest

$$x_0 = \frac{-580 + \sqrt{580^2 + 30 \,.\, 6716}}{30} = 5{\cdot}11\ m.$$

Příslušná největší pořadnice vyplývá z rovnice (40), kde

$$\sum_{0}^{x} P p = 5800\ mk \text{ (viz svrchu)},$$

$$\sum_{0}^{x} P\,p\,(l^2 - p^2) = 1200 \,.\, 1 \,.\, 99 + 500 \,.\, 2 \,.\, 96 + 900 \,.\, 4 \,.\, 84 = 517\,200\ m^3 \,.\, k,$$

$$\sum_{x}^{l} P\,p' = 600 \,.\, 4 + 1800 \,.\, 3 + 1000 \,.\, 1 = 8800\ mk,$$

$$\sum_{x}^{l} P\,p'\,(l^2 - p'^2) = 600 \,.\, 4 \,.\, 84 + 1800 \,.\, 3 \,.\, 91 \,.\, + 1000 \,.\, 1 \,.\, 99 = 792\,000\ m^3 \,.\, k$$

Jest-li na př.

$$E = 2\,000\,000\ kg/cm^2 = 20\,000\,000\,000\ kg/m^2,$$

$$J = 14\,250\ cm^4 = 0{\cdot}000\,142\,5\ m^4,$$

obdržíme

$$y_0 = \frac{4{\cdot}89\,(517\,200 - 4{\cdot}89^2 \,.\, 5800) + 5{\cdot}11\,(792\,000 - 5{\cdot}11^2 \,.\, 8800)}{6 \,.\, 20\,000\,000\,000 \,.\, 0{\cdot}000\,142\,5 \,.\, 10}$$

$$= 0{\cdot}0276\ m = 2{\cdot}76\ cm.$$

δ) Obtížen-li nosník soustavou břemen osamělých a zároveň břemenem rozděleným rovnoměrně po délce $a\,b$, jest za téhož označení

$$A = \frac{1}{l} \sum_{0}^{l} P\,p' + \tfrac{1}{2}\,q\,l,$$

$$M = A\,x - \sum_{0}^{x} P\,(x - p) - \tfrac{1}{2}\,q\,x^2,$$

$$T = A - \sum_{0}^{x} P - q\,x.$$

Maximum momentové náleží k průřezu, kde síla posouvající mění znaménko a to buď náhle (pod některým z osamělých břemen) či nenáhle (mezi dvěma břemeny osamělými). V onom případě stanovíme průřez přechodný dle pravidla, jehož jsme užili v předešlém případě *γ*); sčítáme totiž břemena (osamělá i rovnoměrné) od levé ku pravé, až součet právě přestoupí hodnotu reakce A. Při kterém břemeni osamělém se to děje, tam jest průřez přechodný. Shledáme-li však tímto sčítáním, že průřez přechodný jest obsažen mezi dvěma osamělými břemeny, poznáme zároveň, mezi kterými, a můžeme pak užiti výminky, že v tom průřezu síla T rovná se nulle. Jest-li c průřez přechodný, kterýmž písmenem znamenejme zároveň krátce úsečku $\overline{a\,c}$, platí pak výminka

$$T_c = A - \sum_{0}^{c} P - q\,c = 0$$

neboli

$$c = \frac{A - \sum_{0}^{c} P}{q}.$$

Příklad 8. Nosník příkladu 6. budiž mimo naznačenou tam soustavu břemen osamělých obtížen ještě rovnoměrně po délce $\overline{a\,b}$. Stanoviti max M.

a) Budiž $Q = 2000\ kg$, tedy $q = 200\ kg/m$. Tu přistupuje k levé reakci, jak jsme ji ustanovili v příkladě 6., ještě polovice obtížení Q, tak že nyní

$$A = 2900 + 1000 = 3900\ kg.$$

Sčítáme-li obtížení od levé ku pravé, vychází bezprostředně před břemenem P_4 součet $3800\ kg$, bezprostředně za ním součet $4400\ kg$. Součet obtížení přestupuje tedy hodnotu reakce A právě pod tímto břemenem. Průřez p_4 jest proto přechodným, a příslušné maximum momentové

$$M_c = 3900 \,.\, 6 - 1200 \,.\, 5 - 500 \,.\, 4 - 900 \,.\, 2 - 1200 \,.\, 3 = 10\,000\ mk.$$

b) Jest-li však $Q = 4000\ kg$, $q = 400\ kg/m$, máme

$$A = 2900 + 2000 = 4900\ kg;$$

součet veškerých břemen má bezprostředně za břemenem P_3 hodnotu $4200\ kg$, bezprostředně před břemenem P_4 hodnotu $5000\ kg$; průřez přechodný jest tedy obsažen mezi p_3 a p_4. Z rovnice svrchu položené plyne

$$c = \frac{4900 - 2600}{400} = 5{\cdot}75\ m,$$

a největší moment má hodnotu

$$M_c = 4900 \,.\, 5{\cdot}75 - 1200 \,.\, 4{\cdot}75 - 500 \,.\, 3{\cdot}75 - 900 \,.\, 1{\cdot}75$$
$$- 400 \,.\, 5{\cdot}75 \,.\, \frac{5{\cdot}75}{2} = 12\ 412{\cdot}5\ mk.$$

Co se týče o h y b u, jest sečísti pořadnice, vyvozené jednak soustavou břemen osamělých, jednak obtížením rovnoměrným, pokud náležejí k témuž průřezu. Z rovnic (40) a (c) (na str. 115.) plyne

$$(42)\ldots\ldots\ y = \frac{1}{6\,E\,J\,l}\Big[x'\,[\overset{x}{\underset{0}{\Sigma}} P\,p\,(l^2 - p^2) - x'^2 \overset{x}{\underset{0}{\Sigma}} P\,p] + x\,[\overset{l}{\underset{x}{\Sigma}} P\,p'\,(l^2 - p'^2)$$
$$- x^2 \overset{l}{\underset{x}{\Sigma}} P\,p'] + \tfrac{1}{4}\,Q\,x\,(l^3 - 2\,l\,x^2 + x^3)\Big];$$

tečna křivky ohybové v libovolném bodě $\mathfrak{x}$ má od osy X odchylku danou rovnicí

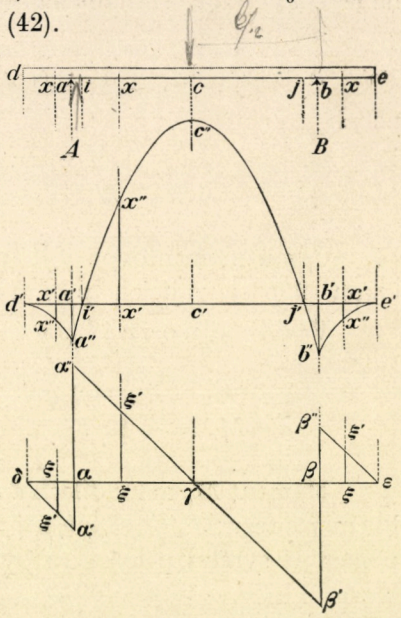
$$\tan\varphi = \frac{1}{6\,E\,J}\Big[\frac{1}{l}\overset{l}{\underset{0}{\Sigma}} P\,p\,p'\,(l + p') + 3\overset{x}{\underset{0}{\Sigma}} P\,p^2 + \tfrac{1}{4}\,q\,l^3 - 6\,x\overset{x}{\underset{0}{\Sigma}} P\,p$$
$$- 3\,(A - \overset{x}{\underset{0}{\Sigma}} P)\,x^2 + q\,x^3\Big].$$

Největší pořadnice čáry ohybové náleží k průřezu x_0, který hoví rovnici

$$(43)\ldots q x_0^3 - 3\,(A - \sum_0^{x_0} P)\,x_0^2 - 6\,x_0 \sum_0^{x_0} P\,p + \frac{1}{l}\sum_0^{l} P\,p\,p'\,(l+p') + 3\sum_0^{x_0} P\,p^2 + \tfrac{1}{4}\,q\,l^3 = 0.$$

Průřez x_0 jest pak zase obsažen mezi břemeny P_r a P_{r+1}, má-li levá strana rovnice (43) za $x = p_r$, $x = p_{r+1}$ znaménka protivná. Ustanoven-li díl $p_r\,p_{r+1}$, v němžto průřez x_0 jest obsažen, ustanoví se úsečka x_0 řešením rovnice (43), pořadnice y_0 pak z rovnice (42).

c) Nosník prostý s konci přečnívajícími. Nosník nechť jest podepřen na dvou místech, ale nikoli na koncích. Budiž (obr. 36.) $\overline{d\,e}$ osa nosníku, a, b její body podporové; znamenejme pak kratšeji $\overline{a\,b} = l_0$, $\overline{d\,a} = l'$, $\overline{b\,e} = l''$, $\overline{d\,e} = l_0 + l' + l'' = l$. Dejme tomu, že nosník po jedné podpoře se může pohybovati směrem vodorovným, tak že za svislých zevnitřních sil prvotných jsou i reakce svislé.



Obr. 36.

Obtížen-li nosník rovnoměrně po délce $d\,e$, jest jednou z výminek rovnováhy sil zevnitřních:

$$A\,l_0 - q\,l\left(\frac{l}{2} - l''\right) = 0,$$

pročež

$$A = \frac{q\,l\,(l - 2\,l'')}{2\,l_0} = \tfrac{1}{2}\,q\,\frac{(l_0 + l')^2 - l''^2}{l_0};$$

obdobně pak

$$B = \frac{q\,l\,(l - 2\,l')}{2\,l_0} = \tfrac{1}{2}\,q\,\frac{(l_0 + l'')^2 - l'^2}{l_0}. \qquad \ldots\ldots\ldots (44)$$

Díl nosníkový $d\,a$ má se tak, jako nosník na levém konci volný, na pravém vetknutý. Znamenáme-li tu $\overline{d\,x} = x$ měříce tedy úsečku x od počátku d téhož dílu, jest jako v případě *a*) *β*)

$$M = -\tfrac{1}{2}\,q\,x^2, \quad T = -q\,x,$$
$$M_a = -\tfrac{1}{2}\,q\,l'^2, \quad T_a = -q\,l'.$$

Čarou momentovou jest parabola $d'\,x''\,a''$ (d' vrchol, $d\,d'$ osa), čarou sil posouvajících přímka $\delta\,\alpha'$.

Připomenutí. Myslíme-li si reakce A, B jakožto síly osamělé, má síla posouvající v každém z průřezů a, b hodnoty dvě, jež se liší o hodnotu příslušné reakce. Hodnota T_a svrchu položená náleží k průřezu a dílu nosníkového $d\,a$ (neboli k průřezu nekonečně blízkému v levo); sílu posouvající průřezu a dílu nosníkového $a\,b$ (neboli průřezu nekonečně blízkého v pravo) znamenejme T_a'. Obdobně budiž $\left\{\begin{matrix} T_b \\ T_b' \end{matrix}\right\}$ síla posouvající průřezu b, čítáme-li jej k dílu $\left\{\begin{matrix} \text{levému } a\,b \\ \text{pravému } b\,e \end{matrix}\right\}$. —

Díl nosníkový $b\,e$ lze pokládati za nosník na pravém konci volný, na levém vetknutý. Znamenáme-li tu $\overline{b\,x} = x$, $\overline{x\,e} = x'$, platí (vycházíme-li od konce pravého)

$$-M = \tfrac{1}{2}\,q\,x'^2, \quad -T = -q\,x'$$

neboli

$$M = -\tfrac{1}{2}\,q\,x'^2, \quad T = q\,x',$$
$$M_b = -\tfrac{1}{2}\,q\,l''^2, \quad T_b' = q\,l''.$$

Čarou momentovou jest parabola $b''\,x''\,e'$ (e' vrchol, $e\,e'$ osa), čarou sil posouvajících přímka $\beta''\,\varepsilon$ rovnoběžná s $\delta\,\alpha'$.

V dílu nosníkovém $a\,b$ obdržíme, znamenajíce $\overline{a\,x} = x$,

$$M = A\,x - \tfrac{1}{2}\,q\,(l' + x)^2, \quad T = A - q\,(l' + x),$$
$$M_a = -\tfrac{1}{2}\,q\,l'^2, \quad T_a' = A - q\,l'.$$

Moment M_a má v dílech $d\,a$, $a\,b$ touž hodnotu, což platí obecně o všelikém průřezu; T_a' dílu $a\,b$ liší se od T_a dílu $d\,a$ o hodnotu A, jak v připomenutí svrchu položeném bylo dotčeno. Lze tedy psáti

$$A = -T_a + T_a',$$

rovnice, která se nám níže namítne při nosnících spojitých.

Připomenutí. Rozvedeme-li vytčené svrchu výrazy momentu M a síly T, platné v dílu $a\,b$, vyjde

$$M = -\tfrac{1}{2}\,q\,l'^2 + (A - q\,l')\,x - \tfrac{1}{2}\,q\,x^2,$$
$$T = A - q\,l' - q\,x.$$

K těmto výrazům možno dospěti přímo, jak následuje. Poněvadž síly zevnitřní na levé straně libovolného průřezu x_0 se skládají ve dvojici, danou momentem ohybovým M_0, a v sílu posouvající T_0, můžeme, stanovíce moment ohybový M a sílu posouvající T kteréhokoli dalšího průřezu x, vycházeti od průřezu x_0 jakožto levého konce nosníka, nahradíme-li odňatý díl silou posouvající T_0 a dvojicí danou momentem M_0. Mysleme si, že v případě přítomném díl nosníkový $d\,a$ jest odňat a nahrazen jednak dvojicí danou memontem M_a, jednak silou posouvající T_a či T_a' dle toho, přisouzena-li podpora a a tedy re-

akce A dílu $a\,e$ či $d\,a$. Přisuďme ji dílu $d\,a$; dále nutno při stanovení momentu M a síly T v průřezech x dílu $a\,b$ přihlížeti k M_a, T_a', pak k obtížení dílu $a\,x$, čímž vychází

$$M = M_a + T_a' x - \tfrac{1}{2} q x^2,$$
$$T = T_a' - q x.$$

Poněvadž

$$M_a = -\tfrac{1}{2} q l'^2, \quad T_a' = A - q l',$$

dospíváme takto k výrazům svrchu odvozeným. Tak budeme si počínati níže při nosnících spojitých. —

Čarou momentovou dílu $a\,b$ jest p a r a b o l a $a''\,c''\,b''$, jež má průměry svislé; čarou sil posouvajících jest p ř í m k a $\alpha''\,\beta'$ rovnoběžná s přímkami $\delta\,\alpha'$, $\beta''\,\varepsilon$.

Co se týče k r a j n í c h h o d n o t momentu M, máme tu m a x i m u m a d v ě m i n i m a.

Minima náležejí k průřezům podporovým (síla T mění v nich znaménko a to náhle); jsou to stanovené svrchu hodnoty M_a, M_b, jak patrno, vždy negativné.

Maximum vyskytuje se v přechodném průřezu c dílu nosníkového $a\,b$; úsečka $\overline{a\,c} = c$ tohoto průřezu plyne z výminky, že

$$T_c = A - q\,(l' + c) = 0,$$

tak že

$$c = \frac{A - q\,l'}{q} = \frac{T_a'}{q}$$

neboli

$$(45) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c = \frac{l_0^2 + l'^2 - l''^2}{2\,l_0};$$

příslušné maximum jest

$$M_c = A\,c - \tfrac{1}{2} q\,(l' + c)^2$$

neboli

$$(46) \ldots M_c = \frac{q\,(l_0 + l' + l'')\,(l_0 + l' - l'')\,(l_0 + l'' - l')\,(l_0 - l' - l'')}{8\,l_0^2}.$$

Jde-li o průřezové rozměry nosníku prismatického takto podepřeného a obtíženého, nutno z momentů M_a, M_b, M_c vzíti ten, který má největší hodnotu prostou.

V dílu $a\,b$ vyskytují se t. zv. p r ů ř e z y o b r a t n í k o v é (str. 95.). Jest-li obecně i kterýkoli z nich, stanovíme úsečku $\overline{a\,i} = i$ výminkou, že

$$M_i = -\tfrac{1}{2} q l'^2 + (A - q l')\,i - \tfrac{1}{2} q\,i^2 = 0$$

neboli

$$i^2 - 2\,c\,i + l'^2 = 0,$$

tak že

$$(47) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ i = c \pm \sqrt{c^2 - l'^2}.$$

Rovnice (47) ukazuje, že za obtížení rovnoměrného jsou průřezy obratníkové položeny souměrně na obou stranách průřezu přechodného. Aby byly realné, musí

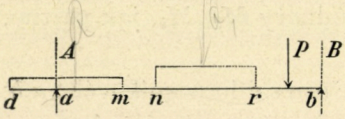
$$c > l',$$

tedy

$$\frac{l_0^2 + l'^2 - l''^2}{2\,l_0} > l',$$

$$l_0 > l' + l''.$$

Jest-li $l_0 = l' + l''$, sjednocují se obratníkové průřezy s průřezem přechodným c; v tomto případě $M_c = 0$. Jest-li $l_0 < l' + l''$, není průřezů obratníkových, a moment $M_c < 0$.



Obr. 37.

Obdobným spůsobem postupovali bychom za jiného obtížení.

Příklad 9. Stanoviti největší prostou hodnotu momentu ohybového při nosníku $d\,a\,b$ s levým koncem přečnívajícím, jest-li (na ose nosníkové) $\overline{d\,a} = 1{\cdot}4\,m$, $\overline{a\,b} = 8\,m$, $\overline{a\,m} = 2\,m$, $\overline{a\,n} = 3\,m$, $\overline{a\,r} = 6\,m$, $\overline{a\,p} = 7\,m$, a obtížen-li díl $d\,m$ rovnoměrným břemenem $q = 200\ kg/m$, díl $n\,r$ rovnoměrným břemenem $q' = 400\ kg/m$, a působí-li mimo to v průřezu p břímě osamělé $P = 500\ kg$ (obr. 37.).

Obtížení dílů $d\,m$ a $n\,r$ mají výslednice

$$Q = 200 \,.\, 3{\cdot}4 = 680\ kg,$$
$$Q' = 400 \,.\, 3 = 1200\ kg;$$

přímky Q, Q' mají od bodu a vzdálenosti $\frac{3{\cdot}4}{2} - 1{\cdot}4 = 0{\cdot}3\ m$, $3 + \frac{3}{2} = 4{\cdot}5\ m$.

Z momentové výminky rovnováhy sil zevnitřních

$$A \,.\, 8 - 680\,(8 - 0{\cdot}3) - 1200\,(8 - 4{\cdot}5) - 500 \,.\, 1 = 0$$

vychází reakce

$$A = \frac{9936}{8} = 1242\ kg.$$

Podporový moment (minimum) jest

$$M_a = -\,200 \,.\, 1{\cdot}4 \,.\, 0{\cdot}7 = -\,196\ mk.$$

Abychom stanovili průřez přechodný c dílu $a\,b$, sčítejme obtížení od levé ku pravé, až součet právě přestoupí hodnotu reakce A. Součet obtížení má v průřezu $x = 4\,m$ hodnotu $680 + 400 = 1080 < 1242$, v průřezu $x = 5\,m$ však $1080 + 400 = 1480 > 1242$; proto mění síla posouvající znaménko mezi těmito průřezy. Úsečka $\overline{a\,c} = c$ průřezu přechodného dána jest výminkou, že

$$T_c = A - Q - q'\,(c - 3) = 0,$$

$$c - 3 = \frac{A - Q}{q'} = \frac{1242 - 680}{400} = 1{\cdot}4\,m,$$

$$c = 4{\cdot}4\,m.$$

Příslušný moment (maximum)

$$M_c = 1242\,.\,4{\cdot}4 - 680\,(4{\cdot}4 - 0{\cdot}3) - 400\,.\,1{\cdot}4\,.\,0{\cdot}7$$
$$= 2884{\cdot}8\,mk.$$

M_c jest tedy největší prostá hodnota momentu ohybového.

§ 29. **Nosníky spojité. Jak se liší od prostých co do momentu ohybového a síly posouvající.** Podepřen-li nosník na více než dvou místech, nejsou reakce staticky určité, i když podporové body — jeden vyjímajíc — mohou se volně pohybovati po přímkách. Nosník takový zove se s p o j i t ý m; posloupnými body podporovými rozkládá se v díly, t. zv. p o l e.

Místo spojitého nosníku, sáhajícího nepřetržitě od podpory levé krajní přes všecky vnitřní ku pravé krajní podpoře, mohlo by se užiti tolika nosníků na koncích prostě podepřených, kolik jest polí; každým polem nahrazen jest tedy nosník prostý téže délky a právě tak obtížený jako pole; přihlédněme k tomu, jak se po stránce statické liší kterékoli pole od příslušného nosníku prostého.

Při nosníku prostém závisí ohybový moment M a posouvající síla T průřezu (x) toliko na obtížení nosníka; náleží-li však průřez některému poli nosníka spojitého, závisí veličiny M, T i na disposici a obtížení polí ostatních.

Stanovíce veličiny T, M v kterémkoli průřezu pole $a\,b$, měli bychom sčítati síly zevnitřní, případně jejich statické momenty nejen v dílu $a\,x$ tohoto pole ale zároveň ve všech levých polích předchozích.*) V § 28. *c*) bylo ukázáno, že lze v této příčině kterýkoli průřez x_0 pokládati za po-

*) V podstatě má se pole $a\,b$ nosníku spojitého tak, jako vnitřní díl $a\,b$ nosníku $d\,a\,b\,e$ na obou koncích přes podpory přečnívajícího (§ 28. c)); pole $a\,b$ má tedy za rovnoměrného obtížení obrazec momentový téhož rázu, jako díl $a\,b$ nosníku $d\,a\,b\,e$ (obr. 36.); za jiného obtížení vstupuje toliko na místo paraboly $a''c''b''$ jiná čára momentová.

čátek nosníka, nahrazen-li díl, který na levé straně průřezu x_0 jaksi odnímáme, jednak dvojicí, kteráž jest dána momentem M_0, jednak silou posouvající T_0 tohoto průřezu. Jest-li tedy $a\,b$ kterékoli pole nosníku spojitého, mysleme si, že všecka předchozí pole v levo jsou odňata a nahrazena jednak dvojicí danou momentem podporovým M_a, jednak silou posouvající T_a či T_a' dle toho, přisuzujeme-li reakci A poli $a\,b$ či poli předchozímu. Poněvadž reakce A není předem známa, přisuďme ji poli předchozímu, tak že nutno vzíti sílu T_a'. Moment ohybový M a síla posouvající T libovolného průřezu x pole $a\,b$ jsou pak dle známých pravidel dány rovnicemi

$$(a) \ldots\ldots\ldots\ldots M = M_a + T_a' x - (Q_{ax})_x,$$
$$(b) \ldots\ldots\ldots\ldots T = T_a' - Q_{ax},$$

kde znamená Q_{ax} prostou hodnotu výslednice obtížení, jež působí v díl $a\,x$ pole $a\,b$, $(Q_{ax})_x$ pak prostou hodnotu statického momentu této výslednice vzhledem k průřezu (x).

Myslíme-li si dále nosník prostý $a\,b$ téže délky a právě tak obtížený jako pole $a\,b$ nosníku spojitého, stanoven jest moment ohybový $\mathfrak{M}$ a síla posouvající $\mathfrak{T}$ stejně položeného průřezu (x) rovnicemi

$$(a') \ldots\ldots\ldots\ldots \mathfrak{M} = \mathfrak{A}\, x - (Q_{ax})_x,$$
$$(b') \ldots\ldots\ldots\ldots \mathfrak{T} = \mathfrak{A} - Q_{ax},$$

kde $\mathfrak{A}$ jest levá reakce nosníku prostého. Odečtením vycházejí rozdíly

$$(c) \ldots\ldots\ldots\ldots M - \mathfrak{M} = M_a + (T_a' - \mathfrak{A})\, x,$$
$$(d) \ldots\ldots\ldots\ldots T - \mathfrak{T} = T_a' - \mathfrak{A}.$$

Bychom vhodně vyjádřili rozdíl $T_a' - \mathfrak{A}$, applikujme rovnici (c) na průřez b kladouce $x = l$; poněvadž $\mathfrak{M}_b = 0$, obdržíme tak

$$M_b = M_a + (T_a' - \mathfrak{A})\, l$$

a z toho

$$T_a' - \mathfrak{A} = \frac{M_b - M_a}{l}.$$

Vložíme-li tuto hodnotu v rovnice (c), (d), obdržíme, kladouce kratšeji $l - x = x'$, rovnice

$$(48) \ldots\ldots\ldots\ldots M = \mathfrak{M} + \frac{M_a x' + M_b x}{l},$$

$$(49) \ldots\ldots\ldots\ldots T = \mathfrak{T} + \frac{M_b - M_a}{l}.$$

Tuto lze odvodit ostatně z oné differencováním dle x.

Na základě rovnic (48), (49) lze stanoviti veličiny M, T, platné při nosníku spojitém, z obdobných veličin $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{T}$ nosníku prostého, známe-li ohybové momenty M_a, M_b podporových průřezů nosníku spojitého. Tyto momenty nazývejme krátce m o m e n t y p o d p o r o v ý m i.

Jak rovnice (48) ukazuje, liší se momenty M, $\mathfrak{M}$ o hodnotu

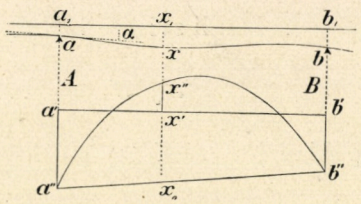
$$M' = \frac{M_a (l - x) + M_b x}{l},$$

kterou nazývejme doplňkem momentovým; pokládáme-li x za úsečku, M' pak, vyjádřené délkou dle určitého měřidla, za pořadnici, znamená rovnice tato p ř í m k u, která s osou úseček a krajními pořadnicemi omezuje obecně lichoběžník. Za $x = 0$ jest $M' = M_a$; za $x = l$ máme $M' = M_b$. Jest-li tedy v obr. 38. čára $a'' x'' b''$, vztažená k ose $a' b'$, momentovou čarou pole $a\,b$, dává přímka $a'' b''$, vztažená k ose $a' b'$, doplněk momentový M'; $a' a'' b'' b'$ jest t. zv. d o p l ň o v a c í l i c h o b ě ž n í k m o m e n t o v ý. Máme pak

$$M = \overline{x' x''} = \overline{x' x_0} + \overline{x_0 x''},$$

kde

$$\overline{x' x_0} = M', \quad \overline{x_0 x''} = \mathfrak{M};$$



Obr. 38.

čára $a'' x'' b''$, vztažená k tetivě $a'' b''$, jest momentovou čarou prostého nosníku $a\,b$.

Dle rovnice (49) liší se veličiny T, $\mathfrak{T}$ ve všech průřezech (x) o touž hodnotu

$$T' = \frac{M_b - M_a}{l},$$

kterou nazývejme doplňkem síly posouvající. Čára sil posouvajících T pole $a\,b$ jest tedy shodna s čarou sil posouvajících $\mathfrak{T}$ příslušného nosníku prostého, ale posunuta o hodnotu T' ve směru pořadnic.

§ 30. **Spojité nosníky průřezu stálého. Rovnice třímomentová.** Rovnicemi (48), (49), odvozenými v § 29., lze moment ohybový M a sílu posouvající T v libovolném průřezu x nosníka spojitého stanoviti z ohybového momentu $\mathfrak{M}$ a síly posouvající $\mathfrak{T}$ nosníka prostého, známe-li p o d p o r o v é m o m e n t y spojitého nosníka. Jde tedy o to, jak stanoviti tyto momenty podporové.*)

*) Řešení starší, kde se stanovily nejprve podporové reakce nosníka spojitého, není tak výhodno jako řešení tuto níže vyložené, jež pochodí v podstatě od francouzského inženýra C l a p e y r o n a.

Mějme tu na zřeteli nosníky prismatické, při kterých tedy moment J setrvačnosti má touž hodnotu ve všech průřezech. K nosníkům spojitým průřezu proměnného přihlédneme později.

Nosník spojitý mějž n polí a tedy $n+1$ podporu (2 krajní, $n-1$ vnitřní); body podporové znamenejme

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_{r-1}, a_r, a_{r+1}, \ldots a_{n-1}, a_n;$$

jeden z nich budiž nehybný, ostatní buďtež do jisté míry pohyblivé po přímkách vodorovných; připusťme pak, že body podporové nejsou přesně na jediné přímce vodorovné, ale že mají vzhledem k vodorovné ose X, kterou si mysleme n a d e všemi těmito body, hloubky

$$h_0, h_1, h_2, \ldots h_{r-1}, h_r, h_{r+1}, \ldots h_{n-1}, h_n$$

rozdílné poněkud, leč nepatrně.

Sekou-li svislice bodů podporových onu vodorovnou osu X v bodech

$$a'_0, a'_1, a'_2, \ldots a'_{r-1}, a'_r, a'_{r+1}, \ldots a'_{n-1}, a'_n,$$

pokládejme za délky příslušných polí projekce

$$\overline{a'_0 a'_1} = l_1, \overline{a'_1 a'_2} = l_2, \ldots, \overline{a'_{r-1} a'_r} = l_r, \overline{a'_r a'_{r+1}} = l_{r+1}, \ldots \overline{a'_{n-1} a'_n} = l_n,$$

jež ostatně od délek $\overline{a_0 a_1}$, $\overline{a_1 a_2}$, ... jen nepatrně se liší. Pole buďtež o b t í ž e n a j a k k o l i v.

Vyšetřujme nejprve jediné pole, jehož podporové body znamenáme v tomto případě a, b; a_1, b_1 jsou pravoúhelné projekce bodů a, b na osu X (obr. 38.). Poněvadž spojité nosníky nejsou staticky určité, bude tu potřebí v ý m i n e k p ř e t v á r n ý c h, a nutno přihlížeti k čáře ohybové. Vztahujme ji k ose X svrchu zmíněné; osa Y nechť jde počátkem a_1 svisle; positivná polovice osy X směřuj ž na pravo, positivná polovice osy Y dolů.

Čára ohybová má differencialnou rovnici druhého řádu

$$-EJ\frac{d^2y}{dx^2} = M,$$

jež na základě rovnice (48), platné za každého obtížení, nabývá tvaru

$$-EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_a(l-x)+M_b x}{l} + \mathfrak{M},$$

kde $\mathfrak{M}$ znamená určitou funkci úsečky x, závislou na obtížení pole $a\,b$; funkci tuto umíme stanoviti jakožto moment ohybový nosníku prostého.

Integrováním vyplývá

$$(\mathfrak{a}) \ldots\ldots - E J \left(\frac{dy}{dx} + C\right) = \frac{M_a (2 l x - x^2) + M_b x^2}{2 l} + \int_0^x \mathfrak{M} \, dx;$$

konstantu C vyloučíme výminkou, že za úsečky

$$x = 0 \quad \text{jest} \quad \frac{dy}{dx} = \tan \alpha \doteq \alpha,$$

kde α znamená odchylku tečny křivky ohybové v bodě a od osy X; tak obdržíme

$$C = - \alpha.$$

Vložíce to v rovnici (a) integrujme po druhé; tím vychází

$$(\mathfrak{b}) \ldots - E J (y - \alpha x + D) = \frac{M_a (3 l x^2 - x^3) + M_b x^3}{6 l} + \int_0^x dx \int_0^x \mathfrak{M} \, dx.$$

Bychom stanovili konstantu D, užijme výminky, že za úsečky $x = 0$ pořadnice $y = \overline{a_1 a} = h_a$; tím vyjde

$$D = - h_a.$$

Integral zdvojený na pravé straně rovnice (b) rozveďme ve dva jednoduché užijíce známého vzorce integrování po částech, totiž vzorce

$$\int u \, dv = u v - \int v \, du.$$

Položíme-li tu

$$u = \int_0^x \mathfrak{M} \, dx, \quad dv = dx,$$

tak že

$$du = \mathfrak{M} \, dx, \quad v = x,$$

vyjde

$$\int_0^x dx \int_0^x \mathfrak{M} \, dx = x \int_0^x \mathfrak{M} \, dx - \int_0^x \mathfrak{M} x \, dx,$$

a rovnice (b) nabude tvaru

$$(50) \ldots - E J (y - \alpha x - h_a) = \frac{M_a (3 l x^2 - x^3) + M_b x^3}{6 l}$$

$$+ x \int_0^x \mathfrak{M} \, dx - \int_0^x \mathfrak{M} x \, dx.$$

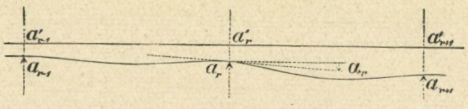
Bychom z této rovnice analy ické obdrželi rovnici výminkovou, applikujme ji na průřez (b), v němž $x = l$, $y = h_b$; v posledních dvou členech na pravo lze pak položiti

$$l \int_0^l \mathfrak{M}\, dx - \int_0^l \mathfrak{M}\, x\, dx = \int_0^l \mathfrak{M}\, (l - x)\, dx = \int_0^l \mathfrak{M}\, x'\, dx.$$

Uvedeme-li všecky členy oné rovnice na jednu stranu a znásobíme-li činitelem $\frac{6}{l}$, obdržíme

$$(51) \ldots 2\, M_a\, l + M_b\, l + \frac{6}{l} \int_0^l \mathfrak{M}\, x'\, dx + 6\, E\, J \left(\frac{h_b - h_a}{l} - \alpha \right) = 0.$$

V této rovnici jest kromě známých veličin a neznámých momentů podporových obsažen úhel α (tolikéž neznámý); bychom jej vyloučili, applikujme rovnici (51) na dvě posloupná pole, jež nyní znamenejme $a_{r-1}\, a_r$, $a_r\, a_{r+1}$ (obr. 39.). Co se týče pole $a_r\, a_{r+1}$, jest položiti $l = l_{r+1}$, $M_a = M_r$, $M_b = M_{r+1}$, $h_a = h_r$, $h_b = h_{r+1}$, $\alpha = \alpha_r$; tím nabývá rovnice (51) tvaru



Obr. 39.

$$(\alpha) \ldots 2\, M_r\, l_{r+1} + M_{r+1}\, l_{r+1} + \frac{6}{l_{r+1}} \int_0^{l_{r+1}} \mathfrak{M}\, x'\, dx + 6\, E\, J \left(\frac{h_{r+1} - h_r}{l_{r+1}} - \alpha_r \right) = 0.$$

Napišme dále rovnici (51) o poli předchozím, které však beřme směrem $a_r\, a_{r-1}$, pokládajíce a_r za první, a_{r-1} za druhou jeho podporu. K tomu konci myslíme si pole obrácené tak, aby a_r byl levým, a_{r-1} pravým bodem podporovým, anebo si představme, že hledíme na nosník se strany protější, zadní, čímž levá a pravá strana vzájemně se směňují. Tu jest v rovnici (51) položiti $l = l_r$, $M_a = M_r$, $M_b = M_{r-1}$, $h_a = h_r$, $h_b = h_{r-1}$, $\alpha = -\alpha_r$.*) Co integralu se týče, jest za $\int_0^l \mathfrak{M}\, x'\, dx$ položiti

$$\int_0^{l_r} \mathfrak{M}\, x\, dx' = -\int_{l_r}^0 \mathfrak{M}\, x\, dx = \int_0^{l_r} \mathfrak{M}\, x\, dx.$$

O poli $a_r\, a_{r-1}$ platí tedy rovnice

$$(\beta) \ldots\ldots 2\, M_r\, l_r + M_{r-1}\, l_r + \frac{6}{l_r} \int_0^{l_r} \mathfrak{M}\, x\, dx + 6\, E\, J \left(\frac{h_{r-1} - h_r}{l_r} + \alpha_r \right) = 0.$$

*) Směnou naznačenou nemění délka l znaménka jsouc veličinou prostou; momenty ohybové mění sice znaménko směnou strany levé s pravou, ale zároveň stává se tím moment positivný negativným a naopak, pročež obě změny se ruší.

Sečtením rovnic (α), (β) vylučuje se úhel α_r; znamenáme-li pak kratšeji

$$\mathfrak{N}_r = 6 \int_0^{l_r} \mathfrak{M}\, x\, dx, \qquad \mathfrak{N}'_{r+1} = 6 \int_0^{l_{r+1}} \mathfrak{M}\, x'\, dx,$$

vychází

$$(52) \quad \ldots M_{r-1} l_r + 2 M_r (l_r + l_{r+1}) + M_{r+1} l_{r+1} + \frac{\mathfrak{N}_r}{l_r} + \frac{\mathfrak{N}'_{r+1}}{l_{r+1}} + 6 E J \left(\frac{h_{r+1} - h_r}{l_{r+1}} - \frac{h_r - h_{r-1}}{l_r} \right) = 0,$$

což jest t. zv. r o v n i c e t ř í m o m e n t o v á nebo C l a p e y r o n o v a.*) Vztahuje se ke dvěma posloupným polím; první tři členové obsahují neznámé momenty při třech posloupných podporách; oba další členy týkají se obtížení obou posloupných polí; poslední člen hledí k relativné poloze bodů podporových ve směru svislém.

§ 31. **Jak stanoviti veličiny $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ za různého obtížení polí.** Veličiny $\mathfrak{N}_r$, $\mathfrak{N}'_{r+1}$ vztahují se k různým polím $a_{r-1} a_r$, $a_r a_{r+1}$; přihlížejme k poli jedinému $a\,b$ a pišme

$$(53) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \mathfrak{N} = 6 \int_0^{l} \mathfrak{M}\, x\, dx; \\ \mathfrak{N}' = 6 \int_0^{l} \mathfrak{M}\, x'\, dx. \end{cases}$$

a) Působí-li v průřezu p pole $a\,b$ j e d i n é o s a m ě l é b ř í m ě P, a znamená-li zase $\overline{a\,b} = l$, $\overline{a\,p} = p$, $\overline{p\,b} = p'$, máme v dílu $\left\{ \begin{matrix} a\,p \\ p\,b \end{matrix} \right\}$

$$\left\{ \begin{matrix} \mathfrak{M} = \dfrac{P\,p'}{l}\, x \\ \mathfrak{M} = \dfrac{P\,p}{l}\, x' \end{matrix} \right\};$$

protož

$$\tfrac{1}{6}\,\mathfrak{N} = \int_0^{l} \mathfrak{M}\, x\, dx = \frac{P\,p'}{l} \int_0^{p} x^2\, dx + \frac{P\,p}{l} \int_p^{l} x\, x'\, dx,$$

*) Rovnice (52) — ovšem nikoli v této obecné formě — pochodí vlastně od B e r t o t a (1855); celková methoda jest však C l a p e y r o n o v a (Comptes rendus 1857). Teprve později doplněna rovnice třímomentová členem posledním, a oba členy předposlední vyjádřeny obecně (M o h r, Zeitschrift des Ingenieur- und Architektenvereines zu Hannover 1860).

kde

$$\int_0^p x^2\,dx = \frac{p^3}{3}, \quad \int_p^l x\,x'\,dx = \int_0^{p'} x'\,(l - x')\,dx' = \frac{1}{6}\,p'^2\,(3\,l - 2\,p'),$$

tedy po přiměřené redukci

$$(53^a) \ldots\ldots \mathfrak{R} = P\,p\,p'\,(l + p) = P\,p\,(l^2 - p^2),$$

a obdobně, jakož i vyplývá směnou stran levé a pravé,

ku $(53^a) \ldots\ldots \mathfrak{R}' = P\,p'\,p\,(l + p') = P\,p'\,(l^2 - p'^2)$.

b) Působí-li v poli *a b* soustava osamělých břemen P_1, P_2, P_3, ... v průřezech p_1, p_2, p_3, ..., máme (poněvadž $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 + \ldots$, kde $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ jest moment vyvozený v průřezu (x) příslušným břemenem P_1, P_2, P_3, ...)

$$\tfrac{1}{6}\,\mathfrak{R} = \int_0^l \mathfrak{M}_1\,x\,dx + \int_0^l \mathfrak{M}_2\,x\,dx + \int_0^l \mathfrak{M}_3\,x\,dx + \ldots$$

a tedy

$$(53^b) \ldots \begin{cases} \mathfrak{R} = \Sigma\,P\,p\,p'\,(l + p) = \Sigma\,P\,p\,(l^2 - p^2), \\ \mathfrak{R}' = \Sigma\,P\,p'\,p\,(l + p') = \Sigma\,P\,p'\,(l^2 - p'^2). \end{cases}$$

c) Obtíženo-li pole *a b* břemenem rozděleným rovnoměrně od jistého průřezu *z* až ku pravé podpoře *b*, máme v dílu *a z*

$$\mathfrak{M} = \frac{q\,z'^2}{2\,l}\,x,$$

v dílu *z b* pak

$$\mathfrak{M} = q\,z'\,\frac{l + z}{2\,l}\,x' - \frac{1}{2}\,q\,x'^2 = \frac{q\,x'}{2\,l}\,(l\,x - z^2),$$

tedy

$$\tfrac{1}{6}\,\mathfrak{R} = \frac{q\,z'^2}{2\,l}\int_0^z x^2\,dx + \frac{q}{2\,l}\int_z^l x'\,(l\,x - z^2)\,x\,dx.$$

Poněvadž

$$\int_0^z x^2\,dx = \frac{z^3}{3},$$

$$\int_z^l x'\,(l\,x - z^2)\,x\,dx = \int_0^{z'} [l\,(l^2 - z^2)\,x' - (2\,l^2 - z^2)\,x'^2 + l\,x'^3]\,dx' =$$

$$= \tfrac{1}{12}\,z'^2\,(l^3 + 2\,l^2\,z + l\,z^2 - 4\,z^3),$$

vychází

$$(53^c) \ldots\ldots\ldots \mathfrak{M} = \tfrac{1}{4} q z'^2 (l + z)^2 = \tfrac{1}{4} q (l^2 - z^2)^2.$$

Dále máme

$$\tfrac{1}{6} \mathfrak{M}' = \frac{q z'^2}{2 l} \int_0^z x x' dx + \frac{q}{2 l} \int_z^l (l x - z^2) x'^2 dx;$$

poněvadž pak

$$\int_0^z x x' dx = \tfrac{1}{6} z^2 (3 l - 2 z) = \tfrac{1}{6} (l - z')^2 (l + 2 z'),$$

$$\int_z^l (l x - z^2) x'^2 dx = \int_0^{z'} [(2 l - z') z' - l x'] x'^2 dx' = \tfrac{1}{12} z'^4 (5 l - 4 z'),$$

vyplývá

k $(53^c) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathfrak{M}' = \tfrac{1}{4} q z'^2 (2 l^2 - z'^2).$

d) Obtíženo-li pole břemenem rozděleným rovnoměrně po vší délce $a\,b$, jest ve výrazech (53^c) položiti $z = 0$, $z' = l$; tím vychází

$$(53^d) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathfrak{M} = \mathfrak{M}' = \tfrac{1}{4} q l^4.$$

§ 32. **Jak stanovíme momenty podporové užívajíce rovnic tří-momentových. O zvláštních tvarech této rovnice.** Dán-li nosník $a_0 a_1 a_2 \ldots a_n$ o n polích a tedy $n + 1$ podpoře, máme $n + 1$ moment podporový; jest-li však nosník na obou koncích prostě podepřen (nikoli vetknut*), rovnají se nulle momenty M_0, M_n při podporách krajních, a zbývá tedy $n - 1$ neznámých momentů podporových. Rovnici tří-momentovou lze napsati o každých dvou polích posloupných; napišme ji tedy o polích

$$\begin{array}{ccc} a_0 a_1 & \text{a} & a_1 a_2, \\ a_1 a_2 & \text{a} & a_2 a_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n-2} a_{n-1} & \text{a} & a_{n-1} a_n. \end{array}$$

Máme tak $n - 1$ rovnici prvního stupně o $n - 1$ neznámé; řešením jich obdržíme neznámé momenty podporové.**)

Přihlédněme k některým případům zvláštním.

*) Účinek vetknutých konců vyšetříme později.

**) Jestliže spojitý nosník svými konci přečnívá přes krajní podpory a_0, a_n, nejsou momenty M_0, M_n rovny nulle, mohou se však stanoviti z délek a obtížení konců přečnívajících, tak že zbývá zase jen $n - 1$ neznámých momenů podporových.

Jest-li každé z obou polí $a_{r-1}\,a_r$, $a_r\,a_{r+1}$ obtíženo rovnoměrně po vší své délce, a jsou-li q_r, q_{r+1} příslušná obtížení jedničky délkové, nabývá rovnice třímomentová tvaru

$$(54)\ldots\ldots M_{r-1}\,l_r + 2\,M_r\,(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1}\,l_{r+1} + \frac{q_r\,l^3{}_r + q_{r+1}\,l^3{}_{r+1}}{4}$$
$$+ 6\,E\,J\left(\frac{h_{r+1} - h_r}{l_{r+1}} - \frac{h_r - h_{r-1}}{l_r}\right) = 0.$$

Jest-li mimo to $l_r = l_{r+1} = l$, $q_r = q_{r+1} = q$, vychází

$$(55)\ldots\ldots M_{r-1} + 4\,M_r + M_{r+1} + \tfrac{1}{2}\,q\,l^2 + 6\,E\,J\,\frac{h_{r+1} + h_{r-1} - 2\,h_r}{l^2} = 0.$$

Jsou-li kromě toho body podporové a_{r-1}, a_r, a_{r+1} na téže přímce vodorovné, odpadá v (55) poslední člen a vychází rovnice Clapeyronova ve tvaru původním.

Příklad 10. Nosník $a_0\,a_1\,a_2$ o dvou polích nerovné délky a po vší délce rovnoměrně ale nerovně obtížených. Podporový bod a_1 jest proti přímce $a_0\,a_2$ o h_1 snížen.*)

V rovnici (54) položme $r = 1$ a obdržíme jedinou rovnici třímomentovou

$$M_0\,l_1 + 2\,M_1\,(l_1 + l_2) + M_2\,l_2 + \frac{q_1\,l_1{}^3 + q_2\,l_2{}^3}{4}$$
$$+ 6\,E\,J\left(\frac{h_2 - h_1}{l_2} - \frac{h_1 - h_0}{l_1}\right) = 0,$$

v níž $M_0 = M_2 = 0$, $h_0 = h_2 = 0$, pročež neznámý moment podporový

$$M_1 = -\frac{q_1\,l_1{}^3 + q_2\,l_2{}^3}{8\,(l_1 + l_2)} + \frac{3\,E\,J\,h_1}{l_1\,l_2}.$$

Jest-li $h_1 = 0$, dále $q_1 = q_2 = q$, $l_1 = l_2 = l$, máme

$$M_1 = -\tfrac{1}{8}\,q\,l^2,$$

moment téže prosté hodnoty jak uprostřed nosníka na koncích prostě podepřeného a veskrze rovnoměrně obtíženého; znaménko ovšem jest protivné.

Příklad 11. Nosník $a_0\,a_1\,a_2$ o dvou polích zdéli $l_1 = 8\ m$, $l_2 = 6\ m$; pole $a_0\,a_1$ jest obtíženo břemeny osamělými $P_1 = 800\ kg$ ve vzdálenosti $\overline{a_0\,p_1} = 3\ m$, $P_2 = 600\ kg$ ve vzdálenosti $\overline{a_0\,p_2} = 6\ m$, pole $a_1\,a_2$ obdobně břemeny $P_3 = 400\ kg$ ve vzdálenosti $\overline{a_1\,p_3} = 2\ m$, $P_4 = 1000\ kg$ ve vzdálenosti $\overline{a_1\,p_4} = 4\ m$. Podporové body nechť jsou vesměs na téže přímce vodorovné.

*) Z nerovné výšky krajních podporových bodů a_0, a_1 vyplývá odchylka přímky $a_0\,a_2$ od vodorovné osy; je-li však tato odchylka nepatrna, netřeba k ní přihlížeti; h_1 znamená pak hloubku bodu a_1 pod přímkou $a_0\,a_2$.

Položme v rovnici (52) $r = 1$ a obdržíme

$$M_0 l_1 + 2 M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 + \frac{\mathfrak{N}_1}{l_1} + \frac{\mathfrak{N}_2'}{l_2} = 0,$$

kde zase $M_0 = M_2 = 0$. Dle § 31. *b*) jest

$$\mathfrak{N}_1 = \Sigma P p p' (l + p) = 800 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 11 + 600 \,.\, 6 \,.\, 2 \,.\, 14 = 232\,800,$$
$$\mathfrak{N}_2' = \Sigma P p' p (l + p') = 400 \,.\, 4 \,.\, 2 \,.\, 10 + 1000 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 8 = 96\,000;$$
$$\frac{\mathfrak{N}_1}{l_1} + \frac{\mathfrak{N}_2'}{l_2} = 29\,100 + 16\,000 = 45\,100.$$

Tedy

$$2 \,.\, 14 M_1 + 45\,100 = 0,$$
$$M_1 = - 1610{\cdot}7 \; m\,k.$$

ČESKO-UKR. KOM. ET
V ČS.R.

Příklad 12. Nosník o 8 polích rovné délky a veskrz rovnoměrně obtížený; podporové body vesměs na téže vodorovné přímce.

Poněvadž nosník i obtížení jsou souměrny vzhledem ku svislici středního bodu podporového a_4, jsou momenty při souměrných podporách rovny, tedy

$$M_1 = M_7, \; M_2 = M_6, \; M_3 = M_5, \text{ kromě toho pak } M_0 = M_8 = 0.$$

Tu stačí napsati jen 4 rovnice třímomentové, totiž o polích

$$a_0 a_1 \text{ a } a_1 a_2, \; a_1 a_2 \text{ a } a_2 a_3, \; a_2 a_3 \text{ a } a_3 a_4, \; a_3 a_4 \text{ a } a_4 a_5;$$

obdržíme je z rovnice (55), vynecháme-li poslední člen a položíme-li po řadě $r = 1, 2, 3, 4$. Vynechme zároveň v první z nich $M_0 = 0$ a položme v poslední $M_5 = M_3$; tak obdržíme

$$\begin{aligned} 4 M_1 + M_2 + \tfrac{1}{2} q l^2 &= 0, \\ M_1 + 4 M_2 + M_3 + \tfrac{1}{2} q l^2 &= 0, \\ M_2 + 4 M_3 + M_4 + \tfrac{1}{2} q l^2 &= 0, \\ 2 M_3 + 4 M_4 \qquad + \tfrac{1}{2} q l^2 &= 0. \end{aligned}$$

Řešme tyto rovnice tak, že znásobíme každou z nich určitým součinitelem a pak všecky sečteme. Bychom stanovili M_1, zvolme ony součinitele tak, aby neznámé M_2, M_3, M_4 sečtením se vyloučily; k tomu konci znásobme čtvrtou rovnici součinitelem 1, třetí součinitelem — 4 (pak vyloučí se sečtením moment M_4 obsažený jen v posledních 2 rovnicích), druhou součinitelem 14 (tak vyloučí se moment M_3 obsažený jen v posledních 3 rovnicích), konečně první součinitelem — 52 (aby se vyloučil moment M_2 obsažený v první, druhé a třetí); sečtením vychází

$$194 M_1 + 41 \,.\, \tfrac{1}{2} q l^2 = 0,$$
$$M_1 = - \frac{41}{388} q l^2.$$

Vložíme-li tuto hodnotu v první rovnici, vyjde

$$M_2 = -\frac{30}{388} q l^2,$$

dále z rovnice druhé

$$M_3 = -\frac{33}{388} q l^2,$$

konečně z třetí nebo čtvrté

$$M = -\frac{32}{388} q l^2.$$

§ 33. **Jak se z momentů podporových stanoví veličiny ostatní.** Tu stačí přihlížeti k jedinému poli, jež pak znamenejme prostě $a\,b$.

Známe-li momenty podporové M_a, M_b, lze moment ohybový M a sílu posouvající T kteréhokoli průřezu x stanoviti z rovnic (48), (49) § 29. Jinak vychází dle obecného pravidla o momentu M a síle T:

$$M = M_a + T_a' x - (Q_{ax})_x,$$
$$T = T_a' - Q_{ax},$$

rovnice, jichžto jsme užili již v § 29. Jak v tomto § dotčeno, má se pole nosníka spojitého v podstatě tak, jako mezipodporový díl nosníka o dvou podporách, přes tyto podpory přečnívajícího. Minima momentová jsou momenty podporové, maximum náleží ku přechodnému průřezu c pole. Průřez c ustanoven jest výminkou, že v něm

$$T_c = T_a' - Q_{ac} \gtrless 0$$

neboli

$$(56) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad Q_{ac} \gtrless T_a';$$

$\left\{\begin{matrix}\text{vrchní}\\ \text{spodní}\end{matrix}\right\}$ znaménko nerovnosti vztahuje se k průřezům $\left\{\begin{matrix}\text{předchozím}\\ \text{následujícím}\end{matrix}\right\}$.

Applikujme rovnici (49) na průřez a; tu obdržíme

$$T_a' = \mathfrak{T}_a' + \frac{M_b - M_a}{l};$$

$\mathfrak{T}_a'$ jest posouvající síla při levé podpoře prostého nosníku $a\,b$ téže délky a tak obtíženého, jako vyšetřované pole $a\,b$ nosníku spojitého; rovná se tedy podporové reakci $\mathfrak{A}$ onoho prostého nosníku, totiž

$$\mathfrak{T}_a' = \mathfrak{A} = \frac{(Q_{ab})_b}{l},$$

kde $(Q_{ab})_b$ znamená prostou hodnotu statického momentu výslednice Q_{ab} obtížení pole $a\,b$ vzhledem k bodu b; proto

$$(57) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots T_a' = \frac{(Q_{ab})_b + M_b - M_a}{l}.$$

Stanovme při této příležitosti též sílu posouvající T_b průřezu b pole $a\,b$. Dle rovnice (49) máme

$$T_b = \mathfrak{T}_b + \frac{M_b - M_a}{l};$$

$\mathfrak{T}_b$ jest síla posouvající při pravé podpoře zmíněného svrchu prostého nosníku $a\,b$. Jest-li $\mathfrak{B}$ pravá reakce tohoto prostého nosníku, platí rovnice

$$\mathfrak{T}_b = -\mathfrak{B} = -\frac{(Q_{ab})_a}{l},$$

pročež

$$(58) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots T_b = \frac{-(Q_{ab})_a + M_b - M_a}{l}.$$

Ustanoveno-li T_a' z rovnice (57), obdržíme dle výminky (56) průřez přechodný, sčítáme-li břemena v poli $a\,b$ od levé ku pravé, až součet přestoupí hodnotu T_a'. Přestoupena-li přičtením osamělého břemene, jest přechodný průřez při tomto břemeni; padne-li však přechodný průřez do spojitého obtížení, možno výminku (56) psáti ve formě rovnice

$$(56') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Q_{ac} = T_a'$$

a vyjádříc Q_{ac} úsečkou c, stanoviti z rovnice (56') tuto úsečku.

Maximum momentové plyne pak z vytčeného svrchu výrazu momentu M, totiž

$$(59) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots M_c = M_a + T_a' c - (Q_{ac})_c.$$

V průřezu obratníkovém moment $M = 0$; jest-li i úsečka tohoto průřezu, máme výminku

$$(60) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots M_a + T_a' i - (Q_{ai})_i = 0;$$

vyjádřen-li statický moment $(Q_{ai})_i$ úsečkou i, lze z rovnice (60) vypočísti polohu průřezů obratníkových.

Jde-li o podporovou reakci spojitého nosníku, na př. o reakci A_r při podpoře a_r (poněvadž nelze tu přestati na poli jediném, užijme zase přípon), a jest-li $\left\{\begin{matrix} T_r \\ T_r' \end{matrix}\right\}$ síla posouvající průřezu a_r, pokud jej přísu-

zujeme poli $\left\{\begin{matrix} a_{r-1}\, a_r \\ a_r\, a_{r+1} \end{matrix}\right\}$, platí rovnice

$$T_r' = T_r + A_r$$

anebo

$$(61) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_r = -T_r + T_r',$$

kdežto dle rovnic (57), (58)

$$T_r = \frac{-(Q_r)_{r-1} + M_r - M_{r-1}}{l_r},$$

$$T_r' = \frac{(Q_{r+1})_{r+1} + M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}};$$

při tom znamená $\left\{\begin{matrix} (Q_r)_{r-1} \\ (Q_{r+1})_{r+1} \end{matrix}\right\}$ prostou hodnotu statického momentu, který náleží výslednici $\left\{\begin{matrix} Q_r \\ Q_{r+1} \end{matrix}\right\}$ obtížení pole $\left\{\begin{matrix} a_{r-1}\, a_r \\ a_r\, a_{r+1} \end{matrix}\right\}$ vzhledem k bodu $\left\{\begin{matrix} a_{r-1} \\ a_{r+1} \end{matrix}\right\}$. Vložíme-li v rovnici (61) hodnoty sil T_r, T_r', vyjde

$$(62) \ldots\ldots A_r = \frac{(Q_r)_{r-1} + M_{r-1} - M_r}{l_r} + \frac{(Q_{r+1})_{r+1} + M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}}.$$

Při podporách krajních máme (jako při prostém nosníku $a\,b$)

ku (61) $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots T_0' = A_0, \quad T_n = -A_n,$

tak že v rovnici (61) odpadá za $\left\{\begin{matrix} r = 0 \text{ první} \\ r = n \text{ druhý} \end{matrix}\right\}$ člen na pravé straně, odpadá totiž síla posouvající $\left\{\begin{matrix} T_0 \\ T_n' \end{matrix}\right\}$, které vůbec není. Rovnice (62) nabývá pak tvaru

ku (62) $\ldots\ldots\ldots\ldots$
$$\left\{\begin{matrix} A_0 = \dfrac{(Q_1)_1 + M_1}{l_1}, \\ A_n = \dfrac{(Q_n)_{n-1} + M_{n-1}}{l_n}. \end{matrix}\right.$$

Křivka ohybová pole $a\,b$ dána jest rovnicí (50) § 30.; odchylka α tečny v bodě a vychází z rovnice (51). Zavedeme-li v tuto rovnici veličinu $\mathfrak{R}'$, obdržíme

$$(51') \ldots \alpha = \frac{h_b - h_a}{l} + \frac{1}{6\,E\,J}\left[(2\,M_a + M_b)\,l + \frac{\mathfrak{R}'}{l}\right];$$

vložíme-li pak tento výraz úhlu α do rovnice (50), vyjde rovnice křivky

$$(63) \ldots\ldots\ldots\ldots y = \frac{h_a x' + h_b x}{l}$$

$$+ \frac{1}{E J}\left\{\frac{[M_a (l + x') + M_b (l + x)] x x' + \mathfrak{N}' x}{6 l} - x \int_0^x \mathfrak{M}\, dx + \int_0^x \mathfrak{M} x\, dx\right\}.$$

První člen na pravé straně rovnice (51′) znamená odchylku tetivy $a b$ od osy X; první člen na pravé straně rovnice (63) dává pořadnici (náležející k úsečce x) této tetivy.

Největší či nejmenší pořadnice křivky ohybové náleží k bodu, jehož úsečka x_0 jest určena rovnicí

$$(64) \ldots M_b (l^2 - 3 x_0^2) - M_a (l^2 - 3 x_0'^2) + \mathfrak{N}' - 6 l \int_0^{x_0} \mathfrak{M}\, dx + 6 E J (h_b - h_a) = 0;$$

statickou platnost mají jen kořeny obsažené mezi nullou a délkou l pole.

Užijeme-li této rovnice výminkové, můžeme největší (nejmenší) pořadnici ohybové čáry vyjádřiti takto:

$$(65) \ldots\ldots y_0 = h_a + \frac{1}{E J}\left[\frac{M_a (l + 2 x_0') + 2 M_b x_0}{6 l} x_0^2 + \int_0^{x_0} \mathfrak{M} x\, dx\right].$$

Rovnice (56) až (65) platí za všelikého obtížení pole $a b$; přihlédněme ještě k důležitému případu zvláštnímu, kde totiž vyšetřované pole jest obtíženo rovnoměrně po délce $a b$.

Tu nabývá výminka (56) tvaru

$$q c = T_a',$$

a poněvadž dle (49) neb i (57)

$$T_a' = \frac{1}{2} q l + \frac{M_b - M_a}{l},$$

možno psáti

$$(66) \ldots\ldots\ldots\ldots c = \frac{l}{2} + \frac{M_b - M_a}{q l}.$$

První člen na straně pravé vyjadřuje úsečku průřezu přechodného při prostém nosníku $a b$, obtíženém rovnoměrně po vší délce; jde-li o pole $a b$ nosníku spojitého, sluší k oné úsečce přidati zlomek, jehož čítatelem jest rozdíl momentů podporových, jmenovatelem pak obtížení pole.

Znajíce úsečku c můžeme psáti

$$T_a' = q c$$

a vložiti tuto hodnotu do obecného výrazu momentu M a síly T, čímž vyjde

$$(67) \ldots\ldots\ldots\ldots M = M_a + \tfrac{1}{2} q x (2 c - x),$$

$$(68) \ldots\ldots\ldots\ldots T = q (c - x).$$

Rovnice (68) vyjadřuje, že *síla posouvající libovolného průřezu x rovná se obtížení, jež působí mezi tímto průřezem a průřezem přechodným c příslušného pole; na* { *levé* / *pravé* } *straně průřezu c jest síla T* { *positivná* / *negativná* }.

Síla posouvající při pravé podpoře *b* jest dle toho

$$T_b = -q(l-c) = -qc'.$$

Maximum momentové plyne z rovnice (67), položíme-li v ní $x = c$, totiž

$$(69) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad M_c = M_a + \tfrac{1}{2} q c^2.$$

Rovnice (60), stanovící průřezy obratníkové, nabývá tu tvaru

$$M_a + q c i - \tfrac{1}{2} q i^2 = 0$$

neboli

$$i^2 - 2ci - 2\frac{M_a}{q} = 0;$$

kořeny její jsou

$$(70) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad i = c \pm \sqrt{c^2 + 2\frac{M_a}{q}}.$$

Jak patrno, *jsou tu průřezy obratníkové i, j položeny souměrně s obou stran přechodného průřezu c.*

Reakce A_r při podpoře a_r dána jest obecnou rovnicí (61); vložíme-li v ni

$$T_r = -q_r c_r' = -q_r(l_r - c_r),$$
$$T_r' = q_{r+1} c_{r+1},$$

pokládajíce, že obě k podpoře a_r přilehlá pole obtížena jsou rovnoměrně ale vůbec nerovně, obdržíme

$$(71) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A_r = q_r(l_r - c_r) + q_{r+1} c_{r+1};$$

reakce A_r rovná se dle toho součtu obtížení, působícího mezi přechodnými průřezy c_r, c_{r+1} obou polí $a_{r-1} a_r$, $a_r a_{r+1}$, k nimž podpora a_r náleží.

Co se týče podpor krajních, platí rovnice

$$A_0 = T_0', \qquad A_n = -T_n,$$

tedy

$$(71') \quad \ldots\ldots\ldots \quad A_0 = q_1 c_1, \quad A_n = q_n(l_n - c_n).$$

Položíme-li v rovnici (51') za $\mathfrak{N}'$ výraz z rovnice (53^d), vyjde odchylka tečny ku křivce ohybové v bodě *a* za rovnoměrného obtížení pole *a b*

$$(72) \ldots\ldots \alpha = \frac{h_b - h_a}{l} + \frac{(2 M_a + M_b + \frac{1}{4} q l^2) l}{6 E J};$$

jestliže pak v rovnici (63) položíme

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} q x (l - x)$$

a stanovíme příslušný integral, vyjde rovnice křivky ohybové

$$(73) \ldots. y = \frac{h_a x' + h_b x}{l} + \frac{x x'}{6 E J l} [M_a (l + x') + M_b (l + x) + \tfrac{1}{4} q l (l^2 + x x')].$$

Největší či nejmenší pořadnice křivky ohybové náleží k úsečce x_0 dané rovnicí

$$(74) \ldots M_b (l^2 - 3 x_0^2) - M_a (l^2 - 3 x'^2_0) + \tfrac{1}{4} q l (l - 2 x_0) (l^2 + 2 x_0 x_0') + 6 E J (h_b - h_a) = 0$$

anebo

$$(74) \ldots x_0^3 - 3 c x_0^2 - 6 \frac{M_a}{q} x_0 + \left(\frac{l}{4} + \frac{2 M_a + M_b}{q l}\right) l^2 + \frac{6 E J (h_b - h_a)}{q l} = 0,$$

kde c jest úsečka přechodného průřezu v témž poli, jak ji vyjadřuje rovnice (66). Statickou platnost mají jen kořeny obsažené mezi nullou a délkou l pole.

Užitím rovnice (74) můžeme největší (nejmenší) pořadnici čáry ohybové vyjádřiti takto:

$$(75) \ldots. y_0 = h_a + \frac{x_0^2}{E J} \left[\frac{M_a (l + 2 x_0') + 2 M_b x_0}{6 l} + \frac{1}{24} q x_0 (l + 3 x_0')\right].$$

Příklad 13. Při nosníku příkladu 11. stanovme momentová maxima a podporové reakce.

Síly posouvající při podporách jsou dle rovnic (57) a (58)

$$T_0' = \frac{(Q_1)_1 + M_1}{l_1} = \frac{800 \cdot 5 + 600 \cdot 2 - 1610 \cdot 7}{8} = 448 \cdot 7 \ kg,$$

$$T_1 = \frac{-(Q_1)_0 + M_1}{l_1} = \frac{-800 \cdot 3 - 600 \cdot 6 - 1610 \cdot 7}{8} = -951 \cdot 3 \ kg,$$

$$T_1' = \frac{(Q_2)_2 - M_1}{l_2} = \frac{400 \cdot 4 + 1000 \cdot 2 + 1610 \cdot 7}{6} = 868 \cdot 4 \ kg,$$

$$T_2 = \frac{-(Q_2)_1 - M_1}{l_2} = \frac{-400 \cdot 2 - 1000 \cdot 4 + 1610 \cdot 7}{6} = -531 \cdot 5 \ kg.$$

Bychom ustanovili přechodný průřez pole $a_0 a_1$, jest nám sčítati břemena od levé ku pravé, až součet přestoupí hodnotu T_0'. Poněvadž již břímě

$P_1 = 800\ kg > T_0'$, jest průřez břemene P_1 přechodným průřezem c_1 pole $a_0 a_1$. V poli $a_1 a_2$ jest P_3 menší, $P_3 + P_4$ větší než T_1'; proto jest c_2 při břemeni P_4.

Příslušná maxima momentová (znamenejme je M_I, M_{II}) jsou dle rovnice (59)

$$M_I = T_0' c_1 = 448{\cdot}7 \,.\, 3 = 1346\ mk\,,$$
$$M_{II} = M_1 + T_1' c_2 - P_3 (c_2 - p_3)$$

nebo výhodněji, sčítáme-li momenty na straně pravé,

$$-M_{II} = T_2 c_2' = -531{\cdot}5 \,.\, 2 = -1063\,,$$
$$M_{II} = 1063\ mk\,.$$

Reakce podporové jsou dle rovnice (61), přestáváme-li na místech celistvých,

$$A_0 = T_0' = 449\ kg\,,$$
$$A_1 = -T_1 + T_1' = 951{\cdot}3 + 868{\cdot}4 = 1820\ kg\,,$$
$$A_2 = -T_2 = 531\ kg\,.$$

Příklad 14. Při nosníku příkladu 12. stanoviti maxima momentová a podporové reakce.

Přechodným průřezům náležejí dle rovnice (66) úsečky

$$c_1 = \frac{1}{2} l + \frac{M_1}{q\,l} = \frac{1}{2} l - \frac{41}{388} l = \frac{153}{388} l,$$
$$c_2 = \frac{1}{2} l + \frac{M_2 - M_1}{q\,l} = \frac{1}{2} l + \frac{11}{388} l = \frac{205}{388} l,$$
$$c_3 = \frac{1}{2} l + \frac{M_3 - M_2}{q\,l} = \frac{1}{2} l - \frac{3}{388} l = \frac{191}{388} l,$$
$$c_4 = \frac{1}{2} l + \frac{M_4 - M_3}{q\,l} = \frac{1}{2} l + \frac{1}{388} l = \frac{195}{388} l.$$

Příslušná maxima momentová jsou dle rovnice (69)

$$M_I = \frac{1}{2} q\, c_1^2 = \frac{1}{2} q \left(\frac{153}{388} l\right)^2 = 0{\cdot}0777\, q\, l^2,$$
$$M_{II} = M_1 + \frac{1}{2} q\, c_2^2 = -\frac{41}{388} q\, l^2 + \frac{1}{2} q \left(\frac{205}{388} l\right)^2 = 0{\cdot}0339\, q\, l^2,$$
$$M_{III} = M_2 + \frac{1}{2} q\, c_3^2 = -\frac{30}{388} q\, l^2 + \frac{1}{2} q \left(\frac{191}{388} l\right)^2 = 0{\cdot}0438\, q\, l^2,$$
$$M_{IV} = M_3 + \frac{1}{2} q\, c_4^2 = -\frac{33}{388} q\, l^2 + \frac{1}{2} q \left(\frac{195}{388} l\right)^2 = 0{\cdot}0412\, q\, l^2.$$

Reakce podporové jsou dle rovnice (71) nebo dle pravidla touto rovnicí vyjádřeného

$$A_0 = q\,c_1 = \frac{153}{388}\,q\,l,$$

$$A_1 = q\,(l - c_1 + c_2) = \frac{440}{388}\,q\,l,$$

$$A_2 = q\,(l - c_2 + c_3) = \frac{374}{388}\,q\,l,$$

$$A_3 = q\,(l - c_3 + c_4) = \frac{392}{388}\,q\,l,$$

$$A_4 = q\,(l - c_4 + c_5) = \frac{386}{388}\,q\,l.\text{*)}$$

MAJETEK ČESKO-UKR. KOMITÉTU V Č.S.R.

D o d a v e k. Poněvadž nosníky spojité o rovných polích, obtížené veskrz rovnoměrně, často se namítají, buďtež tu vytčeny hodnoty podporových momentů (minim), pak maxim momentových a konečně podporových reakcí, jest-li počet polí $n = 2, 3, \ldots 8$.

P o d p o r o v é m o m e n t y lze psáti ve tvaru

$$M_r = -\beta_r \,.\, q\,l^2,$$

hodnoty β_r jsou pak obsaženy v následující tabulce.

I.

n	β_1	β_2	β_3	β_4
2	$\frac{1}{8} = 0{\cdot}125$			
3	$\frac{1}{10} = 0{\cdot}1$			
4	$\frac{3}{28} = 0{\cdot}1071$	$\frac{2}{28} = 0{\cdot}0714$		
5	$\frac{4}{38} = 0{\cdot}1053$	$\frac{3}{38} = 0{\cdot}0789$		
6	$\frac{11}{104} = 0{\cdot}1058$	$\frac{8}{104} = 0{\cdot}0769$	$\frac{9}{104} = 0{\cdot}0865$	
7	$\frac{15}{142} = 0{\cdot}1056$	$\frac{11}{142} = 0{\cdot}0775$	$\frac{12}{142} = 0{\cdot}0845$	
8	$\frac{41}{388} = 0{\cdot}1057$	$\frac{30}{388} = 0{\cdot}0773$	$\frac{33}{388} = 0{\cdot}0851$	$\frac{32}{388} = 0{\cdot}0825$

Z tabulky I. patrno, že za určitého n posloupná čísla β jsou střídavě větší a menší, dále že rozdílu mezi nimi ubývá od krajů do vnitř; obdobně mají se hodnoty β_r za určitého r, klademe-li posloupně $n = 2, 3, 4, \ldots$ Největší prostou hodnotu má moment při p r v n í (a poslední) podpoře vnitřní; příslušná čísla β_1 liší se za $n = 7$ a $n = 8$ o $0{\cdot}0001$; čísla $\beta_1 = 0{\cdot}1057$ lze tedy užiti též, jest-li $n > 8$.

M a x i m a m o m e n t o v á lze psáti ve formě

$$M_{(r)} = \gamma_r \,.\, q\,l^2;$$

*) Ze souměrnosti vychází, že $c_5 = l - c_4$.

hodnoty γ_r jsou vytčeny v následující tabulce.

II.

n	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
2	0·0703			
3	0·08	0·025		
4	0·0772	0·0364		
5	0·0779	0·0332	0·0461	
6	0·0777	0·0341	0·0433	
7	0·0778	0·0338	0·0440	0·0405
8	0·0777	0·0339	0·0438	0·0412

Také v tabulce II. střídají se čísla větší a menší, a rozdílu ubývá, postupujeme-li buď na řádce od levé ku pravé nebo ve sloupci shora dolů. Přirovnáme-li tuto tabulku II. k I., shledáme, že maxima momentová zůstávají značně pod prostými hodnotami minim momentových.

Reakce podporové lze psáti ve formě

$$A_r = \delta_r \,.\, q\, l;$$

hodnoty δ_r sestaveny jsou v následující tabulku.

III.

n	δ_0	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
2	$\frac{3}{8} = 0{\cdot}375$	$\frac{10}{8} = 1{\cdot}25$			
3	$\frac{4}{10} = 0{\cdot}4$	$\frac{11}{10} = 1{\cdot}1$			
4	$\frac{11}{28} = 0{\cdot}3929$	$\frac{32}{28} = 1{\cdot}1429$	$\frac{26}{28} = 0{\cdot}9286$		
5	$\frac{15}{38} = 0{\cdot}3947$	$\frac{43}{38} = 1{\cdot}1316$	$\frac{37}{38} = 0{\cdot}9737$		
6	$\frac{41}{104} = 0{\cdot}3942$	$\frac{118}{104} = 1{\cdot}1346$	$\frac{100}{104} = 0{\cdot}9615$	$\frac{106}{104} = 1{\cdot}0192$	
7	$\frac{56}{142} = 0{\cdot}3944$	$\frac{161}{142} = 1{\cdot}1338$	$\frac{137}{142} = 0{\cdot}9648$	$\frac{143}{142} = 1{\cdot}0070$	
8	$\frac{153}{388} = 0{\cdot}3943$	$\frac{440}{388} = 1{\cdot}1340$	$\frac{374}{388} = 0{\cdot}9639$	$\frac{392}{388} = 1{\cdot}0103$	$\frac{386}{388} = 0{\cdot}9948$

Též o tabulce III. možno říci, co proneseno bylo o I. a II. Jak patrno, má reakce A_0 (ovšem i A_n) nejmenší, reakce A_1 (ovšem i A_{n-1}) největší hodnotu; jdeme-li od krajů do vnitř, jsou reakce střídavě menší a větší než obtížení $q\,l$ jednoho pole.

§ 34. **Jak stanoviti účinek snížení bodů podporových.** Kromě členů s momenty podporovými obsahuje rovnice třímomentová ještě členy dvo-

jího rázu: dva další členy jsou funkce délek a obtížení obou příslušných polí $a_{r-1}\,a_r$, $a_r\,a_{r+1}$, poslední člen pak obsahuje (mimo délky polí) rozdíly hloubek h_{r-1}, h_r, h_{r+1} bodů podporových a_{r-1}, a_r, a_{r+1} pod vodorovnou osou. Nedbáme-li $\left\{\begin{matrix}\text{rozdílů hloubek}\\ \text{obtížení}\end{matrix}\right\}$ a přihlížíme-li tedy jen k $\left\{\begin{matrix}\text{obtížení}\\ \text{rozdílům hloubek}\end{matrix}\right\}$, obdržíme z rovnic třímomentových určité hodnoty $\left\{\begin{matrix}\ldots M'_{r-1},\ M'_r,\ M'_{r+1},\ \ldots\\ \ldots M''_{r-1},\ M''_r,\ M''_{r+1},\ \ldots\end{matrix}\right\}$ momentů podporových; šetříme-li obého, máme $M_r = M'_r + M''_r$ a t. d. Lze tedy odděliti vyšetřování obou účinků, totiž vyšetřovati nejprve účinek obtížení za rovné hloubky bodů podporových a dodavkem účinek snížení těchto bodů. Toto snížení bývá pravidlem nezamýšlené; jde pak o to, jak ohybové momenty, posouvající síly a podporové reakce se mění popuštěním podpor ve směru svislém. Řešíce tuto úlohu vynechme v třímomentové rovnici členy obsahující obtížení polí a stanovme z ní zase momenty podporové; z těchto momentů vyplývají veličiny ostatní dle rovnic § 33.

Pro praktickou důležitost budiž řešena tato úloha při nosnících o dvou a třech polích.

Nosník o dvou polích. Tu stačí přihlížeti ku snížení*) bodu a_1 pod přímku $a_0\,a_2$; nerovnou hloubkou bodů a_0, a_1 vzniká odchýlenost přímky $a_0\,a_1$ od vodorovné osy; tato odchýlenost (nepatrná, jest-li rozdíl hloubky bodů a_0, a_1 malý) má v podstatě týž (také nepatrný) účinek, jako malá odchýlenost osy $a\,b$ nosníku prostého od vodorovné osy X, tak že ho lze nedbati.**) Mysleme si tedy, že přímka $a_0\,a_2$ jest vodorovná a zvolme ji za osu X, tak že $h_0 = h_2 = \emptyset$; bod a_1 mějž pod osou X jakousi nepatrnou hloubku h_1.

Momenty podporové jsou tu (viz příklad 10.) $M_0 = M_2 = \emptyset$,

$$(76) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots M_1 = \frac{3\,E\,J\,h_1}{l_1\,l_2}.$$

Ohybový moment libovolného průřezu (x) pole $a_0\,a_1$ vychází z rovnice (48), v níž jest položiti $\mathfrak{M} = \emptyset$, totiž

$$M = \frac{M_1\,x}{l_1} = \frac{3\,E\,J\,h_1}{l_1^2\,l_2}\,x;$$

síla posouvající téhož průřezu plyne obdobně z rovnice (49), kde $\mathfrak{T} = \emptyset$, tedy

$$T = \frac{M_1}{l_1} = \frac{3\,E\,J\,h_1}{l_1^2\,l_2}.$$

*) Zvýšení pokládáme za negativné snížení.

**) Účinek záleží v tom, že svislé břímě P nepůsobí pravoúhelně k ose nosníkové; lze je pak rozložiti v příčnou (pravoúhelnou) složku P'' a ve složku podélnou P'. Leč za nepatrné odchylky přímky $a_0\,a_2$ od osy vodorovné možno klásti dosti příbližn $P'' \doteq P$, $P' \doteq \emptyset$.

Jde-li o průřez x pole $a_1 a_2$, máme obdobně

$$M = \frac{M_1 x'}{l_2} = \frac{3 E J h_1}{l_1 l_2^2} x',$$
$$T = -\frac{M_1}{l_2} = -\frac{3 E J h_1}{l_1 l_2^2}.$$

Snížením bodu a_1 vyvozují se tedy v poli $\left\{ \begin{matrix} a_0 a_1 \\ a_1 a_2 \end{matrix} \right\}$ momenty positivné, jež jsou úměrny ke vzdálenosti průřezu od bodu $\left\{ \begin{matrix} a_0 \\ a_2 \end{matrix} \right\}$; síla posouvající snížením vyvozená jest ve všech průřezech téhož pole rovna a to v pol $\left\{ \begin{matrix} a_0 a_1 \text{ positivná.} \\ a_1 a_2 \text{ negativná.} \end{matrix} \right\}$

Síly posouvající při podporách mají tedy hodnoty

$$T_0' = T_1 = \frac{3 E J h_1}{l_1^2 l_2},$$
$$T_1' = T_2 = -\frac{3 E J h_1}{l_1 l_2^2};$$

reakce podporové, vyvozené snížením, jsou tedy dle rovnic (61)

$$(77) \quad \left| \begin{array}{l} A_0 = \dfrac{3 E J h_1}{l_1^2 l_2}, \\ A_1 = -\dfrac{3 E J (l_1 + l_2) h_1}{l_1^2 l_2^2}, \\ A_2 = \dfrac{3 E J h_1}{l_1 l_2^2}. \end{array} \right.$$

Obtížením vyvozují se pravidlem reakce positivné; snížením středního bodu podporového se pak reakce krajní zvětšují, vnitřní zmenšuje.

Nosník o třech polích souměrně rozložených ($l_1 = l_3$). Nedbajíce zase možné malé odchýlenosti přímky $a_0 a_3$ od polohy vodorovné, zvolme ji osou X a položme tedy $h_0 = h_3 = 0$; hloubky h_1, h_2 bodů a_1, a_2 pod osou X buďtež obecně nerovny. Položíme-li v rovnici třímomentové jednou $r = 1$, po druhé $r = 2$ a vynecháme-li členy obsahující obtížení, obdržíme rovnice:

$$M_0 l_1 + 2 M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 + 6 E J \left(\frac{h_2 - h_1}{l_2} - \frac{h_1 - h_0}{l_1} \right) = 0,$$
$$M_1 l_2 + 2 M_2 (l_2 + l_3) + M_3 l_3 + 6 E J \left(\frac{h_3 - h_2}{l_3} - \frac{h_2 - h_1}{l_2} \right) = 0.$$

Položíme-li v nich $M_0 = M_3 = 0$, $l_3 = l_1$, $h_0 = h_3 = 0$, nabudou tvaru

$$2 M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 + \frac{6 E J}{l_1 l_2} [-(l_1 + l_2) h_1 + l_1 h_2] = 0,$$
$$M_1 l_2 + 2 M_2 (l_2 + l_1) + \frac{6 E J}{l_2 l_1} [l_1 h_1 - (l_1 + l_2) h_2] = 0.$$

Řešením jich vychází

$$(78)\ \ldots \begin{cases} M_1 = \dfrac{6\,E\,J}{l_1\,l_2}\ \dfrac{(l_1+2\,l_2)\,h_1-(l_1+l_2)\,h_2}{2\,l_1+3\,l_2} \\ \quad = \dfrac{6\,E\,J}{l_1\,l_2}\ \dfrac{(l_1+l_2)\,(h_1-h_2)+l_2\,h_1}{2\,l_1+3\,l_2}, \\ M_2 = \dfrac{6\,E\,J}{l_1\,l_2}\ \dfrac{-(l_1+l_2)\,h_1+(l_1+2\,l_2)\,h_2}{2\,l_1+3\,l_2} \\ \quad = \dfrac{6\,E\,J}{l_1\,l_2}\ \dfrac{(l_1+l_2)\,(h_2-h_1)+l_2\,h_2}{2\,l_1+3\,l_2}. \end{cases}$$

rozdíl

$$M_2 - M_1 = \frac{6\,E\,J\,(h_2-h_1)}{l_1\,l_2}.$$

Z rovnice (48) vyplývá moment ohybový v libovolném průřezu x pole

$$a_0\,a_1 \ldots M = \frac{M_1\,x}{l_1},$$

$$a_1\,a_2 \ldots M = \frac{M_1\,x' + M_2\,x}{l_2} = M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l_2}\,x = M_1 + \frac{6\,E\,J\,(h_2-h_1)}{l_1\,l_2^2}\,x,$$

$$a_2\,a_3 \ldots M = \frac{M_2\,x'}{l_1}.$$

Z rovnice (49) vychází obdobně síla posouvající v libovolném průřezu x pole

$$a_0\,a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots T = \frac{M_1}{l_1},$$

$$a_1\,a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots T = \frac{M_2 - M_1}{l_2},$$

$$a_2\,a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots T = -\frac{M_2}{l_1}.$$

Reakce podporové jsou dle rovnice (61)

$$(79)\ \ldots \begin{cases} A_0 = \dfrac{6\,E\,J}{l_1^2\,l_2}\ \dfrac{(l_1+2\,l_2)\,h_1-(l_1+l_2)\,h_2}{2\,l_1+3\,l_2} \\ \quad = \dfrac{6\,E\,J}{l_1^2\,l_2}\ \dfrac{l_2\,h_1+(l_1+l_2)\,(h_1-h_2)}{2\,l_1+3\,l_2}, \\ A_1 = \dfrac{6\,E\,J}{l_1^2\,l_2^2}\ \dfrac{-2\,(l_1+l_2)^2\,h_1+(2\,l_1^2+4\,l_1\,l_2+l_2^2)\,h_2}{2\,l_1+3\,l_2} \\ \quad = \dfrac{6\,E\,J}{l_1^2\,l_2^2}\ \dfrac{2\,(l_1+l_2)^2\,(h_2-h_1)-l_2^2\,h_2}{2\,l_1+3\,l_2}, \\ A_2 = \dfrac{6\,E\,J}{l_1^2\,l_2^2}\ \dfrac{(2\,l_1^2+4\,l_1\,l_2+l_2^2)\,h_1-2\,(l_1+l_2)^2\,h_2}{2\,l_1+3\,l_2} \\ \quad = \dfrac{6\,E\,J}{l_1^2\,l_2^2}\ \dfrac{2\,(l_1+l_2)^2\,(h_1-h_2)-l_2^2\,h_1}{2\,l_1+3\,l_2}, \\ A_3 = \dfrac{6\,E\,J}{l_1^2\,l_2}\ \dfrac{-(l_1+l_2)\,h_1+(l_1+2\,l_2)\,h_2}{2\,l_1+3\,l_2} \\ \quad = \dfrac{6\,E\,J}{l_1^2\,l_2}\ \dfrac{l_2\,h_2+(l_1+l_2)\,(h_2-h_1)}{2\,l_1+3\,l_2}. \end{cases}$$

Jest-li $h_1 = h_2 = h$, máme

$$(80) \ldots\ldots\ldots M_1 = M_2 = \frac{6\,E\,J\,h}{l_1\,(2\,l_1 + 3\,l_2)},$$

dále v libovolném průřezu x pole

$$a_0\,a_1 \ldots\ldots M = \frac{M_1\,x}{l_1}, \quad T = \frac{M_1}{l_1},$$
$$a_1\,a_2 \ldots\ldots M = M_1, \quad T = 0,$$
$$a_2\,a_3 \ldots\ldots M = \frac{M_1\,x'}{l_1}, \quad T = -\frac{M_1}{l_1},$$

konečně reakce podporové

$$(81) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} A_0 = A_3 = \dfrac{6\,E\,J\,h}{l_1^2\,(2\,l_1 + 3\,l_2)}, \\ A_1 = A_2 = -\dfrac{6\,E\,J\,h}{l_1^2\,(2\,l_1 + 3\,l_2)}. \end{cases}$$

§ 35. **Jak se stanoví účinek vetknutých konců nosníkových.** Nosník budiž jedním na př. levým koncem vetknut v nějaké těleso a to dokonale, totiž tak, že tečna křivky ohybové při vetknutém konci za každého ohybu zůstává tatáž. Jestliže prostým podepřením levého konce byl dán t. zv. podporový bod a_0 křivky ohybové, stanoví se dokonalým vetknutím konce nosníkového bod podporový a zároveň jeho tečna, tedy dva nekonečně blízké neb i dva sjednocené body křivky ohybové.

Abychom při nosnících s konci vetknutými mohli užívati výsledků vyvozených svrchu pro nosníky na koncích prostě podepřené, pomysleme si spojitý nosník $a_0\,a_1\,a_2 \ldots a_n\,a_{n+1}$, jehož podporové body mají pod zvolenou vodorovnou osou hloubky $h_0, h_1, h_2 \ldots h_n, h_{n+1}$; délky polí nechť jsou $l_1, l_2, \ldots l_{n+1}$. Pole krajní $a_0\,a_1$, $a_n\,a_{n+1}$ nechť jsou zcela neobtížena, tak že v příslušných rovnicích třímomentových

$$\frac{\mathfrak{N}_1}{l_1} = 0, \quad \frac{\mathfrak{N}'_{n+1}}{l_{n+1}} = 0.$$

Za určitého obtížení polí ostatních ohne se nosník určitým způsobem; dvěma posloupnými body podporovými jest dána tetiva nebo — prodloužena-li — sečna křivky ohybové. Přihlédněme k sečnám $a_0\,a_1$, $a_n\,a_{n+1}$; odchylky jejich od osy X jsou dány rovnicemi

$$\tan \alpha_{0,1} \doteq \alpha_{0,1} = \frac{h_1 - h_0}{l_1},$$
$$\tan \alpha_{n,\,n+1} \doteq \alpha_{n,\,n+1} = \frac{h_{n+1} - h_n}{l_{n+1}}.$$

Mysleme si nyní, že bod a_0 se blíží k bodu a_1 zůstávaje při tom na tetivě $a_0\,a_1$; tu blíží se hodnota h_0 ku h_1 a ubývá rozdílu $h_1 - h_0$; zároveň

ubývá délky l_1, ale úhel $\alpha_{0,1}$ a tedy podíl $\frac{h_1 - h_0}{l_1}$ zachovává svou hodnotu; sjednotí-li se konečně bod a_0 s bodem a_1, nabudou čítatel i jmenovatel tohoto zlomku hodnoty rovné nulle, sečna změní se v tečnu mající však touž odchylku $\alpha_{0,1}$ od osy X, a $\lim \frac{h_1 - h_0}{l_1} = \alpha_{0,1} = \alpha_1$. Říkejme pak, že p o l e $a_0 a_1$ jest n u l l o v é. Obdobně má se věc, jest-li vetknut konec pravý.

Při vetknutém konci $\left\{\begin{matrix} levém \\ pravém \end{matrix}\right\}$ *nosníku* $a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n$ *jest si mysliti dva sjednocené body podporové* $\left\{\begin{matrix} a_0, a_1 \\ a_n, a_{n+1} \end{matrix}\right\}$ *a tedy nullové pole* $\left\{\begin{matrix} a_0 a_1 \\ a_n a_{n+1} \end{matrix}\right\}$; *v první a poslední rovnici třímomentové nosníku* $a_0 a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}$ *položme tedy* $l_1 = 0$, $l_{n+1} = 0$; *na místo zlomku* $\left\{\begin{matrix} \frac{h_1 - h_0}{l_1} \\ \frac{h_{n+1} - h_n}{l_{n+1}} \end{matrix}\right\}$ *vstupuje odchylka* $\left\{\begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_n \end{matrix}\right\}$ *tečny při konci vetknutém, totiž úhel, v kterém konec ten jest vetknut.**)

Jde-li tedy o nosník spojitý $a_1 a_2 \ldots a_n$ o $(n-1)$ poli, jehož konce jsou vetknuty v úhlech α_1, α_n, vyšetřujme jej jako nosník o $(n+1)$ poli na koncích prostě podepřený, jehož pole krajní jsou nullová. O tomto nosníku lze napsati n rovnic třímomentových, z nichž první a poslední, totiž

$$M_0 l_1 + 2 M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 + \frac{\mathfrak{N}_1}{l_1} + \frac{\mathfrak{N}_2'}{l_2} + 6 E J \left(\frac{h_2 - h_1}{l_2} - \frac{h_1 - h_0}{l_1} \right) = 0,$$

$$M_{n-1} l_n + 2 M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} + \frac{\mathfrak{N}_n}{l_n} + \frac{\mathfrak{N}'_{n+1}}{l_{n+1}} + 6 E J \left(\frac{h_{n+1} - h_n}{l_{n+1}} - \frac{h_n - h_{n-1}}{l_n} \right) = 0$$

substitucemi

$$\frac{\mathfrak{N}_1}{l_1} = 0, \qquad \frac{\mathfrak{N}'_{n+1}}{l_{n+1}} = 0,$$

$$l_1 = 0, \qquad l_{n+1} = 0,$$

$$\frac{h_1 - h_0}{l_1} = \alpha_1, \quad \frac{h_{n+1} - h_n}{l_{n+1}} = \alpha_n$$

nabývají tvaru

---

*) Poněvadž tělesa, v nichž vetknuty konce nosníkové, jsou pružná, není vůbec vetknutí naprosto dokonalého; vetknuty-li na př. konce nosníkové vodorovně, objeví se deformací příslušných těles jakési malé odchylky α_1, α_n.

$$(82)\ldots\begin{cases} 2M_1 l_2 + M_2 l_2 + \dfrac{\mathfrak{N}_2'}{l_2} + 6EJ\left(\dfrac{h_2 - h_1}{l_2} - \alpha_1\right) = 0, \\ M_{n-1} l_n + 2M_n l_n + \dfrac{\mathfrak{N}_n}{l_n} + 6EJ\left(\alpha_n - \dfrac{h_n - h_{n-1}}{l_n}\right) = 0; \end{cases}$$

ostatní rovnice třímomentové se nemění.

Majíce n rovnic třímomentových o n neznámých momentech podporových M_1, M_2, ... M_n, můžeme vypočísti tyto momenty, z těch pak ostatní veličiny rovnicemi § 33., jež zůstávají v platnosti.

Podrobněji budiž naznačen postup při nosníku $a_1 a_2$ o jediném skutečném poli, který však budiž vetknut na obou koncích. Dle položeného svrchu výkladu jest tedy vyšetřovati nosník $a_0 a_1 a_2 a_3$ o 3 polích, z nichž obě krajní $a_0 a_1$, $a_2 a_3$ jsou nullová. Máme tedy 2 rovnice třímomentové: první z nich srovnává se s první z rovnic (82); v druhé rovnici (82) jest položiti $n = 2$. Píšeme-li $l_2 = l$, a myslíme-li si podporové body a_1, a_2 na téže vodorovné přímce, platí rovnice

$$2M_1 + M_2 + \frac{\mathfrak{N}'}{l^2} - \frac{6EJ\alpha_1}{l} = 0,$$
$$M_1 + 2M_2 + \frac{\mathfrak{N}}{l^2} + \frac{6EJ\alpha_2}{l} = 0;$$

řešením jich vychází

$$(83)\ldots\ldots\begin{cases} M_1 = \dfrac{\mathfrak{N} - 2\mathfrak{N}'}{3l^2} + \dfrac{2EJ}{l}(2\alpha_1 + \alpha_2), \\ M_2 = \dfrac{\mathfrak{N}' - 2\mathfrak{N}}{3l^2} - \dfrac{2EJ}{l}(\alpha_1 + 2\alpha_2). \end{cases}$$

Budiž na př. nosník $a_1 a_2$ obtížen rovnoměrně po vší své délce; tu

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}' = \frac{ql^4}{4}$$
$$\frac{\mathfrak{N} - 2\mathfrak{N}'}{3l^2} = \frac{\mathfrak{N}' - 2\mathfrak{N}}{3l^2} = -\tfrac{1}{12} ql^2.$$

Jsou-li oba konce odchýleny souměrně, tedy $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = -\alpha$, máme

$$(84)\ldots\ldots\ldots M_1 = M_2 = -\tfrac{1}{12} ql^2 + \frac{2EJ}{l}\alpha.$$

Přechodný průřez má dle rovnice (66) úsečku $c = \dfrac{l}{2}$; tím obdržíme dle rovnice (67) ohybový moment libovolného průřezu (x)

$$M = -\tfrac{1}{12} ql^2 + \tfrac{1}{2} qx(l - x) + \frac{2EJ\alpha}{l};$$

maximum momentové jest pak dle rovnice (69)

$$(85) \ldots\ldots\ldots\ldots M_c = \frac{1}{24} q l^2 + \frac{2 E J \alpha}{l}.$$

Položíme-li $\alpha = 0$, vyjde

$$M_1 = M_2 = -\tfrac{1}{12} q l^2,$$
$$M_c = \tfrac{1}{24} q l^2,$$
$$M = -\tfrac{1}{12} q l^2 + \tfrac{1}{2} q x (l - x).$$

Největší prostá hodnota momentu jest $\frac{1}{12} q l^2$ (při nosníku $a\,b$ na obou koncích prostě podepřeném $\frac{1}{8} q l^2$); dokonalým vetknutím vodorovným obou konců zmenšuje se tedy největší moment v poměru 3 : 2, totiž o třetinu. Poněvadž však ve skutečnosti není vetknutí dokonalého, přistupuje k těmto hodnotám ještě účinek odchýlení konců a to

$$M_1' = M_2' = M_c' = M' = \frac{2 E J \alpha}{l}$$

ve všech průřezech stejný a to positivní, jest-li odchylka α při levém konci positivná; tímto přídavkem $\left\{ \begin{matrix} \text{zvětšují} \\ \text{zmenšují} \end{matrix} \right\}$ se momenty $\left\{ \begin{matrix} \text{positivné} \\ \text{negativné} \end{matrix} \right\}$.

Zmenší se tedy prostá hodnota minima (momentu podporového) a zvětší se maximum (moment rozpolovacího průřezu c); poněvadž pak prostá hodnota onoho ($\frac{1}{12} q l^2$) jest větší než toto ($\frac{1}{24} q l^2$), zmenšuje se největší prostá hodnota momentu nosníkového dotčeným odchýlením, pokud toto nepřestoupí jisté meze. Po tuto mez jest největší prostá hodnota momentová za odchýlených konců menší než $\frac{1}{12} q l^2$. Nejvýhodnější odchýlení α^+ bylo by to, za kterého by

$$-M_1 = M_c,$$

tedy

$$\frac{1}{12} q l^2 - \frac{2 E J \alpha^+}{l} = \frac{1}{24} q l^2 + \frac{2 E J \alpha^+}{l},$$

z čehož vychází

$$\alpha^+ = \frac{q l^3}{96 E J}.$$

Za této odchylky měl by největší moment nosníkový hodnotu

$$M^+ = \tfrac{1}{16} q l^2$$

a to při podpoře negativnou, uprostřed positivnou, rovnal by se tedy p o l o v i c i největšího momentu, který se namítá při nosníku na obou koncích prostě podepřeném.

Za odchylky $\alpha > \alpha^*$ jest $M_c > -M_1$; za odchylky $\alpha = 2\,\alpha^*$ vychází

$$M_1 = M_2 = -\tfrac{1}{24}\,q\,l^2,\quad M_c = \tfrac{1}{12}\,q\,l^2;$$

za odchylky větší než $2\,\alpha^*$ jest $M_c > \tfrac{1}{12}\,q\,l^2$, a roste-li odchylka dále, blíží se M_c k hodnotě $\tfrac{1}{8}\,q\,l^2$.

Z dosavadního vyšetřování plyne, že největší moment ohybový, jak se namítá při nosníku $a\,b$ na koncích prostě podepřeném a veskrz rovnoměrně obtíženém, lze — theoreticky — vetknutím konců zmenšiti až na polovici. Leč příslušný úhel α^* má hodnotu velmi malou; v praxi jest pak velice nesnadno, ano nemožno opatřiti, by odchýlenost konců tuto hodnotu skutečně měla a zachovala.*)

Připomenutí. Počítají-li se průřezové rozměry prismatického nosníka na obou koncích na př. zazděného z momentu $\tfrac{1}{12}\,q\,l^2$, děje se tak právem jen tam, kde možno se spolehnouti, že konce nosníkové popuštěním zdí se neodchýlí více než o úhel $2\,\alpha^*$; což vymáhá, by zazděné konce měly přiměřenou délku a po případě byly ve zdi zakotveny. Není-li tomu tak, počítejme rozměry průřezové bezpečněji z momentu $\tfrac{1}{8}\,q\,l^2$.

§ 36. **Spojité nosníky průřezu proměnného.** Při těchto závisí na úsečce x též moment J setrvačnosti průřezu vzhledem k ose neutrálné. Položme

$$\frac{J}{J_0} = \vartheta,$$

kde J_0 budiž určitá stálá — na př. střední — hodnota momentu setrvačnosti. Vedouce si v podstatě tak, jako jsme činili v § 30. při nosníku stálého průřezu, vyjděme zase od rovnice čáry ohybové libovolného pole $a\,b$, totiž od rovnice

$$-E\,J_0\,\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = \frac{M_a\,x' + M_b\,x}{\vartheta\,l} + \frac{\mathfrak{M}}{\vartheta};$$

---

*) Počítáme-li průřezové rozměry prismatického nosníku ze vzorce

$$\frac{J}{e} = \frac{M}{k} = \frac{q\,l^2}{8\,k},$$

máme

$$\frac{q\,l^2}{J} = \frac{8\,k}{e}$$

anebo, klademe-li $e = \frac{h}{2}$, kde h jest výška průřezu,

$$\frac{q\,l^2}{J} = \frac{16\,k}{h};$$

pročež

$$\alpha^* = \frac{k\,l}{6\,E\,h}.$$

Jest-li na př. $\frac{k}{E} = \frac{1}{2000}$ (železo kujné, dřevo), dále $\frac{l}{h} = 25$, vychází

$$\alpha^* = \frac{1}{480},\ \text{tedy as } 0{\cdot}12^0.$$

integrováním vychází poprvé

$$-E J_0 \left(\frac{dy}{dx} - \alpha\right) = \frac{M_a}{l} \int_0^x \frac{x' dx}{\vartheta} + \frac{M_b}{l} \int_0^x \frac{x dx}{\vartheta} + \int_0^x \frac{\mathfrak{M} dx}{\vartheta}$$

a po druhé

$$(86) \ldots . \left\{ \begin{aligned} -E J_0 (y - \alpha x - h_a) = {} & \frac{M_a}{l} \int_0^x dx \int_0^x \frac{x' dx}{\vartheta} + \frac{M_b}{l} \int_0^x dx \int_0^x \frac{x dx}{\vartheta} \\ & + \int_0^x dx \int_0^x \frac{\mathfrak{M} dx}{\vartheta}; \end{aligned} \right.$$

integrační konstanty stanoveny tu spůsobem v § 30. vyloženým.

Integraly zdvojené lze integrováním po částech vyjádřiti jednoduchými, jak následuje.

$$\int_0^x dx \int_0^x \frac{x' dx}{\vartheta} = x \int_0^x \frac{x' dx}{\vartheta} - \int_0^x \frac{x x' dx}{\vartheta},$$

$$\int_0^x dx \int_0^x \frac{x dx}{\vartheta} = x \int_0^x \frac{x dx}{\vartheta} - \int_0^x \frac{x^2 dx}{\vartheta},$$

$$\int_0^x dx \int_0^x \frac{\mathfrak{M} dx}{\vartheta} = x \int_0^x \frac{\mathfrak{M} dx}{\vartheta} - \int_0^x \frac{\mathfrak{M} x dx}{\vartheta}.$$

Applikujeme-li rovnici (86) na průřez b, dospíváme k výminkové rovnici, která jest obdobna rovnici (51), totiž

$$(87) \ldots \ldots \left\{ \begin{aligned} & \frac{M_a}{l^2} \int_0^l \frac{x'^2 dx}{\vartheta} + \frac{M_b}{l^2} \int_0^l \frac{x x' dx}{\vartheta} + \frac{1}{l} \int_0^l \frac{\mathfrak{M} x' dx}{\vartheta} \\ & \qquad + E J_0 \left(\frac{h_b - h_a}{l} - \alpha\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Jestliže rovnici (87) applikujeme na pole $a_r a_{r+1}$ (obr. 39.), vychází

$$\begin{aligned} & \frac{M_r}{l^2_{r+1}} \int_0^{l_{r+1}} \frac{x'^2 dx}{\vartheta} + \frac{M_{r+1}}{l^2_{r+1}} \int_0^{l_{r+1}} \frac{x x' dx}{\vartheta} + \frac{1}{l_{r+1}} \int_0^{l_{r+1}} \frac{\mathfrak{M} x' dx}{\vartheta} \\ & \qquad + E J_0 \left(\frac{h_{r+1} - h_r}{l_{r+1}} - \alpha_r\right) = 0; \end{aligned}$$

applikujeme-li ji na pole $a_r a_{r-1}$, postupujíce tu od podpory a_r k podpoře a_{r-1}, vyplývá obdobně k § 30.

$$\frac{M_r}{l_r^2}\int_0^{l_r}\frac{x^2\,dx}{\vartheta}+\frac{M_{r-1}}{l_r^2}\int_0^{l_r}\frac{x\,x'\,dx}{\vartheta}+\frac{1}{l_r}\int_0^{l_r}\frac{\mathfrak{M}\,x\,dx}{\vartheta}$$
$$+E\,J_0\left(\frac{h_{r-1}-h_r}{l_r}+\alpha_r\right)=0.$$

Sečtením obdržíme, znamenajíce obecně

$$(88)\ \ldots\ \begin{cases}\gamma=\dfrac{3}{l^3}\displaystyle\int_0^l\frac{x^2\,dx}{\vartheta},\quad \gamma'=\dfrac{3}{l^3}\int_0^l\frac{x'^2\,dx}{\vartheta},\quad \delta=\dfrac{6}{l^3}\int_0^l\frac{x\,x'\,dx}{\vartheta},\\ \mathfrak{N}=6\displaystyle\int_0^l\frac{\mathfrak{M}\,x\,dx}{\vartheta},\quad \mathfrak{N}'=6\int_0^l\frac{\mathfrak{M}\,x'\,dx}{\vartheta},\end{cases}$$

a lišíce tyto veličiny v různých polích připojením přípony příslušného pole, třímomentovou rovnici

$$(89)\ \ldots\ \delta_r\,l_r\,M_{r-1}+2\,(\gamma_r\,l_r+\gamma'_{r+1}\,l_{r+1})\,M_r+\delta_{r+1}\,l_{r+1}\,M_{r+1}$$
$$+\frac{\mathfrak{N}_r}{l_r}+\frac{\mathfrak{N}'_{r+1}}{l_{r+1}}+6\,E\,J_0\left(\frac{h_{r+1}-h_r}{l_{r+1}}-\frac{h_r-h_{r-1}}{l_r}\right)=0.*)$$

Mění-li se průřezové rozměry spojitě, a vyjádřeno-li ϑ pohodlným výrazem úsečky x, možno ve výrazech veličin γ, γ', δ vykonati integrování a stanoviti tak tyto veličiny. Právě tak stanoví se veličiny $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$, dán-li též moment $\mathfrak{M}$ jako funkce úsečky x.

Za rovnoměrného veskrz obtížení pole $a\,b$ jest na př.

$$\mathfrak{M}=\tfrac{1}{2}\,q\,x\,x'$$

a tedy

$$(90)\ldots\ldots\ \mathfrak{N}=3q\int_0^l\frac{x^2\,x'\,dx}{\vartheta},\quad \mathfrak{N}'=3q\int_0^l\frac{x\,x'^2\,dx}{\vartheta}.$$

Nelze-li ϑ vyjádřiti pohodlným výrazem úsečky x, stanovíme integraly, obsažené ve výrazech veličin γ, γ', δ, přibližně dle pravidla Simpsonova.

Mění-li se rozměry průřezové stupňovitě jsouce v jednotlivých dílech pole $a\,b$ stálé, vykonejme integrování v každém dílu. Má-li poměr ϑ od

$$\begin{aligned}&x=0 \text{ po } x=x_1 \text{ hodnotu } \vartheta_1,\\ &x=x_1 \text{ „ } x=x_2 \text{ „ } \vartheta_2,\\ &x=x_2 \text{ „ } x=x_3 \text{ „ } \vartheta_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &x=x_{n-1} \text{ po } x=x_n=l \text{ hodnotu } \vartheta_n,\end{aligned}$$

*) K nosníku prismatickému přejdeme, položíme-li $J=J_0$ a tedy $\vartheta=1$. V tomto případě $\gamma=\gamma'=\delta=1$, veličiny $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ pak nabývají hodnot vytčených rovnicemi (53). Rovnice (89) mění se v rovnici (52).

platí rovnice

$$(91)\quad \begin{cases} \gamma = \dfrac{1}{l^3}\left(\dfrac{x_1^3}{\vartheta_1} + \dfrac{x_2^3 - x_1^3}{\vartheta_2} + \dfrac{x_3^3 - x_2^3}{\vartheta_3} + \ldots + \dfrac{l^3 - x^3_{n-1}}{\vartheta_n}\right), \\ \gamma' = \dfrac{1}{l^3}\left(\dfrac{x'^3_{n-1}}{\vartheta_n} + \dfrac{x'^3_{n-2} - x'^3_{n-1}}{\vartheta_{n-1}} + \dfrac{x'^3_{n-3} - x'^3_{n-2}}{\vartheta_{n-2}} + \ldots + \dfrac{l^3 - x'^3_1}{\vartheta_1}\right), \\ \delta = \dfrac{1}{l^3}\left[\dfrac{x_1^2\,(l + 2\,x_1') }{\vartheta_1} + \dfrac{x_2^2\,(l + 2\,x_2') - x_1^2\,(l + 2\,x_1')}{\vartheta_2} + \dfrac{x_3^2\,(l + 2\,x_3') - x_2^2\,(l + 2\,x_2')}{\vartheta_3} + \ldots + \dfrac{l^3 - x^2_{n-1}\,(l + 2\,x'_{n-1})}{\vartheta_n}\right]. \end{cases}$$

Obtíženo-li pak pole ab veskrze rovnoměrně, máme dále

$$(92)\quad \begin{cases} \mathfrak{N} = \dfrac{1}{4}\,q\left[\dfrac{x_1^3\,(l + 3\,x_1')}{\vartheta_1} + \dfrac{x_2^3\,(l + 3\,x_2') - x_1^3\,(l + 3\,x_1')}{\vartheta_2} + \dfrac{x_3^3\,(l + 3\,x_3') - x_2^3\,(l + 3\,x_2')}{\vartheta_3} + \ldots + \dfrac{l^4 - x^3_{n-1}\,(l + 3\,x'_{n-1})}{\vartheta_n}\right], \\ \mathfrak{N}' = \dfrac{1}{4}\,q\left[\dfrac{x'^3_{n-1}\,(l + 3\,x_{n-1})}{\vartheta_n} + \dfrac{x'^3_{n-2}\,(l + 3\,x_{n-2}) - x'^3_{n-1}\,(l + 3\,x_{n-1})}{\vartheta_{n-1}} + \dfrac{x'^3_{n-3}\,(l + 3\,x_{n-3}) - x'^3_{n-2}\,(l + 3\,x_{n-2})}{\vartheta_{n-2}} + \ldots + \dfrac{l^4 - x'^3_1\,(l + 3\,x_1)}{\vartheta_1}\right]. \end{cases}$$

Připomenutí. Sečtením veličin γ, γ', δ vychází

$$(93)\quad \ldots\ldots \gamma + \gamma' + \delta = \frac{3}{l^3}\int_0^l \frac{x^2 + 2\,x\,x' + x'^2}{\vartheta}\,dx = \frac{3}{l}\int_0^l \frac{dx}{\vartheta};$$

poněvadž pak tento integral snadněji se stanoví než integraly obsažené ve výrazech veličin γ, γ', δ, možno užiti této souvislosti ku stanovení jedné z těchto veličin, známe-li obě ostatní.

Obdobně

$$(94)\quad \ldots\ldots \mathfrak{N} + \mathfrak{N}' = 6\int_0^l \frac{\mathfrak{M}\,(x + x')\,dx}{\vartheta} = 6\,l\int_0^l \frac{\mathfrak{M}\,dx}{\vartheta},$$

čehož užiti lze k vypočtení jedné z veličin $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$, známe-li druhou.

Mění-li se rozměry průřezové stupňovitě, máme

$$(95)\quad \ldots \gamma + \gamma' + \delta = \frac{3}{l}\left(\frac{x_1}{\vartheta_1} + \frac{x_2 - x_1}{\vartheta_2} + \frac{x_3 - x_2}{\vartheta_3} + \ldots + \frac{l - x_{n-1}}{\vartheta_n}\right),$$

a za rovnoměrného obtížení pole $a\,b$

$$(96)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathfrak{N} + \mathfrak{N}' = \tfrac{1}{2}\,\delta\,q\,l^2.$$

Z rovnic třímomentových stanovíme, postupujíce jako při nosníku prismatickém, veškeré momenty podporové; co se týče veličin ostatních, mají rovnice (56) až (62), jakož i (66) až (71), jež jsme v § 33. odvodili pro nosník prismatický, plnou platnost i při nosníku průřezu proměnného. Rovnici křivky ohybové obdržíme vyloučením úhlu α z rovnic (86) a (87).

Příklad 15. Spojitý nosník o dvou rovných polích obtížen jest veskrz rovnoměrně; podporové body jsou na přímce vodorovné. Budiž $l_1 = l_2 = 8\ m$; rozměry průřezové mění se stupňovitě a to tak, že v poli $a_0 a_1$ od

$$\begin{aligned}
x &= 0 \quad \text{po } x = 1{\cdot}4\ m \text{ jest } J = 5{\cdot}64\ dm^4,\\
x &= 1{\cdot}4 \quad ,, \ x = 4{\cdot}6 \quad ,, \ ,, \ J = 8{\cdot}88\ ,,\\
x &= 4{\cdot}6 \quad ,, \ x = 6{\cdot}9 \quad ,, \ ,, \ J = 5{\cdot}64\ ,,\\
x &= 6{\cdot}9 \quad ,, \ x = 7{\cdot}3 \quad ,, \ ,, \ J = 8{\cdot}88\ ,,\\
x &= 7{\cdot}3 \quad ,, \ x = 7{\cdot}65 \ ,, \ ,, \ J = 12{\cdot}26\ ,,\\
x &= 7{\cdot}65 \ ,, \ x = 8 \quad ,, \ ,, \ J = 15{\cdot}85\ ,,\ ;
\end{aligned}$$

v poli $a_1 a_2$ platí tytéž hodnoty souměrně vzhledem ku střednímu bodu podporovému a_1. Stanoviti momenty podporové.

Položíme-li $J_0 = 10\ dm^4$, má poměr ϑ v příslušných dílech pole $a_0 a_1$ hodnoty

$$0{\cdot}564,\quad 0{\cdot}888,\quad 0{\cdot}564,\quad 0{\cdot}888,\quad 1{\cdot}226,\quad 1{\cdot}585.$$

V tomto případě lze napsati jedinou rovnici třímomentovou, totiž

$$\delta_1 l_1 M_0 + 2(\gamma_1 l_1 + \gamma'_2 l_2) M_1 + \delta_2 l_2 M_2 + \frac{\mathfrak{N}_1}{l_1} + \frac{\mathfrak{N}_2'}{l_2} = 0,$$

a poněvadž

$$M_0 = 0,\quad M_2 = 0,\quad l_1 = l_2 = l,\quad \gamma_1 = \gamma_2',\quad \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2'$$

(poslední dvě rovnice plynou ze souměrnosti), vychází

$$M_1 = -\frac{\mathfrak{N}_1}{2\gamma l^2}.$$

Dle první z rovnic (91) máme tu

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{l^3}\left(\frac{1{\cdot}4^3}{0{\cdot}564} + \frac{4{\cdot}6^3 - 1{\cdot}4^3}{0{\cdot}888} + \frac{6{\cdot}9^3 - 4{\cdot}6^3}{0{\cdot}564} + \frac{7{\cdot}3^3 - 6{\cdot}9^3}{0{\cdot}888}\right.\\
&\qquad \left. + \frac{7{\cdot}65^3 - 7{\cdot}3^3}{1{\cdot}226} + \frac{8^3 - 7{\cdot}65^3}{1{\cdot}585}\right)\\
&= \frac{1}{l^3}(4{\cdot}87 + 106{\cdot}52 + 409{\cdot}88 + 68{\cdot}14 + 47{\cdot}86 + 40{\cdot}57)\\
&= \frac{677{\cdot}84}{l^3}.
\end{aligned}$$

Dle první z rovnic (92) máme dále

$$\mathfrak{R}_1 = \tfrac{1}{4} q \left(\frac{1 \cdot 4^3 (8 + 3 \,.\, 6 \cdot 6)}{0 \cdot 564} + \frac{4 \cdot 6^3 (8 + 3 \,.\, 3 \cdot 4) - 1 \cdot 4^3 (8 + 3 \,.\, 6 \cdot 6)}{0 \cdot 888} \right.$$

$$+ \frac{6 \cdot 9^3 (8 + 3 \,.\, 1 \cdot 1) - 4 \cdot 6^3 (8 + 3 \,.\, 3 \cdot 4)}{0 \cdot 564} + \frac{7 \cdot 3^3 (8 + 3 \,.\, 0 \cdot 7) - 6 \cdot 9^3 (8 + 3 \,.\, 1 \cdot 1)}{0 \cdot 888}$$

$$\left. + \frac{7 \cdot 65^3 (8 + 3 \,.\, 0 \cdot 35) - 7 \cdot 3^3 (8 + 3 \,.\, 0 \cdot 7)}{1 \cdot 226} + \frac{8^4 - 7 \cdot 65^3 (8 + 3 \,.\, 0 \cdot 35)}{1 \cdot 585} \right)$$

$$= \tfrac{1}{4} q \, (135 \cdot 25 + 1909 \cdot 05 + 3440 \cdot 85 + 244 \cdot 28 + 99 \cdot 99 + 27 \cdot 98)$$

$$= 1464 \cdot 35 \, q.$$

Těmito hodnotami vychází

$$M_1 = - \frac{1464 \cdot 35}{2 \,.\, 8 \,.\, 677 \cdot 84} q \, l^2 = - 0 \cdot 135 \, q \, l^2.$$ *)

ČESKO-UKR. KOMITÉTU V Č. S. R.

§ 37. **Spojité nosníky kloubové.** Ku stanovení reakcí nosníku spojitého $a_0 a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$ nestačují obecné výminky rovnováhy sil zevnitřních, a nutno je doplniti t. zv. výminkami přetvárnými. Skládá-li se však spojitý nosník z dílů, které vespolek jsou spojeny kloubovitě tak, že každý z těchto dílů jest podepřen toliko ve dvou místech, pak řešení nevymáhá výminek přetvárných; reakce vyplývají z obecných výminek statických.

Klouby lze rozděliti v polích nosníkových různým spůsobem; přihlížejme ku případu, kde se pravidelně střídá pole bez kloubu s polem o dvou kloubech.

Budiž (e) jeden z průřezů kloubových; v průřezu tom stýkají se dva díly nosníkové spojené vespolek kloubem, jehož vodorovná osa, jsouc obsažena v průřezu (e), seče pravoúhelně osu nosníkovou. Spojení kloubové připouští, aby oba díly nosníkové se pootočily ob osu kloubu; za rovnováhy nosníku musí tedy moment ohybový M_e průřezu (e) rovnati se nulle.

Kolik kloubů má nosník, tolik zvláštních výminek rovnováhových tvaru $M_e = 0$ přistupuje k oběma obecným výminkám, jež lze psáti v obdobné formě $M_0 = 0$, $M_n = 0$. Krajní podporové průřezy (a_0), (a_n) můžeme dle toho čítati k průřezům kloubovým, pročež krajní pole může obsahovati jediný jen kloub skutečný. Při nosníku o n polích lze tak napsati vždy $n + 1$ rovnici výminkovou, z nich pak stanoviti $(n + 1)$ neznámou podporovou reakci.

Nosníky kloubové jsou tedy za výminkou svrchu položenou staticky určity.

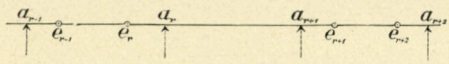
---

*) Kdybychom nedbali proměnnosti průřezu, byl by moment

$$M_1 = - 0 \cdot 125 \, q \, l^2,$$

a chyba činila by tedy 7·4%.

Průřezy kloubovými dělí se takový nosník (obr. 40.) v díly dvojího způsobu: díly $e_{r-1}\,e_r$, $e_{r+1}\,e_{r+2}$, ... bez podpor a, pak díly $e_r\,a_r\,a_{r+1}\,e_{r+1}$, ... o 2 podporách a_r, a_{r+1}, přečnívající však přes tyto podpory. Odděl-



Obr. 40.

líme-li díl $e_{r-1}\,e_r$ od ostatních, a chceme-li zachovati jeho stav rovnováhový, nutno připojiti v průřezu e_{r-1} sílu posouvající $T_{e_{r-1}}$, v průřezu e_r pak sílu posouvající $-T_{e_r}$ (momenty $M_{e_{r-1}}$, $-M_{e_r}$ rovnají se nulle). Díl $e_{r-1}\,e_r$ má se tedy tak, jako nosník na koncích prostě podepřený; $T_{e_{r-1}}$, $-T_{e_r}$ jsou jeho podporové reakce. Oddělíme-li obdobně díl $e_r\,a_r\,a_{r+1}\,e_{r+}$ od ostatních, musíme připojiti v průřezu e_r sílu posouvající T_{e_r}, v průřezu e_{r+1} pak sílu posouvající $-T_{e_{r+1}}$; silou $\left\{\begin{matrix} T_{e_r} & \equiv E_r \\ -T_{e_{r+1}} & \equiv E_{r+1} \end{matrix}\right\}$ tlačí nosník $\left\{\begin{matrix} e_{r-1}\,e_r \\ e_{r+1}\,e_{r+2} \end{matrix}\right\}$ ve svou $\left\{\begin{matrix} \text{pravou} \\ \text{levou} \end{matrix}\right\}$ podporu, kteréž mu poskytuje nosník $e_r\,a_r\,a_{r+1}\,e_{r+1}$, a tento jest tedy obtížen příslušnými tlaky podporovými.

Abychom za daného obtížení stanovili momenty a síly posouvající spojitého nosníku kloubového, vyšetřme nejprve díly $e_{r-1}\,e_r$, ... jako nosníky na koncích prostě podepřené (§ 28. *b*); účinek má tu jen obtížení dílu $e_{r-1}\,e_r$ samého, nikoli obtížení dílů ostatních. Určivše tlaky podporové dílů $e_{r-1}\,e_r$, ..., můžeme dále vyšetřovati díly $e_r\,a_r\,a_{r+1}\,e_{r+1}$, ... jako nosníky o 2 podporách přečnívající přes tyto podpory (§ 28. *c*); ku vlastnímu obtížení takového dílu $e_r\,a_r\,a_{r+1}\,e_{r+1}$ přistupují ještě podporové tlaky E_r, E_{r+1} obou sousedních dílů $e_{r-1}\,e_r$, $e_{r+1}\,e_{r+2}$; při dílu $e_r\,a_r\,a_{r+1}\,e_{r+}$ závisí momenty podporové a síly posouvající nejen na obtížení téhož dílu, ale i na obtížení obou dílů sousedních $e_{r-1}\,e_r$, $e_{r+1}\,e_{r+2}$.

Vyšetřme podrobněji zvláštní případ, kde všecka pole mají touž délku l, a každý průřez kloubový e_r touž vzdálenost e od nejbližšího průřezu podporového a_r; obtížení budiž po nosníku rozděleno veskrz rovnoměrně. Stanoviti jest maxima i minima momentová.

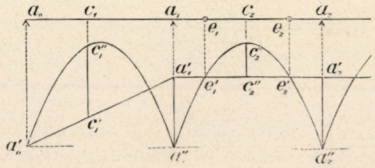
Co se týče rozdělení kloubů, mohou se namítnouti dva případy.

a) Krajní pole $a_0\,a_1$ neobsahují kloubu (obr. 41.). Díl $e_1\,e_2$ (a každý další takový díl) má délku $l - 2e$, tedy maximum momentové M_{c_2} či kratšeji

$$M_{II} = \tfrac{1}{8}\,q\,(l - 2e)^2;$$

tlaky podporové jsou

$$E_1 = E_2 = \tfrac{1}{2}\,q\,(l - 2e).$$



Obr. 41.

V dílu $a_0\,a_1\,e_1$ jest prostá hodnota minima momentového (negativného — při podpoře a_1)

$$-M_1 = \tfrac{1}{2}\,q\,(l - 2e)\,e + \tfrac{1}{2}\,q\,e^2 = \tfrac{1}{2}\,q\,e\,(l - e).$$

Užívajíce rovnic, platných o poli nosníku spojitého, stanovme úsečku přechodného průřezu v poli $a_0 a_1$, totiž

$$c_1 = \frac{l}{2} + \frac{M_1}{q\,l} = \frac{l^2 - l\,e + e^2}{2\,l}$$

a příslušné maximum momentové

$$M_I = M_0 + \frac{1}{2}\,q\,c_1^2 = \frac{1}{8}\,q\,\frac{(l^2 - l\,e + e^2)^2}{l^2}.$$

Z hodnot $-M_1$, M_I, M_{II} jest vždy $M_I > M_{II}$, poněvadž

$$l - e + \frac{e^2}{l} > l - 2\,e;$$

jde-li tedy o nosník prismatický, jest počítati rozměry jeho na základě větší z obou hodnot $-M_1$, M_I. Která z nich jest větší, záleží na poměru $\varepsilon = \frac{e}{l}$. Hledíc k úspoře hmoty prospívá voliti poměr ε tak, aby

$$-M_1 = M_I,$$

tedy

$$e\,(l - e) = \frac{(l^2 - l\,e - e^2)^2}{4\,l^2},$$

což vede k rovnici čtvrtého stupně

$$\varepsilon^4 - 2\,\varepsilon^3 + 7\,\varepsilon^2 - 6\,\varepsilon + 1 = 0.$$

Tato má dva realné kořeny

$$\varepsilon_1 = 0{\cdot}220, \quad \varepsilon_2 = 1 - \varepsilon_1 = 0{\cdot}780,$$

jimiž body e_1, e_2 jsou stanoveny.*) Hodnotou

$$(97) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad e = 0{\cdot}220\,l$$

vychází pak

$$(98) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad -M_1 = M_I = 0{\cdot}0858\,q\,l^2,$$

hodnota to značně menší než největší prostá hodnota momentu ohybového při obyčejném nosníku spojitém o rovných polích (viz tabulku I. na str. 143.).

*) Položíme-li totiž $\varepsilon' = 2\,\varepsilon - 1$, dospějeme k rovnici trinomické

$$\varepsilon'^4 + 22\,\varepsilon'^2 - 7 = 0,$$

jejíž kořeny jsou

$$\varepsilon' = \pm\sqrt{-11 \pm 8\sqrt{2}}.$$

b) V krajním poli $a_0 a_1$ obsažen jest kloub (obr. 42.). Díl $a_0 e_1$ má délku $l - e$ a tedy maximum momentové

$$M_I = \tfrac{1}{8} q (l - e)^2;$$

pravý (ovšem i levý) tlak podporový má hodnotu

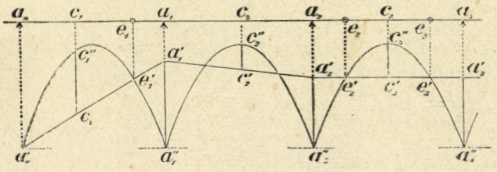
$$E_1 = \tfrac{1}{2} q (l - e).$$

Co se týče dílu $e_1 a_1 a_2 e_2$, jest prostá hodnota minima momentového při podpoře a_1

$$- M_1 = \tfrac{1}{2} q (l - e) e + \tfrac{1}{2} q e^2 = \tfrac{1}{2} q l e.$$

Obrazec 42. ukazuje, a možno i početně se přesvědčiti, že

$$M_{II} < M_{III} < M_I, \quad - M_2 = - M_3 = \ldots < - M_1;$$



Obr. 42.

zbývají tedy $- M_1$, M_I jakožto největší prosté hodnoty momentu ohybového. Která z nich jest větší, záleží na poměru $\varepsilon = \frac{e}{l}$.

Dejme tomu, že jde o nosník prismatický a že jest zase určiti poměr ε tak, aby

$$- M_1 = M_I.$$

To vymáhá, by

$$l e = \frac{(l - e)^2}{4},$$

což vede k rovnici

$$\varepsilon^2 - 6 \varepsilon + 1 = 0,$$

jejíž kořeny jsou

$$\varepsilon = 3 \pm 2 \sqrt{2};$$

platnost má kořen

$$\varepsilon = 3 - 2 \sqrt{2} = 0{\cdot}1716.$$

Hodnotou

$$(99) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots e = 0{\cdot}1716\, l$$

vychází pak

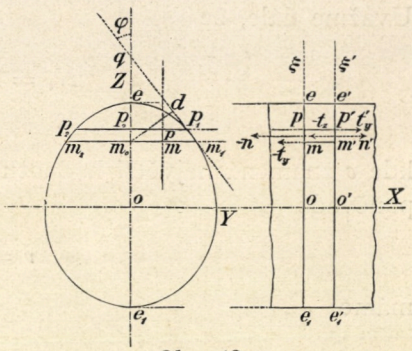
$$- M_1 = M_I = 0{\cdot}0858\, q\, l^2,$$

tedy táž hodnota jako v případě *a*).

§ 38. **O vnitřních silách tangencialných.** Kromě napětí normalného působí v každém bodě průřezu nosníkového napětí tangencialné $\tau_{(x)}$, jež rozkládáme ve složky: τ_{xy}, kratšeji τ_z, působící směrem osy Y, pak τ_{xz},

kratšeji τ_y, působící směrem osy Z (§ 22.). Vyšetřujme tato napětí pokládajíce, že jde o nosník průřezu stálého, a že rovina XZ sil zevnitřních dělí nosník souměrně.

Abychom se vyhnuli obtížnému vyšetřování, založme je na hypothese, že *napětí τ_y jest pouhou funkcí souřadnice z a tedy nezávislé na y.* Ku stanovení napětí τ_y, jež dle rovnice (1) § 3. působí nejen v rovině pravoúhelné k ose X směrem osy Z ale zároveň v rovině pravoúhelné k ose Z směrem osy X, mysleme si (obr. 43.) dva nekonečně blízké průřezy (x), $(x + dx)$,*) jež omezují deskový prvek nosníka; tento prvek rozdělme pak rovinou (z), pravoúhelnou k ose Z,**) a přihlížejme k jednomu z obou dílů, třeba k hořejšímu. Aby tento díl prvku deskového, vyňatý z nosníka, zachoval původní stav rovnováhový, musíme připojiti síly vnitřní, jimiž okolní hmota před vynětím působila ve hmotu dotčeného dílu. Z příslušných výminek rovnováhy užijme jen jedné, žádající, by součet složek, působících směrem osy X, rovnal se nulle.



Obr. 43.

Směrem osy X působí tyto síly vnitřní:

1. v každý prvek obrazce $\left\{\begin{matrix} m_1\, m_2\, e \\ m_1'\, m_2'\, e' \end{matrix}\right\}$, obsaženého v průřezu $\left\{\begin{matrix} (x) \\ (x+dx) \end{matrix}\right\}$ nad příčkou $\left\{\begin{matrix} m_1\, m_2 \\ m_1'\, m_2' \end{matrix}\right\}$, síla normalná $\left\{\begin{matrix} -n \\ n' \end{matrix}\right\}$ ***); síly tyto nechť mají výslednici $\left\{\begin{matrix} -N_z \\ N_z' \end{matrix}\right\}$;

2. v každý prvek obrazce $m_1\, m_2\, m_2'\, m_1'$, obsaženého v rovině (z) mezi přímkami $m_1\, m_2$, $m_1'\, m_2'$, síla tangencialná $-t_y$; výslednicí těchto sil budiž $-\mathfrak{T}_y$. Dotčenou výminku rovnováhy lze tedy napsati takto:

$$-N_z + N_z' - \mathfrak{T}_y = 0.$$

Leč

$$N_z' = N_z + \frac{\partial N_z}{\partial x}\, dx;\ \dagger)$$

---

*) Roviny průřezů (x), $(x + dx)$ označeny jsou v obr. 43. písmeny ξ, ξ'.

**) Rovina (z) seče rovinu $\left\{\begin{matrix} \xi \\ \xi' \end{matrix}\right\}$ v přímce $\left\{\begin{matrix} m_1\, m_2 \\ m_1'\, m_2' \end{matrix}\right\}$.

***) Píšeme $\left\{\begin{matrix} -n \\ n' \end{matrix}\right\}$, poněvadž při průřezu $\left\{\begin{matrix} (x) \\ (x+dx) \end{matrix}\right\}$ odnímáme hmotu na $\left\{\begin{matrix} \text{negativné} \\ \text{positivné} \end{matrix}\right\}$ straně osy X.

†) Přecházejíce od N_z ku N_z' měníme pouze x, nikoli z; proto tu běží o částečný differencial síly N_z dle x.

hledíce pak k dotčené svrchu hypothesi a dále k tomu, že rozměr $\overline{m_1 m_1'} = \overline{m_2 m_2'} = d x$ obrazce $m_1 m_2 m_2' m_1'$ jest nekonečně malý, můžeme napětí τ_y pokládati za stejné ve všech bodech tohoto obrazce a psáti

$$\mathfrak{T}_y = \tau_y \,.\, 2\,\eta\, d x,$$

kde $\eta = \overline{m_0 m_1}$ jest souřadnice obvodového bodu m_1 tetivy $m_1 m_2$.

Vložíme-li to v onu výminku rovnováhy, obdržíme

$$\tau_y \,.\, 2\,\eta = \frac{\partial N_z}{\partial x}.$$

Uvažme dále, že

$$N_z = \sum_z^e n = \int_z^e v\, d u,$$

kde e znamená největší hodnotu souřadnice z na hořejší straně průřezu; poněvadž

$$v = -\frac{M z}{J},$$

máme

$$N_z = -\frac{M}{J}\,\mathfrak{M}_z,$$

kde

$$\mathfrak{M}_z = \int_z^e z\, d u = 2 \int_z^e \eta\, z\, d z$$

jest statický moment dílu průřezového $m_1 m_2 e$ vzhledem k ose Y. Poněvadž jde o nosník prismatický, jsou veličiny J, $\mathfrak{M}_z$ na x nezávislé a

$$\frac{\partial N_z}{\partial x} = -\frac{\mathfrak{M}_z}{J}\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\mathfrak{M}_z}{J}\,T$$

(viz rovnici 8.), pročež

$$\tau_y \,.\, 2\,\eta = -\frac{T\,\mathfrak{M}_z}{J},$$

$$\tau_y = -\frac{T\,\mathfrak{M}_z}{2\,J\,\eta}. \qquad (100)$$

O správnosti znaménka na pravé straně těchto rovnic nutno se přesvědčiti zvlášť, jak níže učiníme.

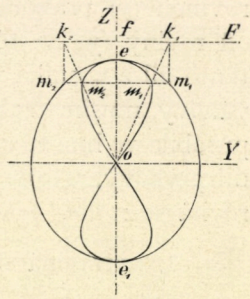
Součin $\tau_y \,.\, 2\,\eta$ neboli $\tau_y \,.\, 2\,\eta \,.\, 1$ znamená sílu tangencialnou $\mathfrak{T}_1$ na veškerou šířku $2\,\eta$ průřezu a na délku rovnou jedničce, t. j. sílu tangencialnou připadající na obrazec obsažený v rovině (z) mezi průřezy (x), $(x + 1)$ a mezi povrchem nosníkovým, myslíme-li si, že jest napětí τ_y na

délkovou jedničku stálé, nebo že τ_y znamená hodnotu střední, průměrnou. Můžeme tedy psáti

$$(100') \ldots\ldots\ldots\ldots \mathfrak{T}_1 = -\frac{T\,\mathfrak{M}_z}{J}.$$

Jak rovnice tato ukazuje, mění se síla $\mathfrak{T}_1$ s pořadnicí z a to úměrně ku statickému momentu $\mathfrak{M}_z$. Co tohoto momentu se týče, jest za $z = e$ moment $\mathfrak{M}_e = \emptyset$; ubývá-li souřadnice z od e k nulle, roste $\mathfrak{M}_e$ a nabývá za $z = \emptyset$ maxima $\mathfrak{M}_0$, což jest statický moment dílu průřezového nad osou Y. Klesne-li z pod nullu, tedy na hodnotu negativnou, přibude sice plochy $m_1\, m_2\, e$, ale statický moment přírostku jest negativný, pročež momentu $\mathfrak{M}_z$ počne ubývati a ubývá ho stále, klesá-li z napořád; za krajní hodnoty $z = -e_1$ jest zase $\mathfrak{M}_{-e_1} = \emptyset$ jakožto statický moment veškerého průřezu vzhledem k ose Y, jež obsahuje těžiště průřezové o. Moment $\mathfrak{M}_z$ mění se tedy spojitě mezi nullou a hodnotou $\mathfrak{M}_0$, jsa stále positivný.

O síle $\mathfrak{T}_1$ možno dle toho říci, že prostá její hodnota za $z = e$, $-e_1$ rovná se nulle; že roste, klesá-li prostá hodnota pořadnice z, a že dostupuje maxima za $z = \emptyset$.



Obr. 44.

Připomenutí. Z obrazce průřezového možno odvoditi obrazec, jehož obsah za proměnného z mění se úměrně k momentu $\mathfrak{M}_z$.

Veďme (obr. 44.) v přiměřené vzdálenosti $\overline{o\,f} = f$ (obyčejně bývá se $f = e$) od osy Y přímku F k ose té rovnoběžnou, a promítněme tetivu $m_1\, m_2$ pravoúhelně na F do $k_1\, k_2$, tuto projekci pak centralně s bodu o na tetivu $m_1\, m_2$, tak že vznikne průmět $\overline{\mathfrak{m}_1\, \mathfrak{m}_2} = 2\,\mathfrak{y}$. Postupujíce tímto způsobem při různých tetivách, odvodíme z obvodu průřezového $\ldots m_1\, e\, m_2 \ldots$ obvod $\ldots \mathfrak{m}_1\, e\, \mathfrak{m}_2 \ldots$ nového obrazce tak, že

$$\frac{\mathfrak{y}}{\eta} = \frac{z}{f}, \qquad f\,\mathfrak{y} = \eta\, z,$$

$$\mathfrak{M}_z = 2\int_z^e \eta\, z\, dz = 2f\int_z^e \mathfrak{y}\, dz = f\,\mathfrak{U}_z,$$

znamená-li $\mathfrak{U}_z$ obsah ležícího nad tetivou $m_1\, m_2$ dílu $\mathfrak{m}_1\, e\, \mathfrak{m}_2$ obrazce odvozeného. Moment $\mathfrak{M}_z$ jest tedy vyjádřen příslušným obsahem $\mathfrak{U}_z$ a stálým činitelem f.

Co se týče napětí τ_y samého, mění se toto s pořadnicí z a to úměrně k podílu $\frac{\mathfrak{M}_z}{\eta}$. Za $z = e$ jest tento podíl vždy roven nulle, obdobně za $z = -e_1$, ať jest průřez tvaru jakéhokoli.*) Jestliže z od hodnoty e klesá,

*) Jest-li za $z = e$ pořadnice $\eta = \emptyset$, vychází tu sice $\frac{\mathfrak{M}_z}{\eta} = \frac{\emptyset}{\emptyset}$; leč za $z = e - dz$ má podíl $\frac{\mathfrak{M}_z}{\eta}$ hodnotu $\frac{2\,\eta\, dz\,.\,e}{\eta} = 2\,e\, dz$ a tedy mizí zároveň se z.

tu onen podíl, jsa stále positivný, z počátku roste; leč p o k u d se ta děje, záleží na tvaru průřezovém. Jest-li η stálé (průřezem obdélník), mění se onen podíl úměrně k momentu $\mathfrak{M}_z$ a dostupuje maxima za $z = \emptyset$. Jestliže η za klesajícího z klesá až k ose Y, roste podíl onen napořád a nabývá maxima tolikéž za $z = \emptyset$. Jestliže však η za klesajícího z roste, může onen podíl dostoupiti maxima i za hodnoty rozdílné od nully, jak níže ještě seznáme. Celkem lze říci, že *napětí* τ_y *v místech průřezových od osy* Y *nejvzdálenějších rovná se nulle a že prostá hodnota jeho k ose* Y *z počátku roste; největší prosté hodnoty nabývá* τ_y *v praktických případech nejčastěji — ale ne vždycky — v ose* Y.

Postupme dále k napětí τ_z, jež se namítá nejen v rovině pravoúhelné k ose X směrem osy Y, ale i v rovině pravoúhelné k ose Y směrem osy X. Mysleme si zase deskový prvek nosníka, obsažený mezi průřezy (x), $(x + dx)$ (obr. 43.), vyjměme z něho prvek vyššího řádu, obsažený mezi rovinami (z), $(z + dz)$ pravoúhelnými k ose Z a rozdělme tento prvek rovinou (y) pravoúhelnou k ose Y; přihlížejme pak k dílu, položenému od roviny (y) na té straně, kam míří positivná polovice osy Y. Jest-li tento díl z nosníka vyňat, a chceme-li zachovati původní jeho stav rovnováhový, musíme zase připojiti síly vnitřní, kterými vůkolní hmota odňatá působila ve hmotu zůstalou. Z výminek rovnováhy sil, jež působí v dotčený díl prvkový, užijme zde jen té, jež vyslovuje, že součet sil směrem osy X rovná se nulle. Směrem osy X působí tyto vnitřní síly:

1. normalná síla $\left\{\begin{matrix} -n \\ n' \end{matrix}\right\}$ v prvek $\left\{\begin{matrix} m\,p\,p_1\,m_1 \\ m'\,p'\,p_1'\,m_1' \end{matrix}\right\}$ průřezu $\left\{\begin{matrix} (x) \\ (x+dx) \end{matrix}\right\}$,
2. tangencialná síla $\left\{\begin{matrix} -t_y \\ t_y' \end{matrix}\right\}$ v prvek $\left\{\begin{matrix} m\,m_1\,m_1'\,m' \\ p\,p_1\,p_1'\,p' \end{matrix}\right\}$ roviny $\left\{\begin{matrix} (z) \\ (z+dz) \end{matrix}\right\}$,
3. tangencialná síla $-t_z$ v prvek $m\,p\,p'\,m'$ roviny (y).

Máme tedy výminku rovnováhy:

$$-n + n' - t_y + t_y' - t_z = \emptyset$$

neboli

$$t_z = n' - n + t_y' - t_y = \frac{\partial n}{\partial x}\,dx + \frac{\partial t_y}{\partial z}\,dz.$$

Leč

$$t_z = \tau_z\,dx\,dz,$$

$$n = \nu\,(\eta - y)\,dz, \quad \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial \nu}{\partial x}\,(\eta - y)\,dz,$$

kdežto

$$\nu = -\frac{M\,z}{J}, \quad \frac{\partial \nu}{\partial x} = -\frac{T\,z}{J};$$

dále

$$t_y = \tau_y\,(\eta - y)\,dx = -\frac{T\,\mathfrak{M}_z}{2\,J}\,\frac{\eta - y}{\eta}\,dx,$$

$$\frac{\partial t_y}{\partial z} = -\frac{T}{2\,J}\left(\frac{\eta - y}{\eta}\,\frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial z} + \mathfrak{M}_z\,\frac{y}{\eta^2}\,\frac{d\eta}{dz}\right)dx,$$

kdežto

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial z} = -2\,\eta\,z.$$

Vložíme-li to v dotčenou svrchu výminku rovnováhy, vyjde

$$\tau_z = -\frac{T\mathfrak{M}_z}{2\,J\,\eta}\,\frac{y}{\eta}\,\frac{d\,\eta}{d\,z};$$

hledíc k rovnici (100) možno pak psáti

$$(101) \ldots\ldots\ldots\ldots \tau_z = \tau_y \frac{y}{\eta} \tan\varphi,$$

kde φ jest úhel, jejž tečna k obvodu průřezovému v bodě m_1 svírá s osou Z.

Z obou složek τ_y, τ_z možno stanoviti výsledné napětí tangencialné $\tau_{(x)}$ v kterémkoli bodě průřezovém m. Velikost výsledného napětí dána jest rovnicí

$$\tau_{(x)} = \pm\sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2} = \pm\tau_y\sqrt{1 + \left(\frac{\tau_z}{\tau_y}\right)^2};$$

užijeme-li pak rovnice (101), obdržíme

$$(102) \ldots\ldots\ldots \tau_{(x)} = \pm\tau_y\sqrt{1 + \frac{y^2}{\eta^2}\tan^2\varphi};$$

toto napětí působí v přímce, jež má od osy Z odchylku ψ, kterou vyjadřuje rovnice

$$\tan\psi = \frac{\tau_z}{\tau_y} = \frac{y\tan\varphi}{\eta}.$$

Jak patrno, platí tu relace

$$y\cot\psi = \eta\cot\varphi = \overline{q\,m_0},$$

z čehož vyplývá, že napětí $\tau_{(x)}$ v bodě m tetivy $m_1\,m_2$ působí v přímce $m\,q$ (obr. 43.). *Jestliže tedy, jako jsme položili, napětí τ_y má touž hodnotu ve všech bodech tetivy $m_1\,m_2$, pak napětí $\tau_{(x)}$, jež náleží k libovolnému bodu m této tetivy, působí v příslušném paprsku svazku (q), jehožto středem jest průsečík osy Z s tečnou v obvodovém bodě m_1 neb m_2 téže tetivy.*

Připomenutí. Že napětí $\tau_{(x)}$ v obvodovém bodě m_1 nemůže působiti jinak než v tečně $m_1\,q$, vyplývá již z vět obecné theorie pružnosti. Budiž A tečna, B normála obvodu průřezového v bodě m_1. Kdyby napětí $\tau_{(x)}$ nepůsobilo v tečně A, mohlo by se rozložiti ve složky: τ_{xa} směrem tečny A a τ_{xb} směrem normály B. Napětí τ_{xb} působící v rovině pravoúhelné ku X směrem B jest však provázeno rovným napětím τ_{bx} působícím v rovině pravoúhelné ku B (tečné

to rovině k povrchu nosníka) směrem osy X [viz rovnice (1) § 3.]; takového napětí však tu býti nemůže, nepůsobí-li na povrchu nosníka směrem osy X síla zevnitřní, s kterou by příslušná síla vnitřní se rušila. Proto musí $\tau_{bx} = 0$ a tedy $\tau_{xb} = 0$; $\tau_{(x)}$ působí v tečně A. — Že napětí $\tau_{(x)}$ v bodě m_0 osy Z nemůže působiti než v této ose, vyplývá z toho, že nosník i síly zevnitřní jsou souměrny vzhledem k rovině $X\,Z$. —

V rovnici (102) voliti jest z obou předložených znamének to, jež činí pravou stranu positivnou. Položí se tedy $\left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}$, jest-li τ_y $\left\{\begin{matrix}\text{positivné}\\\text{negativné}\end{matrix}\right\}$.*) Rovnice (102) ukazuje, že — přihlížíme-li k bodům určité tetivy $m_1 m_2$, stanovené jistou pořadnicí z — jest napětí $\tau_{(x)}$ minimum za $y = 0$, totiž v bodě m_0, rovnajíc se prosté hodnotě napětí τ_y (τ_z rovná se tu nulle); maximum pak vychází za $y = \pm\eta$, totiž v bodech obvodových m_1, m_2, mající hodnotu

$$\tau'_{(x)} = \pm\tau_y \sqrt{1 + \tan^2\varphi} = \pm\frac{\tau_y}{\cos\varphi}$$

nebo, vložíme-li sem hodnotu τ_y,

$$(103) \quad \tau'_{(x)} = \pm\frac{T\,\mathfrak{M}_z}{2\,J\,\eta\cos\varphi}.$$

Jestliže vzdálenost $\overline{m_0 d}$ rozpolovacího bodu m_0 tetivy $m_1 m_2$ od tečny $m_1 q$ krátce znamenáme písmenem d, jest

$$d = \eta\cos m_1 m_0 d = \eta\cos m_0 q\, m_1 = \eta\cos\varphi,$$

tak že možno psáti

$$(103') \quad \tau'_{(x)} = \pm\frac{T\,\mathfrak{M}_z}{2\,J\,d}.$$

N e j v ě t š í h o d n o t y $\tau'_{(x)}$ napětí $\tau_{(x)}$ namítají se tedy v o b v o d o v ý c h b o d e c h p r ů ř e z u; postupujeme-li po obvodě bod od bodu, mění se $\tau'_{(x)}$ úměrně k podílu

$$\frac{\mathfrak{M}_z}{d}.$$

*Za $z = e$ jest $\tau'_{(x)} = 0$**); klesá-li z, roste $\tau'_{(x)}$ z počátku a dospívá maxima nejčastěji — ale nikoli vždycky — za $z = 0$.* Zákon proměny závisí na formě průřezové. —

---

*) Jak známo, jest $\tau_{(x)}$ veličina p r o s t á.

**) To platí, i když za $z = 0$ jest $d = 0$; neboť za $z = e - d\,z$ máme

$$\mathfrak{M}_z = 2\,\eta\,d\,z\,.\,e, \quad d = \eta\cos\varphi = \eta\frac{d\,z}{d\,s},$$

tedy

$$\frac{\mathfrak{M}_z}{d} = 2\,e\,d\,s,$$

kteryžto podíl mizí zároveň s $d\,s$.

Přihlížejíce k dílu průřezovému $m_1 m_2 e$, obsaženému nad tetivou $m_1 m_2$, stanovme výslednici vnitřních sil tangencialných, jež působí v tento díl. V bodech m k ose Z souměrných, myslíme-li si při nich i souměrné prvky plošné, působí souměrné vnitřní síly tangencialné $t_{(x)}$; složky jejich t_y, t_z jsou tolikéž souměrné vzhledem k ose Z; t_y mají směr souhlasný a sčítají se u výslednici působící v ose Z; t_z mají směry protivné a ruší se vzájemně. Myslíme-li si prvek plošný tvaru proužkového, obsažený mezi tetivou $m_1 m_2$, jíž náleží pořadnice z, a pořadnicí nekonečně blízkou, působí v něj výsledná síla tangencialná

$$t = \tau_y \, d\,u = 2\,\tau_y \, \eta \, d\,z;$$

v dotčený svrchu díl průřezový nad tetivou $m_1 m_2$ působí tedy směrem osy Z výsledná síla tangencialná

$$\mathfrak{T} = 2 \int_z^e \tau_y \, \eta \, d\,z$$

anebo, hledíc k rovnici (100),

$$\mathfrak{T} = -\frac{T}{J} \int_z^e \mathfrak{M}_z \, d\,z.$$

Integrujeme-li po částech, vychází

$$\int_z^e \mathfrak{M}_z \, d\,z = -\,z\,\mathfrak{M}_z + \int_z^e z^2 \, d\,u = -\,z\,\mathfrak{M}_z + J_z,$$

znamená-li J_z moment setrvačnosti — vzhledem k ose Y — vyšetřovaného dílu průřezového nad tetivou $m_1 m_2$; proto

$$(104) \ldots\ldots\ldots\ldots \mathfrak{T} = -T\,\frac{J_z - z\,\mathfrak{M}_z}{J}.$$

Rozšíříme-li to na všechen průřez, kladouce $z = -e_1$, vyjde

$$\mathfrak{M}_z = \mathfrak{M}_{-e_1} = \emptyset, \quad J_z = J,$$

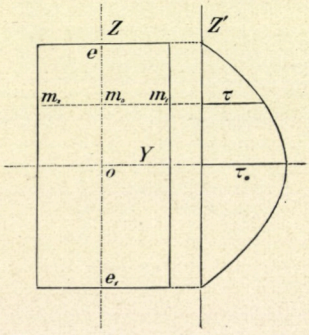
a síla $\mathfrak{T}$ nabývá hodnoty

$$T' = -T,$$

což se srovnává s třetí výminkou rovnováhy sil zevnitřních a vnitřních, jak byly vyjádřeny rovnicemi (*a*) § 22. Zároveň patrno, že jest správné znaménko minus, předložené před pravou stranu rovnice (100); napětí τ_y má ve všech bodech průřezu týž směr, protivný k síle posouvající T.

Připomenutí. Vyšetřujíce napětí tangencialné měli jsme na zřeteli nosník průřezu stálého. Jest-li průřez nosníkový proměnný, pak ve výrazu síly N_z mění se zároveň s úsečkou x nejen M ale také J, $\mathfrak{M}_z$, pročež derivujíce výraz N_z dle x dospíváme k výsledku mnohem komplikovanějšímu. Nemění-li se však průřez x příliš rychle, totiž jestliže tečny čar, v nichž roviny, obsahující osu nosníka, pronikají povrch jeho, jsou jen málo odchýleny od osy X, možno výsledků, vyvozených tuto pro nosníky prismatické, užívati přibližně též při nosnících průřezu proměnného.

§ 39. **O napětí tangencialném při zvláštních formách průřezových.** Jest-li průřezem obdélník mající stranu $\left\{\begin{matrix} b \\ h \end{matrix}\right\}$ rovnoběžnou s osou $\left\{\begin{matrix} Y \\ Z \end{matrix}\right\}$ (obr. 45.), působí ve všech bodech tetivy $m_1 m_2$, rovnoběžné s osou Y, napětí $\tau_{(x)}$ směrem osy Z; bod q jest v nekonečné vzdálenosti;



Obr. 45.

$$\tau_{(x)} = \pm \tau_y, \quad \tau_z = 0.$$

Myslíme-li si rovinami, rovnoběžnými s rovinou XZ, nosník rozdělený v μ rovných dílů zšíři $\frac{b}{\mu}$ a zvýši h, mají se všecky tyto díly stejně, ač jest-li obtížení rozděleno rovnoměrně po šířce b, a nedbáme-li vzájemného působení dílů sousedních. Z toho plyne, že hypothesis, na které jsme svrchu založili vyšetřování napětí tangencialného (že totiž τ_y nezávisí na souřadnici y), při obdélníku hoví skutečnosti velmi přibližně.

Poněvadž

$$e = \frac{h}{2},$$

máme

$$\mathfrak{M}_z = b\,(e - z)\,\frac{e + z}{2} = \tfrac{1}{2}\,b\,(e^2 - z^2),$$

$$J = \tfrac{1}{12}\,b\,h^3 = \tfrac{2}{3}\,b\,e^3,$$

$$2\,\eta = b, \quad \varphi = 0, \quad \cos\varphi = 1$$

a tedy, píšeme-li zde kratšeji τ místo $\tau_{(x)}$ a jsou-li τ a T hodnoty prosté,

$$(105) \ldots\ldots\ldots\ldots \tau = \frac{3}{4}\,\frac{T}{b\,e^3}\,(e^2 - z^2).$$

Pokládáme-li z za úsečku, τ za pořadnici, stanoví rovnice (105) parabolu řádu 2. (obr. 45.), kterou nazývejme parabolou napětí tangencialného; osa její sjednocuje se s osou souřadnicovou Y.

Товариство Українських студентів вис. шкіл техніч. „ОСНОВА“ в Празі

Největší hodnota napětí náleží k úsečce $z = 0$; jest to

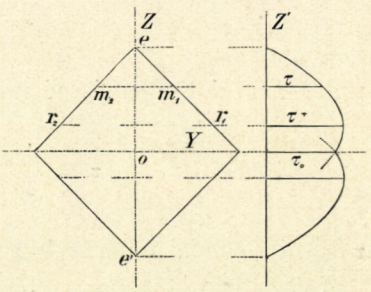
$$(106) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tau_0 = \frac{3}{4}\frac{T}{be} = \frac{3}{2}\frac{T}{bh}.$$

Podílem $\frac{T}{bh}$ vyjádřeno jest průměrné neboli střední napětí tangencialné; *největší napětí* τ_0 *jest o polovici větší.*

Připomenutí. Svrchu jsme ukázali k tomu, že výminka, na níž založeno vyšetřování napětí tangencialného, že totiž τ_y nezávisí na y, jest při obdélníku naplněna skoro přesně. Při jiných formách průřezových není tomu tak, a vyvozené výsledky jsou jen přibližné měrou tu větší, onde menší. Čím mírněji se mění η a čím menší jest prostá hodnota tan φ, tím větší jest přibližnost. Za velikých hodnot tan φ, zvláště pak při náhlých změnách šířky průřezové 2η, užívati sluší vyvozených výsledků jen velmi opatrně. —

Jest-li průřezem čtverec v poloze takové, že úhlopříčné jeho jsou obsaženy v osách Y, Z (obr. 46.), sjednocuje se bod q s vrcholem e položeným na ose Z. Tu plocha $m_1 m_2 e = (e - z)^2$, a její těžiště má od osy Y vzdálenost $\frac{e + 2z}{3}$; tedy

$$\mathfrak{M}_z = \tfrac{1}{3}(e - z)^2 (e + 2z),$$
$$J = \tfrac{1}{3} e^4, \quad \eta = e - z, \quad \varphi = -45^0,$$
$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}},$$



Obr. 46.

a proto napětí tangencialné na obvodě

$$(107) \ldots \tau = \frac{T\sqrt{2}}{2e^4}(e - z)(e + 2z).$$

Jak patrno, jest čára napětí τ v dílu průřezovém nad osou Y zase parabola řádu 2., jejíž osa jest rovnoběžná s Y; v dílu pod osou Y obdržíme parabolu k oné souměrnou vzhledem k ose Y (obr. 46.).

Znamenáme-li

$$f(z) = (e - z)(e + 2z),$$

a položíme-li derivaci

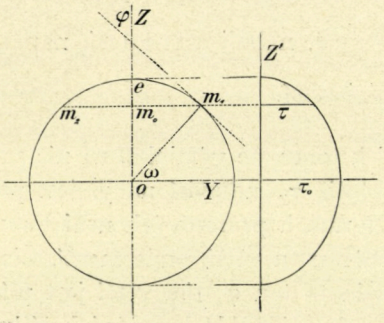
$$f'(z) = e - 4z$$

rovnou nulle, seznáme, že max τ náleží k pořadnici $z = \frac{e}{4}$ a má hodnotu

$$\max \tau = \frac{9\sqrt{2}}{16}\frac{T}{e^2}$$

anebo

$$(108) \ldots\ldots\ldots \max \tau = \frac{9\sqrt{2}}{8} \frac{T}{a^2} = 1{\cdot}59 \frac{T}{a^2}.$$



Obr. 47.

Čtverec takto položený jest příkladem průřezu, kde max τ nevyskytuje se v ose Y. —

Jde-li o průřez kruhový poloměru r (obr. 47.), užijeme výhodně souřadnic polárních ω, r; položme tedy

$$z = r \sin \omega, \quad \eta = r \cos \omega, \quad dz = r \cos \omega \, d\omega;$$

tak vychází

$$\mathfrak{M}_z = 2 \int_z^e \eta \, z \, dz = 2 r^3 \int_\omega^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \omega \sin \omega \, d\omega = \tfrac{2}{3} r^3 \cos^3 \omega,$$

$$J = \frac{\pi}{4} r^4, \quad \varphi = -\omega;$$

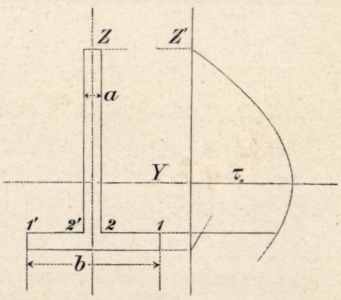
proto napětí tangencialné na obvodě

$$(109) \ldots\ldots\ldots \tau = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} \cos \omega = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^3} \eta;$$

τ mění se tedy úměrně k η. Pokládáme-li z za úsečku, τ za pořadnici, obdržíme tuto, znásobíme-li η konstantou $\frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^3}$. V dané kružnici náleží k úsečce z pořadnice η; znásobíme-li pořadnice kružnice, vztažené k průměru, stálým poměrem, vzniká ellipsa; čára napětí tangencialného v průřezu kruhovém jest elliptická (obr. 47.). Největší napětí náleží k těm obvodovým bodům, jež jsou obsaženy v ose Y ($\omega = 0$, $\eta = r$), a má hodnotu

$$(110) \ldots \tau_0 = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2},$$

jsouc o třetinu větší než napětí střední.



Obr. 48.

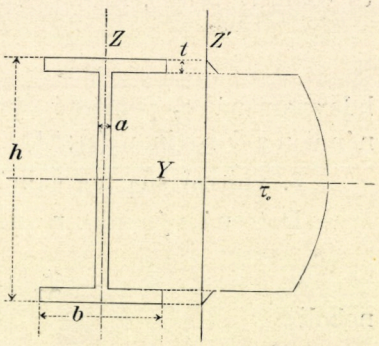
Jde-li o průřez naznačený v obr. 48., skládající se ze dvou obdélníků, skládá se čára napětí tangencialného dle vyložené tuto theorie

ze dvou oblouků parabolických; tam, kde šířka a průřezu přechází náhle v šířku b, máme dvě hodnoty τ_a, τ_b, jichž poměr

$$\frac{\tau_a}{\tau_b} = \frac{b}{a}.$$

Leč při takovém náhlém přechodu vyložená tu theorie pozbývá platnosti; v bodech 1, 1′, v kterých možno vésti k obvodu nekonečně mnoho tečen (přímek jdoucích bodem 1 či 1′ a neprotínajících příslušného dílu průřezového), jest směr napětí tangencialného neurčitý — neshoda to, jež mizí jen, rovná-li se napětí tangencialné v těchto bodech nulle. V sousedství přímek 1 2, 1′ 2′ platí tedy jiný zákon napětí tangencialného. Největší napětí tangencialné namítá se v ose Y.

Jde-li o průřez naznačený v obr. 49., složený ze tří obdélníků, skládá se čára napětí tangencialného ze tří oblouků parabolických; v místech, kde šířka průřezu náhle se mění, výsledky tyto ovšem nemají platnosti.



Obr. 49.

Největší napětí tangencialné vyskytuje se v ose Y a má hodnotu

$$(111) \ldots \tau_0 = \frac{T\,\mathfrak{M}_0}{J\,a},$$

kde

$$\mathfrak{M}_0 = \tfrac{1}{8}\,(b\,h^2 - b'\,h'^2).$$

Jde-li o pohodlný výraz příbližný, položme

$$\mathfrak{M}_0 \doteq \tfrac{1}{2}\,b\,t\,(h - t),$$

nedbajíce tu stěny střední; za moment setrvačnosti položme hodnotu příbližnou

$$J = \tfrac{1}{2}\,b\,t\,h^2,$$

jež byla odvozena v § 25. Tak vyjde

$$\tau_0 \doteq \frac{T}{a\,h}\,\frac{h - t}{h};$$

nedbáme-li pak tloušťky t proti výšce h, máme ještě pohodlnější výraz

$$(111') \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \tau_0 \doteq \frac{T}{a\,h}.$$

§ 40. **O normalném napětí směrem osy Z.** Na počátku § 22. bylo zmíněno, že kromě napětí ν_x (jež jsme pak znamenali krátce písmenem ν bez přípony) a napětí τ_y, τ_z obecně mohou působiti ještě napětí ν_y, ν_z,

τ_x, že však bývají rovna nulle neb aspoň nepatrna proti oněm. Napětí ν_y nemůže míti hodnot značnějších, poněvadž není zevnitřních sil směrem osy Y; též τ_x může býti jen nepatrné; ν_z však vzniká přímým tlakem obtížení v nosník a může míti hodnoty patrnější. Přihlédněme k tomuto napětí pokládajíce, že ve všech bodech tetivy $m_1 m_2$, rovnoběžné s osou Y, má hodnotu stejnou.*)

Tak jako v § 38. (obr. 43.) mějme na zřeteli prvek nosníkový, obsažený mezi průřezy (x), $(x + d x)$ a nad rovinou (z); užijme pak výminky rovnováhové vyjadřující, že součet sil směrem osy Z rovná se nulle.

Směrem osy Z působí:

1. síly vnitřní tangencialné $\left\{ \begin{matrix} -t_y \\ t'_y \end{matrix} \right\}$ v rovinách $\left\{ \begin{matrix} (x) \\ (x+ d x) \end{matrix} \right\}$; výslednice jejich budiž $\left\{ \begin{matrix} -\mathfrak{T}_y \\ \mathfrak{T}'_y \end{matrix} \right\}$;

2. obtížení připadající na prvek $d x$ délky nosníkové; vyloučíme-li tu osamělé břímě, máme sílu

$$d Q_z = q_z \, d x,$$

kde znamená q_z poměrné obtížení připadající dílu nosníkovému obsaženému n a d rovinou (z);**)

3. vnitřní síla normalná $-n_z$ v rovině (z).

Dotčená výminka rovnováhy jest pak

$$-\mathfrak{T}_y + \mathfrak{T}_y' - q_z \, d x - n_z = 0$$

neboli

$$n_z = \left(-q_z + \frac{\partial \mathfrak{T}_y}{\partial x} \right) d x.$$

Dle rovnice (104) § 38. však

$$\mathfrak{T}_y = -T \frac{J_z - z \mathfrak{M}_z}{J}$$

a tedy, jde-li o nosník průřezu stálého,

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_y}{\partial x} = q \frac{J_z - z \mathfrak{M}_z}{J},$$

poněvadž dle rovnice (7) § 21.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -q;$$

*) Což platí skoro přesně při průřezu obdélníkovém, rozděluje-li se obtížení rovnoměrně po šířce b — jinak jen do jisté míry přibližně.

**) Písmě q_z znamená tedy jen díl poměrného obtížení q nosníka.

dále

$$n_z = 2\,\nu_z\,\eta\,d\,x,$$

tak že z oné výminky rovnováhové plyne

$$(112)\ldots\ldots\ldots \nu_z = -\frac{1}{2\,\eta}\left(q_z - q\,\frac{J_z - z\,\mathfrak{M}_z}{J}\right).$$

Působí-li na tom místě jen vlastní váha, máme

$$q = \gamma\,U\,.\,1, \quad q_z = \gamma\,U_z\,.\,1,$$

kde U jest obsah průřezu, U_z obsah dílu průřezového nad rovinou (z); v tomto případě

$$(112^a)\ldots\ldots\ldots \nu_z = -\frac{\gamma}{2\,\eta}\left(U_z - U\,\frac{J_z - z\,\mathfrak{M}_z}{J}\right).$$

Nedbáme-li však vlastní váhy, a působí-li spojité obtížení v hořejší díl nosníka, jest $q_z = q$ a tedy

$$(112^b)\ldots\ldots\ldots \nu_z = -\frac{q}{2\,\eta}\left(1 - \frac{J_z - z\,\mathfrak{M}_z}{J}\right).$$

Nosník mějž na př. průřez obdélníkový o hlavních rozměrech b, $h = 2\,e$; tu jest

$$2\,\eta = b,\ J_z = \tfrac{1}{3}\,b\,(e^3 - z^3),\ J = \tfrac{2}{3}\,b\,e^3,\ \mathfrak{M}_z = \tfrac{1}{2}\,b\,(e^2 - z^2),$$

a rovnice (112) nabývá tvaru

$$\nu_z = -\frac{1}{b}\left[q_z - q\,\frac{(e - z)^2\,(2\,e + z)}{4\,e^3}\right],$$

rovnice (112^b) pak

$$\nu_z = -\gamma\,\frac{z\,(e^2 - z^2)}{2\,e^2}.$$

Čára napětí ν_z jest v tomto posledním případě parabolická 3. řádu; za $z = e, \emptyset, -e$ jest $\nu_z = \emptyset$; za $z \gtrless \emptyset$ jest $\nu_z \lesseqgtr \emptyset$; krajní hodnoty napětí jsou

$$\mp\,0{\cdot}192\,\gamma\,e$$

a vyskytují se ve vzdálenostech

$$z = \pm\frac{e}{\sqrt{3}} = \pm\,0{\cdot}577\,e$$

od osy Y.

MAJETEK ČESKO-UKR. KOMITÉTU V Č.S.R.

Rovnice (112ᵇ) konečně jest za průřezu obdélníkového

$$\nu_z = -\frac{q}{b}\frac{(e+z)^2(2e-z)}{4e^3}.$$

I zde jest čára napětí parabolická řádu 3. Napětí ν_z jest veskrz tlakem a mění se od nully (za $z = -e$) po $-\frac{q}{b}$ (za $z = e$); za $z = \emptyset$ vychází

$$\nu_0 = -\frac{1}{2}\frac{q}{b}.$$

Celkem shledáváme, že v případech praktických jest ν_z nepatrné proti ν_x a že ho tedy dbáti netřeba.

§ 41. **O napětích a roztaženích hlavních.** Poněvadž klademe $\nu_y = \emptyset$, $\nu_z = \emptyset$, $\tau_x = \emptyset$, namítá se tu zvláštní případ, vytčený v § 9. *a*), kde totiž jedno z hlavních napětí (ν_3) rovná se nulle; obě ostatní hlavní napětí jsou pak dána rovnicí (19ᵃ) § 9., z níž vychází

$$\left.\begin{matrix}\nu_1\\ \nu_2\end{matrix}\right\} = \frac{\nu_x \pm \sqrt{\nu_x^2 + 4(\tau_y^2 + \tau_z^2)}}{2},$$

kde za $\tau_y^2 + \tau_z^2$ možno psáti $\tau_{(x)}^2$.

Napětí ν_x má touž hodnotu ve všech bodech tetivy $m_1 m_2$, rovnoběžné s osou Y; napětí $\tau_{(x)}$ však závisí též na souřadnici y majíc největší hodnotu v obvodových bodech m_1, m_2; proto přihlížejme jen k bodům obvodovým a pišme kratšeji ν za ν_x, τ za $\tau_{(x)}$. Hlavní napětí jsou pak

$$(113)\ldots\ldots\ldots\ldots \left.\begin{matrix}\nu_1\\ \nu_2\end{matrix}\right\} = \frac{\nu \pm \sqrt{\nu^2 + 4\tau^2}}{2}.$$

Odmocnina na pravé straně této rovnice jest větší než prostá hodnota napětí ν a rozhoduje tedy znaménko příslušného napětí hlavního. Proto jest vždy $\left\{\begin{matrix}\nu_1 \text{ tah}\\ \nu_2 \text{ tlak}\end{matrix}\right\}$, nechť má znaménko positivné či negativné.

Jestliže — majíce zření ku hmotám i s o t r o p ý m — v rovnicích (29ᵃ) (str. 30.) položíme $\nu_x = \nu_1$, $\nu_y = \nu_2$, $\nu_z = \nu_3 = \emptyset$, a za ν_1, ν_2 hodnoty jejich z rovnice (113), obdržíme hlavní roztažení λ_1, λ_2, λ_3 a příslušná idealná hlavní napětí $\nu_{\mathrm{I}} = E\lambda_1$, $\nu_{\mathrm{II}} = E\lambda_2$, $\nu_{\mathrm{III}} = E\lambda_3$, totiž

$$(114)\ldots\ldots \left.\begin{matrix}\nu_{\mathrm{I}}\\ \nu_{\mathrm{II}}\end{matrix}\right\} = \frac{m-1}{2m}\nu \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{\nu^2 + 4\tau^2},$$

$$\nu_{\mathrm{III}} = -\frac{\nu}{m}.$$

Poněvadž odmocninu sluší tu vzíti prostou hodnotou, a druhý člen na pravé straně rovnice (114) jest větší než prostá hodnota členu prvního, vychází $\nu_{\mathrm{I}} > 0$, $\nu_{\mathrm{II}} < 0$, nechť ν má znaménko positivné či negativné. Z obou hlavních napětí má $\left\{\begin{matrix}\nu_{\mathrm{I}}\\ \nu_{\mathrm{II}}\end{matrix}\right\}$ větší prostou hodnotu, jest-li $\nu \gtrless 0$. Kdybychom pod odmocnidlem vynechali člen $4\tau^2$, zmenšila by se hodnota odmocniny a tím i prostá hodnota příslušného hlavního napětí ν_{I}, ν_{II}; poněvadž pak vynechání to vede k hodnotě $\left\{\begin{matrix}\nu\\ -\frac{\nu}{m}\end{matrix}\right\}$, má dle rovnice (114) jedno hlavní napětí větší prostou hodnotu než napětí ν, druhé větší prostou hodnotu než napětí $-\frac{\nu}{m}$; třetí idealné hlavní napětí ν_{III} jest tedy obsaženo mezi oběma ostatními, pročež k němu netřeba přihlížeti při výminkách bezpečné pevnosti.

Co se týče směrů S_1, S_2, S_3 napětí hlavních, jež při hmotách isotropých jsou i směry hlavních roztažení, zvolme za osu Z tečnu v obvodovém bodě m_1, v níž působí napětí $\tau_{(x)} \equiv \tau$; osou Y nechť jest hlavní normála obvodové čáry v bodě m_1; osa X budiž pravoúhelna k průřezu. Tu jest v rovnicích (5) § 6. položiti

$$\nu_x = \nu,\ \nu_y = 0,\ \nu_z = 0,$$
$$\tau_x = 0,\ \tau_y = \tau,\ \tau_z = 0;^*)$$

hlavní napětí budiž obecně označeno písmenem ν_h. Tím rovnice (5) § 6. nabývají tvaru

$$(115)\ \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{matrix}(\nu - \nu_h)\cos\alpha + \tau\cos\gamma = 0,\\ \nu_h\cos\beta = 0,\\ \tau\cos\alpha - \nu_h\cos\gamma = 0.\end{matrix}\right.$$

Z druhé vychází, že

$$\cos\beta = 0 \text{ za } \nu_h = \left\{\begin{matrix}\nu_1\\ \nu_2\end{matrix}\right\};$$

přímky S_1, S_2 jsou pravoúhelny k ose Y a tedy obsaženy v rovině XZ, jak již zmíněno bylo v § 9. *a*); proto $\cos\gamma = \sin\alpha$, tak že první z rovnic (115) dává

$$\tan\alpha = \frac{\nu_h - \nu}{\tau},$$

třetí pak

*) Napětí $\tau_y = \tau$ (jsouc tu zároveň výsledným napětím tangencialným i složkou svou do osy Z) má znaménko $\left\{\begin{matrix}+\\ -\end{matrix}\right\}$, působí-li v $\left\{\begin{matrix}\text{positivném}\\ \text{negativném}\end{matrix}\right\}$ směru osy Z.

$$\tan \alpha = \frac{\tau}{\nu_h};$$

kteréžto výrazy se rovnají, jest-li $\nu_h = \left\{ \begin{matrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{matrix} \right\}$, jak ukazuje rovnice (19ª) § 9.

Vložíme-li do prvého z nich za ν_h výraz obsažený v rovnici (113), obdržíme

$$(116) \ldots\ldots\ldots \tan \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{matrix} \right\} = \frac{-\nu \pm \sqrt{\nu^2 + 4\tau^2}}{2\tau};$$

$\left\{ \begin{matrix} \text{vrchní} \\ \text{spodní} \end{matrix} \right\}$ znaménko náleží ku přímce $\left\{ \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \end{matrix} \right\}$.

Jak patrno, jest α_1 úhel $\left\{ \begin{matrix} \text{ostrý} \\ \text{tupý} \end{matrix} \right\}$, α_2 $\left\{ \begin{matrix} \text{tupý} \\ \text{ostrý} \end{matrix} \right\}$, má-li τ znaménko $\left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\}$.

Znásobením obou svrchu položených výrazů $\tan \alpha$ vychází

$$\tan^2 \alpha = \frac{\nu_h - \nu}{\nu_h}, \quad 1 - \tan^2 \alpha = \frac{\nu}{\nu_h};$$

dle druhého výrazu jest

$$2 \tan \alpha = \frac{2\tau}{\nu_h};$$

dělením vyplývá

$$(117) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tan 2\alpha = \frac{2\tau}{\nu}.$$

Hoví-li rovnici (117) úhel $2\alpha'$ obsažený v prvních dvou čtvernících, hoví jí též úhel $2\alpha' + 180^0$; rovnice dává tedy dva úhly α', $\alpha' + 90^0$, jež se liší o úhel pravý, jak tomu při hlavních napětích býti musí. Který z nich jest α_1 a který α_2, rovnice (117) nestanoví; v té příčině rozhoduje rovnice (116).

Co se týče přímky S_3, k níž náleží třetí hlavní roztažení (příslušné hlavní napětí $\nu_3 = 0$), dávají rovnice (115)

$$\cos \alpha = 0, \quad \cos \gamma = 0;$$

S_3 sjednocuje se tedy s osou Y, jak tomu býti musí, poněvadž S_3 jest pravoúhelné k S_1, S_2.

Rovnice (114) dává největší idealný tah a tlak v určitém bodě obvodu průřezového, známe-li hodnoty ν, τ v témž bodě.

Čára napětí ν jest přímá, čára napětí τ závisí na formě průřezové; na této závisí tedy ovšem i čáry idealných napětí hlavních ν_I, ν_{II}.

V rovnici (114) jest obsažena Poissonova konstanta m (§ 13.); klademe-li $m = 3$, vychází

$$(114^a) \quad \left.\begin{matrix} \nu_I \\ \nu_{II} \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{3}\,\nu \pm \tfrac{2}{3}\sqrt{\nu^2 + 4\,\tau^2};$$

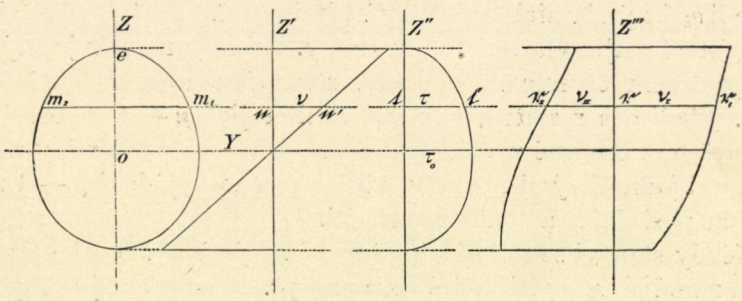
hodnota $m = 4$ vede k rovnici

$$(114^b) \quad \left.\begin{matrix} \nu_I \\ \nu_{II} \end{matrix}\right\} = \tfrac{3}{8}\,\nu \pm \tfrac{5}{8}\sqrt{\nu^2 + 4\,\tau^2}.$$

Z rovnic (114^a), (114^b) dává onano větší poněkud prosté hodnoty napětí ν_I, ν_{II}; pročež budiž jí dále užíváno.

Za $z = 0$ jest $\nu = 0$, $\tau = \tau_0$, což bývá obyčejně největší hodnotou napětí tangencialného. Z toho plyne

$$(118) \quad \left.\begin{matrix} \nu_I \\ \nu_{II} \end{matrix}\right\} = \pm \tfrac{4}{3}\,\tau_0.$$



Obr. 50.

Za $z = \left\{\begin{matrix} e_1 \\ -e_2 \end{matrix}\right\}$, kde e_1, e_2 jsou vzdálenosti krajních míst průřezových od osy Y, má ν největší prostou hodnotu; v těchto místech $\tau = 0$ a tedy

$$(119) \quad \begin{cases} \nu_I = \pm\,\nu, \\ \nu_{II} = \mp\,\dfrac{\nu}{3}, \end{cases}$$

kde platí $\left\{\begin{matrix} \text{vrchní} \\ \text{spodní} \end{matrix}\right\}$ znaménko, jest-li ν $\left\{\begin{matrix} \text{positivné} \\ \text{negativné} \end{matrix}\right\}$.

V obrazci 50. naznačeny jsou čáry (ν), (τ), (ν_I), (ν_{II}).

Roste-li prostá hodnota z od nully počínajíc, přibývá prosté hodnoty napětí ν a obyčejně ubývá napětí τ; jak se při tom mění ν_I, ν_{II}, a kde nabývají největších prostých hodnot, záleží na formě průřezové. Poněvadž napětí tangencialné záleží na rozdílu napětí normalných v posloupných průřezech, bývá obyčejně jen malé proti normalnému; jsou tedy případy velmi časté, kde největší prosté hodnoty idealných napětí hlavních náležejí

k souřadnicím $z = \left\{ \begin{matrix} e_1 \\ -e_2 \end{matrix} \right\}$; poněvadž pak největší tyto prosté hodnoty rovnají se příslušným hodnotám napětí ν, netřeba pak vůbec dbáti napětí tangencialného a tedy účinku síly posouvající. V těchto případech, kde stačí přihlížeti jen k účinku momentu ohybového, totiž k napětí normalnému, mluvíme o prosté pružnosti v ohybu (viz § 21.).

Jest-li v některém případě napětí normalné jen malé, tangencialné pak poměrně veliké (buďto že síla posouvající jest veliká nebo že rozměr η klesá místy na malou hodnotu), přihlížeti jest jen k účinku síly posouvající (prosté pružnosti ve smyku). Jen zřídka bývá potřebí dbáti současného působení momentu ohybového i síly posouvající a tedy napětí normalného i tangencialného (kombinace smyku s ohybem).

§ 42. **Kterak se stanoví a posuzují průřezové rozměry nosníků.** Rozměry průřezové stanoviti jest z výminky, že největší prostá hodnota idealného napětí hlavního ν_h v nižádném průřezu nesmí přestoupiti příslušného součinitele k bezpečné pevnosti. Položíme-li tedy $\pm \nu_h = k$ a vyjádříme-li ν_h danými veličinami a neznámými rozměry průřezovými, obdržíme rovnici, které mají vyhověti tyto rozměry. Jde-li o rozměr jediný (na př. jest-li průřezem čtverec nebo kruh), stanovíme rozměr ten řešíce onu rovnici. Jde-li o μ rozměrů, pak buď zvolme jich $\mu - 1$ a poslední ustanovme řešením dotčené rovnice, anebo zaveďme určité poměry neb i jiné relace mezi jednotlivými rozměry, tak že možno vyjádřiti $\mu - 1$ rozměrů rozměrem posledním a tento ustanoviti.

Někdy stanoví se rozměry průřezové z výminky, že přetvoření nosníka nemá přestoupiti určité meze, na př. že poměr největší pořadnice křivky ohybové k délce nosníka nemá vystoupiti nad jistou krajní hodnotu. V tomto případě užívá se obdobně rovnic vyjadřujících největší pořadnici křivky ohybové.

Kladouce v rovnici výminkovou číselné hodnoty známých veličin, musíme toho dbáti, aby se shodovaly jedničky, jimiž vyjadřujeme veličiny stejnorodé nebo vzájemně se vztahující. Tak na př. v rovnici (11)

$$\frac{J}{e} = \frac{M}{k}$$

(§ 22.), z níž počítáme rozměry průřezové, jde-li o t. zv. prostou pružnost v ohybu, musíme, vyjádřeno-li k kilogrammy na cm^2, vyjádřiti M v centimetrokilogrammech (nikoli v metrokilogrammech) a obdržíme neznámý rozměr v cm. — Jest-li na př. v rovnici (37)

$$y_0 = \frac{5}{384} \frac{q\, l^4}{E\, J}$$

dán modul E v kg na cm^2, vyjádří se J v cm^4, tak že $E\,J$ znamená součin síly (kg) a plošného obsahu (cm^2); dáno li pak q v kg na m, nutno

v mocnině l^4 jednoho činitele l vyjádřiti v m, tak že $q\,l = Q$ znamená sílu v kg; další dva činitele l^2 nutno však vyjádřiti v cm; poslední činitel l mohl by se vyjádřiti kteroukoli jedničkou délkovou; touž jedničkou bude pak vyjádřeno vypočtené y_0. Pohodlnější jest užiti tvaru

$$y_0 = \frac{5}{384}\,\frac{Q\,l^3}{E\,J}$$

a vyjádřiti síly vesměs v kg, délky vesměs v cm.

MAJETEK ČESKO-UKR. KOMITÉTU V Č.S.R.

Připojme některé příklady.

Příklad 16. Dřevěné stropnice jsou položeny ve vzdálenostech $0{\cdot}8\ m$ (osa od osy); vzdálenost podporová jest $5{\cdot}5\ m$. Stanoviti rozměry b, h obdélníkového průřezu za poměru $\frac{b}{h} = \frac{3}{4}$.

Činí-li vlastní váha stropu (dle zkušenosti nebo přibližného výpočtu) $250\ kg/m^2$, a čítáme-li nahodilé obtížení také $250\ kg/m^2$, pokládajíce obé za rovnoměrně rozdělené po délce $a\,b$ nosníku, vychází na stropnici obtížení

$$Q = 5{\cdot}5\,.\,0{\cdot}8\,.\,500 = 2200\ kg.$$

Poněvadž tu jde o nosník stálého průřezu, jest přihlížeti k největšímu momentu ohybovému, který dle § 28. $b)$ $\beta)$ má hodnotu

$$M = \tfrac{1}{8}\,Q\,l.$$

Zde není pochybnosti, že největší hodnoty idealních napětí hlavních namítnou se v místech od osy Y nejvzdálenějších; proto jest počítati dle vzorce (11)

$$\frac{J}{e} = \frac{M}{k},$$

kdež

$$\frac{J}{e} = \tfrac{1}{6}\,b\,h^2 = \tfrac{1}{8}\,h^3,$$

položíme-li $b = \frac{3}{4}\,h$. Proto

$$h = \sqrt[3]{\frac{Q\,l}{k}}.$$

Hodnotou $k = 60\ kg/cm^2$ vychází z toho

$$h = \sqrt[3]{\frac{2\,200\,.\,550}{60}} = 27{\cdot}2\ cm,$$

$$b = \frac{3}{4}\,.\,27{\cdot}2 = 20{\cdot}4\ cm.$$

Zvolme na př. okrouhle $b = 20\ cm$, $h = 27\ cm$, čímž největší hodnota napětí normalného vzroste v poměru

$$\frac{20{\cdot}4\ .\ 27{\cdot}2^2}{20\ .\ 27^2}$$

a tedy vystoupí z 60 kg na 62 kg/cm^2.

Největší hodnotu napětí tangencialného obdržíme v průřezu podporovém za $z = 0$. Poněvadž tam síla posouvající

$$T = A = \tfrac{1}{2}\,Q = 1100\ kg,$$

vychází největší napětí tangencialné dle rovnice (106)

$$\tau_0 = \frac{3}{2}\,\frac{T}{b\,h} = \frac{3\ .\ 1100}{2\ .\ 20\ .\ 27} \doteq 3\ kg/cm^2.$$

V ose Y máme tedy dle rovnice (118) idealná hlavní napětí

$$\left.\begin{matrix} \nu_{\mathrm{I}} \\ \nu_{\mathrm{II}} \end{matrix}\right\} = \pm\,\tfrac{4}{3}\,\tau_0 = \pm\,4\ kg/cm^2,$$

což jest hodnota velmi nepatrná.

Stanovme ještě p r ů h y b tohoto nosníku. Dle rovnice (37) jest největší pořadnice čáry ohybové

$$y_0 = \frac{5}{384}\,\frac{q\,l^4}{E\,J} = \frac{5}{384}\,\frac{Q\,l^3}{E\,J};$$

vložíme-li sem $Q = 2\,200\ kg$, $l = 5{\cdot}5\ m = 550\ cm$, $E = 120\,000\ kg/cm^2$, $J = \frac{1}{12}\ .\ 20\ .\ 27^3$, vyjde

$$y_0 = \frac{5\ .\ 2200\ .\ 550^3\ .\ 12}{384\ .\ 120\,000\ .\ 20\ .\ 27^3} = 1{\cdot}21\ cm.$$

P ř í k l a d 17. Nosníky balkonové (na jednom konci vetknuté, na druhém volné) mají volnou délku $l = 1{\cdot}2\ m$ a jsou položeny ve vzdálenostech $1{\cdot}1\ m$ (osa od osy). Vlastní váha balkonu budiž 380 kg/m^2, břímě působící na volném konci (zábradlí) 360 kg/m, obtížení nahodilé 250 kg/m^2. Jde o to, stačí-li tu železný nosník válcovaný průřezu I (obr. 49.) o rozměrech $b = 8{\cdot}4\ cm$, $h = 16\ cm$, $a = 0{\cdot}65\ cm$, $t = 0{\cdot}95\ cm$. Napětí železa (svárkového) nechť nepřestupuje 800 kg/cm^2.

Na každý z nosníků vnitřních (více obtížených než krajní) připadá obtížení

$$Q = 1{\cdot}1\ .\ 1{\cdot}2\ .\ (380 + 250) = 831{\cdot}6\ kg,$$

rozdělené rovnoměrně po délce nosníku, dále osamělé břímě

$$P = 1{\cdot}1\ .\ 360 = 396\ kg$$

na volném konci.

Největší moment ohybový (při vetknutém konci) má prostou hodnotu

$$-M = 396 \,.\, 1{\cdot}2 + 831{\cdot}6 \,.\, 0{\cdot}6 = 974{\cdot}16\ mk = 97416\ cmk.$$

Napětí normalné v místech od neutralné osy nejvzdálenějších jest dle rovnice (9)

$$\nu = -\frac{M\,e}{J},$$

a poněvadž

$$\frac{J}{e} = \frac{8{\cdot}4 \,.\, 16^3 - 7{\cdot}75 \,.\, 14{\cdot}1^3}{6 \,.\, 16} = 132\ cm^3,\ *)$$

vychází největší prostá hodnota

$$\nu = \frac{97416}{132} = 738\ kg/cm^2,$$

tak že rozměry průřezové více než stačují.

Přihlédněme tu také k napětí tangencialnému. Největší hodnota jeho jest dle rovnice (111)

$$\tau_0 = \frac{T\,\mathfrak{M}_0}{J\,a},$$

a poněvadž největší prostá hodnota síly posouvající (při vetknutém konci) činí

$$-T = P + Q = 831{\cdot}6 + 396 = 1227{\cdot}6\ kg,$$

a momenty

$$\mathfrak{M}_0 = \tfrac{1}{2}\,(8{\cdot}4 \,.\, 8^2 - 7{\cdot}75 \,.\, 7{\cdot}05^2) = 76{\cdot}2\ cm^3,$$

$$J = 1056{\cdot}8\ cm^4,$$

vychází

$$\tau_0 = \frac{1227{\cdot}6 \,.\, 76{\cdot}2}{1056{\cdot}8 \,.\, 0{\cdot}65} = 136\ kg/cm^2$$

a z toho idealné napětí hlavní v ose Y

$$\nu_h = \tfrac{4}{3} \,.\, 136 = 181\ kg/cm^2,$$

hodnota, jež zůstává hluboko pod napětím dovoleným.

Počítejme ještě idealné hlavní napětí na místě, kde šířka průřezová s hodnoty 8·4 *cm* náhle klesá na 0·65 *cm* — pokládajíce, že by zákon napětí tangencialného měl platnost i na tomto místě.

---

*) Přibližným vzorcem, vytčeným v § 25., obdrželi bychom

$$\frac{J}{e} \doteq b\,t\,h = 8{\cdot}4 \,.\, 0{\cdot}95 \,.\, 16 = 128\ cm^3.$$

Tu jest $z = 7{\cdot}05\ cm$,

$$\mathfrak{M}_z = 8{\cdot}4\ .\ 0{\cdot}95\ .\ (8 - \tfrac{1}{2}\ .\ 0{\cdot}95) \doteq 60{\cdot}05\ cm^3$$

a tedy

$$\tau = \frac{1227{\cdot}6\ .\ 60{\cdot}05}{1056{\cdot}8\ .\ 0{\cdot}65} = 107\ kg/cm^2;$$

dále máme na témž místě

$$\nu = \frac{M z}{J} = \frac{97416\ .\ 7{\cdot}05}{1056{\cdot}8} = 650\ kg/cm^2.$$

Dle rovnice (114ª) jsou idealná napětí hlavní

$$\left.\begin{matrix}\nu_{\mathrm{I}} \\ \nu_{\mathrm{II}}\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{3}\,\nu \pm \tfrac{2}{3}\sqrt{\nu^2 + 4\,\tau^2};$$

větší prostá hodnota činí $673\ kg/cm^2$, jest tedy menší než prostá hodnota ν (zároveň ν_h) za $z = e$.

Největší pořadnici čáry ohybové dává rovnice (29) na str. 106.

$$y_0 = \frac{(P + \tfrac{3}{8}\,Q)\ l^3}{3\,E\,J};$$

máme tedy

$$y_0 = \frac{(396 + \tfrac{3}{8}\ .\ 831{\cdot}6)\ 120^3}{3\ .\ 2\,000\,000\ .\ 1056{\cdot}8} = 0{\cdot}19\ cm.$$

P ř í k l a d 18. Nosník *d a b* příkladu 9. má býti válcovaný ze svárkového železa; zvoliti rozměry průřezové.

Poněvadž tu jde patrně zase o p r o s t o u pružnost v ohybu, užijme rovnice (11) (str. 64.)

$$\frac{J}{e} = \frac{M}{k}$$

a vypočtěme z ní modul průřezový $\frac{J}{e}$.

V příkladě 9. vyšetřena největší prostá hodnota momentu ohybového

$$M = 2284{\cdot}8\ mk = 228480\ cmk;$$

připouštíme-li největší namáhání $k = 750\ kg/cm^2$, vychází

$$\frac{J}{e} = \frac{228480}{750} = 304{\cdot}64\ cm^3.$$

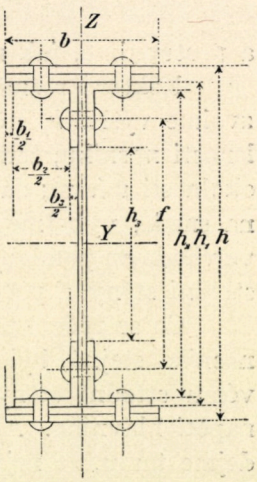
Nyní jde o to, bychom v seznamu profilů válcovny, kterou máme na zřeteli, vybrali profil, jehož modul průřezový má aspoň hodnotu vypočtenou. Seznamy takové obsahují v jednotlivých sloupcích rozměry průřezové a ve zvláštním sloupci hodnoty modulu průřezového. V tomto sloupci jest vyhledati hodnotu nejblíže větší než jest vypočtená a zároveň si všimnouti, hoví-li hlavní rozměry, především výška h, i zvláštním okolnostem místním.

Tak na př. jest obsažena v jednom takovém seznamu nejblíže větší hodnota $308{\cdot}38\ cm^3$; příslušný profil má rozměry $h = 22$, $b = 10{\cdot}2$, $a = 0{\cdot}9$, $t = 1{\cdot}3\ cm$.

P ř i p o m e n u t í. Místo seznamů profilů válcoven lze užívati g r a f i c k ý c h t a b u l e k, jak následuje. Největší moment ohybový M, dovolené namáhání k a modul průřezový $\frac{J}{e}$ jsou vázány rovnicí (11)

$$M = k\frac{J}{e};$$

máme-li na zřeteli u r č i t ý profil, jest $\frac{J}{e}$ stálé a moment M mění se úměrně ku k. Vyjádříme-li k úsečkami, M pořadnicemi na základě přiměřených měřidel, znamená ona rovnice přímku jdoucí počátkem soustavy souřadnicové. Měníme-li parametr $\frac{J}{e}$, mění se i přímka; ku každému profilu náleží tedy určitá přímka L. Grafická tabulka obsahuje pak přímky L ke všem profilům válcovny a mimo to měřidlo hodnot k na ose X a měřidlo hodnot M na ose Y. Chceme-li touto grafickou tabulkou k vypočtenému největšímu momentu M a ku zvolené hodnotě k stanoviti profil, přihlédněme k bodu, jehož souřadnice jsou k, M; přímka L, která prochází tím bodem anebo nejblíže nad ním, ukazuje na profil, jenž hoví dané úloze.



Obr. 51.

Průpravou k následujícímu příkladu odvoďme si rovnice, jimiž lze počítati n o s n í k y p l e c h o v é n ý t o v a n é, jakých se užívá, kde nosníky válcované průřezu I svými rozměry nestačují.

Nosník plechový nýtovaný (obr. 51.) skládá se ze střední stěny (svislého neboli stojatého plechu) a ze čtyř úhelníků, po případě ještě z desky pasové nebo z několika takových desk. Úhelníky jsou rameny svislými ke stěně střední, vodorovnými k deskám pasovým přinýtovány. Průřez nosníka budiž souměrný nejen vzhledem ku svislé ose Z ale i vzhledem k vodorovné ose Y. Tato jest pak osou neutralnou napětí normalných.

Moment setrvačnosti vzhledem k ose Y jest za označení v obr. 51. vytčeného

$$J = \tfrac{1}{12}[b' h^3 - b_1 h_1^3 - b_2' h_2^3 - b_3 h_3^3];$$

hledíc k seslabení plechu dutinami nýtovými*) jest položiti

$$b' = b - 2d,$$
$$b_2' = b_2 - 2d,$$

jest-li d průměr nýtů. Z momentů setrvačnosti plyne pak modul průřezový

$$\frac{J}{e} = \frac{2J}{h}.$$

Takto bychom vypočtli modul průřezový, kdyby šlo o posouzení daných rozměrů průřezových. Dejme však tomu, že jde o stanovení neznámých těchto rozměrů. Užívejme i zde rovnice (11)

$$\frac{J}{e} = \frac{M}{k}$$

a postupujme, jak následuje.

Některé rozměry průřezové se vůbec nepočítají, ale volí. Nejprve zvolme výšku h_1 stěny střední v přiměřeném poměru k podporové vzdálenosti nosníku, šetříce však zároveň toho, jak vysoký nosník připouštějí okolnosti místní; dále zvolme rozměry úhelníků, totiž z profilů, které jsou na snadě, vybeřme profil přiměřený; též průměr nýtový d se volí a to ve vhodném poměru ku tloušťce plechu. Počítati by pak bylo jen tloušťku střední stěny a počet i příčné rozměry desk pasových.

Co se týče střední stěny, jejížto tloušťka a budiž po vší délce nosníka stejná, bylo by přihlížeti k tomu průřezu a tomu místu průřezovému střední stěny, kde se namítá největší prostá hodnota idealného napětí hlavního. Abychom dospěli ku vzorci pokud možno pohodlnému, dejme tomu, že největší ona hodnota se namítá v ose Y. Za $z = 0$

$$v = 0, \quad \tau_0 = \frac{T \mathfrak{M}_0}{J a}, \quad \nu_h = \pm \tfrac{4}{3} \tau_0;$$

z výminky

$$\frac{4}{3} \frac{T \mathfrak{M}_0}{J a} = k$$

plyne

$$a = \frac{4}{3} \frac{T}{k} \frac{\mathfrak{M}_0}{J},$$

kde jest položiti za T největší prostou hodnotu síly posouvající.

*) Při tom béřeme v úvahu průřez, jenž obsahuje osy nýtů spojujících desky pasové s vodorovnými rameny úhelníků (první soustavy nýtové); nýty spojující střední stěnu se svislými rameny úhelníkovými (druhá soustava) nechť se střídají s nýty soustavy prvé. Průřez obsahující osy nýtů soustavy druhé patrně se méně seslabuje.

Dutiny nýtové bylo by vlastně odčítati jen na tažené straně nosníka; na tlačené straně není toho potřebí, vyplňuje-li nýt dutinu dokonale; pro snadnější počítání a větší bezpečnost odčítejme však dutiny nýtové na obou stranách osy Y.

Budiž u obsah průřezový desk pasových na jedné straně osy Y, u_1 obsah průřezu obou úhelníků na téže straně; obrazec $u + u_1$ skládající se z průřezů desk pasových a úhelníků mějž těžiště ve vzdálenosti c_0 od osy Y a vzhledem k ose Y', vedené tímto těžištěm rovnoběžně s osou Y, poloměr setrvačnosti i_0. Znamená-li $c = \frac{h_1}{2}$, můžeme psáti

$$\mathfrak{M}_0 = (u + u_1)\, c_0 + \tfrac{1}{2}\, a\, c^2,$$
$$\tfrac{1}{2}\, J = (u + u_1)\,(c_0^2 + i_0^2) + \tfrac{1}{3}\, a\, c^3,$$

tedy

$$\frac{\mathfrak{M}_0}{J} = \frac{(u + u_1)\,\frac{c_0}{c} + \frac{1}{2}\, a\, c}{(u + u_1)\,\frac{c_0^2 + i_0^2}{c^2} + \frac{1}{3}\, a\, c}\,\frac{1}{h_1}.$$

Zlomek, který se namítá v této rovnici jako první činitel na pravé straně, neliší se valně od jedničky, tak že můžeme položiti zhruba přibližně

$$\frac{\mathfrak{M}_0}{J} \doteq \frac{1}{h_1}$$

a dospějeme k rovnici

$$(120) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ a = \frac{4}{3}\,\frac{T}{k\, h_1}.$$

Rovnice (120) dává v praktických případech tloušťku a obyčejně tak malou, že z jiných příčin, jako jsou: žádoucí odpor stěny střední proti silám působícím v rovinách průřezových pravoúhelně k ose Z, rezivění plechu, se brává hodnota větší. Proto tloušťka a obyčejně se nepočítá, ale volí.

Znajíce rozměry střední stěny a úhelníků, můžeme vypočísti přesněji moment setrvačnosti příslušné části průřezové, totiž průřezu nosníka bez desk pasových; jest to

$$J_0 = \tfrac{1}{12}\,(b_0\, h_1^3 - b_2\, h_2^3 - b_3\, h_3^3),$$

kde

$$b_0 = b - b_1;$$

hledíc k dutinám nýtů druhé soustavy náleží od toho odečísti moment J_n setrvačnosti průřezu příslušných válců nýtových, položiti tedy

$$J_0' = J_0 - J_n,$$

kde přesně

$$J_n = \tfrac{1}{12}\,(a + b_3)\,(f_2^3 - f_1^3),$$

dosti přibližně pak

$$J_n = \tfrac{1}{2}\,(a + b_3)\, d\, f^2;$$
$$f_1 = f - d, \quad f_2 = f + d.$$

Neobsahuje-li nosník pasových desk vůbec, má modul průřezový

$$\frac{J_0'}{e_0} = \frac{2\,J_0'}{h_1};$$

vyšetřme, nestačuje-li snad již tato hodnota danému momentu ohybovému.

Dejme tomu, že největší idealné hlavní napětí desk pasových se namítá v místech od osy Y nejvzdálenějších; tu jest počítati zase dle rovnice (11) § 22.

Znamená-li M největší prostou hodnotu ohybového momentu nosníka, potřebí tu modulu průřezového

$$\frac{J}{e} = \frac{M}{k}.$$

Jest-li modul $\frac{J_0'}{e_0}$ roven této hodnotě neb i poněkud větší, stačí zvolený nosník bez desk pasových; jest-li $\frac{J_0'}{e_0}$ poněkud menší, možno malou změnou zvolených rozměrů způsobiti, aby stačil. Jest-li však $\frac{J_0'}{e_0}$ značně menší než ono $\frac{J}{e}$, nutno připojiti desky pasové; rozměry jejich stanovme takto.

Budiž t tloušťka všech desk jednoho pasu dohromady; pišme pak zatím jen přibližně

$$J \doteq J_0'' + 2\,u\left(\frac{h_1 + t}{2}\right)^2 = J_0'' + \tfrac{1}{2}\,u\,(h_1 + t)^2,$$

kde

$$J_0'' = \tfrac{1}{12}\,(b_0'\,h_1^3 - b_2'\,h_2^3 - b_3\,h_3^3)$$

jest moment setrvačnosti průřezu skládajícího se ze střední stěny a úhelníků a obsahujícího osy nýtů soustavy p r v é, při čemž

$$b_0' = b_0 - 2\,d;$$

poněvadž

$$e = \frac{h_1}{2} + t,$$

máme

$$\frac{J}{e} = \frac{J_0'' + \tfrac{1}{2}\,u\,(h_1 + t)^2}{\tfrac{1}{2}\,h_1 + t} \doteq \frac{2\,J_0'' + u\,h_1^2}{h_1} = \frac{2\,J_0''}{h_1} + u\,h_1,$$

nedbáme-li tloušťky t proti rozměrům h_1 a $\frac{1}{2}\,h_1$.

Vložíme-li to v rovnici (11), obdržíme

$$(121) \ldots\ldots\ldots\ldots u = \frac{1}{h_1}\left(\frac{M}{k} - \frac{2\,J_0''}{h_1}\right).$$

Dle vypočtené tak hodnoty obsahu u lze zvoliti tloušťku a počet desk pasových; znajíce t známe i $h = h_1 + 2\,t$ a můžeme vypočísti přesněji šířku b.

Položme k tomu konci

$$J = J''_0 + \tfrac{1}{12}\, b' (h^3 - h_1^3), \quad e = \frac{h}{2},$$

čímž rovnice (11) nabývá tvaru

$$J''_0 + \tfrac{1}{12}\, b' (h^3 - h_1^3) = \frac{M\,h}{2\,k},$$

pročež

$$(122)\ldots\ldots\ldots \begin{cases} b' = \dfrac{12\left(\dfrac{M\,h}{2\,k} - J''_0\right)}{h^3 - h_1^3}, \\ b = b' + 2\,d. \end{cases}$$

MAJETEK ČESKO-UKR. KOMITÉTU V Č.S.R.

V rovnici (122) znamená M největší prostou hodnotu momentu ohybového, a výpočet desk pasových týče se průřezu, k němuž tento největší moment náleží. Vzdalujeme-li se od tohoto průřezu, ubývá momentu M a v jisté vzdálenosti možno vynechati jednu z desk pasových, ještě dále desku druhou a p.

Dejme na př. tomu, že by největší moment ohybový vymáhal tří desk pasových; jde pak o to, rozděliti délku nosníkovou v díly, v nichž potřebí 3, 2, 1, 0 desky.

Vyjádřen-li moment ohybový pohodlnou funkcí úsečky x, možno řešiti tuto úlohu počtářsky, v každém případě však graficky.

K řešení p o č t á ř s k é m u stanovme dle rovnic

$$J = J''_0 + \tfrac{1}{12}\, b' (h^3 - h_1^3), \quad e = \frac{h}{2}$$

hodnoty $\frac{J_1}{e_1}$, $\frac{J_2}{e_2}$ modulu průřezového pro případ jedné a dvou desk pasových $\left(\frac{J_0'}{e_0}\right.$ bylo již dříve vypočteno$\left.\right)$. Vyjádřen-li moment ohybový rovnicí

$$M = f(x),$$

jest nám řešiti rovnice

$$f(x_0) = k\,\frac{J_0'}{e_0},$$

$$f(x_1) = k\,\frac{J_1}{e_1},$$

$$f(x_2) = k\,\frac{J_2}{e_2};$$

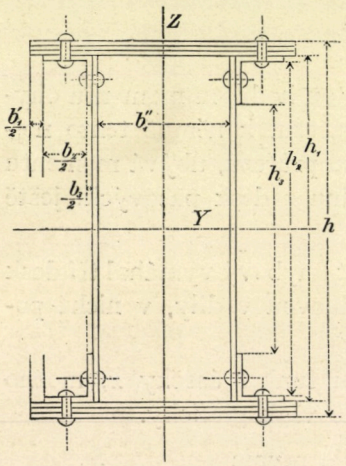
stanovenými tak úsečkami x_0, x_1, x_2 určeny jsou průřezy nosníku, kde právě stačuje průřez bez desk pasových, s deskou jednou a dvěma.

Graficky řeší se úloha tím, že čáru momentovou nosníka sečeme přímkami, vedenými rovnoběžně s příslušnou osou ve vzdálenostech

$$M_0 = k\frac{J_0'}{e_0}, \quad M_1 = k\frac{J_1}{e_1}, \quad M_2 = k\frac{J_2}{e_2};$$

příslušnými průsečíky určeny jsou zase průřezy svrchu dotčené.*)

Znajíce takto rozměry nosníka ve všech průřezech, můžeme vypočísti napětí v, τ a z nich idealná napětí hlavní v kterémkoli místě kteréhokoli průřezu a přesvědčiti se, nepřestoupeno-li nikde namáhání dovolené. Pravidlem nebývá však tohoto zevrubnějšího výpočtu potřebí.



Obr. 52.

Připomenutí. Užívá-li se místo jedné střední stěny dvou, máme tak zvané nosníky trubové (obr. 52.). Rozměry jejich stanoví se právě tak jako rozměry nosníků o jedné stěně střední.

Příklad 19. Nosník plechový nýtovaný, na koncích prostě podepřený, o vzdálenosti podporové $l = 10\ m$, jest obtížen břemenem $Q = 12\,900\ kg$, rozděleným rovnoměrně po délce $a\,b$. Stanoviti rozměry průřezové za tou výminkou, že nemá býti přestoupeno napětí $750\ kg/cm^2$. Dejme tomu, že pro místní okolnosti musí výška nosníka zůstati pod $48\ cm$.

Největší moment ohybový náleží k rozpolovacímu průřezu ($x = 5\ m$) délky $\overline{a\,b}$ a má hodnotu

$$M = \tfrac{1}{8} Q\,l = \tfrac{1}{8} \cdot 12\,900 \cdot 10 = 16\,125\ mk;$$

největší hodnota síly posouvající (v průřezech podporových) jest

$$T = \tfrac{1}{2} Q = \tfrac{1}{2} \cdot 12\,900 = 6\,450\ kg.$$

Zvolme (obr. 51.) $h_1 = 40\ cm$, úhelníky o rozměrech 8, 8, 1 cm;**) rovnice (120) dává pak

$$a = \frac{4 \cdot 6450}{3 \cdot 750 \cdot 40} = 0{\cdot}29\ cm,$$

*) Poněvadž každá nově připojená deska vzdoruje plně teprve pak, až s ostatními jest spojena dostatečným počtem nýtů, musí desky sáhati přiměřeným rozměrem přes průřezy svrchu stanovené.

**) t. j. délku každého z obou ramen 8 cm, střední tloušťku 1 cm.

nehledíc ku seslabení plechu dutinami nýtovými — tloušťku to z příčin praktických příliš malou. Zvolme $a = 1\ cm$; průměr nýtů budiž $d = 2\ cm$.

Zvolený dosud profil (bez pasových desk) má rozměry

$$b_0 = 17,\ h_1 = 40,\ b_2 = 14,\ h_2 = 38,\ b_3 = 2,\ h_3 = 24\ cm$$

a tedy vzhledem k neutralné ose Y moment setrvačnosti

$$J_0 = \tfrac{1}{12}\,(17 \,.\, 40^3 - 14 \,.\, 38^3 - 2 \,.\, 24^3) = 24\,345,$$

kde zatím nedbáno dutin nýtových. Z toho vychází modul průřezový

$$\frac{J_0}{e_0} = \frac{24\,345}{20} = 1\,217;$$

vypočtený svrchu moment M vymáhá však modulu průřezového

$$\frac{J}{e} = \frac{M}{k} = \frac{1\,612\,500}{750} = 2\,150\ cm^3$$

mnohem většího, pročež nutno připojiti desky pasové.

Abychom stanovili rozměry těchto desk, vypočtěme nejprve J_0'' odečtouce od J_0 moment setrvačnosti dutin obou nýtů prvé soustavy, totiž

$$\tfrac{1}{12} \,.\, 4\,(40^3 - 38^3) \doteq 3\,043\ cm^4,$$

tak že

$$J_0'' = 21\,302\ cm^4;$$

rovnice (121) dává pak

$$u = \frac{1}{40}\left(2\,150 - \frac{2 \,.\, 21\,302}{40}\right) = 27{\cdot}1\ cm^2,$$

což rozložiti jest v činitele b', t.

Kdybychom deskám pasovým nedali vůbec přečnívati přes vodorovná ramena úhelníková, bylo by

$$b' = 17 - 4 = 13\ cm$$

a tedy

$$t = \frac{27{\cdot}1}{13} = 2{\cdot}1\ cm.$$

Zvolme 2 desky o tloušťce $1\ cm$, tak že $t = 2\ cm$; pak

$$h = 40 + 2 \,.\, 2 = 44\ cm,$$

a z rovnic (103) vychází

$$b' = \frac{12\,(2\,150\,.\,22 - 21\,302)}{44^3 - 40^3} = 14{\cdot}7\ cm,$$

$$b = 14{\cdot}7 + 4 = 18{\cdot}7\ cm.$$

Budiž $b = 19\ cm$.

Bychom ustanovili průřezy, v nichžto stačí právě desky 2, 1, 0, vypočtěme

$$J_1 = 21\,302 + \frac{15\,(42^3 - 40^3)}{12} = 33\,912,$$

dále

$$M_0 = k\frac{J_0'}{e_0} = 750\,.\,1\,073 = 804\,750\ cmk = 8\,047{\cdot}5\ mk,$$

$$M_1 = k\frac{J_1}{e_1} = 750\,.\,1\,615 = 1\,211\,250\ cmk = 12\,112{\cdot}5\ mk.$$

Moment ohybový vůbec dán jest tu výrazem

$$M = \tfrac{1}{2}\,q\,x\,(l - x)\ ;$$

zvolíme-li však rozpolovací bod c délky $\overline{a\,b}$ za počátek úseček ξ, tak že

$$x = c + \xi,$$

kde $c = \frac{l}{2}$, obdržíme

$$M = \tfrac{1}{2}\,q\,(c^2 - \xi^2),$$

$$(123) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \xi = \pm\sqrt{c^2 - \frac{2\,M}{q}}.$$

Vložíme-li do této rovnice za M po řadě hodnoty M_1, M_0, obdržíme úsečky

$$\xi_1 = \pm\sqrt{25 - \frac{2\,.\,12112{\cdot}5}{1290}} = \pm\,2{\cdot}49\ m,$$

$$\xi_0 = \pm\sqrt{25 - \frac{2\,.\,8047{\cdot}5}{1290}} = \pm\,3{\cdot}54\ m.$$

Nehledíc ku přídavku, jehož vymáhá bezpečné přinýtování každé desky nově připojené, měl by nosník uprostřed mezi průřezy $\xi_1 = \pm\,2{\cdot}49\ m$ dvě, od těchto až k průřezům $\xi_0 = \pm\,3{\cdot}54\ m$ jednu desku pasovou; odtud až k podporám skládal by se jen ze střední stěny a z úhelníků.

Příklad 20. Vaznice ve hřebeni železné konstrukce střechové zřízena jest jakožto spojitý nosník kloubový (§ 37. obr. 41. či 42.). Délka každého pole budiž $l = 5\ m$, břímě (rovnoměrně rozdělené) nechť jest $q_1 = 480\ kg/m$ ve směru svislém, $q_2 = 87\ kg/m$ ve směru vodorovném. Stanoviti nosník válcovaný průřezu I za svislé polohy stěny střední; dovolené namáhání $k = 840\ kg/cm^2$.

Jest-li Y vodorovná, Z svislá osa symmetrie průřezu, vychází z rovnice (98) největší moment ohybový

$$\text{v rovině } X\,Z \ldots M_1 = 0{\cdot}0858\, q_1\, l^2 \doteq 1030\ m\,k,$$
$$\text{„ } X\,Y \ldots M_2 = 0{\cdot}0858\, q_2\, l^2 = 187\ m\,k.$$

Momentem $\left\{\begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix}\right\}$ vyvozuje se krajní napětí $\left\{\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}\right\}$ ve vzdálenosti $\left.\begin{matrix} z = \pm \frac{h}{2} \\ y = \pm \frac{b}{2} \end{matrix}\right\}$ od osy $\left\{\begin{matrix} Y \\ Z \end{matrix}\right\}$; krajní napětí výsledné $v_1 + v_2$ obdržíme tedy v bodech majících ony souřadnice y, z.

Poněvadž

$$v_1 = \frac{M_1}{\left(\frac{J_1}{e_1}\right)}, \quad v_2 = \frac{M_2}{\left(\frac{J_2}{e_2}\right)},$$

jest poměr

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{M_1}{M_2} \frac{\left(\frac{J_2}{e_2}\right)}{\left(\frac{J_1}{e_1}\right)}.$$

Přibližně lze klásti

$$\frac{J_1}{e_1} = b\,t\,h,^*)$$

$$\frac{J_2}{e_2} = \tfrac{1}{6} \cdot 2\,t\,b^2 = \tfrac{1}{3}\,t\,b^2,^{**})$$

tedy

$$\frac{J_1}{e_1} : \frac{J_2}{e_2} = \frac{3\,h}{b},$$

a položíme-li zatím přibližně $\frac{b}{h} = \frac{1}{2}$, obdržíme

$$\frac{J_1}{e_1} : \frac{J_2}{e_2} \doteq 6$$

---

*) Viz připomínku na str. 81.

**) Nedbáme-li stěny střední.

a tedy

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} \doteq \frac{M_1}{6\,M_2},$$

$$\frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu_2} \doteq \frac{M_1}{M_1 + 6\,M_2} = \frac{1030}{2152}.$$

Hledíme-li jen k momentu M_1, musíme vzíti v úvahu dovolené namáhání k_1 takové, by

$$\frac{k_1}{k} = \frac{M_1}{M_1 + 6\,M_2},$$

totiž

$$k_1 = 840 \,.\, \frac{1030}{2152} = 402\ kg/cm^2.$$

Potřebí tedy modulu průřezového

$$\frac{J_1}{e_1} = \frac{103000}{402} = 256\ cm^3,$$

tak že by vyhověl na př. profil, jehož rozměry jsou $h = 21$, $b = 9{\cdot}9$, $a = 0{\cdot}85$, $t = 1{\cdot}25\ cm$, a jehož modul průřezový $\frac{J_1}{e_1} = 273\ cm^3$.

Napětí

$$\nu_1 = \frac{103000}{273} = 377\ kg/cm^2;$$

dále máme

$$\frac{J_2}{e_2} = \frac{2 \,.\, 1{\cdot}25 \,.\, 9{\cdot}9^3 + 18{\cdot}5 \,.\, 0{\cdot}85^3}{6 \,.\, 9{\cdot}9} = 41\ cm^3,$$

$$\nu_2 = \frac{18700}{41} = 456\ kg/cm^2.$$

Celkem vychází tedy největší napětí

$$\nu = 377 + 456 = 833\ kg/cm^2.$$

§ 43. Kterak působí vetknuté konce nosníků v příslušná tělesa. Jest-li na př. pravý konec b nosníka $a\,b$, omezeného nahoře i dole vodorovnou rovinou, vetknut v nějaké tě'eso (na př. zazděn),*) působí nosník v toto těleso silami, rozdělenými dle jistého zákona po vrchní a spodní stěně vetknutého konce; těleso pak reaguje silami rovnými a protivnými.

*) Levý konec a může býti při tom buď volný či podepřený neb i také vetknutý, anebo může býti $a\,b$ pravým krajním polem nosníku spojitého.

Budiž $e = \overline{b\,e}$ (obr. 53.) délka vetknutého konce, $\left\{\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix}\right\}$ výsledná reakce $\left\{\begin{matrix} \text{spodní} \\ \text{vrchní} \end{matrix}\right\}$; obě tyto reakce jsou v rovnováze se silami, jimiž lze nahraditi volný díl nosníkový $a\,b$, totiž se silou posouvající T_b průřezu (b) a s dvojicí, jíž náleží moment ohybový M_b téhož průřezu.

Poněvadž jde o rovinnou soustavu sil, které pokládati lze za svislé, máme 2 výminky rovnováhy, jež pišme obě ve formě momentové, vztahující momenty jednou k bodu c_2, po druhé k bodu c_1 (obr. 53.). Jsou to rovnice

$$M_b + T_b r_2 + R_1 (r_2 - r_1) = 0,$$
$$M_b + T_b r_1 + R_2 (r_2 - r_1) = 0,$$

kde znamená

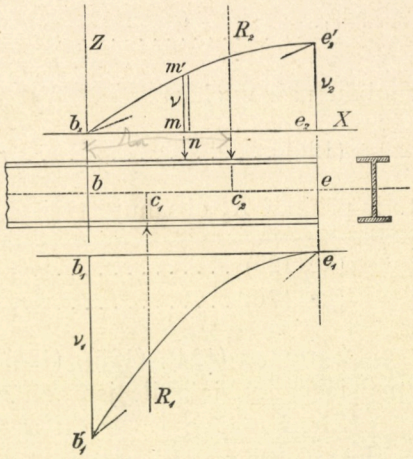
$$r_1 = \overline{b\,c_1}, \quad r_2 = \overline{b\,c_2}.$$

Z těchto výminek plyne

$$R_1 = -\frac{M_b + T_b r_2}{r_2 - r_1},$$
$$R_2 = -\frac{M_b + T_b r_1}{r_2 - r_1}.$$

Veličiny M_b, T_b bývají vůbec negativné; známenáme-li prosté jejich hodnoty kratšeji M, T, máme rovnice

$$(124)\ldots \quad \left\{\begin{matrix} R_1 = \dfrac{M + T r_2}{r_2 - r_1}, \\ R_2 = \dfrac{M + T r_1}{r_2 - r_1}. \end{matrix}\right.$$



Obr. 53.

Z rovnic (124) mohli bychom ustanoviti hodnoty výsledných reakcí, kdybychom znali jejich přímky R_1, R_2. Poloha těchto přímek neb i bodů c_1, c_2 osy nosníkové závisí však na tom, jak se působení sil R_1, R_2 rozděluje po délce vetknutého konce; po šířce, jež budiž zpod a_1, svrchu a_2, mysleme si rozdělení rovnoměrné.

Přihlédněme třeba k vrchní stěně vetknutého konce (obdélníku zšíři a_2, zdéli e), pomysleme si v ní v libovolné vzdálenosti x od průřezu (b) přímku směrem šířky a zvětšme x o dx. Tím obdržíme v dotčené vrchní stěně prvek plošný $a_2\,dx$, v nějž působí těleso podporové jakýms nekonečně malým tlakem $n = \nu\, a_2\, dx$, kde ν jest příslušné napětí v tlaku.*) Šlo by pak o to, jak závisí ν na x.

Zákon tento budiž měřicky vyjádřen t. zv. čarou napětí, totiž čarou o úsečkách x a pořadnicích ν. (V obr. 53. jest to křivka $b_2\, m'\, e_2'$).

*) Pokládejme zde tlak za positivný.

Poněvadž R_2 jest výslednicí sil n, platí rovnice

$$R_2 = \Sigma n, \quad R_2 r_2 = \Sigma n x;$$

vložíme-li pak za n výraz svrchu zmíněný, nabudeme rovnic

$$R_2 = a_2 \int_0^e v \, dx, \quad R_2 r_2 = a_2 \int_0^e v x \, dx.$$

První z obou integralů znamená obsah $\mathfrak{U}_2$ obrazce omezeného čarou napětí, příslušnou osou X a krajní pořadnicí $e_2 e_2'$; integral druhý vyjadřuje statický moment téhož obrazce vzhledem k ose Z pořadnic v; tento moment má hodnotu $\mathfrak{U}_2 x_2$, jest-li x_2 úsečka těžiště dotčeného obrazce. Tak dospíváme k rovnicím

(125) ..... $R_2 = a_2 \mathfrak{U}_2,$
$R_2 r_2 = a_2 \mathfrak{U}_2 x_2,$

z obou pak vychází

(126) ..... $r_2 = x_2,$

t. j. přímka R_2 obsahuje těžiště obrazce napětí. Obdobně lze napsati

(ke 125) ..... $R_1 = a_1 \mathfrak{U}_1,$
(ke 126) ..... $r_1 = x_1.$

Z rovnic (124), (125), (126) lze stanoviti největší hodnotu napětí v zpod i svrchu, jakmile jsou známy příslušné čáry napětí.

Zření majíce k ohybu vetknutého konce, jaký by nastal kdyby příslušný otvor v tělese podporovém byl z počátku poněkud vyšší než vetknutý konec nosníka, dále k vyplývajícímu z toho stlačení tohoto konce zpod a svrchu, kdyby onen nadbytek výšky pominul, dejme tomu, že čarami napětí jsou paraboly v obr. 53. zobrazené (svislice bodu e jest osou obou parabol). V tomto případě jest dle rovnic (126)

$$r_1 = x_1 = \tfrac{1}{4} e, \quad r_2 = x_2 = \tfrac{5}{8} e,$$

rovnice (124) pak dávají

$$R_1 = \frac{8M + 5Te}{3e},$$
$$R_2 = \frac{2(4M + Te)}{3e}.$$

Jest-li $\left\{ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} \right\}$ největší napětí $\left\{ \begin{matrix} \text{zpod} \\ \text{svrchu} \end{matrix} \right\}$, vychází z rovnic (125)

$$R_1 = \tfrac{1}{3} a_1 e v_1,$$
$$R_2 = \tfrac{2}{3} a_2 e v_2;$$

pročež

$$\nu_1 = \frac{8\,M + 5\,T\,e}{a_1\,e^2},$$

$$\nu_2 = \frac{4\,M + T\,e}{a_2\,e^2}.$$

Poněvadž šířky a_1, a_2 bývají rovny neb aspoň nepříliš rozdílny, lze položiti, že $\nu_1 > \nu_2$; znamená-li k dovolené namáhání toho z obou těles, které má menší pevnost (při zazděném konci jest to zdivo), vede výminka $\nu_1 = k$ k rovnici

$$k\,a_1\,e^2 - 5\,T\,e - 8\,M = 0,$$

z níž vychází žádaná délka vetknutého konce hodnotou

$$(127) \ldots\ldots e = \frac{5\,T + \sqrt{25\,T^2 + 32\,k\,a_1\,M}}{2\,k\,a_1}.\text{*)}$$

Nemůžeme-li vetknutému konci dáti tuto délku, nutno zvětšiti šířku tlačené plochy v tělese podporovém — pokládajíce, že toto má pevnost menší. Toho lze dosíci tím, že mezi vetknutý konec a podporové těleso se vloží desky z látky pevnější. Tu známe délku e, a stanoviti jest šířky a_1, a_2 Výminky

$$\nu_1 = k, \quad \nu_2 = k$$

vedou pak k rovnicím

$$(128) \ldots\ldots \begin{cases} a_1 = \dfrac{8\,M + 5\,T\,e}{k\,e^2}, \\ a_2 = \dfrac{4\,M + T\,e}{k\,e^2}. \end{cases}$$

Připomenutí. Místo parabol napětí kladou se na mnoze přímky $b_1' e_1$, $b_2 e_2'$ (obr. 53.). Tu

$$r_1 = \tfrac{1}{3}\,e, \quad r_2 = \tfrac{2}{3}\,e,$$

$$R_1 = \frac{3\,M + 2\,T\,e}{e} = \tfrac{1}{2}\,a_1\,e\,\nu_1,$$

$$R_2 = \frac{3\,M + T\,e}{e} = \tfrac{1}{2}\,a_2\,e\,\nu_2,$$

tedy

$$\nu_1 = 2\,\frac{3\,M + 2\,T\,e}{a_1\,e^2},$$

$$\nu_2 = 2\,\frac{3\,M + T\,e}{a_2\,e^2},$$

*) Druhý kořen rovnice jest negativný a nemá platnosti statické.

tak že dospíváme k rovnici

$$(127^a) \ldots\ldots\ldots e = \frac{2T + \sqrt{2(2T^2 + 3ka_1M)}}{ka_1},$$

případně k rovnicím

$$(128^a) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} a_1 = 2\dfrac{3M + 2Te}{ke^2}, \\ a_2 = 2\dfrac{3M + Te}{ke^2}. \end{cases}$$

§ 44. **O nosnících stejného odporu v ohybu.** Mějme na zřeteli prostou pružnost v ohybu, totiž případy, kde nedbáme napětí tangencialných. Jak známo, není normalné napětí ve všech bodech průřezových stejné, měníc se úměrně ku vzdálenosti od osy neutralné. V průřezu, jehož moment ohybový má prostou hodnotu M, vychází největší napětí v tahu

$$\nu' = \frac{Me'}{J}$$

a největší prostá hodnota napětí v tlaku

$$\nu'' = \frac{Me''}{J},$$

kde $\left\{\begin{matrix} e' \\ e'' \end{matrix}\right\}$ jest krajní vzdálenost na straně $\left\{\begin{matrix} \text{tažené} \\ \text{tlačené} \end{matrix}\right\}$ od neutralné osy.

Postoupíme-li k jinému průřezu, změní se vůbec moment M; podíly $\frac{J}{e'}, \frac{J}{e''}$ se $\left\{\begin{matrix} \text{nemění} \\ \text{mění} \end{matrix}\right\}$, jest-li průřez nosníka $\left\{\begin{matrix} \text{stálý} \\ \text{proměnný} \end{matrix}\right\}$. Při nosníku prismatickém mění se napětí ν', ν'' průřez od průřezu a to úměrně k momentu M; za průřezu proměnného mění se vůbec ν', ν'' v přímém poměru k momentu M a v obráceném poměru k modulům $\frac{J}{e'}, \frac{J}{e''}$. Lze však měniti rozměry průřezové tak, *aby krajní napětí* ν', ν'' *měla ve všech průřezech touž hodnotu.* Jest-li tomu tak, máme nosník stejného odporu v ohybu. Nosníky takové musí tedy hověti výmince, aby každý z výrazů $\frac{Me'}{J}, \frac{Me''}{J}$ měl hodnotu stálou, za kterou položme dovolené namáhání v tahu, případně v tlaku, jak naznačují rovnice

$$\frac{Me'}{J} = k', \qquad \frac{Me''}{J} = k'',$$

což lze psáti ve formě

$$\frac{M}{J} = \frac{k'}{e'} = \frac{k''}{e''} = \frac{k' + k''}{e' + e''}.$$

Položme obecně

$$\frac{k' + k''}{2} = k;$$

poněvadž

$$e' + e'' = h,$$

kde h jest výška průřezu (rozměr pravoúhelný k ose neutralné), dospíváme k jediné výmince

$$(129) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{J}{h} = \frac{M}{2k}.$$

Vyjádřeno-li M jako funkce úsečky x, dále $\frac{J}{h}$ rozměry průřezovými, naznačuje rovnice (129) závislost rozměrů průřezových na úsečce x.

Dle rovnice (10) jest (prostě)

$$M = \frac{EJ}{\varrho},$$

což vložme v rovnici (129); tak vyjde

$$(130) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \varrho = \frac{Eh}{2k},$$

rovnice, na které zakládáme vyšetřování ohybu při nosnících stejného odporu. Rovnice (130) ukazuje, že *poloměr křivosti čáry ohybové mění se tu úměrně k výšce h*; jest-li tato stálá, jest i poloměr ϱ stálý, a ohybová křivka kružnice. —

Užijme rovnic (129), (130) v některých případech zvláštních.

1. Průřezem jest obdélník. Tu

$$\frac{J}{h} = \tfrac{1}{12} b h^2,$$

a rovnice (129) nabývá tvaru

$$(129^a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b h^2 = \frac{6M}{k}.$$

a) Nosník jest na jednom konci vetknut, na druhém volný a

α) obtížen osamělým břemenem na volném konci.

V tomto případě

$$M = Px$$

a tedy

$$b h^2 = \frac{6P}{k} x.$$

Jest-li šířka b průřezu stálá, dána jest výška h rovnicí

$$h^2 = \frac{6P}{k\,b}\,x,$$

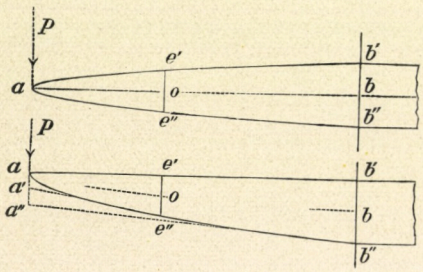
z níž patrno, že jest nosník co do výšky (svrchu a zpod) omezen parabolickým válcem (obr. 54.). Při volném konci $h = 0$, při vetknutém konci

$$h_1^2 = \frac{6Pl}{k\,b},$$

tak že

$$\frac{h^2}{h_1^2} = \frac{x}{l}.$$

Připomenutí 1. Omezen-li nosník svrchu rovinou, zpod parabolickým válcem, nemá přímé osy; při takových nosnících mají výsledky, odvozené pro nosníky přímé, platnost jen přibližnou.



Obr. 54.

Připomenutí 2. V průřezu (a) (při volném konci) jest $h = 0$, což vyhovuje momentu ohybovému, který tam rovná se nulle. Leč síla posouvající průřezu (a) není rovna nulle a vymáhá tedy jisté výšky h_0 průřezu (a). Tuto výšku bychom v obrazci 54. přenesli v $\overline{a\,a'}$ a vedli bodem a' tečnu k parabole.

Zhruba příbližný ale prakticky pohodlnější tvar obdržíme, nahradíme-li parabolu tečnou její $a''\,b''$ v bodě b''; tu $\overline{a\,a''} = \frac{1}{2}\,\overline{b'\,b''}$. —

Vyšetřujme ohyb takového nosníku, omezeného přesně válcem parabolickým. Nosník budiž při konci b vetknut vodorovně.

Položíme-li v rovnici (130) za poloměr křivosti hodnotu příbližnou

$$\varrho = \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

(viz § 26.), dále

$$h = h_1\sqrt{\frac{x}{l}},$$

obdržíme differencialnou rovnici

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2k\sqrt{l}}{E\,h_1}\,x^{-\frac{1}{2}} = \varepsilon\,x^{-\frac{1}{2}},$$

kde znamená

$$\varepsilon = \frac{2k\sqrt{l}}{E\,h_1}.$$

Integrováním vychází

$$\frac{dy}{dx} = C + 2\varepsilon x^{\frac{1}{2}};$$

poněvadž za $x = l$ jest $\frac{dy}{dx} = 0$, musí

$$C = -2\varepsilon l^{\frac{1}{2}},$$

tak že

$$\frac{dy}{dx} = 2\varepsilon(-l^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}).$$

Integrujme po druhé a obdržíme

$$y = 2\varepsilon(D - l^{\frac{1}{2}}x + \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}});$$

poněvadž za $x = l$ jest $y = 0$, musí

$$D = \tfrac{1}{3}l^{\frac{3}{2}}$$

a tedy

$$y = \frac{4k\sqrt{l}}{3Eh_1}(l\sqrt{l} - 3x\sqrt{l} + 2x\sqrt{x}).$$

Největší pořadnice křivky ohybové náleží k úsečce $x = 0$ a má hodnotu

$$y_0 = \frac{4kl^2}{3Eh_1}.$$

Bychom ji přirovnali k největší pořadnici nosníku prismatického za téhož podepření a obtížení (viz rovnici 25ª), applikujme rovnici (129) na průřez (*b*), totiž

$$\frac{J_1}{h_1} = \frac{Pl}{2k},$$

což dává

$$\frac{k}{h_1} = \frac{Pl}{2J_1},$$

a vložme to v položený svrchu výraz pořadnice y_0; tak vyjde

$$y_0 = \frac{2}{3}\frac{Pl^3}{EJ_1}.$$

Poněvadž za stálého průřezu máme dle rovnice (25ª)

$$y_0 = \frac{1}{3}\frac{Pl^3}{EJ},$$

jest největší pořadnice y_0 při nosníku stejného odporu dvakrát větší než při nosníku prismatickém.

Jest-li výška h průřezu stálá, dána jest šířka b rovnicí

$$b = \frac{6P}{k h^2} x,$$

z níž seznáváme, že nosník co do šířky jest omezen dvema rovinami (obr. 55.).

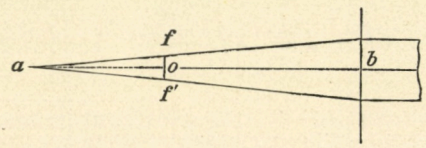
Při volném konci jest $b = 0$,*) při konci vetknutém

$$b_1 = \frac{6 P l}{k h^2},$$

pročež

$$\frac{b}{b_1} = \frac{x}{l}.$$

Křivkou ohybovou jest oblouk kruhový; poloměr jeho vychází z rovnice (130). Největší pořadnici y_0 lze stanoviti ze známé vlastnosti kružnice. Budiž $a\,b$ osa nosníku před ohnutím, $\overline{b\,d}$ svislý průměr kružnice ohybové — v průměru tom protíná rovina sil zevnitřních rovinu průřezu (b) — dále $\mathfrak{a}$ nová poloha bodu a, kterou si lze mysliti na svislici polohy původní a; tu pořadnice $\mathfrak{a}\,b_0$, pravoúhelná k tomu průměru, jest střední měřickou úměrnou k oběma úsekům $\overline{b\,b_0}$, $\overline{b_0\,d}$ průměru, tedy



Obr. 55.

$$\overline{\mathfrak{a}\,b_0}^2 = \overline{b\,b_0} \,.\, \overline{b_0\,d}.$$

Poněvadž $\overline{b\,b_0} = y_0$ a velmi přibližně $\overline{\mathfrak{a}\,b_0} = l$, $\overline{b_0\,d} = 2\varrho - y_0 \doteq 2\varrho$, máme

$$l^2 = 2\varrho\, y_0, \quad y_0 = \frac{l^2}{2\varrho},$$

a vložíme-li sem hodnotu poloměru ϱ z rovnice (130), obdržíme

$$y_0 = \frac{k l^2}{E h}.$$

Položíme-li zde jako svrchu

$$\frac{k}{h} = \frac{P l}{2 J_1},$$

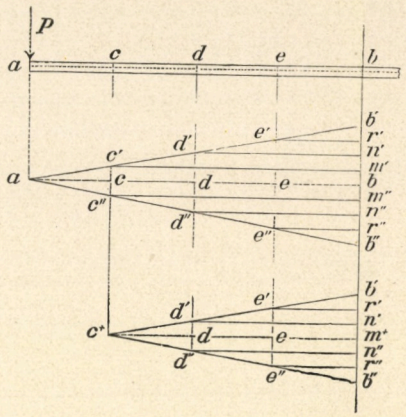
*) Síla posouvající $T_a = -P$ vymáhá i zde při volném konci jisté šířky b_0.

vyjde

$$y_0 = \frac{P\,l^3}{2\,E\,J_1},$$

pořadnice y_0 jest v tomto případu při nosníku stejného odporu o polovici větší než při nosníku prismatickém.

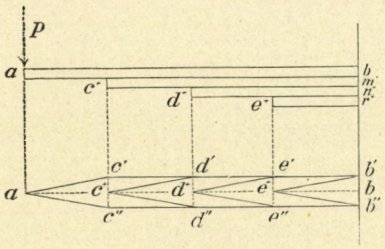
Připomenutí. Takovými nosníky stejného odporu jsou na př. pružiny trojúhelníkové (obr. 56a, b.). Jest-li (c) kterýkoli průřez pružiny $a\,b$, působí levý díl $a\,c$ v díl pravý $c\,b$ dvojicí o momentu $M = -P \cdot \overline{a\,c}$ a silou posouvající $T = -P$. Dvojici přisuďme obdélníkovému dílu $c'\,m'\,m''\,c''$, sílu $-P$ oběma zbývajícím dílům $c'\,b'\,m'$, $c''\,b''\,m''$, jež možno sloučiti v jediný díl trojúhelníkový $c^{+}\,b'\,b''$ (obr. 56c.); při tom se sjednocují $c'\,m'$, $c''\,m''$ (obr. 56b.) v $c^{+}\,m^{+}$ (obr. 56c.). Každý z těchto dílů (onen namáhaný dvojicí, tento namáhaný silou $-P$) jsou nosníky stejného odporu.



Obr. 56.a, b, c

Jest-li (d) kterýkoli průřez nosníku $c^{+}\,b'\,b''$ (obr. 56c.), působí zase levý díl $c^{+}\,d$ v díl pravý $d\,m^{+}$ dvojicí o momentu $-P \cdot \overline{c^{+}\,d}$ a silou posouvající $-P$; rozdělíme-li i zde pravý díl $d\,m^{+}$ jednak v obdélníkový díl $d'\,n'\,n''\,d''$, jednak ve zbývající díly $d'\,b'\,n'$, $d''\,n''\,b''$, jež sloučíme v jediný díl trojúhelníkový $d^{+}\,b'\,b''$, platí tytéž úsudky jako svrchu atd.

Budiž (v obr. 56a, b) $\overline{a\,c} = \overline{c\,d} = \overline{d\,e} = \overline{e\,b}$; rozdělme pružinu naznačeným právě způsobem v díly $a\,c'\,m'\,m''\,c''$ (obr. 56b.), $c^{+}\,d'\,n'\,n''\,d''$ (obr. 56c), $d^{+}\,e'\,r'\,r''\,e''$, $e^{+}\,b'\,b''$, mysleme si však, že tyto díly jsou položeny na sebe a vzájemně spojeny, jak ukazuje obr. 57., kde $a\,c'\,b'\,b''\,c''$, $c^{+}\,d'\,b'\,b''\,d''$, $d^{+}\,e'\,b'\,b''\,e''$, $e^{+}\,b'\,b''$ jsou půdorysy jednotlivých dílů. Díl $a\,c'\,c''$ vrstvy vrchní, jsa obtížen v (a) břemenem P, jest nosníkem stejného odporu; v průřez $(c'\,c'')$ působí tento díl jednak dvojicí o momentu $-P\,\frac{l}{4}$, kterou přejímá pokračování vrstvy vrchní, jednak silou posouvající $-P$, kterou přejímá vrstva druhá jakožto břímě působící v bodě c^{+}. Při vrstvě druhé opětuje se věc a obdobně při vrstvách dalších. Tak dospěli jsme k pružině složené neboli vrstvité; jak patrno, jest nosníkem stejného odporu v ohybu. —



Obr. 57.

β) Nosník jest obtížen rovnoměrně po délce $a\,b$. Tu

$$M = \tfrac{1}{2}\, q\, x^2,$$

tak že máme výminku

$$b\, h^2 = \frac{3\, q}{k}\, x^2.$$

Jest-li šířka b stálá, dána jest výška rovnicí

$$h^2 = \frac{3\, q}{k\, b}\, x^2;$$

za $x = l$

$$h_1^2 = \frac{3\, q}{k\, b}\, l^2,$$

tak že

$$\frac{h}{h_1} = \frac{x}{l}.$$

Nosník jest co do výšky omezen dvěma šikmými rovinami. Omezíme-li jej rovinou vodorovnou a rovinou šikmou, platí výsledky jen přibližně, poněvadž tu osa nosníková $a\,b$ jest sice přímá, ale není pravoúhelná k obtížení.

Co se týče ohybu, jest integrovati rovnici

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \varepsilon\, x^{-1},$$

kde

$$\varepsilon = \frac{2\, k\, l}{E\, h_1}.$$

Tu vychází

$$\frac{d y}{d x} = \varepsilon\, (\ln x + C);$$

za $x = l$ jest $\frac{d y}{d x} = 0$, ač jest-li vetknutí vodorovné, pročež

$$C = -\ln l$$

a tedy

$$\frac{d y}{d x} = \varepsilon \ln \frac{x}{l}.$$

Z toho plyne dále

$$y = \varepsilon\, x \left(\ln \frac{x}{l} - 1\right) + D;$$

za $x = l$ jest $y = 0$, tedy

$$D = \varepsilon\, l$$

a proto

$$y = \varepsilon \left(l - x + x \ln \frac{x}{l} \right).$$

Hodnotou $x = \emptyset$ vychází největší pořadnice čáry ohybové*)

$$y_0 = \varepsilon\, l = \frac{2\, k\, l^2}{E\, h_1},$$

což na základě rovnice

$$\frac{J_1}{\frac{1}{2} h_1} = \frac{\frac{1}{2} q\, l^2}{k}$$

neboli

$$\frac{k}{h_1} = \frac{q\, l^2}{4\, J_1}$$

uvésti lze ve tvar

$$y_0 = \frac{q\, l^4}{2\, E\, J_1};$$

y_0 jest tu čtyřikrát větší než největší pořadnice

$$y_0 = \frac{q\, l^4}{8\, E\, J}$$

nosníku prismatického v témž případě (viz rovnici 27).

Jest-li výška h stálá, musí se šířka měniti dle rovnice

$$b = \frac{3\, q}{k\, h^2}\, x^2;$$

za $x = l$ jest

$$b_1 = \frac{3\, q}{k\, h^2}\, l^2,$$

pročež

$$\frac{b}{b_1} = \frac{x^2}{l^2}.$$

MAJETEK ČESKO-UKR. KOMITÉTU V ČSR.

Nosník jest po šířce omezen dvěma válci parabolickými, jež obracejí k ose nosníka stranu vypuklou. Křivkou ohybovou jest kružnice; největší pořadnice její vychází z rovnice

$$l^2 = 2\, \varrho\, y_0$$

---

*) Za $x = \emptyset$ jest

$$\lim x \ln \frac{x}{l} = \lim \frac{\ln \frac{x}{l}}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim (-x) = \emptyset.$$

hodnotou

$$y_0 = \frac{k l^2}{E h} = \frac{q l^4}{4 E J_1},$$

která jest dvakrát větší než při nosníku prismatickém.

b) Nosník jest na koncích prostě podepřen a obtížen rovnoměrně po délce *a b*.

V tomto případě

$$M = \tfrac{1}{2} q x (l - x)$$

anebo, měříme-li úsečky ξ od rozpolovacího bodu c délky $a b$, tak že

$$x = c + \xi, \quad l = 2c,$$
$$M = \tfrac{1}{2} q (c^2 - \xi^2).$$

Jest-li šířka b stálá, musí výška h se měniti, jak ukazuje rovnice

$$h^2 = \frac{3 q (c^2 - \xi^2)}{k b}.$$

Největší $h = h_1$ vychází za $\xi = 0$, totiž

$$h_1^2 = \frac{3 q c^2}{k b};$$

sloučením obou výrazů obdržíme rovnici

$$\frac{\xi^2}{c^2} + \frac{h^2}{h_1^2} = 1,$$

z níž patrno, že nosník jest co do výšky omezen válcem elliptickým. Omezen-li rovinou vodorovnou a polovicí elliptického válce, platí výsledky tyto jen přibližně.

2. Průřez budiž kruhový. Tu

$$\frac{J}{h} = \frac{\pi}{64} d^3$$

a rovnice (129) nabývá tvaru

$$d^3 = \frac{32 M}{\pi k}.$$

a) Nosník jest na jednom konci vetknut, na druhém volný a obtížen osamělým břemenem na volném konci.

V tomto případě musí se průměr d měniti dle rovnice

$$d^3 = \frac{32\,P}{\pi\,k}\,x;$$

nosník má tvar kubického paraboloidu rotačního. Největší průměr d_1 vychází za $x = l$, totiž

$$d_1^{\,3} = \frac{32\,P}{\pi\,k}\,l;$$

sloučením obou rovnic obdržíme

$$\frac{d^3}{d_1^{\,3}} = \frac{x}{l}.$$

Co se týče ohybu, máme rovnici

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = \varepsilon\,x^{-\frac{1}{3}},$$

kde znamená

$$\varepsilon = \frac{2\,k\sqrt[3]{l}}{E\,d_1}.$$

Integrováním vychází

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \tfrac{3}{2}\,\varepsilon\,(x^{\frac{2}{3}} + C).$$

K hodnotě $x = l$ náleží (za vodorovného vetknutí) $\frac{d\,y}{d\,x} = 0$, pročež

$$C = -\,l^{\frac{2}{3}}$$

a tedy

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \tfrac{3}{2}\,\varepsilon\,(x^{\frac{2}{3}} - l^{\frac{2}{3}}).$$

Dalším integrováním vyplývá

$$y = \tfrac{3}{2}\,\varepsilon\,(\tfrac{3}{5}\,x^{\frac{5}{3}} - l^{\frac{2}{3}}\,x + D);$$

za $x = l$ jest $y = 0$, pročež

$$D = \tfrac{2}{5}\,l^{\frac{5}{3}}$$

a tedy

$$y = \tfrac{3}{10}\,\varepsilon\,(3\,x\,\sqrt[3]{x^2} - 5\,x\,\sqrt[3]{l^2} + 2\,l\,\sqrt[3]{l^2}).$$

Za $x = 0$ obdržíme největší pořadnici

$$y_0 = \tfrac{3}{5}\,\varepsilon\,l\,\sqrt[3]{l^2} = \frac{6}{5}\,\frac{k\,l^2}{E\,d_1}.$$

Na základě rovnice

$$\frac{J_1}{d_1} = \frac{P\,l}{2\,k}$$

neboli

$$\frac{k}{d_1} = \frac{P\,l}{2\,J_1}$$

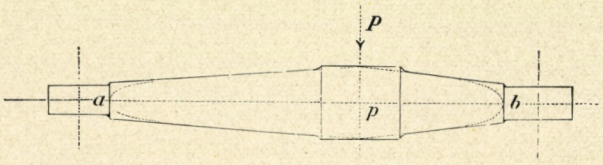
nabývá výraz onen tvaru

$$y_0 = \frac{3}{5}\,\frac{P\,l^3}{E\,J_1};$$

pořadnice y_0 jest v tomto případě při nosníku stejného odporu 1·8 krát větší než při nosníku prismatickém.

b) Nosník jest na obou koncích prostě podepřen a obtížen osamělým břemenem, jež působí v libovolném průřezu (p) (obr. 58.).

V tomto případě má se díl $\left\{\begin{matrix} a\,p \\ p\,b \end{matrix}\right\}$ jako nosník v p vetknutý a v $\left\{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\}$ břemenem



Obr. 58.

$$\left\{\begin{matrix} A = \dfrac{P\,p'}{l} \\ B = \dfrac{P\,p}{l} \end{matrix}\right\}$$

obtížený. Theoretický tvar nosníku byl by tedy kubický dvojparaboloid rotační; jeden z paraboloidů měl by vrchol *a*, druhý *b*; oba paraboloidy by se stýkaly (protínaly) v kružnici obsažené v průřezu (p); průměr d_1 této kružnice dán jest rovnicí

$$\frac{\pi}{32}\,d_1^3 = \frac{A\,p}{k} = \frac{B\,p'}{k} = \frac{P\,p\,p'}{k\,l},$$

tak že

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{32\,P\,p\,p'}{\pi\,k\,l}}.$$

Tento případ namítá se na př. ve strojnictví při nápravách (osách); tvar theoretický modifikuje se v praxi, jak následuje. Náprava má na koncích čepy, jichžto průměr se počítá jako při nosnících na jednom konci vetknutých, na druhém volných; příslušná reakce pokládá se za sílu rozdělenou rovnoměrně po délce čepu. Při průřezu (p) zřízen t. zv. náboj, t. díl válcový, k němuž se připevňuje příslušný díl stroje. Náprava sama dostane na obou stranách náboje tvar komolého rotačního kužele, objímajícího příslušný kubický paraboloid (obr. 58.).

3. Průřez mějž tvar jakýkoli, ale výšku stálou; nosník jest na obou koncích prostě podepřen a jakkoli obtížen. Stanoviti největší pořadnici křivky ohybové.

Poněvadž křivkou ohybovou jest v tomto případě kružnice, užijme známé vlastnosti její, že totiž pořadnice pravoúhelná k průměru jest střední měřickou úměrnou k oběma úsekům průměru. Máme tedy rovnici

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = y_0 (2\varrho - y_0) \doteq 2\varrho y_0,$$

a tedy

$$y_0 = \frac{l^2}{8\varrho}.$$

Vložíme-li za ϱ hodnotu z rovnice (130), obdržíme

$$y_0 = \frac{k l^2}{4 E h};$$

užijeme-li pak rovnice (129)

$$\frac{J}{h} = \frac{M}{2k}$$

neboli

$$\frac{k}{h} = \frac{M}{2J},$$

vyjde

$$(131) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y_0 = \frac{M l^2}{8 E J};$$

hodnoty M, J náležejí k témuž, jinak libovolnému průřezu, na př. k tomu, v němž moment M má největší prostou hodnotu.

Této rovnice lze užívati přibližně při nosnících plechových nýtovaných, kde měníme průřez stupňovitě připojujíce neb odnímajíce desky pasové. Výška průřezu není tu ovšem přesně stálá; pokud však tloušťka desk pasových proti výšce střední stěny jest dosti malá, můžeme pokládati výšku nosníku přibližně za stálou.

Jest-li při takovém nosníku y_0' hodnota největší pořadnice, jak ji dává rovnice (131) pro nosník stejného odporu, y_0'' pak hodnota platná za průřezu stálého, můžeme říci, že správná největší pořadnice y_0 jest větší než y_0'' ale menší než y_0', pročež arithmetický střed

$$y^+ = \tfrac{1}{2}(y_0'' + y_0')$$

jest ku správné hodnotě blíže než obě hodnoty y_0'', y_0'.

Obtížen-li nosník na př. rovnoměrně po délce a b, dává rovnice (131)

$$y_0' = \frac{q l^4}{64 E J};$$

za stálého průřezu však plyne z rovnice (37)

$$y_0'' = \frac{q\,l^4}{76{\cdot}8\,E\,J}.$$

Arithmetický střed vyjádřen jest rovnicí

$$(132) \quad \ldots\ldots\ldots\ y_0^{+} = \frac{q\,l^4}{69{\cdot}8\,E\,J} \doteq \frac{Q\,l^3}{70\,E\,J},$$

které lze tedy užívati přibližně při plechových nosnících nýtovaných, jsou-li na koncích prostě podepřeny a rovnoměrně po délce $a\,b$ obtíženy.

III. Prostá pružnost ve smyku.

§ 45. Prostá pružnost ve smyku neboli v posouvání aneb i ve střihu namítá se v určitém průřezu prutovém, jestliže zevnitřní síly, působící s jedné strany tohoto průřezu, mají výslednici T, jejížto přímka, jsouc obsažena v průřezu, prochází těžištěm jeho. Leč případ tento ryzí téměř nikdy se nevyskytuje; skoro vždy bývá síla T provázena dvojicí Δ_0, jejíž rovina jest pravoúhelna k průřezu (viz pružnost v ohybu), tak že jde vlastně o kombinaci smyku s ohybem. Často však bývá rámě a tím i moment M_0 dvojice Δ_0 tak nepatrný, že účinku dvojice netřeba si všímati. Tak jako jsme v případech, kde možno nedbati účinku síly T proti účinku dvojice Δ_0, mluvili o prosté pružnosti v ohybu (str. 57.), rozumějme prostou pružností ve smyku případy, kde účinku dvojice Δ_0 lze nedbati proti účinku síly posouvající T.

Jak se napětí tangencialné, vyvozené silou T, mění co do směru i velikosti, postupujeme-li v průřezu bod od bodu, vyvozeno bylo v §§ 38. a 39. za tou výminkou, že *přímka T jest osou symmetrie průřezu.* Pokládáme-li, že tato výminka naplněna jest i v přítomném případě, můžeme tu užívati rovnic, vyvozených v dotčených §§, a netřeba nového vyšetřování.*)

Jak se z napětí tangencialného τ stanoví idealná napětí hlavní, když normalné napětí ν rovná se nulle, seznali jsme v § 41. Možno však též

*) Často se klade při prosté pružnosti ve smyku, že napětí tangencialné má ve všech bodech průřezu týž směr (protivný k síle T) a touž velikost; tak dospívá se k rovnici

$$\tau = \frac{T}{U}$$

téhož rázu, jako jest rovnice (2) při prosté pružnosti v tahu či tlaku. Toto řešení úlohy není však — zvláště co směru napětí τ se týče — ani zhruba přibližné, přičíc se téměř při všech tvarech průřezových známé větě obecné theorie pružnosti, že totiž napětí tangencialné v obvodových bodech průřezu může působiti jen v tečně obvodové. (Viz připomenutí na str. 165.)

zůstati při napětí tangencialném a žádati, by nepřestoupilo jisté hodnoty k''', kterou pak zoveme dovoleným namáháním ve smyku neb i součinitelem bezpečné pevnosti ve smyku.

Součinitele k''' lze odvozovati obecně ze součinitele $\varkappa'''$ pevnosti ve smyku, totiž z napětí tangencialného na mezi pevnosti, jak ukazuje rovnice

$$k''' = \frac{\varkappa'''}{\mu},$$

kde μ jest t. zv. míra bezpečnosti (viz str. 37.); součinitel $\varkappa'''$ stanoví se zkouškami pevnosti ve smyku. Při hmotách isotropých možno však součinitele k''' odvozovati ze součinitelů k', k'' bezpečné pevnosti v tahu a tlaku. Jestliže totiž $\nu = 0$, vycházejí idealná napětí hlavní z rovnice (114) ą násl. (str. 174.) hodnotami

$$\left.\begin{matrix}\nu_{\mathrm{I}} \\ \nu_{\mathrm{II}}\end{matrix}\right\} = \pm \frac{m+1}{m}\tau, \quad \nu_{\mathrm{III}} = 0;$$

položíme-li pak, postoupíce ku krajním hodnotám dovoleným,

$$\nu_{\mathrm{I}} = k', \quad -\nu_{\mathrm{II}} = k'',$$

obdržíme, že tangencialné napětí nemá přestoupiti žádnou z hodnot

$$\frac{m}{m+1}k', \quad \frac{m}{m+1}k'',$$

tak že krajní dovolená hodnota k''' napětí τ dána jest rovnicí

$$k''' = \frac{m}{m+1}k,$$

kde k znamená menšího z obou součinitelů k', k''.

Poněvadž

$$m = 3 \ldots 4,$$

máme

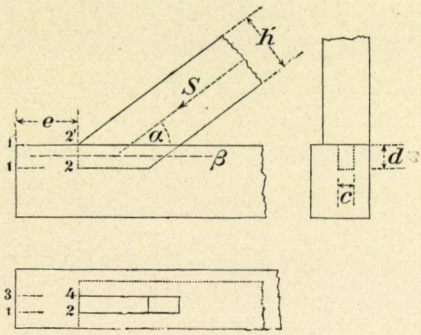
$$k''' = \tfrac{3}{4}k \ldots \tfrac{4}{5}k.$$

Buďte tu vytčeny střední hodnoty součinitele $\varkappa'''$ pevnosti ve smyku některých látek prakticky důležitých (v kg na cm^2).

	směrem vláken	pravoúhelně k vláknům
Dřeva jehličná	50	240
dřevo dubové	80	270
železo lité	1800	

	směrem válcování		napříč
železo kujné svárkové:	plech . 2900		2400
	pruty	2800 až	3000
železo kujné plávkové	. . . . .	3000 „	3800
kámen: žula	. . . . .	40 „	160
vápenec	. . . . .	30 „	120
pískovec	. . . . .	15 „	80
cihly	. . . . .	15 „	50

§ 46. **Příklady.** Ukažme některými příklady, jak užívati výsledků svrchu vyvozených.



Obr. 59.

Příklad 20. Dva dřevěné trámy — šikmý a vodorovný — spojeny jsou vespolek čepem a dlabem (obr. 59.); vypočísti délku zhlaví.

Jde-li o to, by nebylo ven vytlačeno dřevo vodorovného trámu, o které čep se opírá, skládá se plocha smyku vzdorující ze tří obdélníků: vodorovného (půdorys 1234) a dvou svislých (nárys 11′2′2); šířkou onoho jest šířka c, šířkou těchto hloubka d čepu; délka všem třem obdélníkům společná jest délka e zhlaví.

Při obdélníku

$$\max \tau = \frac{3}{2} \frac{T}{U}$$

(rovnice 106. na str. 169.); v přítomném případě T rovná se vodorovné složce H síly S, jež působí — tlakem — v ose šikmého trámu, tedy

$$H = S \cos \alpha,$$

svírají-li osy obou trámů úhel α;

$$U = (c + 2\,d)\,e$$

a proto

$$\max \tau = \frac{3}{2} \frac{H}{(c + 2\,d)\,e}.$$

Položíme-li

$$\max \tau = k''',$$

vyjde

$$(133) \quad \ldots\ldots\ldots e = \frac{3}{2} \frac{H}{k'''(c + 2\,d)}.$$

Při tom jsme pro větší bezpečnost nevzali v úvahu tření mezi trámem šikmým a vodorovným.

Jest-li na př. $S = 1500\ kg$, $\alpha = 38^0$, $c = 5\ cm$, $d = 8\ cm$, tedy $H = 1500 \,.\, 0{\cdot}788 = 1182\ kg$, a klademe-li

$$k''' = \frac{\varkappa'''}{\mu} = \frac{50}{10} = 5\ kg/cm^2,$$

vychází

$$e = \frac{3 \,.\, 1182}{2 \,.\, 5 \,.\, 21} = 17\ cm.$$

Jinak může se spojení porušiti usmyknutím čepu samého. Jest-li h' výška šikmého trámu, máme vzdorující plochu čepu

$$\frac{c\,h'}{\sin\alpha};$$

poněvadž tu nejde o směr přirozených vláken, ale o směr příčný šikmý, sluší zvoliti součinitele k''' přiměřeně mezi hodnotami, platnými jednak směrem vláken, jednak pravoúhelně k vláknům. Jest-li $\left\{\begin{matrix} k_1''' \\ k_2''' \end{matrix}\right\}$ dovolené namáhání směrem $\left\{\begin{matrix} \text{vláken} \\ \text{pravoúhelným} \end{matrix}\right\}$, stanovme dovolené namáhání ve směru příčném, který od směru vláken má odchylku α, z rovnice

$$k''' = k_1''' + (k_2''' - k_1''') \sin\alpha.$$

Hodnotami $k_1''' = 5$, $k_2''' = 24\ kg/cm^2$ vychází

$$k''' = 5 + 19 \sin\alpha$$

a za $\alpha = 38^0$

$$k''' = 16{\cdot}7\ kg/cm^2;$$

jestliže pak $h' = 20\ cm$, jest vzdorující plocha čepu

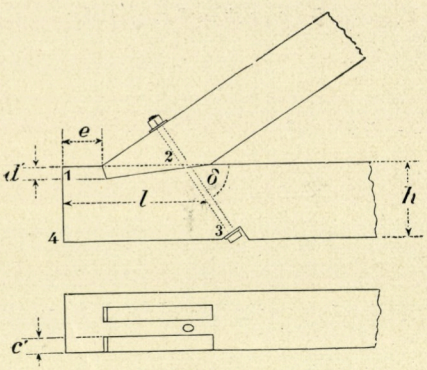
$$\frac{5 \,.\, 20}{\sin 38^0} = 162{\cdot}4\ cm^2$$

a tedy dovolený odpor čepu

$$162{\cdot}4 \,.\, 16{\cdot}7 = 2712\ kg,$$

značně větší než síla H. K usmyknutí čepu netřeba tu tedy přihlížeti. Tím méně jest pravdě podobno, že se usmykne jen díl čepu, díl zůstalý pak vylačí příslušný díl zhlaví, na př. usmyknutím v rovině β (obr. 59.).

Příklad 21. Dejme tomu, že pro nedostatečnou délku zhlaví jsou oba trámy příkladu předešlého spojeny zapuštěním a železným svorníkem, jak ukazuje obr. 60. Vypočísti průměr svorníku.



Obr. 60.

Vzdorující plocha dřeva skládá se ze dvou vodorovných obdélníků zšíři c' a (přibližně) zdéli e, pak ze tří svislých lichoběžníků, jež však počítejme jak obdélníky zšíři d' a zdéli e. Máme tedy vzdorující plochu $u_d = (2\,c' + 3\,d')\,e$, tak že dovolený odpor dřeva činí

$$\tfrac{2}{3}\,k_d'''\,u_d = \tfrac{2}{3}\,k_d'''\,(2\,c' + 3\,d')\,e,$$

znamená-li k_d''' dovolené namáhání dřeva ve smyku.

Vzdorující plocha železa (v rovině vodorovné) jest elliptická a má obsah

$$u_ž = \frac{\pi\,d^2}{4\sin\delta},$$

znamená-li d průměr svorníku, δ odchylku osy svorníkové od vodorovné roviny; jest-li $k_ž'''$ dovolené namáhání železa ve smyku, činí dovolený odpor svorníku

$$\tfrac{3}{4}\,k_ž'''\,u_ž = \frac{3\,\pi}{16}\,\frac{k_ž'''\,d^2}{\sin\delta}\;^{*}).$$

Máme tedy výminku

$$\tfrac{2}{3}\,k_d'''\,(2\,c' + 3\,d')\,e + \frac{3\,\pi}{16}\,\frac{k_ž'''\,d^2}{\sin\delta} = H;$$

z ní vychází

$$(134)\ \ldots\ldots\ d = \sqrt{\frac{16\sin\delta}{3\,\pi\,k_ž'''}\,[H - \tfrac{2}{3}\,k_d'''\,(2\,c' + 3\,d')\,e]}.$$

Vzali jsme tu v úvahu usmyknutí svorníku a vytlačení dřeva položeného před výstupky šikmého trámu; jinak se může spojení porušiti výhradně vytlačením dřeva a to jednak položeného před svorníkem, jednak před výstupky šikmého trámu. V tomto případě odpadá odpor svorníku; za to vzdorující plocha dřeva se zvětšuje o dva svislé lichoběžníky 1 2 3 4 (obr. 60.). Počítáme-li je přibližně jak obdélníky o rozměrech h, l, kde h jest výška vodorovného trámu, l pak střední šířka obou lichoběžníků, činí veškerá vzdorující plocha dřeva

$$(2\,c' + 3\,d')\,e + 2\,l\,h,$$

tak že vychází výminka

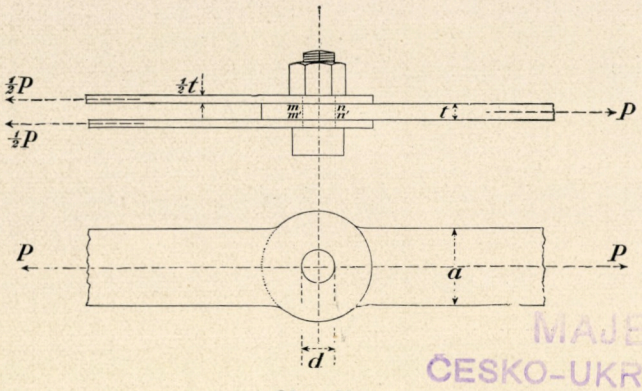
*) Při kruhu dle rovnice (110) na str. 170.

$$\max\tau = \tfrac{4}{3}\,\frac{T}{U} = k''',\quad T = \tfrac{3}{4}\,k'''\,U;$$

výrazu toho užijme přibližně i při ellipse.

$$(135) \ldots\ldots\ldots (2\,c' + 3\,d')\,e + 2\,l\,h \geqq \tfrac{3}{2}\,\frac{H}{k_d'''}.$$

Příklad 22. Železné pruty průřezu obdélníkového (na př. články taženého pasu nosníku příhradového) jsou při styku rozšířeny ve věnec a spojeny svorníkem (obr. 61.). Stanoviti průměr d svorníku.



Obr. 61.

MAJETEK
ČESKO-UKR. KOMITÉTU
V Č.S.R.

Budiž na př. v pravo jediný prut zšíři a, ztloušti t; v levo buďtež (pro souměrné působení sil) dva pruty, každý zšíři a, ztloušti $\frac{t}{2}$, s obou stran prutu pravého; s levé i pravé strany působí tažná síla výsledná P.

Aby spojení zcela se zrušilo, musel by se svorník usmyknouti v obou průřezech mn, $m'n'$; svorník vzdoruje tedy současně dvěma průřezy, a vzdorující plocha jest

$$u = 2 \cdot \frac{\pi}{4}\,d^2 = \frac{\pi\,d^2}{2};$$

největší napětí tangencialné v kruhovém průřezu má hodnotu

$$\max \tau = \frac{4}{3}\,\frac{P}{u},$$

tak že vychází výminka

$$\frac{8\,P}{3\,\pi\,d^2} = k''',$$

z čehož plyne

$$(136^a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots d = \sqrt{\frac{8\,P}{3\,\pi\,k'''}}.$$

Počítáme-li průměr d z rozměrů prutů (nikoli ze síly P), které mají hověti výmince

$$\frac{P}{a\,t} = k',$$

máme rovnici

$$(136^b) \quad \ldots\ldots\ldots d = \sqrt{\frac{8\,k'\,a\,t}{3\,\pi\,k'''}}.$$

Svorník namáhán jest dále o h y b e m (poněvadž v praxi nelze se uvarovati mezer); maximum momentové namítá se v průřezu položeném uprostřed mezi $m\,n$ a $m'\,n'$ (síla posouvající mění tu znaménko), a moment má zde hodnotu

$$M = \tfrac{1}{2} P \,.\, \tfrac{3}{4} t = \tfrac{3}{8} P t.$$

Z rovnice

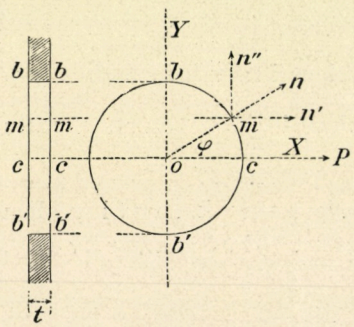
$$\frac{J}{e} = \frac{M}{k},$$

kde

$$\frac{J}{e} = \frac{\pi}{32} d^3,$$

vychází tak

$$(137) \quad \ldots\ldots\ldots d = \sqrt[3]{\frac{12\,P\,t}{\pi\,k}}.$$



Obr. 62.

Konečně sluší vzíti v úvahu t l a k s v o r n í k a v e v n i t ř n í v á l c o v o u p l o c h u v ě n c e.*) O tomto tlaku lze pokládati, že se rozděluje na polovici plochy válcové, leč nikoli rovnoměrně. V přímkách bb, $b'b'$ (obr. 62.) napětí ν rovná se nulle; odtud ν roste ku přímce cc, kde dostupuje maxima. (Pokládejme zde t l a k za positivný.) Zákon proměny napětí ν možno vyjádřiti rovnicí

$$\frac{\nu}{\cos\varphi} = \beta,$$

kde znamená β určitou konstantu. V bodě c, kde $\varphi = 0$, má ν hodnotu (největší)

$$\nu_c = \beta;$$

lze tedy psáti

$$(a) \quad \ldots \quad \nu = \nu_c \cos\varphi.$$

Jest-li ds prvek kruhového oblouku, tedy $t\,ds$ prvek válcové plochy při přímce $m\,m$, náleží k tomuto prvku vnitřní síla

$$n = \nu\,t\,ds = \nu_c\,t\,ds\cos\varphi = \nu_c\,t\,dy,$$

kde dy jest pravoúhelný průmět prvku obloukového ds na osu Y, pročež součin $t\,dy$ vyjadřuje obsah průmětu onoho prvku plošného na rovinu, jež obsahujíc

*) Němečtí auktoři užívají tu názvu S t a u c h d r u c k.

osu svorníku jest pravoúhelna ku přímce P (nebo-li k ose X). Zákon vyjádřený rovnicí (a) vyslovuje tedy, že k prvkům plochy válcové, jichžto průměty na dotčenou rovinu mají stejné obsahy plošné, náležejí rovné vnitřní síly n.

Poněvadž P jest výslednicí všech sil n, které rozložiti lze ve složky n', n'' působící směrem os souřadnicových X, Y, platí výminka

$$P = \Sigma n' ;$$

výminky další jsou naplněny souměrností. Leč

$$n' = n \cos \varphi = r\, t\, \nu_c \cos^2 \varphi \, d\varphi,$$

pročež

$$P = r\, t\, \nu_c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \tfrac{1}{2}\, \pi\, r\, t\, \nu_c = \tfrac{1}{4}\, \pi\, d\, t\, \nu_c$$

a tedy

$$\text{(b)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \nu_c = \frac{4}{\pi} \frac{P}{t\,d} \doteq \frac{14}{11} \frac{P}{t\,d} .$$

Z výminky $\nu_c = k_c$ bezpečné pevnosti vychází pak

$$d = \frac{14}{11} \frac{P}{k_c\, t} .$$

Co se týče součinitele k_c, pišme

$$k_c = \vartheta\, k,$$

kde k jest součinitel bezpečné pevnosti v ohybu; za ϑ pak dle dosavadních zkušeností lze položiti 2 až 2·5.

Dle toho bylo by průměr svorníku počítati z rovnice

$$\text{(138)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad d = \tfrac{14}{11} \frac{P}{\vartheta\, k\, t} .$$

Ze tří hodnot průměru d, stanovených rovnicemi (136), (137), (138), sluší vzíti n e j v ě t š í.

Jest-li na př. $P = 12000\ kg$, $t = 2\ cm$, $k = 1200\ kg/cm^2$, $k''' = 1000\ kg/cm^2$ (ocel), vychází z rovnice (136ª):

$$d = \sqrt{\frac{8 \,.\, 12000}{3 \,.\, 3{\cdot}14 \,.\, 1000}} = 3{\cdot}2\ cm,$$

dále z rovnice (137):

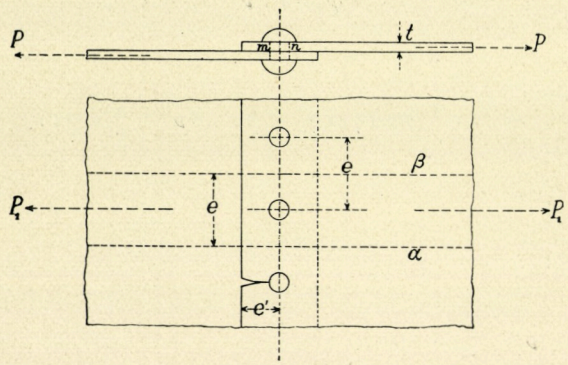
$$d = \sqrt[3]{\frac{12 \,.\, 12000 \,.\, 2}{3{\cdot}14 \,.\, 1200}} = 4{\cdot}2\ cm,$$

konečně z rovnice (138), béřeme-li $\vartheta = 2\frac{1}{4}$,

$$d = \frac{14 \,.\, 12000 \,.\, 4}{11 \,.\, 9 \,.\, 1200 \,.\, 2} = 2{\cdot}8 \; cm;$$

rozhoduje tedy o h y b.

P ř í k l a d 23. Dvě desky plechové jsou přeplátovány a spojeny jedinou řadou nýtů (n ý t o v á n í m j e d n o d u c h ý m); v každou desku působí tažná síla P (obr. 63.). Vyšetřiti jest příslušné rozměry.



Obr. 63.

Průměr d nýtů obyčejně se nepočítá, ale volí empiricky a to v jisté souvislosti s tloušťkou t desk; jde pak hlavně o t. zv. r o z t e č, totiž o vzdálenost e os dvou sousedních nýtů. Přihlížejme k nýtu jedinému; lze mu přisouditi proužek desk plechových, obsažený mezi dvěma rovinami α, β, vedenými pravoúhelně k rovině os nýtových a rovnoběžně s těmito osami tak, že $\left\{\begin{matrix}\text{jedna}\\\text{druhá}\end{matrix}\right\}$ rovina rozpoluje vzdálenost osovou dotčeného nýtu a nýtu $\left\{\begin{matrix}\text{předchozího}\\\text{následujícího}\end{matrix}\right\}$; proužek má tedy šířku e. Ze síly P připadá mu určitý díl P_1.

Aby spojení se porušilo, musil by se nýt u s m y k n o u t i v průřezu $m\,n$; s jedné strany tohoto průřezu působí síla P_1, kterou lze rozložiti jednak v sílu P_1'' téhož směru a téže velikosti, ale působící v průřezu $m\,n$, jednak ve dvojici $(P_1 P_1')$, stanovenou momentem $M = \frac{1}{2} P_1 t$; namítá se tedy i zde vedle síly posouvající $T = P_1'' = P_1$ moment ohybový a tedy vedle smyku též obyb, jehož však dále nedbejme, poněvadž rámě $\frac{t}{2}$ jest poměrně nepatrné. Smyku vzdoruje průřez $m\,n$ nýtu, tedy plocha

$$v = \frac{\pi}{4} d^2;$$

největší napětí jest

$$\max \tau = \tfrac{4}{3} \frac{P_1}{v},$$

tak že máme výminku

$$\tfrac{4}{3}\frac{P_1}{v} = k''',$$

znamená-li k''' dovolené namáhání nýtu ve smyku. Pišme

$$P_1 = \tfrac{3}{4}\, k'''\, v\,.$$

Plech vzdoruje t a h u; nebezpečným (nejslabším) místem jest průřez obsahující osy všech nýtů; vzdorující plocha $e\,t$ dotčeného svrchu proužku zmenšena jest v nebezpečném průřezu děrou nýtovou o $t\,d$, má tu tedy hodnotu

$$(e - d)\,t;$$

pročež musí plech hověti výmince

$$P_1 = k'\,(e - d)\,t\,.$$

Přirovnáním obou výrazů síly P_1 vychází

$$e = d + \tfrac{3}{4}\frac{k'''}{k'}\frac{v}{t}\,;$$

znamenáme-li pak poměr

$$\frac{k'''}{k'} = \beta,$$

a vyjádříme-li v průměrem, obdržíme rovnici

$$(139)\ \ldots\ e = d\left(1 + \frac{3\,\pi}{16}\,\beta\,\frac{d}{t}\right) = d\left(1 + 0{\cdot}589\,\beta\,\frac{d}{t}\right),$$

z níž jest počítati rozteč nýtovou.

Co se týče poměru β, sluší připomenouti, že odpor nýtů skládá se jednak z odporu železa nýtového ve smyku, jednak z tření působícího mezi hlavicemi nýtů a deskami plechovými; tření to jest obzvláště značné, nýtuje-li se za horka. Dle zkoušek F a i r b a i r n o v ý c h bylo by součet obou odporů položiti rovným pevnosti plechu v tahu; jest však bezpečnější, nedbáme-li vůbec tření a béřeme-li v úvahu jen odpor nýtů ve smyku.

Vedle namáhání nýtu ve smyku sluší dbáti též t l a k u n ý t u v o b l i n u d í r y n ý t o v é. Postupujeme-li v této příčině tak, jak jsme učinili v příkladě 22., vychází největší napětí

$$v_c = \tfrac{14}{11}\frac{P_1}{t\,d} = k_c = \vartheta\, k.$$

Aby dovolený tento odpor

$$P_1 = \tfrac{11}{14}\,\vartheta\, k\, t\, d$$

nebyl menší než dovolený odpor

$$P_1 = \tfrac{3}{4}\, k''' v$$

nýtu ve smyku, musí

$$1\tfrac{1}{4}\, \vartheta\, k\, t\, d \geqq \tfrac{3}{4}\, k''' v,$$

tedy

$$(140) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{d}{t} \leqq \tfrac{4}{3}\, \vartheta\, \frac{k}{k'''}.$$

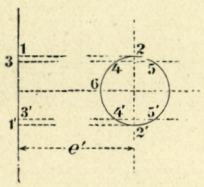
Není-li výminka (140) naplněna, jest počítati rozteč e hledíc ku tlaku nýtu v oblinu díry nýtové, totiž z rovnice vyjadřující, že odpor této obliny má se rovnati odporu plechu v tahu, tedy

$$k'\,(e - d)\, t = 1\tfrac{1}{4}\, \vartheta\, k\, t\, d,$$

z čehož

$$(141) \ldots\ldots e = d\,(1 + 1\tfrac{1}{4}\, \vartheta),$$

nedbáme-li rozdílu mezi k' a k.



Obr. 64.

Co se týče vzdálenosti e' os nýtových od kraje plechu, přihlíží se obyčejně k vytlačení plechu 1262'1' (obr. 64.), položeného před nýtem Plech vzdoruje tu s m y k u; vzdorující plocha skládá se ze dvou obdélníků zdéli e' a zšíři t. Máme tedy

$$\max \tau = \tfrac{3}{2}\, \frac{P_1}{u} = \tfrac{3}{2}\, \frac{P_1}{2\, e'\, t} = k_1''',$$

znamená-li k_1''' dovolené namáhání plechu. Aby dovolený odpor v této příčině, totiž

$$P_1 = \tfrac{4}{3}\, k_1'''\, e'\, t,$$

vyrovnal se dovolenému odporu

$$P_1 = \tfrac{3}{4}\, k'''\, v$$

nýtu, musí

$$e' = \frac{9\,\pi}{64}\, \frac{k'''}{k_1'''}\, \frac{d^2}{t} = 0{\cdot}44\, \frac{k'''}{k_1'''}\, \frac{d^2}{t}.$$

Místo usmyknutí plechu v rovinách 1 2, 1' 2' může se usmyknouti z části průřez nýtový v plochách 4 2 5, 4' 2' 5', zároveň pak plech v rovinách 3 4, 3' 4'; poněvadž celkový odpor jest tu menší, bylo by položiti

$$(142) \quad \ldots\ldots\ldots \quad e' > 0{\cdot}44\, \frac{k'''}{k_1'''}\, \frac{d^2}{t}\ .^{*})$$

*) Dle zkoušek pevnosti nýtování neporušuje se však plech spůsobem právě dotčeným; obyčejně puká v rovině, jež obsahujíc osu příslušného nýtu jest pravoúhelná k rozměru e (obr. 63.). Rozměr e' volí se pak empiricky.

Seslabení plechu otvory nýtovými stanovíme poměrem σ obsahů plochy vzdorující seslabené k neseslabené. Tedy

$$\sigma = \frac{(e - d)\,t}{e\,t} = \frac{e - d}{e};$$

vložíme-li za e hodnotu z rovnice (139), obdržíme

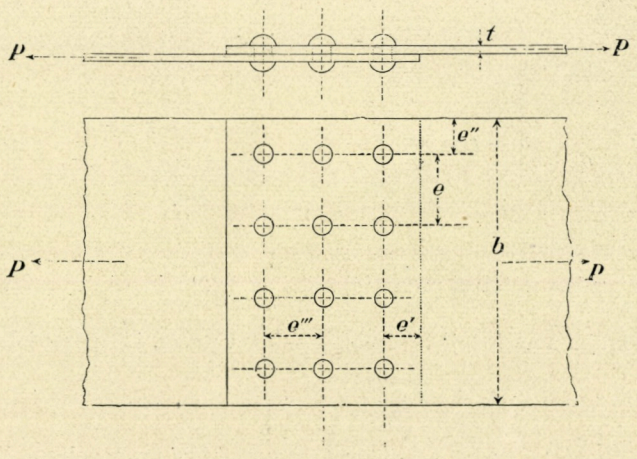
$$\sigma = \frac{\frac{3\pi}{16}\,\beta\,\frac{d}{t}}{\frac{3\pi}{16}\,\beta\,\frac{d}{t} + 1}$$

anebo

$$(143) \ldots\ldots\ldots \sigma = \frac{1}{1 + \frac{16}{3\pi\beta}\,\frac{t}{d}},$$

Poměr σ jest pravý zlomek; plech seslabuje se tím méně, čím blíže σ k jedničce, tedy čím větší má hodnotu; hodnota zlomku σ jest však tím větší, čím jmenovatel jeho jest menší, tedy čím poměr $\frac{d}{t}$ jest větší. Po stránce úsporné bylo by proto voliti nýty silnější a rozteč větší. Jde-li však hlavně o těsnou zavírku, nutno voliti rozteč menší a nýty slabší.

Připomenutí. Zkoušky pevnosti nýtování ukazují, že pevnost plechu i nýtů ve spojení nýtovém jest poněkud jiná (obyčejně menší) než absolutní pevnost ve smyku příslušné látky.



Obr. 65.

Příklad 24. Plechové desky příkladu 23. jsou spojeny několika řadam. nýtů (nýtováním násobným); vyšetřiti příslušné rozměry (obr. 65.)

Budiž obecně ε počet všech nýtů, ε_1 počet nýtů obsažených v jedné řadě, tedy $\eta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$ počet řad nýtových. Desky mějtež šířku b a tloušťku t.

Pokládáme-li, že síla P se rozděluje rovnou měrou na všecky nýty, máme

$$\max \tau = \tfrac{4}{3} \frac{P}{\varepsilon v} = k'''$$

a tedy

$$P = \tfrac{3}{4} k''' \varepsilon v.$$

Co se týče desk plechových, jest nebezpečným místem průřez obsahující osy jedné z krajních řad nýtových*); vzdorující plocha činí tu $(b - \varepsilon_1 d) t$, tak že máme výminku

$$\frac{P}{(b - \varepsilon_1 d) t} = k',$$

z čehož

$$P = k' (b - \varepsilon_1 d) t = k' \varepsilon_1 (e - d) t,$$

poněvadž

$$b = (\varepsilon_1 - 1) e + 2 e'' \doteq \varepsilon_1 e.$$

Přirovnáním obou výrazů P vyplývá

$$e = d + \tfrac{3}{4} \frac{k'''}{k'} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \frac{v}{t}$$

nebo

$$(144) \ldots e = d \left(1 + \frac{3\pi}{16} \beta \eta \frac{d}{t}\right) = d \left(1 + 0{\cdot}589 \beta \eta \frac{d}{t}\right).$$

Položíme-li tu $\eta = 1$, vyplývá rovnice (139), platná o nýtování jednoduchém.

Rozměry e', e'', e''' volí se empiricky.

Poměr seslabení plechu

$$\sigma = \frac{b - \varepsilon_1 d}{b} = \frac{e - d}{e} = \frac{\frac{3\pi}{16} \beta \eta \frac{d}{t}}{\frac{3\pi}{16} \beta \eta \frac{d}{t} + 1},$$

---

*) Krajní řadou nýtovou přenáší se díl $\frac{P}{\eta}$ síly P z jedné desky na druhou, tak že mezi řadou krajní a následující působí $\frac{\eta - 1}{\eta} P$ v první, $\frac{P}{\eta}$ v druhé desce. Druhou řadou nýtovou přenáší se další díl $\frac{P}{\eta}$ na desku druhou, tak že mezi druhou a třetí řadou působí $\frac{\eta - 2}{\eta} P$ v první, $\frac{2P}{\eta}$ v druhé desce atd. V průřez obsahující osy krajní řady nýtové působí tedy ještě všecka síla P, a tento průřez jest nebezpečným.

tedy

$$(145) \ldots\ldots\ldots \sigma = \frac{1}{1 + \frac{16}{3\,\pi\,\beta\,\eta}\,\frac{t}{d}}.$$

Příklad 25. Vypočísti rozdělení nýtů při nosníku plechovém nýtovaném příkladu 19. (obr. 51. na str. 183.).

Na nosníku vyskytují se tři soustavy nýtové; první spojuje desky pasové s vodorovnými rameny úhelníků, druhá střední stěnu se svislými rameny úhelníkovými, třetí pak se namítá při sparách střední stěny a spojuje díly této stěny s deskami krycími.

Nýty soustavy první ($\mathfrak{d}_1$ budiž průměr, $\mathfrak{e}_1$ rozteč nýtů) vzdorují vnitřním silám tangencialným, jež působí ve vodorovných rovinách, v nichž se stýkají desky pasové vespolek a s vodorovnými rameny úhelníků (viz § 38.); největší napětí tangencialné namítá se ve vzdálenosti $z = c = \frac{h_1}{2}$ od neutralné osy Y. Znamená-li t_1 vnitřní sílu tangencialnou připadající jednomu nýtu první soustavy, platí rovnice

$$2\,t_1 = \tau\,b_0\,\mathfrak{e}_1,$$

kde

$$\tau = \frac{T}{J}\,\frac{\mathfrak{M}_c}{b_0},$$

tak že rozteč nýtová

$$\mathfrak{e}_1 = \frac{2\,J}{T\,\mathfrak{M}_c}\,t_1.$$

Jest-li τ_1 největší napětí tangencialné v průřezu nýtovém, platí rovnice

$$\tau_1 = \tfrac{4}{3}\,\frac{t_1}{v},$$

kde znamená v obsah průřezu nýtového; položíme-li $\tau_1 = k'''$, vychází

$$t_1 = \tfrac{3}{4}\,k'''\,v$$

a tedy

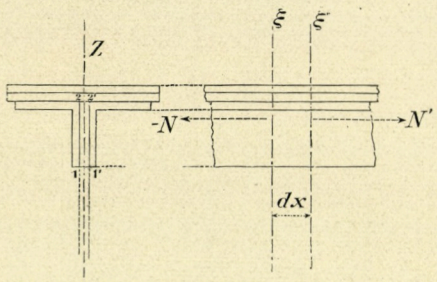
$$\mathfrak{e}_1 = \tfrac{3}{2}\,\frac{k'''\,J\,v}{T\,\mathfrak{M}_c},$$

kde

$$\mathfrak{M}_c = (b - 2\,\mathfrak{d}_1)\,t\left(c + \frac{t}{2}\right).$$

Nýty soustavy druhé vzdorují vnitřní síle tangencialné, působící mezi svislými rameny úhelníků a střední stěnou. Theorie napětí tangencialného, vyložená v § 38., dává při průřezu obdélníkovém $\tau_z = 0$, $\tau_x = 0$, tak že by

v dotčených rovinách svislých nebylo vůbec napětí tangencialného. Jde-li však o tak náhlé změny šířky průřezové, jaké v přítomném případě se namítají, nemají výsledky, vyvozené v § 38., plné platnosti, a nutno tento případ zvlášť vyšetřiti.



Obr. 66.

K tomu konci mysleme si — jako v § 38. na str. 161. — prvek nosníkový tvaru deskového, obsažený mezi průřezy (x), $(x + dx)$ neboli ξ, ξ' (obr. 66.); místo roviny (z), která v § 38. rozdělovala tento prvek v díl hořejší a dolejší, mysleme si dělící plochu lomenou 1 2 2′ 1′, oddělující vrchní pás i s příslušnými úhelníky od stěny střední.

Odejme-li se hmota nosníková na $\left\{\begin{matrix}\text{levé}\\ \text{pravé}\end{matrix}\right\}$ straně roviny $\left\{\begin{matrix}\xi\\ \xi'\end{matrix}\right\}$, nutno působení její nahraditi silami normalnými, jež mají výslednici $\left\{\begin{matrix}-N\\ N'\end{matrix}\right\}$, pak silami tangencialnými; směrem osy X působí mimo tyto síly normalné ještě tangencialné síly v oné ploše lomené; výslednice jejich budiž $\mathfrak{T}$. Příslušná výminka rovnováhy

$$-N + N' - \mathfrak{T} = 0$$

dává

$$\mathfrak{T} = N' - N = \frac{\partial N}{\partial x}\, dx\,.$$

Síla $\mathfrak{T}$ rozděluje se na délku dx; ku vzdálenosti e_2, rovné rozteči nýtové, náleží síla

$$t_2 = \frac{\partial N}{\partial x}\, e_2\,,$$

pokládáme-li, že napětí, jež působí v průřezu, obsahujícím osu příslušného nýtu druhé soustavy, může se přibližně přisouditi vší délce e_2, obsažené mezi rozpolovacími body rozteče předchozí a následující. Poněvadž pak (viz § 38.)

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{T}{J}\,\mathfrak{M}_z\,,$$

kde položme za z přibližně pořadnici $c' = \frac{f}{2}$ osy nýtové, čítajíce však k hořejšímu dílu i svislá ramena úhelníková, vychází

$$t_2 = \frac{T}{J}\,\mathfrak{M}_{c'}\, e_2$$

nebo

$$e_2 = \frac{J}{T\,\mathfrak{M}_{c'}}\, t_2\,.$$

Poněvadž nýt druhé soustavy vzdoruje současně dvěma průřezy, máme v průřezu nýtovém

$$\max \tau = \tfrac{4}{3} \frac{t_2}{2v} .$$

Položíme-li $\max \tau = k'''$, vyjde

$$t_2 = \tfrac{3}{2} k''' v$$

a tedy rozteč

$$\mathfrak{e}_2 = \tfrac{3}{2} \frac{k''' J v}{T \mathfrak{M}_{c'}} ,$$

kdežto

$$\mathfrak{M}_{c'} = (b - 2\mathfrak{d}_1)\, t\left(c + \frac{t}{2}\right) + 2\, r\, s\left(c - \frac{s}{2}\right) + 2\,(r' - s)\, s\left(c - \frac{r' + s}{2}\right);$$

zde znamená $\left\{ \begin{matrix} r \\ r' \end{matrix} \right\}$ délku $\left\{ \begin{matrix} \text{vodorovného} \\ \text{svislého} \end{matrix} \right\}$ ramene úhelníkového, s pak tloušťku každého z nich.

Poněvadž $\mathfrak{M}_{c'} > \mathfrak{M}_c$, vychází $\mathfrak{e}_2 < \mathfrak{e}_1$. Mají-li však nýty soustavy druhé pravidelně se střídati s nýty soustavy první, t. j. má-li osa nýtu soustavy druhé býti v průřezu rozpolujícím rozteč nýtů soustavy první, musí obě rozteče býti rovny, tak že rovnice

$$(146) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{e} = \tfrac{3}{2} \frac{k''' J v}{T \mathfrak{M}_{c'}}$$

stanoví rozteč nýtů obou prvních soustav.

Připomenutí. Poněvadž síla T se mění zároveň s úsečkou x, měla by se měniti i rozteč po délce nosníku; pravidlem bývá však stejná po vší délce; v rovnici (146) sluší pak vložiti největší prostou hodnotu síly posouvající T.

Zároveň jest přihlížeti ku tlaku nýtu v oblinu díry nýtové. Největší napětí v tlaku činí při nýtu druhé soustavy

$$v_c = \tfrac{14}{11} \frac{t_2}{a\mathfrak{d}} ,$$

kde a jest tloušťka střední stěny (tato tloušťka jest menší než tloušťka $2s$ obou svislých ramen úhelníkových), $\mathfrak{d}$ pak průměr nýtu.

Položíme-li (jako svrchu v příkladě 22.)

$$v_c = \vartheta k ,$$

obdržíme dovolený odpor

$$t_2' = \tfrac{11}{14} \vartheta k a \mathfrak{d} .$$

Z obou dovolených odporů t_2, t_2' sluší vzíti v úvahu ten, který má hodnotu menší; netřeba tedy dbáti tlaku nýtu v oblinu díry nýtové, pokud

$$\tfrac{3}{2}\, k'''\, v \leqq \tfrac{11}{14}\, \vartheta\, k\, a\, \mathfrak{d}\,,$$

tedy pokud

$$\frac{\mathfrak{d}}{a} \leqq \tfrac{2}{3}\, \frac{k}{k'''}\, \vartheta\,.$$

Není-li tato výminka naplněna, počítati jest rozteč z rovnice

$$\frac{T\,\mathfrak{M}_{c'}}{J}\, \mathfrak{e} = \tfrac{11}{14}\, \vartheta\, k\, a\, \mathfrak{d}\,,$$

tak že

$$(147) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{e} = \tfrac{11}{14}\, \frac{\vartheta\, k\, a\, \mathfrak{d}\, J}{T\,\mathfrak{M}_{c'}}\,.$$

Nýty soustavy třetí vzdorují dvojí vnitřní síle tangencialné: jedna vzniká z normalného napětí, jež by působilo ve styčné rovině obou desk střední stěny, kdyby nebylo spáry; druhá vychází z tangencialného napětí v téže rovině. Jednomu nýtu lze přibližně přisouditi jednak sílu $t_3' = \nu\, a\, \mathfrak{e}_3$, jednak sílu $t_3'' = \tau\, a\, \mathfrak{e}_3$. Napětí τ má největší hodnotu za $z = \mathfrak{0}$, totiž v ose neutralné Y; roste-li z, ubývá tohoto napětí po zákoně paraboly. Napětí $\nu = \mathfrak{0}$ za $z = \mathfrak{0}$; roste-li z, roste ν po zákoně přímky. Síla t_3' působí směrem osy X, síla t_3'' směrem osy Z. Počítejme rozteč $\mathfrak{e}_3$ výhradně ze síly t_3'' a přihlížejme tedy k hodnotě její v ose Y.

Za $z = \mathfrak{0}$ máme

$$\tau = \frac{T\,\mathfrak{M}_0}{J\,a}\,, \qquad t_3 = \tau\, a\, \mathfrak{e}_3 = \frac{T\,\mathfrak{M}_0}{J}\, \mathfrak{e}_3\,,$$

tedy

$$\mathfrak{e}_3 = \frac{J}{T\,\mathfrak{M}_0}\, t_3\,.$$

Kryta-li spára jen s jedné strany deskou, máme v průřezu nýtovém

$$\max \tau = \tfrac{4}{3}\, \frac{t_3}{v}\,;$$

kryta-li s obou stran, jak bývá pravidlem, tu

$$\max \tau = \tfrac{4}{3}\, \frac{t_3}{2\,v}\,.$$

Položíme-li $\max \tau = k'''$, vyjde za krytí oboustranného

$$t_3 = \tfrac{3}{2}\, k'''\, v$$

a tedy

$$(148^a) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{e}_3 = \tfrac{3}{2} \frac{k''' J v}{T \mathfrak{M}_0};$$

za krytí jednostranného vyplývá však

$$(148^b) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{e}_3 = \tfrac{3}{4} \frac{k''' J v}{T \mathfrak{M}_0}.$$

Při tom

$$\mathfrak{M}_0 = (b - 2\mathfrak{d}_1)\, t \left(c + \frac{t}{2}\right) + 2 r s \left(c - \frac{s}{2}\right) +$$

$$2 (r' - s)\, s \left(c - \frac{r' + s}{2}\right) + \tfrac{1}{2} a c^2.$$

Zároveň jest zase přihlížeti ku tlaku nýtu v oblinu díry nýtové, není-li naplněna výminka

$$(149^a) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\mathfrak{d}}{a} \leqq \tfrac{2}{3} \frac{k}{k'''} \vartheta$$

za krytí oboustranného, ale

$$(149^b) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\mathfrak{d}}{a} \leqq \tfrac{4}{3} \frac{k}{k'''} \vartheta$$

za krytí jednostranného.

MAJETEK ČESKO-UKR. KOMITÉTU V Č.S.R.

VI. Prostá pružnost v kroucení.

§ 47. **Síly zevnitřní a vnitřní.** Prostá pružnost v kroucení neboli v točení namítá se v určitém příčném průřezu prutu, jestliže síly zevnitřní, působící v prut s jedné strany tohoto průřezu, se skládají ve výslednou dvojici Δ_k, jejíž osa jest pravoúhelná k průřezu, rovina tedy rovnoběžná s průřezem. Aby tomu tak bylo ve všech průřezech, musily by v prut působiti výhradně dvojice onoho rázu. Mezi rovinami každých dvou sousedních dvojic má pak moment M dvojice výsledné Δ_k stálou hodnotu rovnaje se součtu momentů dvojic s jedné strany průřezu působících; v každém takovém dílu prutovém sluší tedy voliti stálé rozměry průřezové, tak že prut se skládá z dílů prismatických.

Mysleme si prvek nosníkový tvaru deskového, omezený dvěma nekonečně blízkými průřezy (x), $(x + d x)$; m, m' buďte stejně položené body obou průřezů. V průřez (x) působí dvojice Δ_k nahrazujíc síly zevnitřní s jedné strany; v průřez $(x + d x)$ působí dvojice Δ_k' protivného smyslu nahrazujíc síly zevnitřní se strany druhé. Působením obou dvojic pootočí se průřez proti průřezu, při čemž ovšem není vyloučeno přetvoření jejich; body m, m' nabudou nových poloh m_1, m_1'.

Jest-li m_1'' pravoúhelný průmět bodu m_1' na tečnou rovinu (v bodu m_1) plochy, v kterou se přetvořil průřez (x), máme poměrné posunutí

$$\gamma = \frac{\overline{m_1 m_1''}}{\overline{m m'}} = \frac{\overline{m_1 m_1''}}{dx},$$

k němuž — řídí-li se látka nosníková zákonem Hookovým — náleží tangencialné napětí

$$\tau = G\gamma = \frac{G}{dx}\overline{m_1 m_1''}.$$

Poněvadž posunutí $\overline{m_1 m_1''}$ má v rozličných bodech průřezu rozličnou velikost a rozličný směr, platí to též o napětí τ.

Jak napětí τ se mění bod od bodu v průřezu (x), řídí se tvarem průřezovým.

§ 48. **Průřez kruhový.** Má-li prut tvar rotačního válce, možno pokládati, že *hmotné body, obsažené v určitém průřezu* (x) *před přetvořením prutu, budou i po přetvoření obsaženy v rovině pravoúhelné k ose prutové, a že vzájemná poloha bodů téhož průřezu* (x) *se nezmění.* Kdyby totiž průřezy se přetvořily v plochy křivé, musily by to býti plochy rotační s osou prutovou jakož osou otáčení; to vyplývá z pravidelnosti prutu vzhledem k ose jeho, jakož i z okolnosti, že síly zevnitřní se skládají ve dvojici. Dejme tomu, že ona rotační plocha obrací na př. na levo — jest-li osa prutu vodorovná — stranu dutou, na pravo vypuklou; pak by dvojice smyslu protivného musila vyvoditi opačné zkřivení oné plochy, což jest protismyslné.*)

Přetvoření prutu záleží tedy v tom, že *každé dva nekonečně blízké průřezy* (x), $(x + dx)$ *pootočí se proti sobě o jakýs úhel* $d\varphi$, a není pochybnosti, že osou točení jest osa prutu, což ostatně poznáme též z výminek rovnováhy sil zevnitřních a vnitřních. Proto — užíváme-li označení v předešlém § zavedeného — jest $m_1 m_1''$ oblouček kruhový, a jest-li ϱ vzdálenost bodu m od středu točení, máme relaci

$$\overline{m_1 m_1''} = \varrho\, d\varphi$$

a tedy

$$\tau = G\frac{d\varphi}{dx}\varrho.$$

*) Zkoušky pružnosti v kroucení, vykonané na válcích rotačních, potvrzují hypothesi svrchu dotčenou. Jestliže na válcovém povrchu vedeny jsou kružnice v rovných vzdálenostech a dále přímky, jimiž tyto kružnice se dělí v rovné obloučky, zůstávají při kroucení kružnice kružnicemi a roviny jejich pravoúhelnými k ose prutové; přímky mění se v šroubovice.

Poměr $\frac{d\varphi}{dx}$ má v průřezu (x) jedinou hodnotu, jež platí ostatně ve všech průřezech dílu prutového, v němž působí tatáž výsledná dvojice Δ_k. Dva průřezy, jichžto vzdálenost jest Δx, pootočí se tedy o úhel φ, o němž platí úměra

$$\frac{\varphi}{\Delta x} = \frac{d\varphi}{dx};$$

jest-li $\Delta x = 1$, má φ určitou hodnotu ϑ, kterou zoveme poměrným úhlem kroucení. Jest to tedy úhel, o který se proti sobě pootočí dva průřezy, jež mají od sebe vzdálenost rovnou jedničce délkové. Úhlem

$$\vartheta = \frac{\varphi}{\Delta x} = \frac{d\varphi}{dx}$$

měříme přetvoření prutu.

Napětí

$$\tau = G\,\vartheta\,\varrho$$

mění se tedy v průřezu bod od bodu úměrně ku vzdálenosti ϱ.

Bychom ustanovili konstantu ϑ ve výrazu napětí τ, užijme výminek rovnováhy sil zevnitřních a vnitřních.

V průřez (x) působí s jedné strany dvojice Δ_k, daná momentem M, jejž nazýváme momentem kroucení; s druhé strany působí v každý prvek průřezový vnitřní síla tangencialná t a to směrem protivným k posunutí, tedy *pravoúhelně k poloměru* ϱ.*)

Mysleme si v průřezu (obr. 67.) dvě pravoúhelné osy Y, Z a rozložme sílu t ve složky $\left\{\begin{matrix} t_z \\ t_y \end{matrix}\right\}$ směrem osy $\left\{\begin{matrix} Y \\ Z \end{matrix}\right\}$; pak máme tyto výminky rovnováhy sil zevnitřních a vnitřních:

$$\Sigma t_y = 0, \quad \Sigma t_z = 0, \quad M + \Sigma t\,\varrho = 0.$$

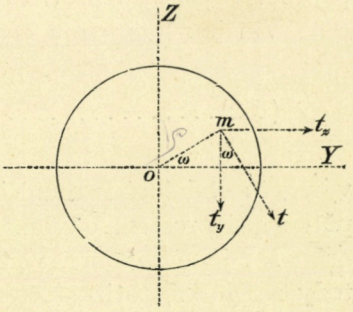
Odchýlen-li poloměr ϱ od osy Y o úhel ω, platí rovnice

$$t_z = t \sin \omega, \quad t_y = -t \cos \omega**),$$

položíme-li pak

$$t = \tau\, du,$$

vyjde



Obr. 67.

*) Jest-li středem o točení střed kruhového průřezu, srovnává se směr síly t v bodech obvodových se známým výsledkem obecné theorie pružnosti, že totiž t musí působiti v tečně k obvodu.

**) V obr. 67. vzat moment M kroucení ve smyslu, kterým se positivná polovice osy Y musí otočiti o 90^0, by přešla v positivnou polovici osy Z, kteryžto

$$t_z = \tau \sin \omega \, du = G \vartheta \varrho \sin \omega \, du = G \vartheta z \, du,$$
$$t_y = -\tau \cos \omega \, du = -G \vartheta \varrho \cos \omega \, du = -G \vartheta y \, du,$$

poněvadž

$$\varrho \sin \omega = z, \qquad \varrho \cos \omega = y.$$

Máme tedy výminky rovnováhy

$$G \vartheta \int z \, du = 0,$$
$$G \vartheta \int y \, du = 0,$$
$$M + G \vartheta \int \varrho^2 \, du = 0.$$

První dvě jsou naplněny jen, jest-li středem točení těžiště (střed) kruhového průřezu; z třetí vychází

$$G \vartheta = -\frac{M}{A},$$

znamenáme-li

$$(150) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A = \int \varrho^2 \, du.$$

Veličina A zove se polárným neb i centralným momentem setrvačnosti průřezu.

Poměrný úhel kroucení

$$(151^a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \vartheta = -\frac{M}{A G};$$

znaménko minus má ten rozum, že průřez $(x + d x)$ se proti průřezu (x) pootočí ve smyslu protivném k momentu kroucení.

Vložíme-li prostou hodnotu ϑ ve výraz napětí τ, obdržíme

$$(152) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tau = \frac{M}{A} \varrho,$$

výraz to obdobný k rovnici (9) na str. 62., kteráž rovnice vyjadřuje napětí ν při prostém ohybu.*)

Největší napětí τ vyskytuje se na obvodu průřezovém, tedy za $\varrho = r$, totiž

$$(152^a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \max \tau = \frac{M r}{A},$$

---

smysl točení pokládejme tu za positivný. Pak má síla t směr v obrazci naznačený' a t_z jest positivné, t_y negativné.

*) Na místo momentu ohybového vstupuje tu moment kroucení, na místo momentu setrvačnosti vzhledem k ose neutralné Y moment polárný vzhledem k středu o kruhového průřezu, na místo vzdálenosti z od osy Y vzdálenost ϱ od středu o.

a výminka $\max \tau = k'''$ bezpečné pevnosti vede k rovnici

$$(153) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{A}{r} = \frac{M}{k'''},$$

kteráž jest obdobna k rovnici (11) na str. 64.

Poněvadž obecně

$$\varrho^2 = z^2 + y^2$$

a tedy

$$\int \varrho^2 \, du = \int z^2 \, du + \int y^2 \, du,$$

platí relace

$$(154) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad A = J_y + J_z$$

platná o všech tvarech průřezových, totiž: *Centrálný moment setrvačnosti vzhledem ku středu o rovná se součtu obou osových momentů setrvačnosti, jež vztahují se ku dvěma pravoúhelným osám Y, Z vedeným oním středem.*

Při k r u h u tedy

$$A = 2 \, . \, \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi}{32} d^4, \quad \frac{A}{r} = \frac{\pi}{16} d^3,$$

tak že rovnice (153) dává

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \, M}{\pi \, k'''}}.$$

Kroucením jsou namáhány h ř í d e l e. Tu však obyčejně nebývá přímo dán moment M kroucení; místo něho známe p r á c i v y j á d ř e n o u p o č t e m N k o n í (HP), p a k p o č e t n o b r á t e k, j e ž h ř í d e l v y k o n á v á z a m i n u t u.

Bychom nahradili M veličinami N, n, vyjádříme práci, která hřídelem za minutu se přenáší, jednak momentem M, jednak veličinami N, n.

Je-li P síla, působící v tečně kružnice základní (dělící), p poloměr této kružnice, vykonává síla P za obrátku hřídele práci $P \, . \, 2 \pi p$ a za minutu (n obrátek) $n P \, . \, 2 \pi p$; práce 1 HP činí 75 $mk = 7500$ cmk za sekundu, $7500 \, . \, 60 = 450\,000$ $cm \, k$ za minutu, práce N HP tedy $450\,000 \, N$. Proto

$$n P \, . \, 2 \pi p = 450\,000 \, N$$

a tedy

$$M = P p = \frac{450\,000}{2 \pi} \frac{N}{n} = 71620 \frac{N}{n}.$$

Vložíme-li to ve vytčený svrchu výraz průměru d, vyjde

$$(155) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad d = \sqrt[3]{\alpha \frac{N}{n}},$$

kde

$$\alpha = \frac{16 \,.\, 71\,620}{\pi\, k'''} = \frac{364\,758}{k'''};$$

zvoleno-li α empiricky, vychází příslušné

$$(156) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k''' = \frac{364\,758}{\alpha}.$$

Poměrný úhel kroucení dán jest rovnicí (151ª) v míře absolutní (obloukové); v míře stupňové

$$(151^b) \ldots\ldots\ldots\ldots \vartheta^0 = \frac{180}{\pi}\,\frac{M}{A\,G}$$

anebo, poněvadž dle rovnice (153)

$$\frac{M}{A} = \frac{k'''}{r} = \frac{2\,k'''}{d},$$

$$(157) \ldots\ldots\ldots\ldots \vartheta^0 = \frac{360}{\pi}\,\frac{k'''}{G\,d}.$$

Příklad 26. Jestliže při transmissních hřídelích z válcovaného železa užíváme rovnice

$$d = \sqrt[3]{3000\,\frac{N}{n}},$$

jakou hodnotu má součinitel k''', a jak veliký jest poměrný úhel kroucení?

Dle rovnice (156) máme

$$k''' = \frac{364\,758}{3000} = 122\ kg/cm^2.$$

Poměrný úhel kroucení jest dle rovnice (157), klademe-li

$$G = 750\,000\ kg/cm^2,\ (m = 3),$$

$$\vartheta^0 = \frac{360 \,.\, 122}{\pi \,.\, 750\,000}\,\frac{1}{d} = \frac{0{\cdot}0186}{d}.$$

Žádáme-li, by poměrný úhel kroucení nepřestoupil jistou dovolenou hodnotu (výminka, která rozhoduje, jde-li o hřídel značné délky), počítati jest průměr hřídele z rovnice (151ᵇ), tak že

$$A = \frac{\pi}{32}\,d^4 = \frac{180}{\pi}\,\frac{M}{G\,\vartheta^0} = \frac{180 \,.\, 71620}{\pi\, G\,\vartheta^0}\,\frac{N}{n}$$

a tedy

$$(158) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad d = \sqrt[4]{\beta \frac{N}{n}},$$

kde

$$\beta = \frac{32 \,.\, 180 \,.\, 71620}{\pi^2 G \vartheta^0} \doteq \frac{41\,800\,000}{G \vartheta^0}.$$

Zvoleno-li β empiricky, jest příslušné

$$(159) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \vartheta^0 = \frac{41\,800\,000}{\beta G}.$$

Příklad 27. Jestliže při dlouhých hřídelích z kujného železa užíváme empirického vzorce

$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}},$$

jaký je tu poměrný úhel kroucení?

Z rovnice (159) plyne, klademe-li zase $G = 750\,000\ kg/cm^2$,

$$\vartheta^0 = \frac{41\,800\,000}{12^4 \,.\, 750\,000} = 0{\cdot}0027^0/cm$$

a tedy na délkový metr $0{\cdot}27^0 = 16'$.

Zákon napětí tangencialného, vyvozený svrchu pro průřez kruhový, zůstává v platnosti, jest-li průřezem mezikruží. Tu máme

$$A = \frac{\pi}{32} (d^4 - d'^4),$$

znamená-li $\left\{ \begin{matrix} d \\ d' \end{matrix} \right\}$ průměr kružnice $\left\{ \begin{matrix} \text{zevnitřní} \\ \text{vnitřní} \end{matrix} \right\}$. Jest-li

$$\frac{d'}{d} = \delta,$$

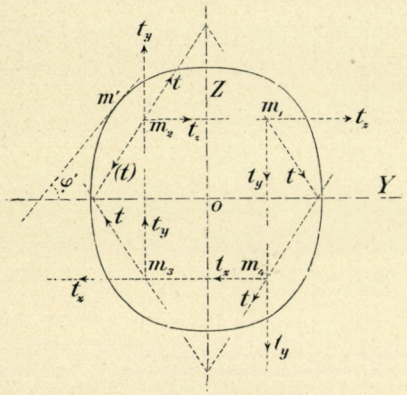
vychází

$$A = \frac{\pi}{32} d^4 (1 - \delta^4),$$

$$\frac{A}{r} = \frac{\pi}{16} d^3 (1 - \delta^4).$$

V rovnici (155) položiti jest tedy místo průměru d výraz $d \sqrt[3]{1 - \delta^4}$ a tedy místo α hodnotu $\alpha' = \frac{\alpha}{1 - \delta^4}$. V rovnici (158) pak sluší položiti $d \sqrt[4]{1 - \delta^4}$ místo d a tedy $\beta' = \frac{\beta}{1 - \delta^4}$ místo β.

§ 49. **Jiné tvary průřezové.** Obraťme se nyní k jiným tvarům průřezu prutového, dejme však tomu, že průřez má dvě (vzájemně pravoúhelné) osy souměrnosti, které zvolme za osy souřadnicové Y, Z; osou X budiž osa prutová (obr. 68.), kterou si myslíme vodorovnou; positivná polovice osy $\left\{\begin{matrix} Y \\ Z \end{matrix}\right\}$ nechť směruje $\left\{\begin{matrix} \text{v pravo} \\ \text{vzhůru} \end{matrix}\right\}$. Tu hypothesis, vytčená s počátku § 48., na nížto jsme založili vyšetřování napětí v průřezu kruhovém, *nemá místa*; neboť kdyby též v jiných tvarech průřezových působilo napětí τ pravoúhelně k paprsku om, příčilo by se to v obvodových bodech známé větě obecné theorie pružnosti, dle které τ může působiti jen v tečně obvodové.*)



Obr. 68.

V libovolném bodě m průřezu působí napětí τ; v plošný prvek du, jejž si myslíme při tom bodě, působí vnitřní síla $t = \tau\, du$; směr sil τ, t jest ve vnitřních bodech průřezu zatím neznámý, každým spůsobem však takový, by silám τ, t náležely vzhledem k těžišti o průřezu statické momenty protivné k momentu M dvojice Δ_k.**)

Rozložme sílu t ve složky $t_z = \tau_z\, du$, $t_y = \tau_y\, du$ směrem os Y, Z; napětí τ_z, τ_y jsou pak jistými funkcemi souřadnic y, z.

Bod m budiž nejprve v prvním čtverníku soustavy Y, Z; znamenejme jej m_1. Má-li moment M kroucení smysl svrchu vytčený (positivný), musí vnitřní síle t náležeti vzhledem k počátku o moment negativný; proto jest t_z positivné, t_y negativné. Totéž platí pak o napětích τ_z, τ_y.

Mysleme si dále bod m_2 souměrný k bodu m_1 vzhledem k ose Z, tedy v čtverníku druhém. Kdyby místo dvojice Δ_k působila dvojice Δ_k' mající moment M' téže velikosti ale smyslu protivného, měli bychom v bodech m_1, m_2 úplnou souměrnost co do průřezu i co do sil zevnitřních a proto i co do sil vnitřních; síla (t) v bodě m_2 byla by souměrná k síle t v bodě m_1. Poněvadž však moment M jest protivný k M', vyvodí se v bodě m_2 síla t téže velikosti a působící v téže přímce jako (t), ale směrem protivným, tak že v bodě m_2 jest t_y i t_z a proto τ_y i τ_z positivné.

---

*) Zkoušky pružnosti v kroucení ukazují, že průřezy nekruhové kroucením se křiví.

**) V obrazci 68. vzat moment M dvojice Δ_k ve smyslu otočení (o 90°) positivné polovice osy Y v positivnou polovici osy Z (tedy opak točení se ručiček hodinových); síly τ, t mají pak vzhledem k těžišti o průřezu statické momenty smyslu protivného k momentu M.

Postoupíme-li obdobně k bodu $\left\{\begin{matrix} m_3 \\ m_4 \end{matrix}\right\}$, položenému souměrně k $\left\{\begin{matrix} m_2 \\ m_1 \end{matrix}\right\}$ vzhledem k ose Y, tedy v čtverníku $\left\{\begin{matrix} \text{třetím} \\ \text{čtvrtém} \end{matrix}\right\}$, obdržíme směry t_y, t_z v obr. 68. naznačené, a tytéž směry náležejí příslušným napětím τ_y, τ_z.

Ze všeho vidíme, že $\left\{\begin{matrix} \tau_y \\ \tau_z \end{matrix}\right\}$ se nemění, jestliže místo $\left\{\begin{matrix} z \\ y \end{matrix}\right\}$ klademe $\left\{\begin{matrix} -z \\ -y \end{matrix}\right\}$, ale že se změní v $\left\{\begin{matrix} -\tau_y \\ -\tau_z \end{matrix}\right\}$, jestliže místo $\left\{\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right\}$ položíme $\left\{\begin{matrix} -y \\ -z \end{matrix}\right\}$.

Proto může výraz τ_y obsahovati jen $\left\{\begin{matrix} \text{sudé} \\ \text{liché} \end{matrix}\right\}$ mocniny souřadnice $\left\{\begin{matrix} z \\ y \end{matrix}\right\}$, τ_z pak jen $\left\{\begin{matrix} \text{sudé} \\ \text{liché} \end{matrix}\right\}$ mocniny souřadnice $\left\{\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right\}$.

Buďtež

$$\tau_y = f_1(y,\ z),$$
$$\tau_z = f_2(y,\ z):$$

mějme zření k funkcím algebraickým, racionalným i celistvým a to řádu čtvrtého. Pak nesmí $\left\{\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}\right\}$ obsahovati $\left\{\begin{matrix} y^0,\ y^2,\ y^4,\ z,\ z^3 \\ y,\ y^3,\ z^0,\ z^2,\ z^4 \end{matrix}\right\}$.

V obecném výraze funkce f_1 nutno tedy

		vyloučiti:	zachovati:
členy řádu 0.	obsahující	$y^0\ z^0$	—
„ „ 1.	„	$y^0\ z$	$y\ z^0$
„ „ 2.	„	$y^2\ z^0, y\ z, y^0\ z^2$	—
„ „ 3.	„	$y^2\ z, y^0\ z^3$	$y^3\ z^0, y\ z^2$
„ „ 4.	„	$y^4\ z^0, y^3\ z, y^2\ z^2, y\ z^3, y^0\ z^4$	—

Proto

$$\left.\begin{aligned} \tau_y &= \beta_1 y + \beta_2 y z^2 + \beta_3 y^3 \\ \tau_z &= \delta_1 z + \delta_2 z y^2 + \delta_3 z^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (160)$$

a obdobně

K ustanovení součinitelů β, δ máme:

a) výminky rovnováhy sil zevnitřních a vnitřních v průřezu daném,

b) obecné rovnice (2) § 3., jež jsme vyvodili z výminek rovnováhy sil vnitřních, působících v povrch nekonečně malého rovnoběžnostěnu vnitř tělesa,

c) výminku, že napětí τ v obvodových bodech průřezu musí působiti v tečně obvodové.

a) Rovnováha sil zevnitřních a vnitřních v daném průřezu vyjádřena jest rovnicemi

$$\Sigma t_y = 0, \qquad \Sigma t_z = 0, \qquad M + \Sigma (y\ t_y - z\ t_z) \qquad = 0$$

nebo

$$\int \tau_y\, du = 0, \quad \int \tau_z\, du = 0, \quad M + \int (y\ \tau_y - z\ \tau_z)\, du = 0.$$

První dvě jsou naplněny souměrností průřezu a vytčenou svrchu souvislostí napětí τ_y, τ_z v bodech m_1, m_2, m_3, m_4, souměrných vespolek vzhledem k jedné z os Y, Z; třetí nabývá substitucí výrazů τ_y, τ_z tvaru

$$(\alpha) \ldots M + \beta_1 \int y^2 \, du - \delta_1 \int z^2 \, du + (\beta_2 - \delta_2) \int y^2 z^2 \, du + \beta_3 \int y^4 \, du - \delta_3 \int z^4 \, du = 0.$$

b) V rovnicích (2) § 3. jest v přítomném případě položiti

$$\nu_x = \nu_y = \nu_z = \tau_x = \mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 0,$$

čímž vychází

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_y}{\partial x} = 0,$$

a poněvadž

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial y} = 2 \delta_2 y z, \qquad \frac{\partial \tau_y}{\partial z} = 2 \beta_2 y z,$$

vede první z oněch rovnic k výminці

$$(\beta) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \beta_2 + \delta_2 = 0;$$

ostatní dvě jsou naplněny tím, že součinitelé β, δ v dílu prutovém, v němž M se nemění, nejsou závislí na úsečce x.

c) Znamenáme-li písmeny y', z' souřadnice bodu m', položeného na obvodě průřezovém (obr. 68.), dále písmenem φ' odchylku tečny obvodové v bodě m' od osy Y, platí souvislost

$$\frac{d z'}{d y'} = \tan \varphi' = \frac{\tau_y}{\tau_z},$$

tak že výminku obvodovou lze napsati ve tvaru

$$(\gamma) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{\tau_y}{\tau_z} = \frac{d z'}{d y'}.$$

Přihlédněme dále ku p ř e t v o ř e n í.

Jsou-li, jak svrchu vytčeno, Y, Z osy souměrnosti průřezu, možno pokládati, že *osou točení jest osa prutová* X, a že *hmotné body v osách obsažené budou i po přetvoření prutu vyplňovati dvě přímky pravoúhelné vespolek a k ose prutové.* Neboť není příčiny, proč by odchylka od této pravoúhelnosti objevila se spíše v tom než onom smyslu, a zkoušky pružnosti v kroucení potvrzují dotčenou hypothesi. P o m ě r n ý m ú h l e m k r o u c e n í nazýváme tu pak ú h e l, o k t e r ý s e p r o t i s o b ě p o o t o č í s o u h l a s n é o s y s o u m ě r n o s t i d v o u p r ů ř e z ů, p o l o ž e n ý c h v e v z d á l e n o s t i, j e ž s e r o v n á j e d n i č c e d é l k o v é. Jde o stanovení tohoto úhlu.

Mysleme si dva nekonečně blízké průřezy (x), $(x + dx)$, v nich pak dva stejně položené body m a m', mající před deformací prutu souřadnice x, y, z a $x + dx, y, z$; dále budiž $\overline{mp} = dy$ linearný prvek rovnoběžný s osou Y a obsažený v průřezu (x), obdobně $\overline{m'p'} = dy$ stejně položený linearný prvek v průřezu $(x + dx)$.

Jest-li ξ přemístění bodu m směrem osy Z, tu částečný differencial

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} dx$$

znamená relativné přemístění bodu m' proti m směrem osy Z; druhý differencial

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} dx dy$$

pak ukazuje, oč relativné přemístění bodu p' proti p směrem osy Z jest větší než relativné přemístění bodu m' proti m směrem tétéž osy. Poměr tohoto druhého differencialu k dy, tedy

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} dx,$$

vyjadřuje konečně (v míře obloukové) úhel, o který se prvek $\overline{m'p'}$ pootočil proti prvku $\overline{mp}$ ve smyslu YZ. Poměr tento jest vůbec funkcí souřadnic y, z; položíme-li v něm $z = 0$, obdržíme

$$\left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right|_{z=0} dx$$

jakožto výraz úhlu, o který se osa Y' průřezu $(x + dx)$ proti ose Y průřezu (x) pootočila ve smyslu YZ, a dělíme-li tento úhel vzdáleností dx obou průřezů, vychází poměrný úhel kroucení ϑ, jak svrchu byl definován.

Jest-li obdobně η přemístění bodu m průřezu (x) směrem osy Y, dospíváme týmiž úsudky k tomu, že výrazem

$$\left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \right|_{y=0} dx$$

vyjádřen jest úhel, o který osa Z' průřezu $(x + dx)$ se pootočila proti ose Z průřezu (x) ve smyslu ZY. Proto poměrný úhel kroucení

$$\vartheta = \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right|_{z=0} = - \left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \right|_{y=0}.$$

Dle rovnic (34) § 14.

$$\tau_y = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right),$$
$$\tau_z = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right),$$

pročež

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y} = G\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial z}\right),$$
$$\frac{\partial \tau_z}{\partial z} = G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z}\right);$$

položené svrchu výrazy napětí τ_y, τ_z pak dávají

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y} = \beta_1 + \beta_2 z^2 + 3\beta_3 y^2,$$
$$\frac{\partial \tau_z}{\partial z} = \delta_1 + \delta_2 y^2 + 3\delta_3 z^2.$$

Přirovnáme-li oba výrazy každé z obou derivací $\frac{\partial \tau_y}{\partial y}$, $\frac{\partial \tau_z}{\partial z}$, a položíme-li onde $z = 0$, tuto $y = 0$, vyjde

$$\beta_1 + 3\beta_3 y^2 = G\left(\vartheta + \left|\frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial z}\right|_{z=0}\right),$$
$$\delta_1 + 3\delta_3 z^2 = G\left(\left|\frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial z}\right|_{y=0} - \vartheta\right).$$

Položme konečně v první z těchto rovnic $y = 0$, v druhé $z = 0$. a obdržíme

$$\beta_1 = G\left(\vartheta + \left|\frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial z}\right|_{\substack{z=0 \\ y=0}}\right),$$
$$\delta_1 = G\left(\left|\frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial z}\right|_{\substack{y=0 \\ z=0}} - \vartheta\right);$$

odečtením obou těchto rovnic vychází konečně

$$(161) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \vartheta = \frac{1}{2}\,\frac{\beta_1 - \delta_1}{G}.$$

§ 50. **Průřez elliptický.** Bychom zde dospěli k výsledkům pohodlným, připojme (prohlédajíce ku měřické souvislosti ellipsy s kružnicí) další hypothesi, že *napětí τ ve všech bodech m téhož poloměru $r = o\overline{m'}$ má směr stejný, působíc tedy v přímce rovnoběžné s tečnou v bodě obvodovém m', a že jest úměrné ku vzdálenosti $\varrho = o\overline{m}$ bodu m od středu o ellipsy.* Tato úměrnost platí pak i o složkách τ_y, τ_z, a poněvadž

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'},$$

máme rovnice

(160ª) ..... $\tau_y = \beta_1 y, \quad \tau_z = \delta_1 z,$

jež vyplývají z rovnic (160), položíme-li v nich

$$\beta_2 = \beta_3 = \delta_2 = \delta_3 = 0.$$

Hodnotami těmito jest naplněna obecná rovnice (β) § 49. a zbývá ještě užiti rovnic (α), (γ).

Jsou-li a, b poloosy obsažené v osách souřadnicových Y, Z, vychází z rovnice ellipsy, totiž

$$\frac{y'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{b^2} = 1,$$

derivace

$$\frac{d\,z'}{d\,y'} = -\frac{b^2\,y'}{a^2\,z'};$$

vložíme-li toto a zároveň hodnoty napětí τ_y, τ_z, vyjádřené rovnicemi (160ª) v rovnici (γ), obdržíme

$$\frac{\beta_1}{\delta_1} = -\frac{b^2}{a^2}$$

neboli

(γ') ..... $a^2\,\beta_1 + b^2\,\delta_1 = 0.$

Rovnice (α) § 49. dává konečně

$$M + \beta_1 J_z - \delta_1 J_y = 0,$$

a poněvadž

$$J_y = \tfrac{1}{4}\pi\, a\, b^3, \quad J_z = \tfrac{1}{4}\pi\, a^3\, b,$$

dospíváme k rovnici

(α') ..... $a^2\,\beta_1 - b^2\,\delta_1 = -\dfrac{4\,M}{\pi\, a\, b}.$

Z rovnic (α'), (γ') vychází

$$\beta_1 = -\frac{2\,M}{\pi\, a^3\, b},$$

$$\delta_1 = \frac{2\,M}{\pi\, a\, b^3},$$

pročež

(162) ..... $$\begin{cases} \tau_y = -\dfrac{2\,M}{\pi\, a^3\, b}\, y, \\ \tau_z = \dfrac{2\,M}{\pi\, a\, b^3}\, z; \end{cases}$$

z obou pak plyne

$$(163) \quad \ldots\ldots\ldots \tau = \frac{2M}{\pi a^3 b^3} \sqrt{b^4 y^2 + a^4 z^2}.$$

Největší hodnoty napětí τ náležejí k obvodovým bodům ellipsy; v těchto bodech

$$\tau' = \frac{2M}{\pi a^3 b^3} \sqrt{b^4 y'^2 + a^4 z'^2}.$$

Budiž $a < b$, tedy $\frac{a}{b} < 1$; jestliže druhý člen vytčené svrchu rovnice ellipsy znásobíme činitelem $\frac{a^2}{b^2}$, zmenší se tím, a součet tohoto zmenšeného a nezměněného prvního členu bude pak menší než jednička, tak že, pokud $z'^2 > 0$,

$$\frac{y'^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \frac{z'^2}{b^2} < 1;$$

za $y' = \pm a$, $z' = 0$ odpadá člen druhý, první pak rovná se jedničce, a to jest největší možná hodnota onoho výrazu.

Poněvadž položený svrchu výraz napětí τ' lze napsati i takto:

$$\tau' = \frac{2M}{\pi a^2 b} \sqrt{\frac{y'^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \frac{z'^2}{b^2}},$$

nabývá napětí τ' hodnoty největší za $y' = \pm a$, $z' = 0$, tedy *ve vrcholech ellipsy položených na ose menší* neboli *v bodech obvodových středu o nejbližších*; vychází pak

$$(164) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \max \tau = \frac{2M}{\pi a^2 b}.$$

Poměrný úhel kroucení jest dle rovnice (161), hledíc k hodnotám součinitelů β_1, δ_1, dán výrazem

$$(165) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \vartheta = -\frac{1}{\pi} \frac{M}{G} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3}.$$

Znaménko minus značí zase, že průřez $(x + 1)$ se pootočí proti průřezu (x) ve smyslu, který jest protivný ke smyslu momentu M kroucení.

Zkoušky pružnosti v kroucení prutů průřezu elliptického vedly k výsledkům potvrzujícím základy theorie svrchu vyložené.

Připomenutí. Položíme-li v rovnicích (164), (165)

$$a = b = r,$$

vyjde

$$\max \tau = \frac{M r}{2 J} = \frac{M r}{A},$$

$$\vartheta = -\frac{2}{\pi} \frac{M}{G r^4} = -\frac{M}{A G},$$

jak v § 48. o průřezu kruhovém bylo vyvozeno.

Jest-li průřezem meziellipsí, t. věnec omezený dvěma ellipsami soustřednými, podobnými a stejně položenými, jichž poloosy jsou a, b a a', b', zůstává bez proměny rovnice (γ'), odvozená pro plný průřez elliptický; poněvadž pak nyní

$$J_y = \frac{\pi}{4}(a\, b^3 - a'\, b'^3) = \frac{\pi}{4} a\, b^3 (1 - \delta^4),$$

$$J_z = \frac{\pi}{4}(a^3\, b - a'^3\, b') = \frac{\pi}{4} a^3\, b\, (1 - \delta^4),$$

znamená-li

$$\delta = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b},$$

nabývá rovnice (α') tvaru

$$a^2 \beta_1 - b^2 \delta_1 = -\frac{4 M}{\pi a\, b\, (1 - \delta^4)}.$$

Z obou rovnic (α'), (γ') vycházejí součinitelé

$$\beta_1 = -\frac{2 M}{\pi a^3\, b\, (1 - \delta^4)}, \quad \delta_1 = \frac{2 M}{\pi a\, b^3 (1 - \delta^4)}.$$

Máme tedy

$$\tau_y = -\frac{2 M}{\pi (1 - \delta^4) a^3\, b}\, y,$$

$$\tau_z = \frac{2 M}{\pi (1 - \delta^4) a\, b^3}\, z,$$

$$\tau = \frac{2 M}{\pi (1 - \delta^4) a^3\, b^3} \sqrt{b^4 y^2 + a^4 z^2}.$$

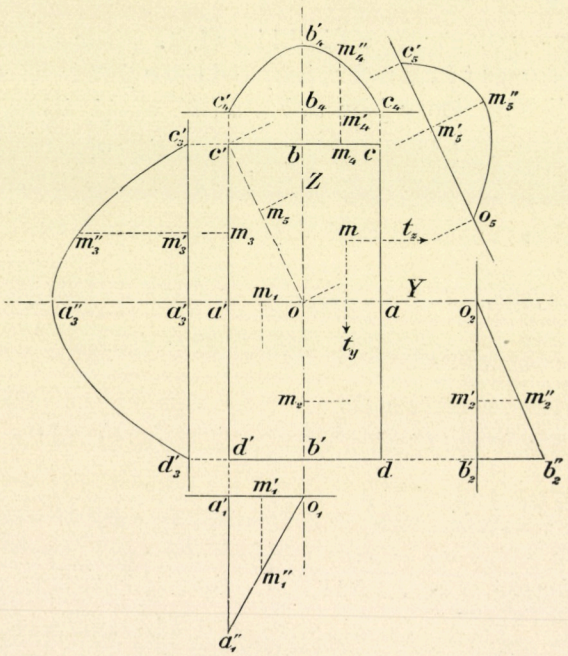
Největší hodnota napětí τ namítá se zase v bodě, jehož souřadnice jsou $y = \pm a$, $z = 0$; je to

(166) ..... $$\max \tau = \frac{2 M}{\pi (1 - \delta^4) a^2 b}.$$

Poměrný úhel kroucení

(167) ..... $$\vartheta = -\frac{M (a^2 + b^2)}{\pi (1 - \delta^4) G a^3 b^3}.$$

§ 51. **Průřez obdélníkový.** Znamenejme (obr. 69.) polovici $\left\{\begin{matrix}\text{šířky}\\ \text{výšky}\end{matrix}\right\}$ obdélníka písmenem $\left\{\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\right\}$, tak že celá $\left\{\begin{matrix}\text{šířka}\\ \text{výška}\end{matrix}\right\}$, totiž rozměr směrem osy $\left\{\begin{matrix}Y\\ Z\end{matrix}\right\}$ jest $\left\{\begin{matrix}\overline{a'\,a} = 2\,a\\ \overline{b'\,b} = 2\,b\end{matrix}\right\}$.



Obr. 69.

Dle výminky (γ) musí

$$\tau_y = \emptyset \text{ za } z = \pm b \text{ a za každé hodnoty } y,$$
$$\tau_z = \emptyset \text{ „ } y = \pm a \text{ „ „ „ „ } z;$$

uvedeme-li to v rovnice (160), vyjde

$$\emptyset = (\beta_1 + \beta_2 b^2)\, y + \beta_3 y^3,$$
$$\emptyset = (\delta_1 + \delta_2 a^2)\, z + \delta_3 z^3.$$

Proto

$$\beta_1 + \beta_2 b^2 = \emptyset \text{ neboli } \beta_2 = -\frac{\beta_1}{b^2} \text{ a zároveň } \beta_3 = \emptyset,$$

$$\delta_1 + \delta_2 a^2 = \emptyset \quad „ \quad \delta_2 = -\frac{\delta_1}{a^2} „ \quad „ \quad \delta_3 = \emptyset.$$

Máme tedy napětí

$$\tau_y = \beta_1 y \left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right),$$

$$\tau_z = \delta_1 z \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right).$$

V obecné rovnici (α) vyskytují se integraly

$$\int y^2 z^2 \, du = \int_{-a}^{a} y^2 \, dy \int_{-b}^{b} z^2 \, dz = \tfrac{4}{9} a^3 b^3,$$

$$\int y^2 \, du = J_z = \tfrac{4}{3} a^3 b \,,$$

$$\int z^2 \, du = J_y = \tfrac{4}{3} a b^3 \,.$$

Těmito hodnotami, pak vytčenými svrchu hodnotami součinitelů β_2, δ_2 nabývá rovnice (α) tvaru

$$a^2 \beta_1 - b^2 \delta_1 = -\frac{9}{8} \frac{M}{a\,b}.$$

Vložíme-li konečně v obecnou rovnici (β) hodnoty součinitelů β_2, δ_2, obdržíme

$$a^2 \beta_1 + b^2 \delta_1 = 0.$$

Z těchto rovnic (α), (β) vychází

$$\beta_1 = -\tfrac{9}{16} \frac{M}{a^3 b},$$

$$\delta_1 = \tfrac{9}{16} \frac{M}{a b^3},$$

tak že

$$(168) \ldots\ldots \begin{cases} \tau_y = -\tfrac{9}{16} \dfrac{M}{a^3 b^3} y (b^2 - z^2), \\ \tau_z = \tfrac{9}{16} \dfrac{M}{a^3 b^3} z (a^2 - y^2), \end{cases}$$

$$(169) \ldots \tau = \tfrac{9}{16} \frac{M}{a^3 b^3} \sqrt{y^2 (b^2 - z^2)^2 + z^2 (a^2 - y^2)^2}.$$

Směr napětí τ stanovme odchylkou jeho φ od osy Y, jež určena jest rovnicí

$$\tan \varphi = \frac{\tau_y}{\tau_z};$$

vložíme-li sem hodnoty z rovnic (168), vyjde

$$(170) \ldots\ldots\ldots \tan \varphi = -\frac{y\,(b^2 - z^2)}{z\,(a^2 - y^2)}.$$

Za $z = 0$ jest $\tan \varphi = \infty$; *v bodech osy Y působí* τ *rovnoběžně s osou Z.* Za $y = 0$ jest $\tan \varphi = 0$; *v bodech osy Z působí* τ *rovnoběžně s osou Y.*

V bodech osy Y

$$\tau = 1\tfrac{9}{16}\,\frac{M}{a^3 b}\,y;$$

na ose Y mění se τ *úměrně k souřadnici y, tedy po zákoně přímky.* V bodech osy Z

$$\tau = 1\tfrac{9}{16}\,\frac{M}{a\,b^3}\,z\,;$$

na ose Z mění se τ *úměrně k souřadnici z, tedy po zákoně přímky.**)

V bodech úhlopříčny obdélníka, na př. $d'c$, platí relace

$$\frac{y}{a} = \frac{z}{b},$$

pročež z rovnice (170) plyne

$$\tan \varphi = -\frac{b}{a};$$

τ *působí tu rovnoběžně s druhou úhlopříčnou* $c'd$ *a naopak.* Vyloučíme-li z výrazu (169) na př. proměnnou y, vyjde

$$\tau = 1\tfrac{9}{16}\,\frac{M\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 b^5}\,z\,(b^2 - z^2);$$

τ *mění se tedy na úhlopříčně po zákoně parabolické křivky řádu třetího.***)

V bodech stran obdélníka působí napětí v příslušné straně samé, jak vychází ze známé věty obecné theorie pružnosti a zároveň z rovnice (170).

V bodech stran delších máme $y = \pm a$, pročež dle rovnice (169)

---

*) K dílu $\left\{\begin{matrix}\overline{o\,a'}\\ o\,b'\end{matrix}\right\}$ osy $\left\{\begin{matrix}Y\\ Z\end{matrix}\right\}$ náleží přímka $\left\{\begin{matrix}o_1\,a_1''\\ o_2\,b_2''\end{matrix}\right\}$ napětí τ (obr. 69.).

**) K polovici $o\,c'$ úhlopříčné $d\,c'$ náleží křivka $o_5\,m_5''\,c_5'$ (obr. 69.); největší pořadnice $\overline{m_5'\,m_5''}$ náleží k bodu m_5, v němž

$$z = \tfrac{1}{3}\,b\,\sqrt{3} = 0{\cdot}577\,b;$$

příslušné τ má hodnotu

$$\tau = \frac{\sqrt{3}}{8}\,M\,\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 b^2}.$$

$$\tau = \tfrac{9}{16}\frac{M}{a^2 b^3}(b^2 - z^2);$$

v bodech stran kratších jest $z = \pm b$ a tedy

$$\tau = \tfrac{9}{16}\frac{M}{a^3 b^2}(a^2 - y^2).$$

*Čarou napětí jest v obou případech parabola druhého stupně.**) V onom případě vychází

$$\max \tau_a = \tfrac{9}{16}\frac{M}{a^2 b},$$

v tomto

$$\max \tau_b = \tfrac{9}{16}\frac{M}{a b^2};$$

maxima tato náležejí k rozpolovacím bodům příslušných stran; poměr

$$\frac{\max \tau_a}{\max \tau_b} = \frac{b}{a}.$$

Ustanovme největší napětí v průřezu pokládajíce, že $a < b$. Rovnici (169) možno psáti takto:

$$\tau = \tfrac{9}{16}\frac{M}{a^2 b}\sqrt{\frac{y^2}{a^2}\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)^2 + \frac{a^2}{b^2}\frac{z^2}{b^2}\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)^2}.$$

Výraz, který tu obsažen pod odmocnidlem, znamenejme krátce $f(y, z)$.

Poněvadž

$$\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)^2 \leqq 1,$$

musí

$$\text{(a)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{y^2}{a^2}\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)^2 \leqq \frac{y^2}{a^2};$$

poněvadž dále

$$\frac{a^2}{b^2}\frac{z^2}{b^2} < 1,$$

musí

$$\text{(b)} \ldots\ldots\ldots \frac{a^2}{b^2}\frac{z^2}{b^2}\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)^2 \leqq \left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)^2.\text{**)}$$

---

*) V obr. 69. naznačena parabola $c_3' a_3'' d_3'$, náležející ku straně $c' d'$, dále parabola $c_4 b_4' c_4'$, náležející ku straně $c c'$.

**) Rovnítko má platnost za $y = \pm a$.

Proto

$$f(y,z) \leqq \frac{y^2}{a^2} + \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)^2$$

anebo

$$f(y, z) \leqq 1 - \frac{y^2}{a^2}\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \leqq 1.$$

Největší hodnota, které může $f(y, z)$ dosíci, jest jednička; namítá se, jest-li $y = \pm a$, $z = 0$. Proto *náleží největší hodnota napětí* τ *k rozpolovacím bodům delších stran obdélníka* neboli *k bodům obvodovým nejblíže těžiště položeným.* Jest to hodnota

$$(171) \ldots\ldots\ldots\ldots \max \tau = {}^{9}\!/_{16} \frac{M}{a^2 b}.$$

Ve vrcholech obdélníka, kde $y = \pm a$, $z = \pm b$, máme $\tau = 0$. Dle výminky obvodové musilo by v těchto bodech napětí τ působiti v j e d n é i d r u h é z obou stran, jež v příslušném vrcholu se stýkají; neshoda tato mizí však, jest-li $\tau = 0$.

P o m ě r n ý ú h e l k r o u c e n í jest dle rovnice (161)

$$(172) \ldots\ldots\ldots\ldots \vartheta = -{}^{9}\!/_{32} \frac{M}{G} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3}.$$

Rovnici (171) možno psáti ve tvaru

$$\max \tau = {}^{9}\!/_{4} \frac{M}{U a},$$

kde $U = 4 a b$. Za téhož obsahu průřezového U jest max τ tím menší, čím větší jest a; nejmenší hodnota τ vychází, jest-li $a = b$, jde-li tedy o p r ů ř e z č t v e r e č n ý.

V tomto případě

$$(171^a) \ldots\ldots\ldots\ldots \max \tau = {}^{9}\!/_{16} \frac{M}{a^3},$$

$$(172^a) \ldots\ldots\ldots\ldots \vartheta = -{}^{9}\!/_{16} \frac{M}{G a^4},$$

kde a znamená p o l o v i c i strany čtverce.

§ 52. **Přehled výsledků. — Železo lité.** Jest-li J_1 první hlavní centralný moment setrvačnosti tvarů průřezových svrchu vyšetřovaných, máme při e l l i p t i c k é m p r ů ř e z u

$$J_1 = \frac{\pi}{4} a^3 b, \quad a < b ;$$

dále při m e z i e l l i p s í, jsou-li obě ellipsy soustředné, podobné a stejně položené,

$$J_1 = \frac{\pi}{4} a^3 b (1 - \delta^4), \quad \delta = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}, \quad a < b ;$$

konečně při obdélníku

$$J_1 = \tfrac{4}{3} a^3 b, \quad a < b.$$

Uveďme moment J_1 v rovnice (164), (166), (171) a užijme zároveň výminky bezpečné pevnosti, totiž

$$\max \tau = k'''.$$

Tu vychází při ellipse i meziellipsí

$$M = 2 k''' \frac{J_1}{a},$$

MAJETEK
ČESKO-UKR. KOMITÉTU
V Č.S.R.

kde a jest menší poloosa. To platí ovšem i při kruhu; a jest poloměr jeho.

Při obdélníku máme

$$M = \tfrac{4}{3} k''' \frac{J_1}{a} ;$$

a jest polovice menší strany obdélníka.

Lze tedy napsati pro všecky ony průřezy rovnici

$$(173^a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots M = \varepsilon k''' \frac{J_1}{a} ;$$

součinitel ε má při ellipse (i meziellipsí), jakož i při kruhu (i mezikruží) hodnotu $\varepsilon = 2$, při obdélníku (i čtverci) pak $\varepsilon = \frac{4}{3}$.

Co se týče p o m ě r n é h o ú h l u k r o u c e n í, platí obdobně o všech dotčených tvarech průřezových rovnice

$$(173^b) \quad \ldots\ldots\ldots \vartheta = \varepsilon' \frac{M}{G} \left(\frac{1}{J_y} + \frac{1}{J_z} \right) ;$$

součinitel ε' má při ellipse (i meziellipsí), jakož i při kruhu (i mezikruží) hodnotu $\varepsilon' = \frac{1}{4}$, při obdélníku a čtverci $\varepsilon' = \frac{3}{8}$.

P ř i p o m e n u t í. Zkoušky pružnosti v kroucení, směřující ku stanovení úhlu kroucení, podnikl W e r t h e i m. Měřením úhlu ϑ při prutech prismatických z látky isotropé shledal, že odvozený svrchu vzorec

$$\vartheta = \varepsilon' \frac{M}{G}\left(\frac{1}{J_y}+\frac{1}{J_z}\right)$$

s výsledky zkoušek dobře se shoduje při k r u h u, m e z i k r u ž í a e l l i p s e, kdež $\varepsilon' = \frac{1}{4}$, že však při o b d é l n í k u, kdež $\varepsilon' = \frac{3}{8}$, dává obecně p ř í l i š v e l i k é hodnoty úhlu ϑ, a to tím větší, čím méně se liší obdélník od čtverce. Klademe-li

$$G = 0{\cdot}38\, E,$$

možno dle Wertheima psáti

$$\vartheta = \frac{\delta}{4}\frac{M}{G}\left(\frac{1}{J_y}+\frac{1}{J_z}\right),$$

kde znamená při kruhu a ellipse $\delta = 1$, při čtverci $\delta = 1{\cdot}2$; při obdélníku δ roste od 1·2 po 1·5, přibývá-li poměru $\frac{b}{a}$ od jedničky počínajíc.

O látkách, které se neřídí zákonem Hookovým nemajíce stálého modulu pružnosti, neplatí výsledky svrchu vyvozené. Tu závisí pevnost v kroucení podstatně na t v a r u p r ů ř e z o v é m. Takovou látkou prakticky zvláště důležitou jest ž e l e z o l i t é.

Dle zkoušek, které podnikli v této příčině B a u s c h i n g e r a B a c h, lze při železe litém položiti za poměr $\frac{\varkappa^{IV}}{\varkappa'}$ součinitele pevnosti v k r o u c e n í[1]) k součiniteli pevnosti v t a h u při

kruhu	1,	
mezikruží	0·8 až	1,[2])
ellipse	1 „	1·25,[3])
meziellipsí	0·8 „	1,[4])
obdélníku	1·4 „	1·6.[3])

---

[1]) S o u č i n i t e l e m $\varkappa^{IV}$ p e v n o s t i v k r o u c e n í rozumí se (obdobně k součiniteli $\varkappa_0$ pevnosti v ohybu [str. 66.]) hodnota max τ na mezi pevnosti v kroucení, jež rovnicemi, odvozenými svrchu na základě zákona Hookova, z výsledků zkoušek vypočtena tak, jako by rovnice ty měly platnost až po mez pevnosti.

[2]) Hodnota 0·8 náleží k poměru $\delta = \frac{d'}{d} \doteq 0{\cdot}7$ a roste po jedničku, klesá-li δ k nulle.

[3]) Poměr $\frac{\varkappa^{IV}}{\varkappa'}$ jest tím větší, čím větší jest poměr $\frac{b}{a}$ obou hlavních rozměrů.

[4]) Poměr $\frac{\varkappa^{IV}}{\varkappa'}$ jest tím větší, čím větší jest poměr $\frac{b}{a}$ a čím menší poměr $\delta = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$.

O práci přetvárné.

§ 53. **Práce přetvárná vůbec.** Prací přetvárnou neboli deformační Π vyrozumívá se práce, kterou nutno vykonati, aby tělesu — původně neobtíženému — uděleno bylo určité přetvoření. Práce ta rovná se součtu přetvárných prací $d\Pi$ všech — nekonečně malých — prvků tělesa, totiž součtu prací, jež příslušné vnitřní síly, kterými v poprch prvku působí hmota okolní, konají za přechodu tělesa ze stavu původního ve stav nový, při čemž napětí rostou spojitě od nully až po konečné hodnoty, ano těleso nenáhle se přetvořuje. Mějme zření ku přetvoření pružnému, jež zase zcela pomine, když síly zevnitřní přestanou působiti; v tomto případě práce přetvárná vyjadřuje právě tak velikou energii přetvořeného tělesa, kterážto se rovná součtu prací, jež vykonávají síly vnitřní uvádějíce těleso zase ve stav původní.

Vztahujme těleso k soustavě pravoúhelné X, Y, Z; přetvoření tělesa v každém bodě jeho jest určeno roztaženími a posunutími

$$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \quad \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z,$$

ku kterým náležejí napětí

$$\nu_x, \nu_y, \nu_z, \quad \tau_x, \tau_y, \tau_z.$$

Budiž V původní objem tělesa, $dV = dx\,dy\,dz$ původní objem prvku tělesného, jenž má tvar pravoúhelného rovnoběžnostěnu. Za poměrného roztažení λ_x hrana dx rovnoběžnostěnu jeví linearné roztažení $\lambda_x\,dx$; změní-li se λ_x o $\delta\lambda_x$, zvětší se linearné roztažení o $\delta(\lambda_x dx)$, a poněvadž příslušná vnitřní síla jest $\nu_x\,dy\,dz$, vykonává se tím práce

$$\nu_x\,dy\,dz\,\delta\,(\lambda_x\,dx) = \nu_x\,dx\,dy\,dz\,\delta\lambda_x = \nu_x\,dV\,\delta\lambda_x.$$

Ku změnám $\delta\lambda_y$, $\delta\lambda_z$ náleží obdobně práce

$$\nu_y\,dV\,\delta\lambda_y, \quad \nu_z\,dV\,\delta\lambda_z.$$

Za poměrného posunutí γ_x má úhel $b\,m\,c$ (obr. 2. na str. 4.) hodnotu $\frac{\pi}{2} - \gamma_x$; stěna $b\,a'\,p\,c'$ jest proti stěně $m\,c\,b'\,a$ posunuta o $\gamma_x\,dy$ — anebo stěna $c\,b'\,p\,a'$ proti stěně $m\,a\,c'\,b$ o délku $\gamma_x\,dz$; změní-li se γ_x o $\delta\gamma_x$, nastane další linearné posunutí $\delta\,(\gamma_x\,dy)$ — anebo $\delta\,(\gamma_x\,dz)$, a poněvadž příslušná síla vnitřní jest $\tau_x\,dz\,dx$ — anebo $\tau_x\,dx\,dy$, vykonává se tak práce

$$\tau_x\,dz\,dx\,\delta\,(\gamma_x\,dy) = \tau_x\,dx\,dy\,dz\,\delta\gamma_x = \tau_x\,dV\,\delta\gamma_x,$$

po případě

$$\tau_x \, dx \, dy \, \delta (\gamma_x \, dz) = \tau_x \, dx \, dy \, dz \, \delta \gamma_x = \tau_x \, dV \, \delta \gamma_x.$$

Změnami $\delta \gamma_y$, $\delta \gamma_z$ vykonává se obdobně práce

$$\tau_y \, dV \, \delta \gamma_y, \quad \tau_z \, dV \, \delta \gamma_z.$$

Proto práce přetvárná prvku tělesného má hodnotu

$$d \, \Pi = dV \int (\nu_x \, \delta \lambda_x + \nu_y \, \delta \lambda_y + \nu_z \, \delta \lambda_z + \tau_x \, \delta \gamma_x + \tau_y \, \delta \gamma_y + \tau_z \, \delta \gamma_z);$$

integrovati jest od nully po λ_x, λ_y, λ_z, γ_x, γ_y, γ_z anebo po ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z, dle toho, vyjádřena-li napětí roztaženími a posunutími či naopak.

Deformační práce tělesa jest pak

$$(174) \ldots \Pi = \int dV \int (\nu_x \, \delta \lambda_x + \nu_y \, \delta \lambda_y + \nu_z \, \delta \lambda_z + \tau_x \, \delta \gamma_x + \tau_y \, \delta \gamma_y + \tau_z \, \delta \gamma_z).$$

Jde-li o těleso isotropé, vychází z rovnic položených na str. 30. a vyjadřujících napětí ν_x, ν_y, ν_z roztaženími λ_x, λ_y, λ_z

$$\nu_x \, \delta \lambda_x + \nu_y \, \delta \lambda_y + \nu_z \, \delta \lambda_z = 2 \, G \left(\lambda_x \, \delta \lambda_x + \lambda_y \, \delta \lambda_y + \lambda_z \, \delta \lambda_z + \frac{\omega \, \delta \omega}{m - 2} \right),$$

poněvadž dle příslušného označení

$$\omega = \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z$$

a tedy

$$\delta \omega = \delta \lambda_x + \delta \lambda_y + \delta \lambda_z.$$

Dále plyne z rovnic (32) na str. 31.

$$\tau_x \, \delta \gamma_x + \tau_y \, \delta \gamma_y + \tau_z \, \delta \gamma_z = G \, (\gamma_x \, \delta \gamma_x + \gamma_y \, \delta \gamma_y + \gamma_z \, \delta \gamma_z).$$

Rovnice (174) nabývá tak tvaru

$$(175) \ldots \ldots \Pi = G \int \left(\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 + \frac{\omega^2}{m - 2} + \frac{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2}{2} \right) dV,$$

čímž deformační práce vyjádřena roztaženími a posunutími.

Užíváme-li naopak rovnic (29ª) na str. 30., pak rovnic (32.) na str. 31., můžeme psáti

$$\nu_x \, \delta \lambda_x + \nu_y \, \delta \lambda_y + \nu_z \, \delta \lambda_z =$$

$$\frac{1}{E} \left[\nu_x \, \delta \nu_x + \nu_y \, \delta \nu_y + \nu_z \, \delta \nu_z - \frac{\nu_x \, \delta (\nu_y + \nu_z) + \nu_y \, \delta (\nu_z + \nu_x) + \nu_z \, \delta (\nu_x + \nu_y)}{m} \right]$$

$$= \frac{1}{E} \left[\nu_x \, \delta \nu_x + \nu_y \, \delta \nu_y + \nu_z \, \delta \nu_z - \frac{\delta (\nu_y \, \nu_z + \nu_z \, \nu_x + \nu_x \, \nu_y)}{m} \right],$$

$$\tau_x \, \delta \gamma_x + \tau_y \, \delta \gamma_y + \tau_z \, \delta \gamma_z = \frac{1}{G} \, (\tau_x \, \delta \tau_x + \tau_y \, \delta \tau_y + \tau_z \, \delta \tau_z),$$

tak že práce přetvárná

$$(176)\ldots\quad \Pi = \frac{1}{2E}\int\left[\nu_x^2 + \nu_y^2 + \nu_z^2 - \frac{2}{m}(\nu_y\nu_z + \nu_z\nu_x + \nu_x\nu_y)\right]dV + \frac{1}{2G}\int(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)\,dV.$$

Přihlížejme dále výhradně k tělesům isotropým.

§ 54. **Jednoduché případy zvláštní.**

a) Prostý tah či tlak. Tu rovnají se nulle všecka napětí vyjímajíc $\nu_x = \nu$, tak že rovnice (176) nabývá tvaru

$$\Pi = \frac{1}{2E}\int_0^l \nu^2\,dV.$$

Jde-li o prut průřezu proměnného, položme

$$dV = U\,dx,\quad \nu = \frac{P}{U}$$

a obdržíme

$$(177)\ldots\ldots\quad \Pi = \frac{1}{2E}\int_0^l \nu^2\,U\,dx = \frac{P^2}{2E}\int_0^l \frac{dx}{U}.$$

Jde-li o prut prismatický a nedbáme-li vlastní jeho váhy, jest ν stálé;

$$(178)\ \ldots\ldots\quad \Pi = \frac{\nu^2 V}{2E} = \frac{P^2 V}{2EU^2} = \frac{P^2 l}{2EU}.$$

Poměrná práce přetvárná, totiž práce připadající na jedničku tělesnou, jest

$$(179)\ \ldots\ldots\ldots\quad \Pi_1 = \frac{\nu^2}{2E} = \tfrac{1}{2}\nu\lambda.$$

Stanovíce práci přetvárnou pokládali jsme, že síly zevnitřní rostou nenáhle od nully po určité hodnoty konečné, a že v každém okamžení jest rovnováha mezi nimi a silami vnitřními. Dejme nyní tomu, že síla P počne působiti náhle plnou svou hodnotou, ale bez rázu, že tedy břímě počínajíc působiti má rychlost rovnou nulle. Namítá se otázka, jak veliké jest napětí ν v okamžení největšího poměrného roztažení λ.

Deformační práce prutu přetvořeného jest dle rovnice (179)

$$\Pi = \tfrac{1}{2}\nu\lambda\,U\,l;$$

tato musí se rovnati práci vykonané silou zevnitřní P, totiž práci

$$\Pi = P \,.\, \Delta l.$$

Z rovnosti obou plyne

$$v = 2\,\frac{P}{U};$$

proto *síla P, počne-li působiti náhle, ale bez rázu, vyvodí dvojnásob větší namáhání látky, než působí-li nenáhle rostouc od nully.* Když síla P vyvodila roztažení Δl, nenastává rovnováha mezi ní a silami vnitřními, ale tyto, majíce převahu (výslednici $2\,P$), vyvozují zase zkrácení prutu na délku l, pak nastává nové roztažení a t. d. Vznikají tak oscillace, čím dále tím menší až ku konečné rovnováze prutu.

b) P r o s t ý o h y b. I zde rovnají se nulle všecka napětí vyjímajíc $v_x = v$, tak že platí zase rovnice

$$\Pi = \frac{1}{2\,E}\int v^2\, dV.$$

Působí-li všecky síly zevnitřní v rovině souměrnosti nosníku a to pravoúhelně k ose jeho, máme

$$v = -\,\frac{M\,z}{J},\quad dV = du \,.\, dx$$

a tedy

$$\Pi = \frac{1}{2\,E}\int \frac{M^2}{J^2}\,dx \int z^2\, du\,,$$

a poněvadž

$$\int z^2\, du = J\,,$$

$$\Pi = \frac{1}{2\,E}\int \frac{M^2}{J}\,dx\,; \qquad (180)$$

integral vztahuje se ku vší délce nosníku.

Jest-li na př. prismatický nosník ($a\,b$) na pravém konci (b) vetknut, na levém (a) volný a obtížen břemenem P na volném konci (a), máme

$$M = -\,P\,x$$

a tedy

$$\Pi = \frac{P^2}{2\,E\,J}\int_0^l x^2\, dx = \frac{P^2\,l^3}{6\,E\,J}\,.$$ *)

*) Z toho lze na př. snadně odvoditi největší pořadnici y_0 křivky ohybové. Roste-li zevnitřní síla od nully po hodnotu P a současně ona pořadnice od nully po

Jestliže za největší hodnotu napětí, kteráž se namítá v průřezu (b) ve vzdálenosti e od osy neutralné, položíme součinitele k bezpečné pevnosti, jak naznačuje rovnice

$$P\,l = k\frac{J}{e},$$

můžeme psáti

$$\Pi = \frac{1}{6\,E}\,k^2\frac{J}{e^2}\,l;$$

položíme-li pak

$$J = \delta\,U\,e^2,$$

vyjde

$$(181)\ \ldots\ldots\ldots\ \Pi = \frac{1}{6\,E}\,\delta\,k^2\,V\ ;$$

práce přetvárná jest úměrna k obsahu nosníku a druhé mocnosti dovoleného namáhání.

Připomenutí. Součinitel $\delta = \frac{1}{3}$ při průřezu obdélníkovém, $\delta = \frac{1}{4}$ při průřezu kruhovém atd.

Jest-li prismatický nosník ($a\,b$) na obou koncích prostě podepřen a obtížen břemenem P, působícím ve vzdálenosti p od levé podpory (a), platí

$$\text{od } x = 0 \text{ po } x = p \qquad M = \frac{P\,p'}{l}\,x,$$

$$,, \quad x = p \quad ,, \quad x = l \qquad M = \frac{P\,p}{l}\,x'.$$

---

hodnotu y_0, náleží k určité mezitímné hodnotě P' síly určitá pořadnice y'. Práce síly jest pak

$$\Pi = \int_0^{y_0} P'\,\delta y'.$$

Poněvadž

$$y' = \beta\,P',$$

kde β znamená určitou konstantu, lze psáti

$$\Pi = \frac{1}{\beta}\int_0^{y_0} y'\,\delta\,y' = \frac{y_0^2}{2\,\beta} = \tfrac{1}{2}P\,y_0.$$

Přirovnáním obou výrazů Π vychází přímo

$$y_0 = \frac{P\,l^3}{3\,E\,J},$$

rovnice, kterou jsme na str. 104. pod číslem (26ª) odvodili integrováním příslušné rovnice differencialné.

a tedy

$$\Pi = \frac{P^2}{2\,E\,J\,l^2}\left[p'^2\int_0^p x^2\,dx + p^2\int_p^l x'^2\,dx\right] = \frac{P^2\,p^2\,p'^2}{6\,E\,J\,l}.$$

Počítáme-li průřezové rozměry z rovnice

$$\frac{P\,p\,p'}{l} = k\,\frac{J}{e},$$

můžeme psáti

$$\Pi = \frac{1}{6}\,\frac{k^2}{E}\,\frac{J}{e^2}\,l,$$

a položíme-li zase

$$J = \delta\,U\,e^2,$$

obdržíme

$$\Pi = \frac{1}{6}\,\delta\,\frac{k^2}{E}\,V,$$

týž výraz jako (181). *Práce přetvárná nezávisí na poměru* $\frac{p}{p'}$.

Jde-li o nosník stejného odporu v ohybu, jest

$$\frac{M\,e}{J} = k$$

stejné ve všech průřezech (e znamená rozhodující krajní vzdálenost); vložíme-li hodnotu M z této rovnice do výrazu (180), obdržíme

$$\Pi = \frac{k^2}{2\,E}\int\frac{J}{e^2}\,dx,$$

a položíme-li

$$J = \delta\,U\,e^2,$$

vyjde

$$(182)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \Pi = \frac{1}{2}\,\delta\,\frac{k^2}{E}\,V.$$

Práce přetvárná nosníku stejného odporu v ohybu jest tedy nezávislá na podepření a obtížení, úměrná k objemu nosníku a druhé mocnosti dovoleného namáhání.

c) Prostý smyk. Zde jest položiti nullu za všecka napětí vyjímajíc τ_y, τ_z, tak že

$$\Pi = \frac{1}{2\,G}\int(\tau_y^2 + \tau_z^2)\,d\,V;$$

píšeme-li pak

$$dV = dx\,dy\,dz,$$

vychází

$$(183)\ \ldots\ldots\ldots \Pi = \frac{1}{2G}\int dx \int (\tau_y^2 + \tau_z^2)\,dy\,dz.$$

Jde-li na př. o průřez obdélníkový, máme dle § 39. a dle rovnice (105) na str. 168.

$$\tau_z = 0,\ \tau_y = -\tau = -\frac{3}{4}\frac{T}{b\,e^3}(e^2 - z^2)$$

a tedy

$$\int (\tau_y^2 + \tau_z^2)\,dy\,dz = \int_{-e}^{e} \tau_y^2\,dz \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy = b\int_{-e}^{e} \tau_y^2\,dz$$

$$= \frac{9}{16}\frac{T^2}{b\,e^6}\int_{-e}^{e}(e^2 - z^2)^2\,dz\ ;$$

poněvadž pak

$$\int_{-e}^{e}(e^2 - z^2)^2\,dz = \tfrac{16}{15}\,e^5,$$

vychází

$$\int (\tau_y^2 + \tau_z^2)\,dy\,dz = \frac{6}{5}\frac{T^2}{b\,h}$$

a proto

$$(184)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \Pi = \frac{3}{5\,G}\int \frac{T^2}{b\,h}\,dx.$$

Jde-li o průřez kruhový, máme dle rovnice (109) na str. 170. v bodě obvodovém

$$\tau' = \tfrac{4}{3}\,\frac{T}{\pi\,r^2}\cos\omega$$

a tedy

$$\tau_y' = -\tau\cos\omega = -\tfrac{4}{3}\,\frac{T}{\pi\,r^2}\cos^2\omega = \tau_y;\ *)$$

dle rovnice (101) na str. 165. máme dále

*) Tato hodnota platí ve všech bodech tetivy rovnoběžné s osou Y.

$$\tau_z = \tau_y \frac{y}{\eta} \tan \varphi = - \tau_y \frac{y}{\eta} \tan \omega.$$

Proto

$$\tau_y^2 + \tau_z^2 = \tau_y^2 \left(1 + \frac{y^2}{\eta^2} \tan^2 \omega \right)$$

a tedy

$$\int (\tau_y^2 + \tau_z^2)\, dy\, dz = \int_{-r}^{r} \tau_y^2\, dz \int_{-\eta}^{\eta} \left(1 + \frac{y^2}{\eta^2} \tan^2 \omega \right) dy.$$

Leč

$$\int_{-\eta}^{\eta} \left(1 + \frac{y^2}{\eta^2} \tan^2 \omega \right) dy = \tfrac{2}{3} \eta\, (3 + \tan^2 \omega)$$

a proto

$$\int (\tau_y^2 + \tau_z^2)\, dy\, dz = \tfrac{2}{3} \int (3 + \tan^2 \omega)\, \tau_y^2\, \eta\, dz$$

$$= \frac{32\, T^2}{27\, \pi^2\, r^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos^6 \omega + \cos^4 \omega)\, d\omega = \frac{32}{27} \frac{T^2}{\pi\, r^2},$$

poněvadž

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos^6 \omega + \cos^4 \omega)\, d\omega = \pi.$$

Máme tedy

$$(185) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Pi = \frac{16}{27\, \pi\, G} \int \frac{T^2}{r^2}\, dx$$

d) K r o u c e n í . Tu jest položiti nullu za všecka napětí vyjímajíc zase τ_y, τ_z, tak že

$$\Pi = \frac{1}{2\, G} \int (\tau_y^2 + \tau_z^2)\, dV = \frac{1}{2\, G} \int (\tau_y^2 + \tau_z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Poněvadž si myslíme prut prismatický, mají τ_y, τ_z tytéž hodnoty ve stejně položených bodech všech průřezů prutu nebo dílu prutového, v nějž působí táž dvojice Δ_k; pak lze psáti

$$(186) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Pi = \frac{l}{2\, G} \int \tau^2\, du,$$

znamenáme-li

$$\tau^2 = \tau_y^2 + \tau_z^2,$$
$$du = dy\, dz.$$

Jde-li o průřez kruhový, pišme

$$\frac{\tau}{\max \tau} = \frac{\tau}{k'''} = \frac{\varrho}{r},$$

$$du = 2\pi\, \varrho\, d\varrho,$$

a máme

$$\Pi = \frac{\pi\, k'''^2\, l}{G\, r^2} \int_0^r \varrho^3\, d\varrho = \frac{1}{4}\, \frac{k'''^2}{G}\, \pi\, r^2\, l$$

neboli

$$\Pi = \frac{1}{4}\, \frac{k'''^2}{G}\, V. \qquad (187)$$

Jde-li o mezikruží, jest integrovati od poloměru vnitřního r' po zevnitřní r; tu vychází

$$\Pi = \frac{1}{4}\, \frac{k'''^2}{G}\, \frac{r^2 + r'^2}{r^2}\, V.$$

neboli

$$\Pi = \frac{1}{4}\, \frac{k'''^2}{G}\, \frac{d^2 + d'^2}{d^2}\, V. \qquad (188)$$

Při elipse, jejíž polosy jsou a, b, máme, hledíce k rovnici (163) na str. 238., totiž

$$\tau = \frac{2\, M}{\pi\, a^3\, b^3} \sqrt{b^4\, y^2 + a^4\, z^2},$$
$$\Pi = \frac{2\, M^2\, l}{\pi^2\, G\, a^6\, b^6} \int (b^4\, y^2 + a^4\, z^2)\, du.$$

Poněvadž

$$\int y^2\, du = J_z = \frac{\pi}{4}\, b\, a^3,$$
$$\int z^2\, du = J_y = \frac{\pi}{4}\, a\, b^3,$$

vychází

$$\Pi = \frac{1}{2\pi\, G}\, \frac{a^2 + b^2}{a^3\, b^3}\, M^2\, l;$$

počítáme-li pak rozměry průřezové z rovnice

$$\frac{2\, M}{\pi\, a^2\, b} = k''',$$

můžeme psáti

$$(189) \ldots\ldots\ldots \Pi = \frac{1}{8\,G} \frac{a^2 + b^2}{b^2} k'''^2 V,$$

kde

$$V = \pi\, a\, b\, l$$

jest objem prutu.

Jde-li o průřez obdélníkový (zšíři $2\,a$, zvýši $2\,b$), vychází ze vzorce (169) na str. 241.

$$\int \tau^2\, du = \frac{9^2}{16^2} \frac{M^2}{a^6\, b^6} \int [y^2 (b^2 - z^2)^2 + z^2 (a^2 - y^2)^2]\, du$$

$$= \frac{9^2}{16^2} \frac{M^2}{a^6\, b^6} \left[b^4 \int y^2\, du + a^4 \int z^2\, du - 2(a^2+b^2) \int y^2\, z^2\, du + \int y^2\, z^4\, du + \int y^4 z^2\, du \right].$$

Poněvadž

$$\int y^2\, du = \tfrac{4}{3}\, b\, a^3, \quad \int z^2\, du = \tfrac{4}{3}\, a\, b^3, \quad \int y^2\, z^2\, du = \tfrac{4}{9}\, a^3\, b^3,$$

$$\int y^2\, z^4\, du = \tfrac{4}{15}\, a^3\, b^5, \quad \int y^4\, z^2\, du = \tfrac{4}{15}\, a^5\, b^3,$$

lze psáti

$$\int \tau^2\, du = \frac{9}{40} \frac{a^2 + b^2}{a^3\, b^3} M^2$$

a tedy dle rovnice (186)

$$\Pi = \frac{9}{80\, G} \frac{a^2 + b^2}{a^3\, b^3} M^2\, l.$$

Počítáme-li rozměry průřezové z rovnice

$$\max \tau = \frac{9}{16} \frac{M}{a^2\, b} = k'''$$

(viz vzorec 171.), dospíváme k rovnici

$$(190) \ldots\ldots\ldots \Pi = \frac{4}{45\, G} \frac{a^2 + b^2}{b^2} k'''^2 V.$$

Kombinace tahu či tlaku s ohybem.

§ 55. **Síly zevnitřní a vnitřní. Přetvoření.** Postupme dále k prakticky důležitým složeným případům pružnosti a přihlédněme nejprve ku případu, kde se pojí tah či tlak s ohybem, tak že jde výhradně o napětí normalná. Případ tento se namítá v určitém průřezu, jestliže síly zevnitřní, působící v prut s jedné strany tohoto průřezu, skládají se jednak ve výslednici normalnou N, která působí v ose prutové a jest buď tah (+) či tlak (—), jednak ve dvojici Δ_0, jejíž rovina jest pravoúhelná k rovině průřezové. Co prutu samého se týče, dejme tomu (jako v § 21.), že prut má rovinu symmetrie rovnoběžnou s rovinou dvojice Δ_0.

Kdyby moment M dvojice Δ_0 rovnal se nulle, měli bychom prostou pružnost v tahu či tlaku; v každém bodě průřezovém působilo by napětí

$$v_a = \frac{N}{U}$$

téhož znaménka jako síla N.

Kdyby naopak $N = 0$, šlo by o prostou pružnost v ohybu; ve vzdálenosti z od osy neutralné Y působilo by napětí

$$v_b = -\frac{Mz}{J},$$

jež má na protivných stranách osy Y znaménka protivná.*)

Není-li ani M ani N rovno nulle, namítají se v libovolném bodě průřezovém obě napětí v_a, v_b, jež — působíce v téže přímce — algebraicky se sčítají,**) tak že celkové napětí

$$(191) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots v = \frac{N}{U} - \frac{Mz}{J}.$$

Připomenutí. K témuž výsledku dospíváme vyšetřujíce současné působení síly N a dvojice Δ_0 spůsobem v § 22. naznačeným. Z rovnic (*a*) na str. 59., vyjadřujících výminky rovnováhy sil zevnitřních a vnitřních, mění se tu jen první a to tak, že na pravé straně místo nully jest položiti N; totéž platí tedy o první z rovnic (*c*) na str. 61., tak že rovnice (*d*) nabývá tvaru

*) Znaménko minus na pravé straně stanoveno bylo na tom základě, že osa prutu jest vodorovná, že positivná polovice osy Z míří vzhůru a že moment M pokládáme za {positivný / negativný}, způsobil-li by točení v tom smyslu, jak se {točí / netočí} ručičky hodinové.

**) Zásada superposice.

$$v_0 = \frac{N}{U},$$

rovnice (*e*) však trvá v platnosti.

Poněvadž v rovnici (*e*) jest obsažena differencialná rovnice křivky ohybové, shledáváme, že *možno nedbati účinku síly N ve tvar oné křivky.**) Rovnicemi (*d*), (*e*) vychází pak z rovnice (*b*) položený svrchu výraz napětí v.

Jak patrno, *řídí se* i v tomto složeném případě *napětí* v *zákonem přímky* (souřadnice z, v).

Pro větší určitost pokládejme zde, že positivná polovice osy Z míří tam, kam křivka ohybová obrací stranu dutou; pak napětí v_b má znaménko protivné k souřadnici z, a jest pokládati M za prostou hodnotu momentu ohybového. Rovnice (191) zůstává v platnosti.

Položíme-li v ní $v = 0$, stanoveno bude příslušné $z = d$ výminkou

$$0 = \frac{N}{U} - \frac{M\,d}{J}$$

neboli

$$(192) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ d = \frac{J}{U} : \frac{M}{N}.$$

Hodnotou d stanoví se přímka D rovnoběžná s osou Y; v bodech přímky D, seče-li tato obrazec průřezový, napětí v rovná se nulle, a na protivných stranách přímky má znaménka protivná. Neseče-li D obrazce průřezového, má napětí v ve všech bodech průřezu znaménko stejné. Nazývejme přímku D osou neutralnou nebo nullovou, ať má polohu jakoukoli.

Uvedeme-li vzdálenost d v rovnici (191), položíce

$$\frac{N}{U} = \frac{M\,d}{J},$$

obdržíme

$$(193) \ldots\ldots\ldots\ldots\ v = -\frac{M}{J}(z - d);$$

$z - d$ jest vzdálenost bodu m od osy neutralné. Tím dospěli jsme k témuž zákonu napětí jako při prostém ohybu: *Napětí jest úměrno ku vzdálenosti bodu od osy neutralné.* Osa neutralná neobsahuje tu však těžiště průřezového.

---

*) Silou N mění se délka osy prutové neboli vzdálenost každých dvou průřezů nekonečně blízkých (nedbáme-li zkřivení jich); účinek ten, pokud běží o tvar křivky ohybové, jest nepatrný proti účinku dvojice Δ_0 a mizí docela, přestáváme-li na přibližnosti, na níž se zakládá rovnice

$$\lambda \doteq \lambda_0 + \frac{z}{\varrho} \text{ (str. 61.)}.$$

KNIHOVNA ČSD

Položíme-li v rovnici (191) $z = 0$, vyjde

$$(194) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \nu = \frac{N}{U};$$

v bodech osy Y působí napětí, které by působilo ve všech bodech průřezu za prostého tahu či tlaku. Nazývejme je napětím středním.

Jsou-li e_1, $-e_2$ krajní hodnoty souřadnice z, pokud náležejí k bodům průřezovým, dává rovnice (191) krajní hodnoty napětí

$$(195) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \nu_1 = \dfrac{N}{U} - \dfrac{M e_1}{J}, \\ \nu_2 = \dfrac{N}{U} + \dfrac{M e_2}{J}, \end{cases}$$

rovnice (193) pak

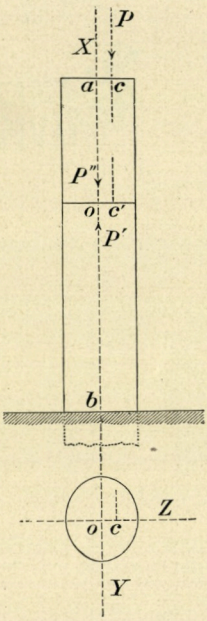
$$(196) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \nu_1 = -\dfrac{M}{J}(e_1 - d), \\ \nu_2 = \quad \dfrac{M}{J}(e_2 + d). \end{cases}$$

Jest-li N $\left\{\begin{matrix}\text{tah}\\ \text{tlak}\end{matrix}\right\}$, jest $\left\{\begin{matrix}\nu_2 > 0\\ \nu_1 < 0\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}\nu_1 \gtrless 0\\ \nu_2 \gtrless 0\end{matrix}\right\}$. Mají-li ν_1, ν_2 znaménka souhlasná, jest při výminkách bezpečné pevnosti přihlížeti ku větší prosté hodnotě; mají-li znaménka protivná, nutno přihlížeti vůbec k obě ma.

§ 56. **Prut jest namáhán silou, jež působí v přímce rovnoběžné s osou jeho.** Kombinace tahu či tlaku s ohybem namítá se ryzí (totiž bez současného působení síly posouvající), působí-li v prut síly jen rovnoběžně s osou prutovou. Dejme tomu, že jde o jedinou takovou sílu P; prut mějž osu svislou $a\,b$, budiž na jednom (na př. dolejším) konci (b) vetknut, ve druhý (hořejší) konec (a) nechť působí síla P a to tlak. Přímka síly P budiž obsažena v rovině symmetrie prutu*); působiště její c mějž od těžiště a průřezu (a) vzdálenost $\overline{a\,c} = c$, kterou nazývejme výstředností (obr. 70.).

Pokládejme osu $a\,b$ prutu za osu souřadnicovou X, bod b za počátek, a přihlédněme k libovolnému průřezu (x), stanovenému úsečkou $x = \overline{b\,o}$. Nedbáme-li vlastní váhy prutové, jest P výslednicí sil zevnitřních ve všech průřezech; rozložme ji jednak v sílu P'' téhož směru a téže velikosti, ale

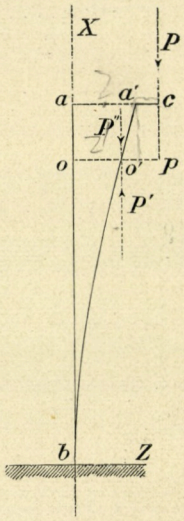
*) Stačí ostatně, působí-li přímka P v rovině obsahující jednu hlavní osu centralnou všech průřezů prutových. V této rovině jest pak obsažena křivka ohybová (viz § 27. str. 98.).



Obr. 70.

působící v těžiště průřezové o, jednak ve dvojici $(P\,P')$.*) Tím obdržíme na hořejší straně průřezu jednak sílu normalnou $N = -P'' = -P$ (znamená-li P prostou hodnotu dané síly), jednak dvojici Δ_0 danou momentem $M = P\,c$. Prut vzdoruje tlaku a zároveň ohybu. Kdybychom nedbali ohnutí prutu, měla by síla N i moment M ve všech průřezech touž hodnotu svrchu vytčenou; ohnutím mění se však moment M velmi podstatně, pročež nezbytno vzíti v úvahu prut ohnutý.**)

Není-li účinků, jimiž by prut byl nucen ohnouti se jinak, nabude čára ohybová tvaru $b\,o'\,a'$, naznačeného v obr. 71.; souřadnice bodu o' jsou $x = \overline{b\,o}$, $z = \overline{o\,o'}$; bod a' má obdobně souřadnice $x = \overline{b\,a} = l$, $z = z_1 = \overline{a\,a'}$.***)



Obr. 71.

V průřezu (x) máme pak

$$N = -P,$$
$$M = P\,(z_1 + c - z),$$

poněvadž

$$\overline{o'\,p} = \overline{a\,a'} + \overline{a'\,c} - \overline{o\,o'} = z_1 + c - z.$$

Síla N má zase ve všech průřezech touž hodnotu P; moment M však se mění průřez od průřezu a závisí na ohnutí prutu, tak že nutno vyšetřovati křivku ohybovou.

Jako jsme seznali v § 55., možno nedbati účinku síly N v křivku ohybovou a vyšetřovati tuto tak, jako by šlo o prostý ohyb. V příslušné differencialné rovnici

$$\pm E\,J\,\frac{d^2 z}{d x^2} = M = P\,(z_1 + c - z) = -P\,(z - z_1 - c)$$

---

*) Tím, že připojíme v těžišti o síly P', P'', jež velikostí se rovnají síle P a z nichžto $\left\{\begin{matrix} P'' \\ P' \end{matrix}\right\}$ má směr $\left\{\begin{matrix} \text{souhlasný} \\ \text{protivný} \end{matrix}\right\}$ k síle P.

**) Při dosavadních případech pružnosti jsme, skládajíce síly zevnitřní s jedné strany průřezu, nedbali účinku přetvoření prutu, poněvadž účinek tento byl poměrně nepatrný, v přítomném případě však vedlo by to k chybě podstatné.

***) Připouštějíce ohyb jen skrovný můžeme nedbati toho, že úsečky x bodů o, a ohnutím prutu vlastně se mění.

jest na levé straně položiti z obou znamének ono, jímž se vyvodí shoda na obou stranách; za okolností v obr. 71. naznačených jest $\frac{d^2z}{dx^2} > \emptyset, M > \emptyset$, tak že sluší vzíti znaménko plus.*)

Dělme obě strany oné differencialné rovnice součinem EJ pokládajíce J stálým, prut tedy prismatickým, a položme kratšeji

$$(197) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{P}{EJ} = \alpha^2;$$

pak možno rovnici differencialnou napsati ve tvaru

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\alpha^2 (z - z_1 - c)$$

anebo, klademe-li

$$z - z_1 - c = \mathfrak{z},$$

tak že

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2\mathfrak{z}}{dx^2},$$

ve tvaru

$$(\alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d^2\mathfrak{z}}{dx^2} = -\alpha^2\mathfrak{z}.$$

Abychom tuto rovnici integrovali, položme

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dx} = \mathfrak{z}',$$

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dx^2} = \frac{d\mathfrak{z}'}{dx} = \frac{d\mathfrak{z}'}{d\mathfrak{z}}\frac{d\mathfrak{z}}{dx} = \frac{\mathfrak{z}'d\mathfrak{z}'}{d\mathfrak{z}},$$

tak že ona rovnice nabývá tvaru

$$\mathfrak{z}'d\mathfrak{z}' = -\alpha^2\mathfrak{z}\,d\mathfrak{z}.$$

Poněvadž tu obě proměnné jsou od sebe odloučeny, lze na obou stranách integrovati, čímž vychází

$$\mathfrak{z}'^2 = \beta^2 - \alpha^2\mathfrak{z}^2,$$

kde β^2 jest integrační konstanta. Máme tedy

---

*) To zůstává v platnosti, jestliže připouštíme i jiný ohyb. Nebo jest-li v libovolném průřezu $M \gtrless \emptyset$, bude tam prut ohnut tak, že ve zvolené soustavě souřadnicové $\frac{d^2z}{dx^2} \gtrless \emptyset$.

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dx} = \pm \sqrt{\rho^2 - \alpha^2 \mathfrak{z}^2}$$

neboli

$$\frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2 \mathfrak{z}^2}} = \pm dx.$$

Poněvadž tu zase obě proměnné jsou od sebe odloučeny, integrujme na obou stranách a obdržíme

$$\frac{1}{\alpha} \arcsin \frac{\alpha \mathfrak{z}}{\beta} = \pm x + C$$

anebo

$$\arcsin \frac{\alpha \mathfrak{z}}{\beta} = \pm \alpha x + \gamma,$$

píšeme-li γ místo αC. Přejdeme-li od funkce kyklometrické ku goniometrické, vyjde

$$\frac{\alpha \mathfrak{z}}{\beta} = \sin (\pm \alpha x + \gamma) = \pm \sin \alpha x \cos \gamma + \cos \alpha x \sin \gamma;$$

znamenáme-li pak krátce

$$A = \pm \frac{\beta}{\alpha} \cos \gamma, \quad B = \frac{\beta}{\alpha} \sin \gamma,$$

můžeme psáti

$$\mathfrak{z} = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x.$$

Vložíme-li sem $\mathfrak{z} = z - z_1 - c$, dospějeme konečně k rovnici

$$(\beta) \ldots\ldots\ldots z - z_1 - c = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x.$$

Bychom ustanovili konstanty integrační A, B, uvažme, že bod b má souřadnice $x = 0$, $z = 0$, a že v něm tečna křivky ohybové se sjednocuje s osou X, pročež $\frac{dz}{dx} = 0$.

Derivujeme-li obě strany rovnice (β) dle x, vychází

$$\frac{dz}{dx} = A \alpha \cos \alpha x - B \alpha \sin \alpha x.$$

Poněvadž v bodě b

$$x = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 0,$$

nabýváme výminky

$$A\,\alpha = 0\,;$$

α nerovná se nulle, a proto

$$A = 0.$$

Poněvadž dále v bodě b

$$x = 0, \quad z = 0,$$

vychází z rovnice (β), že

$$-z_1 - c = B.$$

Křivka ohybová má tedy rovnici

$$(\gamma) \ldots\ldots\ldots\ldots z = (z_1 + c)\,(1 - \cos \alpha x).$$

Za $x = l$ jest $z = z_1$, pročež

$$z_1 = (z_1 + c)\,(1 - \cos\,\alpha l);$$

z toho plyne

$$(198) \ldots\ldots\ldots\ldots z_1 + c = \frac{c}{\cos \alpha l},$$

čímž rovnice (γ) nabývá tvaru

$$(\delta) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{z}{c} = \frac{1 - \cos \alpha x}{\cos \alpha l}.$$

Poněvadž $N = \text{const.}$, jest nebezpečným průřezem ten, v němžto moment $M = \max.$ Je to patrně průřez (b), jehož moment ohybový

$$M_b = P\,(z_1 + c) = \frac{P\,c}{\cos \alpha l};$$

krajní napětí v tomto průřezu jsou dle rovnic (195)

$$(199) \quad \begin{cases} \nu_1 = -\dfrac{P}{U} - \dfrac{P\,c\,e_1}{J \cos \alpha l} = -\dfrac{P}{U}\left(1 + \dfrac{c\,e_1}{i^2 \cos \alpha l}\right), \\ \nu_2 = -\dfrac{P}{U} + \dfrac{P\,c\,e_2}{J \cos \alpha l} = \dfrac{P}{U}\left(-1 + \dfrac{c\,e_2}{i^2 \cos \alpha l}\right); \end{cases}$$

i znamená poloměr setrvačnosti průřezu prutového vzhledem k ose Y.

Napětí ν_1 jest tlak, ν_2 může býti tlak či tah; jsou-li obě tlaky, jest prostá hodnota ν_2 menší než prostá hodnota ν_1, a stačí jediná výminka bezpečné pevnosti, totiž

$$-\nu_1 \leqq k'' :$$

jest-li však ν_2 tah, máme vůbec výminky dvě, totiž

$$-\nu_1 \leqq k'', \quad \nu_2 \leqq k'.$$

Pružnost vzpěrná.

§ 57. Vezměme v úvahu zvláštní případ, kde výstřednost $c = 0$. Tu při prutu neohnutém $M = 0$, a máme prostou pružnost v tlaku. Jsou-li dokonale naplněny všecky výminky, na kterých dosavadní vyšetřování bylo založeno, není skutečně, proč by se prut ohnul. Jsou to výminky následující: *a*) stejnorodá (a zároveň isotropá)*) hmota, *b*) osa prutu přímá, *c*) výstřednost rovná nulle, *d*) mimo sílu P, působící v ose prutu, není jiných sil zevnitřních. Výminky ty bývají však ve skutečnosti naplněny jen přibližně, tu měrou větší, onde menší. V praxi nelze dodělati se ani úplné stejnorodosti látky, ani osy mathematicky přímé, ani dokonalé soustřednosti, ani konečně nebývají zcela vyloučeny náhodné účinky vyvozující jakýs ohyb, který pak působením síly P se zvětšuje. Za tou příčinou nutno přihlížeti k možnému ohnutí i v případech, kde se snažíme dosíci, pokud možno, soustředného působení síly P; k ohnutí nutno hleděti tím spíše, čím štíhlejší jest prut, totiž čím větší jest poměr jeho délky k rozměrům průřezovým.

Mysleme si, že výminky *a*), *b*), *c*) jsou přesně naplněny, ale že náhodným jakýms účinkem vzniklo ohnutí prutu a působením síly P se zvětšilo, až nastala rovnováha na prutu ohnutém mezi silou P a silami vnitřními.

Vložíme-li v rovnici (198) výminku $c = 0$, vyjde

$$z_1 = \frac{0}{\cos \alpha l},$$

a sluší rozeznávati dva případy:

1. $\cos \alpha l = 0$. Této rovnici hoví nesčíslné hodnoty úhlu αl; nejmenší jest

$$\alpha l = \frac{\pi}{2}.$$

Rovnice tato stanoví určitou hodnotu P' síly P; jestliže zdvojmocníme a vložíme hodnotu α^2 z rovnice (197), vyjde

$$(\varepsilon) \ldots\ldots\ldots\ldots P' = \frac{\pi^2}{4} \frac{EJ}{l^2}.$$

*) Isotropie není v tomto případě výminkou nezbytnou; stačí, má-li těleso jedinou osu pružnosti rovnoběžnou s osou prutu.

Má-li síla P hodnotu P', dává rovnice (198)

$$z_1 = \frac{\emptyset}{\emptyset},$$

rovnice (γ) pak

$$z = \frac{\emptyset}{\emptyset},$$

tedy ohnutí neurčité; silou P' zachovává se rovnováha za každého ohnutí. Což možno si vysvětliti tak, že $\left\{\begin{matrix}\text{zvětšením}\\ \text{zmenšením}\end{matrix}\right\}$ ohnutí $\left\{\begin{matrix}\text{zvětší}\\ \text{zmenší}\end{matrix}\right\}$ se moment síly P', touž měrou však i moment odporu sil vnitřních. Rovnice (199) ukazují, že i krajní napětí ν_1, ν_2 stávají se v tomto případě neurčitými.

2. $\cos \alpha l \gtreqless \emptyset$, $P \lesseqgtr P'$. Tu dávají rovnice (198), (γ)

$$z_1 = \emptyset, \quad z = \emptyset;$$

rovnováha jest možna jen na prutu neohnutém. Prohlédajíce pak zároveň k tomu, co podotčeno v případě 1., můžeme doložiti toto:

Pokud $P > P'$, jest za každého ohnutí moment síly P větší než moment odporu; síla zevnitřní má stále převahu nad vnitřními; ohnutí tedy poroste, až prut se naprosto ohne tak, že účelu svému již nehoví, anebo se zlomí. V praxi technické namítá se případ poslední.

Pokud $P < P'$, jest za každého ohnutí moment síly P menší než moment odporu; síly vnitřní mají stále převahu; ohnutí zmenšuje se napořád, až prut se vzpřímí a nastane rovnováha.

Ze všeho patrno, že hodnota P' značí meż, které síla P nesmí přestoupiti, aby nenastalo úplné ohnutí nebo zlomení prutu. Jest tedy hodnotu P' pokládati za obtížení prutu na mezi pevnosti.

To platí však jen, jsou-li naplněny výminky *a*), *b*), *c*); nejsou-li naplněny, dosahuje se meze pevnosti již silou menší než P'. Jest-li na př. $c > \emptyset$, dává rovnice (198)

$$z_1 = \infty,$$

poněvadž za $P = P'$ jest $\cos \alpha l = \emptyset$. Síla P' jest tedy již za mezí pevnosti.

Připomenutí. Výsledek tuto vyvozený, že totiž ohyb jest možný teprve, když síla P dostoupila určité hodnoty P', a že se stává pak neurčitým, překvapuje, a záhodno zkoumati, není-li tu příčinou snad nedokonalost vyšetřování. Grashof (Theorie der Elasticität und Festigkeit — Berlin 1878, § 115.) obírá se touto otázkou; ve výrazu poměrného roztažení λ (viz první rovnici na str. 61. přítomného spisu) nevynechává členu $\lambda_0 \frac{z}{\varrho}$, ale klade

$$\lambda = \lambda_0 + (1 + \lambda_0)\frac{z}{\varrho},$$

$$v = v_0 + (1 + \lambda_0)\frac{E z}{\varrho},$$

čímž mění se druhá z našich rovnic (*c*) na str. 61. tak, že rovnice (*e*) na str. 62. nabývá tvaru

$$M + \frac{E J (1 + \lambda_0)}{\varrho} = 0.$$

V přítomném případě

$$\lambda_0 = -\frac{P}{E U}.$$

Grashof dále ve výrazu poloměru ϱ křivosti čáry ohybové (viz první rovnici na str. 93. přítomného spisu) nevynechává druhé mocnosti $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$ první derivace proti jedničce, tak že jest mu dvakrát integrovati rovnici

$$E J (1 + \lambda_0) \frac{\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = P (z_1 - z).$$

Položiv

$$\frac{P}{E J (1 + \lambda_0)} = \alpha^2$$

dospívá k rovnici

$$\frac{2}{\pi} \alpha l (1 + \lambda_0) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\alpha^2 z_1^2}{4} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\frac{\alpha^2 z_1^2}{4}\right)^2 + \ldots$$

Nekonečná řada na pravé straně této rovnice za mírného ohnutí prutu rychle konverguje; znamenáme-li písmenem P' příslušnou hodnotu síly P, dává ona rovnice za velmi nepatrného ohnutí

$$\frac{2}{\pi} l \sqrt{\frac{P'}{E J}\left(1 - \frac{P'}{E U}\right)} = 1,$$

z čehož plyne přibližně

$$P' = \frac{\pi^2}{4} \frac{E J}{l^2},$$

a poněkud přesněji

$$P' = \frac{\pi^2}{4} \frac{E J}{l^2}\left(1 + \frac{\pi^2}{4} \frac{i^2}{l^2}\right).$$

Jak tedy ukazuje přesnější vyšetřování, znamená hodnota P', vyjádřená rovnicí (*ε*), přibližně nejmenší sílu, za které ohnutí prutu jest vůbec možné, ale

není to jediná hodnota, jež zachovává rovnováhu za každého ohybu; ku každé hodnotě P, větší než P', náleží určité ohnutí. Ohnutí to pravidlem roste velmi rychle, přibývá-li síly P, a může malým zvětšením síly P nabyti míry nepřípustné.

Proto můžeme prakticky trvati na výrocích pronesených na základě vyšetřování přibližného.

Rovina křivky ohybové. Za výstředného působení síly P rovina, obsahující osu prutovou a přímku P, jest rovinou křivky ohybové, jestliže dělí prut souměrně či — obecněji — obsahuje-li jednu hlavní centralnou osu setrvačnosti všech průřezů prutových (viz § 27. str. 97. a 98.). Jest-li však výstřednost $c = 0$, pozbývá tato rovina určitosti a namítá se otázka, v které rovině osa prutová se ohne; s tím souvisí otázka další, ku které ose sluší vztahovati moment J setrvačnosti, obsažený v rovnici (ε). Za rovinného ohybu jest totiž tato osa (Y v obr. 70.) pravoúhelna k rovině ohybové XZ. Jde-li o zachování rovnováhy, sluší z možných odporů vzíti v úvahu nejmenší, a poněvadž tu odpor jest úměrný k momentu J setrvačnosti, sluší vzíti v úvahu tak zv. první hlavní moment centralný; osou Y jest první hlavní osa centralná; rovina křivky ohybové obsahuje pak druhou hlavní osu centralnou. Pišme tedy rovnici (ε), jež pochodí od Eulera, ve tvaru

$$(\varepsilon') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots P' = \frac{\pi^2}{4}\frac{EJ_1}{l^2};$$

J_1 znamená první hlavní centralný moment setrvačnosti průřezu prutového.

Případ tuto vyšetřovaný, kde běží o malé bezděčné hodnoty výstřednosti, kterých v praxi nelze úplně se uvarovati, jest doplňkem prosté pružnosti v tlaku; nazývejme jej pružností vzpěrnou, poněvadž se namítá při t. zv. vzpěrách (prutech tlačených). Ač tu jde o kombinaci dvou prostých případů pružnosti, řadí se pružnost vzpěrná podstatou a důležitostí svou ku případům jednoduchým.

§ 58. **Jiné tvary křivky ohybové. Jiná opatření konců prutových.** Výmince $\cos \alpha l = 0$ hoví nejen hodnota $\alpha l = \frac{\pi}{2}$, ale i hodnoty $\alpha l = 3\frac{\pi}{2}$, $5\frac{\pi}{2}$ a t. d. Pišme rovnici (γ) § 56., kladouce v ní $c = 0$, ve tvaru

$$\frac{z}{z_1} = 1 - \cos \alpha x = 1 - \cos\left(\alpha l \frac{x}{l}\right).$$

a) Vložíme-li v ni hodnotu $\alpha l = \frac{\pi}{2}$, obdržíme

$$(a) \ldots\ldots\ldots \frac{z}{z_1} = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right).$$

Poněvadž

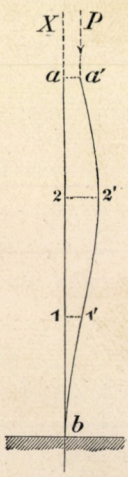
$$0 \leqq \frac{x}{l} \leqq 1 ,$$

obsažen jest úhel $\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}$ v e č t v e r n í k u p r v é m. Roste-li $\frac{x}{l}$ od nully po jedničku, klesá $\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right)$ spojitě od jedničky po nullu; zlomku $\frac{z}{z_1}$ přibývá tedy od nully po jedničku, tak že pořadnice z roste od nully (bod b) po z_1 (bod a'). Žádná z hodnot z se neopětuje, a křivka ohybová má tvar v obr. 71. naznačený (kde však jest si mysliti $c = 0$). Bod a' jest obratníkem křivky měřické (přes a' prodloužené). Hodnota $\alpha l = \frac{\pi}{2}$ vede, jak jsme svrchu seznali, k síle P', vyjádřené rovnicí (ε'), jakožto k obtížení prutu na mezi pevnosti.

b) Hodnotou $\alpha l = 3\frac{\pi}{2}$ vychází

$$(b) \quad \ldots\ldots\ldots \frac{z}{z_1} = 1 - \cos\left(3\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right);$$

úhel $3\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}$ obsažen jest v p r v n í c h t ř e c h č t v e r n í c í c h (mezi 0 a 270°), a křivka ohybová má — jak podrobnějším vyšetřováním možno se přesvědčiti — tvar naznačený v obr. 72. Za



Obr. 72.

$$x = 0 \quad \text{jest} \quad z = 0 ,$$
$$x = \frac{l}{3} \quad ,, \quad z = z_1 ,$$
$$x = \frac{2}{3} l \quad ,, \quad z = 2 z_1 ,$$
$$x = l \quad ,, \quad z = z_1 .$$

Obratníky křivky náležejí k úsečkám $x = \frac{l}{3}$, l; jsou to body $1'$, a'.

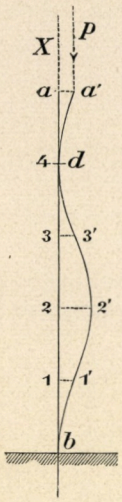
Zdvojmocněním výrazu αl svrchu položeného a dosazením hodnoty α^2 z rovnice (197) vychází

$$P' = 9\frac{\pi^2}{4}\frac{E J_1}{l^2}.$$

c) Hodnotou $\alpha l = 5\frac{\pi}{2}$ vyplývá

$$(c) \quad \ldots\ldots\ldots \frac{z}{z_1} = 1 - \cos\left(5\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right);$$

úhel $5\,\frac{\pi}{2}\,\frac{x}{l}$ jest obsažen v prvních pěti čtvernících, a křivka ohybová má tvar načrtnutý v obr. 73. Za



Obr. 73.

$$x = 0 \quad \text{jest} \quad z = 0\ ,$$
$$x = \frac{l}{5} \quad ,, \quad z = z_1\ ,$$
$$x = \frac{2}{5}\,l \quad ,, \quad z = 2\,z_1\ ,$$
$$x = \frac{3}{5}\,l \quad ,, \quad z = z_1\ ,$$
$$x = \frac{4}{5}\,l \quad ,, \quad z = 0\ ,$$
$$x = l \quad ,, \quad z = z_1\ .$$

Obratníky křivky náležejí k úsečkám $x = \frac{l}{5}, \frac{3}{5}\,l,\ l$; jsou to body $1', 3', a'$.

Zdvojmocněním položeného svrchu výrazu $\alpha\,l$ a dosazením hodnoty α^2 z rovnice (197) vychází

$$P' = 25\,\frac{\pi^2}{4}\,\frac{E\,J_1}{l^2}.$$

A t. d.

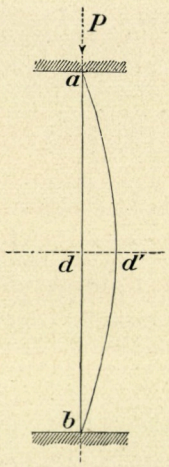
Obtížení na mezi pevnosti jest v případě *b*) 9krát, v případě *c*) 25krát větší než v případě *a*); tyto hodnoty měly by smysl praktický jen tehdy, kdyby prut byl nucen ohnouti se způsobem v obr. 72. a 73. naznačeným. Není-li tomu tak, dává rovnice (ε') obtížení na mezi pevnosti, jestliže — jak jsme dosud pokládali — jest prut na jednom konci vetknut, na druhém zcela volný.

Jiná opatření konců prutových. Pokládajíce případ dosud vyšetřovaný, kde totiž prut jest na konci (*b*) vetknut, na konci (*a*) volný, za případ 1), dejme 2) tomu, že prut jest na obou koncích prostě opřen, t. j. že body *a*, *b* jsou nuceny setrvati na svých místech (přesněji na ose *a b*), tečny křivky ohybové však že se mohou jakkoli odchýliti od přímky *a b*.

Opatření toto bylo by prakticky dokonalé, kdyby prut v bodech *a*, *b* spojen byl s oporami kloubově.

Rovina, jež rozpolujíc vzdálenost *l* bodů *a*, *b* jest pravoúhelná ku přímce *a b*, dělí symmetricky prut i síly zevnitřní; jest tedy rovinou symmetrie též sil vnitřních a křivky ohybové (vlastní váhy prutu zde nedbáme); jednu polovici prutu, na př. polovici (*d' a*) v obr. 74., možno pokládati za prut na konci (*a*) volný, na konci (*d'*) vetknutý v polovici druhou. Máme pak případ *a*) svrchu vyšetřený, pročež síla *P* na mezi pevnosti má hodnotu

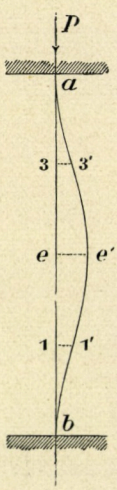
MAJETEK ČESKO-UKR. KOMITÉTU



Obr. 74.

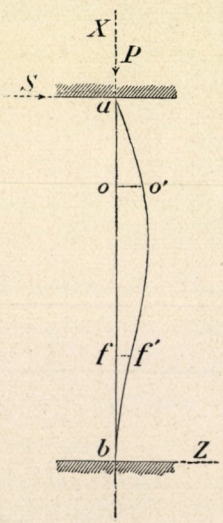
$$P' = \frac{\pi^2}{4} \frac{E J_1}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \pi^2 \frac{E J_1}{l^2}.$$

Dejme dále 3) tomu, že prut jest na konci (*b*) vetknut a na konci (*a*) prostě opřen (spojení kloubové), tak že nejen bod *b* ale i jeho tečna ohnutím prutu se nemění, dále pak, že bod *a* zůstává na původní ose *a b*, ale jeho tečna může jakkoli se odchýliti od této přímky. Křivka ohybová nabude nejspíše tvaru podobného ku křivce obr. 72., liší se však od ní tím, že bod *a'* v přítomném případě se sjednocuje s *a*. Poněvadž v tom spočívá podstatný rozdíl, musíme tento případ zvlášť vyšetřiti, což učiníme níže.



Obr. 75.

Mysleme si konečně 4) prut vetknutý na obou koncích, tak že nejen body *a*, *b* ale i tečny jejich ohybem se nemění. V tomto případě ohne se prut pravdě nejpodobněji tak, jak načrtnuto v obr. 75. Příslušná křivka ohybová shoduje se úplně s křivkou *d* 3' 2' 1' *b* obr. 73. Odejme-li se totiž zde vrchní pětina (*a' d*) prutu, nutno ji nahraditi výslednicí *P* sil zevnitřních působících nad průřezem (*d*); sílu *P* však lze rozložiti v sílu $P'' = P$ téhož směru, působící v těžišti *d* průřezu (*d*), a ve dvojici (*P P'*), jejíž momentem $P \,.\, \overline{a\ a'}$ vyjadřuje se účinek vetknutí konce (*d*). Proto v případě 4), znamenáme-li v obr. 75. délku $\overline{a\ b}$ písmenem *l*, jest obtížení na mezi pevnosti



Obr. 76.

$$P' = 25 \frac{\pi^2}{4} \frac{E J_1}{\left(\frac{5}{4} l\right)^2} = 4 \pi^2 \frac{E J_1}{l^2}.$$

Obraťme se nyní k vyšetřování případu 3), kde jest prut na konci (*b*) vetknut, na konci (*a*) prostě opřen. Opora působí v prut jakous neznámou reakcí *S*.*)

V soustavě *XZ* (obr. 76.) má libovolný bod *o'* křivky ohybové souřadnice $x = \overline{b\ o}$, $z = \overline{o\ o'}$. Abychom ustanovili výslednici sil zevnitřních na hořejší straně průřezu (*o*), připojme v bodě *o'* (těžišti průřezovém po ohnutí)

*) Kdyby nebylo síly *S*, přešel by za ohnutí v obr. 76. naznačeného bod *a* na levou stranu svislice *a b* atd., a konečně ustálil by se ohyb, jak jej ukazuje obr. 71.

síly $\begin{Bmatrix} P', & P'' \\ S', & S'' \end{Bmatrix}$, z nichžto $\begin{Bmatrix} P'' \\ S'' \end{Bmatrix}$ mějž týž směr a touž velikost jako $\begin{Bmatrix} P \\ S \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} P' \\ S' \end{Bmatrix}$ však touž velikost ale směr protivný. Tím rozložili jsme $\begin{Bmatrix} P \\ S \end{Bmatrix}$ jednak v sílu $\begin{Bmatrix} P'' \\ S'' \end{Bmatrix}$ téhož směru a téže velikosti jako $\begin{Bmatrix} P \\ S \end{Bmatrix}$, ale působící v bodě o', jednak ve dvojici $\begin{Bmatrix} P P' \\ S S' \end{Bmatrix}$ stanovenou momentem $\begin{Bmatrix} -Pz \\ S(l-x) \end{Bmatrix}$. Zevnitřní síly, působící nad průřezem (o), lze tedy složiti: v sílu normalnou $N = -P'' = -P$, v sílu tangencialnou $T = S'' = S$ a ve výslednou dvojici Δ_0 mající moment

$$M = -Pz + S(l-x).$$

Jde tedy o kombinaci tří prostých případů pružnosti: v tlaku, smyku a ohybu. Poněvadž moment M závisí na ohnutí, přihlédněme k tomuto, nedbajíce však při tom účinku sil N, T v křivku ohybovou.

Máme pak differencialnou rovnici

$$\pm E J \frac{d^2z}{dx^2} = M = -Pz + S(l-x),$$

v níž jest zase na levé straně předložiti znaménko plus.*)

Pišme krátce

$$\frac{P}{EJ} = \alpha^2, \qquad \frac{S}{EJ} = \beta^2$$

a máme pak rovnici

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\alpha^2 z + \beta^2 (l-x).$$

Abychom tuto rovnici integrovali, položme dále

$$(\zeta) \ldots\ldots\ldots\ldots -\alpha^2 z + \beta^2 (l-x) = \mathfrak{z};$$

derivujeme-li tuto dvakrát dle x, vychází

$$-\alpha^2 \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2\mathfrak{z}}{dx^2},$$

a poněvadž

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \mathfrak{z},$$

dospíváme k rovnici

*) Jest-li v určitém průřezu $M \gtrless \emptyset$, má čára ohybová v příslušném bodě zkřivení takové, že $\frac{d^2z}{dx^2} \gtrless \emptyset$.

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dx^2} = -\alpha^2\mathfrak{z},$$

jež úplně se shoduje s rovnicí (α) § 56. Jak v § 56. dovozeno, jest příslušný integral

$$\mathfrak{z} = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x;$$

vložíme-li sem hodnotu $\mathfrak{z}$ z nynější rovnice (ζ), obdržíme

$$(\eta) \ldots . \quad -\alpha^2 z + \beta^2 (l - x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x,$$

rovnici křivky ohybové, v níž by bylo určiti obě integrační konstanty A, B, pak reakční konstantu β^2. K tomu máme následující výminky:

a) Křivka obsahuje bod b, rovnice její musí tedy býti naplněna hodnotami $x = \emptyset$, $z = \emptyset$; tím nabýváme výminky

$$\beta^2 l = B.$$

b) Tečna křivky v bodě b sjednocuje se s osou X; differencialná rovnice (prvého řádu) křivky, totiž rovnice

$$-\alpha^2 \frac{dz}{dx} - \beta^2 = A\,\alpha \cos \alpha x - B\,\alpha \sin \alpha x$$

musí tedy býti naplněna hodnotami $x = \emptyset$, $\frac{dz}{dx} = \emptyset$; tím vychází výminka

$$-\beta^2 = A\,\alpha.$$

c) Křivka obsahuje bod a, rovnice její musí tedy býti naplněna hodnotami $x = l$, $z = \emptyset$; tím nabýváme výminky

$$A \sin \alpha l + B \cos \alpha l = \emptyset.$$

Napišme odvozené výminky ve tvaru

$$\begin{aligned} A \sin \alpha l + B \cos \alpha l &= \emptyset, \\ B - \beta^2 l &= \emptyset, \\ A\,\alpha + \beta^2 &= \emptyset, \end{aligned}$$

a dělejme, jako bychom je chtěli řešiti užívajíce determinantů.

Determinant sestavený ze součinitelů veličin neznámých jest

$$D = \begin{vmatrix} \sin \alpha l & \cos \alpha l & \emptyset \\ \emptyset & 1 & -l \\ \alpha & \emptyset & 1 \end{vmatrix} = \sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l;$$

KNIHOVNA A·D

poněvadž pak členy absolutní (neobsahující neznámých) vesměs rovnají se nulle, vychází

$$A = B = \beta^2 = \frac{\emptyset}{D},$$

a jest rozeznávati dva případy:

1. ..... $D = \emptyset$ neboli $\operatorname{tang} \alpha l = \alpha l$.

Rovnici této hoví nesčíslné úhly αl; nejmenší jest $\alpha l = 4{\cdot}4934$ v míře absolutní ($257^0\,27'\,12''$ v míře stupňové). Zdvojmocníme-li a vložíme-li za α^2 hodnotu, vyjde

$$P' = 4{\cdot}4934^2 \frac{EJ}{l^2}$$

anebo, poněvadž

$$4{\cdot}4934^2 \doteq 2{\cdot}06\,\pi^2 \doteq 2\,\pi^2,$$

$$P' = 2\,\pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

Má-li síla P tuto hodnotu P', vychází

$$A = B = \beta^2 = \frac{\emptyset}{\emptyset};$$

konstanty jsou neurčité a proto i ohnutí neurčité. Odvozená rovnice stanoví sílu, jež zachovává rovnováhu za každého ohybu.

2. ..... $D \gtrless \emptyset$, $P \lesseqgtr P'$.

Tu

$$A = B = \beta^2 = \emptyset, \quad z = \emptyset;$$

rovnováha jest možna jen na prutu neohnutém.

Tak jako v § 57. soudíme dále, že za síly $P < P'$ prut ohnutý se vzpřímí, za síly $P > P'$ úplně se ohne nebo zlomí — krátce, že P' *jest pokládati za obtížení na mezi pevnosti*, jsou-li naplněny příslušné výminky; P' jest však již za mezí pevnosti, jestliže nejsou naplněny. Také ve výraze P' posléze odvozeném jest za J položiti první hlavní moment centralný J_1.

Připomenutí. Jde-li o obratníky křivky ohybové v tomto případě, derivujme dvakrát rovnici (η) a položme pak $\frac{d^2 z}{dx^2} = \emptyset$. Poněvadž

$$\alpha^2 \frac{d^2 z}{dx^2} = A\,\alpha^2 \sin \alpha x + B\,\alpha^2 \cos \alpha x,$$

vychází výminka

$$\tan \alpha x = -\frac{B}{A} = \alpha l.$$

Výmince této hoví hodnota $x = l$, zároveň však

$$\alpha x = \alpha l - \pi,$$

$$x = l - \frac{\pi}{\alpha},$$

$$x' = l - x = \frac{\pi}{\alpha}, \quad \frac{x'}{l} = \frac{\pi}{\alpha l}.$$

Leč

$$\alpha l \doteq \pi \sqrt{2},$$

pročež

$$\frac{x'}{l} = \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0{\cdot}7.$$

Obratníky jsou tedy body a, f' (obr. 76.).

Shrneme-li veškeré výsledky, můžeme obtížení na mezi pevnosti vyjádřiti obecnou rovnicí

$$(200) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots P' = \pi' \frac{E J_1}{l^2};$$

součinitel π' má v dotčených hlavních případech 1), 2), 3), 4) hodnoty

$$(201) \quad \ldots \pi_1' = \frac{\pi^2}{4}, \; \pi_2' = \pi^2, \quad \pi_3' = 2\pi^2, \; \pi_4' = 4\pi^2.$$

Připomenutí. Hlavní čtyři případy svrchu vytčené liší se hodnotami součinitele π'; jinak mohou se rozlišovati početní (redukovanou) délkou l_0. Pokládejme případ 2) za základní, v němž početní délka l_0 se rovná skutečné délce l prutu; tu položiti jest v případě

$$\begin{array}{lcccc} & 1) & 2) & 3) & 4) \\ (202) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & l_0 = 2l, & l, & 0{\cdot}7\, l, & \frac{l}{2} \end{array}$$

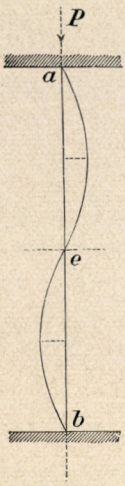
a máme pak obecnou formuli

$$(203) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots P' = \pi^2 \frac{E J_1}{l_0^2}.$$ *)

V případě, který naznačen v obr. 77. (kloubové spojení v a, b, e), vy-

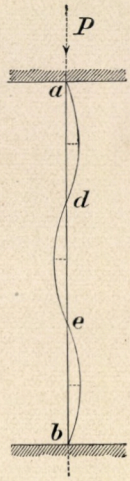
*) Jak patrno, znamená l_0 vzdálenost dvou sousedních průřezů obratníkových.

chází $l_0 = \frac{l}{2}$ (součinitel $\pi' = 4\,\pi^2$); v případě, jak načrtnut v obr. 78., bylo by



Obr. 77.

$l_0 = \frac{l}{3}$ (součinitel $\pi' = 9\,\pi^2$) a t. d.



Obr. 78.

§ 59. **Jak užívati prakticky výsledků vyvozených.** Vyšetřování t. zv. pružnosti vzpěrné vedlo nás k hodnotě P', vyjádřené rovnicí (200); hodnota ona znamená obtížení štíhlých prutů na mezi pevnosti; nejsou-li však naplněny výminky *a*), *b*), *c*), *d*), vytčené na počátku § 57., padá P' již za mez pevnosti. Při prutech, jichž délka není značná proti rozměrům průřezovým, netřeba přihlížeti k ohybu a jest všímati si jen prosté pružnosti v tlaku; obtížení na mezi pevnosti jest pak

$$P'' = \varkappa'' U,$$

znaměná-li $\varkappa''$ součinitele pevnosti v tlaku. Jest pak určitá délka l' prutu za které $P' = P''$; pokud $l \leqq l'$, bylo by počítati dle { prosté pružnosti v tlaku / pružnosti vzpěrné } pravidel.

Přirovnáním výrazů P', P'' vychází, klademe-li $J_1 = U\,i_1^2$,

$$\frac{l'}{i_1} = \sqrt{\pi' \frac{E}{\varkappa''}}.$$

Jde-li na př. o železo kujné svárkové, a jest-li prut na koncích kloubově opřen (případ 2.), máme

$$\pi' = \pi^2 \doteq 10,\ E = 2\,000\,000\ kg/cm^2,\ \varkappa'' = 3500\ kg/cm^2$$

a tedy

$$\frac{l'}{i_1} = \sqrt{\frac{10.2\,000\,000}{3500}} \doteq 76.$$

V praxi nebývají však dokonale naplněny výminky, na kterých založena rovnice (200), a proto namítá se jakýs ohyb již za menších hodnot poměru $\frac{l}{i_1}$; radno tedy, nejde-li o pruty poměrně zcela krátké, přihlížeti k oběma hodnotám P', P''; dovolené obtížení P prutu musí pak hověti výminkám

$$P \leqq \frac{P'}{\mu'},\ P \leqq \frac{P''}{\mu''},$$

kde μ', μ'' jest případná míra bezpečnosti. Máme tedy výminky

$$(204) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} P \leqq \dfrac{\pi'}{\mu'} \dfrac{E J_1}{l^2}, \\ P \leqq k'' U; \end{cases}$$

$k'' = \dfrac{\varkappa''}{\mu''}$ jest dovolené namáhání v tlaku.

Dána-li délka prutu a rozměry průřezové, a jde-li o dovolené obtížení P, jest vypočísti pravé strany obou výminek (204); za P volí se pak menší z obou hodnot. Dána-li naopak síla P a délka l prutu, a jde-li o rozměry průřezové (aby úloha byla určita, jest buď zvoliti všecky průřezové rozměry mimo jeden a tento pak počítati, či zavésti určité poměry rozměrův), stanovíme spodní meze neznámého rozměru z obou výminek (204) a zvolíme větší z obou mezí.*)

Co se týče součinitele π', sluší připomenouti, že v praxi nenamítá se přesně téměř nikdy určitý z oněch případů hlavních; nutno uvážiti, ku kterému z nich se případ daný nejvíce přibližuje, a jest přidržet i se spíše případu nepříznivějšího. Nejpříznivější jest případ 4); leč dle toho radno počítati jen velmi zřídka proto, že dokonalého, totiž takového vetknutí konců, za něhož by tečna čáry ohybové zachovala původní směr osy přímé, ve skutečnosti vůbec není. Proto volí se nejčastěji případ 2); shledáme-li, že skutečné okolnosti jsou značně příznivější, můžeme tomu vyhověti po případě volbou míry bezpečnosti.**)

Co míry bezpečnosti se týče, nelze vytknouti pravidel obecně platných; záleží na zvláštních okolnostech daného případu. Ve stavitelství bývá se často při

---

*) Obě výminky srovnávaly by se, kdyby

$$\frac{l\text{✣}}{i_1} = \sqrt{\frac{\pi'}{\mu'} \frac{E}{k''}};$$

pokud $l \gtrless l\text{✣}$, rozhoduje výminka $\left\{ \begin{matrix} \text{prvá} \\ \text{druhá} \end{matrix} \right\}$. Někdy patrno již předem, která z obou výminek rozhoduje; pak položiti jest v ní znaménko rovnosti a výminky druhé nedbati.

**) Tetmajer (Die angewandte Elasticitäts- und Festigkeitslehre) doporučuje za prostého styku obou rovných podstav prutových s příslušnými tělesy (na př. při dřevě) položiti $l_0 = \frac{3}{4} l$ neboli $\pi' = \frac{16}{9} \pi^2$, dále při mezipasových prutech konstrukcí příhradových dle zřízení styků a dokonalosti příčného ztužení (na základě zkoušek mostových ve Švýcarsku podniknutých)

$$l_0 = 0{\cdot}7\, l \text{ až } 1{\cdot}0\, l.$$

Mají-li mezipasové pruty body styčné nejen na koncích, ale zároveň uvnitř (na př. při t. zv. soustavách násobných), a jest-li konstrukce napříč ztužena, klade Tetmajer (dle týchže zkoušek)

$$l_0 = 1{\cdot}8\, l',$$

kde l' znamená vzdálenost dvou posloupných styčných bodů prutu.

železe kujném $\mu' = 5.$
„ litém $\mu' = 8,$
dřevě $\mu' = 10.$

Co se týče železa litého, sluší uvážiti, že rovnice (203), zakládajíc se na zákoně Hookově, platí leda jen zhruba přibližně o železe litém, jež nemá stálého modulu pružnosti. Dle Tetmajera vede hodnota

$E = 1\,000\,000$ kg/cm^2 při železe světle šedém, jemnozrném,
$E = 900\,000$ „ „ „ šedém středního zrna

k výsledkům dosti přibližným.

Přetvoření prutu jest jednak stlačení, jednak ohnutí. Tohoto by nebylo, kdyby byly naplněny všecky výminky; ve všech praktických případech bývá však jen nepatrné. Jde tedy o zmenšení vzdálenosti $\overline{a\,b} = l$. Účinek ohybu ve změnu Δl jest proti účinku stlačení vždy velmi nepatrný a netřeba si ho všímati; proto můžeme *počítati* Δl *jako při prostém tlaku*, totiž při prutech prismatických z rovnice (6) na str. 50., nutno-li šetřiti vlastní váhy prutů svislých, a z rovnice (6ª) na str. 51., jest-li vlastní váha nepatrna proti síle P.

Příklad 28. Vzpěra tvaru rovnoramenného úhelníka, ze svárkového železa, má délku $l = 2\ m$ a průřezové rozměry v příkladě 5. na str. 85. vytčené. Jaký centralný tlak P snese bezpečně?

Užijme výminek (204) a položme

$$U = 19\ cm^2, \quad J_1 = 73{\cdot}42\ cm^4, \quad \pi' = \pi^2 \doteq 10$$

(ač vzpěra bývá na koncích přinýtována, počítejme tak, jako by šlo o spojení kloubové),

$$E = 2\,000\,000\ kg/cm^2, \quad \mu' = 5, \quad l = 200\ cm, \quad k'' = 600\ kg/cm^2.$$

Tím vyjde

$$P \leqq \frac{10\ .\ 2\,000\,000\ .\ 73{\cdot}42}{5\ .\ 200^2} = 7342\ kg,$$

$$P \leqq 600\ .\ 19 = 11\,400\ kg,$$

tak že by se mohl připustiti tlak asi $7300\ kg$.

Příklad 29. Dřevěná podpora průřezu čtverečného má délku $l = 4\ m$ a vzdoruje centralnému tlaku $P = 24\,000\ kg$; stanoviti stranu čtverce.

Vložíme-li ve výminky (204)

$$J_1 = \tfrac{1}{12} a^4, \quad U = a^2,$$

vyjde

$$a \geqq \sqrt[4]{\frac{12\,\mu' P l^2}{\pi' E}},$$

$$a \geqq \sqrt{\frac{P}{k''}}.$$

Hodnotami

$$P = 24\,000\ kg, \quad \mu' = 10, \quad l = 400\ cm, \quad \pi' = \pi^2 \doteq 10$$

(ač dřevěná podpora přiléhá rovnými podstavami k rovným stěnám příslušných těles, počítejme, jako by měla na koncích spojení kloubové), dále

$$E = 120\,000\ kg/cm^2, \quad k'' = 60\ kg/cm^2$$

vychází

$$a \geqq \sqrt[4]{\frac{12 \,.\, 10 \,.\, 24\,000 \,.\, 400^2}{10 \,.\, 120\,000}} = 24{\cdot}9\ cm,$$

$$a \geqq \sqrt{\frac{24\,000}{60}} = 20\ cm.$$

Stačí tedy strana $a \doteq 25\ cm$.

Příklad 30. Pístová tyč stojatého stroje parního vzdorovati má síle $P = \pm 4800\ kg$; délka $l = 1{\cdot}5\ m$. Vypočísti průměr průřezu okrouhlého.

Užijme pouze první z výminek (204), která tu patrně rozhoduje, a položme

$$J = \frac{\pi}{64} d^4;$$

tak vyjde

$$d = \sqrt[4]{\frac{64\,\mu' P l^2}{\pi' \pi E}}.$$

Klademe-li

$$\mu' = 20, \quad P = 4800\ kg, \quad l = 150\ cm, \quad \pi' = \pi^2,$$
$$E = 2\,200\,000\ kg/cm^2$$

(ocel plávková), obdržíme

$$d = \sqrt[4]{\frac{64 \,.\, 20 \,.\, 4800 \,.\, 150^2}{3{\cdot}14^3 \,.\, 2\,200\,000}} = 6{\cdot}7\ cm.$$

Příklad 31. Okrouhlý dutý sloup z litého železa, zdéli $l = 5\ m$, má snésti bezpečně tlak $P = 38\,500\ kg$; stanoviti průměry zevnitřní d a vnitřní d' průřezu.

Není pochybnosti, že i zde první z výminek (204) jest rozhodující; z ní vychází

$$J_1 = \frac{\mu' P l^2}{\pi' E}.$$

Dole rozšiřuje se sloup v patku, nahoře ve hlavici, a konstrukce bývá toho rázu, že konce sloupu jsou jistou měrou jako vetknuty. Namítá se tu případ obsažený mezi hlavními případy 2) a 4); počítejme tak, jako by šlo o případ 3), kde délka osy prutové mezi obratníkovými průřezy se redukuje na 0·7 skutečné délky prutu, t. j. položme $\pi' = 2\,\pi^2$. Klademe-li dále

$$\mu' = 8, \quad P = 38\,500\ kg, \quad l = 500\ cm, \quad E = 1\,000\,000\ kg/cm^2,$$

vychází

$$J_1 = \frac{8 \,.\, 38\,500 \,.\, 500^2}{2\,\pi^2 \,.\, 1\,000\,000} = 3\,901\ cm^4.$$

Poněvadž

$$J_1 = \frac{\pi}{64}(d^4 - d'^4) = \frac{\pi}{64} d^4 (1 - \delta^4),$$

kde

$$\delta = \frac{d'}{d},$$

vyplývá, zvolímeli δ,

$$d = \sqrt[4]{\frac{64\,J_1}{\pi\,(1 - \delta^4)}}.$$

Můžeme však také z tabulky, obsahující rozměry d, $t = \frac{d - d'}{2}$ a příslušné J_1, vybrati vhodný profil. Na př. profil o rozměrech

$$d = 19\ cm, \quad t = 2\ cm$$

má moment

$$J_1 = 3912,$$

tak že by vyhověl nadbytečně.

Poněvadž obsah průřezový $U = 107\ cm^2$, vychází t. zv. střední neboli redukované napětí, totiž hodnota, jež by se namítla za prostého tlaku,

$$\nu_a = \frac{P}{U} = \frac{38\,500}{107} \doteq 360\ kg/cm^2,$$

hodnota značně menší než dovolené namáhání litého železa v tlaku.

P ř i p o m e n u t í. Čím blíže jest redukované napětí ν_a k dovolenému namáhání k'' [anebo čím blíže skutečný obsah průřezový k obsahu, jehož vymáhá druhá z výminek (204)], tím dokonaleji využito pevnosti látky. Přiměřenou volbou tvaru a rozměrů průřezových možno někdy k dovolenému namáhání značně se přiblížiti, jak ukážeme v příkladě následujícím.

Příklad 32. Železný prut zdéli 4 *m* má vzdorovati tlaku 13 250 *kg*; pro větší bezpečnost buď počítáno tak, jako by na koncích měl spojení kloubové (případ 2).

Klademe-li $\mu' = 5$, $\pi' = \pi^2 \doteq 10$, $E = 2\,000\,000\ kg/cm^2$ (kujné železo svárkové), vymáhá první z výminek (204) nejmenšího momentu

$$J_1 = \frac{\mu' P l^2}{\pi' E} = \frac{5 \,.\, 13\,250 \,.\, 400^2}{10 \,.\, 2\,000\,000} = 530\ cm^4;$$

položíme-li dále $k'' = 600\ kg$, vymáhá druhá z výminek (204) obsahu průřezového

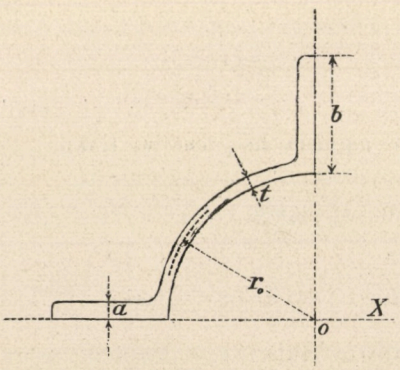
$$U = \frac{P}{k''} = \frac{13\,250}{600} = 22{\cdot}1\ cm^2.$$

Chceme-li na př. užiti průřezu I, vyhledejme v příslušné tabulce profil, jehož moment J_1 jest aspoň $530\ cm^4$, a jest-li takových profilů více, zvolme ten, jehož obsah průřezový jest nejblíže ku $22{\cdot}1\ cm^2$.

V tabulce profilů, doporučených spolkem rakouských inženýrů i architektů ve Vídni, bylo by to čís. 22ª. ($J_1 = 534\ cm^4$, $U = 52{\cdot}6\ cm^2$, $h = 22$, $b = 13{\cdot}5$, $t = 1{\cdot}3$, $a = 0{\cdot}9\ cm$); obsah U jest téměř 2·4krát větší než vypočtená hodnota $22{\cdot}1\ cm^2$.

Zvolme dále prut složený ze 4 rovnoramenných úhelníků vespolek snýtovaných; rozměry nutno zvoliti tak, aby moment J' jednoho úhelníkového průřezu vzhledem k ose obsahující stranu 34 nebo 14 (obr. 23. na str. 84.) rovnal se aspoň

$$\frac{J}{4} = \frac{530}{4} = 132{\cdot}5\ cm^4.$$



Obr. 79.

V tabulce rakouských profilů vyhovělo by čís. 8_1 ($J' = 137{\cdot}76$, $U = 12{\cdot}16$, $h = 8$, $a = 0{\cdot}8$), tak že celkem $J_1 = 551$, $U = 49$. Obsah U jest 2·2krát větší než $22{\cdot}1\ cm^2$.

Užijme konečně prutu složeného ze čtyř t. zv. železných čtverníkových vespolek snýtovaných; rozměry voliti jest tak, aby moment J' průřezu jednoho čtverníkového železa (obr. 79.) vzhledem k ose X rovnal se aspoň $132{\cdot}5\ cm^4$.

V tabulce rakouských profilů vyhovuje čís. 10. ($J' = 143{\cdot}16$, $U' = 7{\cdot}34$, $r_0 = 5$, $t = 0{\cdot}4$, $b = 3{\cdot}9$, $a = 0{\cdot}6\ cm$); celkem tedy $J = 573$, $U = 29$. Obsah U jest jen asi 1·3krát větší než $22{\cdot}1\ cm^2$.

Profil poslední, ač jeho moment setrvačnosti nejvíce převyšuje hodnotu svrchu vypočtenou, jest tedy nejvýhodnější co se týče využití pevnosti látky.

§ 60. **Empirický vzorec pevnosti vzpěrné.** Vzorec Eulerův, jejž obecně možno psáti ve tvaru rovnice (200), nepokládají mnozí za náležité řešení úlohy, a to hlavně proto, že v něm není obsaženo největší napětí tělesa. Za tou příčinou snažili se rovnici Eulerovu nahraditi vzorcem, který se zove tu Rankinovým, onde Schwarzovým, ale vlastně pochodí již od Naviera. Lze jej odvoditi na př. takto:

Hledíme-li k možnému roztlačení prutu, má síla P na mezi pevnosti hodnotu

$$P'' = \varkappa'' U;$$

máme-li zření k ohybu a zlomení, platí dle Eulerova vzorce obdobně

$$P' = \pi' \frac{E J_1}{l^2}.$$

Obě rovnice zakládají se na určitých výminkách, které ve skutečnosti nebývají naplněny dokonale; proto dostupuje se meze pevnosti za jisté hodnoty P_0 takové, že

$$P_0 < P'',$$
$$P_0 < P';$$

hodnota P_0 závisí na délce l (na poměru délky l k rozměrům průřezovým) a to tak, že P_0 se blíží k mezi $\left\{\begin{matrix} P'', \text{ ubývá-li délky } l \text{ k nulle} \\ P', \text{ roste-li délka } l \text{ do nekonečna} \end{matrix}\right\}$. Vlastnosti tyto má na př. výraz

$$P_0 = \frac{P' P''}{P' + P''} = \frac{P''}{1 + \frac{P''}{P'}} = \frac{P'}{1 + \frac{P'}{P''}}.$$

Že jest P_0 menší než P'' i menší než P', ukazují oba zlomky posléze položené (jmenovatel jest větší než jednička). Klesá-li l k nulle, nemění se P'', ale P' roste do nekonečna, tak že se blíží zlomek $\frac{P''}{P'}$ k nulle a tedy P_0 ku P''; roste-li l do nekonečna, klesá P' k nulle, P'' však se nemění, tak že se blíží zlomek $\frac{P'}{P''}$ k nulle a P_0 ku P'.*)

Pišme

*) Výraz svrchu vytčený dává za P_0 obecně hodnotu poněkud malou, zvláště neliší-li se značněji hodnoty P', P''. Za $P' = P''$ vychází totiž $P_0 = \frac{P'}{2} = \frac{P''}{2}$.

$$P_0 = \frac{P''}{1 + \frac{P''}{P'}}$$

a položme za P', P'' příslušné hodnoty. Tu

$$\frac{P''}{P'} = \frac{\varkappa'' U l^2}{\pi' E J_1} = \varepsilon \frac{l^2}{i_1^2},$$

kde

$$\varepsilon = \frac{\varkappa''}{\pi' E}; \qquad (205)$$

i_1 jest první hlavní centralný poloměr setrvačnosti průřezu.

Tím nabývá výraz P_0 tvaru

$$P_0 = \frac{\varkappa'' U}{1 + \varepsilon \frac{l^2}{i_1^2}}. \qquad (206)$$

Součinitel ε, stanovený rovnicí (205), závisí jednak na látce (hodnotách $\varkappa''$, E), jednak na opatření konců prutových (součiniteli π'). Co tohoto se týče, náležejí ku hlavním čtyřem případům svrchu vytčeným hodnoty ε, jež jsou obráceně úměrny k příslušným hodnotám součinitele π', tak že

$$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3 : \varepsilon_4 = 4 : 1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4}.$$

Pokládejme případ 2) za základní; tu dává rovnice (205) pro

železo kujné svárkové $\varepsilon_2 = \frac{\varkappa''}{\pi'_2 E} = \frac{3\,500}{10 \,.\, 2\,000\,000} = \frac{7}{40\,000} = 0{\cdot}000175,$

„ lité ..... $\varepsilon_2 = \frac{8\,000}{10 \,.\, 1\,000\,000} = \frac{1}{1250} = 0{\cdot}0008,$

dřeva jehličná ..... $\varepsilon_2 = \frac{280}{10 \,.\, 110\,000} = \frac{7}{27\,500} = 0{\cdot}00025.$*)

*) Naznačené svrchu odvození rovnice (206) pochodí od Grashofa; jiní odvozují rovnici Navierovu spůsobem jiným a volí součinitele ε empiricky. Tak na př. Laissle a Schübler (Der Bau der Brückenträger 4. Aufl.) kladou při

železe kujném . . . . . $\varepsilon_2 = 0{\cdot}0001$,
„ litém . . . . . $\varepsilon_2 = 0{\cdot}0003$,
dřevě . . . . . $\varepsilon_2 = 0{\cdot}0002$.

Tetmajer shledal při

železe kujném . . . . . $\varepsilon_2 = 0{\cdot}00015$,
„ litém (lije-li se ležatě) . . $\varepsilon_2 = 0{\cdot}00070$,
dřevě . . . . . $\varepsilon_2 = 0{\cdot}00023$.

Z rovnice (206) vychází dovolené obtížení prutu za μ-násobné bezpečnosti, klademe-li tedy $\frac{\varkappa''}{\mu} = k''$, hodnotou

$$(207) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots P = \frac{k'' U}{1 + \varepsilon \frac{l^2}{i_1^2}}.$$

Dána-li délka prutu a rozměry průřezové, dává rovnice (207) přímo dovolené obtížení. Dána-li délka l a síla P, a jde-li o rozměry průřezové, zaveďme určité poměry mezi těmito rozměry a můžeme pak vyjádřiti obsah U a poloměr i_1 rozměrem jediným, který pak se vypočte. Jest-li z tento neznámý rozměr, možno klásti

$$(208) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} U = \alpha z^2, \\ J_1 = \beta z^4, \\ i_1^2 = \frac{\beta}{\alpha} z^2 = \gamma z^2, \end{cases}$$

kde α, β, γ jsou číselní součinitelé závislí na tvaru průřezovém; uvedeme-li to v rovnici (207), vyjde

$$1 + \varepsilon \frac{l^2}{\gamma z^2} = \frac{k''}{P} \alpha z^2$$

anebo

$$\alpha \frac{k''}{P} z^4 - z^2 - \frac{\varepsilon}{\gamma} l^2 = 0,$$

trinomická rovnice stupně čtvrtého. Z ní plyne

$$z^2 = \frac{P}{k''} \cdot \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \frac{\alpha \varepsilon}{\gamma} \frac{k''}{P} l^2}}{2 \alpha},$$

kde položiti jest před odmocninou jen znaménko vrchní (spodní vedlo by k negativnému z^2), a konečně

$$(209) \quad \ldots\ldots\ldots z = \sqrt{\frac{P}{k''} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\alpha \varepsilon}{\gamma} \frac{k''}{P} l^2}}{2 \alpha}}.$$

Připomenutí. Jde-li o přirovnání vzorců Eulerova a Navierova co do jejich ceny, není již předem pochybnosti, že po stránce vědecké předčí Eulerův rozhodně nad Navierovým. Výtka, že vzorec Eulerův neobsahuje namáhání látky, není podstatná; nevždy stačí vyhověti výmince,

že poměrné roztažení nesmí přestoupiti určité meze; nutno zároveň, aby též přetvoření zůstalo v mezích dovolených — výminka to, která zvlášť ve strojnictví často rozhoduje. Co stránky praktické se týče, nesvědčily starší zkoušky pevnosti vzpěrné valně ve prospěch vzorce Eulerova; zkoušky novější (Bauschingerovy, Tetmajerovy) však, při kterých postupováno přesněji, zvláště v příčině výminek, na kterých Eulerův vzorec se zakládá, ukázaly, že tento lépe s pravdou se shoduje než Navierův. Ačkoli vzorec Navierův má tu výhodu, že obsahuje konstanty dvě ($\varkappa''$, ε) — Eulerův jen jednu (π') — a tedy lépe se může přimknouti k výsledkům zkoušek, shledal Tetmajer, že konstanta ε, jež má záviseti jen na látce a na opatření konců prutových, nikoli však na poměru $\frac{l}{i_1}$, výmince té nehoví. Proto zůstává vzorec Navierův i po stránce praktické za Eulerovým.

§ 61. **Jak posouditi dodavkem účinek možné výstřednosti.** Vypočteny-li rozměry průřezové prutu, jest věcí snadnou — odhadneme-li hodnotu možné výstřednosti — stanoviti krajní napětí prutu. K tomu jest užiti rovnic (199) § 56., totiž

$$(210)\ \ldots\ldots \begin{cases} v_1 = -\frac{P}{U}\left(1 + \frac{c\,e_1}{i_1^2 \cos \alpha\, l_1}\right), \\ v_2 = \frac{P}{U}\left(-1 + \frac{c\,e_2}{i_1^2 \cos \alpha\, l_1}\right); \end{cases}$$

přípona při poloměru i značí, že jde o první hlavní centralný poloměr setrvačnosti průřezu; přípona při délce l pak připomíná, že rovnice (210) se vztahují ku 1) z vytčených svrchu případů hlavních tak že v případech jiných sluší ve vzorce zavésti rozměr, který se shoduje s délkou l_1 případu 1).

Naznačme postup zvláštním příkladem.

Příklad 29ª. Mějme zření ku dřevěné podpoře příkladu 29. $P = 24\,000\ kg$, $l = 4\ m$; hlavní případ druhý; průřezem jest čtverec, jehožto strana $a = 25\ cm$.

Tu máme

$$l_1 = \frac{l}{2} = 200\ cm,$$

$$\frac{P}{U} = \frac{24\,000}{25^2} = 38{\cdot}4\ kg/cm^2,$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{E\,J_1}} = \sqrt{\frac{24\,000\,.\,12}{120\,000\,.\,25^4}} = 0{\cdot}00248,$$

$\alpha\, l_1 = 0{\cdot}00248\,.\,200 = 0{\cdot}496$, v míře stupňové as $28^0\,25'$,

$$\cos \alpha\, l_1 = 0{\cdot}873.$$

Za $e_1 = e_2 = e$ zvolme největší možnou hodnotu, totiž polovici úhlopříčné čtverce (J má vzhledem ke všem osám centralným touž hodnotu);

$$e = \tfrac{1}{2}\, a \sqrt{2} = \frac{25 \,.\, 1{\cdot}414}{2} = 17{\cdot}7\ cm,$$

$$\frac{e}{i^2 \cos \alpha l_1} = \frac{17{\cdot}7 \,.\, 12}{25^2 \,.\, 0{\cdot}873} = 0{\cdot}389;$$

$$\nu_1 = -\,38{\cdot}4\,(1 + 0{\cdot}389\,c),$$
$$\nu_2 = \,38{\cdot}4\,(-\,1 + 0{\cdot}389\,c)\,.$$

Položíme-li

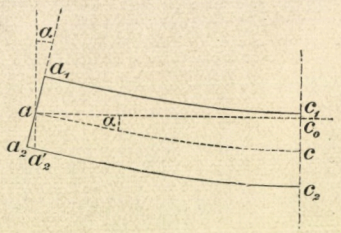
$$c = \quad 1\,, \quad 2\,, \quad 3\ cm,$$

vyjde

$$\nu_1 = -\,53\,, \quad -\,68\,, \quad -\,83\ kg/cm^2,$$
$$\nu_2 = -\,24\,, \quad -\,9\,, \quad 6\ \ ,,\ .$$

Připouštíme-li $k'' = 60\ kg/cm^2$, není ho za výstřednosti 1 cm ani dostoupeno, jest však již přestoupeno za výstřednosti 2 cm.

§ 62. **Prut jest namáhán silou příčnou centralnou a zároveň podélnou necentralnou — následkem odporu proti posouvání konců prutových na podporách.** Nosník prismatický budiž na obou koncích podepřen*) a obtížen břemenem P, působícím uprostřed délky l; vlastní váhy nosníka nedbejme.



Obr. 80.

1) Nosník se prohne; osa jeho, jež byla původně přímá a měla mezi podporovými průřezy délku $\overline{a\,b} = l = 2\,c$, zkřiví se, ale zachová svou délku (obr. 80., kde naznačena jen polovice nosníka); příslušný oblouk $2\,s = 2\,c$, jeho tetiva $2\,c'$ jest však menší než $2\,c$. Vzdálenost $\overline{a\,b}$ zmenší se tedy o rozdíl $2\,c^{+} = 2\,(s - c')$.

2) Vrstvy nosníkové $\left\{\begin{matrix}\text{nad}\\ \text{pod}\end{matrix}\right\}$ vrstvou neutralnou se ohnutím $\left\{\begin{matrix}\text{zkrátí}\\ \text{prodlouží}\end{matrix}\right\}$; krajní vrstva spodní, jejíž vzdálenost od vrstvy neutralné budiž e_2, prodlouží se tak, že tetiva $\overline{a_2 b_2}$ příslušného oblouku bude o $2\ e_2\,\alpha$ delší než tetiva křivky ohybové, znamená-li α úhel, o který tečna křivky ohybové v podporovém bodě a se odchýlila od vodorovné osy X; jest to zároveň úhel, o který průřez podporový (a) se odchýlil ohnutím nosníka od původního průřezu svislého.**)

---

*) Mysleme si, že podpory jsou opatřeny hranami A_2, B_2, na nichž nosník spočívá, jsa podepřen toliko v průřezech (a), (b).

**) Rozdílu mezi šikmým rozměrem $\overline{a_2\,a_2'}$ a průměrem jeho na vodorovnou přímku anebo rozdílu mezi sin, tan a obloukem α za malého vždy v praxi ohybu dbáti netřeba.

MAJETEK ČESKO-UKR. KOMITETU V Č. S. R.

Hrany A_2, B_2, které před ohnutím se stýkaly s podporami, přiblížily se k sobě následkem změny 1) o $2\,c^{+}$, následkem změny 2) však vzdálily se od sebe o $2\,e_2\,\alpha$; celkem tedy zvětšila se vzdálenost $\overline{a_2 b_2}$ o

$$\Delta l_2 = 2\,(e_2\,\alpha - c^{+}),$$

kteréžto zvětšení pro úplnou souměrnost nosníka i sil zevnitřních vzhledem k rovině průřezu (c) rozděluje se rovnou měrou na obě polovice, tak že zvětšení polovice c_2 vzdálenosti l_2 činí

$$\Delta c_2 = e_2\,\alpha - c^{+}.$$

Úhel α nám dle rovnice (36) na str. 112. hodnotu

$$\alpha = \frac{P\,c^2}{4\,E\,J} = \varepsilon\,c^2,$$

znamenáme-li kratšeji

$$\varepsilon = \frac{P}{4\,E\,J};$$

dále jest obecně

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4};$$

jestliže odmocninu vyvineme v řadu a — poněvadž $\frac{dy}{dx}$ jest malý zlomek — přestaneme na prvních dvou členech, obdržíme dosti přibližně

$$\frac{ds}{dx} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Dle rovnice (α) na str. 109. máme

$$\frac{dy}{dx} = C - \tfrac{1}{4}\,\beta\,l\,x^2,$$

a poněvadž (viz str. 110.)

$$C = \tfrac{1}{6}\,\beta\,p'\,(l^2 - p'^2)$$

a tedy v přítomném případě $\left(p' = \frac{l}{2}\right)$

$$C = \tfrac{1}{16}\,\beta\,l^3, \quad \beta = \frac{P}{E\,J\,l},$$

vychází

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{16}\,\beta\,l\,(l^2 - 4\,x^2)$$

anebo, vložíme-li hodnotu β a píšeme-li $l = 2\,c \doteq 2\,c'$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{4\,E\,J}\,(c'^2 - x^2) = \varepsilon\,(c'^2 - x^2).$$

Proto

$$\frac{ds}{dx} = 1 + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^2\,(c'^2 - x^2)^2,$$

a integrujeme-li od $x = 0$ po $x = c'$,

$$s = c' + \tfrac{4}{15}\,\varepsilon^2\,c'^5,$$

tak že

$$c^{+} = s - c' = \tfrac{4}{15}\,\varepsilon^2\,c'^5 \doteq \tfrac{4}{15}\,\varepsilon^2\,c^5.$$

Vychází tedy celkem změna

$$\Delta\,c_2 = \varepsilon\,c^2\,(e_2 - \tfrac{4}{15}\,\varepsilon\,c^3)$$

anebo

$$(211^a) \ldots\ldots\ldots \Delta\,c_2 = \frac{P\,c^2}{4\,E\,J}\left(e_2 - \frac{P\,c^3}{15\,E\,J}\right);$$

poněvadž pak dle rovnice (35) na str. 112. největší pořadnice křivky ohybové

$$y_0 = \frac{P\,l^3}{48\,E\,J} = \frac{P\,c^3}{6\,E\,J},$$

možno též psáti

$$(211^b) \ldots\ldots\ldots\ldots \Delta\,c_2 = \frac{P\,c^2}{4\,E\,J}\,(e_2 - \tfrac{2}{3}\,y_0).$$

Pokud $e_2 > \frac{2}{3}\,y_0$, jak tomu bude téměř vždy, jest $\Delta\,c_2$ positivné; konce nosníkové mají snahu posouvati se po podporách směrem $c\,a$, $c\,b$, tedy *ven*, a působí tímto směrem v podpory odporem proti posouvání (na př. třením); podpory naopak reagují v nosník směrem protivným $a\,c$, $b\,c$, tedy *do vnitř*.

Počítáme-li průřezové rozměry z rovnice

$$\frac{J}{e} = \frac{M}{k} = \frac{P\,c}{2\,k},$$

tak že

$$\frac{P\,c}{J} = 2\,\frac{k}{e},$$

můžeme výminku

$$e_2 > \frac{P\,c^3}{15\,E\,J}$$

psáti též ve tvaru

$$\frac{e_2^2}{c^2} > \frac{2}{15}\frac{k}{E}.$$

Klademe-li na př. (kujné železo, dřevo)

$$\frac{k}{E} = \frac{1}{2000},$$

vychází výminka

$$\frac{e_2}{c} > \frac{1}{122{\cdot}5},$$

jež bude naplněna téměř vždycky.

Ze všeho patrno, že *nosník se snaží podpory vzdáliti, rozvrátiti.* Působení podpor v nosník vyjadřuje síla H, která jest pravidlem tlak působící (nedbáme-li při tom ohybu) ve vzdálenosti e_2 pod osou nosníka.

Jde-li výhradně o tření, máme

$$H = -fA = -\tfrac{1}{2}fP,$$

jest-li f součinitel tření. Sílu H lze rozložiti jednak v sílu téhož směru a téže velikosti, působící však v ose prutové, jednak ve dvojici, jejíž moment

$$M_H = -\tfrac{1}{2}fPe_2.$$

Ku krajním napětím

$$\nu_1 = -\frac{Pce_1}{2J}, \quad \nu_2 = \frac{Pce_2}{2J},$$

která břemenem P se vyvozují v nebezpečném průřezu (c), přistupují tedy účinkem síly H ještě napětí

$$\nu_1' = -\frac{fP}{2U} + \frac{fPe_1e_2}{2J} = \frac{fP}{2U}\left(-1 + \frac{e_1e_2}{i^2}\right),$$

$$\nu_2' = -\frac{fP}{2U} - \frac{fPe_2^2}{2J} = -\frac{fP}{2U}\left(1 + \frac{e_2^2}{i^2}\right).$$

Jest-li průřezem na př. obdélník zvýši h, máme

$$e_1 = e_2 = \frac{h}{2}, \quad i^2 = \frac{h^2}{12},$$

a tedy

$$\nu_1' = \frac{fP}{2U}(-1+3) = \frac{fP}{U},$$

$$\nu_2' = -\frac{fP}{2U}(\quad 1+3) = -\frac{2fP}{U};$$

$$\nu_1 + \nu_1' = -\frac{P}{U}\left(\frac{3c}{h} - f\right),$$

$$\nu_2 + \nu_2' = \frac{P}{U}\left(\frac{3c}{h} - 2f\right).$$

Budiž na př. součinitel tření (dřeva na dřevě) $f = 0{\cdot}5$, $\frac{c}{h} = 10$; tu

$$\nu_1 + \nu_1' = -\frac{P}{U}(30 - \tfrac{1}{2}) = -30\frac{P}{U}(1 - \tfrac{1}{60}),$$

$$\nu_2 + \nu_2' = \frac{P}{U}(30 - 1) = 30\frac{P}{U}(1 - \tfrac{1}{30}).$$

Prostá hodnota krajního napětí v tlaku zmenšila by se o $\frac{1}{60}$, krajní napětí v tahu o $\frac{1}{30}$.

Kombinace smyku a kroucení.

§ 63. **Síly zevnitřní a vnitřní.** Síly zevnitřní, působící s jedné strany daného průřezu, skládají se jednak v sílu tangencialnou T, jež nechť působí v ose souměrnosti průřezu, jednak ve dvojici Δ_k, jejíž rovina jest pravoúhelna k ose prutové. Dvojice jest dána momentem M kroucení.

Případ tento se namítá, působí-li v prut síly, jichž přímky jsou pravoúhelné k ose prutové, ale neprotínají této osy. Jest-li P jedna taková síla, a připojíme-li v těžišti průřezu, v jehož rovině přímka P jest obsažena, síly P', P'', z nichž P'' jest téhož směru a téže velikosti jako P, P' pak téže velikosti, ale směru protivného, rozložili jsme P ve složku P'' a ve dvojici $(P\,P')$, jejíž rovina jest pravoúhelna k ose prutové. Dán-li určitý průřez (x), lze připojiti v jeho těžišti síly P''' a P^{IV}, jež se mají k síle P'' tak, jako P', P'' k síle P, čímž rozkládá se P'' jednak v sílu P^{IV}, téhož směru a téže velikosti jako P'', ale působící v průřezu, jednak ve dvojici $(P''\,P''')$, jejíž rovina jest pravoúhelna k průřezu. V daném průřezu (x) vyvozuje síla P^{IV} smyk, dvojice $(P''\,P''')$ ohyb, dvojice $(P\,P')$ kroucení.

Jde tedy o kombinaci těchto tří prostých případů pružnosti; jest-li však prut (na př. hřídel transmissní) poměrně krátký, nebo působí-li zevnitřní síly velmi blízko ložisk, lze nedbati ohybu a přihlížeti jen ku smyku a kroucení.

Síla T vyvozuje v každém bodě průřezovém napětí τ_1, jež se stanov dle §§ 38. a 39.; dvojice Δ_k vyvozuje napětí τ_2, jež se stanoví dle §§ 47.

až 52. Z obou napětí τ_1, τ_2 vzniká napětí výsledné τ; největší hodnota tohoto nesmí přestoupiti dovoleného namáhání k'''.

Přihlédněme ku zvláštním tvarům průřezovým.

a) P r ů ř e z k r u h o v ý. Největší hodnota napětí τ_1 namítá se v krajních bodech průměru pravoúhelného ku přímce T a dána jest rovnicí (110) na str. 170.; největší hodnota napětí τ_2 namítá se ve všech bodech obvodových a dána jest rovnicí (152ª) na str. 228. V dotčených krajních bodech průměru pravoúhelného ku T má τ_1 i τ_2 hodnotu největší a působí v téže přímce (v tečně k obvodu); v jednom z těchto bodů se τ_1, τ_2 prostě sčítají, v druhém prostě odčítají. Proto

$$\max \tau = \frac{4}{3}\frac{T}{\pi r^2} + \frac{2M}{\pi r^3} = \frac{2}{\pi r^2}\left(\frac{2T}{3} + \frac{M}{r}\right)$$

anebo, položíme-li $r = \frac{d}{2}$,

$$(212) \ldots\ldots\ldots \max \tau = \frac{16}{\pi d^2}\left(\frac{T}{3} + \frac{M}{d}\right).$$

b) M e z i k r u ž í m a l é t l o u š ť k y. Budiž $\left.\begin{matrix} d \text{ zevnitřní} \\ d' \text{ vnitřní} \end{matrix}\right\}$, $d_0 = \frac{d + d'}{2}$ střední průměr, $a = \frac{d - d'}{2}$ tloušťka mezikruží. Jak vychází z rovnice (103) na str. 166., namítá se $\max \tau_1$ v krajních bodech průměru d pravoúhelného ku T; zde máme přibližně

$$\mathfrak{M}_0 \doteq \frac{\pi d_0}{2} a \frac{d_0}{\pi} = \tfrac{1}{2} a d_0^2,^*)$$

$$J = \frac{\pi}{64}(d^4 - d'^4) = \frac{\pi}{64}(d^2 + d'^2)(d + d')(d - d') \doteq \frac{\pi}{8} a d_0^3,$$

poněvadž

---

*) Obsah polovice mezikruží rovná se přibližně součinu délky $\frac{\pi d_0}{2}$ střední polokružnice a tloušťky a; vzdálenost těžiště střední polokružnice od osy Y má se k poloměru jako tetiva (průměr) k délce této polokružnice, rovná se tedy

$$\frac{d_0}{2} \cdot \frac{d_0}{\left(\frac{\pi d_0}{2}\right)} = \frac{d_0}{\pi}.$$

Zdásobením vychází přibližná hodnota $\mathfrak{M}_0$.

$$d^2 = (d_0 + a)^2 = d_0^2 + 2\,a\,d_0 + a^2,$$
$$d'^2 = (d_0 - a)^2 = d_0^2 - 2\,a\,d_0 + a^2$$
$$d^2 + d'^2 = 2\,(d_0^2 + a^2) \doteq 2\,d_0^2,$$
$$d + d' = 2\,d_0,$$
$$d - d' = 2\,a$$

a tedy

$$d^4 - d'^4 \doteq 8\,a\,d_0^3.$$

Vložíme-li to v rovnici (103), vyjde

$$(213) \ldots\ldots \max \tau_1 = 2\,\frac{T}{\pi\,a\,d_0} = 2\,\frac{T}{U},$$

poněvadž

$$U \doteq \pi\,a\,d_0.$$

Max τ_2 namítá se v zevnitřních obvodových bodech průřezu a má dle rovnice (152ª) na str. 228. hodnotu

$$\max \tau_2 = \frac{16}{\pi}\,\frac{M\,d}{d^4 - d'^4} \doteq \frac{2\,M}{\pi\,a\,d_0^2} = \frac{2\,M}{U\,d_0}.$$

Proto namítne se max τ v jednom z krajních bodů průměru d ku T pravoúhelného a má hodnotu

$$(214) \ldots\ldots \max \tau = \frac{2}{U}\left(T + \frac{M}{d_0}\right).$$

c) P r ů ř e z o b d é l n í k o v ý. Buďtež a, $b > a$ polovice stran obdélníka.

α) P ů s o b í - l i T p r a v o ú h e l n ě k u s t r a n á m k r a t š í m, namítá se max τ_1 v ose Y pravoúhelné ku T, max τ_2 v rozpolovacích bodech stran delších. Dle rovnice (106) na str. 169.

$$\max \tau_1 = \frac{3}{2}\,\frac{T}{U};$$

dle rovnice (171) na str. 244. jest dále

$$\max \tau_2 = \frac{9}{4}\,\frac{M}{U\,a}.$$

Max τ namítá se zase v rozpolovacím bodě jedné ze stran delších a má hodnotu

$$(215) \ldots\ldots \max \tau = \frac{3}{2\,U}\left(T + \frac{3}{2}\,\frac{M}{a}\right).$$

β) P ů s o b í - l i T p r a v o ú h e l n ě k u s t r a n á m d e l š í m, namítá se max τ_1 v ose Y rovnoběžné k těmto delším stranám, max τ_2

však v rozpolovacích bodech stran delších, a jde o to, kde hledati největšího výsledného napětí τ.

Přihlížejíc k zákonům, jak se mění napětí τ_1, τ_2 v průřezu, lze souditi, že největší τ namítne se v rozpolovacích bodech buď delších, buď kratších stran; jest to tedy buď

$$\tau = \frac{9}{4}\frac{M}{U\,a}$$

nebo

$$\tau = \frac{3}{2\,U}\left(T + \frac{3}{2}\frac{M}{b}\right).$$

Kombinace tahu či tlaku se smykem.

§ 64. **Síly zevnitřní a vnitřní.** Případ tento se namítá v určitém průřezu, skládají-li se zevnitřní síly s jedné strany jednak v sílu normalnou N (tah či tlak), působící v ose prutové, jednak v sílu posouvající T, jež nechť působí v ose souměrnosti Z průřezu. Síla N vyvozuje ve všech bodech průřezových napětí

$$\nu = \frac{N}{U}$$

(viz rovnici (1) na str. 43.); silou T vzniká v bodě průřezovém, jehož souřadnice jsou y, z, napětí τ, jež za stálého z a proměnného y jest největší v bodech obvodových majíc tam hodnotu

$$\tau = \pm\frac{T}{J}\frac{\mathfrak{M}_z}{2\,\eta\cos\varphi}$$

(viz rovnici (103) na str. 166.). Poněvadž ν jest ve všech bodech průřezu stejné, sluší přihlížeti k bodům, v nichž τ nabývá hodnoty největší. Co se týče idealných napětí hlavních, máme tu případ vytčený v § 9. *a*) a můžeme tedy užiti výsledků vyvozených v § 41. Obě rozhodující idealná napětí hlavní jsou dána rovnicí (114) na str. 174., kterážto rovnice za $m = 3$, 4 nabývá tvaru rovnic (114[a]), (114[b]) na str. 177.

Jest-li N tlak, a má-li poměr $\frac{l}{i_1}$ hodnotu značnou, nutno přihlížeti též k pružnosti vzpěrné.

Kombinace ohybu a smyku.

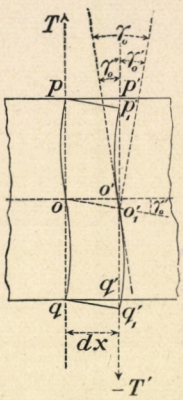
§ 65. **Síly zevnitřní a vnitřní. Přetvoření.** Případ tento namítá se v určitém průřezu, skládají-li se síly zevnitřní s jedné strany jednak ve dvojici Δ_0, jejíž rovina jest pravoúhelná k průřezu, jednak v sílu posou-

vající T, která nechť působí v ose souměrnosti průřezu. Dvojice Δ_0 dána jest svým momentem M, který zove se momentem ohybovým.

Na str. 57. ukázali jsme k tomu, že moment ohybový M bývá téměř vždy provázen silou posouvající T, tak že prostá pružnost v ohybu v přesném rozumu toho slova téměř nikdy se nevyskytuje; ovšem pak jsou četné případy, kde stačí dbáti buď jen momentu M anebo jen síly T. Dejme tomu, že nutno přihlížeti k oběma.

Momentem ohybovým M vyvozují se v průřezu napětí normalná, silou T napětí tangencialná; současný účinek obou vyšetřili jsme v § 41. na str. 174. a násl. a stanovili příslušná idealná napětí hlavní. Odkazujíce k oněm výkladům přihlédněme zde ještě ku p ř e t v o ř e n í n o s n í k a.

V §§ 26. a 28. vyšetřovali jsme o h y b o v o u k ř i v k u nosníka šetříce výhradně účinku dvojice Δ_0 neboli momentu M; jde tedy ještě o ú č i n e k s í l y p o s o u v a j í c í T v k ř i v k u o h y b o v o u.



Obr. 81.

Napětím tangencialným τ vyvozuje se v bodě průřezovém m poměrné posunutí γ; to vyjadřuje změnu pravého úhlu, jejž tvoří průřez s prvkem $m\,m'$, obsaženým mezi stejně položenými body m, m' dvou nekonečně blízkých průřezů anebo — řekněme krátce — s vláknem. Kdyby napětí τ bylo ve všech bodech průřezových stejné, mající pak směr protivný k síle T, posunul by se prostě průřez $(x + d\,x)$ jakožto celek proti průřezu (x) směrem napětí τ, a deskový prvek $p\,p'\,q'\,q$ nosníku (obr. 81.) nabyl by tvaru $p\,p_1'\,q_1'\,q$ tak, že

$$\sphericalangle\, o'\,o\,o_1' = p'\,p\,p_1' = q'\,q\,q_1' = \gamma = \frac{\tau}{G}.$$

Leč napětí τ n e n í ve všech bodech průřezových stejné, ale mění se bod od bodu, a proto mění se i úhel γ; z toho patrno, že *průřezy se zkřiví* a to tak, že úhel vláken krajních s plochou přetvořeného průřezu zůstane pravým (poněvadž na těchto místech $\tau = 0$), a že největší změna pravého úhlu se namítne v bodech, kde $\tau = \max$. Dejme tomu, že — jak tomu bývá nejčastěji — náleží $\max \tau = \tau_0$ a tedy $\max \gamma = \gamma_0$ k obvodovým bodům osy Y. Úhel γ_0 skládá se z dílů γ_0', γ_0''; onen vyplývá z p o s u n u t í, tento ze z k ř i v e n í průřezu.

Budiž y pořadnice křivky ohybové, jak vychází z momentu ohybového M, a jak byla stanovena v §§ 26. a 28. Účinkem síly posouvající T změní se y o $\mathfrak{y}$, tak že

$$y' = y + \mathfrak{y}$$

bude pořadnice, vyvozená oběma veličinami M, T.*)

*) Dle zákona superposice, dovozeného v poslední době i zkouškami.

V obr. 81. jest

$$\overline{o' o_1'} = \delta \mathfrak{y} = \overline{o\, o'} \,.\, \gamma_0' = \gamma_0' \, d\, x.$$

Úhel γ_0 umíme stanoviti, neznáme však, jak se rozděluje v oba sčítance γ_0', γ_0''. Proto užijme ku stanovení pořadnice $\mathfrak{y}$ výminky, že práce síly T rovná se příslušné práci přetvárné.

Roste-li síla posouvající nenáhle od nully po hodnotu T, vykonává za lineárného posunutí $\overline{o' o_1'} = \delta \mathfrak{y}$ práci

$$\tfrac{1}{2} T \, \delta \mathfrak{y};^*)$$

poněvadž pak práce přetvárná prvku $p\, p'\, q'\, q$ dle § 53. *c*) — viz rovnici 183. na str. 253. — dána jest výrazem

$$d\, \Pi = \frac{1}{2\, G} \, dx \int (\tau_y^2 + \tau_z^2) \, dy \, dz,$$

vychází výminka

$$\tfrac{1}{2} T \, \delta \mathfrak{y} = \frac{1}{2\, G} \, dx \int (\tau_y^2 + \tau_z^2) \, dy \, dz$$

neboli

$$(216) \ldots\ldots \mathfrak{y} = \frac{1}{G} \int \frac{d\, x}{T} \int (\tau_y^2 + \tau_z^2) \, dy \, dz.$$

Jde-li o průřez obdélníkový, máme (viz str. 253.)

$$\int (\tau_y^2 + \tau_z^2) \, dy \, dz = \frac{6}{5} \frac{T^2}{b\, h}$$

a proto

$$(217) \ldots\ldots \mathfrak{y} = \frac{6}{5\, G} \int \frac{T}{b\, h} \, dx.$$

Dejme tomu, že prismatický nosník obdélníkového průřezu jest na obou koncích prostě podepřen a uprostřed vzdálenosti podporové obtížen břemenem P. (Vlastní váhy zde nedbejme.) Tu vyvozuje se dle rovnice (35) na str. 112. momentem ohybovým největší pořadnice

$$y_0 = \frac{P\, l^3}{48\, E\, J} = \frac{P\, l^3}{4\, E\, b\, h^3};$$

síla posouvající má v dílu $\left\{ \begin{matrix} a\, c \\ c\, b \end{matrix} \right\}$ nosníku hodnotu $\pm \frac{P}{2}$, tak že dle rov-

*) Viz připomínku pod čarou na str. 251.

KNIHOVNA AKADEMICKÉHO DOMU V PRAZE

nice (217), kde jest integrovati od 0 po $c = \frac{l}{2}$,

$$\eta_0 = \frac{3}{10\,G}\,\frac{P\,l}{b\,h}.$$

Celkem tedy vychází

$$y_0' = y_0 + \eta_0 = \frac{P\,l}{4\,E\,b\,h}\left(\frac{l^2}{h^2} + 1{\cdot}2\,\frac{E}{G}\right),$$

a poněvadž dle rovnice (30) na str. 29.

$$\frac{E}{G} = 2\,\frac{m+1}{m},$$

a klademe-li $m = 3$,

$$\frac{E}{G} = \frac{8}{3},$$

máme konečně

$$(218)\ldots\ldots\ldots y_0' = \frac{P\,l}{4\,E\,U}\left(\frac{l^2}{h^2} + 3{\cdot}2\right).$$

Poměr

$$\frac{\eta_0}{y_0} = 3{\cdot}2\,\frac{h^2}{l^2}$$

jest tím větší, čím větší jest poměr $\frac{h}{l}$.

Za

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{15}$$

vychází

$$\frac{\eta_0}{y_0} = 0{\cdot}128, \quad 0{\cdot}032, \quad 0{\cdot}014.$$

Jak patrno, za poměru $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$ činí chyba as 3%, nedbáme-li účinku síly T při prohybu; pravidlem bývá tedy nepatrná. Za větších hodnot poměru $\frac{h}{l}$ však chyba roste a nutno dbáti účinku síly posouvající. Toho bývá na př. potřebí, stanoví-li se modul E zkouškami pružnosti v ohybu, kde se zkoušejí nosníky poměrně krátké.

Jde-li o průřez kruhový, máme (viz str. 254.)

$$\int(\tau_y^2 + \tau_z^2)\,dy\,dz = \frac{32}{27}\,\frac{T^2}{\pi\,r^2}$$

a tedy

$$(219) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{y} = \frac{32}{27\,\pi\,G}\int \frac{T}{r^2}\,dx.$$

Dejme tomu, že nosník průřezu kruhového jest na obou koncích prostě podepřen a uprostřed vzdálenosti podporové břemenem P obtížen. V tomto případě vyvozuje síla posouvající T největší pořadnici

$$\mathfrak{y}_0 = \frac{8\,P\,l}{27\,\pi\,G\,r^2},$$

moment ohybový M pak největší pořadnici

$$y_0 = \frac{P\,l^3}{48\,E\,J} = \frac{P\,l^3}{12\,E\,\pi\,r^4};$$

oběma vzniká tedy největší pořadnice

$$y_0' = y_0 + \mathfrak{y}_0 = \frac{P\,l}{12\,\pi\,r^2\,E}\left(\frac{l^2}{r^2} + \frac{32}{9}\,\frac{E}{G}\right) = \frac{P\,l}{3\,E\,U}\left(\frac{l^2}{d^2} + \frac{8}{9}\,\frac{E}{G}\right),$$

a klademe-li zase ($m = 3$)

$$\frac{E}{G} = \frac{8}{3},$$

máme

$$(220) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y_0' = \frac{P\,l}{3\,E\,U}\left(\frac{l^2}{d^2} + 2{\cdot}37\right).$$

Poměr

$$\frac{\mathfrak{y}_0}{y_0} = 2{\cdot}37\,\frac{d^2}{l^2}$$

jest zase tím větší, čím větší $\frac{d}{l}$. Za

$$\frac{d}{l} = \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{15}$$

vychází

$$\frac{\mathfrak{y}_0}{y_0} = 0{\cdot}095, \quad 0{\cdot}024, \quad 0{\cdot}011;$$

chyba jest tedy poněkud menší než při průřezu obdélníkovém.

P ř i p o m e n u t í. Stanovíce svrchu pořadnici $\mathfrak{y}$, vyvozenou účinkem síly posouvající T, šetřili jsme zákona, jak napětí τ v průřezu se mění bod od bodu. Mysleme si, že by τ bylo ve všech bodech průřezových stejné majíc pak směr

protivný síle T. Znamenáme-li v tomto případě pořadnici písmenem $\mathfrak{y}'$, můžeme psáti (obr. 81.)

$$\delta\mathfrak{y}' = \overline{o_1 o_1'} = \gamma\, dx = \frac{\tau}{G}\, dx = \frac{T}{G\,U}\, dx\,;$$

správné $\delta\mathfrak{y}$ jest dle rovnice (216) vyjádřeno výrazem

$$\delta\mathfrak{y} = \frac{dx}{G\,T}\int (\tau_y^2 + \tau_z^2)\, dy\, dz.$$

Poměr

$$(221)\ \ldots\ldots\ldots\ \beta = \frac{\delta\mathfrak{y}}{\delta\mathfrak{y}'} = \frac{U}{T^2}\int (\tau_y^2 + \tau_z^2)\, dy\, dz.$$

Při průřezu obdélníkovém jsme odvodili

$$\int (\tau_y^2 + \tau_z^2)\, dy\, dz = \frac{6}{5}\frac{T^2}{U},$$

pročež

$$\beta = \frac{6}{5} = 1{\cdot}2;$$

při průřezu kruhovém pak

$$\int (\tau_y^2 + \tau_z^2)\, dy\, dz = \frac{32}{27}\frac{T^2}{U}$$

a tedy

$$\beta = \frac{32}{27} = 1{\cdot}185.$$

Co se týče průřezu I, vychází při nejslabším profilu rakouském (čís. 8.; $h = 8\ cm$, $b = 5{\cdot}2\ cm$, $t = 0{\cdot}6\ cm$, $a = 0{\cdot}4\ cm$)

$$\beta = 2{\cdot}8,$$

při nejsilnějším pak (čís. 45.; $h = 45\ cm$, $b = 17{\cdot}1\ cm$, $t = 2{\cdot}7\ cm$, $a = 1{\cdot}8\ cm$)

$$\beta = 2{\cdot}1.$$

Kombinace tahu či tlaku a kroucení.

§ 66. **Síly zevnitřní a vnitřní.** Případ tento namítá se v určitém průřezu, skládají-li se síly zevnitřní s jedné strany jednak ve výslednici normalnou N (tah či tlak), jež působí v ose prutu, jednak ve výslednou dvojici Δ_k, jejíž rovina jest pravoúhelná k ose prutové.

Síla N vyvozuje v každém bodě průřezovém napětí normalné

$$\nu = \frac{N}{U};$$

dvojice Δ_k, daná momentem M kroucení, vyvozuje napětí tangencialné, jež se stanoví dle §§ 48. až 51. Poněvadž ν jest ve všech bodech průřezových stejné, sluší přihlížeti k bodům, v nichž τ jest maximum.

Co se týče idealných napětí hlavních, která vznikají z obou napětí ν, τ, namítá se i zde případ vytčený v § 9. *a*), tak že můžeme užiti výsledků v § 41. vyvozených. Rozhodující idealná hlavní napětí jsou zase vyjádřena rovnicí (114) na str. 174., kterážto rovnice za $m = 3, 4$ nabývá tvaru rovnice (114^a), (114^b) na str. 177.

Jest-li N tlak a poměr $\frac{l}{i_1}$ značný, nutno ještě také přihlédnouti k pružnosti vzpěrné.

Kombinace ohybu a kroucení.

§ 67. **Síly zevnitřní a vnitřní.** Případ tento se namítá v určitém průřezu, skládají-li se zevnitřní síly s jedné strany jednak ve dvojici Δ_0, jejíž rovina jest pravoúhelná k průřezu, jednak ve dvojici Δ_k, jejíž rovina jest pravoúhelná k ose prutu.

Dvojice Δ_0, daná momentem ohybovým M_0, vyvozuje v určitém bodě průřezovém normalné napětí ν, jež se stanoví dle § 22., po případě dle § 27.; dvojice Δ_k způsobuje v určitém bodě průřezovém napětí τ, které stanovíme dle §§ 48. až 51. Z obou napětí ν, τ vyplývají idealná napětí hlavní, která jsou dána rovnicí (114) na str. 174.; za $m = 3, 4$ dospíváme k rovnicím (114^a), (114^b) na str. 177.

Klaďme $m = 3$; pak jest užívati rovnice (114^a)

$$\left.\begin{matrix}\nu_{\mathrm{I}} \\ \nu_{\mathrm{II}}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{3}\nu \pm \frac{2}{3}\sqrt{\nu^2 + 4\tau^2};$$

k ν_{III} netřeba přihlížeti.

Moment M_k jest ve všech průřezech prutu nebo jistého dílu prutového stejný; jde-li o prut nebo díl prutový prismatický, nutno vzíti v úvahu průřez, v němž M_0 má hodnotu největší. V kterých bodech tohoto průřezu se namítnou největší hodnoty ν_{I}, ν_{II}, záleží na tvaru průřezovém.

a) Průřez elliptický. *α*) Rovina dvojice Δ_0 jest rovnoběžna k menší ose $2a$ ellipsy. Tu nabývá ν i τ krajních hodnot v obvodových bodech této menší osy; jsou to hodnoty

$$\nu_a = \mp \frac{M_0\, a}{J} = \mp \frac{4\, M_0}{\pi\, a^2\, b},$$

$$\tau_a = \frac{2\, M_k}{\pi\, a^2\, b}.$$

Krajní hodnoty idealných napětí hlavních namítnou se tedy v průřezu největšího momentu M_0 a to v obvodových bodech menší osy ellipsy; rovnice (114ª) dává tu po náležité redukci

$$\nu_h = \frac{4}{3\,\pi\, a^2\, b}\left(\pm M_0 \pm 2\,\sqrt{M_0^2 + M_k^2}\right),$$

kde jest kombinovati znaménka obou členů v závorce. Největší prosté hodnoty vyplývají za znamének s o u h l a s n ý c h ; znamená-li nyní M_0 p r o s t o u hodnotu momentu ohybového, a klademe-li poměr

$$\frac{M_k}{M_0} = \psi,$$

vychází

$$(222) \ldots\ldots\ldots \nu_h = \pm \frac{4\, M_0}{3\,\pi\, a^2\, b}\left(1 + 2\,\sqrt{1 + \psi^2}\right).$$

MAJETEK ČESKO-UKR. KOMITETU V Č.S.R.

β) R o v i n a d v o j i c e Δ_0 j e s t r o v n o b ě ž n a k v ě t š í o s e $2\,b$ e l l i p s y. Tu namítají se krajní hodnoty napětí normalného v obvodových bodech větší osy, krajní hodnota napětí tangencialného v obvodových bodech osy menší. Jde o to, ku kterým bodům náležejí krajní hodnoty idealných napětí hlavních.

V bodech přímky $m'\, m''$, jež má od osy Y vzdálenost z, působí napětí normalné

$$\nu = -\frac{M_0\, z}{J} = -\frac{4\, M_0\, z}{\pi\, a\, b^3};$$

v bodu m, jehož souřadnice jsou y, z, máme dle rovnice (163) napětí tangencialné

$$\tau = \frac{2\, M_k}{\pi\, a^3\, b^3}\,\sqrt{b^4\, y^2 + a^4\, z^2}.$$

Poněvadž jest ν stejné ve všech bodech dotčené přímky $m'\, m''$, τ však největší v jejích bodech obvodových m', m'', namítnou se krajní hodnoty idealných napětí hlavních na obvodě. Jsou-li y', $-y'$ úsečky obvodových bodů dotčené přímky, τ' pak příslušné napětí tangencialné, máme

$$\tau' = \frac{2\, M_k}{\pi\, a^3\, b^3}\,\sqrt{b^4\, y'^2 + a^4\, z^2} = \frac{2\, M_k}{\pi\, a^2\, b}\,\sqrt{1 - \frac{c^2}{b^4}\, z^2},$$

poněvadž

$$b^2 y'^2 + a^2 z^2 = a^2 b^2$$

a tedy

$$b^4 y'^2 = a^2 b^2 (b^2 - z^2);$$

při tom

$$c^2 = b^2 - a^2.$$

V bodech obvodových, jichž pořadnice jest z, máme tedy dle rovnice (114ª) idealná napětí hlavní

$$(223) \ldots \nu_h = \frac{4}{3} \frac{M_0}{\pi a b^3} \left[- z \pm 2 \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{a^2} \psi^2\right) z^2 + \frac{b^4}{a^2} \psi^2} \right],$$

znamenáme-li zase

$$\psi = \frac{M_k}{M_0}.$$

Abychom ustanovili krajní hodnoty napětí ν_h, vyšetřujme funkci

$$f(z) = - z \pm 2 \sqrt{\alpha z^2 + \beta}$$

co do maxima, znamenajíce kratšeji

$$\alpha = 1 - \frac{c^2}{a^2} \psi^2, \quad \beta = \frac{b^4}{a^2} \psi^2.$$

Položíme-li první derivaci

$$f'(z) = - 1 \pm \frac{2 \alpha z}{\sqrt{\alpha z^2 + \beta}}$$

rovnu nulle, obdržíme výminku

$$z^+ = \pm \sqrt{\frac{\beta}{\alpha (4 \alpha - 1)}}$$

neboli

$$(224) \ldots . z^+ = \pm \frac{b^2}{a} \frac{\psi}{\sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{a^2} \psi^2\right)\left(3 - 4 \frac{c^2}{a^2} \psi^2\right)}}.$$

K této hodnotě pořadnice z náleží maximum či minimum analytické; aby však pořadnice z^+ měla platnost statickou, nesmí prostá hodnota z^+ přestoupiti délku poloosy b. Leč i když $\pm z^+$ není větší než b, může k z^+ náležeti po případě nejmenší prostá hodnota ν_h a nikoli největší. Proto radno zároveň stanoviti hodnoty ν_h za $z = 0$ a $z = b$, poněvadž jedna z nich může býti žádanou krajní hodnotou.

b) P r ů ř e z k r u h o v ý. Největší prosté hodnoty ν náležejí k pořadnici $z = \pm r$; největší τ vyskytuje se ve všech bodech obvodových. Proto obdržíme krajní hodnoty idealného napětí hlavního ν_h v bodech, jichž pořadnice $z = \pm r$.

Poněvadž za $z = \pm r$

$$\nu = \mp \frac{M_0 r}{J} = \mp \frac{4 M_0}{\pi r^3}$$

a v bodech obvodových vůbec

$$\tau = \frac{2 M_k}{\pi r^3},$$

vychází, béřeme-li v obou členech rovnice (114ª) znaménka souhlasná píšíce zároveň

$$\frac{M_k}{M_0} = \psi,$$

$$(225) \ldots\ldots\ldots \nu_h = \pm \frac{4 M_0}{3 \pi r^3} \left(1 + 2 \sqrt{1 + \psi^2}\right).^*)$$

P ř i p o m e n u t í. Napíšeme-li výraz ν_h pro obvodové body vůbec a vyšetříme-li jej co do maxima, vyjde

$$z^+ = \pm \tfrac{1}{3} r \psi \sqrt{3} = \pm 0{\cdot}577\, r \psi,$$

hodnota plynoucí též z rovnice svrchu při ellipse odvozené, klademe-li $a = b = r$, $c = \emptyset$. Hodnota z^+ vede při kruhu k *nejmenší* prosté hodnotě ν_h; největší náleží ku $z = \pm r$, není to však maximum analytické.

c) P r ů ř e z o b d é l n í k o v ý. *α*) R o v i n a d v o j i c e Δ_0 j e s t r o v n o b ě ž n a k m e n š í s t r a n ě $2a$ o b d é l n í k a. Tu namítají se v rozpolovacích bodech stran delších krajní hodnoty napětí ν i τ; v těchto bodech obdržíme tedy také krajní hodnoty idealných napětí hlavních.

Poněvadž v dotčených bodech

$$\nu = \mp \frac{M_0 a}{J} = \mp \frac{3}{4} \frac{M_0}{a^2 b},$$

$$\tau = \frac{9}{16} \frac{M_k}{a^2 b},$$

dává rovnice (114ª)

*) Týž výsledek dává rovnice (222), klademe-li v ní $a = b = r$.

$$(226) \ldots\ldots \nu_k = \pm \frac{M_0}{4\,a^2\,b}\left[1 + 2\sqrt{1 + \left(\frac{3\,\psi}{2}\right)^2}\right],$$

znamenáme-li zase

$$\frac{M_k}{M_0} = \psi.$$

β) Rovina dvojice Δ_0 jest rovnoběžna ku delší straně $2\,b$ obdélníka. Tu namítají se krajní hodnoty ν, τ v rozličných bodech průřezu (ν v bodech stran kratších, τ v rozpolovacích bodech stran delších), a jest zase stanoviti body, k nimž náležejí krajní hodnoty idealných napětí hlavních.

V bodě m, jehož souřadnice jsou y, z, působí napětí normalné

$$\nu = -\frac{M_0\,z}{J} = -\frac{3}{4}\frac{M_0}{a\,b^3}\,z,$$

dále — dle rovnice (169) — napětí tangencialné

$$\tau = \frac{9}{16}\frac{M_k}{a^3\,b^3}\sqrt{y^2\,(b^2 - z^2)^2 + z^2\,(a^2 - y^2)^2}\,;$$

idealná hlavní napětí dává pak rovnice (114ª).

Přihlížejíc k zákonům, jimiž se řídí napětí ν, τ v tomto případě, lze souditi, že největší prostá hodnota idealného napětí hlavního se namítne buďto v některém bodě delších stran obdélníka, buďto v rozpolovacích bodech stran kratších. V bodě m' delší strany obdélníka působí ν, jak vyjádřeno svrchu; co se týče τ, máme za $y = \pm a$

$$\tau' = \frac{9}{16}\frac{M_k}{a^2\,b^3}\,(b^2 - z^2);$$

proto

$$(227) \ldots\ldots \nu_k = \frac{M_0}{4\,a\,b^3}\left[-z \pm 2\sqrt{z^2 + \frac{9\,\psi^2}{4\,a^2}\,(b^2 - z^2)^2}\right].$$

Tento výraz bylo by vyšetiiti co do maxima či minima. Poněvadž počtářské řešení této úlohy jest poněkud obtížné, radno sestrojiti k bodům delší strany obdélníka přímku (ν) a parabolu (τ'), z obou čar pak na základě rovnice (114ª) graficky odvoditi obě křivky (ν_{I}'), (ν_{II}') a stanoviti tak největší pořadnici ν_k'.

V rozpolovacích bodech stran kratších máme

$$\nu'' = \mp \frac{3}{4} \frac{M_0}{a\, b^2},$$

$$\tau_b = \frac{9}{16} \frac{M_k}{a\, b^2}$$

a tedy

$$(228) \ldots\ldots \nu_k'' = \pm \frac{M_0}{4\, a\, b^2} \left(1 + 2\sqrt{1 + \frac{9}{4}\psi^2}\right).$$

Větší z obou hodnot ν_k', ν_k'' možno pak pokládati za největší prostou hodnotu idealného napětí hlavního.

OBSAH.

Úvod.

Strana

§ 1. 1

Část I.

Základy obecné theorie pružnosti.

§ 2. O silách vnitřních 3
§ 3. O napětích působících ve tři plošné prvky vzájemně pravoúhelné . . 4
§ 4. O napětí náležejícím k prvku libovolné plochy 7
§ 5. O ellipsoidu napiatosti 9
§ 6. Kterak se stanoví napětí hlavní 11
§ 7. O ploše směrové 14
§ 8. O největších napětích tangencialných 15
§ 9. O případech zvláštních 17
§ 10. O prvcích přetvoření 19
§ 11. O přetvoření tělesa v bodě daném 21
§ 12. Kterak se stanoví roztažení hlavní 25
§ 13. Jak se k sobě mají napětí a přetvoření 26
§ 14. Kterak obecně stanoviti hlavní roztažení v daném bodě tělesa isotropého 32
§ 15. O výminkách bezpečné pevnosti 33
§ 16. O součinitelích pevnosti. O namáhání opětovaném. Kterak se určuje namáhání dovolené 34

Část II.

O pružnosti prutů.

§ 17. Pojmy základní 39

A. O pružnosti prutů přímých.

I. Prostá pružnost v tahu či tlaku.

§ 18. O silách zevnitřních a vnitřních 41
§ 19. O prutech stejného odporu v tahu či tlaku 48
§ 20. O přetvoření prutu 49

II. Prostá pružnost v ohybu.

Strana

§ 21. O silách zevnitřních 55
§ 22. O silách vnitřních vůbec a normalných zvlášť 58
§ 23. O momentech setrvačnosti a momentu deviačním 68
§ 24. O momentech setrvačnosti a deviačních v soustavě kosoúhelné . . . 75
§ 25. O momentech setrvačnosti obrazců prakticky důležitých 78
§ 26. O křivce ohybové 92
§ 27. O prostorovém neboli složeném ohybu 95
§ 28. Nosníky prosté. Momenty ohybové a síly posouvající za různého podepření a obtížení nosníka. Ohyb nosníků stálé o průřezu 100
§ 29. Nosníky spojité. Jak se liší od prostých co do momentu ohybového a síly posouvající 125
§ 30. Spojité nosníky průřezu stálého. Rovnice třímomentová 127
§ 31. Jak stanoviti veličiny $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ za různého obtížení polí 131
§ 32. Jak stanovíme momenty podporové užívajíce rovnic třímomentových. O zvláštních tvarech této rovnice 133
§ 33. Jak se z momentů podporových stanoví veličiny ostatní 136
§ 34. Jak stanoviti účinek snížení bodů podporových 144
§ 35. Jak se stanoví účinek vetknutých konců nosníkových 148
§ 36. Spojité nosníky průřezu proměnného 152
§ 37. Spojité nosníky kloubové 157
§ 38. O vnitřních silách tangencialných 160
§ 39. O napětí tangencialném při zvláštních formách průřezových 168
§ 40. O normalném napětí směrem osy Z 171
§ 41. O napětích a roztaženích hlavních 174
§ 42. Kterak se stanoví a posuzují průřezové rozměry nosníků 178
§ 43. Kterak působí vetknuté konce nosníků v příslušná tělesa 192
§ 44. O nosnících stejného odporu v ohybu 196

III. Prostá pružnost ve smyku.

§ 45. 208
§ 46. Příklady 210

IV. Prostá pružnost v kroucení.

§ 47. Síly zevnitřní a vnitřní 225
§ 48. Průřez kruhový 226
§ 49. Jiné tvary průřezové 232
§ 50. Průřez elliptický 236
§ 51. Průřez obdélníkový 240
§ 52. Přehled výsledků. — Železo lité 244

O práci přetvárné.

§ 53. Práce přetvárná vůbec 247
§ 54. Jednoduché případy zvláštní 249

Kombinace tahu či tlaku s ohybem.

§ 55. Síly zevnitřní a vnitřní. Přetvoření 257
§ 56. Prut jest namáhán silou, jež působí v přímce rovnoběžné s osou jeho 259

MAJETEK ČESKO-UKR. KOMITÉTU V Č.S.R.

Pružnost vzpěrná.

Strana

§ 57. 264
§ 58. Jiné tvary křivky ohybové 267
§ 59. Jak užívati prakticky výsledků vyvozených 275
§ 60. Empirický vzorec pevnosti vzpěrné 281
§ 61. Jak posouditi dodavkem účinek možné výstřednosti 284
§ 62. Prut jest namáhán silou příčnou centralnou a zároveň podélnou necentralnou — následkem odporu proti posouvání konců prutových na podporách 285

Kombinace smyku a kroucení.

§ 63. Síly zevnitřní a vnitřní 289

Kombinace tahu či tlaku se smykem.

§ 64. Síly zevnitřní a vnitřní 292

Kombinace ohybu a smyku.

§ 65. Síly zevnitřní a vnitřní. Přetvoření 292

Kombinace tahu či tlaku a kroucení.

§ 66. Síly zevnitřní a vnitřní 297

Kombinace ohybu a kroucení.

§ 67. Síly zevnitřní a vnitřní 298

Českým technikům a příznivcům české literatury technické.

Česká Matice technická usiluje vydati základní spisy v odborech stanovami určených (architektuře a stavitelství pozemním — stavitelství mostů, silnic a železnic — stavitelství vodním — stavbě strojů a mechanické technologii — technické mechanice — elektrotechnice — technice zemědělské — geodésii — chemické technologii — pomocných naukách technických). Účelu právě dotčeného lze však dosíci jen za účastenství všech neb aspoň veliké většiny českých techniků a příznivců české technické literatury.

Pořadem hodlá Matice vydati spisy ze všech odborů, jakmile budou získány a k tisku připraveny; prosíme tedy pp. odborníky, aby své nabídky o sepsání děl technických záhy výboru oznámili.

Poněvadž není možno, aby Česká Matice technická publikovala hned s počátku ve všech oborech svrchu zmíněných, jsme přesvědčeni, že český technik, na jehož odbor by snad teprve později došlo, nebude toho vytýkati zření maje ke skutečným okolnostem; ostatně záleží všem na tom, aby česká literatura technická vůbec se doplňovala a vyvíjela.

Vyňatek ze stanov České Matice technické: § 4. Členové *zakládající* jsou příznivci české literatury technické, kteří přistupujíce věnovali spolku nejméně 400 K jednou na vždy.

Členy zakládajícími může valná hromada po návrhu výboru jmenovati též záslužné členy činné.

§ 5. Členem *činným* může býti každý, kdo byv výborem přijat a zapraviv 2 K zápisného, zavazuje se přispívati 10 korunami ročně.

§ 6. Členy zakládajícími a činnými mohou býti též společnosti a právní osoby.

Přistupující pp. členové račte se hlásiti u předsedy prof. Frant. Novotného, Praha, Vodičkova ulice „u Helmů"; příspěvky členské a dary pro Českou Matici technickou přijímá pokladník Matice prof. Jos. Petřík v Praze-II., Karlovo nám. 14.

Praesidium České Matice technické.

Nákladem České Matice technické

vydány byly tyto spisy a prodávají se za ceny připojené:

	Cena krámská korun	Cena členská korun
Balšánek, Štíty a motivy attikové, spisů čís. 18.	7·20	4·80
Beroušek, Slovník textilní I. díl, spisů čís. 48.	15·—	10·—
Boda, Zabezpečování dopravy vlakové, I. část, spisů čís. 27.	6·90	4·50
„ „ „ „ II. část, spisů čís. 31.	5·70	3·50
„ „ „ „ II. díl, seš. 1., sp. č. 36	5·40	3·40
„ „ „ „ II. díl, seš. 2. sp. č. 52	8·50	6·—
Braulik, Mechanické stavy tkalcovské, spisů čís. 43..	8·—	5·50
Červinka, Výhybky a spojení výhybková, spisů čís. 30.	4·80	3·—
Hýbl, Základy mechaniky tepla, spisů čís. 49..	3.—	1·80
Jarolímek, Základy geometrie polohy v rovině a v prostoru, spisů čís. 42..	3·—	1·60
Jarolímek-Procházka, Deskriptivní geometrie spisů čís. 44. ..	10·—	6·—
Novák, Stavba sítí elektrovodných, spisů čís. 32.	9·—	6·—
Novotný, Geodésie nižší, díl II., seš. 3., spisů čís. 9.	4·80	3·—
„ „ „ „ III., „ 1., „ „ 12.	4·80	3·—
„ Názvosloví geodětické, spisů čís. 21.	4·80	3·—
„ Geodésie nižší, díl I., druhé vydání	22·50	12·—
„ „ „ „ II., „ „	15·60	8·—
„ „ „ „ III., „ „	19·50	10·—
„ „ „ „ II., třetí vydání	15·60	8·—
„ Geodésie vyšší, seš. 1., spisů čís. 35.	4·80	3·—
„ „ „ „ 2., „ „ 39.	3·90	2·40
„ „ „ „ 3., „ „ 45.,	3·30	2·—
Ott, Správa staveb pozemních, spisů čís. 22.	7·20	4·50
Petrlík, Tabulky vytyčovací, spisů čís. 23.	12·—	8·—
Pošík, Rotační konvertory elektrické, spisů čís. 38.	2·70	1·60
Pravda, Diagrammy k parním rozvodům šoupátkovým, spisů čís. 26.	2·40	1·30
Pravda, Konstrukce částí strojových. II. vydání, spisů čís. 1. a 3. text a atlas	19·20	11·—
Purkyně, Ústřední topení a větrání, díl I., spisů čís. 14. ..	15·—	7·50
Schnirch, Parní kody, díl I., spisů čís. 17.	16·50	9·50
Sobotka, Deskript. geometrie, I. svaz., spisů čís. 33..	9·—	6·—
„ „ „ 2. „ „ „ 37..	9·—	6·—
Schulz, Výstavní skříně musejní, díl I., spisů čís. 10.	5·40	3·40
„ „ „ „ „ II., „ „ 13.	5·40	3·40
Stolz, Pořízení základů pro výšk. udrž. trati železn., sp. č. 40.	3·—	2·—
Stupecký, Vodní nádrže, spisů č. 46.	4·40	2·80
Šetlík-Votoček, Slovník chemicko-technický, spisů čís. 34..	3·—	2·—
Šolín, Základy tech. nauky o pružn. a pevn., seš. 1., sp. č. 19.	5·40	3·20
„ „ „ „ „ „ seš. 2., sp. č. 25.	2·70	1·60
Dr. *Tolman*, O pohybu vody v korytech otevřených, sp. č. 41.	7·—	4·50
Velflík, Stavitelství mostní, díl II., sešit 5., spisů čís. 16. ..	6·60	4·—
„ „ „ „ II., „ 6., „ „ 24. ..	9·—	6·—
„ „ „ „ II., „ 7., „ „ 28. ..	6·30	4·—
„ „ „ „ II., „ 8., „ „ 29. ..	7·20	4·80
„ „ „ „ III., „ 1., „ „ 51. ..	7·—	5·—
„ Dějiny techn. učení v Praze, spisů čís. 47.	14·—	9·—
„ „ „ „ „ díl II., seš. 1. sp. čís. 53.	7·—	4·50

Ze skladu České Matice technické mohou *nově* přistupující členové obdržeti dosud vyšlé ročníky, pokud zásoba stačí, zaplatí-li po 10 K za ročník; jinak obdrží členové knihy za členskou cenu.

Ostatní spisy jsou rozprodány a chystá se druhé vydání. Jednotlivé spisy prodává nečlenům pouze knihkupectví Frant. Řivnáče v Praze za ceny krámské.

Tiskem Aloisa Wiesnera v Praze, knihtiskaře České Akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění a c. k. české vysoké školy technické v Praze.

Papír ze skladu České společnosti pro obchod a průmysl papírnický G. Wiesner, Duffek a spol. v Praze.