L314

MATICE TECHNICKÁ.

SPISŮ ČÍSLO 196.

TECHNICKÝ PRŮVODCE

SVAZEK PRVÝ.

MATEMATIKA.

DRUHÉ PŘEPRACOVANÉ A ROZŠÍŘENÉ VYDÁNÍ.

SE 162 OBRAZCI V TEXTU.

NAPSAL:

† Prof. Ing. Dr. FRANTIŠEK ČUŘÍK.

REDAKCI VYKONALI:

† Prof. Ing. Dr. FRANTIŠEK ČUŘÍK, Prof. Ing. FRANTIŠEK KLOKNER a Prof. Dr. JAN VOJTĚCH.

V PRAZE.

Nákladem České matice technické s podporou ministerstva školství.

V komisi knihkupce Fr. Řivnáče v Praze.

1944.

TECHNICKÝ PRŮVODCE.

Tiskem „Politiky“
v Praze.

ČESKÁ MATICE TECHNICKÁ.

ROČNÍK XLIX. (1944). SPISŮ ČÍSLO 196.

TECHNICKÝ PRŮVODCE

SVAZEK PRVÝ.

MATEMATIKA.

DRUHÉ PŘEPRACOVANÉ A ROZŠÍŘENÉ VYDÁNÍ.

SE 162 OBRAZCI V TEXTU.

NAPSAL:

† Prof. Ing. Dr. FRANTIŠEK ČUŘÍK.

REDAKCI VYKONALI:

† Prof. Ing. Dr. FRANTIŠEK ČUŘÍK, Prof. Ing. FRANTIŠEK KLOKNER a Prof. Dr. JAN VOJTĚCH.

V PRAZE.

Nákladem České matice technické s podporou ministerstva školství.

V komisi knihkupce Fr. Řivnáče v Praze.

1944.

Patisk se nedovoluje.
Překlad do jiných jazyků vyhrazen.

Copyright 1944 by
Česká matice technická
Prague.



314

Knihovna

479

Řivnáč, 5. XI. 1948, brož. 90,- Kčs.

UPOZORNĚNÍ.

Z Technického průvodce vydávaného nákladem České matice technické vyšly dosud tyto svazky (sešity):

1. Matematika (2. vydání 1944).
2. Teplo (1927). — *Rozebráno.*
3. Nauka o pružnosti a pevnosti (3. vydání 1944).
4. Statika stavebních konstrukcí (5. vydání 1941). — *Rozebráno.*
5. Stavitelství vodní a meliorace (1922). — *Rozebráno.*
6. Části strojů (3. vydání 1932). — *Rozebráno.*
7. Stavitelství vodní, II. část: Vodárenství (1923). — *Rozebráno.*
8. Stavitelství vodní, III. část: Hydrologie a stokování (1925). — *Rozebráno.*
9. Elektrotechnika, I. část (2. vydání 1944).
10. Doprava železniční a její zabezpečování (1929). — *Rozebráno.*
11. Mostní stavitelství (1930). — *Rozebráno.*
12. Elektrotechnika, II. část (1932). — *Rozebráno.*
13. Jeřáby (2. vydání 1944).
14. Elektrotechnika, IV. část (1934). — *Rozebráno.*
15. Elektrotechnika, III. *A.* část (1936). — *Rozebráno.*
16. Letecký průvodce, díl I. (1937). — *Rozebráno.*
17. Elektrotechnika, III. *B.* část (1938). — *Rozebráno.*
18. Letecký průvodce, díl II. (1939). — *Rozebráno.*
19. Matematické a statické tabulky (3. vydání 1944).
20. Elektrotechnika, V. část (1943).
21. Slévárenství (1941). — *Rozebráno.*

Komise pro Technického průvodce
při České matici technické.

Památce

† profesora Ing. Dr. F. Čuříka.

Knížka tato je připsána památce jejího autora profesora Ing. Dr. Františka Čuříka. Je dílem několika let pilné a poctivé práce, která jí byla věnována, aby byla bezpečným průvodcem technika ve všech oborech matematiky, s nimiž se ve své praxi setká. Spisovatel se jí obětoval cele i v dobách, kdy již cítil, že její břímě začínalo býti i jeho tělesné zdatnosti těžkým. Však čestná povinnost dokončiti dílo, v něž se uvázal, byla mu nade vše. Přepínal své síly, až ho osud zmohl (zemřel 7. června 1944, maje 68 let) a nedopřál mu uspokojení a radosti, aby dílo, autorem právě dokončené, uviděl i po stránce tiskařské hotové v rukou čtenářů, kteří na ně již nedočkavě čekali.

Profesor Čuřík se vždy vyznamenával živou snahou, aby i obtížné stati matematické podal způsobem jasným a i průměrnému technikovi dobře srozumitelným. A dovedl to, protože měl právě k tomu nejlepší průpravu. Byl jedním z onoho nála techniků — absolvoval strojní inženýrství — kteří se věnovali ryzí theorii. A tak jeho studium a dlouholetá činnost učitelská — byl asistentem na technice, později profesorem průmyslové školy v Praze a od r. 1929 profesorem matematiky a deskriptivy na vysoké škole báňské v Příbrami — ho učinily obzvláště způsobilým pro zpracování matematiky užité pro technické obory. Soudíce podle dřívějších spisů autorových máme za to, že se tato jeho snaha setkala i v jeho poslední práci se zdarem a že přinese prospěch technikům, kteří se ve své praxi neobejdou bez matematiky.

Čeští technikové vděčí profesoru Čuříkovi za to, že vyhověl výzvě Technické matice, aby napsal a jejím nákladem vydal učebnice z oboru, který je základem všeho inženýrského vzdělání. Tak vyšly jeho dvoudílné Základy vyšší matematiky, o jejichž oblibě svědčí, že i jejich druhé vydání je již dávno rozebráno, a Počet vyrovnávací. Nejznámější jeho prací jest matematický díl Technického průvodce a Matematické tabulky, obé rovněž rozebrané.

Česká matice technická zachová profesoru Dr. Ing. F. Čuříkovi nejčestnější vzpomínku jakožto svému pilnému spisovateli, váženému vědeckému pracovníku, výbornému učiteli, dobrému člověku i věrnému svému členu, jímž byl od roku 1918, a členu výboru od roku 1937, v kterém byl zástupcem odboru technické mechaniky.

Budiž čest Jeho památce!

Komise pro Technického průvodce
při České matici technické.

PŘEDMLUVA.

V Technickém průvodci byla matematická část vydána nejprve v I. svazku třídílného Průvodce, sestaveného *Červeným* a *Řehořovským*, jenž vyšel po prvé r. 1896, po druhé r. 1902 a po třetí r. 1915. Měla celkový rozsah 56 stran, v čemž byla algebraická analysa, počet diferenciální a integrální, trigonometrie a geometrie rovinná i prostorová. Kromě toho byly ve svazku tom i matematické tabulky na 36 stranách. Samostatně vyšla matematika s tabulkami jako 1. sešit Technického průvodce České matice technické v sepsání Ing. *J. Vancla* a Ing. Dr. *F. Čuřika* v r. 1921 s označením jakožto čtvrté vydání oddílů I. a II. dřívějšího prvního svazku. Byla vzhledem k předešlému velmi rozšířena: matematické tabulky tu měly 45 stran a matematika 186 stran. Stalo se tak připojením nových statí a rozšířením starých. Zároveň byly vydány matematické tabulky jako zvláštní otisk.

V r. 1939 vydala Česká matice technická Matematické tabulky samostatně jako druhé vydání tohoto otisku, zároveň s tabulkami statickými (jež byly dříve ve spisu Nauka o pružnosti a pevnosti). Sestaveny byly profesorem *F. Čuřikem* a profesorem *F. Kloknerem* a proti dřívějšímu vydání značně rozšířeny. Všeobecná tabulková část (ve vydání z r. 1921 a dřívějších), pokud nebyla přímo matematického druhu (jako soustava sluneční, časomíra, statistické údaje zeměpisné a pod.) byla tu vynechána; důvodem k tomu byla menší nebo větší odlehlost od vlastních technických oborů nebo častá a veliká proměnlivost některých udání tabulek a konečně možnost nalezení novějších údajů v jiných příslušných spisech.

Poněvadž všechny tyto spisy byly jako nezbytné pomůcky pro praxi i pro odborné školy velmi rychle rozebrány, rozhodla se Matice vydati matematickou část Průvodce též samostatně bez tabulek, jejichž nové (třetí) vydání je v tisku. Tak dochází k tomuto druhému samostatnému (se zřením na 4. vydání z r. 1921 tedy celkem pátému) vydání matematické části Technického průvodce.

Proti předešlému vydání je zde předmětu věnováno více místa o 70 procent (o 130 stran). Přidány byly zejména odstavce o funkcích komplexní proměnné, o integrálních rovnicích, o statistice a o methodách praktické analysy. Staré odstavce byly přepracovány a značně rozšířeny, při čemž bylo

dbáno nových poznatků vědy a pokud možno i pokynů došlých z praxe. Všechna ta práce byla vykonána zesnulým profesorem *Čuříkem*, který se jí věnoval s velikou pílí a svědomitostí.

Po náhlém úmrtí profesora *Čuříka* ukázala se potřeba nové revise celého spisu k tisku už zcela připraveného. Provedl ji na požádání České matice technické profesor Dr. *Jan Vojtěch*. Učinil tak zvláště po stránce věcné správnosti, jakož i po stránce formální, uváděje zde odborné symboly, termíny i jazyk ve shodu jednak s normami Jednoty českých matematiků a fysiků v Praze z r. 1939, schválenými ministerstvem školství pro školy zejména střední a odborné (Názvy a značky elementární matematiky, II. vyd. 1944), jednak s normami Československé společnosti normalisační (ČSN 1295-1940, Matematické značky); doplnil také podstatně literární poznámky. Neměnil však téměř ničeho na volbě a uspořádání látky.

Zůstala-li při veškeré péči někde chyba, citelná mezera nebo jiný nedostatek, prosíme čtenáře, aby je laskavě oznámili České matici technické k možné opravě v příštím vydání.

Tiskárně Politiky vzdáváme dík za vzorně pečlivé provedení tisku a velmi četných korektur, čímž byla práce redaktorů podstatně usnadněna.

J. Vojtěch. *F. Klokner.*

V Praze v červnu 1944.

OBSAH:

Str.

Předmluva 1

Obsah 3

I. Aritmetika a algebra 9
1. Mocniny 9
2. Odmocniny 10
3. Logaritmy 11
4. Binomická věta 12
5. Čísla komplexní (soujemná) 12
6. Kombinatorika 16
7. Determinanty 17
Pravidla o determinantech 18
8. Řada aritmetická a geometrická 19
9. Úrokový počet 20
a. Složené úrokování polhůtné (dekursivní) 20
b. Vzorce úrokového počtu pro kapitál 1 21
α. Úrokování jednoduché 22
β. Úrokování složené 22
10. Úměry 25
11. Rovnice algebraické 26
12. Rovnice druhého stupně (kvadratické) 28
a. Řešení algebraické 28
b. Řešení goniometrické 28
13. Rovnice třetího stupně (kubické) 29
a. Řešení algebraické 29
b. Řešení goniometrické 30
c. Řešení funkcemi hyperbolickými 30
d. Případ dvojnásobného kořene 31
14. Rovnice čtvrtého stupně (bikvadratické) 31
15. Rovnice reciproké 32
16. Rovnice binomické 32

II. Funkce goniometrické 33
1. Goniometrické funkce 33
2. Znamení funkcí ve čtvrtích 33
3. Funkce význačných úhlů 33
4. Funkce záporných úhlů 34
5. Převod funkcí do 1. čtvrti 34
6. Periodičnost goniometrických funkcí 34
7. Funkce téhož úhlu 35

8. Funkce dvou úhlů 35
9. Funkce násobku a poloviny úhlu 36
10. Mocniny sinu a kosinu 37
11. Funkce úhlů, jejichž součet $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ 38
12. Goniometrické součty 39
13. Goniometrické rovnice 39
14. Trigonometrie rovinná 40
a. Trojúhelník pravoúhlý 40
b. Trojúhelník kosoúhlý 41
c. Řešení kosoúhlého trojúhelníka 42
15. Trigonometrie sférická 43
a. Základní vzorce 44
b. Trojúhelník pravoúhlý 45
c. Řešení pravoúhlého trojúhelníka 46
d. Řešení kosoúhlého trojúhelníka 47

III. Funkce cyklometrické 48

IV. Funkce hyperbolické 49

V. Funkce hyperbolometrické 52

VI. Analytická geometrie v rovině 52
1. Bod a přímka v soustavě pravoúhlé 52
2. Transformace souřadnic 54
3. Projektivnost útvarů základních 56
4. Křivky druhého stupně (kuželosečky) 57
5. Kružnice 59
6. Elipsa a hyperbola 59
7. Elipsa 61
8. Hyperbola 61
9. Parabola 62

VII. Analytická geometrie v prostoru 63
1. Bod, přímka, rovina v pravoúhlé soustavě 63
a. Bod 63
b. Přímka 64
c. Rovina 66
2. Transformace souřadnic 68
3. Plochy v pravoúhlé soustavě 69
4. Plochy druhého stupně 69
5. Zvláštní druhy ploch 71

VIII. Počet diferenciální 73
1. Funkce a mezné hodnoty (limity) funkcí 73
2. Derivace a diferenciály 74
3. Pravidla o diferencování 75
4. Diferenciály elementárních funkcí 76
5. Vyšší derivace a diferenciály 77
6. Derivace a diferenciály funkcí několika proměnných . 78
7. Pomocné věty 80

8. Rozvinování funkcí v řady mocninové 80
9. Mocninové řady pro funkce elementární 81
a. Řada binomická 81
b. Řady exponenciální 82
c. Řady logaritmické 82
d. Řady pro funkce goniometrické, cyklometrické a hyperbolické 83
e. Jiné řady 84
10. Konvergence nekonečných řad 85
11. Počítání s malými čísly 86
12. Nekonečné součiny 87
13. Neurčité tvary 87
14. Maxima a minima (extrémní hodnoty) 88
15. Funkce závislé a nezávislé 90

IX. Počet integrální 91

A. Integrály neomezené (neurčité) 91
1. Definice a pomocné věty 91
2. Základní vzorce 92
3. Integrály funkcí racionálních 93
4. Integrace racionální funkce ryze lomené 94
5. Integrály funkcí iracionálních 95
6. Integrály binomické 96
7. Integrály funkcí transcendentních 96
8. Integrály funkcí goniometrických 97
9. Redukční vzorce 98
10. Integrály smíšených diferenciálů 98

B. Integrály omezené (určité) 99
1. Definice a pomocné věty 99
2. Některé omezené integrály a funkce 102
3. Integrální funkce vyjádřené řadou 106
4. Přibližný výpočet omezených integrálů 109
5. Integrály křivkové 111
6. Integrály dvojnásobné a trojnásobné 113
7. Vztahy integrálů prostorových a plošných 115
8. Rozvoj periodických funkcí v řadu Fourierovu 117
9. Fourierův integrál 119

X. Funkce komplexní proměnné 120

XI. Diferenciální geometrie 130
1. Křivky rovinné 130
2. Křivky prostorové 134
3. Plochy 138
4. Křivočaré souřadnice v prostoru 141
5. Obsahy rovinných ploch (kvadratura) 143
6. Délky křivek (rektifikace) 144
7. Povrchy těles (komplanace) 144
8. Objemy těles (kubatura) 145

XII. Diferenciální rovnice 147
A. Obyčejné diferenciální rovnice 147
1. Diferenciální rovnice 1. řádu 147
2. Diferenciální rovnice 2. řádu 153
3. Lineární diferenciální rovnice *n*-tého řádu 158
4. Simultánní (soudobé) diferenciální rovnice 161
5. Integrace řadami 163
B. Parciální diferenciální rovnice 172
1. Parciální diferenciální rovnice 1. řádu 172
2. Parciální diferenciální rovnice 2. řádu 175
3. Symbolický počet operátorový 179
XIII. Počet variační 180
XIV. Integrální rovnice 184
1. Integrální rovnice druhého druhu 184
2. Integrální rovnice prvního druhu 189
XV. Počet vektorový 191
1. Skaláry a vektory 191
2. Algebra. Základní úkony početní 192
3. Počet diferenciální 195
4. Počet integrální 201
5. Vektorová pole 203
6. Tensory 204
XVI. Počet diferenční 206
1. Diference 206
a. Diferenční pravidla a vzorce 207
b. Diference funkce dvou nezávisle proměnných. . . 208
2. Sumy 208
Sumační pravidla a vzorce 209
3. Interpolace 211
a. Různé intervaly 211
b. Stejné intervaly 212
4. Numerická derivace i integrace 214
5. Rovnice diferenční 215
XVII. Počet pravděpodobnosti 218
1. Pravděpodobnost „a priori“ 219
2. Pravděpodobnost „a posteriori“ 221
XVIII. Počet vyrovnávací 223
1. Theorie chyb 223
2. Vyrovnání pozorování přímých 227
a. Pozorování stejné přesnosti 227
b. Pozorování různé přesnosti 228
c. Dvojice pozorování 229
α. Dvojice stejné přesnosti 229
β. Dvojice různé přesnosti 230

3. Funkce pozorování (pozorování nepřímá) 230
Hromadění (šíření) chyb 230
4. Vyrovnání pozorování zprostředkujících při lineární závislosti neznámých 232
a. Pozorování stejné přesnosti 232
b. Pozorování různé přesnosti 236
5. Vyrovnání pozorování zprostředkujících při nelineární závislosti neznámých 238
6. Vyrovnání pozorování závislých 239
a. Převod na pozorování zprostředkující 239
b. Vyrovnání pozorování závislých korelátami . . . 240

XIX. Statistika 243
1. Statistické charakteristiky 244
2. Normální rozložení 245
3. Přirovnání daného rozložení k normálnímu 246
4. Nesouměrné rozložení 247
5. Korelace 248

XX. Methody praktické analysy 249
1. Výpočet a konstrukce racionální funkce celistvé . . . 249
2. Řešení rovnic algebraických i transcendentních . . . 251
3. Analysa empirických funkcí 254
4. Vyrovnání empirické řady 255
5. Harmonická analysa periodické funkce 256
6. Grafické diferencování a integrování. 259
7. Integrace diferenciálních rovnic 1. řádu 260
8. Grafická integrace diferenciálních rovnic 2. řádu . . 262

XXI. Nomografie 263
1. Funkční stupnice 263
2. Funkční sítě 265
3. Průsečíkové nomogramy pro vztahy tří proměnných . 267
a. Nomogramy kartesiánské 267
b. Nomogramy trojúhelníkové a hexagonální 269
4. Spojnicové nomogramy pro vztahy tří proměnných . 270
5. Spojnicové nomogramy pro vztahy čtyř proměnných . 273

XXII. Obvody a obsahy rovinných ploch 274

XXIII. Povrchy a objemy těles 283

XXIV. Křivky a konstrukce 290

A. Křivky 290
1. Kružnice 290
2. Elipsa 290
3. Hyperbola 293
4. Parabola 294
5. Křivky mocninové $y = Cx^n$ 297

6. Křivky cyklické (kotálnice) 299
a. Cykloida prostá 299
b. Cykloida zkrácená, cykloida prodloužená 300
c. Epicykloida a hypocykloida 300
d. Kardioida (srdcovka) 301
e. Asteroida 301
f. Epicykloida a hypocykloida zkrácená nebo prodloužená 302
g. Evolventa kružnice 302
h. Konstrukce středů křivosti křivek cyklických . . 303
7. Spirály 303
a. Archimedova spirála 303
b. Hyperbolická spirála 304
c. Logaritmická spirála 304
d. Sinové spirály 305
8. Klothoida 307
9. Křivka exponenciální (logistika) 308
10. Řetězovky 309
a. Obecná řetězovka 309
b. Řetězovka stálé pevnosti 311
c. Pružná řetězovka 311
11. Některé algebraické křivky 312
a. Kisoida Dioklova 312
b. Strofoida 312
c. Konchoida Nikomedova 313
d. Konchoida kružnice 313
12. Křivky sinové 314
13. Křivka tlumeného chvění 315
14. Křivky vývoje 316

B. Obecné konstrukce 319

XXV. Matematické pomůcky a stroje 320
1. Matematické tabulky 320
2. Logaritmické pravítko 321
3. Počítací a jiné stroje 323

Abecední seznam 325

I. Aritmetika a algebra.

Čísla *racionální* vzniknou z přirozené řady číselné 1, 2, 3, . . . sečítáním, odčítáním, násobením a dělením: jsou to kladná i záporná čísla celá, včetně nuly, zlomky obyčejné, desetinné konečné a periodické. *Nula nemůže býti dělitelem.*

Čísla *iracionální* jsou všechna jiná čísla, která nelze odvoditi z přirozené řady číselné čtyřmi základními úkony početními. Jsou to mezné hodnoty neperiodických desetinných zlomků s neomezeným počtem desetinných míst. Na př. $\sqrt{2}$, π.

Čísla racionální a iracionální zahrnuje *spojitá soustava čísel reálných*: jejím obrazem jest osa číselná s nulou v počátku. V soustavě rozlišujeme ještě:

Čísla *algebraická*, t. j. čísla, která mohou býti kořeny algebraické rovnice s racionálními součiniteli (na př. odmocniny); čísla *transcendentní*, která kořeny takových rovnic býti nemohou (na př. π, e).

Značí se: $>$ větší, $<$ menší, $\neq$ nerovno, $\approx$ přibližně rovno, $\equiv$ totožno.

$a>0$ číslo kladné; $a<0$ číslo záporné; ∞ proměnná, neomezeně rostoucí, $0<a<1$ kladný pravý zlomek; $|a|$ absolutní čís. hodnota (bez ohledu na znamení).

1. Mocniny.

(Zde značí k, m, n čísla celá kladná; $2k$ číslo sudé; $2k\pm1$ liché.)
Mocnina: $a^n = a\cdot a\cdot a\ldots$ (n-krát); a základ, n mocnitel (exponent).

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; **2.** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

3. $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$; $\dfrac{1}{a} = a^{-1}$; **4.** $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$;

5. $(a\,b)^m = a^m b^m$; **6.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{-m}$;

7. $(-a)^{2k} = +a^{2k}$; $(-a)^{2k+1} = -a^{2k+1}$;

8. $a^0 = 1$; $0^m = 0$; pro $a>1$ jest $a^\infty = \infty$, $a^{-\infty} = 0$.
Výrazy 0^0, ∞^0, 1^∞ jsou *neurčité tvary.*

9. $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; **10.** $(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;

11. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; **12.** $(a^3 \pm b^3) = (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;

13. $\dfrac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}$;

14. $\dfrac{a^{2k} - b^{2k}}{a\pm b} = a^{2k-1} \mp a^{2k-2}b + a^{2k-3}b^2 \mp \ldots \mp b^{2k-1}$;

15. $\dfrac{a^{2k+1}+b^{2k+1}}{a+b} = a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \ldots + b^{2k}$;

16. $\dfrac{a^{2k+1}-b^{2k+1}}{a-b} = a^{2k} + a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 + \ldots + b^{2k}$.

Rozdíl sudých mocnin jest dělitelný rozdílem i součtem mocnin prvých; rozdíl lichých mocnin jest dělitelný rozdílem, součet lichých součtem prvých.

2. Odmocniny.

Odmocnina: $\sqrt[n]{a} = c$ značí $a = c^n$; a odmocněnec, n odmocnitel, c kořen. (k, m, n, p, q jsou čísla celá kladná).

1. $\sqrt[n]{a^n} = a$;
2. $\sqrt[n]{0} = 0$;
3. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$;
4. $\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-\frac{1}{n}}$;
5. $\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{n}{m}}$;
6. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m:q]{a^{n:q}}$;
7. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$;
8. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = a^{\frac{1}{mn}}$;
9. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;
10. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;
11. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$;
12. $\sqrt{a} = \pm|\sqrt{a}|$;
13. $\sqrt[2k]{a} = \pm|\sqrt[2k]{a}|$;
14. $\sqrt[2k+1]{-a} = -|\sqrt[2k+1]{a}|$.

Sudá odmocnina z čísla záporného sluje *číslo imaginární;* t. zv. *imaginární jednotka* se značí $i = +\sqrt{-1}$ a je definována $i^2 = -1$.

15. $\sqrt{-a^2} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a^2} = \pm ia$;
16. $\sqrt[2k]{-a} = \sqrt[k]{i\sqrt{a}}$;
17. $i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$; $i^6 = -1$; ... $i^{4k+m} = i^m$; $i^0 = 1$;
18. $\dfrac{1}{i} = -i$; $\sqrt{i} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{-i} = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$.

19. $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a+b \pm 2\sqrt{ab}}$;

20. $\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2\,(a \pm \sqrt{a^2-b})}$;

21. $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}$;

22. $\sqrt{a^2 \pm b} \approx a \pm \dfrac{b}{2a}$; 23. $\sqrt[3]{a^3 \pm b} \approx a \pm \dfrac{b}{3a^2}$.

3. Logaritmy.

Je-li $a = b^c$, pak $c = \log_b a$ jest *logaritmus* čísla a při základu b.

1. Pro $b > 1$ jest

$$\log_b 0 = -\infty; \quad \log_b 1 = 0; \quad \log_b b = 1; \quad \log_b \infty = \infty;$$

2. $\log p \cdot q = \log p + \log q$; 3. $\log \dfrac{p}{q} = \log p - \log q$;

4. $\log a^n = n \log a$; 5. $\log \sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{n} \log a$;

6. $x \equiv b^{\log_b x}$; $x \equiv \log_b b^x$.

7. *Přirozený logaritmus* má základ $e = 2{,}718\,281\,828\,4590\ldots$

$$\log_e x = \log \text{nat}\, x = \ln x = \lg x; \qquad \lg e = 1.$$

Podle 6. platí totožnosti (identity)

$$x \equiv e^{\lg x}; \qquad x \equiv \lg e^x.$$

8. *Dekadický (briggický) logaritmus* má základ $b = 10$,

$$\log_{10} x = \log x; \qquad \log 10 = 1.$$

V desetinné soustavě lze libovolné kladné číslo vyjádřiti tvarem $n = 10^{\pm c} \cdot a$, kde je $1 < a < 10$, c číslo celé kladné nebo nula; jeho dekadický logaritmus

$$\log n = \pm c + \log a;$$

$\pm c$ sluje *charakteristika*, pravý desetinný zlomek $\log a$ *mantisa*.

9. $\log e = \dfrac{1}{\lg 10} = M = 0{,}434\,294\,48\ldots$ *modul soustavy dekadické;*

10. $\lg 10 = \dfrac{1}{\log e} = \dfrac{1}{M} = 2{,}302\,585\,09\ldots$ *modul soustavy přirozené.*

Vztah logaritmů soustavy přirozené a dekadické.

11. $\log x = \log \mathrm{e} \cdot \lg x = \mathrm{M} \lg x$; $\log x = 0{,}434\,294 \lg x$;

12. $\lg x = \lg 10 \cdot \log x = \frac{1}{\mathrm{M}} \log x$; $\lg x = 2{,}302\,585 \log x$.

4. Binomická věta.

Při celém kladném n jest

1. $(a \pm b)^n = a^n \pm \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \pm \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots + (\pm 1)^n b^n$;

symbolicky:

$$(a \pm b)^n = \sum (\pm 1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k; \quad k = 0, 1, 2, \ldots n.$$

2. Binomické koeficienty, obecně „n nad k“, se značí

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-[k-1])}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} = (n)_k.$$

3. Jmenovatel binom. koeficientů k *faktoriálně* neb *faktoriál* čísla k:

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (k-1) \cdot k = (k-1)!\, k.$$

Pro $k = 1$ plyne $0! = 1$.

Při celém kladném n, $k < n$ jest

4. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$; **5.** $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$;

6. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; **7.** $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} \frac{n+1}{n-k+1}$;

8. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$;

9. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \ldots + \binom{k}{k}$;

10. $(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Není-li n číslo celé kladné, přejde 1. v nekonečnou binomickou řadu.

5. Čísla komplexní (soujemná).

1. *Komplexní číslo* $a + \mathrm{i}b$ je složeno z reálných čísel a, b a imaginární jednotky $\mathrm{i} = +\sqrt{-1}$; a je část reálná, $\mathrm{i}b$ část imaginární.

2. $a + \mathrm{i}b = 0$ značí $a = 0$, $b = 0$;

$a + \mathrm{i}b = x + \mathrm{i}y$ $a = x$, $b = y$.

3. *Komplexní čísla sdružená* $a+ib$, $a-ib$ se liší jen znaménkem části imaginární.

4. *Absolutní hodnota* komplexního čísla sluje výraz

$$|a+ib| = |\sqrt{a^2+b^2}|.$$

5. *Normální tvar* komplexního čísla

$$z = x+iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi};$$

modul $r = |\sqrt{x^2+y^2}| = |z|$; *amplituda* $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \operatorname{arc} z$;

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}; \qquad \sin\varphi = \frac{y}{|z|}; \qquad e = 2{,}71828\ldots$$

Vzhledem k periodičnosti goniometrických funkcí

6. $z = x+iy = r[\cos(\varphi+2k\pi)+i\sin(\varphi+2k\pi)] = re^{i(\varphi+2k\pi)}$,

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

$k=0$ dává *hlavní* hodnotu komplexního čísla.

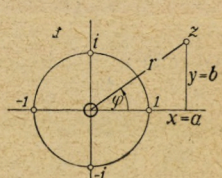
7. *Geometrický obraz* komplexního čísla (obr. 1) je *bod* z v rovině xy o souřadnicích x, y nebo vektor $\overrightarrow{Oz}$, délky r (absolutní hodnota čísla z, modul), který s osou $+x$ svírá úhel φ (amplituda) v míře obloukové.

K témuž bodu z dospějeme otočením vektoru o libovolný celý násobek úhlu 2π (viz vzorec 6.).

Komplexní čísla téže absolutní hodnoty zobrazují body kružnice středu O s poloměrem $r = |z|$. Čísla komplexní sdružená

$$z = x+iy, \qquad \bar{z} = x-iy$$

jsou zobrazena body ležícími souměrně k ose x.



Obr. 1.

Obrazem všech čísel: reálných, imaginárních a komplexních je *Gaußova číselná z-rovina;* osa x sluje osa čísel reálných, y osa čísel imaginárních.

8. *Eulerův vzorec:* $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$;

$$\cos\varphi - i\sin\varphi = e^{-i\varphi}.$$

9. $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$; **10.** $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$;

11. $\frac{1}{\cos\varphi \pm i\sin\varphi} = \cos\varphi \mp i\sin\varphi = e^{\mp i\varphi}$.

Pro $\varphi = 2k\pi, (2k+1)\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{2}, \varphi+2k\pi$ plynou z **8.** vzorce:

12. $\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1 = e^{2ki\pi}$;

13. $\cos(2k+1)\pi + i\sin(2k+1)\pi = -1 = e^{i(2k+1)\pi}$;

14. $\pm i = e^{\pm i\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}$; hlav. hodn. $(k=0)$: $\pm i = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$;

15. $i^i = e^{-\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}$; „ „ „ $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0{,}20788\ldots$;

16. $e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+2k\pi)}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (viz vzorec **5.** a **6.**)

17. *Moivreova věta.* Pro každé racionální m platí

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi .$$

18. $\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$;

$k = 0, 1, \ldots (n-1)$

19. $\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$.

Na př. $\sqrt{-1} = +i, \quad -i$; (podle **19**, je-li $n=2$, $k=0,1$)

$$\sqrt[3]{-1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad -1, \quad \frac{1-i\sqrt{3}}{2};$$

$$\sqrt[4]{-1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Obecně n-tá odmocnina má n hodnot

$$\sqrt[n]{\pm a} = \left|\sqrt[n]{a}\right| \cdot \sqrt[n]{\pm 1}.$$

20. *Mocnina komplexního čísla* (viz **6.**)

$$z^n = |r^n| \cdot [\cos n\,(\varphi + 2k\pi) + i\sin n\,(\varphi + 2k\pi)].$$

Mocniny imaginární jednotky i viz str. 10 podle **17.**

21. *Přirozená funkce exponenciální*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{i(y+2k\pi)} = e^{z+2ki\pi}$$

má imaginární periodu $2\pi i$. Absolutní hodnota čísla

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \quad \text{je} \quad |e^{iy}| = 1;$$

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \quad \text{je} \quad |e^z| = e^x.$$

22. *Logaritmus záporného čísla.* Podle **13.**

$$\lg(-1) = i(2k+1)\pi;$$

$$\lg(-a) = \lg a + \lg(-1) = \lg a + i(2k+1)\pi.$$

23. *Logaritmus komplexního čísla.* Podle **6.**

$$\lg(x+\mathrm{i}y) = \lg\left|\sqrt{x^2+y^2}\right| + \mathrm{i}(\varphi + 2k\pi);$$

hlavní hodnota logaritmu (pro $k=0$)

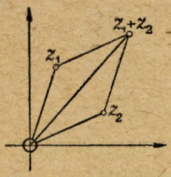
$$\lg z = \lg|z| + \mathrm{i}\varphi.$$

Je-li $y=0$, $x>0$, je $\varphi=0$; $\quad \lg x = \lg x + 2k\mathrm{i}\pi$;

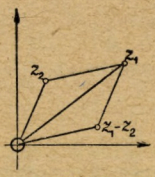
„ $y=0$, $x<0$, „ $\varphi=\pi$; $\quad \lg x = \lg|x| + \mathrm{i}(2k+1)\pi$.

Logaritmus kladného reálného čísla má nekonečný počet hodnot, z nichž jediná (hlavní hodnota pro $k=0$) je reálná. Logaritmus záporného a komplexního čísla má vechny hodnoty imaginární.

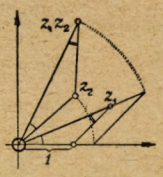
24. *Geometrické konstrukce.* Součet, rozdíl, součin a podíl dvou komplexních čísel je sestrojen v obr. 2., 3., 4. a 5.



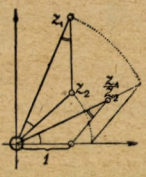
Obr. 2.



Obr. 3.



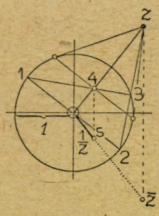
Obr. 4.



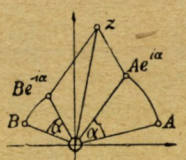
Obr. 5.

Součet a rozdíl $z_1 \pm z_2$ je v konstrukci rovnoběžníka. Součin $z_1 \cdot z_2$ značí otočení bodu z_1 o úhel φ_2 a prodloužení vektoru na délku $r = |z_1| \cdot |z_2|$; podíl $z_1 : z_2$ otočení bodu z_1 o úhel $-\varphi_2$ a zkrácení vektoru na $r = |z_1| : |z_2|$.

25. *Převrácená hodnota* komplexního čísla (obr. 6.). K danému bodu z najdeme kruhovou inversí ($r=1$) v pořadí, označeném čísly, bod 4; s ním souměrně sdružený k ose x je hledaný bod $1:z$.



Obr. 6.



Obr. 7.

26. *Odmocnina* $\sqrt[n]{z}$ komplexního čísla z s amplitudou φ je zobrazena vrcholy pravidelného n-úhelníka na kružnici o poloměru $r = \left|\sqrt[n]{z}\right|$; první vrchol z_0 má amplitudu $\varphi:n$. O všech platí:

$$\Sigma z_k = z_0 + z_1 + z_2 + \ldots z_{n-1} = 0;$$

$$\Sigma \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = 0; \qquad \Sigma \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = 0.$$

27. Bod A, daný komplexním číslem, se otočí kolem počátku o úhel $\pm\alpha$ do polohy $Ae^{\pm i\alpha}$; o úhel $\alpha \pm 90^0$ do polohy $\pm Aie^{i\alpha}$. Násobení komplexního čísla (bodu) A faktorem i značí otočení vektoru OA kolem počátku kladným smyslem o 90^0; podle **14.**

$$e^{i\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right)} = \pm ie^{i\alpha}.$$

28. Je-li $Ae^{i\alpha} = Be^{i\beta}$, jest $A = B$; $\alpha = \beta$.

V obr. 7. je zobrazen součet

$$z = Ae^{i\alpha} + Be^{-i\alpha}.$$

6. Kombinatorika.

1. Permutace n různých prvků.

Skupiny n prvků, přestavených ve všem možném pořadí; počet permutací

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1).n = n!$$

V přirozeném pořadí 1, 2, 3,...n (první permutace) vznikne *inverse*, octne-li se vyšší prvek před nižším. V poslední permutaci n, $n-1$,...3, 2, 1 je počet inversí $n(n-1):2$.

Permutace je *sudá* při sudém, *lichá* při lichém počtu inversí.

Výměna dvou prvků sluje *transposice*; jednou transposicí se změní počet inversí o lichý počet.

Permutace *cyklická* (kruh s prvky na obvodu se pootáčí týmž smyslem) sluje cyklická záměna: k, $k+1$, $k+2$, ... $n-1$, n, 1, 2, 3, ..., $k-1$.

2. Permutace n prvků, z nichž jest stejných α druhu A, β druhu B, ... ν druhu N.

Skupiny n prvků, přestavených ve všem možném pořadí; počet permutací

$$P'_n(\alpha, \beta, \ldots \nu) = \frac{n!}{\alpha!\,\beta! \ldots \nu!}.$$

3. Kombinace k-té třídy z n prvků bez opakování.

Skupiny k prvků bez ohledu na pořadí ve skupině; počet kombinací

$$K_{n|k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

4. Kombinace k-té třídy z n prvků s opakováním.

Skupiny k prvků, v nichž prvek se může opakovati až k-krát bez ohledu na pořadí; počet kombinací

$$K'_{n|k} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{1 \cdot 2 \ldots k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}.$$

5. Variace k-té třídy z n prvků bez opakování.

Permutované kombinace k-té třídy čili skupiny k prvků ve všem možném pořadí; počet variací

$$V_{n/k} = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-k+1) = k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

6. Variace k-té třídy z n prvků s opakováním.

Permutované kombinace k-té třídy s opakováním čili skupiny k prvků, v nichž prvek se může opakovati až k-krát, ve všem možném pořadí; počet variací

$$V'_{n/k} = n^k.$$

7. Determinanty.

1. *Determinant* n-tého stupně

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{12}\,a_{22}\ldots a_{nn} = |a_{ik}| \quad (i,k = 1,2,\ldots n)$$

má n^2 prvků, sestavených v n řádků (první index) a n sloupců (druhý index); $a_{11}\,a_{22}\ldots a_{nn}$ je hlavní příčka.

Determinant je součet $n!$ součinů, vzniklých z hlavní příčky permutováním druhých indexů; součiny jsou kladné při sudém, záporné při lichém počtu inversí.

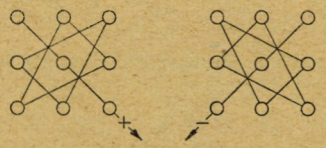
2. *Determinant* 2. stupně

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1\,b_2 - a_2\,b_1.$$

3. *Determinant* 3. stupně

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{cases} a_1\,b_2\,c_3 + a_2\,b_3\,c_1 + a_3\,b_1\,c_2 \\ -a_3\,b_2\,c_1 - a_2\,b_1\,c_2 - a_1\,b_3\,c_2 \end{cases}$$

vyčíslíme podle schematu:



součiny kladné; součiny záporné.

Pravidla o determinantech.

1. Hodnota determinantu se nemění, vyměníme-li řádky za sloupce nebo naopak.

2. Výměnou dvou rovnoběžných řad (řádků neb sloupců) se změní znamení determinantu.

3. Jsou-li dvě rovnoběžné řady stejné, jest determinant nula.

4. Determinant se násobí, násobíme-li všecky prvky jedné řady.

5. Hodnota determinantu se nemění, přičteme-li k prvkům některé řady libovolný násobek jiné řady rovnoběžné.

V determinantu n-tého stupně přísluší každému prvku a_{ik} *subdeterminant* (minor) a_{ik} stupně $(n-1)$-ho. Vznikne škrtnutím i-tého řádku a k-tého sloupce; jeho znamení určíme podle počtu kroků od prvku a_{ik} k hlavní příčce: při sudém +, při lichém −.

Na př. v determinantu 4. stupně

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

jsou prvkům a_1, a_2, c_4 přidruženy subdeterminanty

$$\alpha_1 = + \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}; \quad \alpha_2 = - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}; \quad \gamma_4 = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

6. Determinant se rovná součtu součinů z prvků některé řady a příslušných k nim subdeterminantů.

Hořejší determinant 4. stupně, rozvedený na př. podle prvků prvního řádku

$$D = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4$$

nebo podle elementů druhého sloupce

$$D = a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 + d_2\delta_2$$

7. Součet součinů z prvků některé řady a subdeterminantů, příslušných k prvkům jiné řady rovnoběžné, je nula.

8. V determinantu, jehož hodnota je nula, jsou subdeterminanty prvků rovnoběžných řad úměrné.

9. Determinant stupně n-tého je řádu r-tého, když aspoň jeden subdeterminant r-tého stupně není nulou, všechny vyššího stupně jsou však nulami.

10. Součin dvou determinantů n-tého stupně je determinant téhož stupně, jehož prvky v jednotlivých řadách jsou součty součinů z prvků téže řady jednoho a prvků všech řad druhého determinantu. Na př.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 & a_1\beta_1 + a_2\beta_2 \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

11. *Matice* (matrix) sluje soustava $m.n$ elementů v m řádcích a n sloupcích. Na př.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Matice je řádu r-tého, je-li r nejvyšší stupeň determinantu z ní utvořeného, který není nulou.

12. *Lagrangeova identita*:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots)^2$$
$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + \ldots$$

B. Bydžovský: Základy teorie determinantů a matic a jich užití, 1930.
G. Dostor: Éléments de la théorie des déterminants, 3. vyd. 1921.
E. Netto: Die Determinanten, 2. vyd. 1925.
G. Kowalewski: Einführung in die Determinantentheorie, 2. vyd. 1925.

8. Řada aritmetická a geometrická.

Formální součet zákonité posloupnosti čísel $u_1, u_2, \ldots u_n$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} u_\nu$$

(suma u_ν od $\nu = 1$ do $\nu = n$) sluje řada.

1. *Řada aritmetická* 1. stupně.

$$a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + [a + (n-1)d] = \sum_{1}^{n} [a + (\nu - 1)d].$$

Rozdíl kteréhokoli členu řady a členu předcházejícího je stálý,

$$\text{diference:} \quad u_\nu - u_{\nu-1} = d = \text{konst.}$$

2. Člen n-tý: $u_n = a + (n-1)d$; člen první: $u_1 = a$.

3. Součet prvých n členů řady aritmetické

$$s_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}[2n + (n-1)d].$$

4. Součet přirozené řady čísel

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(1+n).$$

5. *Řada geometrická*

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a \sum_{1}^{n} q^{\nu-1}.$$

Podíl kteréhokoli členu řady a členu předcházejícího je stálý,

$$\text{kvocient:} \quad \frac{u_\nu}{u_{\nu-1}} = q = \text{konst.}$$

6. Člen n-tý: $u_n = aq^{n-1}$; člen první: $u_1 = aq^0 = a$.

7. Součet prvých n členů řady geometrické

$$s_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Součet geometrické řady ($a = 1$, $q = x$)

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

8. Součet nekonečné řady geometrické, je-li $|q| < 1$,

$$s_\infty = a + aq + aq^2 + \ldots \text{ in inf.} = a\frac{1}{1-q}.$$

(Zkratka in inf. značí in infinitum, do nekonečna).

9. Je-li $|x| < 1$, jest

$$\sum_0^\infty x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x};$$

$$\sum_0^\infty (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{1}{1+x}.$$

10. *Řada složená* vznikne znásobením stejnolehlých členů řady aritmetické a geometrické. Součet n členů řady

$$a\alpha + (a+d)\alpha q + (a+2d)\alpha q^2 + \ldots + [a+(n-1)d]\alpha q^{n-1}$$

$$s_n = a\alpha\frac{1-q^n}{1-q} + \alpha dq\left[\frac{1-q^{n-1}}{(1-q)^2} - \frac{(n-1)q^{n-1}}{1-q}\right].$$

11. Součet řady

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n = \frac{x}{1-x}\left[\frac{1-x^n}{1-x} - nx^n\right].$$

12. Při $|x| < 1$ je součet nekonečné řady

$$\sum_1^\infty n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

9. Úrokový počet.

a. Složené úrokování polhůtné (dekursivní).

(Viz Matematické a statické tabulky. Díl I., str. 60–62.)

Úrok se připisuje ke kapitálu koncem každého úrokovacího období (lhůty).

1. *Konečná jistina* K_n, na kterou vzroste kapitál K_0, uložený na $p\,\%$, za n úrokovacích období,

$$K_n = K_0 r^n; \qquad \textit{úročitel } r^n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

2. *Diskontovaná jistina.* Dnešní hodnota jistiny K_n, splatné za n úrokovacích období,

$$K_0 = K_n r^{-n}.$$

3. *Úspora.* Pravidelným ukládáním vkladu *a počátkem* každého období se uspoří za n období

$$V_n = ar\frac{r^n - 1}{r - 1} = a\,s_{\overline{n}|}; \qquad \textit{střadatel } s_{\overline{n}|} = r\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

4. *Dočasný důchod.* Jistina, která uložena počátkem prvního období dává *koncem* každého dalšího období n-krát dočasný důchod α, čili počáteční hodnota dočasného důchodu

$$D_n = \alpha \frac{r^n - 1}{r^n (r - 1)} = \alpha\, a_{\overline{n}|}\,; \quad \textit{zásobitel} \quad a_{\overline{n}|} = \frac{r^n - 1}{r^n (r - 1)}\,.$$

5. *Odložený trvalý důchod.* Počáteční hodnota trvalého důchodu u, odloženého o m období

$${}_{m|}D_{\infty} = \frac{100\,u}{r^m p}\,.$$

6. *Úmor (amortisace).* Dluh K se uhradí za n období, platí-li se *koncem* každého úrokového období stálá částka čili *anuita* α.

$$\alpha = Kr^n \frac{r - 1}{r^n - 1} = K \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|}}\,; \quad \textit{umořovatel} \quad \frac{1}{a_{\overline{n}|}} = r^n \frac{r - 1}{r^n - 1}\,,$$

jeho 100-násobek $A_n = 100 : a_{\overline{n}|}$.

(*Stálá anuita = úrok ze zbývajícího dluhu + splátka na dluh.*)

K výpočtu úrokového procenta při dluhu K a anuitě α slouží tabulka *Achardova*.

Anuita pro amortisaci dluhu 100 za n lhůt. Je-li p úrokové, u_n umořovací procento, jest anuita v procentech dluhu $A_n = p + u_n$;

$$A_n = r^n \frac{p}{r^n - 1}\,; \qquad \text{umořovací procento } u_n = \frac{p}{r^n - 1}\,.$$

7. *Doba úmoru.* Počet lhůt, v nichž dluh zaniká

$$n = \frac{\log [\alpha - \log [\alpha - K(r - 1)]}{\log r} = \frac{\log (p + u_n) - \log u_n}{\log r}\,.$$

8. *Zbytek dluhu* po zaplacení m anuit α

$$Z = Kr^m - \alpha \frac{r^m - 1}{r - 1}\,.$$

b. Vzorce úrokového počtu pro kapitál 1.

(Se symbolikou běžnou v politické aritmetice.)

Úrokování dekursivní, polhůtné.

Úrok se přičítá ke kapitálu *koncem* úrokovacího období.

Úrok z kapitálu 1 při dekursivních p_d % za jedno období

$$\textit{úroková míra } i = \frac{p_d}{100}\,.$$

Úrokování anticipativní, předlhůtné.

Úrok se přičítá ke kapitálu *začátkem* úrokovacího období.

Úrok z kapitálu 1 při anticipativních p_a % za jedno období

$$\textit{úroková míra } \mathbf{i} = \frac{p_a}{100}\,.$$

α. Úrokování jednoduché.

1. *Kapitálová jednotka*, splatná začátkem úrokovacího období, vzroste za jedno období na

$$1 + i; \qquad 1 + \frac{\mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}} = \frac{1}{1 - \mathbf{i}}.$$

2. *Kapitálová jednotka*, splatná začátkem prvního období, vzroste za n úrokovacích období na

$$1 + in; \qquad 1 + \frac{\mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}} n.$$

3. *Dnešní hodnota* kapitálové jednotky, splatné za n úrokovacích období,

$$\frac{1}{1 + in}; \qquad \left(1 + \frac{\mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}} n\right)^{-1}.$$

β. Úrokování složené.

1. *Konečná hodnota* kapitálové jednotky, splatné začátkem prvního období, za n období

$$(1 + i)^n = r^n \qquad \textit{úročitel} \qquad \left(\frac{1}{1 - \mathbf{i}}\right)^n = \mathbf{r}^n.$$

2. *Dnešní hodnota* kapitálové jednotky, splatné za n úrokovacích období,

$$(1 + i)^{-n} = r^{-n} \qquad \textit{odúročitel} \qquad (1 - \mathbf{i})^n = \mathbf{r}^{-n}.$$

3. *Konečná hodnota*, na kterou kapitál 1, splatný začátkem prvního úrokovacího období, vzroste za $n + \mu$ období, kde n je číslo celé, μ pravý zlomek,

$$(1 + i)^n (1 + i\mu); \qquad \left(\frac{1}{1 - \mathbf{i}}\right)^n \left(1 + \frac{\mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}} \mu\right).$$

4. *Konečná hodnota*, na kterou kapitál 1, splatný začátkem prvního úrokovacího období, vzroste za 1 rok, je-li roční, t. zv. jmenovitá čili

nominální, úroková míra j_m, *nominální, úroková míra* $\mathbf{j}_m$,

m počet úrokovacích období za jeden rok:

$$\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m; \qquad \left(1 - \frac{\mathbf{j}_m}{m}\right)^{-m}.$$

Konečná hodnota za n roků

$$\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{mn}; \qquad \left(1 - \frac{\mathbf{j}_m}{m}\right)^{-mn}.$$

5. *Skutečná (efektivní) roční úroková míra* i (**i**) z dané nominální j_m ($\mathbf{j}_m$) a naopak se vypočte podle vzorců

$$1+i=\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m; \qquad 1-\mathbf{i}=\left(1-\frac{\mathbf{j}_m}{m}\right)^m,$$

kde m značí počet úrokovacích období za jeden rok.

6. *Nepřetržité úrokování.* Rostoucím bez omezení počtem lhůt (lim $m=\infty$) stává se úrokovací období nekonečně malým. Kapitálová jednotka, splatná začátkem prvního roku, vzroste za n let na

$$e^{\delta n},$$

kde $e=2{,}71828\ldots$ jest základ přirozených logaritmů, δ roční stálá č. *instantanní úroková míra*,

$$\delta=j_\infty; \qquad \delta=\mathbf{j}_\infty.$$

Efektivní úroková míra i nebo **i** z dané instantanní δ a naopak se vypočtou podle vzorců

$$1+i=e^\delta; \qquad 1-\mathbf{i}=e^{-\delta}.$$

Z řady exponenciální:

$$i=\delta+\frac{\delta^2}{2!}+\frac{\delta^3}{3!}+\ldots; \qquad \mathbf{i}=\delta-\frac{\delta^2}{2!}+\frac{\delta^3}{3!}-\ldots;$$

z řady logaritmické:

$$\delta=i-\frac{i^2}{2}+\frac{i^3}{3}-\ldots; \qquad \delta=1+\frac{\mathbf{i}^2}{2}+\frac{\mathbf{i}^3}{3}+\ldots$$

7. *Výslední hodnota* periodických jednotkových vkladů, ukládaných *koncem* každého úrokovacího období (*střadatel*),

$$s_{\overline{n}|}^{(i)}=\sum_0^{n-1}(1+i)^k; \qquad s_{\overline{n}|}^{(\mathbf{i})}=\sum_0^{n-1}\left(\frac{1}{1-\mathbf{i}}\right)^k;$$

začátkem každého úrokovacího období,

$$s_{\overline{n}|}^{(i)}=\sum_1^{n}(1+i)^k; \qquad s_{\overline{n}|}^{(\mathbf{i})}=\sum_1^{n}\left(\frac{1}{1-\mathbf{i}}\right)^k=\frac{1}{1-\mathbf{i}}\,s_{\overline{n}|}^{(\mathbf{i})}.$$

8. *Dnešní hodnota* periodických jednotkových vkladů, ukládaných *koncem* každého úrokovacího období (*zásobitel*),

$$a_{\overline{n}|}^{(i)}=\sum_1^{n}\left(\frac{1}{1+i}\right)^k=\frac{1}{(1+i)^n}\,s_{\overline{n}|}^{(i)}; \qquad a_{\overline{n}|}^{(\mathbf{i})}=\sum_1^{n}(1-\mathbf{i})^n=(1-\mathbf{i})^n\,s_{\overline{n}|}^{(\mathbf{i})};$$

začátkem každého úrokovacího období

$$\mathfrak{a}^{(i)}_{\overline{n}|} = \sum_{0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+i}\right)^k = (1+i)\, a^{(i)}_{\overline{n}|}; \qquad \mathfrak{a}^{(\mathbf{i})}_{\overline{n}|} = \sum_{0}^{n-1} (1-\mathbf{i})^k = \frac{1}{1-\mathbf{i}}\, a^{(\mathbf{i})}_{\overline{n}|}.$$

9. *Výslední hodnota m* periodických jednotkových vkladů, je-li jedno ukládací období rovno μ období úrokovacích a vklady jsou ukládány *koncem* ukládacích období,

$$\sum_{0}^{m-1} (1+i)^{\mu k}; \qquad \sum_{0}^{m-1} \left(\frac{1}{1-\mathbf{i}}\right)^{\mu k};$$

začátkem ukládacích období

$$\sum_{1}^{m} (1+i)^{\mu k}; \qquad \sum_{1}^{m} \left(\frac{1}{1-\mathbf{i}}\right)^{\mu k}.$$

10. *Dnešní hodnota m* periodických jednotkových vkladů, je-li jedno ukládací období rovno μ období úrokovacích a vklady jsou ukládány *koncem* ukládacích období,

$$\sum_{1}^{m} \left(\frac{1}{1+i}\right)^{\mu k}; \qquad \sum_{1}^{m} (1-\mathbf{i})^{\mu k};$$

začátkem ukládacích období

$$\sum_{0}^{m-1} \left(\frac{1}{1+i}\right)^{\mu k}; \qquad \sum_{0}^{m-1} (1-\mathbf{i})^{\mu k}.$$

11. *Výslední hodnota nμ* periodických jednotkových vkladů, je-li jedno období úrokovací rovno μ období ukládacích a vklady jsou ukládány *koncem* ukládacích období,

$$\left(\mu + \frac{\mu-1}{2}\, i\right) s^{(i)}_{\overline{n}|}; \qquad \left(\mu + \frac{\mu-1}{2}\, \frac{\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}\right) s^{(\mathbf{i})}_{\overline{n}|};$$

začátkem ukládacích období

$$\left[\mu + \frac{\mu+1}{2}\, i\right] s^{(i)}_{\overline{n}|}; \qquad \left[\mu + \frac{\mu+1}{1}\, \frac{\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}\right] s^{(\mathbf{i})}_{\overline{n}|}$$

12. *Dnešní hodnota nμ* periodických jednotkových vkladů, je-li jedno období úrokové rovno μ období ukládacích a vklady jsou ukládány *koncem* ukládacích období,

$$\left(\mu + \frac{\mu-1}{2}\, i\right) a^{(i)}_{\overline{n}|}; \qquad \left(\mu + \frac{\mu-1}{2}\, \frac{\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}\right) a^{(\mathbf{i})}_{\overline{n}|};$$

začátkem ukládacích období

$$\left[\mu + \frac{\mu+1}{2}\, i\right] a_{\overline{n}|}^{(i)}; \qquad \left[\mu + \frac{\mu+1}{2}\, \frac{\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}\right] a_{\overline{n}|}^{(\mathbf{i})}.$$

J. Svoboda: Politická arithmetika, 1926.
J. Ježek: Příručka kupecké, finanční a pojistné aritmetiky. I., 2. vyd. 1938.
V. Frida – A. Pížl: Tabulky k aritmetice finanční a pojistné, 4. vyd. 1942.
K. Tichý – J. Svoboda: Úrokové tabulky k vypočítávání slož. úroků, hodnot periodických vkladů, anuit i důchodů a umořovacích plánů, I. (návod), II. (tabulky), 1931.

10. Úměry.

1. *Veličiny přímo úměrné* mají stálý podíl: $\frac{a_k}{b_k} = q$;

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2; \qquad a_1 : a_2 = b_1 : b_2; \qquad a_1 b_2 = a_2 b_1.$$

2. *Veličiny nepřímo úměrné* mají stálý součin: $a_k b_k = p$;

$$a_1 : a_2 = \frac{1}{b_1} : \frac{1}{b_2}; \qquad a_1 : a_2 = b_2 : b_1; \qquad a_1 b_1 = a_2 b_2.$$

3. Je-li $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, jest $\frac{\alpha A + \beta B}{\gamma A + \delta B} = \frac{\alpha C + \beta D}{\gamma C + \delta D}$.

Dvě libovolná aritmetická spojení členů levé strany jsou v témže poměru jako analogická spojení členů strany pravé.

4. *Z rovnosti poměrů*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt[r]{\alpha_1 a_1^r + \alpha_2 a_2^r + \ldots + \alpha_n a_n^r}}{\sqrt[r]{\alpha_1 b_1^r + \alpha_2 b_2^r + \ldots + \alpha_n b_n^r}}$$

plyne *postupná úměra*

$$a_1 : a_2 : \ldots : a_n : \sqrt[r]{\Sigma \alpha_k a_k^r} = b_1 : b_2 : \ldots : b_n : \sqrt[r]{\Sigma \alpha_k b_k^r}$$

při libovolných α_k, r. Pro $\alpha_k = 1$, $r = 2$,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}}.$$

5. *Koeficienty homogenní rovnice* $ax + by + cz = 0$ (všechny členy téhož rozměru) možno nahraditi čísly úměrnými: je-li

$$a : b : c = \alpha : \beta : \gamma \quad \text{čili} \quad \frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} = q,$$

je zde též $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

Knihovna

Průměry n čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$:

6. *Aritmetický průměr* $A = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

7. *Geometrický průměr* $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

8. *Harmonický průměr*

$$H = n : \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right).$$

9. $A \geqq G \geqq H$.

11. Rovnice algebraické.

1. *Základní věta algebry.* Každá algebraická rovnice n-tého stupně

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

s reálnými koeficienty a neznámou x má n kořenů $x = x_1, x_2, \ldots x_n$, které mohou býti reálné nebo komplexní sdružené, různé nebo se opakující (násobné). Mnohočlen (polynom) $f(x)$, racionální celistvá funkce n-tého stupně, dá se rozložiti v součin n lineárních faktorů

$$f(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n);$$

čísla $x_1, x_2, \ldots x_n$, t. j. kořeny rovnice $f(x) = 0$, slují nulová místa funkce $f(x)$.

2. Dělením $a_0 \neq 0$ přejde rovnice na tvar normální

$$x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} x + b_n = 0,$$

z níž substitucí $x = \xi - \dfrac{b_1}{n}$ vymizí druhý nejvyšší člen.

Algebraicky, t. j. odmocninami, možno řešiti — mimo zvláštní případy — rovnice nejvýše 4. stupně.

3. *Soustava n lineárních nehomogenních rovnic* o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned} \qquad (1)$$

(absolutní členy na pravé straně nejsou vesměs nuly) má řešení, jestliže *determinant soustavy*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

není nula. Kořeny soustavy (1) jsou podíly determinantů

$$x_k = \frac{D_k}{D}; \qquad D \neq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots n. \tag{3}$$

Determinant D_k v čitateli plyne z determinantu soustavy D, kde nahradíme k-tý sloupec sloupcem pravé strany $b_1, b_2, \ldots b_n$.

Je-li $D = 0$, $D_k \neq 0$, rovnice si odporují.

Je-li $D = 0$, $D_k = 0$, jsou rovnice na sobě závislé.

4. *Soustava n lineárních homogenních rovnic* (t. j. bez prostých členů) o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

má pouze jedno (triviální) řešení

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = 0; \qquad \ldots x_n = 0; \qquad D \neq 0.$$

5. *Soustava lineárních homogenních rovnic* má krom triviálního i jiné řešení, když determinant soustavy (2) vymizí. Rovnice

$$D = 0 \tag{5}$$

je výsledkem *eliminace* (vyloučení) *neznámých* z dané soustavy.

Je-li $D = 0$ řádu $(n-1)$-ho, t. j. nejsou-li všecky subdeterminanty α_{ik} stupně $(n-1)$-ho nulami, je soustavou dán poměr neznámých; při libovolném i (index řádku) jest

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = \alpha_{i1} : \alpha_{i2} : \ldots : \alpha_{in}. \tag{6}$$

Soustava je jednoduše neurčitá; jednu neznámou možno zvoliti.

Je-li $D = 0$ řádu $(n-2)$-ho, lze $n-2$ neznámé vyjádřiti lineárně dvěma zbývajícími; soustava je dvojnásob neurčitá, dvě neznámé možno zvoliti.

Soustava n nehomogenních rovnic o $n-1$ neznámých, plynoucí z rovnic (4) pro $x_n = 1$, je v platnosti, když determinant z koeficientů a absolutních členů se rovná nule.

6. *Soustava n—1 homogenních rovnic* o n neznámých platí vždy pro hodnoty, jež nejsou vesměs nuly. Poměr neznámých dán je poměrem determinantů matice z koeficientů soustavy.

7. *Resultant.* Aby dvě rovnice

$$f(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0,$$

$$g(x) \equiv b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n = 0$$

měly aspoň jeden společný kořen, musí jejich t. zv. resultant R_{fg} rovnati se nule:

$$R_{fg} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \dots a_m & 0 & \dots 0 \\ 0 & a_0 \dots a_{m-1} & a_m & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_0 & b_1 \dots b_n & 0 & \dots 0 \\ 0 & b_0 \dots b_{n-1} & b_n & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} n \text{ řádků} \\ = 0 \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} m \text{ řádků} \end{matrix}$$

8. *Diskriminant* rovnice $f(x) = 0$ je resultantem rovnic

$$f(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

$$f'(x) \equiv m a_0 x^{m-1} + (m-1) a_1 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} = 0.$$

Rovnice $f(x) = 0$ má (aspoň) dvojnásobný kořen, je-li její diskriminant roven nule.

9. *Věta Bézoutova.* Dvě rovnice o dvou neznámých stupňů m-tého a n-tého mají obecně $m \cdot n$ dvojic kořenů, které mohou býti reálné nebo imaginární, po případě i nekonečně velké.

12. Rovnice druhého stupně (kvadratické).

a. Řešení algebraické.

1. $ax^2 + bx + c = 0$; $\quad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

při sudém b $\quad x_{1,2} = \dfrac{-b:2 \pm \sqrt{(b:2)^2 - ac}}{a}$;

2. $x^2 + px + q = 0$; $\quad x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$.

b. Řešení goniometrické.

Pro logaritmický výpočet kořenů rovnice

a) $\quad x^2 \pm px - q = 0$ $\quad$ klademe $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{2\sqrt{q}}{|p|}$

a určíme ostrý úhel φ;

$$x_1 = \pm \sqrt{q} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}; \qquad x_2 = \mp \sqrt{q} \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}.$$

Podle dané rovnice platí buď horní nebo dolní znamení.

b) $x^2 \pm px + q = 0$; klademe $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{|p|}$

a určíme ostrý úhel φ;

$$x_1 = \mp\sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}; \qquad x_2 = \mp\sqrt{q}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\varphi}{2}.$$

c) Je-li $\sin\varphi > 1$, jsou kořeny imaginární. Klademe

$$\cos\psi = \mp\frac{p}{2\sqrt{q}}$$

a určíme úhel ψ mezi 0^0 a 180^0;

$$x_{1,2} = \sqrt{q}\,(\cos\psi \pm \mathrm{i}\sin\psi).$$

Kontrola. Pro kořeny x_1, x_2 rovnice $x^2 + px + q = 0$ platí

$$x_1 + x_2 = -p; \qquad x_1 \cdot x_2 = q.$$

13. Rovnice třetího stupně (kubické).

a. Řešení algebraické.

Z normální rovnice

$$X^3 + aX^2 + bX + c = 0 \quad \text{substitucí } X = x - \frac{a}{3}$$

plyne rovnice redukovaná (bez kvadratického členu)

$$x^3 + px + q = 0, \quad \text{kde } p = b - \frac{a^2}{3}, \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c.$$

Kořeny redukované rovnice podává vzorec *Cardanův:*

$$x_1 = A + B; \quad x_2 = \alpha_1 A + \alpha_2 B; \quad x_3 = \alpha_2 A + \alpha_1 B,$$

kde $A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$, $B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$,

$$\alpha_1 = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \qquad \alpha_2 = \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

Kořeny původní rovnice jsou $X = x - \frac{a}{3}$.

Je-li výraz pod druhou odmocninou záporný, mají všecky tři kořeny, ač reálné, komplexní tvar (casus irreducibilis); pak volíme řešení goniometrické.

b. Řešení goniometrické.

V redukované rovnici

$$x^3 - px \pm q = 0 \text{ (s kladnými } p, q), \quad \text{kde } \left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

klademe

$$\cos \varphi = \frac{q}{2} : \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

a určíme ostrý úhel φ. Podle znamení q jsou kořeny

$$x_1 = \mp 2 \sqrt{\frac{p}{3}} \cos \frac{\varphi}{3}, \qquad x_2 = \pm 2 \sqrt{\frac{p}{3}} \cos \left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right),$$

$$x_3 = \pm 2 \sqrt{\frac{p}{3}} \cos \left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right).$$

c. Řešení funkcemi hyperbolickými.

V redukované rovnici

a) $x^3 + px \pm q = 0$ $(p > 0,\ q > 0)$ klademe $\sinh u = \frac{q}{2} : \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}$

a v tabulkách hyperbolických funkcí najdeme u. Kořeny rovnice jsou

$$x_1 = \mp 2 \sqrt{\frac{1}{3} p} \sinh \frac{u}{3}, \qquad x_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{3} p} \sinh \frac{u}{3} + \mathrm{i} \sqrt{p} \cosh \frac{u}{3},$$

$$x_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{3} p} \sinh \frac{u}{3} - \mathrm{i} \sqrt{p} \cosh \frac{u}{3}.$$

V redukované rovnici

b) $x^3 - px \pm q = 0$ $(p > 0,\ q > 0)$, kde $\left(\frac{q}{2}\right)^2 > \left(\frac{p}{3}\right)^3$,

klademe

$$\cosh u = \frac{q}{2} : \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

a najdeme u. Podle znamení q jsou kořeny

$$x_1 = \mp 2 \sqrt{\frac{1}{3} p} \cosh \frac{u}{3},$$

$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{3} p} \cosh \frac{u}{3} + \mathrm{i} \sqrt{p} \sinh \frac{u}{3},$$

$$x_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{3} p} \cosh \frac{u}{3} - \mathrm{i} \sqrt{p} \sinh \frac{u}{3}.$$

d. **Případ dvojnásobného kořene.**

Redukovaná rovnice

$$x^3 - p\,x \pm q = 0\ (p > 0,\ q > 0), \quad \text{kde} \quad \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

má podle znamení q kořeny

$$x_1 = x_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{3}p}; \qquad x_3 = \mp 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$$

Kontrola. Mezi kořeny a koeficienty normální rovnice kubické platí vztahy:

$$a = -(X_1 + X_2 + X_3);\ b = X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3;\ c = -X_1X_2X_3.$$

Mezi kořeny a koeficienty redukované rovnice platí

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0; \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p; \quad x_1x_2x_3 = -q.$$

Grafické řešení rovnic třetího stupně s příkladem viz na str. 252

14. Rovnice čtvrtého stupně (bikvadratické).

Z normální rovnice čtvrtého stupně

$$X^4 + a\,X^3 + b\,X^2 + c\,X + d = 0 \text{ substitucí } X = x - \frac{a}{4}$$

plyne redukovaná rovnice (bez kubického členu)

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

kde

$$p = -\frac{3a^2}{8} + b, \quad q = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c, \quad r = -\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d.$$

Methoda *Eulerova*. Napřed se řeší t. zv. *kubická resolventa*

$$y^3 + 2py^2 + (p^2 - 4r)\,y - q^2 = 0,$$

pro jejíž kořeny platí kontrolní vztah: $\sqrt{y_1}\cdot\sqrt{y_2}\cdot\sqrt{y_3} = -q$.

Kořeny redukované bikvadratické rovnice jsou:

$$x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}); \qquad x_3 = \frac{1}{2}(-\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3});$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}); \qquad x_4 = \frac{1}{2}(-\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}).$$

15. Rovnice reciproké.

Koeficienty členů, od obou konců stejně vzdálených, jsou stejné absolutní hodnoty buď *a)* téhož nebo *b)* různého znamení:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots \pm a_2 x^2 \pm a_1 x \pm a_0 = 0.$$

Je-li x_1 kořenem rovnice, jest jím také převrácená hodnota $1/x_1$. Při lichém n má *a)* kořen -1, kořenový rozdíl $(x+1)$, *b)* kořen $+1$, kořenový rozdíl $(x-1)$. Při sudém n má *b)* kořeny ± 1, faktor (x^2-1).

Napřed odstraníme případné jednotkové kořeny, dělíce kořenovým rozdílem; zůstane reciproká rovnice sudého stupně s kladnými členy:

$$a_0 x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + \ldots + a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

z níž dělením x^m plyne

$$a_0\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + a_1\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + \ldots + a_{m-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_m = 0.$$

Substitucí $x + 1 : x = y$ se dají všechny dvoučleny vyjádřiti racionální neznámou y; dostaneme tak rovnici m-tého stupně. Možno-li tuto algebraicky řešiti, plynou pro každou hodnotu y dvě příslušné hodnoty x a $1/x$ z rovnice

$$x + \frac{1}{x} = y; \qquad x^2 - xy + 1 = 0; \qquad x = \frac{1}{2}\left(y \pm \sqrt{y^2 - 4}\right).$$

16. Rovnice binomické.

1. $x^n - a = 0$; $\quad x_{k+1} = \left|\sqrt[n]{a}\right|\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$;

2. $x^n + a = 0$; $\quad x_{k+1} = \left|\sqrt[n]{a}\right|\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)$,

kde $\qquad k = 0, 1, 2 \ldots n-1.$

Kořeny binomické rovnice

$$x^n = 1, \qquad x_{k+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad (k = 0, 1, \ldots n-1)$$

značí v číselné z-rovině vrcholy pravidelného n-úhelníku, vepsaného do kružnice o poloměru 1. (Dělení kruhu.)

T. zv. rovnice *exponenciální* a *logaritmické* (s neznámou v mocniteli nebo v logaritmu) se převedou někdy vhodnou úpravou na algebraické. Rovnice, kde taková úprava není možná, jsou *transcendentní*. Návod k řešení viz v odd. XX. na str. 251.

J. Petersen: Théorie des équations algébriques, 1897 (také něm., ital.).
G. Bauer – L. Bieberbach: Vorlesungen über Algebra, 5. vyd. 1933.

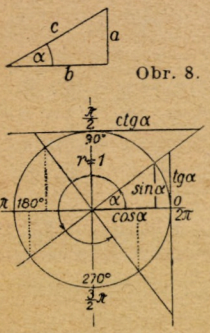
II. Funkce goniometrické.

Poměry stran v pravoúhlém trojúhelníku (obr. 8) závisí na velikosti jednoho úhlu a slují jeho *goniometrické* nebo *úhloměrné* funkce.

Úsečkami jsou zobrazeny v obr. 9, kde poloměr kružnice $r = 1$.

Úhel, který volíme libovolně, je *nezávisle proměnná* čili *argument* (v krajním sloupci tabulek); jemu přísluší *funkce* čili *závisle proměnná* (uvnitř tabulek). Úhly měříme ve stupních nebo v míře obloukové.

1. Goniometrické funkce.



Obr. 8. Obr. 9.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c},$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b},$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a},$$

$$\sec \alpha = \frac{c}{b},$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a}.$$

2. Znamení funkcí ve čtvrtích.

Funkce	čtvrt			
	I.	II.	III.	IV.
sinus . . .	+	+	−	−
kosinus . .	+	−	−	+
tangens . .	+	−	+	−
kotangens .	+	−	+	−

Konstrukce úhlu tangentou. Podle obr. 8. zvolíme odvěsnu b za jednotku, na př. $b = 1$ dm; v tabulkách vyhledáme k danému úhlu α hodnotu $\operatorname{tg} \alpha$ a naneseme ji jako odvěsnu a.

3. Funkce význačných úhlů.

Stupně	0°	90°	180°	270°	360°	30°	45°	60°
oblouky	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin α	0	1	0	− 1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cos α	1	0	− 1	0	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
cotg α	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$

4. Funkce záporných úhlů.

1. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; **2.** $\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$;

3. $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; **4.** $\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$.

5. Převod funkcí do I. čtvrti.

$\alpha < 90^0$ (obr. 9).

1.
$$\sin(90^0 \pm \alpha) = +\cos\alpha,$$
$$\cos(90^0 \pm \alpha) = \mp\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(90^0 \pm \alpha) = \mp\operatorname{cotg}\alpha,$$
$$\operatorname{cotg}(90^0 \pm \alpha) = \mp\operatorname{tg}\alpha.$$

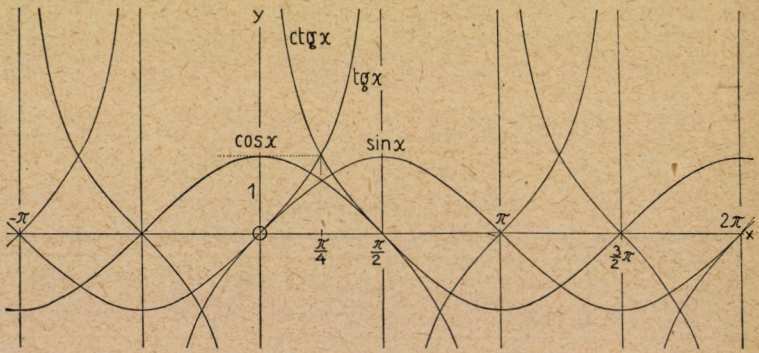
2.
$$\sin(180^0 \pm \alpha) = \mp\sin\alpha,$$
$$\cos(180^0 \pm \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(180^0 \pm \alpha) = \pm\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{cotg}(180^0 \pm \alpha) = \pm\operatorname{cotg}\alpha.$$

3.
$$\sin(270^0 \pm \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\cos(270^0 \pm \alpha) = \pm\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(270^0 \pm \alpha) = \mp\operatorname{cotg}\alpha,$$
$$\operatorname{cotg}(270^0 \pm \alpha) = \mp\operatorname{tg}\alpha.$$

4.
$$\sin(360^0 \pm \alpha) = \pm\sin\alpha,$$
$$\cos(360^0 \pm \alpha) = +\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(360^0 \pm \alpha) = \pm\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{cotg}(360^0 \pm \alpha) = \pm\operatorname{cotg}\alpha.$$

6. Periodičnost goniometrických funkcí.

Funkce $\sin x$ a $\cos x$ se nemění, změní-li se úhel x o libovolný násobek úhlu 2π: *sinus a kosinus mají periodu* 2π.



Obr. 10.

Funkce $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ se nemění, změní-li se úhel x o libovolný násobek úhlu π: *tangens a kotangens mají periodu* π. Pro $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x, \qquad \operatorname{tg}(x \pm k\pi) = \operatorname{tg} x,$$
$$\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x, \qquad \operatorname{cotg}(x \pm k\pi) = \operatorname{cotg} x.$$

Průběh goniometrických funkcí a jejich periodičnost je zřejma z obr. 10.

7. Funkce téhož úhlu.

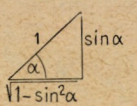
1. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; **2.** $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

3. $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$; **4.** $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$;

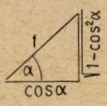
5. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (základní vztah);

6. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$; **7.** $1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$.

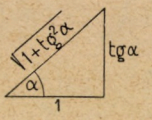
Danou funkcí vyjádříme ostatní funkce, užívajíce poměrů stran příslušného trojúhelníka (obr. 11., 12., 13., 14. a sloupce ve vzorcích 8.—11.).



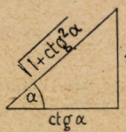
Obr. 11.



Obr. 12.



Obr. 13.



Obr. 14.

8. $\sin\alpha = \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$;

9. $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$;

10. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$;

11. $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha$.

8. Funkce dvou úhlů.

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$;

2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;

3. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$; **4.** $\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha}$;

$\operatorname{tg}(45^0 \pm \beta) = \dfrac{1 \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\beta}$; $\operatorname{cotg}(45^0 \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\beta \pm 1}$;

5. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$;

6. $\sin\beta - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$;

7. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$;

8. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$;

9. $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; **10.** $\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$;

11. $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta = \pm\frac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$;

12. $\sin mx\cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right)$;

13. $\cos mx\cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right)$;

14. $\sin mx\sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right)$;

15. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta}$; **16.** $\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta = \frac{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$;

17. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{cotg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{cotg}\alpha}$;

18. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;

19. $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

20. $\cos\alpha \pm \sin\alpha = \sqrt{1\pm\sin 2\alpha} = \sqrt{2}\sin(45^0\pm\alpha) = \sqrt{2}\cos(45^0\mp\alpha)$;

21. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$; **22.** $\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{cotg}2\alpha$.

9. Funkce násobku a poloviny úhlu.

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$;

2. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

3. $\sin n\alpha = n\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha - \binom{n}{3}\sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha + \binom{n}{5}\sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha + \ldots$;

4. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;

5. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

6. $\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \binom{n}{2}\sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha + \binom{n}{4}\sin^4\alpha\cos^{n-4}\alpha - \ldots$;

7. $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$;

8. $\operatorname{cotg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha} = \dfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\alpha - \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\operatorname{cotg}^2\frac{a}{2} - 1}{2\operatorname{cotg}\frac{a}{2}}$:

9. $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$; **10.** $\operatorname{cotg} 3\alpha = \dfrac{\operatorname{cotg}^3\alpha - 3\operatorname{cotg}\alpha}{3\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}$;

11. $\operatorname{tg} n\alpha = \dfrac{n\operatorname{tg}\alpha - \binom{n}{3}\operatorname{tg}^3\alpha + \binom{n}{5}\operatorname{tg}^5\alpha - \dots}{1 - \binom{n}{2}\operatorname{tg}^2\alpha + \binom{n}{4}\operatorname{tg}^4\alpha - \binom{n}{6}\operatorname{tg}^6\alpha + \dots}$;

12. $\operatorname{cotg} n\alpha = \dfrac{\operatorname{cotg}^n\alpha - \binom{n}{2}\operatorname{cotg}^{n-2}\alpha + \binom{n}{4}\operatorname{cotg}^{n-4}\alpha - \dots}{n\operatorname{cotg}^{n-1}\alpha - \binom{n}{3}\operatorname{cotg}^{n-3}\alpha + \binom{n}{5}\operatorname{cotg}^{n-5}\alpha - \dots}$;

13. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin\alpha} - \dfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin\alpha}$;

14. $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin\alpha} + \dfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin\alpha}$;

15. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$;

16. $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$;

17. $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; **18.** $\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

10. Mocniny sinu a kosinu.

1. $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$;

$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$.

2. $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$;

$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$;

3. $4\cos^3\alpha = \cos 3\alpha + 3\cos\alpha$; **4.** $4\sin^3\alpha = -\sin 3\alpha + 3\sin\alpha$;

5. Pro sudé $n = 2k$:

$$\cos^{2k}\alpha = \frac{1}{2^{2k-1}}\left\{\cos 2k\alpha + \binom{2k}{1}\cos 2(k-1)\alpha + \binom{2k}{2}\cos 2(k-2)\alpha + \dots + \binom{2k}{k-1}\cos 2k\alpha + \frac{1}{2}\binom{2k}{k}\right\};$$

6. pro liché $n = 2k + 1$:

$$\cos^{2k+1}\alpha = \frac{1}{2^{2k}}\left\{\cos(2k+1)\alpha + \binom{2k+1}{1}\cos(2k-1)\alpha + \binom{2k+1}{2}\cos(2k-3)\alpha + \ldots + \binom{2k+1}{k}\cos\alpha\right\};$$

7. pro sudé $n = 2k$:

$$\sin^{2k}\alpha = \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}}\left\{\cos 2k\alpha - \binom{2k}{1}\cos 2(k-1)\alpha + \binom{2k}{2}\cos 2(k-2)\alpha - \ldots + (-1)^k\frac{1}{2}\binom{2k}{k}\right\};$$

8. pro liché $n = 2k + 1$:

$$\sin^{2k+1}\alpha = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\left\{\sin(2k+1)\alpha - \binom{2k+1}{1}\sin(2k-1)\alpha + \binom{2k+1}{2}\sin(2k-3)\alpha - \ldots + (-1)^k\binom{2k+1}{k}\sin\alpha\right\}.$$

11. Funkce úhlů, jejichž součet $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.

1. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$;

2. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma + 1$;

3. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$;

4. $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$;

5. $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma - 1$;

6. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;

7. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$;

8. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 2$;

9. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$;

10. $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma$;

11. $\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cotg}\beta\operatorname{cotg}\gamma = 1$.

12. Goniometrické součty.

Pro libovolné α, libovolné $x \neq 2k\pi$ a celé kladné n platí součty:

1. $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \dfrac{\sin \dfrac{nx}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}} \sin (n+1)\dfrac{x}{2}$;

2. $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\sin \dfrac{nx}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}} \cos (n+1)\dfrac{x}{2}$;

3. $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \sin(\alpha + \nu x) = \frac{\sin \dfrac{nx}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}} \sin\left[\alpha + (n+1)\frac{x}{2}\right]$;

4. $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \cos(\alpha + \nu x) = \frac{\sin \dfrac{nx}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}} \cos\left[\alpha + (n+1)\frac{x}{2}\right]$.

13. Goniometrické rovnice.

Neznámý úhel φ je dán rovnicí, obsahující jeho goniometrické funkce. Nejjednodušší goniometrická rovnice má tvar

$$F(\varphi) = c.$$

Dané hodnotě c goniometrické funkce F přísluší úhel φ, který najdeme v tabulkách. V intervalu $0^0 - 360^0$ vyhovují rovnici úhly dva: φ_1 a φ_2.

Rovnice, v níž se vyskytují různé funkce hledaného úhlu, upravíme vhodnými vzorci tak, aby obsahovala jen funkci jednu; podle té pak rovnici řešíme.

Příklad 1. Stanoviti úhel φ z rovnice

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi = c.$$

Klademe $a = r \cos \lambda$, $b = r \sin \lambda$, $r > 0$;

je pak $\operatorname{tg} \lambda = \dfrac{b}{a}$, $r = \dfrac{a}{\cos \lambda}$ nebo $r = \dfrac{b}{\sin \lambda}$.

Pomocný úhel λ je tangentou jednoznačně určen, ježto známe znamení $\sin \lambda$ a $\cos \lambda$.

$r \cos \varphi \cos \lambda + r \sin \varphi \sin \lambda = c$ čili $\cos (\varphi - \lambda) = c : r$.

Pro $\varphi - \lambda$ plynou dva stejné úhly opačného znamení a odtud dvě hodnoty φ.

Příklad 2. Stanoviti úhel φ z rovnice

$$a \sin (\varphi + \alpha) + b \sin (\varphi + \beta) = 0 \quad \text{čili} \quad \frac{\sin (\varphi + \alpha)}{\sin (\varphi + \beta)} = -\frac{b}{a},$$

kde α, β jsou dané úhly. Podle vzorce **3.** str. 25 o úměrách jest

$$\frac{\sin(\varphi+\alpha)+\sin(\varphi+\beta)}{\sin(\varphi+\alpha)-\sin(\varphi+\beta)}=\frac{b-a}{b+a};$$

Vyjádříme-li součet a rozdíl sinů podle vzorců **5.** a **6.** str. 35, obdržíme

$$\operatorname{tg}\left(\varphi+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{b-a}{b+a}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Tím je určeno $\varphi+\frac{\alpha+\beta}{2}$ a úhel φ.

Příklad 3. Stanoviti úhly φ a ψ z rovni c

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=m, \qquad \varphi+\psi=\alpha.$$

$$(\sin\varphi+\sin\psi):(\sin\varphi-\sin\psi)=(m+1):(m-1),$$

z čehož jako u př. 2 obdržíme po úpravě

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}=\frac{m-1}{m+1}\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}=\frac{m-1}{m+1}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Tím je určeno $\frac{\varphi-\psi}{2}$ a s rovnicí $\varphi+\psi=\alpha$ dává

$$\varphi=\frac{\alpha}{2}+\frac{\varphi-\psi}{2}, \qquad \psi=\frac{\alpha}{2}-\frac{\varphi-\psi}{2}.$$

14. Trigonometrie rovinná.

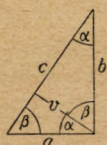
a. Trojúhelník pravoúhlý (obr. 15).

Odvěsny a, b; přepona c; protilehlé úhly α, β, 90^0; výška v; obsah $\triangle$.

1. $a=c\sin\alpha=c\cos\beta$; $\qquad b=c\cos\alpha=c\sin\beta$.

Odvěsna se rovná přeponě, násobené sinem úhlu (k hledané odvěsně) protilehlého nebo kosinem úhlu přilehlého.

Pravoúhlý průmět úsečky rovná se její délce, násobené kosinem odchylky.



Obr. 15.

2. $a=b\operatorname{tg}\alpha=b\operatorname{cotg}\beta$; $\qquad b=a\operatorname{cotg}\alpha=a\operatorname{tg}\beta$.

Odvěsna se rovná druhé odvěsně, násobené tangentou úhlu (k hledané odvěsně) protilehlého nebo kotangentou úhlu přilehlého.

3. $c=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{a}{\cos\beta}$; $\qquad c=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{b}{\cos\alpha}$

Přepona se rovná odvěsně dělené sinem úhlu (k dané odvěsně) protilehlého nebo kosinem úhlu přilehlého.

4. $v=a\cos\alpha=b\sin\alpha=\frac{1}{2}c\sin 2\alpha$;

$v=a\sin\beta=b\cos\beta=\frac{1}{2}c\sin 2\beta$.

5. $\triangle=\frac{1}{2}a^2\operatorname{cotg}\alpha=\frac{1}{2}b^2\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha$;

$\triangle=\frac{1}{2}a^2\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{2}b^2\operatorname{cotg}\beta=\frac{1}{4}c^2\sin 2\beta$.

b. Trojúhelník kosoúhlý (obr. 16).

Strany a, b, c; jim protilehlé úhly α, β, γ; poloměr kružnice opsané R, poloměr kružnice vepsané r, poloměry kružnic stranám připsaných r_a, r_b, r_c; poloviční součet stran $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$; výšky v_a, v_b, v_c; obsah $\triangle$.

Cyklickou záměnou stran a úhlů plynou z každého vzorce další dva.

1. $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$
(věta sinová);

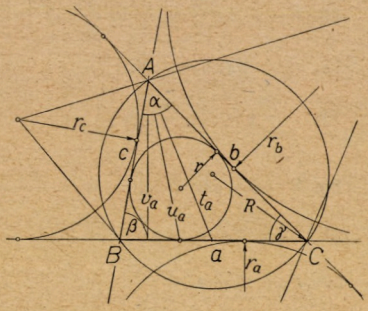
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Strany mají se k sobě jako siny protilehlých úhlů.

2. $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$.

Strana je rovna součtu pravoúhlých průmětů druhých dvou stran.

3. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
(věta kosinová).



Obr. 16.

Čtverec strany rovná se součtu čtverců druhých dvou stran méně dvojnásobný jejich součin, násobený kosinem sevřeného úhlu (rozšířená věta Pythagorova).

$$a^2 = (b+c)^2 - 4bc\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha; \qquad a^2 = (b-c)^2 + 4bc\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha.$$

4. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma}$;

5. $a = 2R\sin\alpha$; $\quad b = 2R\sin\beta$; $\quad c = 2R\sin\gamma$;

6. $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$; $\qquad$ **7.** $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$;

8. $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$ (věta tangentová).

Součet dvou stran se má k jejich rozdílu jako tangenta polovičního součtu protilehlých úhlů k tangentě jejich polovičního rozdílu.

9. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$; $\qquad$ **10.** $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$;

11. $\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (vzorec *Heronův*); **12.** $R = abc : 4\triangle$;

13. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\triangle}{s(s-a)}$; $\qquad \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\triangle}{s(s-b)}$; $\qquad \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{\triangle}{s(s-c)}$.

14. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}$; $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b}$; $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}$;

15. $r = 4R \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{abc}{4Rs} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$;

16. $r = s \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$; **17.** $r_a = \frac{s}{s-a} r = s \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

18. $v_a = b \sin\gamma = c \sin\beta$;

19. $s = 4R \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}$.

20. Symetrála úhlu: $u_\gamma = \frac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b} = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}$.

21. Těžnice $t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2) - c^2}$;

22. $t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$;

23. $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c}$;

24. $\frac{1}{r_a} = -\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c}$;

25. $\triangle = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = a^2 \frac{\sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha} = r^2 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma$;

$$\triangle = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

c. Řešení kosoúhlého trojúhelníka.

1. Dána strana a a dva úhly přilehlé β, γ:

$$\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma);$$

$$b = \frac{a}{\sin\alpha} \sin\beta, \quad c = \frac{a}{\sin\alpha} \sin\gamma, \quad \triangle = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha}.$$

2. Dány dvě strany a, b a úhel sevřený γ:

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma;$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta), \quad \text{z toho } \frac{1}{2}(\alpha - \beta);$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}(\alpha-\beta); \quad \beta = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}(\alpha-\beta);$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}.$$

Aneb

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma};$$

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a - b\cos\gamma}{\cos\beta}.$$

3. Dány dvě strany $a > b$ a úhel α proti větší z nich:

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}: \quad \gamma = 180^0 - (\alpha + \beta);$$

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}; \quad \triangle = \tfrac{1}{2}\, ab\sin\gamma.$$

4. Dány dvě strany $a < b$ a úhel α proti menší z nich:
Je-li $b\sin\alpha < a$, jsou možny dva trojúhelníky s úhlem ostrým β_1 a tupým

$$\beta_2 = 180 - \beta_1; \quad \gamma_1 = 180^0 - (\alpha + \beta_1); \quad \gamma_2 = 180 - (\alpha + \beta_2).$$

Je-li $b\sin\alpha > a$, není trojúhelník určen.

5. Dány jsou tři strany:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\triangle}{s(s-a)};$$

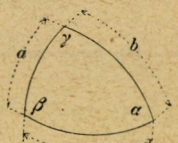
$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Poznámka. V intervalech od 0° do 45° a od 135° do 180° je sinus přesnější než kosinus, v intervalu od 45° do 135° je kosinus přesnější než sinus.

V blízkosti 0° a 180° podává kosinus, v blízkosti 90° sinus prakticky neupotřebitelné hodnoty.

15. Trigonometrie sférická.

Strany sférického trojúhelníka a, b, c jsou oblouky hlavních kružnic na kouli o poloměru $r = 1$; jim protilehlé úhly α, β, γ předpokládáme v mezích $0^0 - 360^0$ (obr. 17).



Obr. 17.

Vrcholy sférického trojúhelníka, spojeny se středem koule, tvoří základní trojhran. Polární trojhran má hrany kolmé k stěnám základního. Každému sférickému trojúhelníku ABC přísluší polární trojúhelník $A'B'C'$ s týmž smyslem oběhu. Jeho

strany: $a = 180^0 - \alpha, \quad b = 180^0 - \beta, \quad c = 180^0 - \gamma;$

úhly: $\alpha = 180^0 - a, \quad \beta = 180^0 - b, \quad \gamma = 180^0 - c.$

Nahradíme-li v kterémkoli vzorci strany výplňky úhlů a úhly výplňky stran, obdržíme vzorec nový.

a. Základní vzorce.

Následující vzorce platí pro *Eulerovy* trojúhelníky, v nichž

$$0 < a+b+c < 2\pi, \quad \pi < \alpha+\beta+\gamma < 3\pi.$$

Cyklickou záměnou plynou z každého vzorce dva další.

1. $\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$ (věta sinová);
2. $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$ (věta kosinová pro stranu);
3. $\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$ (věta kosinová pro úhel);
4. $\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos\gamma + \sin c \cos\alpha$,
   $\operatorname{cotg} a \sin b = \sin\gamma \operatorname{cotg}\alpha + \cos\gamma\cos b$;
5. $\cos\alpha \sin\beta = \sin\gamma\cos a - \sin\alpha\cos\beta\cos c$,
   $\operatorname{cotg}\alpha \sin\beta = \sin c \operatorname{cotg} a - \cos c\cos\beta$.

V dalším značí

$$s = \tfrac{1}{2}(a+b+c); \quad s_1 = s-a; \quad s_2 = s-b; \quad s_3 = s-c;$$
$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma); \quad \sigma_1 = \sigma-\alpha; \quad \sigma_2 = \sigma-\beta; \quad \sigma_3 = \sigma-\gamma.$$

6. $\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos\sigma_1}{\sin\beta\sin\gamma}}$; $\quad \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos\sigma_2\cos\sigma_3}{\sin\beta\sin\gamma}}$;
7. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s_2 \sin s_3}{\sin b \sin c}}$; $\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin s_1}{\sin b \sin c}}$;
8. $\operatorname{cotg}\frac{a}{2} = \frac{1}{\cos\sigma_1}\sqrt{\frac{\cos\sigma_1\cos\sigma_2\cos\sigma_3}{-\cos\sigma}}$;
9. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sin s_1}\sqrt{\frac{\sin s_1 \sin s_2 \sin s_3}{\sin s}}$.
10. *Sférický exces (nadbytek)* trojúhelníka: $\varepsilon = \alpha+\beta+\gamma-180^0$.
11. $\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s_1}{2}\operatorname{tg}\frac{s_2}{2}\operatorname{tg}\frac{s_3}{2}}$ (vzorec *L'Huilierův*).
12. Obsah $\triangle = \frac{\varepsilon^0}{180^0}\pi r^2$, r poloměr koule.

Neperovy analogie:

1. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$.

2. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \operatorname{tg} \frac{c}{2}$;

3. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}$;

4. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}$.

Vzorce Delambreovy:

1. $\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}\gamma$;

2. $\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}\gamma$;

3. $\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta) \sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}\gamma$;

4. $\sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta) \sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}\gamma$.

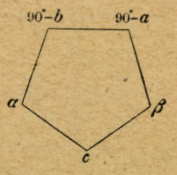
Věta Legendreova: Sférický trojúhelník o malých stranách lze pokládati za rovinný, jehož úhly jsou o třetinu sférického excesu menší než úhly trojúhelníka sférického.

Věta platí i pro největší měřitelné geodetické trojúhelníky ($a = 200$ *km*).

b. Trojúhelník pravoúhlý.

Pravidlo Neperovo. Přeponu c, úhly α, β a doplňky stran $90^0 - a$, $90^0 - b$, napíšeme v jejich pořadí do vedlejšího obrazce (obr. 18).

Kosinus libovolného prvku se rovná součinu sinů dvou prvků protějších nebo součinu kotangent dvou prvků sousedních.



Obr. 18.

1. $\cos c = \cos a \cos b$;
2. $\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta$;
3. $\cos \alpha = \cos a \sin \beta$;
4. $\cos \beta = \sin \alpha \cos b$;
5. $\sin a = \sin \alpha \sin c$;
6. $\sin b = \sin \beta \sin c$;
7. $\cos \alpha = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} c$;
8. $\cos \beta = \operatorname{tg} a \operatorname{cotg} c$;
9. $\sin a = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} \beta$:
10. $\sin b = \operatorname{tg} a \operatorname{cotg} \alpha$.

Přepona je ostrá, jsou-li obě odvěsny současně ostré nebo tupé; přepona je tupá, je-li jedna odvěsna ostrá, druhá tupá. Odvěsna a protější úhel jsou současně ostré nebo tupé.

Sférický exces v pravoúhlém trojúhelníku

$$\textbf{11.}\quad \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}.$$

c. Řešení pravoúhlého trojúhelníka.

1. Dáno a, b; hledáno α, β, c:

$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg} a \sin b$; $\quad \operatorname{cotg}\beta = \operatorname{cotg} b \sin a$; $\quad \cos c = \cos a \cos b$.

Jsou-li strany a, b nebo c blízko 0^0, užijeme vzorců

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} b : \cos\alpha; \quad \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a : \cos\beta.$$

Zkouška podle rovnice: $\cos c = \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta$.

2. Dáno a, c; hledáno b, α, β:

$\cos b = \cos c : \cos a$; $\quad \sin\alpha = \sin a : \sin c$; $\quad \cos\beta = \operatorname{tg} a : \operatorname{tg} c$.

Proti větší straně leží větší úhel. Podmínka: $|\cos c| < |\cos a|$.
Zkouška podle rovnice: $\cos\beta = \sin\alpha \cos b$.

3. Dáno a, α; hledáno b, c, β:

$\sin b = \operatorname{tg} a \operatorname{cotg}\alpha$; $\quad \sin c = \sin a : \sin\alpha$; $\quad \sin\beta = \cos\alpha : \cos a$.

Zkouška podle rovnice: $\sin b = \sin c \sin\beta$.

Podmínky: $\sin a \leqq \sin\alpha$; $\quad a, \alpha$ současně ostré nebo tupé.

Je-li $a < \alpha$, jsou řešení dvě. Vedlejší trojúhelník má

úhly α, $180^0 - \beta$, 90^0; $\quad$ strany a, $180^0 - b$, $180^0 - c$.

4. Dáno a, β; hledáno b, c, α:

$\operatorname{tg} b = \sin a \operatorname{tg}\beta$; $\quad \operatorname{cotg} c = \operatorname{cotg} a \cos\beta$; $\quad \cos\alpha = \cos a \sin\beta$.

Je-li α blízko 0^0, počítáme podle vzorce $\sin\alpha = \sin a : \sin c$.
Zkouška podle rovnice: $\cos\alpha = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} c$.

5. Dáno c, α; hledáno a, b, β:

$\sin a = \sin c \sin\alpha$; $\quad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos\alpha$; $\quad \operatorname{cotg}\beta = \cos c \operatorname{tg}\alpha$.

Je-li a blízko 90^0, vypočteme b, β a pak stranu a podle vzorce

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cos\beta.$$

Zkouška podle rovnice: $\sin a = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg}\beta$.

Při velmi malém úhlu α je pro výpočet odvěsny b vhodná rychle konvergující *řada Lagrangeova:*

$$b = c - \sin 2c \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sin 4c \operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3}\sin 6c \operatorname{tg}^6\frac{\alpha}{2} + \ldots$$

6. Dáno α, β; hledáno a, b, c:

$\cos a = \cos\alpha : \sin\beta$; $\quad \cos b = \cos\beta : \sin\alpha$; $\quad \cos c = \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta$.

Podmínka: $|\cos\alpha : \sin\beta| \leqq 1$.

Zkouška podle rovnice: $\cos c = \cos a \cos b$.

d. Řešení kosoúhlého trojúhelníka.

1. Dáno a, b, γ; hledáno α, β, c:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2};$$

$$\cos\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\sin\frac{\gamma}{2};$$

nebo:

$$\sin\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

2. Dáno α, β, c; hledáno a, b, γ:

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{tg}\frac{c}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{tg}\frac{c}{2};$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\cos\frac{c}{2};$$

nebo:

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\sin\frac{c}{2}.$$

Z posledních volíme ten vzorec, který podává přesnější výsledek (viz poznámku na str. 43).

3. Dáno a, b, c; hledáno α, β, γ:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sin s_1}\sqrt{\frac{\sin s_1 \sin s_2 \sin s_3}{\sin s}};$$

atd.

4. Dáno α, β, γ; hledáno a, b, c:

$$\operatorname{cotg}\frac{a}{2} = \frac{1}{\cos\sigma_1}\sqrt{\frac{\cos\sigma_1 \cos\sigma_2 \cos\sigma_3}{-\cos\sigma}};$$

atd.

5. Dáno a, b, α; hledáno β, γ, c:

$$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a}\sin\alpha;$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}.$$

6. Dáno α, β, a; hledáno b, c, γ:

$$\sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\sin a;$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2};$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Nastati mohou tyto případy:

$$\sin b \sin\alpha \gtreqless \sin a;$$

$$\sin\beta \sin a \gtreqless \sin\alpha;$$

v prvním není řešení, v druhém je řešení jedno (trojúhelník je pravoúhlý, $b = 90^0$); v třetím jest

1) a blíže 90^0 než b: jedno řešení, | 1) α blíže 90^0 než β: jedno řešení,

pak β a b jsou téhož druhu t. j. současně ostré nebo tupé;

2) b blíže 90^0 než a: | 2) β blíže 90^0 než α:

$$\text{řešení} \begin{cases} \text{jsou dvě,} \\ \text{není žádné,} \end{cases} \text{jsou-li } a, \alpha \begin{matrix} \text{téhož} \\ \text{různého} \end{matrix} \Big\} \text{druhu.}$$

C. Bourlet: Leçons de trigonométrie rectiligne, 1898.
W. Lane: Spherical trigonometry theoretical and practical, 1898.
E. Hammer: Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, 5. vyd. 1923.

III. Funkce cyklometrické.

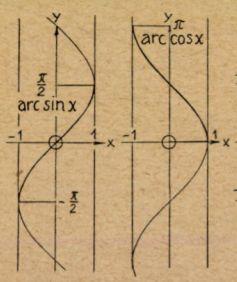
Cyklometrické funkce vzniknou obrácením funkcí goniometrických; vyjadřují závislost mezi danou goniometrickou funkcí a příslušným nejmenším úhlem v míře obloukové.

Dané hodnotě goniometrické funkce

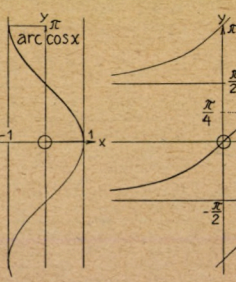
$\sin y = x$, $\cos y = x$, $\operatorname{tg} y = x$, $\operatorname{cotg} y = x$

příslušný nejmenší oblouk (*arcus*) se značí

$y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arccotg} x$.

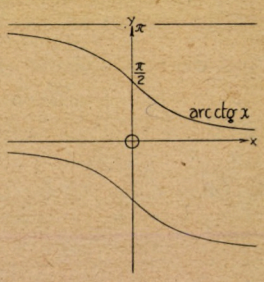


Obr. 19.



Obr. 20.

Obr. 21.



Obr. 22.

Oblouk je v mezích

$$-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}; \qquad 0 \leqq y \leqq \pi; \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}; \qquad 0 < y < \pi.$$

Na př. $y = \arcsin x$ (arkus sinus proměnné x) je nejmenší oblouk, jehož sinus se rovná x. K danému sinu vyhledáme úhel a vyjádříme jej v míře obloukové.

Rovnice $\sin y = x$, $y = \arcsin x$ jsou ekvivalentní.

Obrazy cyklometrických funkcí vzniknou z goniometrických překlopením kolem přímky, půlící úhel kladných os. Silně vytažené části křivek představují jednoznačné funkce, takže zvolenému x přísluší jen jedna hodnota y.

Ze vztahů na str. 33 plyne obrácením čili inversí

1. $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$;

2. $\arccos 1 = 0$, $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos(-1) = \pi$;

3. $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$;

4. $\operatorname{arccotg} \infty = 0$, $\operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi$;

5. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$;

6. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$;

7. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;

8. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;

9. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$;

10. $\operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x$.

Z goniometrických vzorců vzniknou inversí cyklometrické.

11. $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

12. $\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;

13. $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg}\frac{1}{x}$;

14. $\operatorname{arccotg} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

15. $\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2})$;

16. $\arccos x \pm \arccos y = \arcsin(y\sqrt{1-x^2} \pm x\sqrt{1-y^2})$;

17. $\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x \pm y}{1 \mp xy}$.

Inversní operace se vzájemně ruší. Na př.

$$\arcsin(\sin x) \equiv x; \qquad \sin(\arcsin x) \equiv x.$$

IV. Funkce hyperbolické.

(Viz Matematické a statické tabulky. Díl I., str. 46–48 a 55–57.)

Hyperbolické funkce jsou v obdobném vztahu k rovnoosé hyperbole o poloose 1 jako goniometrické funkce ke kružnici s poloměrem 1; nezávisle proměnná (*argument*) $x = 2 \cdot OABO$ je dvojnásobný obsah plochy (*area*) hyperbolické výseče, v obr. 23 vyčárkované.

Definice:

1. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;

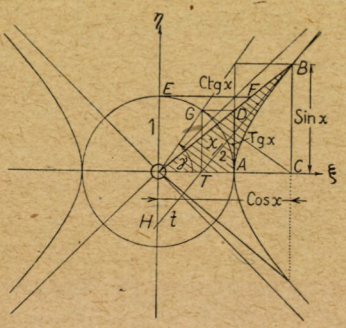
2. $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;

3. $\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

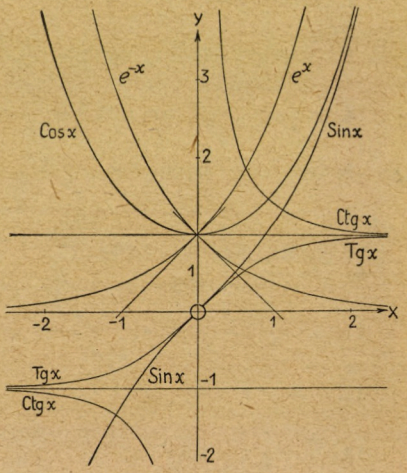
4. $\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$;

5. $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$;

6. $\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}$



Obr. 23.



Obr. 24.

Jiná označení: $\operatorname{Sin} x = \operatorname{sh} x = \mathfrak{Sin}\, x$; $\operatorname{Cos} x = \operatorname{ch} x = \mathfrak{Cos}\, x$ atd.

Průběh hyperbolických funkcí je patrný z obr. 24.

7. $\sinh 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$, $\operatorname{tgh} 0 = 0$, $\operatorname{cotgh} 0 = \infty$,
$\sinh \infty = \infty$, $\cosh \infty = \infty$, $\operatorname{tgh} \infty = 1$, $\operatorname{cotgh} \infty = 1$.

8. $\sinh(-x) = -\sinh x$; $\cosh(-x) = +\cosh x$;
$\operatorname{tgh}(-x) = -\operatorname{tgh} x$; $\operatorname{cotgh}(-x) = -\operatorname{cotgh} x$;

9. $\cosh x + \sinh x = e^{+x}$; **10.** $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$;

11. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (základní vztah);

12. $\operatorname{tgh} x \operatorname{cotgh} x = 1$;

13. $\sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \frac{\operatorname{tgh} x}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cotgh}^2 x - 1}}$;

Knihovna

14. $\cosh x = \sqrt{1+\sinh^2 x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tgh}^2 x}} = \dfrac{\operatorname{cotgh} x}{\sqrt{\operatorname{cotgh}^2 x - 1}}$;

15. $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$;

16. $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$;

17. $\operatorname{tgh}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tgh} x \pm \operatorname{tgh} y}{1 \pm \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y}$;

18. $\operatorname{cotgh}(x \pm y) = \dfrac{1 \pm \operatorname{cotgh} x \operatorname{cotgh} y}{\operatorname{cotgh} x \pm \operatorname{cotgh} y}$;

19. $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x = \dfrac{2 \operatorname{tgh} x}{1 - \operatorname{tgh}^2 x}$;

20. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1$;

$\cosh 2x = 2 \sinh^2 x + 1 = \dfrac{1 + \operatorname{tgh}^2 x}{1 - \operatorname{tgh}^2 x}$;

21. $\sinh 3x = 4 \sinh^3 x + 3 \sinh x$;

22. $\cosh 3x = 4 \cosh^3 x - 3 \cosh x$;

23. $\operatorname{tgh} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tgh} x}{1 + \operatorname{tgh}^2 x}$; **24.** $\operatorname{cotgh} 2x = \dfrac{1 + \operatorname{cotgh}^2 x}{2 \operatorname{cotgh} x}$;

25. $\sinh x \pm \sinh y = 2 \sinh \frac{1}{2}(x \pm y) \cosh \frac{1}{2}(x \pm y)$;

26. $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{1}{2}(x + y) \cosh \frac{1}{2}(x - y)$;

27. $\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{1}{2}(x + y) \sinh \frac{1}{2}(x - y)$;

28. $\operatorname{tgh} x \pm \operatorname{tgh} y = \dfrac{\sinh(x \pm y)}{\cosh x \cosh y}$;

29. $(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx$.

Vzorce pro hyperbolické funkce plynou ze vzorců goniometrických, klademe-li v těchto $\alpha = ix$, $\beta = iy$ a užijeme vztahů

30. $\sin ix = i \cdot \sinh x$, $\quad \cos ix = \cosh x$,

$\operatorname{tg} ix = i \cdot \operatorname{tgh} x$, $\quad \operatorname{cotg} ix = -i \cdot \operatorname{cotgh} x$.

Hyperbolické funkce možno vypočísti a zobraziti také úsečkami (obr. 23) jako goniometrické funkce úhlu γ podle vzorců

31. $\cosh x = \sec \gamma = OC$; $\sinh x = \operatorname{tg} \gamma = BC$; $\operatorname{tgh} x = \sin \gamma = AD$;
$\operatorname{cotgh} x = \operatorname{cosec} \gamma = EF$; $\operatorname{sech} x = \cos \gamma = OT$; $\operatorname{cosech} x = \operatorname{cotg} \gamma = OH$,

kde t. zv. *hyperbolická amplituda*

32. $\gamma = 2 \operatorname{arc\,tg} e^x - \dfrac{\pi}{2}$.

V. Funkce hyperbolometrické.

Hyperbolometrické funkce vzniknou obrácením funkcí hyperbolických; vyjadřují závislost mezi danou hyperbolickou funkcí a jejím argumentem (dvojnásobkem obsahu příslušné hyperbolické výseče).

Dané hodnotě hyperbolické funkce

$$\sinh y = x, \qquad \cosh y = x, \qquad \operatorname{tgh} y = x, \qquad \operatorname{cotgh} y = x$$

jako nezávisle proměnné přísluší funkce

$$y = \operatorname{argsinh} x; \quad y = \operatorname{argcosh} x; \quad y = \operatorname{argtgh} x; \quad y = \operatorname{argcotgh} x.$$

Jiné označení: Ar Sin x (areasinus x); Ar Cos x atd.

Na př. $y = \operatorname{argsinh} x$ (čteme argument hyperbolického sinu x) je veličina, jejíž hyperbolický sinus se rovná x. K danému sinu (k číslu x uvnitř tabulky) najdeme v krajním sloupci příslušné y.

1. $\operatorname{argsinh} x = \lg\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$; **2.** $\operatorname{argcosh} x = \lg\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$;

3. $\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \lg \frac{1+x}{1-x}$: **4.** $\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \lg \frac{x+1}{x-1}$.

VI. Analytická geometrie v rovině.

1. Bod a přímka v soustavě pravoúhlé.

V pravoúhlé soustavě os **x, y** jest bod M určen souřadnicemi x, y.

1. *Vzdálenost dvou bodů* $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ *a spád úsečky:*

$$d = \overline{M_1 M_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

2. *Souřadnice bodů* M_3, M_4, dělících úsečku $\overline{M_1 M_2}$ v poměru $m : n = \lambda$ vnitř $(\lambda < 0)$ a vně $(\lambda > 0)$:

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}; \qquad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}.$$

Body M_1, M_3, M_2, M_4 tvoří t. zv. harmonickou čtveřinu.

3. *Rovnice přímky.* Budiž φ úhel přímky s osou $+\mathbf{x}$, $m = \operatorname{tg} \varphi$ *směrnice*, a, b úseky na osách **x, y**, p vzdálenost přímky od počátku, α, β úhly normály s osami, A, B, C konstanty; pak jest

a) $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ *rovnice normálová,*

b) $Ax + By + C = 0$ „ *obecná,*

c) $y = mx + b$ *rovnice směrnicová,*

d) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ „ *úseková;*

e) $x = a$ kolmice na **x**; $y = b$ kolmice na **y**;

f) $Ax + By = 0$, $y = mx$ rovnice přímky jdoucí počátkem;

g) $y = 0$ rovnice osy **x**; $x = 0$ rovnice osy **y**.

4. *Obecná rovnice převedena na normálovou:*

$$\frac{Ax + By + C}{-\operatorname{sgn} C \cdot \sqrt{A^2 + B^2}} = 0;$$

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad p = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

odmocnina má opačné znamení (— signum) absolutního členu C.

5. *Vzdálenost bodu* $M_0(x_0, y_0)$ *od přímky:*

$$d = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p,$$

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{y_0 - mx_0 - b}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

6. *Průsečík dvou přímek, daných rovnicemi*

$$\mathrm{a} \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \qquad y = m_1 x + b_1,$$
$$\mathrm{b} \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \quad \text{aneb} \quad y = m_2 x + b_2;$$

řešením obou rovnic plynou souřadnice průsečíku (x, y).

7. *Úhel dvou přímek:*

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_1 A_2 + B_1 B_2} = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

8. *Rovnoběžky.* Dvě přímky jsou rovnoběžné, když

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_1 : A_2 = B_1 : B_2 \quad \text{aneb} \quad m_1 = m_2.$$

9. *Kolmice.* Dvě přímky jsou k sobě kolmé, když

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad \text{aneb} \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$

10. *Vzdálenost dvou rovnoběžek:*

$$d = \frac{C_2 - C_1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{b_2 - b_1}{\sqrt{m^2 + 1}} = p_2 - p_1.$$

11. *Přímka bodem* $M_1(x_1, y_1)$ *směru* α má směrnici $m = \operatorname{tg}\alpha$ a rovnici:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

12. *Přímka bodem* M_1, protínající přímku $y = mx + b$ v úhlu ω:

$$y - y_1 = \frac{m + \operatorname{tg}\omega}{1 - m\operatorname{tg}\omega}(x - x_1).$$

13. *Přímka dvěma body* M_1, M_2:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1); \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

14. *Tři body leží na přímce*, když $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

15. *Tři přímky jdou jedním bodem*, když $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$

16. *Svazek paprsků.* Označme symbolicky $\mathsf{a} \equiv 0$, $\mathsf{b} \equiv 0$ normálové rovnice přímek a, b. Rovnice třetí přímky c, jdoucí průsečíkem prvých dvou:

$$\mathsf{c} \equiv \mathsf{a} - \lambda\,\mathsf{b} = 0, \quad \text{kde} \quad \lambda = \frac{\sin(\mathsf{a}\,\mathsf{c})}{\sin(\mathsf{b}\,\mathsf{c})}$$

jest poměr vzdáleností libovolného bodu přímky c od přímek a, b.

Při proměnném λ značí rovnice $\mathsf{a} - \lambda\,\mathsf{b} = 0$ svazek paprsků, jehož středem je průsečík přímek a, b.

17. *Přímky, půlící úhel daných dvou přímek:*

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0,$$

symbolicky $\mathsf{a} \pm \mathsf{b} = 0$.

2. Transformace souřadnic.

Souřadnice bodu v původní soustavě buďtež x, y, souřadnice téhož bodu v nové soustavě x', y'.

1. *Rovnoběžné pošinutí os* do nového počátku (x_0, y_0) *a zpět:*

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y', \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0. \end{cases}$$

2. *Otočení os* o úhel α (v kladném smyslu od $+\mathbf{x}$ do $+\mathbf{y}$) *a zpět:*

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x \cos\alpha + y \sin\alpha, \\ y' = -x \sin\alpha + y \cos\alpha, \end{cases}$$

aneb stručně v komplexním tvaru:

$$x + iy = (x' + iy')e^{\alpha}; \qquad x' + iy' = (x + iy)e^{-i\alpha}.$$

3. *Přechod ze soustavy pravoúhlé v kosoúhlou (o témž počátku) a zpět.* Je-li α odchylka osy $\mathbf{x}'$, β odchylka osy $\mathbf{y}'$ od osy $\mathbf{x}$, takže osy kosoúhlé soustavy svírají úhel $\omega = \beta - \alpha$, jest

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha + y' \cos\beta, \\ y = x' \sin\alpha + y' \sin\beta; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = (x \sin\beta - y \cos\beta) : \sin\omega, \\ y' = (-x \sin\alpha + y \cos\alpha) : \sin\omega. \end{cases}$$

4. *a) Přechod ze soustavy pravoúhlé v polární (o témž počátku) a zpět.* Je-li r průvodič, φ jeho úhel s polární osou $\mathbf{x}$, počátek O pólem, jest

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi; \end{cases} \qquad \begin{cases} r = +\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

b) Přechod ze soustavy kosoúhlé v polární (o témž počátku) a zpět. Značí-li ω úhel os, jest

$$\begin{cases} x = \dfrac{r\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega}, \\ y = \dfrac{r\sin\varphi}{\sin\omega}; \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega}, \\ \varphi = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y\sin\omega}{x + y\cos\omega}. \end{cases}$$

V obou vzorcích pro φ značí φ nejmenší úhel v intervalu od 0 do 2π, jehož sinus má znamení čitatele, kosinus znamení jmenovatele.

5. *Souřadnice homogenní (Hesseovy).* Bod v rovině, s pravoúhlými souřadnicemi x, y, jest určen třemi souřadnicemi x_1, x_2, x_3, takže

$$x = \frac{x_1}{x_3}; \qquad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Rovnice algebraické křivky je v těchto souřadnicích homogenní.

6. *Souřadnice přímkové (Plückerovy).* Přímka $Ax + By + C = 0$ vytíná na osách úseky $a = -\dfrac{C}{A}$, $b = -\dfrac{C}{B}$; jejich převrácené hodnoty s opačným znamením

$$u = \frac{A}{C}, \qquad v = \frac{B}{C}$$

slují souřadnice přímkové. Při pevném u, v jest

$$ux + vy + 1 = 0$$

rovnice přímky; při pevném x, y jest rovnice bodu, kterým procházejí přímky svazku.

Rovnicí $F(u, v) = 0$ dána je křivka jako obalová čára tečen, jejichž proměnné souřadnice jsou u, v.

7. *Souřadnice nomografické (d'Ocagneovy)* jsou zvláštním případem souřadnic přímkových; u, v značí úseky, vymezené přímkou na dvou rovnoběžkách, kolmých k ose **x**.

3. Projektivnost útvarů základních.

1. *Dvojpoměr čtyř bodů* A, B, C, D přímé řady bodové:

$$(A\,B\,C\,D) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

2. Jsou-li x_1, x_2, x_3, x_4 úsečky bodů A, B, C, D, jest jejich dvojpoměr

$$(A\,B\,C\,D) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}.$$

3. *Harmonická čtveřina bodů* A, B, C, D, v níž A, C jsou základní, B, D sdružené, má dvojpoměr $(A\,B\,C\,D) = -1$.

4. *Dvojpoměr čtyř přímek (paprsků)* a, b, c, d:

$$(a\,b\,c\,d) = \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd}.$$

5. Protíná-li libovolná přímka svazek paprsků a, b, c, d v bodech A, B, C, D, rovnají se jejich dvojpoměry,

$$(a\,b\,c\,d) = (A\,B\,C\,D).$$

6. *Základní útvary jednomocné:* přímá řada bodová, svazek přímek (paprsků) v rovině, svazek rovin — slují projektivní, jsou-li jejich prvky jednoznačně tak přidruženy, že se dvojpoměr čtyř prvků útvaru jednoho rovná dvojpoměru příslušných prvků útvaru druhého.

Dvojpoměr čtyř elementů se promítáním nemění.

7. *Projektivní vztah dvou řad* bodových je určen třemi dvojicemi příslušných bodů.

8. Jsou-li x, x' úsečky korespondujících bodů dvou projektivních řad, jest

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}; \qquad x = \frac{-dx' + b}{cx' - a}.$$

9. Jsou-li dvě řady bodové dány funkcemi $F(x)$, $f(x)$ a platí mezi nimi vztah

$$F(x) = \frac{m \cdot f(x) + n}{p \cdot f(x) + q}, \qquad \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} \neq 0,$$

s konstantami m, n, p, q, jsou tyto řady projektivní.

10. *Projektivní rovinné transformace* jsou transformace dvou rovin (různých nebo splývajících), v nichž každému prvku (bodu, přímce) jedné odpovídá jediný prvek (bod nebo přímka) druhé roviny i obráceně, a jednomocným útvarům základním odpovídají projektivní základní útvary jednomocné.

a) Kolineace. Bodu přidružen bod, přímce přímka; dána jest funkcemi lomenými s lineárními čitateli a lineárním stejným jmenovatelem

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \\ y' = \dfrac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3}{\gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3}, \\ y = \dfrac{\beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3}{\gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3}, \end{cases}$$

kde α_k, β_k, γ_k jsou subdeterminanty prvků a_k, b_k, c_k v determinantu

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Kolineace jest určena čtyřmi páry přidružených bodů nebo přímek.

b) Afinita je zvláštní případ kolineace. Přidružené řady jsou podobné, rovnoběžkám odpovídají rovnoběžky, obsahy ploch jsou v stálém poměru. Afinita je dána lineárními funkcemi

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1, \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1, \\ y = \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2, \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Zvláštní případy afinity: $x' = x$, $y' = by$;

$x' = ax$, $y' = y$;

podobnost: $x' = ax$; $y' = ay$.

Křivky, jejichž rovnici lze vyjádřiti tvarem $f(ax, ay) = 0$, jsou podobné. Tak jsou podobné na př. všechny paraboly, všechny řetězovky, neboť jejich rovnice lze psáti

$$\left(\frac{y}{p}\right)^2 = 2\left(\frac{x}{p}\right); \qquad \frac{y}{a} = \cosh\frac{x}{a}.$$

4. Křivky druhého stupně (kuželosečky).

Jsou průseky roviny s (křivou) plochou kruhového kužele. Je-li kuželová plocha rotační a rovina, kolmá k ose, svírá s její přímkou úhel α, s rovinou řezu úhel φ, vznikne v případech

$\varphi = 0$	$\varphi = \alpha$	$\varphi < \alpha$	$\varphi > \alpha$
kružnice,	parabola,	elipsa,	hyperbola;
$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon < 1$	$\varepsilon > 1$

$$\varepsilon = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} \text{ (numerická výstřednost).}$$

1. *Obecná rovnice kuželosečky:*

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

nebo přehledněji

$$f(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Označíme-li determinanty z reálných koeficientů

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ (diskriminant),}$$

$$(a_{ik} = a_{ki})$$

jest obecnou rovnicí dána při

	$D \neq 0$	$D = 0$
$\Delta > 0$	elipsa	2 přímky imaginární s reálným průsečíkem
$\Delta < 0$	hyperbola	2 přímky reálné různé
$\Delta = 0$	parabola	2 přímky rovnoběžné nebo splývající

Je-li $a_{11} = a_{22}$; $a_{12} = 0$, značí obecná rovnice kružnici.

Položíme-li v obecné rovnici kvadratické členy rovny nule a řešíme rovnici $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ podle $\frac{y}{x}$, obdržíme asymptotické směry: imaginární (elipsa), dva reálné (hyperbola) nebo dva splývající (parabola, směr osy).

2. *Souřadnice středu kuželosečky* (x_0, y_0) plynou řešením rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0,$$

nebo

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0.$$

3. *Středová rovnice kuželosečky*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = c$$

vznikne z obecné pošinutím soustavy do středu (x_0, y_0). Lineární členy chybí.

4. *Osová rovnice kuželosečky.* Při $\Delta \neq 0$

$$u_1x^2 + u_2y^2 = -\frac{D}{\Delta};$$

$$u_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\Delta}\right).$$

Vznikne ze středové otočením soustavy o úhel φ, kde

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

5. Kružnice.

Poloměr a, souřadnice středu x_0, y_0.

1. *Obecná rovnice:* $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$;

2. *vrcholová:* $y^2 = \pm x(2a \mp x)$; $x^2 = \pm y(2a \mp y)$

3. *středová:* $x^2 + y^2 = a^2$;

„ parametricky: $x = a \cos t$; $y = a \sin t$.

Souřadnice x, y jsou funkcemi jiné proměnné, parametru t; vyloučením z obou rovnic (součtem čtverců) plyne vztah mezi x, y.

4. *Tečna kružnice* 3. Jsou-li X, Y souřadnice proměnného bodu na tečně, x, y souřadnice dotykového bodu, má tečna rovnici

$$xX + yY = a^2.$$

6. Elipsa a hyperbola.

Poloosy elipsy: a hlavní, b vedlejší; hyperboly: a hlavní, b vedlejší. Horní znaménko platí pro elipsu, dolní pro hyperbolu.

1. *Osová rovnice:* $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$;

parametricky elipsa: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$;

„ hyperbola: $x = a \cosh t$, $y = b \sinh t$

(nebo: $x = a : \cos t$, $y = b \operatorname{tg} t$).

2. *Vrcholová rovnice.* Pošineme-li počátek do levého vrcholu na ose **x**, je

$$\pm y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2 = 2px - \frac{px^2}{a}.$$

3. Vzdálenost ohnisek F_1, F_2 od středu čili

lineární (délková) výstřednost: $e = \sqrt{a^2 \mp b^2}$.

4. Stálý poměr vzdáleností bodů křivky od ohniska a od přímky řídicí čili

numerická (číselná) výstřednost: $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

5. *Délka průvodičů* z ohnisek:

$$r_1 = \pm(a - \varepsilon x); \qquad r_2 = a + \varepsilon x.$$

Elipsa má stálý *součet*, hyperbola stálý *rozdíl* průvodičů, rovný délce hlavní osy $2a$.

6. *Pořadnice bodu s průmětem v ohnisku* (poloparametr):

$$p = \pm a(1 - \varepsilon^2) = \frac{b^2}{a}.$$

7. *Sdružené průměry* a_1, b_1. Tětivy, rovnoběžné s průměrem, jsou sdruženým průměrem půleny. Tečny v koncových bodech průměru jsou rovnoběžny s průměrem sdruženým. Jsou-li $\alpha = \sphericalangle a_1\mathbf{x}$, $\beta = \sphericalangle b_1\mathbf{x}$ ostré úhly, jest

$$a^2 \pm b^2 = a_1^2 \pm b_1^2; \qquad ab = a_1 b_1 \sin(\alpha + \beta); \qquad \frac{b^2}{a^2} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta.$$

8. *Průměrová rovnice.* Sdružené průměry a_1, b_1 jsou osami kosoúhlé soustavy.

$$\frac{x^2}{a_1^2} \pm \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

9. *Rovnice tečny* v bodě (x, y): $\dfrac{xX}{a^2} \pm \dfrac{yY}{b^2} = 1$,

kde X, Y jsou souřadnice proměnného bodu přímky.

10. *Rovnice normály* v bodě (x, y): $\dfrac{X - x}{b^2 x} = \pm \dfrac{Y - y}{a^2 y}$.

11. *Tečna a normála* v bodě elipsy a hyperboly půlí úhel jeho ohniskových průvodičů.

Úseky tečny a normály od dotykového bodu (x, y) k ose $\mathbf{x}$ a jejich průměty na osu:

12. *Délka tangenty* $t = \dfrac{ay}{bx}\sqrt{\pm(a^2 - \varepsilon^2 x^2)}$.

subtangenta $s_t = \dfrac{a^2}{x} - x$,

délka normály $n = \dfrac{b}{a}\sqrt{\pm(a^2 - \varepsilon^2 x^2)}$,

subnormála $s_n = \mp \dfrac{b^2}{a^2} x$.

13. *Poloměr křivosti:*

$$\varrho = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{p}{\sin^3 \vartheta}$$

kde ϑ je úhel tečny s ohniskovým průvodičem. Ve vrcholech $A(\pm a, 0)$, u elipsy také $B(0, \pm b)$, jsou poloměry křivosti:

$$\varrho_A = \frac{b^2}{a}; \qquad \varrho_B = \frac{a^2}{b}.$$

14. *Polární rovnice kuželoseček:* Ohnisko F_2 pól, $F_2 F_1$ osa polární, anomalie φ měřena od vzdálenějšího vrcholu A_1, p kolmý průvodič k ose, ε numerická výstřednost.

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = \pm a \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Pohybuje-li se průvodič opačně od bližšího vrcholu, je rovnice kuželoseček

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \psi}, \qquad \psi = \pi - \varphi.$$

15. *Polární rovnice středová:* $F_1 F_2$ osa polární, střed pól

$$r^2 = \frac{\pm b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}.$$

16. *Konfokální elipsy a hyperboly:*

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1; \quad \text{při } a > b \text{ pro } \begin{cases} \lambda < b^2 \text{ elipsa,} \\ a^2 > \lambda > b^2 \text{ hyperbola.} \end{cases}$$

7. Elipsa.

1. *Obsah plochy* omezené křivkou, poloosou b a souřadnicemi x, y:

$$P_x = \frac{1}{2} xy + \frac{1}{2} ab \arcsin \frac{x}{a};$$

obsah celé elipsy: $P = \pi a b$.

2. *Délka kvadrantu* elipsy:

$$\frac{E}{4} = a \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \varepsilon^4 - \frac{1}{5} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \varepsilon^6 - \ldots \right] = a \mathbf{E}$$

kde **E** jest hodnota úplného eliptického integrálu pro $k^2 = \varepsilon^2$.

Délka elipsy je uzavřena v mezích

$$\pi (a + b) + \frac{\pi (a - b)^2}{8 a} < E < \pi (a + b) + \frac{\pi (a - b)^2}{8 b}.$$

8. Hyperbola.

1. *Rovnice asymptot* $\quad \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0.$

2. *Úhel asymptot* $\quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \pm \frac{b}{a}.$

3. *Rovnice asymptotická;* asymptoty jsou osami kosoúhlé soustavy.

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

4. *Obsah plochy* omezené křivkou, osou **x** a pořadnicí y:

$$P = \frac{1}{2} xy - \frac{1}{2} ab \lg \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right).$$

5. *Rovnoosá hyperbola:* $a = b$; $\varepsilon = \sqrt{2}$; $\varphi = 90^0$;

$$x^2 - y^2 = 1;$$

parametricky

$$x = \cosh t; \qquad y = \sinh t.$$

Rovnice asymptotická: $xy = \frac{a^2}{2}$.

Oblouk hyperboly je vyjádřen dvěma eliptickými integrály.

9. Parabola.

1. *Rovnice vrcholová* (**x** osa souměrnosti, **y** vrcholová tečna):

$$y^2 = 2px \quad \text{aneb} \quad y^2 = ax.$$

Poloparametr $p = \frac{a}{2}$ jest dvojnásobná vzdálenost ohniska od vrcholu.

2. *Rovnice tečny* v bodě (x, y): $\quad yY = p(X + x)$.

3. *Rovnice normály* v bodě (x, y): $\quad Y - y = -\frac{y}{p}(X - x)$.

4. *Délka tangenty* $t = \sqrt{y^2 + 4x^2}$, *subtangenta* $s_t = 2x$,

délka normály $n = \sqrt{y^2 + p^2}$, *subnormála* $s_n = p$.

5. *Poloměr křivosti* $\varrho = \sqrt{\frac{(p + 2x)^3}{p}}$; ve vrcholu $\varrho_0 = p$.

6. *Obsah plochy* omezené křivkou a souřadnicemi x, y:

$$P = \frac{2}{3} xy.$$

7. *Délka oblouku* od vrcholu O k bodu $M(x, y)$:

$$s = \frac{p}{2} \left[\frac{y}{p} \sqrt{1 + \left(\frac{y}{p}\right)^2} + \lg \left(\frac{y}{p} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{p}\right)^2} \right) \right].$$

8. *Konfokální paraboly:* $y^2 = 2\lambda x + \lambda^2$.

9. *Rovnice vrcholová*, **y** osa souměrnosti, **x** vrcholová tečna:

$$y = \frac{x^2}{2p} \quad \text{aneb} \quad y = Cx^2 .$$

Smysl osy udává znamení C; poloparametr $p = \frac{1}{2C}$.

10. *Rovnice paraboly* s osou směru $\pm$ **y**:

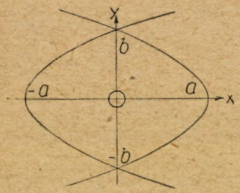
$$y = A + Bx + Cx^2 .$$

Jest určena třemi body; konstanty A, B, C plynou řešením rovnic

$$y_k = A + Bx_k + Cx_k^2 ; \qquad k = 1, 2, 3.$$

11. *Rovnice úseková* (*a*) obr. 25, *b*) obr. 26):

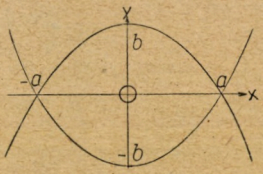
a) paraboly, utínající na **y** úseky $\pm b$, na **x** úsek $+a$ nebo $-a$
b) paraboly, utínající na **x** úseky $\pm a$, na **y** úsek $+b$ nebo $-b$



Obr. 25.

a) $\frac{x}{\pm a} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

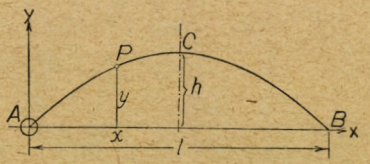
b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{\pm b} = 1.$



Obr. 26.

12. *Rovnice paraboly* s osou směru $-$ **y** jdoucí počátkem; na **x** rozpětí oblouku l, výška oblouku h (obr. 27).

$$y = \frac{4h}{l^2} x (l - x).$$



Obr. 27.

VII. Analytická geometrie v prostoru.

1. Bod, přímka, rovina v pravoúhlé soustavě x, y, z.

a. Bod.

1. Počátek O, bod v prostoru M, jeho vzdálenost od počátku $OM = r$ průvodič, úhly průvodiče s kladným smyslem os α, β, γ, souřadnice bodu M

$$x = r\cos\alpha, \qquad y = r\cos\beta, \qquad z = r\cos\gamma;$$

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

2. *Vzdálenost dvou bodů* M_1, M_2

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

b. Přímka.

3. *Směrové kosiny přímky* $M_1 M_2$, svírající s osami úhly α, β, γ:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{l}, \qquad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{l}, \qquad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{l},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

4. *Úhel* φ *dvou směrů* l_1 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, l_2 $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$:

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2.$$

Dva směry jsou k sobě kolmé, je-li

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_3 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0.$$

Znak orthogonálnosti dvou směrů podle 3. a 4.:
součet součinů směrových kosinů je nula, součet čtverců kosinů rovná se 1.

5. *Směrové kosiny normály* **n** (λ, μ, ν) k rovině dvou směrů l_1, l_2, svírajících úhel $\varphi = \sphericalangle l_1 l_2$ $(\neq 0)$:

$$\cos\lambda = \frac{1}{\sin\varphi}\begin{vmatrix}\cos\beta_1 & \cos\gamma_1\\ \cos\beta_2 & \cos\gamma_2\end{vmatrix}, \qquad \cos\mu = -\frac{1}{\sin\varphi}\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\gamma_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\gamma_2\end{vmatrix},$$

$$\cos\nu = \frac{1}{\sin\varphi}\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2\end{vmatrix}.$$

6. *Nejkratší vzdálenost dvou mimoběžek*, které jdou body M_1, M_2, jejichž směry $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ svírají úhel φ:

$$k = \frac{1}{\sin\varphi}\begin{vmatrix}x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1\\ \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2\end{vmatrix}.$$

Pro průměty úsečky l a průměty rovinného obrazce P do tří k sobě kolmých rovin platí:

7. $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = l^2$; **8.** $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = P^2$.

9. *Obsah čtyrstěnu* $M_1 M_2 M_3 M_4$:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

Čtyři body jsou v jedné rovině, je-li determinant z jejich souřadnic roven nule.

10. *Přímka jest určena dvěma průměty;* není-li rovnoběžna s **y z**, je dána rovnicemi:

$$y = mx + p \text{ (půdorys)}; \qquad z = nx + q \text{ (nárys)}.$$

11. *Směrové kosiny přímky:*

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}.$$

Odmocnina ve jmenovateli se volí kladná.

12. *Úhel dvou přímek:*

$$\cos\varphi = \frac{1 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{(1 + m_1^2 + n_1^2)(1 + m_2^2 + n_2^2)}}.$$

Dvě přímky jsou k sobě kolmé, jestliže

$$1 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

13. *Dvě přímky se protínají,* když determinant

$$\begin{vmatrix} m_1 - m_2 & p_1 - p_2 \\ n_1 - n_2 & q_1 - q_2 \end{vmatrix} = 0.$$

14. *Přímka jdoucí bodem* M_1, *směru* (α, β, γ), je dána rovnicemi:

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}.$$

15. *Přímka, jdoucí dvěma body* M_1, M_2:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

c. Rovina.

16. *Obecná rovnice roviny:*

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Každá lineární rovnice mezi x, y a z značí rovinu; chybí-li absolutní člen D, jde rovina počátkem.

17. *Úseková rovnice roviny*, jsou-li a, b, c úseky na osách:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

18. *Roviny kolmé k osám* ve vzdálenostech a, b, c od počátku:

$$x = a, \ (\perp \mathbf{x}); \qquad y = b, \ (\perp \mathbf{y}); \qquad z = c, \ (\perp \mathbf{z}).$$

19. *Roviny souřadnic:*

$$(\mathbf{xy})\ z = 0; \qquad (\mathbf{xz})\ y = 0; \qquad (\mathbf{yz})\ x = 0.$$

20. *Normálová rovnice roviny*, je-li p vzdálenost od počátku, α, β, γ úhly normály s osami:

$$\mathsf{R} \equiv x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0.$$

21. *Obecná rovnice* **16.** *převedena na normálovou* **20**:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{(-\operatorname{sgn} D)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0;$$

$$\cos\alpha = \frac{A}{J}, \qquad \cos\beta = \frac{B}{J}, \qquad \cos\gamma = \frac{C}{J}, \qquad p = \frac{-D}{J},$$

kde $J = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$; odmocnina má opačné znamení (— signum) členu D.

22. *Vzdálenost bodu* $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$ *od roviny:*

$$d = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p$$

plyne dosazením souřadnic bodu M_0 do normálové rovnice roviny **20**.

23. *Přímka* **10.** *je rovnoběžná s rovinou* **16.**, když

$$A + Bm + Cn = 0.$$

24. *Přímka* **10.** *je kolmá k rovině* **16.**, když

$$A : B : C = 1 : m : n.$$

25. *Normála k rovině* **16.** bodem M_1 je dána rovnicemi:

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}.$$

26. *Rovina* bodem M_1, rovnoběžná se dvěma směry:

$$(x-x_1)\begin{vmatrix}\cos\beta_1 & \cos\beta_2\\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2\end{vmatrix}+(y-y_1)\begin{vmatrix}\cos\gamma_1 & \cos\alpha_1\\ \cos\gamma_2 & \cos\alpha_2\end{vmatrix}$$
$$+(z-z_1)\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_2\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2\end{vmatrix}=0,$$

aneb

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ 1 & m_1 & n_1\\ 1 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=0.$$

27. *Úhel dvou rovin* **16**:

$$\cos\psi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)\ (A_2^2+B_2^2+C_2^2)}}.$$

Dvě roviny rovnoběžné $\mathsf{R}_1\parallel\mathsf{R}_2$:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Dvě roviny k sobě kolmé $\mathsf{R}_1\perp\mathsf{R}_2$:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_3=0.$$

28. *Svazek rovin.* Buďtež $\mathsf{R}_1=0$, $\mathsf{R}_2=0$ normálové rovnice dvou rovin; při libovolném λ jest

$$\mathsf{R}_1+\lambda\mathsf{R}_2=0$$

rovnice rovin, jdoucích průsečnicí daných dvou (osou svazku).

29. *Rovnice rovin, půlících úhel daných dvou:*

$$\mathsf{R}_1\pm\mathsf{R}_2=0.$$

30. *Tři roviny* $\mathsf{R}_1=0$, $\mathsf{R}_2=0$, $\mathsf{R}_3=0$ *procházejí přímkou*, možno-li určiti činitele λ_1, λ_2, λ_3, pro které

$$\lambda_1\mathsf{R}_1+\lambda_2\mathsf{R}_2+\lambda_3\mathsf{R}_3=0.$$

31. *Tři roviny.* Při libovolném λ, μ jest

$$\mathsf{R}_1+\lambda\mathsf{R}_2+\mu\mathsf{R}_3=0$$

rovnice rovin, jdoucích průsečíkem tří daných.

32. *Čtyři roviny.* Možno-li určiti činitele λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, pro něž

$$\lambda_1\mathsf{R}+\lambda_2\mathsf{R}_2+\lambda_3\mathsf{R}_3+\lambda_4\mathsf{R}_4=0,$$

jdou všechny jedním bodem. Determinant z koeficientů rovnic

$$A_k x + B_k y + C_k z + D_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

je nula.

2. Transformace souřadnic.

Souřadnice bodu v původní soustavě: x, y, z; v nové: x', y', z'.

1. *Rovnoběžné pošinutí os do nového počátku* (x_0, y_0, z_0):

$$x = x_0 + x', \qquad y = y_0 + y', \qquad z = z_0 + z',$$

nebo zpět $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, $z' = z - z_0$.

2. *Otočení os* o úhly α, β, γ: Jsou-li směrové kosiny otočených os

$$\cos(\mathbf{x}'\,\mathbf{x}) = a_{11}, \quad \cos(\mathbf{y}'\,\mathbf{x}) = a_{21}, \quad \cos(\mathbf{z}'\,\mathbf{z}) = a_{31},$$
$$\cos(\mathbf{x}'\,\mathbf{y}) = a_{12}, \quad \cos(\mathbf{y}'\,\mathbf{y}) = a_{22}, \quad \cos(\mathbf{z}'\,\mathbf{y}) = a_{32},$$
$$\cos(\mathbf{x}'\,\mathbf{z}) = a_{13}, \quad \cos(\mathbf{y}'\,\mathbf{z}) = a_{33}, \quad \cos(\mathbf{z}'\,\mathbf{z}) = a_{33},$$

je transformace dána substitucí:

$$x = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z', \qquad x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z,$$
$$y = a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z', \qquad y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z,$$
$$z = a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z'; \qquad z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.$$

Substituce jest orthogonální, ponechávajíc součet čtverců souřadnic v obou soustavách beze změny:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Podmínka orthogonality jest obecně vyjádřena vzorci:

$$\sum_i a_{ik}^2 = 1, \qquad \sum_k a_{ik}\,a_{jk} = 0; \quad (i \neq j)$$
$$\sum_k a_{ik}^2 = 1, \qquad \sum_i a_{ik}\,a_{il} = 0; \quad (k \neq l)$$

proměnný index i, k je vyznačen pod znakem součtu.

Determinant orthogonální transformace:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \pm 1$$

podle orientace soustavy (pravo- nebo levotočivá).

3. Plochy v pravoúhlé soustavě.

Plocha jest dána rovnicí, vyjadřující závislost mezi třemi proměnnými souřadnicemi:

$z = f(x, y)$, tvar rozvinutý; $F(x, y, z) = 0$, tvar nerozvinutý;

nebo parametricky:

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = \chi(u, v).$$

Průseky s rovinami souřadnic obdržíme, kladouce

$$z = 0; \qquad y = 0; \qquad x = 0.$$

Průsek dvou ploch

$$F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0$$

je prostorová čára. Vyloučením jedné z proměnných z obou rovnic plynou rovnice průmětů prostorové čáry:

půdorys $f(x, y) = 0$; nárys $g(z, x) = 0$; stranorys $h(y, z) = 0$.

Rovnice $F + \lambda G = 0$ značí plochu, jdoucí průsekem obou.

4. Plochy druhého stupně.

1. *Obecná rovnice* plochy 2. stupně. Přehledně ji píšeme

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

2. *Druhy ploch.* Budiž $D = |a_{ik}|$ determinant z koeficientů ($a_{ik} = a_{ki}$); α_{ik} subdeterminant přidružený elementu a_{ik}; dále $S = a_{22}a_{33} - a_{23}^2 + a_{11}a_{33} - a_{13}^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ (součet subdeterminantů přidružených v α_{44} prvkům a_{11}, a_{22}, a_{33}); $s = a_{11} + a_{22} + a_{33}$.

a) Je-li $D \neq 0$; $\alpha_{44} \neq 0$, značí **1.** *plochy středové*: pro

$D < 0$, $s\alpha_{44} > 0$, $S > 0$ elipsoid

$D > 0$, $s\alpha_{44} < 0$ nebo $S < 0$ hyperboloid jednodílný

$D < 0$, $s\alpha_{44} < 0$ nebo $S < 0$ hyperboloid dvojdílný.

b) Je-li $\alpha_{44} = 0$, značí obecná rovnice *paraboloidy*: pro

$D < 0$, $S > 0$ paraboloid eliptický

$D > 0$, $S < 0$ paraboloid hyperbolický.

c) Je-li $D = 0$, značí **1.** plochy *zvrhlé*: pro

$\alpha_{44} \neq 0$ kužel; $\alpha_{44} = 0$ válec; $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$ dvojici rovin.

3. *Souřadnice středu:*

$$x_0 = \frac{\alpha_{14}}{\alpha_{44}}; \qquad y_0 = \frac{\alpha_{24}}{\alpha_{44}}; \qquad z_0 = \frac{\alpha_{34}}{\alpha_{44}}.$$

4. *Poloosy:*

$$a = \sqrt{-\frac{D}{\lambda_1 \alpha_{44}}}; \qquad b = \sqrt{-\frac{D}{\lambda_2 \alpha_{44}}}; \qquad c = \sqrt{-\frac{D}{\lambda_3 \alpha_{44}}},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou kořeny t. zv. *sekulární rovnice*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Rovnají-li se dva její kořeny a nejsou nuly, je plocha rotační.

5. *Kužel druhého stupně* značí každá homogenní rovnice 2. stupně o třech proměnných:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = 0.$$

6. *Koule* o poloměru a a středu (x_0, y_0, z_0):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$

7. *Válec, kolmý k rovině souřadnic,* má rovnici souhlasnou s rovnicí průsečné křivky válce s touto rovinou.

Osové rovnice ploch druhého stupně:

Střed plochy je v počátku, osy plochy v osách soustavy.

8. *Koule:* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$

9. *Elipsoid.* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

10. *Hyperboloid jednodílný:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$

11. *Hyperboloid dvojdílný:* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$

12. *Konfokální plochy* 2. stupně:

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1.$$

Vrcholové rovnice:

Vrchol plochy je v počátku, v něm $z = 0$ rovina tečná, hlavní řezy jsou v rovinách $x = 0$, $y = 0$.

13. *Eliptický paraboloid:* $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z.$

14. *Hyperbolický paraboloid:* $\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z;$

$2p$, $2q$ jsou parametry hlavních parabolických řezů $y = 0$, $x = 0$.

15. *Eliptický kužel:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2};$

má vrchol v počátku, elipsu o poloosách a, b v rovině $z = c$.

Rovnají-li se dvě z os, vzniknou z obecných ploch druhého stupně (krom hyperbolického paraboloidu) plochy rotační.

5. Zvláštní druhy ploch.

1. *Plochy přímkové* vzniknou prostorovým pohybem přímky; protínají-li se dvě soumezné přímky plochy, je plocha *rozvinutelná*, jinak *zborcení*. Parametricky jsou souřadnice bodů přímkové plochy dány rovnicemi:

$$x = \varphi(u) + vf(u); \qquad y = \psi(u) + vg(u); \qquad z = \chi(u) + vh(u);$$

pro $u = \text{konst.}$ značí přímky plochy, pro $v = 0$ křivku řídicí.

2. *Plochy válcové.* Eliminací x, y, z z rovnic, jimiž jsou dány řídicí křivka $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$ a pohyblivá přímka $\begin{cases} y = mx + u, \\ z = nx + v, \end{cases}$ plyne mezi proměnnými parametry vztah $\varphi(u, v) = 0$ a jich vyloučením rovnice plochy válcové

$$\varphi(y - mx,\ z - nx) = 0.$$

3. *Plochy kuželové* s vrcholem $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$. Eliminací x, y, z z rovnic, jimiž dána

řídicí křivka $\begin{cases} F = 0, \\ G = 0, \end{cases}$ svazek paprsků o středu M_0 $\begin{cases} x - x_0 = u(z - z_0), \\ y - y_0 = v(z - z_0). \end{cases}$

plyne rovnice $\varphi(u, v) = 0$ a z ní rovnice plochy kuželové

$$\varphi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0.$$

Je-li vrchol kužele v počátku, má rovnice homogenní tvar

$$\varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0.$$

4. *Plochy rotační.* Budiž **z** osou otáčení, $z = f(x)$ rovnice meridiánu v rovině **xz**, u vzdálenost bodu plochy od osy, v úhel otočení z roviny **xz**. Plocha je dána parametricky rovnicemi:

$$x = u\cos v; \qquad y = u\sin v; \qquad z = f(u).$$

u = konst. značí kružnice plochy, v = konst. meridiány v rovině procházející osou. Eliminací parametrů u, v plyne, je-li

osa	meridián	rovnice plochy;
z	$f(x, z) = 0$ aneb $f(y, z) = 0$,	$f(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$;
x	$f(x, y) = 0$ „ $f(x, z) = 0$,	$f(x, \sqrt{y^2+z^2}) = 0$;
y	$f(x, y) = 0$ „ $f(y, z) = 0$,	$f(y, \sqrt{x^2+z^2}) = 0$.

V rovnici meridiánu ponecháme proměnnou, souhlasnou s osou rotace, beze změny, druhou nahradíme odmocninou, charakterisující kružnice plochy.

5. *Konoidy.* Přímky plochy jsou rovnoběžny s danou řídicí rovinou, protínají stále pevnou přímku a pevnou křivku. Budiž:

řídicí rovina	řídicí přímka	řídicí křivka	přímka plochy
xy $z = 0$	**z** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$	k $\begin{cases} F = 0 \\ G = 0 \end{cases}$	p $\begin{cases} y : x = u \\ z = v. \end{cases}$

Eliminací x, y, z plyne rovnice konoidu

$$\varphi(u, v) = 0 \text{ aneb } \varphi\left(\frac{y}{x}, z\right) = 0.$$

6. *Plochy posouvání (translační)* se vytvoří rovnoběžným posouváním křivky u = konst. po křivce v = konst. Parametricky jsou dány rovnicemi:

$$x = f(u) + \varphi(v); \qquad y = g(u) + \psi(v); \qquad z = h(u) + \chi(v).$$

7. *Plochy šroubové.* Budiž **z** osou šroubovou, $z = f(x)$ rovnice profilu v rovině **xz**, $h = 2\pi c$ výška závitu, u vzdálenost bodu plochy od osy, v úhel otočení z roviny **xz**. Plocha je dána parametricky rovnicemi:

$$x = u\cos v; \qquad y = u\sin v; \qquad z = cv + f(u).$$

u = konst. značí šroubovice, v = konst. profilové křivky. Eliminací parametrů u, v plyne rovnice

$$z = \frac{h}{2\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + f(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Je-li $f(u) \equiv 0$, vznikne pravoúhlá plocha šroubová (šroubový konoid):

$$z = \frac{h}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

B. Bydžovský: Úvod do analytické geometrie, 1923.

C. Briot – J. Bouquet: Leçons de géométrie analytique, 23. vyd. 1919.

G. Castelnuovo: Lezioni di geometria analitica, 8. vyd. 1935.

G. Fano – A. Terracini: Lezioni di geometria analitica e proiettiva, 1930.

A. Schoenflies: Einführung in die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, 2. vyd. 1931.

G. Salmon: A treatise on conic sections, 6. vyd. 1879 (rozš. Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 2 sv., 9. vyd. 1922; také franc., ital.).

G. Salmon: A treatise on the analytic geometry of three dimensions, 2 sv., 6. vyd. 1914 (také něm., franc., ital.).

J. Vojtěch: Geometrie projektivní; synthetické i analytické vyšetřování projektivních příbuzností a útvarů, 1932.

VIII. Počet diferenciální.

1. Funkce a mezné hodnoty (limity) funkcí.

Proměnné veličiny značí se $x, y, z, t, u, v, \ldots$; konstanty $a, b, c, \ldots$ $A, B, C \ldots$; funkční znaky $f, F, \varphi, \Phi, \ldots$ (čteme jako písmena).

1. *Funkce.* Proměnná veličina y je v intervalu (a, b) jednoznačná funkce nezávisle proměnné x (*argument*), jestliže každé hodnotě x od $x = a$ do $x = b$ přísluší jedna určitá hodnota y (závisle proměnná).

Funkce y je *rozvinutá* (explicitní), má-li závislost tvar

$$y = f(x),$$

nebo y je funkce *nerozvinutá* (implicitní), je-li dána rovnicí

$$F(x, y) = 0.$$

Veličina $y = C$, která nezávisí na proměnné x, je *stálá* čili *konstanta*.

Řešením podle x plyne z rovnice

$$(\alpha) \quad y = f(x) \quad \textit{obrácená} \text{ čili } \textit{inversní funkce} \quad x = g(y). \quad (\beta)$$

Rovnice (α), (β) značí tutéž křivku; vyměníme-li v (β) proměnné, je obrazem inversní funkce $y = g(x)$ křivka, souměrně sdružená ke křivce $y = f(x)$ podle přímky, půlící úhel kladných os.

Funkce sudá: $f(-x) = +f(x)$; na př. x^2, $\cos x$; křivka je souměrná podle osy y.

Funkce lichá: $f(-x) = -f(x)$; na př. x^3, $\sin x$; křivka je středově souměrná podle počátku.

Funkce periodická s periodou p; $f(x \pm kp) = f(x)$; $k = 0, 1, 2, \ldots$

Rozeznáváme a) *Funkce algebraické:* racionální celistvé (polynomy str. 26, 1.: lineární, kvadratická atd.); racionální lomené (podíl dvou polynomů); iracionální (na př. mocnina s racionálním zlomkovým mocnitelem). Nealgebraické sluji

b) *Funkce transcendentní.* Elementární transcendenty jsou: funkce exponenciální, logaritmické; funkce goniometrické, hyperbolické a k nim inversní.

c) *Vyšší transcendenty* jsou definovány integrály nebo diferenciálními rovnicemi, na př. funkce eliptické, kulové, cylindrické atd.

Veličina z jest funkce dvou nezávisle proměnných x, y, jestliže každé dvojici x, y přísluší určitá hodnota z. Funkce z je buď

rozvinutá $z = f(x,y)$ nebo *nerozvinutá* $F(x,y,z) = 0$.

Geometrický obraz funkce dvou nezávisle proměnných je plocha.

2. *Limita.* Symbol $\lim x = a$ nebo $x \to a$ značí: proměnná x se bez omezení blíží mezné hodnotě neboli limitě a, takže rozdíl $|a - x|$ je libovolně malý (menší než libovolně malé číslo).

3. $\lim_{x \to a} f(x) = b$ značí: $f(x)$ se neomezeně blíží hodnotě b, když x se bez omezení blíží k a.

4. $\lim x = 0$ značí: proměnná x je *číslo nekonečně malé*, t. j. od nuly se liší libovolně málo.

Číslo nekonečně malé mizí proti číslu konečnému, číslo nekonečně malé vyššího řádu proti nekonečně malému řádu nižšího.

5. $\lim x = \infty$ značí: proměnná x je *číslo nekonečně velké*, t. j. roste nad každé sebevětší číslo.

Číslo konečné mizí proti číslu nekonečně velkému, číslo nekonečně velké nižšího řádu proti nekonečně velkému řádu vyššího.

6. $\lim_{x \to \infty} \frac{a}{x} = 0$;

7. $\lim_{x \to 0} \frac{a}{x} = \infty$;

8. $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e = 2{,}71828\ldots$;

9. $\lim_{n \to \infty} \left(1 \pm \frac{x}{n}\right)^n = e^{\pm x}$;

10. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;

Pro n celé kladné

11. $\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$ při $a > 1$;

12. $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$.

13. *Funkce* $y = f(x)$ *je spojitá* v místě x, je-li v něm (jednoznačně definovaná) hodnota funkce zároveň její limitou

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x).$$

Nekonečně malé změně argumentu x o diferenci Δx odpovídá nekonečně malá diference funkce $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x)$, takže s ubývajícím $\Delta x \to 0$

$$\lim [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0.$$

Jinak je funkce přetržitá s přetržkou konečnou nebo nekonečnou.

Funkce je spojitá v intervalu (a, b), je-li spojitá na každém jeho místě.

2. Derivace a diferenciály.

1. *Derivace č. diferenciální poměr funkce* $y = f(x)$ v místě x je limita diferenčního poměru a značí se:

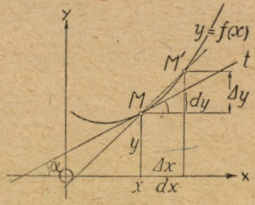
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x},$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Čte se: Derivace funkce f proměnné x (krátce f, x) podle x nebo f s čárkou x; y s čárkou; diferenciál f, x podle diferenciálu x nebo d, y podle d, x. Nezávisle proměnná je vždy ve jmenovateli.

Existuje-li tato limita, má funkce derivaci. Geometricky (obr. 28.) značí derivace $f'(x)$ tangentu úhlu, který tečna (mezná poloha sečny) křivky $y = f(x)$ v místě x svírá s kladným smyslem osy x: $y' = \operatorname{tg} \alpha$.

Derivace udává také *rychlost* změny funkce v místě x.



Obr. 28.

Diferenciál $\mathrm{d}x$ je na místu x nezávislý, může být libovolně zvolen (na př. $\mathrm{d}x = \Delta x$). Diferenciál $\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x$ je funkcí x a značí přírůstek na tečně, od přírůstku funkce Δy (na křivce) se liší o nekonečně malou veličinu vyššího řádu. Bodu (x, y) soumezný bod má souřadnice $x + \mathrm{d}x$, $y + \mathrm{d}y$.

Má-li funkce derivaci v místě x, je v něm spojitá; opak neplatí.

2. *Diferenciál funkce* $y = f(x)$ je součin z derivace a diferenciálu nezávisle proměnné

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x; \qquad \mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x.$$

3. *Derivace a diferenciál konstanty je nula.*

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = 0; \qquad \mathrm{d}C = 0.$$

3. Pravidla o diferencování.

Buďtež $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)\ldots$ funkce proměnné x.

$$u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}; \qquad v' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}; \qquad \mathrm{d}u = u'\mathrm{d}x; \qquad \mathrm{d}v = v'\mathrm{d}x.$$

1. $\mathrm{d}(u+v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v, \qquad (u+v)' = u' + v',$

2. $\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u, \qquad (uv)' = uv' + vu'.$

Složité součiny diferencujeme po předchozím logaritmování.

3. $$\mathrm{d}(uvw\ldots) = \left(\frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\mathrm{d}w}{w} + \ldots\right) uvw\ldots$$

$$(uvw\ldots)' = \left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \ldots\right) uvw\ldots$$

4. $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}$; $\qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$.

5. *Derivace složené funkce* $f(u)$, kde $u = u(v)$, $v = v(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

6. *Derivace funkce inversní* $x = g(y)$ ku $y = f(x)$:

$$g'(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{f'x}, \qquad \text{když } f'(x) \neq 0.$$

7. *Derivace funkce* dané parametricky $x = x(t)$, $y = y(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y : \mathrm{d}t}{\mathrm{d}x : \mathrm{d}t} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

4. Diferenciály elementárních funkcí.

Označení: a konstanta, $\mathrm{d}a = 0$, m libovolné číslo.

1. $\mathrm{d}(a + x) = \mathrm{d}x$;

2. $\mathrm{d}\,ax = a\,\mathrm{d}x$;

3. $\mathrm{d}\,x^m = mx^{m-1}\,\mathrm{d}x$;

4. $\mathrm{d}\,x^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}\,x^{\frac{1}{m}-1}\,\mathrm{d}x$;

5. $\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$;

6. $\mathrm{d}\,a^x = a^x \lg a\,\mathrm{d}x$;

7. $\mathrm{d}\lg x = \frac{\mathrm{d}x}{x}$;

8. $\mathrm{d}\log_a x = \frac{1}{\lg a}\,\frac{\mathrm{d}x}{x}$;

9. $\mathrm{d}\sin x = \cos x\,\mathrm{d}x$;

10. $\mathrm{d}\cos x = -\sin x\,\mathrm{d}x$;

11. $\mathrm{d}\,\mathrm{tg}\,x = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$;

12. $\mathrm{d}\,\mathrm{cotg}\,x = -\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$;

13. $\mathrm{d}\,\mathrm{arc}\sin x = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}}$;

14. $\mathrm{d}\,\mathrm{arc}\cos x = -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}}$;

15. $\mathrm{d}\,\mathrm{arc\,tg}\,x = \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2}$;

16. $\mathrm{d}\,\mathrm{arc\,cotg}\,x = -\frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2}$;

17. $\mathrm{d}\sinh x = \cosh x\,\mathrm{d}x$;

18. $\mathrm{d}\cosh x = \sinh x\,\mathrm{d}x$;

19. $\mathrm{d}\,\mathrm{tgh}\,x = \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x}$;

20. $\mathrm{d}\,\mathrm{cotgh}\,x = -\frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x}$.

21. *Diferenciál složené funkce* $f[\varphi(x)] = f(X)$. Předcházející vzorce rozšíříme, píšeme-li v nich X místo x, při čemž $X = \varphi(x)$. Obecně

$$\mathrm{d}f(X) = f'(X)\,\mathrm{d}X, \quad \text{kde } \mathrm{d}X = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Na př.

$y = \underbrace{(\sin x)^2}_{X} = X^2$; $\quad dy = 2X\,dX = 2\sin x\,d\sin x = 2\sin x \cdot \cos x\,dx$.

$y = \underbrace{\sin x^2}_{X} = \sin X$; $\quad dy = \cos X\,dX = \cos x^2 \cdot 2x\,dx$.

Z diferenciálů plynou derivace, dělíme-li na obou stranách diferenciálem nezávisle proměnné.

5. Vyšší derivace a diferenciály.

1. *Druhá derivace* funkce $y = f(x)$ jest derivací první derivace; značí se:

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \text{ nebo } y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Druhý diferenciál:

$$d^2 f(x) = f''(x)\,dx^2; \qquad d^2 y = y''\,dx^2.$$

V symbolech se píše d^2 místo dd; dx^2 místo $dx \cdot dx$. Poněvadž diferenciál dx je na x nezávislý, dlužno jej pro každé další diferencování pokládati za konstantu. Podobně vzniká a se značí *třetí derivace.*

2. *Obecně n-tá derivace:*

$$f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx} = \frac{d^n f(x)}{dx^n}; \qquad y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

3. *Operátor* D: Předpis derivování vyjadřuje stručně operační znak

$$D = \frac{d}{dx}; \qquad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}; \quad \ldots\ldots; \quad D^n = \frac{d^n}{dx^n}.$$

4. *Nezávislý tvar n-té* derivace některých funkcí:

$$D^n x^m = m(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}, \qquad D^n x^n = n!;$$

$$D^n \lg x = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}; \qquad D^n e^x = e^x; \qquad D^n a^x = a^x (\lg a)^n;$$

$$D^n \sin x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right); \qquad D^n \cos x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

5. *Vzorec Leibnizův.* Jsou-li u, v funkce x, je symbolicky

$$D^n(uv) = (u+v)^n.$$

V binomickém rozvoji vyjadřují mocnitelé řád derivací; $u^n v^0$ značí $u^{(n)} v$, $u^0 v^n$ podobně $uv^{(n)}$ (nultá derivace je funkce sama).

6. Derivace a diferenciály funkcí několika proměnných.

1. *Parciální* čili *částečné derivace a diferenciály funkce* dvou nezávisle proměnných

$$z = f(x, y)$$

Částečná derivace podle x (při stálém y): $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = f_1$;

$\frac{\partial f}{\partial x}$ (d, f parciálně podle d, x) je nedílný znak místo $\frac{\mathrm{d}_x f}{\mathrm{d}x}$.

Diferencujeme jen podle x, pokládajíce y za stálou, a diferenciálem $\mathrm{d}x$ hned dělíme.

Částečný diferenciál vzhledem k x: $\mathrm{d}_x f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x$.

Částečná derivace podle y (při stálém x): $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = f_2$;

$\frac{\partial f}{\partial y}$ (d, f parciálně podle d, y) je nedílný znak místo $\frac{\mathrm{d}_y f}{\mathrm{d}y}$.

Diferencujeme jen podle y, pokládajíce x za stálou, a diferenciálem $\mathrm{d}y$ hned dělíme.

Částečný diferenciál vzhledem k y: $\mathrm{d}_y f = \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$.

2. *Druhé parciální derivace* vzniknou částečným derivováním prvních:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx} = f_{11}$ druhá parciální derivace podle x;

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy} = f_{22}$ „ „ „ „ y;

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy} = f_{12}$ druhá (smíšená) derivace podle x a y;

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx} = f_{21}$ „ „ „ „ y a x.

3. *Pořad diferencování* je lhostejný:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}; \qquad f_{12} = f_{21},$$

existují-li obě první a druhé smíšené derivace a jsou-li spojité.

4. *Totální* čili *úplný diferenciál*:

$$\mathrm{d}f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

5. *Druhý* (úplný) *diferenciál:*

$$\mathrm{d}^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y^2.$$

6. *Obecně n-tý* (úplný) *diferenciál* symbolicky:

$$\mathrm{d}^n f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)^n f(x,y).$$

7. *Derivace nerozvinuté funkce* $f(x,y) = 0$:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{f_1}{f_2}$$

Diferencujeme totálně podle 4., diferenciálem $\mathrm{d}x$ dělíme a y' vypočteme.

8. *Druhá derivace nerozvinuté funkce* $f(x,y) = 0$:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = -\frac{f_{11}f_2^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1^2}{f_2^3}.$$

9. *Totální* (úplný) *diferenciál funkce* většího počtu nezávisle proměnných $f = f(x,y,z,\ldots)$:

$$\mathrm{d}f(x,y,z,\ldots) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \ldots$$

10. *Derivace funkce složené* $u = F(x,y,z)$, kde x,y,z jsou funkce jediné proměnné t, plyne z totálního diferenciálu $\mathrm{d}u$ dělením $\mathrm{d}t$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

11. *Derivace nerozvinuté funkce* u několika nezávisle proměnných $F(x,y,z,\ldots u) = 0$ podle $x,y,z,\ldots$ plynou z rovnic:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} = 0,\ldots$$

12. *Homogenní funkce* $f(x,y,z,\ldots)$ je stupně n-tého, jestliže

$$f(tx,ty,tz,\ldots) = t^n f(x,y,z,\ldots)$$

13. *Eulerův vzorec* pro homogenní funkce n-tého stupně:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + \ldots = nf(x,y,z,\ldots).$$

7. Pomocné věty.

1. *Věta Rolleova:* Má-li spojitá funkce $f(x)$ v intervalu od $x = a$ do $x = b$ určité derivace a je-li $f(a) = f(b)$, jest v tomto intervalu nejméně jedno místo $x = \xi$, v němž $f'(\xi) = 0$. Aneb: v intervalu (a, b) má rovnice $f'(x) = 0$ nejméně jeden kořen.

Mezi dvěma body křivky se stejnými pořadnicemi jest nejméně jeden její vrchol.

2. *Věta Lagrangeova:* Jsou-li v intervalu (a, b) funkce $f(x)$ a derivace $f'(x)$ spojité, je

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \qquad a < \xi < b;$$

an b, klademe-li $a = x$, $b = x + h$, $\xi = x + \vartheta h$, kde ϑ je kladný pravý zlomek, jest

$$f(x + h) - f(x) = h f'(x + \vartheta h), \qquad 0 < \vartheta < 1.$$

Mezi dvěma body křivky je někde její tečna, rovnoběžná se sečnou jdoucí těmi body.

8. Rozvinování funkcí v řady mocninové.

1. *Řada Taylorova:* Funkce $f(x)$, se všemi derivacemi v intervalu od x do $x + h$ spojitá, se dá rozvinouti v řadu

$$f(x + h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} h + \frac{f''(x)}{2!} h^2 + \ldots + \text{in inf.} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} h^n.$$

Přerušíme-li řadu po n-tém členu, je zbytek

$$R_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!} h^n + \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} h^{n+1} + \ldots \text{ in inf.}$$

Zbytek lze vyjádřiti v různých tvarech; chybu, vzniklou součtem neúplné řady, možno jím odhadnouti. Na př.:

Zbytek Lagrangeův:

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} h^n; \qquad \xi = x + \vartheta h; \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 1.$$

Pro $\vartheta = 0$ a $\vartheta = 1$ obdržíme dvě hodnoty, mezi nimiž zbytek jest uzavřen.

Taylorova řada platí, konverguje-li zbytek k nule,

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0.$$

2. *Řada Taylorova*, jiný tvar: Klademe-li $x = a + (x - a)$, jest

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots = \sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n;$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - a)^n; \qquad \xi = a + \vartheta(x - a); \qquad 0 < \vartheta < 1.$$

3. *Řada Maclaurinova:* Funkce $y = f(x)$, která v místě $x = 0$ se všemi derivacemi je spojitá, může býti rozvinuta v řadu

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\vartheta x)}{n!}x^n; \qquad 0 < \vartheta < 1.$$

4. *Řada Taylorova* pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$:

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right) + \\ + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\right) + \ldots$$

Zbytek Lagrangeův (symbolicky):

$$R_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^n f(\xi, \eta); \qquad \begin{matrix}\xi = x + \vartheta_1 h; \\ \eta = y + \vartheta_2 k;\end{matrix} \qquad 0 < \vartheta_{1,2} < 1.$$

5. *Řada Maclaurinova* pro funkci dvou proměnných:

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y\right)f(0,0) + \\ + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2}{\partial x}x^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}xy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}y^2\right)f(0,0) + \cdots$$

$$R_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial^2}{\partial y}y\right)^n f(\vartheta_1 x, \vartheta_2 y); \qquad 0 < \vartheta_{1,2} < 1.$$

6. *Řada Taylorova* pro funkce několika proměnných:

$$f(x_1 + h_1,\ x_2 + h_2, \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}h_2 + \ldots\right)^n f(x_1, x_2 \ldots).$$

9. Mocninové řady pro funkce elementární.

U každé řady jest udán obor konvergence; nerovnost $|x| < \infty$ znamená, že řada konverguje pro každé x.

a. Řada binomická.

1. $$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots,$$

aneb, označíme-li binomické koeficienty

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}, \qquad \binom{n}{0} = 1,$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \dots$$

Binomická řada konverguje při libovolném n pro $|x| < 1$.

Je-li $a > b$, rozvineme podle **1.** při libovolném n

$$(a+b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = a^n (1+x)^n.$$

Na př. pro $n = -1, n = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$, $|x| < 1$ platí řady:

$$(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \dots \qquad \text{(řada geometrická)}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 \pm \frac{1}{2} x - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 - \dots$$

b. Řady exponenciální.

2. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \qquad |x| < \infty$;

3. $a^x = 1 + \frac{\lg a}{1!} x + \frac{(\lg a)^2}{2!} x^2 + \frac{(\lg a)^3}{3!} x^3 + \dots, \qquad a > 0, |x| < \infty$.

c. Řady logaritmické.

4. $\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \qquad -1 < x \leqq 1;$

5. $\lg \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right), \qquad |x| < 1;$

6. $\lg \frac{x+1}{x-1} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots\right), \qquad |x| > 1;$

7. $\lg x = 2\left\{\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \dots\right\}, \qquad x > 0$;

8. $\lg(a+x) = \lg a + 2\left\{\frac{x}{2a+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3 + \dots\right\}, \quad a > 0, x > -a.$

d. Řady pro funkce goniometrické, cyklometrické a hyperbolické.

V řadách 9.—17. jest x úhel v míře absolutní; rovněž v řadách 23.—25. úhly x a y.

9. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \qquad |x| < \infty ;$

10. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \qquad |x| < \infty ;$

11. $\sin^2 x = x^2 \left(1 - \frac{1}{3} x^2 + \frac{2}{45} x^4 - \frac{1}{315} x^6 + \frac{2}{14175} x^8 - \ldots\right);$

12. $\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{1}{3} x^4 - \frac{2}{45} x^6 + \frac{1}{315} x^8 - \frac{2}{14175} x^{10} + \ldots;$

13. $\sin x \cos x = x \left(1 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{2}{15} x^4 - \frac{4}{315} x^6 + \frac{2}{2835} x^8 - \right.$

$\left. - \frac{4}{155925} x^{10} + \ldots\right);$

14. $\sin^3 x = x^3 \left(1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{13}{120} x^4 - \frac{41}{3024} x^6 + \frac{671}{604800} x^8 - \ldots\right);$

15. $\cos^3 x = 1 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{7}{8} x^4 - \frac{61}{240} x^6 + \frac{547}{13440} x^8 -$

$- \frac{703}{172800} x^{10} + \ldots;$

16. $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \ldots, \qquad |x| < \frac{\pi}{2};$

17. $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2}{945} x^5 - \ldots, \quad 0 < |x| < \pi;$

18. $\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \ldots, \qquad |x| \leqq 1;$

19. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \qquad |x| \leqq 1;$

20. $\sinh x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots, \qquad |x| < \infty ;$

21. $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots, \qquad |x| < \infty ;$

22. $\operatorname{tgh} x = x - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \ldots, \qquad |x| < \infty;$

23. $\sin x \sin y = xy\left[1 - \frac{1}{6}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1}{360}\left(3x^4 + 10x^2y^2 + 3y^4\right) - \right.$
$- \frac{1}{5040}\left(x^6 + 7x^4y^2 + 7x^2y^4 + y^6\right) +$
$\left. + \frac{1}{1814400}\left(5x^8 + 60x^6y^2 + 126x^4y^4 + 60x^2y^6 + 5y^8\right) - \ldots\right];$

24. $\cos x \cos y = 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1}{24}\left(x^4 + 6x^2y^2 + y^4\right) -$
$- \frac{1}{720}\left(x^6 + 15x^4y^2 + 15x^2y^4 + y^6\right) +$
$+ \frac{1}{40320}\left(x^8 + 28x^6y^2 + 70x^4y^4 + 28x^2y^6 + y^8\right) - \ldots;$

25. $\sin x \cos y = x\left[1 - \frac{1}{6}\left(x^2 + 3y^2\right) + \frac{1}{120}\left(x^4 + 10x^2y^2 + 5y^4\right) - \right.$
$- \frac{1}{5040}\left(x^6 + 21x^4y^2 + 35x^2y^4 + 7y^6\right) +$
$\left. + \frac{1}{362880}\left(x^8 + 36x^6y^2 + 126x^4y^4 + 84x^2y^6 + 9y^8\right) - \ldots\right].$

e. Jiné řady.

Funkce, které nelze rozvinouti v řadu Maclaurinovu, protože v místě $x = 0$ nemají derivace konečné (jako $\operatorname{cotg} x$), nebo obtížně se rozvinují (jako $\operatorname{tg} x$), mají zvláštní rozvoje.

26. $\frac{x}{e^x - 1} = B_0 + B_1\frac{x}{1!} + B_2\frac{x^2}{2!} + B_4\frac{x^4}{4!} + B_6\frac{x^6}{6!} + \ldots, \; |x| < 2\pi.$

Bernoulliova čísla B_n, obsažená zde a také v koeficientech řad **16.** a **17.**, jsou dána symbolicky rekursním vzorcem pro $n - 1$ (od $n = 2$):

$$B_n = (1 + B)^n, \text{ kde } B^k = B_k, B_0 = 1, \; k = 1, 2, 3, 4, \ldots;$$

$$B_1 = -\frac{1}{2}; \; B_2 = \frac{1}{6}; \; B_4 = -\frac{1}{30}; \; B_6 = \frac{1}{42}; \; B_8 = -\frac{1}{30}; \; B_{10} = \frac{5}{66}; \ldots$$

$$B_3 = B_5 = \ldots = B_{2k+1} = \ldots = 0.$$

27. $x \operatorname{cotg} x = 1 - B_2\frac{(2x)^2}{2!} + B_4\frac{(2x)^4}{4!} - B_6\frac{(2x)^6}{6!} + \ldots, \; |x| < \pi$

28. $x \operatorname{tg} x = (2^2 - 1)B_2\frac{(2x)^2}{2!} - (2^4 - 1)B_4\frac{(2x)^4}{4!} + \ldots, \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$

Poznámka. Zbytek (chyba) v součtu alternující řady, t. j. řady se střídavými znaménky, se odhadne podle pravidla **4.** následujícího odst. 10.

10. Konvergence nekonečných řad.

1. Řada $u_1 + u_2 + u_n + \ldots$ in inf. $= \sum_1^\infty u_n$ je konvergentní, jestliže částečný součet prvých n členů $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ při n do nekonečna rostoucím má jednoznačnou, určitou a konečnou limitu s. Rozdíl $R_n = s - s_n$ sluje zbytek řady.

2. Nutná podmínka konvergence: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ není postačující.

3. Řada s členy různého znamení konverguje *absolutně*, konverguje-li řada absolutních hodnot jednotlivých členů.

4. Řada se střídavými znaménky (*alternující*) konverguje, zmenšují-li se absolutní hodnoty členů k nule. Zbytek alternující řady je absolutně menší, než první jeho člen a má jeho znamení $|R_n| < |u_{n+1}|$.

5. Řada s komplexními členy $w_n = u_n + iv_n$ konverguje, konverguje-li řada absolutních hodnot jednotlivých členů $|w_n| = \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$; pak konvergují i řady Σu_n, Σv_n.

6. Řada Σu_n s kladnými členy konverguje, jsou-li všechny její členy menší než stejnolehlé členy konvergentní řady s kladnými členy Σv_n.

7. Je-li s_n řady Σu_n absolutně menší než jistá mez A a v posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ je $\lim a_n = 0$, konverguje řada součinů $\Sigma a_n u_n$.

Kriteria konvergence řad: Řada konverguje, jestliže pro $n \to \infty$

8. $\lim \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1$ *(D'Alembert).* **9.** $\lim \left|\sqrt[n]{u_n}\right| < 1$ *(Cauchy).*

10. $\lim n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > 1$ *(Raabe).*

11. Řada Σu_n, jejíž členy jsou funkcemi proměnné x, konverguje *rovnoměrně* v intervalu (a, b), když pro libovolně malé kladné číslo ε lze vždy udati kladné ν, na x v uvedeném intervalu nezávislé, takže pro každé $n \geqq \nu$ platí $|R_n(x)| < \varepsilon$. Jsou-li členy rovnoměrně konvergující řady spojité funkce proměnné x, definuje řada funkci spojitou.

12. Řada s proměnnými členy konverguje v daném intervalu rovnoměrně, jsou-li její členy neustále absolutně menší než stejnolehlé členy jiné rovnoměrně konvergentní řady.

13. Řada mocninová $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ konverguje rovnoměrně pro všechny hodnoty x, absolutně menší než poloměr konvergence r:

$$|x| < r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_n + 1} \right|.$$

14. Řada sluje *semikonvergentní*, když její zbytek R_n pro jistou hodnotu n má minimum; třebaže diverguje, lze jí až po udaný index užíti k vyjádření funkce.

15. Rovnoměrně konvergentní řadu lze diferencovati člen po členu, konverguje-li odvozená řada rovnoměrně.

Rovnoměrně konvergentní řadu lze člen po členu integrovati.

16. Methoda neurčitých součinitelů: Ve dvou identických mocninových řadách rovnají se součinitelé u stejných mocnin proměnné.

17. Součin dvou mocninových řad je opět řada mocninová; její poloměr konvergence rovná se aspoň menšímu poloměru konvergence řad původních.

M. Godefroy: Théorie élémentaire des séries, 1902.
T. Bromwich: An introduction to the theory of infinite series, 1908.
K. Knopp: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. vyd. 1931.

11. Počítání s malými čísly.

Jsou-li čísla ε, δ, ζ, η vzhledem k jedné tak malá, že jejich mocniny a součiny mohou býti vynechány, platí přibližně:

1. $(1 \pm \varepsilon)^n \approx 1 \pm n\varepsilon$; **2.** $(1 \pm \varepsilon)^2 \approx 1 \pm 2\varepsilon$;

3. $\sqrt{1 \pm \varepsilon} \approx 1 \pm \frac{1}{2}\varepsilon$; **4.** $\frac{1}{1 \pm \varepsilon} \approx 1 \mp \varepsilon$;

5. $\frac{1}{(1 \pm \varepsilon)^2} \approx 1 \mp 2\varepsilon$; **6.** $\frac{1}{\sqrt{1 \pm \varepsilon}} \approx 1 \mp \frac{1}{2}\varepsilon$;

7. $(1 \pm \varepsilon)(1 \pm \delta)(1 \pm \zeta)\ldots \approx 1 \pm \varepsilon \pm \delta \pm \zeta \ldots$;

8. $\frac{(1 \pm \varepsilon)(1 \pm \delta)\ldots}{(1 \pm \zeta)(1 \pm \eta)\ldots} \approx 1 \pm \varepsilon \pm \delta \ldots \mp \zeta \mp \eta \ldots$.

Různí-li se p_1 a p_2 málo od sebe, je přibližně:

9. $\sqrt{p_1 p_2} \approx \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$.

Pro malý úhel ε v míře obloukové (absolutní) přibližně:

10. $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$; $\sin(x + \varepsilon) \approx \sin x + \varepsilon \cos x$;

11. $\cos \varepsilon \approx 1$; $\cos(x + \varepsilon) \approx \cos x - \varepsilon \sin x$;

12. $\operatorname{tg} \varepsilon \approx \varepsilon$; $\operatorname{tg}(x + \varepsilon) \approx \operatorname{tg} x + \frac{\varepsilon}{\cos^2 x}$.

Přesněji:

13. $\sin \varepsilon \approx \varepsilon\left(1 - \frac{1}{6}\varepsilon^2\right)$; **14.** $\cos \varepsilon \approx 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2$;

15. $\operatorname{tg} \varepsilon \approx \varepsilon\left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon^2\right)$; **16.** $\lg(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2$;

17. $\lg(x + \varepsilon) \approx \lg x + \frac{\varepsilon}{x} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{x^2}$; **18.** $\lg \frac{x + \varepsilon}{x - \varepsilon} \approx 2\frac{\varepsilon}{x} + \frac{2}{3}\frac{\varepsilon^3}{x^3}$.

12. Nekonečné součiny.

1. *Součin* (produkt *Π*, velké *pí*)

$$(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots = \prod_1^{\infty}(1+u_n)$$

konverguje nezávisle na pořadí, konverguje-li řada $\sum_1^{\infty} u_n$.

2. $\sin \pi x = \pi x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\ldots$ pro $|x|<\infty$;

3. $\cos \pi x = \left(1-\frac{2^2x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{2^2x^2}{3^2}\right)\ldots$ „ $|x|<\infty$;

4. Vzorec *Wallisův:*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\ldots$$

13. Neurčité tvary.

1. $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$: Zlomek $\frac{f(x)}{F(x)}$, který pro $x=a$ jest neurčitým tvarem

$$\left|\frac{f(x)}{F(x)}\right|_{x=a} = \frac{f(a)}{F(a)} = \frac{0}{0} \text{ nebo } \frac{\infty}{\infty},$$

má hodnotu

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)} = \left|\frac{f'(x)}{F'(x)}\right|_{x=a}, \text{ po případě } = \left|\frac{f''(x)}{F''(x)}\right|_{x=a} \text{ atd.}$$

Derivujeme zvlášť čitatele, zvlášť jmenovatele a do podílu dosadíme $x=a$; po případě výkon opakujeme.

Substituční znaménko (svislá čára) se čte: má se do výrazu dosaditi $x=a$.

2. $0\cdot\infty$: Součin $f(x)\cdot F(x)$, který pro $x=a$ je neurčitým tvarem $0\cdot\infty$, převedeme na předcházející

$$f(x)\cdot F(x) = f(x) : \frac{1}{F(x)} = F(x) : \frac{1}{f(x)}.$$

3. $\infty-\infty$: Rozdíl $F(x)-f(x)$, který pro $x=a$ jest neurčitým tvarem $\infty-\infty$, převedeme na podíl, kladouce

$$F(x) = \frac{u_1(x)}{v_1(x)}, \qquad f(x) = \frac{u_2(x)}{v_2(x)},$$

aby pro $x = a$ jmenovatelé byly nuly, čitatelé ani 0 ani ∞; pak

$$\Big|_{x=a} [F(x) - f(x)] = \Big|_{x=a} \frac{u_1 v_2 - u_2 v_1}{v_1 v_2} = \frac{0}{0}.$$

4. $0^0, \infty^0, 1^\infty$: Výraz $y = [f(x)]^{F(x)}$, který pro $x = a$ nabývá neurčitého tvaru, napřed logaritmujeme; stanovíme hodnotu tvaru

$$\Big|_{x=a} \lg y = \Big|_{x=a} F(x) \lg f(x) = C$$

podle předcházejícího a přejdeme k funkci exponenciální $y = e^C$.

14. Maxima a minima (extrémní hodnoty).

V nejbližším okolí maxima má funkce $f(x)$ hodnoty menší než max., v okolí minima větší než min. Okolí vrcholu křivky $y = f(x)$ je v maximu *pod* tečnou, v minimu *nad* tečnou rovnoběžnou k ose x.

1. *Maxima a minima funkce jedné proměnné* $y = f(x)$.

Funkce $f(x)$ má v místě $x = a$ extrém (maximum nebo minimum), jestliže nejnižší derivace, která pro $x = a$ nevymizí, je sudá. Je-li záporná, jest $f(a)$ maximum, je-li kladná, minimum.

První derivaci položíme rovnu nule. Řešením rovnice $f'(x) = 0$ plynou kořeny $x_1, x_2, \ldots$, t. j. místa, v nichž může býti extrém (vrcholy s tečnami směru **x**). O jeho druhu rozhodne znamení druhé derivace. Je-li na př. pro kořen $x = a$ druhá derivace

$$f''(a) \begin{cases} \text{záporná, t. j. } < 0, \\ \text{kladná, } \quad ,, \quad > 0, \end{cases} \text{ má funkce v místě } x = a \begin{cases} \text{maximum} \\ \text{minimum} \end{cases} f(a).$$

Kdyby $f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$, není v místě $x = a$ extrém, nýbrž křivka $y = f(x)$ má tam bod obratu s tečnou směru **x**.

Jestliže $f'''(a) = 0$, $f^{(4)}(a) \neq 0$, jest $f(a)$ maximum nebo minimum a o jeho druhu rozhodne znamení čtvrté derivace; atd.

Poznámka. Je-li první derivace (která byla položena rovna nule) zlomek $f'(x) = \frac{u}{v}$, jest $f''(x) = \frac{u'}{v}$; t. j. o znamení druhé derivace rozhodne výraz, který obdržíme, derivujeme-li jen čitatele a jmenovatele ponecháme beze změny.

2. *Maxima a minima nerozvinuté funkce* $f(x, y) = 0$.

Hodnoty x, pro něž nastanou extrémy proměnné y, plynou řešením rovnic

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ f(x, y) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ s výhradou } \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0.$$

O druhu extrému rozhodne znamení výrazu

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \frac{\partial f}{\partial y}, \text{ který jest } \begin{matrix} < 0 \\ > 0 \end{matrix} \text{ při } \begin{matrix} \text{maximu,} \\ \text{minimu.} \end{matrix}$$

3. *Extrém funkce dvou nezávisle proměnných* $z = f(x, y)$. Hodnoty x, y, pro které má z extrém, plynou řešením rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

s výhradou, že pro vypočtené dvojice kořenů je výraz

$$D = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0.$$

Pak obě druhé derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ mají současně totéž znamení: záporné při maximu, kladné při minimu.

Kdyby byl diskriminant $D < 0$, má funkce t. zv. *maximum-minimum*, zobrazené na ploše $z = f(x, y)$ sedlem s horizontální rovinou tečnou.

4. *Extrém funkce několika proměnných* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Podmínky pro extrém:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

První parciální derivace podle všech proměnných položíme rovny nule; řešením této soustavy rovnic najdeme hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pro které může funkce míti extrém.

V místě extrému jest totální diferenciál du identicky nula (t. j. pro všechny přírůstky $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$); druhý diferenciál d^2u musí míti stálé znamení: je záporný při maximu, kladný při minimu. Povaha úkolu činí zpravidla toto vyšetřování zbytečným.

5. *Relativní extrémy.* Extrém funkce $V = f(x, y, z)$, v níž proměnné x, y, z jsou vázány vztahem $\varphi(x, y, z) = 0$, stanovíme jako prostý extrém výrazu $W \equiv V + \lambda\varphi$. Řešením čtyř rovnic

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0\,, \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = 0\,; \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = 0\,; \qquad \varphi(x, y, z) = 0$$

určíme x, y, z, pro něž nastává maximum nebo minimum, a pomocný Lagrangeův faktor λ.

6. *Relativní extrém funkce* $V = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, v němž n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest vázáno $m < n$ podmínkami

$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad \varphi_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots \ \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0,$

najdeme jako prostý extrém výrazu

$$W = V + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_m\varphi_m.$$

Řešením $n + m$ rovnic

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n} = 0, \qquad \varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_m = 0$$

plynou $x_1 \ldots, x_n$ pro extrém (a pomocné faktory $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$).

15. Funkce závislé a nezávislé.

1. Dáno je m funkcí $y_1, y_2 \ldots, y_m$ o n proměnných $x_1, x_2 \ldots, x_n$,

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Funkce jsou na sobě *závislé*, je-li mezi nimi nějaký identický, t. j. pro každé x platný vztah

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0;$$

jinak jsou na sobě *nezávislé*. Rozhoduje řád *funkcionální matice*

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Funkce jsou na sobě nezávislé, když matice M je řádu $r = m$. Je-li $m \leqq n$ a M řádu $r < m$, jest mezi m funkcemi jen r nezávislých; zbývajících $m - r$ možno jimi vyjádřiti.

2. Dáno je n funkcí $y_1, y_2, \ldots, y_n$ o n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

O závislosti rozhoduje *funkcionální determinant*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial (y_1, y_2, \ldots y_n)}{\partial (x_1, x_2, \ldots x_n)}.$$

Funkce jsou na sobě závislé, když funkcionální determinant $J = 0$. Funkce jsou na sobě nezávislé, je-li $J \gtrless 0$ (t. j. různý od nuly).

3. Dáno je n funkcí $y_1, y_2, \ldots, y_n$ jedné proměnné x,

$$y_i = f_i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Funkce jsou na sobě *lineárně závislé*, platí-li mezi nimi lineární vztah

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = 0,$$

kde konstanty $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nejsou současně nulami. Podmínku vyjadřuje *Wronskiho determinant*, složený z funkcí a derivací.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} .$$

Funkce jsou lineárně závislé, je-li determinant $W = 0$. Funkce jsou lineárně nezávislé, je-li $W \gtrless 0$.

IX. Počet integrální.

A. Integrály neomezené (neurčité).

1. Definice a pomocné věty.

1. *Neomezený (neurčitý) integrál* funkce $f(x)$ sluje funkce $F(x)$, která vyhovuje identitě $f(x) = F'(x)$, takže diferenciál

$$f(x)\,dx = F'(x)\,dx = d\,[F(x) + C];$$

značí se

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

kde C je libovolná *integrační konstanta*. Dva formálně různé integrály téže funkce mohou se lišiti jen integrační konstantou.

Diferencování a integrování jsou operace inversní, které se vzájemně ruší:

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx; \qquad \int dF(x) = F(x).$$

2. $\int a \cdot df(x) = a \cdot \int df(x) = a \cdot f(x) + C; \qquad a = \text{konst.}$

3. $\int (u + v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$, kde u, v jsou funkce x.

4. *Integrace po částech:*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

5. *Substituce* $x = \varphi(t)$; $\qquad dx = \varphi'(t)\,dt$;

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

2. Základní vzorce.

Z každého diferenciálního vzorce plyne obrácením vzorec integrální.

1. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Neplatí pro $n = -1$; v tom případě

2. $\int \frac{dx}{x} = \lg x + C = \lg C_1 x$, zvolíme-li konstantu $C = \lg C_1$.

3. $\int e^x \, dx = e^x + C$;

4. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\lg a} + C$;

5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$;

6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$;

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$;

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C'$;

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$;

11. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \lg \frac{1+x}{1-x} + C$; $(x < 1)$

12. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \lg \frac{x-1}{x+1} + C$; $(x > 1)$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm c}} = \lg (x + \sqrt{x^2 \pm c}) + C$;

14. $\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$;

15. $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$;

16. $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cotgh} x + C$;

17. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C$;

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{argsinh} x + C = \lg (x + \sqrt{x^2+1}) + C$;

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argcosh} x + C = \lg (x + \sqrt{x^2-1}) + C$;

20. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{argtgh} x + C = \operatorname{argcotgh} x + C'$ (viz **11.**);

21. $\int \frac{dx}{x^2-1} = -\operatorname{argcotgh} x + C =$ (viz **12.**);

3. Integrály funkcí racionálních.

1. $\int (a+bx)^n \,dx = \frac{1}{b}\frac{(a+bx)^{n+1}}{n+1} + C$, neplatí pro $n = -1$;

2. $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\lg(a+bx) + C$;

3. $\int \frac{dx}{a-bx} = -\frac{1}{b}\lg(a-bx) + C = \frac{1}{b}\lg\frac{1}{a-bx} + C$;

4. $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg} x\sqrt{\frac{b}{a}} + C$;

5. $\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\lg\frac{\sqrt{ab}+bx}{\sqrt{ab}-bx} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{argtgh} x\sqrt{\frac{b}{a}} + C.$

V dalším jest

$$X = ax^2 + bx + c; \qquad q = 4ac - b^2.$$

6. $\int \frac{dx}{X} = \frac{2}{\sqrt{q}}\operatorname{arctg}\frac{b+2ax}{\sqrt{q}} + C$, je-li $q > 0$;

7. $\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{\sqrt{-q}}\lg\frac{b+2ax-\sqrt{-q}}{b+2ax+\sqrt{-q}} + C$, je li $q < 0$;

8. $\int \frac{dx}{X} = \frac{-2}{b+2ax} + C$, je-li $q = 0$;

9. $\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2a}\lg X - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X} + C$;

10. $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2c}\lg\frac{x^2}{X} - \frac{b}{2c}\int\frac{dx}{X} + C.$

Redukční vzorce. Při celém kladném m a n platí vzorce:

11. $\int \frac{dx}{X^n} = \frac{b+2ax}{(n-1)(4ac-b^2)}\frac{1}{X^{n-1}} + \frac{2a(2n-3)}{(n-1)(4ac-b^2)}\int\frac{dx}{X^{n-1}}$;

12. $\int \frac{x^m\,dx}{X^n} = \frac{-1}{(2n-1-m)a}\frac{x^{m-1}}{X^{n-1}} -$

$$- \frac{(n-m)b}{(2n-1-m)a}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{X^n} + \frac{(m-1)c}{(2n-1-m)a}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{X^n}$$

s výhradou: $m \neq 2n-1$.

13. $$\int \frac{dx}{x^m X^n} = \frac{-1}{(m-1)cx^{m-1}X^{n-1}} - \frac{(n-2+m)b}{(m-1)c}\int \frac{dx}{x^{m-1}X^n} - \frac{(2n-3+m)a}{(m-1)c}\int \frac{dx}{x^{m-2}X^n}$$

s výhradou: $m \neq 1$.

4. Integrace racionální funkce ryze lomené.

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \int \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}{x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}\,dx. \qquad (m<n)$$

Integrovanou funkci rozložíme na částečné zlomky.

a) Kořeny rovnice $F(x) = 0$ jsou reálné různé:

$$F(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-\alpha_n};$$

$$A_1 = \frac{f(\alpha_1)}{F'(\alpha_1)}, \qquad A_2 = \frac{f(\alpha_2)}{F'(\alpha_2)}, \ldots, \qquad A_n = \frac{f(\alpha_n)}{F'(\alpha_n)}.$$

b) Reálné kořeny rovnice $F(x) = 0$ se zčásti opakují:

$$F(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots$$

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{x-\alpha} + \frac{B_1}{(x-\beta)^l} + \frac{B_2}{(x-\beta)^{l-1}} + \ldots + \frac{B_l}{x-\beta} + \frac{C_1}{x-\gamma_1} + \frac{C_2}{x-\gamma_2} + \ldots$$

c) Vyskytují-li se kořeny imaginární (komplexní), spojíme sdružené kořenové rozdíly součinem v kvadratický trojčlen; částečné zlomky mají pak tvar

$$\frac{Mx+N}{a+bx+cx^2}.$$

Konstanty v čitatelích najdeme methodou neurčitých součinitelů; pravou stranu upravíme na společného jmenovatele $F(x)$ a po odstranění zlomků přirovnáme na obou stranách koeficienty u stejně vysokých mocnin x. Tak dostaneme řadu lineárních rovnic, z nichž možno konstanty $A, B, C, \ldots M, N$ vypočísti.

Integrace racionální ryze lomené funkce je tím převedena na integrály tvaru

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^m} \quad \text{nebo} \quad \int \frac{Mx+N}{(a+bx+cx^2)^m}\,\mathrm{d}x.$$

1. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = \frac{1}{3}\lg\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C;$$

2. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\lg\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right] + C.$$

Neryze lomenou funkci ($m > n$) převedeme dělením na celistvou a ryze lomenou.

5. Integrály funkcí iracionálních.

1. $\int R\left(x, \sqrt[n]{a+bx}\right)\mathrm{d}x$, kde R značí racionální operaci, přejde na integrál racionální funkce substitucí:

$$\sqrt[n]{a+bx} = y;$$

2. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

3. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \lg\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} + C'.$$

V dalším jest $X = ax^2 + bx + c$.

4. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\lg\left(2ax + b + 2\sqrt{aX}\right) + C, \quad a > 0;$$

5. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{c+bx-ax^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{4ac+b^2}} + C, \quad a > 0;$$

6. $$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \frac{1}{a}\sqrt{X} - \frac{b}{2a}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}$$

7. $$\int \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{\sqrt{X}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_{n-1}x^{n-1}\right)\sqrt{X} + A_n\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}.$$

Diferencováním a pak methodou neurčitých součinitelů plynou konstanty $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

8. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C;$

9. $\int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\lg\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C;$

$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{argsinh}\frac{x}{a} + C';$

10. $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\lg\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C;$

$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} + C';$

11. $\int \sqrt{X}\,\mathrm{d}x = \frac{2ax + b}{4a}\sqrt{X} + \frac{4ac - b^2}{8a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} + C;$

12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\alpha + \beta x)^m \sqrt{X}}$; substituce $\alpha + \beta x = \frac{1}{t}$ vede na tvar **7.**

6. Integrály binomické.

Integrály tvaru $\int x^m (a + bx^n)^p\,\mathrm{d}x$, kde m, n, p jsou čísla racionální, přejdou na integrály racionálních diferenciálů, je-li

a) $\frac{m+1}{n}$ číslo celé, substitucí: $a + bx^n = y$;

b) $\frac{m+1}{n} + p$ číslo celé, substitucí: $ax^{-n} + b = y$.

7. Integrály funkcí transcendentních.

1. $\int x^n \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\left(x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - \ldots (-1)^n n!\right) + C$

pro n celé kladné;

2. $\int (\lg x)^n\,\mathrm{d}x = x(\lg x)^n - n\int (\lg x)^{n-1}\,\mathrm{d}x;$

3. $\int \lg x\,\mathrm{d}x = x\lg x - x + C;$

4. $\int x^n (\lg x)^m\,\mathrm{d}x = \int y^m \mathrm{e}^{(n+1)y}\,\mathrm{d}y, \qquad$ kde $y = \lg x;$

5. $\int \frac{(\lg x)^n}{x}\,\mathrm{d}x = \int (\lg x)^n \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{(\lg x)^{n+1}}{n+1} + C$ pro $n \neq -1;$

6. $\int \frac{dx}{x \lg x} = \int \frac{d \lg x}{\lg x} = \lg (\lg x) + C.$

7. $\int R(e^x)\, dx$, kde R značí racionální operaci, řešíme substitucí:

$$e^x = t; \quad x = \lg t, \quad dx = \frac{dt}{t}.$$

8. Integrály funkcí goniometrických.

1. $\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C;$

2. $\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C;$

3. $\int \sin mx\, dx = -\frac{\cos mx}{m} + C;$ 4. $\int \cos mx\, dx = \frac{\sin mx}{m} + C;$

5. $\int \sin mx \cos nx\, dx = -\frac{\cos (m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos (m-n)x}{2(m-n)} + C,$

6. $\int \sin mx \sin nx\, dx = \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + C,$ $\Big\}\ |m| \neq |n|;$

7. $\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + C,$

8. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\lg \cos x + C;$ 9. $\int \operatorname{cotg} x\, dx = \lg \sin x + C;$

10. $\int \frac{dx}{\sin x} = \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C;$ 11. $\int \frac{dx}{\cos x} = \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + C;$

12. $\int \frac{dx}{\sinh x} = -2 \operatorname{argtgh} e^x + C;$ 13. $\int \frac{dx}{\cosh x} = 2 \operatorname{arctgh} e^x + C;$

14. $\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C;$ 15. $\int \frac{dx}{1 - \cos x} = -\operatorname{cotg} \frac{x}{2} + C;$

16. $\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C;$ 17. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \lg \operatorname{tg} x + C;$

18. $\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x)\, dx$, kde R značí racionální operaci, přejdou na integrály racionální funkce substitucí:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t; \quad dx = \frac{2\, dt}{1 + t^2};$$

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

19. $\int \sin^3 x\,dx = -\frac{1}{3}\cos x\,(2+\sin^2 x)+C;$

20. $\int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{3}\sin x\,(2+\cos^2 x)+C;$

21. $\int \sin^2 x\cos x\,dx = \frac{1}{3}\sin^3 x+C;$

22. $\int \sin x\cos^2 x\,dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$

9. Redukční vzorce.

Pro n celé kladné:

1. $\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx;$

2. $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx.$

Při lichém n vyčíslíme integrály také substitucemi:

1) $\cos x = t$; 2) $\sin x = t$.

3. $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2}x}$

4. $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2}x}$ $\Big\}\ n>1;$

5. $\int \mathrm{tg}^n x\,dx = \frac{\mathrm{tg}^{n-1}x}{n-1}-\int \mathrm{tg}^{n-2}x\,dx$

6. $\int \mathrm{cotg}^n x\,dx = -\frac{\mathrm{cotg}^{n-1}x}{n-1}-\int \mathrm{cotg}^{n-2}x\,dx$ $\Big\}\ n>1.$

10. Integrály smíšených diferenciálů.

1. $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)+C;$

2. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)+C;$

3. $\int x\sin ax\,dx = -\frac{1}{a}x\cos ax+\frac{1}{a^2}\sin ax+C;$

4. $\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a}x\sin ax+\frac{1}{a^2}\cos ax+C;$

5. $\int x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} \sin^2 x - \frac{1}{2} x \sin x \cos x + C;$

6. $\int x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} \sin^2 x + \frac{1}{2} x \sin x \cos x + C;$

7. $\int x \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{8} (\sin 2x - 2x \cos 2x) + C;$

8. $\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C;$

9. $\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \lg (1 + x^2) + C;$

10. $\int \sinh^2 x \, dx = -\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sinh 2x + C;$

11. $\int \cosh^2 x \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sinh 2x + C.$

G. Petit-Bois: Tables d'intégrales indéfinies, 1906.
F. Tölke: Praktische Funktionenlehre I., 1943.

B. Integrály omezené (určité).

1. Definice a pomocné věty.

1. *Omezený integrál funkce* $f(x)$ v mezích od $x = a$ do $x = b$ jest rozdíl dvou hodnot, kterých nabývá neomezený integrál

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C$$

pro *horní mez* b a *dolní mez* a (základní věta); značí se

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x) + C]_{x=a}^{x=b} = \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a).$$

V omezeném integrálu není integrační konstanty. Omezený integrál má ve stálých mezích stálou, určitou hodnotu (*určitý integrál*). Na označení proměnné nezáleží.

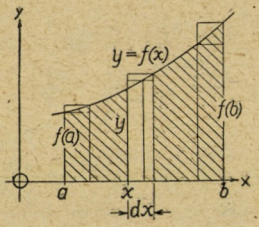
2. *Omezený integrál funkce* $f(x)$ v mezích od $x = a$ do $x = b$ jest limita součtu (součtová definice)

$$\lim_{n \to \infty} \sum_1^n f(\xi_\nu) \, \Delta x_\nu = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Interval (a, b), v němž je dána konečná funkce $f(x)$, rozdělíme na n libovolných dílků $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. V každém dílku Δx_ν zvolíme libovolné místo ξ_ν s funkční hodnotou $f(\xi_\nu)$ a utvoříme součiny $f(\xi_\nu) \, \Delta x_\nu$. Součet těchto součinů po celém intervalu od a do b:

$$\sum_1^n f(\xi_\nu) \, \Delta x_\nu = S_a^b, \qquad x_{\nu-1} \leqq \xi_\nu \leqq x_\nu.$$

Roste-li n do nekonečna, zmenšují se Δx k nule a součet S přejde v integrál $\int$.



Obr. 29.

Integrál existuje, konverguje-li součet S k téže hodnotě, ať v jednotlivých dílech Δx intervalu jakkoli rozděleného volíme hodnoty $f(\xi)$ kterékoli, třebas největší nebo nejmenší.

Omezený integrál funkce $f(x)$ jest součet nekonečného počtu nekonečně malých elementů $f(x)\,dx$ v daném intervalu. Geometricky značí obsah plochy, omezené křivkou $y = f(x)$, pořadnicemi $y_a = f(a)$, $y_b = f(b)$ a osou x (obr. 29.); je to limita, k níž se bez omezení blíží součet obdélníků opsaných, vepsaných i středních.

Omezený integrál s proměnnou horní mezí je spojitou funkcí horní meze a definuje t. zv. *integrální funkci*.

3. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$; **4.** $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

5. Je-li $a < \alpha < \beta < b$, jest

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx + \int_a^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx.$$

6. Je-li integrovaná funkce *sudá*, t. j. $f(-x) = +f(x)$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

7. Je-li integrovaná funkce *lichá*, t. j. $f(-x) = -f(x)$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

8. *Integrace po částech*:

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du.$$

9. *Střední hodnota funkce:*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$ aritmetický průměr všech $f(x)$;

$$[f(\xi)]^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^2\,dx,$$ čtverec aritm. průměru všech $[f(x)]^2$.

Knihovna

10. *Integrovaná funkce je nekonečná* pro $x = c$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\eta \to 0} \int_{c+\eta}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

11. *Integrační interval je nekonečný*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b \to \infty} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

12. *Derivace integrálu podle mezí*:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} \int_a^v f(x)\,\mathrm{d}x = f(v); \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \int_u^b f(x)\,\mathrm{d}x = -f(u).$$

13. *Derivace podle parametru*, na němž meze nezávisí:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_a^b f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}x.$$

V intervalu (a, b) musí býti derivace $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$ konečné.

14. *Derivace podle parametru*, na němž meze jsou závislé:

$$u = \varphi(\alpha), \qquad v = \psi(\alpha),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_u^v f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x = \int_u^v \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}x + f(v, \alpha)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\alpha} - f(u, \alpha)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\alpha}.$$

15. *Integrace za integračním znamením*:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left\{ \int_{u_1}^{x_2} f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha)\,\mathrm{d}\alpha \right\} \mathrm{d}x.$$

16. *Zavádění nové proměnné* do omezeného integrálu. Substitucí $x = \varphi(t)$, z čehož $t = \psi(x)$, transformuje se integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} g(t)\,\mathrm{d}t$$

s výhradou, že proměnná t se mění ve stálém smyslu. Mění-li se na př. v úseku od a do c v jednom, od c do b v opačném smyslu, dlužno integraci rozděliti podle **5.** takto:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\psi(a)}^{\psi(c)} g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\psi(c)}^{\psi(b)} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Některé omezené integrály a funkce.

1. $\int_a^\infty \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$;

2. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}$;

3. $\int_a^b \frac{dx}{x} = \lg \frac{b}{a}$;

4. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \pi$;

5. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \arccos \frac{b}{a}$ pro $a^2 > b^2$.

$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \lg \frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}$ „ $a^2 < b^2$.

$= \frac{1}{a}$ „ $a = b$;

6. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}$;

Pro čísla m, n celá kladná:

7. $\int_0^\pi \sin mx \sin nx\, dx = \int_0^\pi \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{„ } m = n; \end{cases}$

$\int_0^\pi \sin mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } m - n \text{ sudé}, \\ \frac{2m}{m^2-n^2} & \text{„ } m - n \text{ liché}; \end{cases}$

8. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \int_0^{2\pi} = \begin{cases} 0 & \text{„ } m \neq n, \\ \pi & \text{„ } m = n; \end{cases}$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \int_0^{2\pi} = \begin{cases} 0 & \text{„ } m \neq n, \\ \pi & \text{„ } m = n; \end{cases}$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = \int_0^{2\pi} = 0$;

9. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{4}$;

10. $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\, dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n} \frac{\pi}{2}$;

11. $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x\, dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n+1)}$;

12. $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \cos^{2n} x \, dx = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2m-1) \cdot 1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2m+2n)} \frac{\pi}{2};$$

13. $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x \cos^{2n+1} x \, dx = \frac{1}{2} \frac{m!\, n!}{(m+n+1)!};$$

14. $$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = \operatorname{sgn} b \cdot \frac{\pi}{2};$$ (*signum*, t. j. znaménko).

Dirichletův přetržitý faktor signum:

$$\operatorname{sgn} t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{x} dx = \begin{cases} +1 & \text{pro } t > 0, \\ 0 & \text{„ } t = 0, \\ -1 & \text{„ } t < 0; \end{cases}$$

15. $$\int_0^{\infty} \frac{a \cos bx}{a^2 + x^2} dx = \operatorname{sgn} a \cdot \frac{\pi}{2} e^{-|ab|};$$

16. $$\int_0^{\infty} \frac{x \sin bx}{a^2 + x^2} dx = \operatorname{sgn} b \cdot \frac{\pi}{2} e^{-|ab|};$$

Fresnelovy integrály:

17. $$\int_0^{\infty} \cos(x^2) \, dx = \int_0^{\infty} \sin(x^2) \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$ aneb

18. $$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

19. *Laplaceův (Gaußův) integrál:* $$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi};$$

20. $$\int_0^{\infty} e^{-ax^2 + bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}, \quad a > 0;$$

21. $$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad a > 0;$$

22. $$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad a > 0;$$

23. $$\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, \quad a > 0;$$

24. $\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos b\,x\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}}, \quad a>0;$

25. $\int_0^{\pi/2} \lg \sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} \lg \cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\lg 2;$

26. *Funkce gamma* je definována Eulerovým integrálem 2. druhu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt; \qquad \Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x\,dt$$

pro kladné hodnoty argumentu $x>0$; jako nekonečný konvergentní součin (Gaußovo označení Π) platí pro každé x:

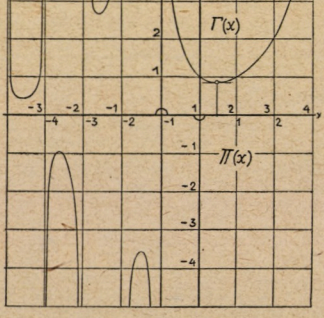
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)} = \Pi(x-1);$$

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} = \Pi(x).$$

Základní vztahy funkce gamma:

27. $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ čili $\Pi(x) = x\,\Pi(x-1)$;

28. $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} = \Pi(x-1)\,\Pi(-x)$;



Obr. 30.

29. $\Gamma(0)=\infty$; $\Gamma(1)=1$; $\Gamma(2)=1$;
$\Gamma(3)=2\cdot 1$; $\Gamma(4)=3\cdot 2\cdot 1$; ...

Pro celé kladné n

$$\Gamma(n) = (n-1)! = \Pi(n-1);$$
$$\Gamma(n+1) = n! = \Pi(n).$$

Funkce gamma rozšiřuje pojem faktoriálu na čísla x, jež nejsou celá, takže

$$x! = \Pi(x) = \Gamma(x+1);$$

30. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Pi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}; \dots$$

V místech $x = 0, -1, -2, \dots$ (póly) je $\Gamma(x) = \infty$.

Průběh funkce gamma je zřejmý z obr. 30. a z tabulky.

Tabulka funkce $\Gamma(x)$ od $x=0$ do $x=2$.

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
0	∞	0,50	1,77245	1	1	1,50	0,88623
0,05	19,47009	55	1,61612	1,05	0,97350	55	88887
10	9,51351	60	1,48919	10	95135	60	89352
15	6,22027	65	1,38480	15	93304	65	90012
20	4,59084	70	1,29806	20	91817	70	90864
0,25	3,62561	0,75	1,22542	1,25	0,90640	1,75	0,91906
30	2,99157	80	1,16423	30	89747	80	93138
35	2,54615	85	1,11248	35	89115	85	94561
40	2,21816	90	1,06863	40	88726	90	96177
45	1,96814	95	1,03145	45	88566	95	97988
0,50	1,77245	1	1	1,46	0,88560 minimum	2	1

31. $\lg\Gamma(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\lg x-x+\lg\sqrt{2\pi}+\frac{\vartheta}{4x}\,;\quad 0<\vartheta<1\,.$

32. *Vzorec Stirlingův:*

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots n=n^n\sqrt{2\pi n}\,\mathrm{e}^{-n+\frac{\vartheta}{4n}}\,;$$

pro veliká n jest přibližně

$$n!\approx n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}\,;$$

33. $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,;$

34. $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}x^{2k}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{2^{k+1}}\sqrt{\pi}\,.$

Funkcí gamma je možno vyjádřiti četné integrály a funkce.

35. $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-nt}t^{x-1}\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(x)}{n^x}\,;$

36. $\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}x\cos^{2n-1}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\,;$

37. $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-1}x\,\mathrm{d}x=2^{2n-2}\,\frac{\Gamma^2(n)}{\Gamma(2n)}\,.$

38. *Funkce béta,* definovaná Eulerovým integrálem 1. druhu:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x)^{p+q}}$$

je funkcí dvou kladných argumentů $p > 0$, $q > 0$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

39. *Gaußova funkce* Ψ:

$$\Psi(x) = \frac{d \lg \Pi(x)}{dx} = \frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)} = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)};$$

40. $$\Psi(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\lg n - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} - \ldots - \frac{1}{n+x}\right);$$

$$\Psi(0) = \lim_{n\to\infty}\left(\lg n - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n}\right) = -C,$$

kde $C = 0{,}577\,215\,665\ldots$ je *Eulerova konstanta.*

41. $$\Psi(n) = -C + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

3. Integrální funkce vyjádřené řadou.

Četné integrály nelze vyčísliti elementárními funkcemi v zakončeném tvaru. Možno-li funkci $f(x)$ rozvinouti v konvergentní řadu mocninovou

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

plyne integrováním řada

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots,$$

která konverguje v témže intervalu a vyjadřuje integrální funkci $F(x)$. Pro různé funkce tohoto druhu jsou sestaveny tabulky.

1. *Integrální sinus:*

$$\mathrm{Si}\, x = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{5!} - \ldots \qquad |x| < \infty.$$

2. *Integrální kosinus:*

$$\mathrm{Ci}\, x = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt = C + \lg x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4}\frac{x^4}{4!} - \ldots \qquad |x| < \infty.$$

3. *Integrální logaritmus:*

$$\mathrm{li}\, x = \int_0^x \frac{dt}{\lg t} = C + \lg(\lg x) + \lg x + \frac{1}{2}\frac{(\lg x)^2}{2!} + \frac{1}{3}\frac{(\lg x)^3}{3!} + \ldots,$$

$$0 < x < \infty,$$

kde *Eulerova konstanta*

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \lg n\right) = 0{,}577\,215\,665\ldots$$

4. *Fresnelovy integrály:*

$$\int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{x}\left(1 - \frac{x^2}{5\cdot 2!} + \frac{x^4}{9\cdot 4!} - \frac{x^6}{13\cdot 6!} + \ldots\right),$$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{x}\left(\frac{x}{3} - \frac{x^3}{7\cdot 3!} + \frac{x^5}{11\cdot 5!} - \frac{x^7}{15\cdot 7!} + \ldots\right). \qquad |x| < \infty.$$

Fresnelovy integrály jsou pravoúhlé souřadnice *Cornuovy* spirály *(klothoidy)*.

5. *Laplaceův-Gaußův integrál:*

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t;$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{1} - \frac{1}{1!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{x^5}{5} - \ldots\right), \qquad |x| < \infty.$$

Semikonvergentní řada pro velké x:

$$\Phi(x) = 1 - \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1\cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2x^2)^3} + \ldots\right).$$

6. *Eliptické integrály (Legendreovy) normální* prvního a druhého druhu:

I. $$u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k,\varphi);$$

II. $$\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = E(k,\varphi).$$

Tvar s proměnnou φ je obvyklejší; modul $k < 1$.

$$F(k,\varphi) = J_0 + \frac{1}{2}k^2J_2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4J_4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6J_6 + \ldots,$$

$$E(k,\varphi) = J_0 - \frac{1}{2}k^2J_2 - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}k^4J_4 - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}J_6 - \ldots,$$

kde $$J_{2n} = \int_0^\varphi \sin^{2n}\varphi\,\mathrm{d}\varphi; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

7. *Úplné eliptické integrály* I. a II. druhu:

$$\mathbf{K} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \ldots\right\};$$

$$\mathbf{E} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \ldots\right.$$

8. *Doplňkové eliptické integrály* s modulem $k' = +\sqrt{1-k^2}$

$$\mathbf{K}' = F\left(k', \frac{\pi}{2}\right), \qquad \mathbf{E}' = E\left(k', \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\mathbf{K}\,\mathbf{E}' + \mathbf{K}'\,\mathbf{E} - \mathbf{K}\,\mathbf{K}' = \frac{\pi}{2}.$$

9. *Eliptické funkce Legendreovy* (Jacobiovy).

Vzniknou obrácením funkční závislosti z integrálu $u = F(k, \varphi)$. Při pevném modulu k je horní mez φ funkce integrálu u; sluje amplituda u při modulu k:

$$\varphi = \mathrm{am}\ u \pmod{k}$$

$x = \sin\varphi = \mathrm{sn}\,u$, $\sqrt{1-x^2} = \cos\varphi = \mathrm{cn}\,u$, $\sqrt{1-k^2x^2} = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \mathrm{dn}\,u$.
sinusamplituda u, kosinusamplituda u, deltaamplituda u.

Goniometrické funkce jsou zvláštním případem těchto eliptických ($k=0$; $\mathrm{dn}\,u=1$).

$$\mathrm{sn}\,u = u - (1+k^2)\frac{u^3}{3!} + (1+14k^2+k^4)\frac{u^5}{5!} - \ldots$$

$$\mathrm{cn}\,u = 1 - \frac{u^2}{2!} + (1+4k^2)\frac{u^4}{4!} - (1+44k^2+16k^4)\frac{u^6}{6!} + \ldots$$

$$\mathrm{dn}\,u = 1 - k^2\frac{u^2}{2!} + k^2(4+k^2)\frac{u^4}{4!} - k^2(16+44k^2+k^4)\frac{u^6}{6!} + \ldots$$

$\mathrm{sn}(-u) = -\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}(-u) = +\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}(-u) = +\mathrm{dn}\,u$;

$\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u = 1$, $\mathrm{dn}^2 u - k^2\,\mathrm{cn}^2 u = 1 - k^2 = k'^2$, $\mathrm{dn}^2 u + k^2\,\mathrm{sn}^2 u = 1$;

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{d}u} = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \qquad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{d}u} = -\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \qquad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{d}u} = -k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u.$$

4. Přibližný výpočet omezených integrálů (mechanická kvadratura).

Omezený integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ vyčíslíme jako obsah plochy, omezené křivkou $y=f(x)$, krajními pořadnicemi $y_a = f(a)$, $y_b = f(b)$ a osou **x**. Integrační obor (a, b) rozdělíme rovnoběžkami k ose **y** v pravidlech 1., 2., 3. na sudý počet $2n$ stejných dílů šířky $h = \frac{b-a}{2n}$ a z rovnice $y=f(x)$ vypočteme hodnoty funkce v dělících bodech

$$x_0 = a, \quad x_1 = a+h, \quad x_2 = a+2h, \quad \ldots \quad x_{2n} = b;$$

$$y_0 = f(a), \quad y_1 = f(a+h), \quad y_2 = f(a+2h), \quad \ldots \quad y_{2n} = f(b).$$

Neznáme-li rovnici křivky, změříme jednotlivé pořadnice. Mechanicky stanoví obsah plochy křivkou omezené (integrují) přístroje, zvané *planimetry*.

1. *Pravidlo lichoběžníkové:* Počet dílů $2n$.

Oblouky mezi sudými pořadnicemi jsou nahrazeny sečnou.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{2n-1} + \frac{y_{2n}}{2}\right) + R$$

s chybou $$R = -\frac{2nh^3}{3} f''(\xi); \quad a < \xi < b.$$

2. *Druhé pravidlo lichoběžníkové:* Počet dílů $2n$.

Oblouky mezi sudými pořadnicemi jsou nahrazeny tečnou.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx 2h\,(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1}) + R$$

s chybou $$R = +\frac{nh^3}{3} f''(\xi); \quad a < \xi < b.$$

3. *Pravidlo Simpsonovo:* Počet dílů $2n$.

Oblouky mezi sudými pořadnicemi nahrazeny parabolou $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\Big[y_0 + 4\,(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2\,(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + y_{2n}\Big] + R$$

s chybou $$R = -\frac{nh^5}{90} f^{(4)}(\xi); \quad a < \xi < b.$$

Prakticky vyhovuje Simpsonovo pravidlo úplně; v případě, že v krajních bodech intervalu je $f'(x) = \infty$, t. j. tečna křivky kolmá k ose **x**, je výsledek méně přesný.

4. *Vzorec Simpsonův:* Je-li integrovaná funkce celistvá, nejvýš třetího stupně $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$, stačí rozděliti interval na d v a stejné díly a stanoviti tři funkční hodnoty nebo pořadnice y_0, y_1, y_2; pak platí přesně

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

5. *Integrál racionální funkce celistvé* je možno vyjádřiti přesně lineárním výrazem z funkčních hodnot (pořadnic); pro jinou funkci, kterou nahradíme funkcí racionální, platí vzorec přibližně.

a) Náhradní funkce je třetího stupně; při $n = 3$ dílech, $h = (x_3 - x_0) : 3$ je hodnota integrálu (obsah plochy mezi krajními pořadnicemi)

$$\int_{x_0}^{x_3} y\,dx = \frac{3}{8}h(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3).$$

b) Náhradní funkce je čtvrtého stupně; $n = 4$, $h = (x_4 - x_0) : 4$;

$$\int_{x_0}^{x_4} y\,dx = \frac{2}{45}h(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4)$$

c) Náhradní funkce je pátého stupně; $n = 5$, $h = (x_5 - x_0) : 5$;

$$\int_{x_0}^{x_5} y\,dx = \frac{5}{288}h(19y_0 + 75y_1 + 50y_2 + 50y_3 + 75y_4 + 19y_5).$$

Jiné vzorce odvodili *Cotes*, *Čebyšev* a *Gauß*.

6. *Vzorec Čebyševův:* Substitucí

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u \quad \text{plyne} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1} F(u)\,du;$$

$f(x)$ přejde na $F(u)$, integrál do mezí -1, $+1$. Pak platí vzorec

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[F(u_1) + F(u_2) + \ldots + F(u_n)],$$

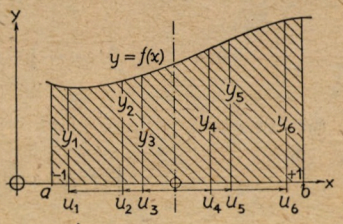
kde n je počet pořadnic, u_ν předepsané úsečky, souměrně rozložené kolem $u = 0$, $F(u_\nu) \equiv f(x_\nu) = y_\nu$ pořadnice křivky (obr. 31.).

Úsečky ve zlomcích poloviny intervalu:

$n = 2;$ $u_1 = -0{,}5773503,$
$u_2 = +0{,}5773503.$

$n = 3;$ $u_1 = -0{,}7071068,$
$u_2 = 0,$
$u_3 = +0{,}7071068.$

V obou případech platí vzorec přesně pro celistvou funkci třetího stupně.



Obr. 31.

$n = 4;$ $u_1 = -0{,}7946545,$ $u_3 = 0{,}1875925 = -u_2$
$u_2 = -0{,}1875925,$ $u_4 = 0{,}7946545 = -u_1.$

$n = 5;$ $u_1 = -0{,}8324975,$ $u_4 = 0{,}3745414 = -u_2$
$u_2 = -0{,}3745414,$ $u_5 = 0{,}8324975 = -u_1.$
$u_3 = 0,$

V obou případech platí vzorec přesně pro celistvou funkci pátého stupně.

$n = 6;$ $u_1 = -0{,}8662468,$ $u_4 = 0{,}2666354 = -u_3,$
$u_2 = -0{,}4225187,$ $u_5 = 0{,}4225187 = -u_2,$
$u_3 = -0{,}2666354,$ $u_6 = 0{,}8662468 = -u_1.$

Vzorec je přesný pro celistvou funkci sedmého stupně.

5. Integrály křivkové.

Buďtež v jistém oboru roviny **xy** dány jednoznačná spojitá funkce $P(x, y)$ a křivka C rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Řadě bodů na oblouku křivky od $A(x_0, y_0)$ do $B(x_n, y_n)$ přísluší parametr t v mezích $\alpha \leqq t \leqq \beta$. V bodech křivky má funkce hodnoty

$$P_A = P_0(x_0, y_0),\ P_1(x_1, y_1), \ldots, P_\nu(x_\nu, y_\nu), \ldots, P_n(x_n, y_n) = P_B;$$

diference úseček jednotlivých bodů $\Delta x_\nu = x_\nu - x_{\nu-1}$ s rostoucím počtem $n \to \infty$ konvergují k nule: $\Delta x \to 0$. Utvoříme součiny $P_{\nu-1}\Delta x_\nu$ a sečteme.

1. *Křivkový integrál* funkce P podél křivky C je limita součtu

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n P_{\nu-1}\Delta x_\nu = \int_C P(x, y)\,dx = \int_\alpha^\beta P[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

S jinou funkcí $Q(x,y)$ a diferencemi pořadnic Δy utvořené součiny $Q\Delta y$ podél oblouku $\overset{\frown}{AB}$ křivky C dají křivkový integrál

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} Q_{\nu-1}\Delta y_\nu = \int_C Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta Q[\varphi(t)\,\psi(t)]\,\psi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Součet obou je také křivkový integrál

$$\int_C (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \int_\alpha^\beta (P\varphi' + Q\psi')\mathrm{d}t.$$

Hodnota křivkového integrálu závisí na tvaru křivky $C \equiv \overset{\frown}{AB}$ čili na *integrační cestě.*

2. Jsou-li $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ podél křivky C s prvními částečnými derivacemi spojité a je-li splněna podmínka

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ je } P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}[F(x,y) + \text{konst.}]$$

úplným diferenciálem. Křivkový integrál úplného diferenciálu

$$\int_C (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \int_C \mathrm{d}F = F[\varphi(\beta),\psi(\beta)] - F[\varphi(\alpha),\psi(\alpha)] = F_B - F_A$$

je dán rozdílem hodnot, jichž nabývá funkce F v krajních bodech křivky C; nezávisí na integrační cestě.

3. Křivkový integrál úplného diferenciálu podél uzavřené křivky (C) má hodnotu nulu:

$$\oint (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \oint \mathrm{d}F = 0.$$

4. Buďtež $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ jednoznačné spojité funkce polohy (x,y,z) v jistém oboru trojrozměrného prostoru a v něm prostorová křivka C, daná parametricky rovnicemi $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$; hodnotami $\alpha \leqq t \leqq \beta$ jest určen oblouk křivky $C \equiv \overset{\frown}{AB}$ a podél něho příslušné hodnoty funkcí. Křivkový integrál

$$\int_C (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z) = \int_\alpha^\beta (P\varphi' + Q\psi' + R\chi')\,\mathrm{d}t$$

závisí na tvaru křivky $C \equiv \overset{\frown}{AB}$ čili na integrační cestě.

5. Integrovaný výraz jest *úplný diferenciál*

$$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}(F + \text{konst.}),$$

jsou-li splněny podmínky

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x};\qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y};\qquad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Křivkový integrál úplného diferenciálu podél C mezi body A, B

$$\int_C (P\,dx+Q\,dy+R\,dz)=F_B-F_A$$

je na integrační cestě nezávislý.

6. Podél uzavřené křivky (C) má křivkový integrál úplného diferenciálu hodnotu nulu:

$$\oint (P\,dx+Q\,dy+R\,dz)=\oint dF=0.$$

6. Integrály dvojnásobné a trojnásobné.

1. V dvojrozměrném oboru Ω, uzavřeném rovinnou křivkou C s rovnicí $\Phi(x,y)=0$, kterou rovnoběžky s osami protnou nejvýš dvakrát, je dána spojitá funkce $z=f(x,y)$; soustava přímek $x=$konst., $y=$konst. dělí obor na pravoúhelníky obsahu $\Delta\Omega=\Delta x\,\Delta y$. Limita součtu všech součinů $z\,\Delta\Omega=f(x,y)\,\Delta x\,\Delta y$ po celém plošném oboru Ω sluje *dvojný* (čili *plošný*) *integrál*

$$\int_\Omega z\,d\Omega=\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

s integračním oborem Ω. Vyčíslíme jej dvojí (jednoduchou) integrací jako *dvojnásobný integrál*:

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx.$$

Meze $y_1(x)$, $y_2(x)$, $x_1(y)$, $x_2(y)$ jsou obecné výrazy, plynoucí řešením z rovnice křivky $\Phi=0$; a,b její krajní úsečky, c,d krajní pořadnice.

Pokládajíce x za stálou, integrujeme napřed vzhledem k y v proměnných mezích y_1, y_2 a pak vzhledem k x ve stálých mezích a,b. Nebo pokládáme y za stálou a integrujeme napřed vzhledem k x v proměnných mezích x_1, x_2 a pak vzhledem k y ve stálých mezích c,d.

Geometricky vyjadřuje dvojný integrál objem V válce, omezeného plochou $z=f(x,y)$ a oborem Ω, jako limitu součtu hranolovitých elementů $\Delta V=z\,\Delta\Omega$.

Plocha integračního oboru, uzavřeného křivkou C, má obsah

$$\Omega=\iint_\Omega dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} dy=\int_c^d dy\int_{x_1}^{x_2} dx.$$

Obdobně jako jednoduchý integrál byl zobecněn v integrál křivkový, zobecňuje se dvojný integrál v integrál plošný na ploše křivé.

2. *Transformace dvojnásobného integrálu.* Zavedeme-li substituci $x = \varphi(u), y = \psi(v)$ nové proměnné u, v a *funkcionální determinant*

$$D = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u$$

v celém oboru Ω nerovná se nule, jest obor Ω dě'en soustavou čar $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$ na elementy obsahu $\mathrm{d}\Omega = D\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

V nových souřadnicích jest

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} f(\varphi,\psi)\,D\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Na př. v souřadnicích polárních r, φ jest

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi; \qquad \mathrm{d}\Omega = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi;$$

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\varphi \int_{r_1}^{r_2} f\,r\,\mathrm{d}r = \int_{a}^{b} r\,\mathrm{d}r \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Zde jsou α, β úhly krajních tečen k Ω s osou polární, a, b délky nejmenšího a největšího průvodiče.

3. V trojrozměrném oboru V, uzavřeném plochou $S(x,y,z) = 0$, kterou rovnoběžky s osami protnou nejvýš dvakrát, dána jest spojitá funkce polohy $u = f(x,y,z)$. Soustava rovin $x = \text{konst.}$, $y = \text{konst.}$, $z = \text{konst.}$ dělí obor na hranoly obsahu $\Delta V = \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$. Limita součtu všech součinů $u\,\Delta V = f(x,y,z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ po celém prostorovém oboru V sluje *trojný* (čili *prostorový*) *integrál*

$$\int_{V} u\,\Delta V = \iiint_{V} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

s integračním oborem V. Vyčíslíme jej trojí (jednoduchou) integrací jako *trojnásobný integrál*.

První dvě integrace provedeme v mezích proměnných, třetí v mezích konstantních (jako u integrálu dvojného) v libovolném pořadí, ovšem s příslušnými mezemi, jak plynou z rovnice plochy omezující obor V.

Objem integračního oboru V (tělesa), uzavřeného plochou $S = 0$, je

$$V = \iiint_{V} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

4. *Transformace trojnásobného integrálu.* Zavedeme-li substituci

$$x = \varphi(u,v,w), \qquad y = \psi(u,v,w), \qquad z = \chi(u,v,w),$$

jejíž funkcionální determinant nesmí býti nula,

$$D = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0,$$

jest obor V dělen soustavou ploch $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$, $w = \text{konst.}$ na elementy $dV = D\,du\,dv\,dw$. V nových souřadnicích

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_V f(\varphi, \psi, \chi)\ D\,du\,dv\,dw.$$

Na př. v souřadnicích kulových r, φ, ϑ jest

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta; \quad y = r\sin\varphi\sin\vartheta; \quad z = r\cos\vartheta; \quad D = r^2\sin\vartheta;$$

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_V f(r\cos\varphi\sin\vartheta,\ r\sin\varphi\sin\vartheta,\ r\cos\vartheta)\,r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta.$$

7. Vztahy integrálů prostorových a plošných.

1. *Věta Gaußova.* V trojrozměrném oboru V, uzavřeném plochou S, dány jsou tři jednoznačné spojité funkce $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ se spojitými prvními parciálními derivacemi; normála plochy, směřující dovnitř, svírá s osami úhly α, β, γ; plocha S buď vzhledem k oboru V orientována kladně (soustava pravotočivá).

Rovnice

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = -\iint_S (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy)$$

aneb

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = -\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$

převádí integrál prostorový na plošný.

Vyjádříme-li směrové kosiny vnější (dovnitř směřující) normály derivacemi ve směru normály, plyne tvar

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = -\iint_S \left(P\frac{\partial x}{\partial n} + Q\frac{\partial y}{\partial n} + R\frac{\partial z}{\partial n}\right) dS.$$

2. Plošný integrál je nula, jestliže v celém oboru V

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

V tomto případě plošný integrál po části plochy, ohraničené pevnou křivkou, závisí jen na okrajové křivce, nikoliv na tvaru plochy.

3. V dvojrozměrném oboru Ω v rovině xy, uzavřeném křivkou C, jest

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy = -\int_{C} (P\,dx + Q\,dy).$$

Plošný integrál vlevo se vztahuje k vnitřní části oboru Ω, křivkový integrál vpravo k okrajové křivce C, kterou dlužno projiti smyslem kladným, aby obor Ω zůstal po straně levé.

4. *Věta Stokesova.* Část křivé plochy S ohraničena jest prostorovou čarou C; směr normály, svírající s osami úhly α, β, γ, tvoří s oběhem křivky C soustavu pravotočivou.

$$\iint_{S} \left\{\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy\right\} = -\int_{C} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz).$$

5. *Věty Greenovy.* Dány jsou dvě jednoznačné spojité funkce $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ se spojitými prvními a druhými částečnými derivacemi. Označíme

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2};$$

derivace ve směru normály, směřující dovnitř prostorového oboru V:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma; \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma.$$

Platí:

$$\iiint_{V} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = -\iiint_{V} u\,\Delta v\,dx\,dy\,dz - \iint_{S} u\frac{\partial v}{\partial n}\,dS;$$

obdobná rovnice po záměně funkcí u a v; z rozdílu obou plyne

$$\iiint_{V} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dx\,dy\,dz = \iint_{S} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS.$$

F. Čuřík: Základy vyšší matematiky, 2 sv., 2. vyd. 1923 a 1930.
J. Vojtěch: Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických, 2 sv., 5. vyd. 1939.
R. Courant: Vorlesungen über Differential- u. Integralrechnung, 2 sv., 2. vyd. 1930.
G. Vivanti: Lezioni di analisi matematica, 2 sv., 3. vyd. 1930.
J. Perry: The calculus for engineers (uprav. Höhere Mathematik für Ingenieure, 4. vyd. 1924).
K. Petr: Počet diferenciální, 1923; Počet integrální, 2. vyd. 1931.
C. Vallée-Poussin: Cours d'analyse infinitésimale, 2 sv., 5. vyd. 1924.
C. Jordan: Cours d'analyse de l'école polytechnique, 3 sv., 3. vyd. 1909–15.
J. Serret – G. Scheffers: Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, 3 sv., 8. vyd. 1924.
H. Mangoldt – K. Knopp: Einführung in die höhere Mathematik, 3 sv., 7. vyd. 1942,
E. Goursat: Cours d'analyse mathematique, 3 sv., 5. vyd. 1933.

8. Rozvoj periodických funkcí v řadu Fourierovu.

1. Periodická funkce $f(x) = f(x \pm 2k\pi)$ s periodou 2π, v intervalu od 0 do 2π jednoznačná a konečná, s konečným počtem maxim, minim a přetržek, se dá rozvinouti v konvergentní goniometrickou řadu zv. *řada Fourierova:*

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots$$

čili

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Koeficienty Fourierovy řady pro funkci v intervalu od 0 do 2π:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx; \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\,dx; \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\,dx.$$

Absolutní člen řady píše se také ve tvaru $\frac{1}{2} a_0$; pak je a_0 zahrnuto ve vzorci a_n pro $n = 0$.

Jsou-li splněny hořejší předpoklady *(Dirichletovy)*, vyjadřuje *Fourierova řada* skutečně funkci $f(x)$ mimo místa přetržky, kde její součet má hodnotu aritmetického průměru obou hodnot sousedních. V každém intervalu, v němž není přetržka, konverguje Fourierova řada rovnoměrně.

2. Koeficienty Fourierovy řady pro funkci v intervalu $(-\pi, \pi)$:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx; \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx; \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx.$$

3. Fourierova řada pro funkci v intervalu $(-l, l)$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x\right);$$

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x)\,dx; \qquad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\,dx; \qquad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

4. Řada pro funkci $f(t)$ s periodou $T = \frac{2\pi}{\omega}$ v intervalu $(0, T)$.

$$f(t) = f(t \pm T) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin \omega t);$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,dt; \qquad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t\,dt; \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t\,dt.$$

5. Funkce lichá, pro kterou $f(-x) = -f(x)$, má v řadě jen členy sinové.

6. Funkce sudá, pro kterou $f(-x) = +f(x)$, má v řadě jen členy kosinové.

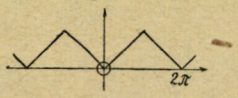
7. Funkce, jejíž hodnoty z první poloviny periody se opakují v druhé polovině s *opačným* znamením $f(x+\pi) = -f(x)$, má v řadě jen členy liché.

8. Funkce, jejíž hodnoty z první poloviny periody se opakují v druhé s *týmž* znamením $f(x+\pi) = +f(x)$, má jen členy sudé.

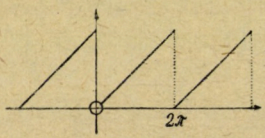
9. Funkce $f(t)$ s periodou T přejde na $f(x)$ s periodou 2π substitucí

$$t = \frac{T}{2\pi} x.$$

Příklady.



Obr. 32.



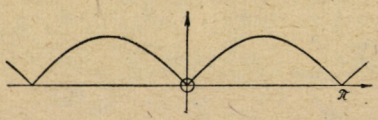
Obr. 33.

a) Obr. 32. $f(x) = x$ pro $0 \leqq x \leqq \pi$; $f(x) = 2\pi - x$ pro $\pi \leqq x \leqq 2\pi$:

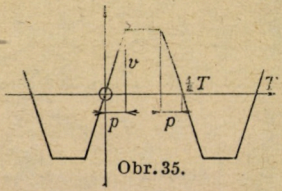
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right).$$

b) Obr. 33. $f(x) = x$ pro $0 \leqq x \leqq 2\pi$:

$$f(x) = \pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right).$$



Obr. 34.



Obr. 35.

c) Obr. 34. (usměrněný střídavý proud): $f(x+\pi) = f(x)$;

$f(x) = \sin x$ pro $0 \leqq x \leqq \pi$; $f(x) = -\sin x$ pro $\pi \leqq x \leqq 2\pi$:

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1.3} + \frac{\cos 4x}{3.5} + \frac{\cos 6x}{5.7} + \ldots\right).$$

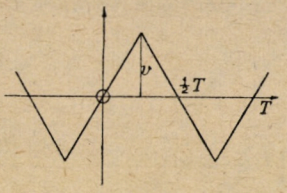
d) Obr. 35. (rovnoramenné lichoběžníky): $f(x+\pi) = -f(x)$;

$f(x) = \frac{v}{p} x$ pro $0 \leqq x \leqq p$; $f(x) = v$ pro $p \leqq x \leqq \pi - p$; $f(x) = -\frac{v}{p}(x-\pi)$ pro $\pi - p \leqq x \leqq \pi$:

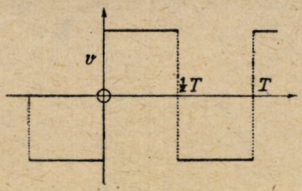
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\frac{v}{p}\left(\frac{1}{1^2}\sin p \sin x + \frac{1}{3^2}\sin 3p \sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5p \sin 5x + \ldots\right).$$

e) Obr. 36. (rovnoramenné trojúhelníky) plyne z *d)* pro $p = \frac{\pi}{2}$:

$$f(x) = \frac{8v}{\pi^2}\left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \dots\right).$$



Obr. 36.



Obr. 37.

f) Obr. 37. (úsečky rovnoběžné s osou) plyne z *d)* pro lim $p = 0$:

$$f(x) = v \text{ pro } 0 \leqq x \leqq \pi; \qquad f(x) = -v \text{ pro } \pi \leqq x \leqq 2\pi;$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} v\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right).$$

Přejde-li $f(x)$ s periodou 2π na $f(t)$ s periodou T, přejde v příkladech vpravo x na $\frac{2\pi}{T} t$ a ve vzorci *d)* úsečka p na $\frac{2\pi}{T} p$.

10. *Fourierova řada* v komplexním tvaru. V intervalu $0 \leqq x \leqq 2\pi$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}; \qquad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \, dx.$$

V intervalu $0 \leqq x \leqq l$ a pro $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n} c_n e^{\frac{2\pi i n x}{l}}; \qquad c_n = \frac{1}{l} \int_0^{l} f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{l}} \, dt.$$

9. Fourierův integrál.

1. Rozšířením intervalu do lim $l \to \infty$ přejde Fourierova řada ve *Fourierův integrál*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t - x) \, dt,$$

anebo, rozvedeme-li

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos ux \, du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin ux \, du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut \, dt.$$

Vzorec platí s předpokladem, že funkce $f(x)$ má v každém konečném intervalu konečný počet maxim a minim a že $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ existuje. V místech přetržky podává aritmetický průměr hodnot zprava a zleva

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

2. Je-li $f(x)$ funkce **sudá**, t. j. $f(-x) = +f(x)$, jest

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos ux\,du\int_0^{\infty} f(t)\cos ut\,dt.$$

3. Je-li $f(x)$ funkce **lichá**, t. j. $f(-x) = -f(x)$, jest

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin ux\,du\int_0^{\infty} f(t)\sin ut\,dt.$$

4. *Fourierův integrál* v komplexním tvaru. Je-li $f(x)$ v každém konečném intervalu funkce s variací konečnou, jest

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\,dy\int_{\infty}^{\infty} f(t)\,e^{ivt}\,dt.$$

H. Lebesgue: Leçons sur les séries trigonométriques, 1906.
H. Carslaw: Introduction to the theory of Fourier's series and integrals, 3. vyd. 1930.
E. Hobson: The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, 2 sv., 2. vyd. 1926.

X. Funkce komplexní proměnné.

1. *Komplexní proměnná*

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

je v Gaußově číselné z-rovině xy zobrazena proměnným bodem z o souřadnicích x, y nebo r, φ (viz str. 13). Je-li současně $x = 0$, $y = 0$, je $z = 0$; vzroste-li byť jen jedna z proměnných x, y do nekonečna, bod $z = \infty$.

Soustavu komplexních čísel zobrazuje také *Riemannova* číselná koule o průměru 1, dotýkající se z-roviny v počátku. Paprsky, vedené z protějšího konce průměru jako středu promítání, protínají kouli a rovinu v přidružených bodech *(stereografická projekce)*; bodu odpovídá bod, kružnici kružnice nebo přímka a naopak. Středem promítání je zobrazen bod $z = \infty$, jímž komplexní z rovina je uzavřena.

Obor proměnné z je souhrn hodnot, jichž proměnná může nabýti; obrazně je to buď celá číselná z-rovina nebo její vymezený díl, křivka nebo přímka.

Obor jednoduše souvislý sluje část z-roviny uzavřená křivkou bez dvojných bodů.

Orientace. Bod probíhá křivkou směrem kladným, je-li plocha, uzavřená křivkou, po straně levé.

2. *Funkce komplexní proměnné* $w = f(z)$. V jistém oboru je w funkcí z, jestliže v něm každému z přísluší jedna hodnota w (nehledě k funkcím mnohoznačným). Oddělíme-li část reálnou od imaginární, jest

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

kde u, v jsou určité reálné funkce proměnných x, y.

Mez (limita), spojitost, derivace jsou obdobné pojmy jako v oboru reálném; známé vzorce diferenciální a inversní k nim integrální zůstávají pro komplexní proměnnou v platnosti.

3. *Elementární transcendenty* e^z, $\cos z$, $\sin z$ jsou definovány řadami:

1) $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots;$

2) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots;$ 3) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots,$

které konvergují absolutně pro každé z. Z definic plynou vztahy další.

4) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2};$

5) $e^{iz} = \cos z + i \sin z;$ $\qquad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$ *(Eulerovy vzorce);*

6) $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz;$ $\qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz;$

7) $\cos z = \cosh iz;$ $\quad \sin z = -i \sinh iz;$
$\operatorname{tg} z = -i \operatorname{tgh} iz;$ $\quad \operatorname{cotg} z = i \operatorname{cotgh} iz;$

8) $\cos(z + 2k\pi) = \cos z;$ $\quad \sin(z + 2k\pi) = \sin z;$ $\quad \operatorname{tg}(z + 2k\pi) = \operatorname{tg} z;$

9) $\cosh(z + 2ki\pi) = \cosh z;$ $\quad \sinh(z + 2ki\pi) = \sinh z;$
$\operatorname{tgh}(z + 2ki\pi) = \operatorname{tgh} z;$

10) $(\cos z + i \sin z)^m = \cos mz + i \sin mz$ *(Moivreova věta).*

Celá soustava goniometrických vzorců platí i pro komplexní argumenty.

11) $e^{z + 2ki\pi} = e^z;$ (viz též str. 14 a 15);

12) $\lg z = \lg|z| + i(\varphi + 2k\pi);$

13) $\arcsin z = \frac{1}{i} \operatorname{argsinh} iz = \frac{1}{i} \lg\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right);$

14) $\arccos z = \frac{1}{i} \operatorname{argcosh} z = \frac{1}{i} \lg\left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right);$

15) $\operatorname{arctg} z = \frac{1}{\mathrm{i}} \operatorname{arctgh} \mathrm{i}z = \frac{1}{2\mathrm{i}} \lg \frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$;

16) $\operatorname{arccotg} z = \mathrm{i} \operatorname{arccotgh} \mathrm{i}z = \frac{1}{2\mathrm{i}} \lg \frac{\mathrm{i}z-1}{\mathrm{i}z+1}$.

4. *Analytická funkce* komplexní proměnné $f(z)$ má v každém místě svého oboru derivaci, nezávislou na směru přiblížení k bodu z:

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{i}}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

$$(h = h_x + \mathrm{i}h_y) \qquad (h_x \to 0) \qquad (h_y \to 0)$$

Analytická funkce $f(z)$ je *regulární* tam, kde jsou splněny *Cauchyovy-Riemannovy* podmínky:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Pak vyhovují funkce u, v také *Laplaceově* diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Všechny elementární funkce reálné proměnné, algebraické i transcendentní, jsou i při komplexním argumentu analytické (regulární) ve svých oborech.

5. *Singulární body* slují místa oboru, v nichž funkce, jinde analytická, nesplňuje podmínky Cauchyovy-Riemannovy. Jsou to:

a) *body nekonečnosti*, kde $f(z) = \infty$. Bod nekonečnosti funkce $f(z)$, v němž $1 : f(z) = 0$, sluje *pól*.

Na př. funkce $f(z) = \frac{1}{z(z-z_0)^2}$ má v bodě $z = 0$ pól prvního řádu, v bodě $z = z_0$ pól druhého řádu.

Funkce, která v konečnu nemá jiné singularity než póly, sluje *meromorfní*.

b) *podstatně singulární body:* v jejich okolí se funkce libovolně blíží každé hodnotě.

Na př. funkce $f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$ má v počátku $z = 0$ podstatně singulární bod; blížíme-li se mu po záporné ose reálné, jest $\mathrm{e}^{-\infty} = 0$, po kladné $\mathrm{e}^{+\infty} = \infty$.

c) *body rozvětvení*, kde jinak mnohoznačná funkce se stává funkcí jednoznačnou.

Na př. funkce $f(z) = \sqrt[n]{z - z_0}$ má v místě $z = z_0$ bod rozvětvení.

Singulární bod, v jehož okolí není jiných singulárních bodů, sluje *isolovaný*. Na př. pól je isolovaný singulární bod.

6. *Konformní zobrazení.* Analytická neb regulární funkce $w = f(z)$ zobrazuje konformně z-rovinu na w-rovinu mimo místa, kde $f'(z) = 0$. To znamená: bodům (x, y) v rovině x y přiřaďuje body (u, v) v rovině u v; každý úhel převádí v úhel téže velikosti i smyslu; nekonečně malý obor roviny x y zobrazuje oborem roviny u v jemu podobným. Lineární poměr skreslení čili *modul zobrazení*

$$m = |f'(z)| = \left|\frac{dw}{dz}\right|$$

závisí jen na poloze bodu z.

Příklad 1. Funkcí

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = u + iv = w$$

je dána transformace

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad v = \frac{-y}{x^2+y^2}, \tag{1}$$

která vyhovuje podmínkám Cauchyovým-Riemannovým. Vyjádříme-li x a y jako funkce proměnných u a v, dostaneme (z podílu, podle věty o úměrách a dosazením)

$$\left(\frac{u}{v} = \frac{x}{-y}; \qquad \frac{u^2}{u^2+v^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} = ux; \qquad \frac{v^2}{u^2+v^2} = \frac{y^2}{x^2+y^2} = -vy\right)$$

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}, \qquad y = \frac{-v}{u^2+v^2}, \tag{1'}$$

rovnice tvaru (1), v nichž jen proměnné jsou vyměněny: transformace, daná funkcí $1:z$, jest jednojednoznačná, t. j. každému bodu z-roviny odpovídá jeden, určitý bod w-roviny a naopak. Z rovnic (1) dostaneme pro

$$u = \text{konst.} = \frac{1}{C}: \; y^2 = x(C-x); \qquad v = \text{konst.} = -\frac{1}{C}: \; x^2 = y(C-y),$$

t. j. rovnoběžky s osami v, u přejdou na kružnice průměru C, dotýkající se os x, y v počátku (v prvém případě je y, v druhém x střední měřicky úměrnou obou úseků průměru). Obě soustavy kružnic protínají se v pravém úhlu.

V polární soustavě

$$w = z^{-1} = (re^{i\varphi})^{-1} = r^{-1}e^{-i\varphi} = Re^{i\Phi};$$

podle toho souřadnice bodu w jsou

$$R = \frac{1}{r}, \qquad \Phi = -\varphi; \tag{2}$$

obrácením závislosti plynou rovnice téhož tvaru

$$r = \frac{1}{R} \qquad \varphi = -\Phi. \tag{2'}$$

První z rovnic (2) značí inversi $rR = 1^2$ na kružnici poloměru 1, druhá překlopení úhlů čili zrcadlení na ose reálné; pořad operací je lhostejný. Konstrukce přidružených bodů provedena ve sjednocených rovinách na str. 15 obr. 6. Vnějším bodům jednotkové kružnice $r = 1$ odpovídají body vnitřní a naopak, bodům horní poloviny obvodu body dolní poloviny, souměrně k oněm sdružené podle osy reálné; body $z = +1 = w$ zůstávají beze změny. Počátek $z = 0$ je singulární bod funkce $1:z$, zvaný *pól;* jeho obrazem je úběžný bod $w = \infty$, kterým komplexní rovina je uzavřena.

Obecnější *funkce lineární lomená*

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{kde} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0,$$

je regulární, s jednoduchým pólem v místě $z = -d:c$, obapolně jednoznačná V konformním zobrazení převádí kružnice na kružnice a naopak; přímky pokládáme za kružnice o nekonečně velkém poloměru; transformace sluje *kruhová příbuznost.*

Příklad 2. Funkcí

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv = w$$

je dána transformace

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy,$$

podmínkám Cauchyovým-Riemannovým zřejmě vyhovující. Síť rovnoběžek $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$ je v z-rovině zobrazena sítí rovnoosých hyperbol; obě soustavy jsou kolmosečné mimo nulový bod $z = 0$, kde se protínají v úhlu 45°. Konformita je tu porušena, neboť $f'(0) = 0$. Všude jinde $f'(z) = 2z \neq 0$. Vyloučením y nebo x dostaneme

$$v^2 = 4x^2(x^2 - u); \qquad v^2 = 4y^2(u + y^2);$$

pro $x = \text{konst.}$, $y = \text{konst.}$ značí tyto rovnice dvě orthogonální soustavy konfokálních parabol s osou $\pm u$ a společným ohniskem v bodě $w = 0$. Úsekový tvar obou rovnic (str. 63)

$$\frac{v^2}{(2x^2)^2} + \frac{u}{x^2} = 1; \qquad \frac{v^2}{(2y^2)^2} - \frac{u}{y^2} = 1.$$

Čtvercové síti rovnoběžek s osami z-roviny odpovídá čtvercovitá *(isothermická)* síť parabolická v rovině w. V polární soustavě

$$w = z^2 = (re^{i\varphi})^2 = r^2 e^{2i\varphi}; \qquad R = r^2; \qquad \Phi = 2\varphi.$$

Opíše-li bod z kružnici kolem $z = 0$, opíše bod w, pohybující se dvojnásobnou úhlovou rychlostí, příslušnou kružnici dvakrát. Horní polovina z-roviny je zobrazena celou w-rovinou, dolní polovina touže w-rovinou znovu. Obrácená funkce $z = \sqrt{w}$ je tedy dvojznačná. Aby každému bodu w-roviny příslušela jen jedna hodnota w, představíme si w-rovinu ve dvou listech; rozřízneme je podél záporné osy reálné od 0 do ∞ a kraje řezů spojíme napříč — horní s protějším dolním. Tak vznikne dvoulistová *plocha Riemannova;* na každém listu má funkce jednu hodnotu. Body $z = 0$, $z = \infty$, z oběhu vyloučené, jsou singulární a slují *body rozvětvení;* v nich je funkce jednoznačnou.

Příklad 3. *Znázornění funkce komplexní proměnné*

$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Všude, kde $f(z)$ je regulární a $f'(z) \neq 0$, odpovídá síti rovnoběžek s osami w-roviny síť kolmosečných čar v z-rovině. Sestrojíme-li pro různé hodnoty konstanty $c = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ soustavy čar $u(x,y) = \text{konst.}$, $v(x,y) = \text{konst.}$, můžeme pokládati jednu soustavu za vrstevnice, druhou za křivky spádu na ploše. Plocha má zápornou křivost (bez maxim a minim); nulová místa v průsečících čar $u = 0$, $v = 0$ jsou sedla plochy; v nich zobrazení není konformní. V jednoduchém pólu vybíhá plocha do úběžného hrotu a nekonečné prohlubně.

V hydrodynamice rovinného proudění značí jedna soustava křivky ekvipotenciální, druhá proudnice. Singulární body jsou zřídla nebo víry, nulová místa body křížení, póly zřídla s propadem.

Funkci $f(z)$ znázorňuje také *plocha absolutních hodnot*. Zde značí

$|\omega| = r(x,y) = \text{konst.}$ vrstevnice; $\varphi(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{v}{u} = \text{konst.}$ křivky spádu.

Soustavy jsou kolmosečné, kde daná funkce a funkce k ní inversní jsou regulární. Křivky spádu vycházejí z pólů (úběžné hroty) a sbíhají se v nulových bodech (nálevkovité prohlubně). Plochu možno znázorniti jako plastický model axonometrickým obrazem.

7. *Integrál funkce komplexní proměnné* jest integrál křivkový (str. 111). Oblouk křivky C mezi body z_0 a $z_n = z$ rozdělíme body $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ na intervaly $\Delta z_\nu = z_\nu - z_{\nu-1}$. V libovolném místě ζ_ν intervalu Δz_ν má funkce $f(z)$ hodnotu $f(\zeta_\nu)$. Integrál po křivce C

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n f(\zeta_\nu)\,\Delta z_\nu$$

závisí obecně na tvaru integrační cesty C, spojující body z_0 a z_n.

Pro výpočet integrálu vyjádříme souřadnice bodů křivky C v komplexní rovině rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$ jako funkce proměnné t, která mezi počátečním a konečným bodem integrační cesty probíhá v intervalu (α, β).

$$z = x + \mathrm{i}y = z(t); \qquad f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) = f[z(t)],$$

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Příklad. Stanoviti integrál

$$\oint_K (z - z_0)^m\,\mathrm{d}z \quad \text{pro} \quad m = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

po kružnici K o středu z_0, kterou bod z proběhne smyslem kladným. Klademe

$$z - z_0 = r(\cos t + \mathrm{i}\sin t)$$

$$\oint_K (z - z_0)^m\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} r^m(\cos t + \mathrm{i}\sin t)^m \cdot r(-\sin t + \mathrm{i}\cos t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{i}r^{m+1}\int_0^{2\pi} (\cos t + \mathrm{i}\sin t)^{m+1}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}r^{m+1}\int_0^{2\pi} [\cos(m+1)t + \mathrm{i}\sin(m+1)t]\,\mathrm{d}t$$

podle Moivreovy věty, str. 14). Oba integrály jsou nuly, takže

$$\oint_K (z - z_0)^m\,\mathrm{d}z = 0.$$

Pro $m = -1$ však plyne

$$\oint_K \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i .$$

Integrovaná funkce má v bodě z_0 pól; její integrál po uzavřené křivce není nula.

K týmž výsledkům dospějeme, klademe-li $r(\cos t + i \sin t) = re^{it}$.

8. *Integrál analytické funkce* je na integrační cestě nezávislý. Je-li $f(z)$ regulární v oboru jednoduše souvislém, v něm $F(z)$ její primitivní funkce, t. j. $F'(z) = f(z)$, a body z_0, z spojeny jsou libovolnou integrační cestou, která neprochází žádným singulárním bodem funkce $f(z)$, pak

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z) - F(z_0) .$$

Hodnotu integrálu lze odhadnouti:

$$\left| \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz \right| \leqq M l .$$

M je kladné číslo, které na integrační cestě žádnou hodnotou funkce $f(z)$ není překročeno, l značí délku oblouku křivky C od z_0 do z.

Při pevném z_0 jest integrál regulární funkcí horní meze.

9. *Věta Cauchyho.* Integrál regulární a jednoznačné funkce $f(z)$ v oboru jednoduše souvislém po uzavřené křivce C, která neobkličuje žádný singulární bod funkce ani jím neprochází, má hodnotu nulu.

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 .$$

10. Jsou-li C, C_1 uzavřené křivky, C_1 uvnitř C, a je-li na těch křivkách i mezi nimi funkce $f(z)$ regulární (nemusí být uvnitř C_1), pak při kladném oběhu ohraničeného oboru

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz .$$

Integrační cestu C možno nahraditi libovolnou jinou křivkou C_1, ležící uvnitř C (na př. kružnicí), pokud mezi křivkami a na vnitřní křivce je funkce analytická.

11. Při větším počtu uzavřených, vzájemně oddělených křivek $C_1, C_2, \ldots$ uvnitř C, vesměs téže orientace, jest

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \ldots$$

Vzorec platí, i když uvnitř křivek $C_1, C_2, \ldots$ funkce není regulární.

12. *Vzorec Cauchyho.* V jistém oboru regulární funkce $f(z)$ má v libovolném místě z_0 uvnitř oboru hodnotu

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz,$$

počítanou po každé uzavřené, kladně orientované křivce bez dvojných bodů toho oboru, z_0 uzavírající.

13. *Derivace analytické funkce.* Z předchozího vzorce plyne derivováním podle z_0

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

t. j. analytická funkce má ve všech bodech svého oboru derivace každého řádu.

14. *Mocninová řada* $\sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n$ nebo $\sum_0^\infty a_n z^n$, když $z_0 = 0$,

konverguje pro hodnoty z, jež uzavírá *kruh konvergence* K_0 o středu z_0 a poloměru (*poloměr konvergence*)

$$r = 1 : \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Mocninová řada konverguje absolutně a rovnoměrně v každém kruhu, jehož poloměr $|z - z_0| < r$; diverguje, když $|z - z_0| > r$. Uvnitř kruhu konvergence definuje analytickou funkci $f(z)$.

15. *Řada Taylorova.* Analytickou funkci lze v okolí regulárního bodu z_0, uvnitř jejího oboru, rozvinouti v mocninovou řadu

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots,$$

aneb

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{kde} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz.$$

Řada konverguje v největším kruhu, který lze v oboru, kdo funkce je analytická, opsati ze středu z_0.

16. *Analytické pokračování.* V jiném bodě $z_1 = z_0 + c$ uvnitř kruhu K_0 plyne z rovnice

$$\sum_0^\infty a_n (z - z_1 + c)^n = \sum_0^\infty b_n (z - z_1)^n$$

rozvinutím podle věty binomické a srovnáním podle mocnin řada, konvergující v kruhu K_1 o středu z_1. Přesahuje-li K_1 kruh K_0, má funkce analytické pokračování. Obor funkce lze tak rozšiřovati buď po celé z-rovině nebo jen k určité hranici.

17. *Řada Laurentova* rozvinuje funkci v okolí singulárního bodu z_0. Funkce $f(z)$, regulární a jednoznačná v mezikruží soustředných kružnic K_1 a K_2 $(0 < r_1 < r_2)$, opsaných z bodu z_0, se dá v každém bodě mezikruží rozvinouti v řadu

$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \ldots,$$

nebo

$$f(z) = \sum_{n=1}^\infty a_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^\infty a_n (z - z_0)^n,$$

kde

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz; \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Laurentova řada konverguje absolutně a rovnoměrně mezi kružnicemi, jež vnitř a vně mezikruží procházejí nejbližšími singulárními body; *hlavní část* se zápornými mocniteli vně K_1 $(|z - z_0| > r_1)$, část s kladnými mocniteli uvnitř K_2 $(|z - z_0| < r_2)$.

Není-li uvnitř kružnice K_1 žádný singulární bod, odpadá hlavní část a zbývá řada Taylorova.

18. *Funkce $f(z)$ s pólem k-tého řádu,* v okolí pólu z_0 jednoznačná a regulární, je vyjádřena řadou

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \ldots$$

V tomto případě má řada Laurentova jen konečný počet členů se zápornými mocniteli.

19. *Residuum.* V Laurentově řadě pro funkci $f(z)$ v okolí singulárního bodu z_0 sluje koeficient první záporné mocniny *residuum funkce* $f(z)$ *v bodě* z_0:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\,dz = \operatorname*{R}_{z=z_0} f(z)\,.$$

Na př. funkce $f(z) = \frac{e^z}{z}$ má pól v bodě $z = 0$. Laurentova řada v okolí pólu a residuum v něm

$$\frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1!} + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots \quad (z \neq 0); \qquad \operatorname*{R}_{z=0} f(z) = 1\,.$$

Po uzavřené křivce, pól obklučující, jest

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^z}{z}\,dz = 1; \qquad \oint \frac{e^z}{z}\,dz = 2\pi i\,.$$

20. *Věta o residuech.* Je-li funkce $f(z)$ v oboru uzavřeném křivkou C jednoznačná a regulární až na konečný počet singulárních míst $z_0, z_1, \ldots, z_k$, jest

$$\frac{1}{2\pi i} \oint f(z)\,dz = \operatorname*{R}_{z=z_0} f(z) + \operatorname*{R}_{z=z_1} f(z) + \ldots + \operatorname*{R}_{z=z_k} f(z)\,.$$

Funkci $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ lze rozvinouti v řadu Laurentovu v okolí pólů $z = 0$ a $z = 1$; užitím vzorce pro součet geometrické řady plyne

$$f(z) = \frac{-1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z} - 1 - z - z^2 - \ldots \qquad (z \neq 0)$$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{z-1} - 1 + (z-1) - (z-1)^2 + \ldots \qquad (z \neq 1)$$

Residua $\operatorname*{R}_{z=0} f(z) = -1$; $\operatorname*{R}_{z=1} f(z) = 1$. Po uzavřené křivce, oba póly obklučující,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z(z-1)} = -1 + 1 = 0\,; \qquad \oint \frac{dz}{z(z-1)} = 0\,.$$

Věty Cauchyho a o residuech mají význam i pro řešení reálných integrálů. Část reálné osy se doplňuje v komplexní rovině vhodnými křivkami na uzavřenou integrační cestu (na př. půlkružnicí, jejíž poloměr roste do nekonečna); z residuí je složen komplexní integrál a z toho plyne pak integrál reálný.

Method funkční theorie používá se v aerodynamice, hydrodynamice a zvláště v elektrotechnice.

E'. Borel: Leçons sur la théorie des fonctions, 1898.

G. Kowalewski: Die komplexen Veränderlichen und ihre Funktionen, 2. vyd. 1923.

E'. Goursat: Cours d'analyse mathématique II., 5. vyd. 1933.

G. Vivanti: Teoria delle funzioni analitiche, 1901 (něm. 1906).

L. Bieberbach: Lehrbuch der Funktionentheorie, 2 sv., 3. vyd. 1930.

R. Rothe - F. Ollendorf - K. Pohlhausen: Funktionentheorie und ihre Anwendung in der Technik, 1931.

XI. Diferenciální geometrie.

1. Křivky rovinné.

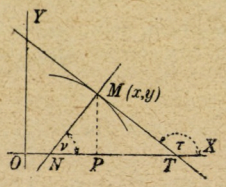
1. *Rovinná křivka v soustavě pravoúhlé* jest analyticky dána některým z tvarů rovnic:

$$a)\ y = f(x); \qquad b)\ F(x, y) = 0; \qquad c)\ x = \varphi(t),\ y = \psi(t).$$

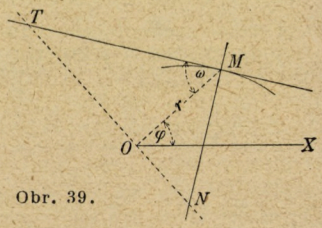
Derivace

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

značí tangentu úhlu α, který tečna v daném bodě křivky $M\ (x, y)$ svírá s osou $+x$ (v obr. 38 je označen τ).



Obr. 38.



Obr. 39.

2. *Křivka v soustavě polární* je dána rovnicí:

$$r = f(\varphi); \qquad \text{derivace } \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = r'$$

značí délku subnormály $\overline{ON}$ (obr. 39). Pro úhel tečny s průvodičem ω:

$$\operatorname{tg}\omega = r : \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{r}{r'}.$$

3. *Diferenciál oblouku:*

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2; \qquad \mathrm{d}s^2 = (r\,\mathrm{d}\varphi)^2 + \mathrm{d}r^2;$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}}\,\mathrm{d}y; \qquad \mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + r'^2}\,\mathrm{d}\varphi;$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}; \qquad \sin\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}. \qquad \cos\omega = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}; \qquad \sin\omega = \frac{r\,\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}.$$

4. *Rovnice tečny* v bodě (x, y), běžné souřadnice X, Y:

$$Y - y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(X - x); \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) = 0$$

Dotykové body (x, y) tečen, ke křivce $F(x, y) = 0$ z (bodu X_0, Y_0) vedených, plynou řešením rovnic:

$$(X_0 - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (Y_0 - y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0; \qquad F(x, y) = 0.$$

5. *Rovnice normály:*

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x); \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(X - x) - \frac{\partial F}{\partial x}(Y - y) = 0.$$

6. V soustavě pravoúhlé (obr. 38): V soustavě polární (obr. 39):

délka tečny $\overline{MT} = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y^2}$; *délka tečny* $\overline{MT} = \frac{r}{r'}\sqrt{r^2 + r'^2}$;

subtangenta $\overline{PT} = -\frac{y}{y'}$; *subtangenta* $\overline{OT} = -\frac{r^2}{r'}$;

délka normály $\overline{MN} = y\sqrt{1 + y'^2}$; *délka normály* $\overline{MN} = \sqrt{r^2 + r'^2}$;

subnormála $\overline{PN} = yy'$. *subnormála* $\overline{ON} = r'$.

7. *Úhel dvou křivek,* daných rovnicemi $y = f(x)$, $y = g(x)$ nebo rovnicemi $u(x, y) = 0$, $v(x, y) = 0$:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{g'(x) - f'(x)}{1 + f'(x)\,g'(x)} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}}.$$

Křivky $u = 0$, $v = 0$ se protínají v pravém úhlu, je-li

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

8. *Dotyk dvou křivek* je řádu n-tého, rovnají-li se sobě všecky derivace téhož řádu z rovnic obou křivek až do n-té včetně; křivky mají tu, jak říkáme, společných $n + 1$ bodů nekonečně blízkých. Při sudém n se protínají, při lichém n se dotýkají.

9. *Křivost k, poloměr křivosti* ϱ. *Kontingenční úhel* dvou soumezných tečen (normál) sluje diferenciál $d\alpha = d\operatorname{arctg} y'$.

$$k = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\varrho}; \qquad \varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{\left(\dfrac{ds}{dx}\right)^3}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}.$$

Poloměr křivosti ve vrcholu křivky, v němž tečna je rovnoběžná s osou x čili kde $y' = 0$: $\varrho_0 = \frac{1}{y''}$.

V souřadnicích polárních:

$$\varrho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

10. *Souřadnice středu křivosti* v soustavě pravoúhlé:

$$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y'; \qquad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Kružnice poloměru ϱ a středu (ξ, η) sluje *kružnice křivosti* (kružnice *oskulační*) dané křivky v jejím bodě (x, y); má tam s danou křivkou dotyk 2. řádu (má s ní 3 nekonečně blízké body společné).

11. *Kružnice hyperoskulační.* Platí-li pro bod (x, y) křivky o derivacích y podle x relace

$$3\, y' y''^2 - (1 + y'^2)\, y''' = 0,$$

má tam oskulační kružnice s danou křivkou dotyk 3. řádu (4 nekonečně blízké body společné) a sluje kružnice *hyperoskulační;* její poloměr je extrémní hodnotou poloměru křivosti dané křivky.

12. *Průběh křivky* $y = f(x)$ v bodě $M\,(x, y)$. Když křivka

stoupá,	klesá,	je nad tečnou,	je pod tečnou,
$f'(x) > 0$;	$f'(x) < 0$;	$f''(x) > 0$;	$f''(x) < 0$.

13. *Vrcholy křivky* $y = f(x)$ se určí jako maximum a minimum funkce $y = f(x)$ (str. 88).

14. *Body obratu* (body *inflexní*) plynou řešením rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 0, \quad \text{s předpokladem, že} \quad \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} \neq 0;$$

obecně $f^{(2n)} x = 0$, „ „ „ $f^{(2n+1)}(x) \neq 0$.

15. *Asymptoty* jsou tečny v nekonečně vzdálených bodech křivky. Z rovnice křivky a rovnice tečny vyloučíme y a přejdeme k $\lim x = \infty$. Asymptoty rovnoběžné s osou y najdeme tak, že určíme x, pro něž $\lim y = \infty$.

16. *Singulární body* křivky $F(x, y) = 0$: Řešením rovnic

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

plynou souřadnice singulárního bodu. Podle diskriminantu

$$\Delta = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}$$

je při $\Delta < 0$ *bod dvojný* (uzel), v něm dvě reálné tečny různé;
$\Delta = 0$ *bod vratu* (hrot), dvě tečny splývající;
$\Delta > 0$ *bod isolovaný* bez reálné tečny.

17. *Obalová křivka* soustavy čar $F(x, y, u) = 0$. Existuje-li, dostaneme její rovnici vyloučením proměnného parametru u z rovnic

$$F(x, y, u) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial u} = 0.$$

18. *Evoluta* dané křivky jest geometrické místo středů její křivosti. Rovnice evoluty křivky $y = f(x)$ plyne eliminací x, y z rovnic

$$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y', \qquad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}, \qquad y = f(x).$$

19. *Evolventa* dané křivky $F(\xi, \eta) = 0$ jest křivka vytvořená bodem přímky, jež se z té křivky (evoluty) jako její tečna odvinuje. Eliminací ξ, η z rovnic

$$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y', \qquad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}, \qquad F(\xi, \eta) = 0$$

dostaneme diferenciální rovnici soustavy evolvent.

20. *Orthogonální trajektorie* protínají danou soustavu $F(x, y, u) = 0$ v pravém úhlu. Eliminací proměnného parametru u z rovnic

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0, \qquad F(x, y, u) = 0$$

plyne diferenciální rovnice dané soustavy $f(x, y, y') = 0$. Píšeme-li tu $-\frac{1}{y'}$ místo y', dostaneme diferenciální rovnici soustavy orthogonálních trajektorií

$$f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

V souřadnicích polárních eliminujeme z rovnic

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = 0, \qquad F(r, \varphi, u) = 0$$

proměnný parametr u; dostaneme diferenciální rovnici $f(r, \varphi, r') = 0$. Záměnou r' za $-\frac{r^2}{r'}$ plyne diferenciální rovnice orthogonálních trajektorií

$$f\left(r, \varphi, -\frac{r^2}{r'}\right) = 0.$$

21. *Isogonální trajektorie* protínají danou soustavu v stálém úhlu ω. Je-li diferenciální rovnice dané soustavy $f(x, y, y') = 0$, je diferenciální rovnice isogonálních trajektorií

$$f\left(x, y\ \frac{y'-k}{1+ky'}\right)=0, \qquad k=\operatorname{tg}\omega.$$

Je-li v polárních souřadnicích diferenciální rovnice soustavy čar $f(r, \varphi, r')=0$, je diferenciální rovnice isogonálních trajektorií

$$f\left(r, \varphi, \frac{k r^2+rr'}{r-kr'}\right)=0, \qquad k=\operatorname{tg}\omega.$$

22. *Úpatnice* dané křivky vzhledem k danému bodu je geometrické místo pat kolmic spuštěných na tečny té křivky $F(x, y)=0$ z toho bodu (a, b). Její rovnice plyne eliminací x, y (a y') z rovnic

$$\eta-y=y'(\xi-x), \quad \eta-b=-\frac{1}{y'}(\xi-a), \quad F(x,y)=0, \quad y'=-\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial y}.$$

23. *Traktorie* čili ekvitangenciály. Úsek tečny od dotykového bodu jejího k pevné křivce $F(x, y)=0$ má stálou délku a. Jsou-li ξ, η běžné souřadnice traktorie, plyne její diferenciální rovnice eliminací x, y z rovnic

$$F(x, y)=0, \qquad \eta-y=\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}(\xi-x), \qquad (\xi-x)^2+(\eta-y)^2=a^2.$$

Při parametrickém určení pevné křivky $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$ jsou souřadnice bodů traktorie

$$\xi=\varphi\pm\frac{a\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}, \qquad \eta=\psi\pm\frac{a\psi'}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}.$$

24. *Ekvidistanta* čili čára paralelní (rovnoběžka) s křivkou $F(x, y)=0$ vznikne, naneseme-li na její normály stálou délku a. Rovnice ekvidistanty plyne eliminací x, y z rovnic

$$F(x, y)=0, \qquad \eta-y=-\frac{1}{y'}(\xi-x), \qquad (\xi-x)^2+(\eta-y)^2=a^2.$$

Při parametrickém určení dané křivky $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ jsou souřadnice bodů ekvidistanty

$$\xi=\varphi\mp\frac{a\psi'}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}, \qquad \eta=\psi\pm\frac{a\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}.$$

2. Křivky prostorové.

1. *Prostorová křivka v soustavě pravoúhlé* je dána *a)* dvěma rovnicemi jako průsečnice dvou promítajících válců (na př. půdorysem a nárysem); *b)* jako průsečnice dvou ploch; nebo *c)* parametricky třemi rovnicemi:

$$a)\begin{cases} y=f(x), \\ z=g(x), \end{cases} \qquad b)\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases}$$

2. *Diferenciál oblouku* $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$.

3. *Směrové kosiny tečny* křivky v bodě (x, y, z), jsou-li $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$ úhly tečny s osami x, y, z:

$$\cos\alpha_t = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \qquad \cos\beta_t = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \qquad \cos\gamma_t = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}.$$

4. *Tečna v bodě* (x, y, z), jsou-li běžné souřadnice X, Y, Z, je vyjádřena rovnicemi

$$\frac{X-x}{\mathrm{d}x} = \frac{Y-y}{\mathrm{d}y} = \frac{Z-z}{\mathrm{d}z}.$$

Je-li křivka dána jako průsečnice ploch $F = 0$, $G = 0$, jsou rovnice tečny

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ G_2 & G_3 \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} F_3 & F_1 \\ G_3 & G_1 \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ G_1 & G_2 \end{vmatrix}},$$

kde indexy 1, 2, 3 značí parciální derivace podle x, y, z.

5. *Rovina normálová* křivky v bodě (x, y, z):

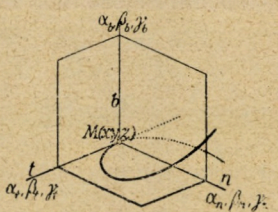
$$(X-x)\,\mathrm{d}x + (Y-y)\,\mathrm{d}y + (Z-z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Je-li křivka dána rovnicemi $F = 0$, $G = 0$, jest rovnice roviny normálové

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = 0.$$

6. *Rovina oskulační* prostorové křivky (obr. 40) v bodě (x, y, z) jest určena tečnou a soumezným bodem křivky. Rovnice roviny oskulační:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}^2x & \mathrm{d}^2y & \mathrm{d}^2z \end{vmatrix} = 0.$$



Obr. 40.

7. *Hlavní normála* křivky jest v její oskulační rovině normála k tečně:

$$\frac{X-x}{\mathrm{d}^2s:\mathrm{d}x^2} = \frac{Y-y}{\mathrm{d}^2s:\mathrm{d}y^2} = \frac{Z-z}{\mathrm{d}^2s:\mathrm{d}z^2}.$$

8. *Binormála* křivky v bodě (x, y, z) je kolmice k její rovině oskulační:

$$\frac{X-x}{A} = \frac{Y-y}{B} = \frac{Z-z}{C},$$

kde A, B, C jsou subdeterminanty, příslušné k prvkům 1. řádku v determinantu **6**:

$$A = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}^2z - \mathrm{d}z\,\mathrm{d}^2y, \qquad B = \mathrm{d}z\,\mathrm{d}^2x - \mathrm{d}x\,\mathrm{d}^2z, \qquad C = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}^2y - \mathrm{d}y\,\mathrm{d}^2x.$$

9. *Směrové kosiny binormály,* jsou-li její úhly s osami α_b, β_b, γ_b:

$$\cos\alpha_b = \frac{A}{D}, \qquad \cos\beta_b = \frac{B}{D}, \qquad \cos\gamma_b = \frac{C}{D};$$

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

10. *Křivost čili flexe* k *a poloměr křivosti* ϱ. *Kontingenční úhel* dvou soumezných tečen:

$$\mathrm{d}\varepsilon = \sqrt{(\mathrm{d}\cos\alpha_t)^2 + (\mathrm{d}\cos\beta_t)^2 + (\mathrm{d}\cos\gamma_t)^2};$$

$$k = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\varrho}; \qquad \varrho = \frac{1}{k} = \pm\frac{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)^{\frac{3}{2}}}{D}.$$

11. *Směrové kosiny hlavní normály,* svírající s osami úhly α_n, β_n, γ_n:

$$\cos\alpha_n = \frac{\mathrm{d}\cos\alpha_t}{\mathrm{d}\varepsilon}; \qquad \cos\beta_n = \frac{\mathrm{d}\cos\beta_t}{\mathrm{d}\varepsilon}; \qquad \cos\gamma_n = \frac{\mathrm{d}\cos\gamma_t}{\mathrm{d}\varepsilon}.$$

12. *Kroucenost čili torse* $\varkappa$ *a poloměr torse* τ. *Torsní úhel* dvou soumezných binormál:

$$\mathrm{d}\eta = \sqrt{(\mathrm{d}\cos\alpha_b)^2 + (\mathrm{d}\cos\beta_b)^2 + (\mathrm{d}\cos\gamma_b)^2};$$

$$\varkappa = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\tau}; \qquad \tau = \frac{1}{\varkappa} = \pm\frac{D^2}{A\mathrm{d}^3x + B\mathrm{d}^3y + C\mathrm{d}^3z}.$$

Křivka je pravo- nebo levotočivá, je-li $\varkappa \gtrless 0$. Torse rovinné křivky je nula.

13. *Frenetovy vzorce:*

$$a)\ \frac{\mathrm{d}\cos\alpha_t}{\mathrm{d}s} = k\cos\alpha_n;\ldots \qquad b)\ \frac{\mathrm{d}\cos\alpha_b}{\mathrm{d}s} = -\varkappa\cos\alpha_n;\ldots$$

$$c)\ \frac{\mathrm{d}\cos\alpha_n}{\mathrm{d}s} = -k\cos\alpha_t + \varkappa\cos\alpha_b;\ldots$$

Další vzorce plynou výměnou α za β nebo γ.

14. *Rovina rektifikační v bodě* (x, y, z), určená tečnou a binormálou, je kolmá k hlavní normále:

$$(X - x)\cos\alpha_n + (Y - y)\cos\beta_n + (Z - z)\cos\gamma_n = 0.$$

15. *Vektorové pojetí* (odd. XV). Souřadnice bodu křivky jsou složkami polohového vektoru $\boldsymbol{r}$; směrové kosiny tečny složkami vektoru $\boldsymbol{t}$; jest to jednotkový vektor, neboť $\boldsymbol{t}^2 = \cos^2\alpha_t + \cos^2\beta_t + \cos^2\gamma_t = 1$.

Jednotkové vektory tečny, hlavní normály a binormály

$$a)\ \boldsymbol{t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}, \qquad b)\ \boldsymbol{n} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} : k, \qquad c)\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n}$$

tvoří *základní pravoúhlý trojhran*. Podle polohy prstů pravé nebo levé ruky je s trojhranem ($\boldsymbol{t}$ palec, $\boldsymbol{n}$ ukazovák, $\boldsymbol{b}$ prostřední prst) křivka pravo- nebo levotočivá.

Vektorovou symbolikou lze vzorce diferenciální geometrie vyjádřiti stručnými tvary. Na př. *Frenetovy* vzorce **13**:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} = k\boldsymbol{n}; \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}s} = -\varkappa\boldsymbol{n}; \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s} = -k\boldsymbol{t} + \varkappa\boldsymbol{b}.$$

Šroubovice. Bod $(x = a,\ y = 0,\ z = 0)$ se otáčí kolem osy z (od + x do + y) a současně posunuje v jejím směru tak, že posuv jest úměrný úhlu otáčení t. Je-li h výška závitu, je stoupání $\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{2\pi a}$; z definice plynou rovnice

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = at\cdot\operatorname{tg}\varphi = ct, \qquad c = \frac{h}{2\pi}.$$

Vyloučením parametru t dostaneme průměty křivky do rovin souřadnic:

půdorys $x^2 + y^2 = a^2$, nárys $\frac{x}{a} = \cos\frac{z}{c}$, stranorys $\frac{y}{a} = \sin\frac{z}{a}$;

diferenciál oblouku $\mathrm{d}s = \sqrt{a^2 + c^2}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{\cos\varphi}\,\mathrm{d}t$; oblouk $s = \sqrt{a^2 + c^2}\,t$

Pro $t = 2\pi$ jest $s^2 = (2\pi a)^2 + h^2$; šroubovice vznikne navinutím pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami $2\pi a$, h na rotační válec o poloměru a. Rovnice tečny jsou

$$\frac{X - x}{-\sin t} = \frac{Y - y}{\cos t} = \frac{Z - z}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Směrové kosiny tečny

$$\cos\alpha_t = -\cos\varphi\sin t; \qquad \cos\beta_t = \cos\varphi\cos t; \qquad \cos\gamma = \sin\varphi = \cos(90^\circ - \varphi),$$

t. j. tečna svírá s osou stálý úhel $90^\circ - \varphi$. Tečny jsou rovnoběžné s přímkami rotačního kužele; je-li poloměr podstavy a, jest jeho výška $c = \frac{h}{2\pi}$ (redukovaná výška závitu).

Křivost $k = \frac{a}{a^2 + c^2}$; poloměr křivosti $\varrho = \frac{a^2 + c^2}{a} = \frac{a}{\cos^2\varphi}$.

Torse $\varkappa = \frac{c}{a^2 + c^2}$; poloměr torse $r = \frac{a^2 + c^2}{c} = \frac{c}{\sin^2\varphi}$.

Šroubovice je pravotočivá ($c > 0$) nebo levotočivá ($c < 0$) podle toho, je-li výška závitu kladná ve smyslu + z nebo − z.

3. Plochy.

1. *V pravoúhlé soustavě* může býti plocha dána rovnicí tvaru

$$z = f(x, y) \qquad \text{nebo} \qquad F(x, y, z) = 0$$

nebo parametricky třemi rovnicemi se dvěma parametry u, v

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v).$$

Křivky $u = \text{konst.}$ s křivkami $v = \text{konst.}$ tvoří na ploše síť křivočarých souřadnic.

2. *Tečná rovina* plochy v bodě (x, y, z), jsou-li běžné souřadnice X, Y, Z:

$$(X - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

3. *Normála* plochy v bodě (x, y, z) má rovnice

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

4. *Diferenciál oblouku křivky na ploše:*

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{E}\,\mathrm{d}u^2 + 2\mathrm{F}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \mathrm{G}\,\mathrm{d}v^2,$$

kde E, F, G jsou *Gaußovy základní veličiny 1. řádu*

$$\mathrm{E} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2; \qquad \mathrm{G} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2;$$

$$\mathrm{F} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Pro $u = x$, $v = y$ je $z = z(x, y)$ a Gaußovy základní veličiny:

$$\mathrm{E} = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2; \qquad \mathrm{F} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}; \qquad \mathrm{G} = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

5. *Úhel křivočarých souřadnic* $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$ v bodě plochy je dán rovnicemi:

$$\cos\omega = \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{EG}}}; \qquad \sin\omega = \frac{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}{\sqrt{\mathrm{EG}}}.$$

Je-li $\mathrm{F} = 0$, je síť *orthogonální* čili kolmosečná.

6. *Směrové kosiny normály* plochy, svírající s osami úhly λ, μ, ν:

$$\cos\lambda = \frac{\partial F}{\partial x} : \sqrt{\Delta F}\,; \quad \cos\mu = \frac{\partial F}{\partial y} : \sqrt{\Delta F}\,; \quad \cos\nu = \frac{\partial F}{\partial z} : \sqrt{\Delta F}\,;$$

$$\Delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2;$$

aneb

$$\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right) \text{ atd.}$$

7. *Průměty plochy:* půdorys, nárys, stranorys plynou vyloučením jedné souřadnice z, y, x z rovnic

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,z) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\}(z); \qquad \left.\begin{aligned} F &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\}(y); \qquad \left.\begin{aligned} F &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\}(x).$$

8. *Element plochy:*

$$dP = \sqrt{\Delta F}\,dx\,dy : \frac{\partial F}{\partial z} = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv\,;$$

$$dP = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

9. *Normálový řez* je průsek plochy s rovinou jdoucí normálou plochy. Buďtež α, β, γ úhly tečny normálového řezu s osami a stručně

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = s, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t;$$

poloměr křivosti normálového řezu:

$$R = \frac{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}.$$

10. *Kosý řez* je průsek plochy s rovinou jdoucí tečnou normálového řezu (ne však normálou plochy). Je-li φ úhel roviny řezu s normálou plochy, R poloměr křivosti normálového řezu, je *poloměr křivosti kosého řezu* ϱ průmětem poloměru R do roviny řezu:

$$\varrho = R\cos\varphi.$$

Věta Meusnierova: Kružnice křivosti všech (rovinných) řezů, jdoucích společnou tečnou plochy v určitém (obyčejném) bodě jejím, jsou na kulové ploše poloměru R (poloměru křivosti normálového řezu plochy onou tečnou vedeného) se středem na normále plochy v onom bodě, jímž prochází.

U rotačních ploch jsou středy křivosti normálových řezů v ose rotace; kružnice plochy je (obecně) kosým řezem.

11. *Hlavní normálové řezy* plochy $z = f(x, y)$ jsou ve dvou k sobě kolmých rovinách; mají největší a nejmenší t. zv. *hlavní poloměry křivosti* plochy R_1, R_2; tyto se určí z rovnic:

celková (totální) *křivost* plochy:

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2};$$

střední křivost plochy:

$$2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}.$$

Prohnutím plochy bez protažení se celková křivost její (Gaußova míra křivosti) nemění.

Je-li $K \equiv 0$, je plocha *rozvinutelná* (15).

Bod plochy jest *eliptický* ($K > 0$), *hyperbolický* ($K < 0$) nebo *parabolický* ($K = 0$). V eliptickém bodu je rovina tečná jen po jedné straně plochy, v hyperbolickém plochu protíná; v bodu parabolickém má element plochy povahu parabolického válce, tečná rovina se ho dotýká v přímce.

Rovina rovnoběžná a soumezná s rovinou tečnou protíná plochu v křivce, zv. *Dupinova indikatrix*. Při $K > 0$ je to elipsa, při $K < 0$ hyperbola; délky jejich poloos jsou úměrny odmocninám z hlavních poloměrů křivosti. Bod plochy, v němž indikatrix je kružnice, sluje kruhový ($R_1 = R_2$).

12. *Věta Eulerova.* Křivost libovolného normálového řezu, který s rovinou prvního hlavního řezu svírá úhel φ:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2}.$$

13. Součet křivostí dvou k sobě kolmých normálových řezů ($a \perp b$) v bodě plochy je stálý (střední křivost):

$$\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2H.$$

14. *Obalová plocha soustavy ploch.* Podle druhu určení soustavy (jednomocné v případech *a*, *c*, dvojmocné v případě *b*) plyne rovnice obalové plochy vyloučením proměnných parametrů z rovnic:

a) $F(x, y, z, a) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$ eliminací parametru a;

b) $F(x, y, z, a, b) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial b} = 0$ elimin. nezávislých a, b;

c) $F(x, y, z, a, b) = 0$, při závislosti parametrů $\varphi(a, b) = 0$,

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a} = 0$$ eliminací a, b a $\frac{\partial b}{\partial a}$

15. *Rozvinutelná plocha* obaluje jednoparametrickou soustavu rovin. Je buď plocha tečen prostorové křivky (hrana vratu) nebo kužel či válec. Jsou-li x, y, z souřadnice křivky vratu, x', y', z' derivace podle oblouku, jest rozvinutelná plocha dána rovnicemi:

$$\xi = x(t) + ux'(t); \qquad \eta = y(t) + uy'(t); \qquad \zeta = z(t) + uz'(t).$$

Rozvinutelné plochy mají jen body parabolické.

16. *Geodetická křivka na ploše.* Hlavní normála křivky je normálou plochy; nejkratší spojení dvou bodů na ploše je čarou geodetickou (př. šroubovice na rotačním válci). V celém průběhu křivky platí:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0, \qquad \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{d^2z}{ds^2}}.$$

Křivoznačné křivky. Tečny obou křivek v každém bodě plochy dotýkají se tam hlavních řezů normálových; křivky tvoří na ploše dvě soustavy kolmosečné. Plocha normál podél křivoznačné čáry je rozvinutelná.

Asymptotické křivky ($K < 0$). Tečny křivky se dotýkají normálových řezů s křivostí nulovou; jejich oskulační roviny jsou tečné roviny plochy.

4. Křivočaré souřadnice v prostoru.

1. *Analytické určení bodu v prostoru:*

$$x = x(u, v, w); \qquad y = y(u, v, w); \qquad z = z(u, v, w).$$

Rovnice $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$, $w = \text{konst.}$ značí trojnásobnou soustavu ploch; proměnné u, v, w slují *křivočaré souřadnice.*

2. *Soustava orthogonální.* Soustava je kolmosečná, když

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} = 0;$$

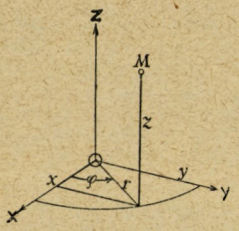
$$\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u} = 0;$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

3. *Souřadnice cylindrické* čili *semipolární* (obr. 41):

$$u = r, \qquad v = \varphi, \qquad w = z.$$

Dělí prostor na elementy soustavou kruhových válců $r = \text{konst.}$ s osou z, svazkem rovin $\varphi = \text{konst.}$ (v mezích od 0 do 2π) s osou z a soustavou rovin $w = \text{konst.}$ rovnoběžných s xy.



Obr. 41.

Souvislost s pravoúhlými souřadnicemi:

$$x = r\cos\varphi; \qquad r = +\sqrt{x^2 + y^2};$$

$$y = r\sin\varphi; \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x};$$

$$z = w. \qquad w = z.$$

4. *Element oblouku a objemu* v souřadnicích cylindrických:

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\varphi^2 + dw^2; \qquad dV = r\,dr\,d\varphi\,dw.$$

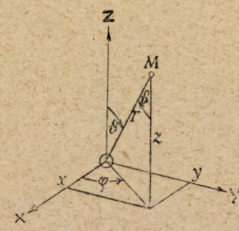
5. *Diferenciální parametr* druhého řádu funkce $V = f(x, y, z)$ v souřadnicích cylindrických:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial w^2}.$$

6. *Souřadnice polární prostorové* čili *sférické* (kulové) (obr. 42):

$$u = r, \qquad v = \varphi, \qquad w = \vartheta.$$

Dělí prostor na elementy soustavou koulí $r = \text{konst.}$ se středem v počátku, svazkem rovin $\varphi = \text{konst.}$ (v mezích $0, 2\pi$) s osou **z** a soustavou rotačních kuželů $\vartheta = \text{konst.}$ (v mezích $0, \pi$) s vrcholem v počátku a osou **z**.



Obr. 42.

Souvislost s pravoúhlými souřadnicemi:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi; \qquad r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$y = r\sin\vartheta\sin\varphi; \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

$$z = r\cos\vartheta. \qquad \vartheta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

7. *Element oblouku a objemu* v souřadnicích sférických:

$$ds^2 = dr^2 + r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2 + r^2\,d\vartheta^2; \qquad dV = r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta.$$

8. *Diferenciální parametr* druhého řádu funkce $V = f(x, y, z)$ v souřadnicích sférických:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \frac{\operatorname{cotg}\vartheta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}.$$

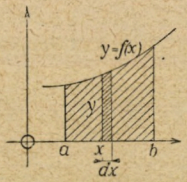
B. Hostinský: Diferenciální geometrie křivek a ploch, 2. vyd. 1942.
G. Julia: Éléments de géométrie infinitésimale, 2. vyd. 1936.
V. Hlavatý: Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet, 1937.
G. Scheffers: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. 2 sv., 3. vyd. 1922.
W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie, 3 sv., 3. vyd. 1930.
G. Darboux: Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal, 4 sv., 2. vyd. 1914—25.
L. Bianchi: Lezioni di geometria differenziale, 4 sv., 3. vyd. 1922—28.

5. Obsahy rovinných ploch (kvadratura).

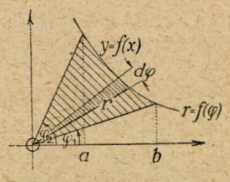
Rovinná plocha omezená křivkou $y = f(x)$ *v soustavě pravoúhlé* (obr. 43) budiž dále omezena dvěma pořadnicemi v místech $x = a$, $x = b$ a osou **x**.

Element plochy $\mathrm{d}p = y\,\mathrm{d}x$.

1. $p = \int_a^b y\,\mathrm{d}x$.



Obr. 43.



Obr. 44.

Je-li $x = \varphi(t), y = \psi(t)$,

2. $p = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Obsah výseče (obr. 44) křivky $y = f(x)$; $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$

3. $p = \frac{1}{2}\int_{x=a}^{x=b} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$.

4. $p = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (\varphi\psi' - \psi\varphi')\,\mathrm{d}t$.

Obsah plochy omezené křivkou $r = f(\varphi)$ *v soustavě polární* mezi dvěma průvodiči

5. $p = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,\mathrm{d}\varphi$.

6. Délky křivek (rektifikace).

Délka oblouku křivky se definuje jako limita obvodu křivce vepsaného polygonu z tětiv.

Délka oblouku křivky rovinné $y = f(x)$:

$$1.\quad s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy.$$

Je-li $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, nebo v polární soustavě $r = f(\varphi)$, jest

$$2.\quad s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\, dt. \qquad 3.\quad s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi.$$

Délka oblouku křivky prostorové. $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$

$$4.\quad s = \int_{s} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2}\, dt.$$

7. Povrchy těles (komplanace).

Obsah křivé plochy, dané její rovnicí (rovnicemi) nebo rovnicí (rovnicemi) křivky vytvořující (řídicí) a omezením.

1. *Obsah plochy válcové* $y = f(x)$, seříznuté válcem $z = \varphi(x)$ a rovinami $z = 0$, $x = a$, $x = b$:

$$P = \int_{x=a}^{x=b} z\, ds = \int_a^b z \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

2. *Obsah plochy rotační* vzniklé otáčením křivky $y = f(x)$ kolem osy x nebo y; element plochy $dP_x = 2\pi y \cdot ds$ nebo $dP_y = 2\pi x \cdot ds$:

$$P_x = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx; \qquad P_y = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x \sqrt{1 + x'^2}\, dy.$$

3. *Obsah plochy kuželové* s vrcholem v počátku, jejíž řídicí křivka je dána rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$:

$$P = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(xy' - yx')^2 + (xz' - zx')^2 + (yz' - zy')^2}\, dt.$$

4. *Plocha* $z = f(x, y)$, seříznutá válci $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ a rovinami $x = a$, $x = b$, má obsah

$$P = \int_{x=a}^{x=b} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dy\, dx.$$

Meze integrace jsou dány integračním oborem Ω, t. j. průmětem dané plochy do roviny xy; první integrace je v mezích proměnných, druhá v mezích konstantních. Je-li obor omezen uzavřenou křivkou, plynou proměnné meze ve směru jedné osy z rovnice křivky omezující obor; druhé, konstantní meze jsou určeny tečnami ve směru osy druhé.

5. *Plocha* daná parametricky $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. Část plochy nad integračním oborem Ω má obsah

$$P = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

kde E, F, G jsou Gaußovy základní veličiny 1. řádu. (Viz str. 138.)

6. *Plocha* $z = f(r, \varphi)$ v souřadnicích cylindrických, seříznutá válci $r = F(\varphi)$, $r = G(\varphi)$ a rovinami $z = 0$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, má obsah

$$P = \int_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\beta} \int_{F(\varphi)}^{G(\varphi)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\, r\, dr\, d\varphi.$$

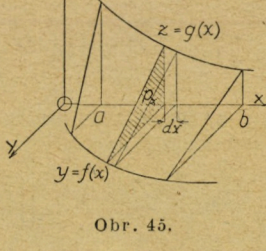
8. Objemy těles (kubatura).

1. *Objem tělesa,* jehož rovnoběžné řezy jsou funkcí odlehlosti, možno stanoviti jednoduchou integrací. Budiž na př. p_x obsah řezu, kolmého k x. Element objemu $dV = p_x\, dx$; součet elementů od $x = a$ do $x = b$ dá objem

$$V = \int_a^b p_x\, dx.$$

Na př. hranolovité těleso (obr. 45) je omezeno rovinami $z = 0$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ a plochou zborcenou. Plochu určují křivky $y = f(x)$, $z = g(x)$ a řídicí rovina $x = 0$, s níž přímky plochy jsou rovnoběžny. Obsah řezu $p_x = \frac{1}{2} yz$ je funkcí odlehlosti x. Objem tělesa

$$V = \frac{1}{2} \int_a^b yz\, dx.$$



Obr. 45.

Jsou-li místo křivek přímky, je plocha hyperbolický paraboloid, těleso sluje hranolec; v tom případě lze objem tělesa vyjádřiti dalším vzorcem **3.**

2. *Objem těles rotačních.* Otáčí-li se křivka $y = f(x)$ kolem osy x nebo kolem osy y, jest objem tělesa

$$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 \, dx ; \qquad V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 \, dy .$$

3. *Simpsonův vzorec.* Je-li obsah řezu p_x celistvá funkce nejvýš třetího stupně, p_1, p_2 obsahy krajních řezů, p_s obsah středního řezu (v polovině vzdálenosti $v = x_2 - x_1$), je objem tělesa přesně

$$V = \frac{v}{6} (p_1 + 4 p_s + p_2).$$

Vzorec platí zvláště pro hranolce (prismatoidy) a plochy druhého stupně.

4. *Objem tělesa válcovitého* s přímkami na ploše ve směru z. Podstavou je uzavřená část roviny xy (integrační obor Ω), shora je omezeno plochou o rovnici $z = f(x, y)$. Integrační obor budiž na př. omezen dvěma křivkami $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ a dvěma rovnoběžkami $x = a$, $x = b$.

Element objemu $dV = z \, d\Omega = z \, dx \, dy$; součet elementů do vrstvy (první vnitřní integrace v proměnných mezích) a součet vrstev (druhá integrace v mezích konstantních) dá objem

$$V = \iint_{\Omega} z \, d\Omega = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} z \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) \, dy .$$

5. *Objem tělesa válcovitého* s přímkami na ploše ve směru z v souřadnicích cylindrických. Podstavou budiž obor Ω, omezený křivkami $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$ a přímkami $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$; shora je těleso omezeno plochou $z = f(r, \varphi)$.

Element objemu $dV = z \, d\Omega = z \, r \, dr \, d\varphi$.

$$V = \iint_{\Omega} z \, d\Omega = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1}^{r_2} z \, r \, dr \, d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} f(r, \varphi) \, r \, dr .$$

6. *Objem části prostoru,* vyjádřený trojnásobným integrálem v souřadnicích pravoúhlých a polárních

$$V = \iiint_V dx \, dy \, dz = \iiint_V r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta .$$

Meze integrační určíme z rovnice plochy, omezující integrační obor V; první dvě integrace jsou v mezích proměnných, třetí v mezích konstantních.

XII. Diferenciální rovnice.

A. Obyčejné diferenciální rovnice.

Obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu jest funkční závislost mezi *jednou* nezávisle proměnnou x, závisle proměnnou y a jejími derivacemi až do n-tého řádu, obecně

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Každá funkce $y = y(x)$, která se všemi derivacemi dané diferenciální rovnici identicky (t. j. pro každé x) vyhovuje, jest její *integrál.*

Řešiti diferenciální rovnici znamená vyhledati její integrál.

Obsahuje-li integrál obyčejné diferenciální rovnice n-tého řádu n obecných nezávislých konstant, sluje *obecný integrál;* jeho geometrickým obrazem jest soustava integrálních čar v rovině. Mají-li konstanty zvláštní hodnoty, sluje *partikulární integrál;* zobrazen jest určitou integrální čarou soustavy. Řešení, které není obsaženo v obecném integrálu diferenciální rovnice, sluje *singulární řešení.*

K diferenciálním rovnicím vedou v geometrii, mechanice, fysice, statistice atd. vztahy mezi infinitesimálními prvky nějakého útvaru nebo zjevu během nekonečně malého časového zlomku. Její řešení podává pak zákon, platný pro celý útvar nebo zjev v celém jeho časovém průběhu.

1. Diferenciální rovnice I. řádu.

Obecný tvar $F(x, y, y') = 0$

aneb, možno-li tuto rovnici řešiti podle y', zvláštní tvar

$$y' = f(x, y).$$

Obecný integrál obsahuje jednu libovolnou konstantu.

Je-li $f(x, y)$ funkce jednoznačná, v jistém oboru spojitá se spojitou derivací $\partial f : \partial y$, je diferenciální rovnicí I. řádu dán v každém bodě oboru určitý směr (směrové pole). Nehledě ku případné singularitě, jde každým bodem roviny jen jedna integrální čára.

Křivky $f(x, y) = C$ slují *isoklíny;* integrální čáry je protínají v stálém úhlu.

Řešitelné tvary diferenciálních rovnic I. řádu a některé methody, jak řešení převést na prostou integraci (kvadraturu), jsou naznačeny v dalším.

1. Odloučení (separace) proměnných jest úprava diferenciální rovnice, aby na každé její straně byla jen jedna z obou proměnných s příslušným diferenciálem, který nesmí býti ve jmenovateli. Je-li v takovém případě

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}, \text{ takže } f(x)\,dx = g(y)\,dy,$$

jest obecným integrálem

$$\int f(x)\,dx - \int g(y)\,dy = C.$$

V praxi jde zpravidla o partikulární integrál, v němž konstanta má určitou hodnotu; určíme ji z podmínky dané počátečním stavem neb omezenou integrací v předepsaných mezích.

Řešení, vyhovující podmínce: pro $x = x_0$ budiž $y = y_0$, jest

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{y_0}^{y} g(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

2. Substituce, vhodně volená, umožní někdy separaci proměnných. Tak vede k cíli v případech:

1.) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(ax + by)$ substituce $ax + by = t$;

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = a + b\,\varphi(t)\,,$$

kde proměnné lze odloučiti. Po provedené integraci nahradíme podle substituční rovnice proměnnou t původními.

2.) $x = \varphi(y')$ substituce $y' = t$;

$$y = \int t\,\mathrm{d}x = \int t\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int t\,\mathrm{d}\varphi(t)\,.$$

Z rovnic $x = \varphi(t)$, $y = t\,\varphi(t) - \int \varphi(t)\,\mathrm{d}t$

plyne eliminací veličiny t vztah mezi x a y. Podobně užijeme ve tvaru

3.) $y = \varphi(y')$ substituce $y' = t$.

3. Rovnice homogenní mají tvar

$$u(x, y)\,\mathrm{d}x + v(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \text{ aneb } y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

kde u a v jsou *homogenní funkce* téhož stupně (m-tého). Substituce

$$t = \frac{y}{x} \text{ aneb } y = tx\,;\quad \mathrm{d}y = t\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}t\,,\quad y' = t + x\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}.$$

Ježto zde $u = x^m \varphi(t)$; $v = x^m \psi(t)$, plyne po krácení činitelem x^m tvar

$$\varphi(t)\,\mathrm{d}x + \psi(t)\,(t\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}t) = 0 \text{ aneb } t + x\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = f(t),$$

kde proměnné lze odloučiti. Dostaneme

$$\lg x + \int \frac{\psi(t)\,\mathrm{d}t}{\varphi(t) + t\,\psi(t)} = C \text{ aneb } \lg x - \int \frac{\mathrm{d}t}{f(t) - t} = C.$$

Po provedené integraci klademe opět $t = \frac{y}{x}$.

Isokliny homogenních diferenciálních rovnic tvoří svazek přímek $\frac{y}{x} = C$, jdoucích počátkem; integrální čáry jsou podobné a podobně položeny vzhledem k počátku.

Nehomogenní diferenciální rovnice

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)\,dx + (a_2 x + b_2 y + c_2)\,dy = 0,$$

kde $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, se dá převésti na homogenní. Rovnice

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \qquad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

značí dvě různoběžky; řešením obou plynou souřadnice průsečíku (x_0, y_0), do něhož přeložíme počátek soustavy souřadnic. Transformací

$$x = \xi + x_0, \qquad y = \eta + y_0$$

přejde rovnice na homogenní

$$(a_1 \xi + b_1 \eta)\,d\xi + (a_2 \xi + b_2 \eta)\,d\eta = 0.$$

Je-li uved. determinant nula, jsou přímky rovnoběžny; $a_2 = a_1 \frac{b_2}{b_1} = a_1 \lambda$,

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)\,dx + [\lambda(a_1 x + b_1 y) + c_2]\,dy = 0.$$

Tuto rovnici řešíme substitucí $a_1 x + b_1 y = t$.

4. Lineární rovnice I. řádu jsou lineární v y a y', obecně tvaru

$$y' + Py + Q = 0, \tag{1}$$

kde P a Q jsou funkce jen proměnné x. Hledanou funkci předpokládáme ve tvaru součinu

$$y = u \cdot v$$

dvou neznámých funkcí proměnné x; jednu z nich možno tedy zvoliti.

V rovnici

$$uv' + vu' + Puv + Q = 0 \quad \text{čili} \quad u(v' + Pv) + vu' + Q = 0$$

volíme $v' + Pv = 0$ a určíme v; dosazením do $vu' + Q = 0$ plyne u.

Obecný integrál $y = uv$ jest

$$y = e^{-\int P dx}\left[C - \int Q e^{\int P dx} dx\right]. \tag{2}$$

Podle dané rovnice (1) dosadíme do vzorce (2) hodnoty P a Q a naznačené v něm dvě integrace provedeme.

Podobně se řeší rovnice $\frac{dx}{dy} + Gx + H = 0$, (3)

lineární v x a x', kde G a H jsou funkce proměnné y. Obecný integrál je

$$x = e^{-\int G\,dy}\left[C - \int He^{\int G\,dy}\,dy\right]. \quad (4)$$

5. Rovnice *Bernoulliova*

$$y' + Py + Qy^n = 0, \quad n \neq 1,$$

kde $P = P(x)$, $Q = Q(x)$ jsou funkce x. Dělíme-li faktorem y^n, vede substituce $z = y^{1-n}$, $z' = (1-n)y^{-n}y'$

na lineární rovnici $z' + (1-n)Pz + (1-n)Q = 0$;

její obecný integrál podle (2) po dosazení za z jest

$$y^{1-n} = (1-n)e^{(n-1)\int P\,dx}\left[C - \int Qe^{(1-n)\int P\,dx}\,dx\right].$$

6. Rovnice *Riccatiova*

$$y' = P + Qy + Ry^2,$$

kde P, Q, R jsou funkce x, se dá kvadraturami řešiti jen ve zcela zvláštních případech. Známe-li na př. jeden partikulární integrál y_1, je podle dané rovnice $y_1' = P + Qy_1 + Ry_1^2$;

substitucí $y = y_1 + \frac{1}{z}$, $y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$ přejde na rovnici lineární

$$z' + (2Ry_1 + Q)z + R = 0.$$

Speciální *Riccatiova* rovnice $y' = \frac{a}{x^2} + y^2$

přejde substitucí $y = \frac{1}{z}$ na homogenní $z' + a\frac{z^2}{x^2} + 1 = 0$.

7. Rovnice *d'Alembertova*

$$y = x\varphi(y') + \psi(y')$$

je lineární vzhledem k x a y. Rovnice tohoto druhu integrujeme po předchozím diferencování. Kladouce $y' = p$, $dy = p\,dx$, dostaneme lineární rovnici pro x tvaru (1) jako funkci proměnné p

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x + \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p} = 0;$$

z ní vypočteme $x(p)$; dosazením do rovnice původní plyne $y(p)$. Vyloučením parametru p z obou těchto rovnic plyne vztah mezi x a y. Této methody lze použíti také u rovnic $x = f(y')$ a $y = f(y')$.

8. Rovnice *Clairautova*

$$y = xy' + \psi(y')$$

je zvláštním případem rovnice *d'Alembertovy*; téže stavby jest její obecný integrál $y = xC + \psi(C)$

a značí soustavu přímek. Obalová čára této soustavy plyne z rovnic

$$y = Cx + \psi(C); \qquad \frac{\partial y}{\partial C} = x + \psi'(C) = 0$$

eliminací konstanty C; je singulárním řešením rovnice **8.**

9. Singulární řešení. Není-li diferenciální rovnicí $F(x, y, y') = 0$ jednoznačně určeno y', neprochází bodem (x, y) jen jedna integrální čára. Křivkové prvky $(x, y, y' = p)$, které vyhovují rovnicím

$$F(x, y, p) = 0; \qquad \frac{\partial F}{\partial p} = 0,$$

slují *singulární;* jejich geometrické místo je *diskriminantní křivka*, jejíž rovnice plyne z uvedených rovnic eliminací p. Je-li jimi splněna rovnice

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} p = 0 \quad \text{s podmínkou} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0,$$

je rovnice diskriminantní křivky *singulárním řešením* rovnice

$$F(x, y, y') = 0.$$

Obalové čáry integrálních čar jsou singulárním řešením; nemusí však každé singulární řešení býti obalovou čarou.

10. Rovnice exaktní. *Integrování úplných diferenciálů.* Rovnice

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

je totálním diferenciálem funkce $f(x, y) = C$, takže platí

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0, \quad \text{kde } M = \frac{\partial f}{\partial x}, \; N = \frac{\partial f}{\partial y},$$

je-l splněna podmínka, vyjadřující rovnost derivací $f_{xy} = f_{yx}$:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Funkci $f(x, y)$ určíme buď z rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \text{ ve tvaru } \quad f = \int M dx + Y$$

parciální integrací vzhledem k x, pokládajíce y za stálou, s integrační konstantou Y (funkce y); derivováním podle y najdeme

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N = \frac{\partial}{\partial y}\int M dx + \frac{dY}{dy}.$$

Obecný integrál dané rovnice je

$$\int M\,\mathrm{d}x + \int \left(N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = C.$$

Nebo můžeme vyjíti od $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ a postupovati obdobně s integrační konstantou $X(x)$:

$$\int N\,\mathrm{d}y + \int \left(M - \int \frac{\partial N}{\partial x}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = C.$$

11. Integrační faktor. Není-li rovnice $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = 0$ exaktní, t. j. $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, existuje t. zv. *integrační faktor* $\mu\,(x, y)$, kterým znásobena přejde v úplný diferenciál $(\mu M)\,\mathrm{d}x + (\mu N)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}f$;

pak již $$\frac{\partial (\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial (\mu N)}{\partial x},$$

čili $$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Najdeme-li některý z integrálů této parciální diferenciální rovnice, převedeme jím danou rovnici na exaktní a řešíme podle **10.**

Integračních faktorů je nekonečně mnoho, neboť krom μ je také $\mu\,\varphi\,(f)$ integračním faktorem. Podíl dvou integračních faktorů, jenž není konstantou, jest obecným integrálem rovnice.

Na př. integrační faktor homogenní rovnice tvaru

$$M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = 0 \text{ jest } \mu = (Mx + Ny)^{-1};$$

integrační faktor homogenní rovnice tvaru

$$f(x, y)\,y\,\mathrm{d}x + g(x, y)\,x\,\mathrm{d}y = 0 \text{ jest } \mu = (Mx - Ny)^{-1}.$$

Obtížnému řešení parciální diferenciální rovnice možno se vyhnouti, existuje-li faktor, který je buď funkcí jen x nebo funkcí jen y. Předpokládáme-li na př., že $\mu = \mu(x)$, jest $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ a poslední rovnice přejde na rovnici

$$\frac{1}{\mu} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right),$$

z níž integrací najdeme μ. Tak je tomu u rovnic lineárních.

2. Diferenciální rovnice II. řádu.

Obecný tvar $F(x, y, y', y'') = 0.$

Obecný integrál obsahuje dvě libovolné (nezávislé) konstanty.

1. Řešení kvadraturami je možné jen ve zvláštních případech; danou rovnici se pokusíme převésti na rovnici I. řádu a tu pak integrovati. K redukci užijeme vztahů

$$(\alpha)\quad \begin{matrix} y' = \dfrac{dy}{dx}, \\ y' = p; \end{matrix} \qquad (\beta)\quad \begin{matrix} y'' = \dfrac{dy'}{dx}, \\ y'' = p'; \end{matrix} \qquad (\gamma)\quad \begin{matrix} y'' = y' \dfrac{dy'}{dy} = \dfrac{1}{2} \dfrac{dy'^2}{dy}, \\ y'' = p \dfrac{dp}{dy} = \dfrac{1}{2} \dfrac{dp^2}{dy}. \end{matrix}$$

Následující tvary možno substitucemi, udanými v závorce, převésti na rovnice I. řádu:

1) $y'' = f(x)$; (β); obecný integrál $y = \int \left[\int f(x)\,dx\right] dx + C_1 x + C_2$.

2) $y'' = f(y)$; (γ); obecný integrál $x = \int \dfrac{dy}{\sqrt{C_1 + 2\int f(y)\,dy}} + C_2$.

3) $y'' = f(y')$; chybí x a y.

$$(\alpha, \beta)\quad x = \int \frac{dp}{f(p)} + C_1; \qquad (\alpha, \gamma)\quad y = \int \frac{p\,dp}{f(p)} + C_2;$$

eliminací p z těchto rovnic plyne obecný integrál.

4) $y'' = f(y', x)$; chybí y. Substituce (α, β) vede na rovnici I. řádu $p' = f(p, x)$. Je-li $p = \varphi(x) + C_1$ její řešení, jest obecný integrál

$$y = \int \left[\varphi(x) + C_1\right] dx + C_2$$

5) $y'' = f(y', y)$; chybí x. Substituce (α, γ) vede na rovnici I. řádu

$$p \frac{dp}{dy} = f(p, y).$$

Je-li $p = \psi(y) + C_1$ její řešení, jest obecný integrál

$$x = \int \frac{dy}{\psi(y) + C_1} + C_2.$$

6) $y = f(y'')$. Zde klademe $y'' = t$; $y = f(t)$, $dy = f'(t)\,dt$; podle (γ) je $dy'^2 = 2t f'(t)\,dt$, odtud $y'^2 = 2\int t f'(t)\,dt + C_1 = \varphi(t) + C_1$;

$$x = \int \frac{dy}{y'} = \int \frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{\varphi(t) + C_1}} + C_2.$$

Vyloučením proměnné t z této rovnice pro x a z rovnice $y = f(t)$ plyne obecný integrál.

7) $F\left(xy', y', \frac{y}{x}\right) = 0$ čili $F\left(u, p, t\right) = 0$ řešme podle $u = f(p, t)$.

Jako u homogenních rovnic I. řádu klademe zde

$$\frac{y}{x} = t, \quad y = tx; \quad y' = p = xt' + t, \quad xt' = p - t;$$

mimo to jest

$$xy'' = u = xp' = f(p, t).$$

Dosazením do identity $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{p'}{t'} = \frac{xp'}{xt'}$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{f(p, t)}{p - t}$$

diferenciální rovnici I. řádu, z níž stanovíme p jako funkci proměnné t. Z rovnice $p(t) = xt' + t$ plyne další kvadraturou t jako funkce x. Podle substituční rovnice je obecný integrál rovnice $y = tx$.

2. Lineární rovnice II. řádu homogenní (neúplná, zkrácená) je lineární v y, y' a y'', obecně tvaru

$$y'' + Py' + Qy = 0, \tag{1}$$

kde koeficienty P, Q jsou obecně funkce proměnné x.

Pokud P a Q jsou funkce x, není přímé methody pro řešení těchto rovnic. Platí však o nich věty:

1. Jsou-li $y_1(x)$, $y_2(x)$ integrály lineární homogenní diferenciální rovnice II. řádu, jsou jimi také $C_1 y_1$, $C_2 y_2$ a součet $C_1 y_1 + C_2 y_2$.

2. Dva partikulární integrály y_1, y_2, na sobě lineárně nezávislé (jejich podíl není stálý, když determinant $y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$), tvoří *fundamentální systém*. Z nich složený obecný integrál obsahuje všechna řešení rovnice (1).

Obecný integrál má tvar

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \tag{2}$$

Známe-li jeden partikulární integrál rovnice y_1, který není identicky nula, můžeme druhý partikulární integrál její y_2 určiti kvadraturou:

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \mathrm{e}^{-\int P \,\mathrm{d}x} \,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

3. Lineární rovnice II. řádu nehomogenní (úplná)

$$y'' + Py' + Qy = f(x)$$

s členem $f(x)$ na pravé straně může býti řešena kvadraturami, podaří-li se řešiti příslušnou homogenní (zkrácenou) rovnici (1).

a) Lagrangeova methoda variace konstant. Obecný integrál rovnice nehomogenní předpokládáme ve tvaru obecného integrálu rovnice homogenní

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

v němž však C_1, C_2 nejsou konstanty, nýbrž (neznámé) funkce x. Z rovnic

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0,$$

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x)$$

vypočteme $C_1' = \frac{dC_1}{dx}$, $C_2' = \frac{dC_2}{dx}$ a odtud kvadraturami C_1, C_2.

b) Známe-li jeden partikulární integrál u příslušné rovnice homogenní, jest obecný integrál rovnice nehomogenní

$$y = u\left[c_1 + \int \frac{1}{u^2} e^{-\int P\,dx}\left(c_2 + \int u f(x) e^{\int P\,dx}\,dx\right)dx\right].$$

4. Lineární rovnice II. řádu homogenní s konstantními koeficienty

$$y'' + ay' + by = 0$$

jsou vždy řešitelné. Partikulární integrál má tvar $y = e^{\lambda x}$; dosazením plyne *charakteristická rovnice*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0,$$

z níž vypočteme kořeny λ_1, λ_2. Podle druhu kořenů je v případě

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, obecný integrál $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$;

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ „ „ $y = e^{\lambda x}(A + Bx)$;

3) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ „ „ $y = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$,

kde A, B jsou libovolné konstanty. Klademe-li $A = C \sin \varphi$, $B = C \cos \varphi$, lze obecný integrál v případě 3) psáti ve tvaru

$$y = C e^{\alpha x} \sin(\beta x + \varphi)$$

s libovolnými konstantami C, φ.

5. Lineární rovnice II. řádu nehomogenní s konstantními koeficienty

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

možno řešiti různým způsobem:

Napřed řešíme rovnici homogenní **4.**; z jejího obecného integrálu variací konstant určíme konstanty podle **3.** *a)* jako funkce x.

Nebo (někdy) postupujeme podle **3.** *b)*, kde $P = a$.

Známe-li partikulární integrál $\varphi(x)$ nehomogenní rovnice **5.** a je-li y_0 obecný integrál příslušné homogenní (zkrácené) rovnice **4.**, pak obecný integrál nehomogenní rovnice **5.** je dán součtem obou

$$y = y_0 + \varphi(x).$$

Partikulární integrál $\varphi(x)$ nehomogenní rovnice najdeme v některých případech takto: Předpokládáme jej v obecném tvaru členu na pravé straně $f(x)$; dosadíme ten to $\varphi(x)$ s jeho derivacemi φ', φ'' do dané rovnice a methodou neurčitých součinitelů stanovíme neznámé koeficienty.

Některé případy členu $f(x)$ a partikulárního integrálu:

1) $f(x) = C$; $\qquad \varphi(x) = \dfrac{C}{b}$.

2) $f(x) = Ax^2 + Bx + C$; $\qquad \varphi(x) = mx^2 + nx + p$, kde

konstanty m, n, p jsou určeny rovnicemi:

$$bm = A,\ bn + 2am = B,\ bp + an + 2m = C:$$

3) $f(x) = Ae^{mx}$; $\qquad \varphi(x) = \dfrac{A}{m^2 + am + b} e^{mx}$.

Je-li však m kořenem rovnice $m^2 + am + b = 0$ (takže e^{mx} je partikulárním integrálem rovnice zkrácené), a to *a)* jednoduchým, *b)* dvojnásobným, jest

a) $\varphi(x) = \dfrac{A}{2m + a} xe^{mx}$; $\qquad$ *b)* $\varphi(x) = \dfrac{A}{2} x^2 e^{mx}$.

4) $f(x) = A \cos mx + B \sin mx$; $\qquad \varphi(x) = p \cos mx + q \sin mx$, kde

$$p = \frac{(b - m^2)A - maB}{(b - m^2)^2 + m^2 a^2}; \qquad q = \frac{maA + (b - m^2)B}{(b - m^2)^2 + m^2 a^2}.$$

Je-li však $C_1 \cos mx + C_2 \sin mx$ integrálem rovnice zkrácené $y'' + ay' + by = 0$, je $\varphi(x) = x(p \cos mx + q \sin mx)$ a konstanty p, q jest určiti po dosazení do dané rovnice.

6. Řešení s danými podmínkami. Má-li řešení diferenciální rovnice splniti zvláštní podmínky, nutno podle nich stanoviti konstanty obecného integrálu; u diferenciálních rovnic II. řádu je k tomu třeba dvou podmínečných rovnic. Mohou býti předepsány buď hodnoty hledané funkce a její derivace na témže místě *(podmínky počáteční)* nebo dvě hodnoty funkce na dvou různých místech *(podmínky okrajové)*.

Příklad. Řešení diferenciální rovnice $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$ má splniti počáteční podmínky: pro $x = 0$ budiž $\varphi(0) = 0$; $\varphi'(0) = v$.

Obecný integrál: $\varphi(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$.

$\varphi(0) = 0$ jen, když $A = 0$, neboť $\cos 0 = 1$; zbývá $\varphi(x) = B \sin(\sqrt{\lambda}x)$.

$\varphi'(x) = B\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x)$ má hodnotu $\varphi'(0) = B\sqrt{\lambda} \cos 0 = v$, je-li $B = v:\sqrt{\lambda}$.

Řešení: $$\varphi(x) = \frac{v}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Problém vlastních hodnot. Lineární homogenní diferenciální rovnice s danými okrajovými podmínkami obsahuje lineárně neurčitý parametr λ. Hodnoty parametru, pro které existuje řešení, jež není identicky nula (řešení triviální $\varphi(x) \equiv 0$), slují *vlastní hodnoty*, příslušná řešení *vlastní funkce*.

Příklad. Řešení diferenciální rovnice $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$ má splniti okrajové podmínky: $\varphi(0) = 0$; $\varphi(\pi) = 0$.

Obecný integrál: $\varphi(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$.

$\varphi(0) = 0$, když $A = 0$, neboť $\cos 0 = 1$; zbývá $\varphi(x) = B \sin(\sqrt{\lambda}x)$.

$\varphi(\pi) = B \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$ pro $B = 0$ (řešení triviální) nebo pro $\sqrt{\lambda} = n$ číslo celé $(\pm 1, \pm 2, \ldots)$;

vlastní hodnoty: $\lambda = n^2$; vlastní funkce: $\varphi_n(x) = B \sin nx$.

7. Greenova funkce. Řešení lineární rovnice II. řádu

$$L[y] \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + qy = f(x) \tag{1}$$

s lineárními homogenními podmínkami

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) &= 0, \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

kde p, q jsou spojité funkce proměnné x a α_i, β_i konstanty, zprostředkuje pomocná *Greenova funkce* $G(x, \xi)$. Tato vyhovuje podmínkám (2) a homogenní rovnici $L[y] = 0$ v intervalu $a \leqq x \leqq b$ kromě místa $x = \xi$, kde její derivace má přetržku velikosti $1 : p(\xi)$.

Je-li $y_0(x)$ řešení rovnice $L[y] = 0$, vyhovující podmínkám (2) pro $x = a$, řešení $y_1(x)$ pro $x = b$ a výraz $D = y_0 y_1' - y_0' y_1 \neq 0$, je Greenova funkce dána vzorci:

$$x \leqq \xi, \qquad G(x, \xi) = y_0(x) y_1(\xi) : p(\xi) D_{x=\xi};$$

$$x \geqq \xi, \qquad G(x, \xi) = y_0(\xi) y_1(x) : p(\xi) D_{x=\xi}.$$

Řešení rovnice (1) s podmínkami (2) vyjadřuje integrál

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) \,\mathrm{d}\xi.$$

3. Lineární diferenciální rovnice *n*-tého řádu.

1. Lineární homogenní diferenciální rovnice *n*-tého řádu má tvar

$$X_0 \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + X_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + X_2 \frac{\mathrm{d}^{n-2} y}{\mathrm{d}x^{n-2}} + \ldots + X_{n-1} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + X_n y = 0,$$

kde $X_0, X_1, \ldots X_n$ jsou dané funkce x. O těchto rovnicích platí:

Jsou-li $y_1, y_2, \ldots y_n$ různé partikulární integrály dané rovnice na sobě lineárně nezávislé, t. j. není-li pro ně Wronskiho determinant (str. 91) identicky nula, tvoří *fundamentální systém* a skládají obecný integrál ve tvaru

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

kde $C_1, C_2 \ldots C_n$ jsou libovolné konstanty.

2. Lineární nehomogenní rovnice má tvar

$$X_0 y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + X_2 y^{(n-2)} + \ldots + X_{n-1} y' + X_n y = X,$$

kde člen X na pravé straně jest daná funkce proměnné x.

Je-li $\varphi(x)$ nějaký partikulární integrál této rovnice a známe-li obecný integrál příslušné rovnice homogenní, jest obecný integrál dané rovnice nehomogenní

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + \varphi(x).$$

Obecný integrál rovnice nehomogenní se skládá z obecného integrálu rovnice homogenní a libovolného partikulárního integrálu rovnice nehomogenní.

3. Lineární homogenní rovnice s konstantními koeficienty

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

má partikulární integrál $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Dosazením plyne pro λ algebraická *charakteristická rovnice* *n*-tého stupně

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

a) Jsou-li všechny kořeny charakteristické rovnice $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ různé, jsou partikulární integrály

$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}; \qquad y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}; \ldots \qquad y_n = \mathrm{e}^{\lambda_n x};$$

obecný integrál $y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n \mathrm{e}^{\lambda_n x}$.

b) Při m-násobném kořenu $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = \lambda$ a dalších různých kořenech $\lambda_{m+1}, \ldots \lambda_n$ charakteristické rovnice jsou partikulární integrály

$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda x}; \qquad y_2 = x\mathrm{e}^{\lambda x}; \qquad y_3 = x^2 \mathrm{e}^{\lambda x}; \ldots \qquad y_m = x^{m-1} \mathrm{e}^{\lambda x};$$

$$y_{m+1} = \mathrm{e}^{\lambda_{m+1} x}; \ldots \qquad y_n = \mathrm{e}^{\lambda_n x};$$

obecný integrál

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x} \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_m x^{m-1} \right) + C_{m+1} \mathrm{e}^{\lambda_{m+1} x} + \ldots + C_n \mathrm{e}^{\lambda_n x}.$$

c) Vyskytnou-li se mezi kořeny charakteristické rovnice dvojice komplexní sdružené, na př. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, vyjádříme oba příslušné partikulární integrály tvarem reálným:

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = A e^{\alpha x} \cos \beta x + B e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

d) Opakují-li se dvojice komplexních sdružených kořenů $\alpha \pm i\beta$ charakteristické rovnice p-krát, jest obecný integrál

$$y = e^{\alpha x}(A_1 \cos \beta x + B_1 \sin \beta x) + x e^{\alpha x}(A_2 \cos \beta x + B_2 \sin \beta x) + \ldots +$$
$$+ x^{p-1} e^{\alpha x}(A_p \cos \beta x + B_p \sin \beta x).$$

Příklad. Homogenní rovnice 4. řádu

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + ay = 0 \quad \text{nebo} \quad y^{(4)} + ay = 0.$$

Charakteristická rovnice $\lambda^4 + a = 0$ má kořeny $\lambda_{1,4} = (1 \pm i)\alpha$; $\lambda_{2,3} = (-1 \pm i)\alpha$, kde $\alpha = \sqrt[4]{a/4}$. Obecný integrál podle *c)*

$$y = e^{\alpha x}(A_1 \cos \alpha x + B_1 \sin \alpha x) + e^{-\alpha x}(A_2 \cos \alpha x + B_2 \sin \alpha x).$$

Zavedeme-li místo funkcí exponenciálních hyperbolické funkce vztahy

$$e^{\alpha x} = \cosh \alpha x + \sinh \alpha x; \qquad e^{-\alpha x} = \cosh \alpha x - \sinh \alpha x$$

a konstanty sloučíme, nabude obecný integrál rovnice tvaru

$$y = C_1 \cos \alpha x \cosh \alpha x + C_2 \cos \alpha x \sinh \alpha x + C_3 \sin \alpha x \cosh \alpha x + C_4 \sin \alpha x \sinh \alpha x.$$

4. Lineární nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty.

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x).$$

a) Lagrangeova methoda variace konstant. Obecný integrál má tvar obecného integrálu příslušné rovnice homogenní, v němž však $C_1, C_2, \ldots C_n$ nejsou konstanty, nýbrž funkce x. Jsou-li $y_1, y_2, \ldots, y_n$ známé partikulární integrály rovnice homogenní, plynou řešením soustavy rovnic

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots \qquad + C_n' y_n = 0$$
$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots \qquad + C_n' y_n' = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0$$
$$C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_0}$$

neznámé derivace $C_1', C_2', \ldots, C_n'$; z těch pak jednoduchou integrací určíme hledané funkce: $C_1 = u_1(x)$, $C_2 = u_2(x)$; $\ldots$; $C_n = u_n(x)$.

b) Obecný integrál lineární nehomogenní rovnice je součtem obecného integrálu příslušné rovnice homogenní a libovolného partikulárního integrálu $\varphi(x)$ rovnice nehomogenní.

Je-li $f(x)$ racionální celistvá funkce n-tého stupně, jest obecný integrál

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + \varphi(x),$$

kde také $\varphi(x)$ jest celistvá funkce n-tého stupně; dosazením do dané rovnice najdeme její koeficienty methodou neurčitých součinitelů.

Když $f(x) = A$ (konst.), jest obecný integrál

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + \frac{A}{a_n}.$$

Příklad. Nehomogenní rovnice 4. řádu

$$y^{(4)} + ay = bx$$

má, jak plyne dosazením, partikulární integrál $y = \frac{a}{b} x = \varphi(x)$.

Její obecný integrál je složen z obecného integrálu rovnice homogenní $y^{(4)} + ay = 0$ v předcházejícím příkladě a z integrálu partikulárního $\varphi(x)$:

$$y = e^{\alpha x}(A_1 \cos \alpha x + B_1 \sin \alpha x) + e^{-\alpha x}(A_2 \cos \alpha x + B_2 \sin \alpha x) + \frac{b}{a} x.$$

c) Diferenciální rovnice $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$ má obecný integrál

$$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)\,dx + C_1 x^{n-1} + \ldots + C_{n-1} x + C_n,$$

kde n-násobnou integraci možno vyjádřiti jednoduchým integrálem

$$\int_0^x dx \int_0^x dx \ldots \int_0^x f(x)\,dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt.$$

5. *Eulerova* lineární homogenní diferenciální rovnice

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} xy' + a_n y = 0.$$

Substitucí $x = e^t$, $dx = x\,dt$ přejde na lineární homogenní s konstantními koeficienty.

Partikulární integrál má zde tvar $y = x^\lambda$. Dosazením dostaneme algebraickou rovnici n-tého stupně

$$a_0 \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1) + \ldots + a_{n-2}\lambda(\lambda-1) + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Při vesměs různých kořenech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ této rovnice jest obecný integrál

$$y = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2} + \ldots + C_n x^{\lambda_n}.$$

Opakují-li se kořeny $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = \lambda$, kdežto $\lambda_{m+1}, \ldots \lambda_n$ jsou různé, jest obecný integrál

$$y = x^\lambda [C_1 + C_2 \lg x + C_3 (\lg x)^2 + \ldots + C_m (\lg x)^{m-1}] + \\ + C_{m+1} x^{\lambda_{m+1}} + \ldots + C_n x^{\lambda_n}.$$

4. Simultánní (soudobé) diferenciální rovnice.

1. Soustava diferenciálních rovnic I. řádu ve tvaru normálním. K určení n funkcí $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ téže proměnné x je dáno n nezávislých rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \end{aligned}$$

čili $$\frac{\mathrm{d}y_\nu}{\mathrm{d}x} = f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots y_n), \quad (\nu = 1, 2, \ldots n) \qquad (1)$$

Z některé rovnice soustavy (1), na př. $y_1' = f_1$, určíme vyšší derivace $y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n)}$ a z těchto n rovnic eliminujeme $n-1$ proměnných $y_2, y_3, \ldots, y_n$; dostaneme tak rovnici n-tého řádu pouze s x a y_1

$$F_1(x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(n)}) = 0.$$

Podobně bychom našli diferenciální rovnice n-tého řádu pro ostatní proměnné. Eliminujeme-li tak, že vypočteme

$$y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(n-1)}); \qquad y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(n-1)}); \ldots;$$

$$y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(n-1)}) \qquad (a)$$

a dosadíme do derivace $y_1^{(n)}$, dostaneme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^n y_1}{\mathrm{d}x} = \psi(x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(n-1)}),$$

jejíž obecný integrál je $y_1 = \Psi_1(x, C_1, C_2, \ldots C_n)$. Dosazením do rovnic (a) stanovíme ostatní funkce $y_\nu = \Psi_\nu(x, C_1, C_2, \ldots C_n)$.

Diferenciální rovnice n-tého řádu

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)})$$

přejde substitucí $\quad y = z_1, \quad y' = z_2, \ldots, \quad y^{(n-1)} = z_n$

na soustavu n diferenciálních rovnic I. řádu

$$z_n' = f(x, z_1, z_2, \ldots z_n); \quad z_{n-1}' = z_n; \quad z_{n-2}' = z_{n-1}; \quad \ldots; \quad z_1' = z_2.$$

2. Soustava lineárních homogenních rovnic I. řádu s konstantními koeficienty (systém *d'Alembertův*) má tvar

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} &= a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n \end{aligned} \qquad (2)$$

Partikulární řešení předpokládáme ve tvaru

$$y_1 = A_1 e^{\lambda x}; \qquad y_2 = A_2 e^{\lambda x}; \qquad \ldots; \qquad y_n = A_n e^{\lambda x}. \tag{a}$$

s dosud neznámými konstantami A_ν a λ. Dosazením do (2) plyne k určení součinitelů A_ν soustava algebraických lineárních homogenních rovnic

$$\begin{aligned} &(a_{11} - \lambda) A_1 + a_{12} A_2 + \ldots \quad + a_{1n} A_n = 0 \\ &a_{21} A_1 + (a_{22} - \lambda) A_2 + \ldots \quad + a_{2n} A_n = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1} A_1 + \quad a_{n2} A_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda) A_n = 0. \end{aligned} \tag{b}$$

Aby soustava (*b*) měla jiné řešení krom $A_1 = \cdots = A_n = 0$, musí determinant soustavy vymizeti, t. j.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{c}$$

α) Má-li tato *charakteristická rovnice* (*c*) *soustavy* (2) všechny kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ různé, dostaneme z (*b*) pro každé λ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) příslušné konstanty $A_{\nu k}$ a různá partikulární řešení

$$y_{\nu 1} = A_{\nu 1} e^{\lambda_1 x}, \quad y_{\nu 2} = A_{\nu 2} e^{\lambda_2 x}, \quad \ldots, \quad y_{\nu n} = A_{\nu n} e^{\lambda_n x}; \quad \nu = 1, 2, \ldots n.$$

Obecné řešení pro neznámé funkce y_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$:

$$y_\nu = C_1 A_{\nu 1} e^{\lambda_1 x} + C_2 A_{\nu 2} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n A_{\nu n} e^{\lambda_n x}.$$

β) Je-li dvojice kořenů komplexních sdružených, na př. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, je příslušná část integrálu

$$C_1 A_{\nu 1} e^{\lambda_1 x} + C_2 A_{\nu 2} e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x} (k_{\nu 1} \cos \beta x + k_{\nu 2} \sin \beta x).$$

γ) Kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ se opakují $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$-krát. Obecné řešení

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{11}(x) e^{\lambda_1 x} + A_{12}(x) e^{\lambda_2 x} + \ldots + A_{1\mu} e^{\lambda_\mu x} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= A_{n1}(x) e^{\lambda_1 x} + A_{n2}(x) e^{\lambda_2 x} + \ldots + A_{n\mu}(x) e^{\lambda_\mu x}, \end{aligned}$$

kde však $A_{ik}(x)$ jsou mnohočleny v x stupně nejvýš $(m_k - 1)$-ho, t. j. v prvním sloupci stupně $(m_1 - 1)$-ho, v druhém $(m_2 - 1)$-ho atd. Dosazením do soustavy (2) dostaneme pro koeficienty těchto polynomů soustavu lineárních rovnic; každému řešení této soustavy odpovídá řešení soustavy (2).

Jsou-li reálné koeficienty soustavy (2) symetrické, t. j. $a_{ik} = a_{ki}$, má charakteristická rovnice (c) jen kořeny reálné.

3. Simultánní rovnice vyššího řádu lze nahraditi soustavou rovnic řádu prvního. Za všechny derivace neznámých funkcí zavedeme nové proměnné, mimo derivaci nejvyššího řádu, kterou vyjádříme jako derivaci derivace nejblíže nižší. Substituční rovnice tvoří pak s rovnicemi danými, do nichž byly vloženy nové proměnné, ekvivalentní soustavu lineárních diferenciálních rovnic I. řádu.

5. Integrace řadami.

1. Methoda nekonečných řad. Nelze-li diferenciální rovnici jinak řešiti, předpokládáme hledanou funkci ve tvaru mocninové řady, jako na je př.

řada Taylorova: $y = \sum_0^\infty f^{(\nu)}(a) \frac{(x-a)^\nu}{\nu!}$;

řada Maclaurinova: $y = \sum_0^\infty f^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!}$;

obecná řada: $y = \sum_0^\infty a_\nu (x-a)^{\varrho+\nu}$.

Dosadíme odtud za $y, y', y'', \ldots$ do dané diferenciální rovnice a methodou neurčitých součinitelů stanovíme neznámé koeficienty a_ν, po případě počátečního mocnitele ϱ.

Diferenciální rovnice, kterým nelze vyhověti elementárními funkcemi, definují nové vyšší transcendenty.

2. Řešení lineární diferenciální rovnice II. řádu homogenní

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0.$$

Připustíme také komplexní hodnoty proměnné a předpokládáme, že v místě $x = a$ má $P(x)$ pól nejvýše prvního řádu, $Q(x)$ pól nejvýše druhého řádu, t. j. že

$$P(x) = \frac{\mathfrak{P}(x-a)}{x-a}; \qquad Q(x) = \frac{\mathfrak{Q}(x-a)}{(x-a)^2},$$

kde $\mathfrak{P}$ a $\mathfrak{Q}$ jsou v místě $x = a$ regulární funkce, které lze rozvinouti v mocninové řady

$$\mathfrak{P}(x-a) = \sum_0^\infty \alpha_\nu (x-a)^\nu; \qquad \mathfrak{Q}(x-a) = \sum_0^\infty \beta_\nu (x-a)^\nu.$$

Lineární homogenní rovnici možno pak psáti

$$L[y] \equiv (x-a)^2 y'' + (x-a)\,\mathfrak{P}(x-a)\,y' + \mathfrak{Q}(x-a)\,y = 0.$$

S hořejším předpokladem sluje $x = a$ *místo určitosti;* v něm vyjádříme hledanou funkci řadou tvaru

$$y = (x-a)^{\varrho} \sum_{0}^{\infty} a_\nu (x-a)^\nu = \sum_{0}^{\infty} a_\nu (x-a)^{\varrho+\nu},$$

a dosadíme do diferenciální rovnice. Obecně

$$L[(x-a)^\lambda] = (x-a)^\lambda \sum_{0}^{\infty} f_\nu(\lambda)(x-a)^\nu;$$

$f_0(\lambda) = \lambda(\lambda-1) + \lambda\alpha_0 + \beta_0$; $f_1(\lambda) = \lambda\alpha_1 + \beta_1$; ...; $f_\nu(\lambda) = \lambda\alpha_\nu + \beta_\nu$, kde $\nu = 1, 2, \ldots$.

Ježto $L[y] = 0$, jsou koeficienty řady L (u jednotlivých mocnin proměnné) identicky nuly; k určení mocnitele ϱ a koeficientů a_ν máme odtud soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
&a_0 f_0(\varrho) &&= 0\\
&a_1 f_0(\varrho+1) + a_0 {}_1(\varrho) &&= 0\\
&a_2 f_0(\varrho+2) + a_1 f_1(\varrho+1) + a_0 f_2(\varrho) &&= 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_n f_0(\varrho+n) + a_{n-1} f_1(\varrho+n-1) + \ldots + a_0 f_n(\varrho) &&= 0
\end{aligned}$$

Z první t. zv. *základní rovnice* ($\lambda = \varrho$)

$$f_0(\varrho) = \varrho(\varrho-1) + \varrho\alpha_0 + \beta_0 = 0$$

určíme kořeny ϱ_1, ϱ_2; zvolíme-li a_0 libovolně, plyne z druhé a_1, z třetí a_2 atd. Když rozdíl kořenů není číslo celé, dostaneme dva partikulární integrály. V jiném případě pouze jeden integrál; tu dosadíme za ϱ kořen s větší částí reálnou nebo kořen dvojnásobný. Řada konverguje v okolí $x = a$ alespoň jako řada geometrická.

Druhý partikulární integrál stanovíme podle (3) str. 154.

3. *Besselova* diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}^2 x} + \frac{1}{x}\frac{dy}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0,$$

kde n je reálné číslo, $x = 0$ místo určitosti. Kořeny základní rovnice

$$\varrho(\varrho-1) + \varrho - n^2 = 0$$

jsou: $\varrho_1 = +n$, $\varrho_2 = -n$. Pro $\varrho = +n > 0$ má řada tvar

$$x = a_0 x^n + a_1 x^{n+1} + a_2 x^{n+2} + \ldots$$

Dosazením do diferenciální rovnice a methodou neurčitých součinitelů dostaneme z předcházející obecné soustavy rovnic koeficienty řady

pro hledaný integrál. Zvolíme-li $a_0 = 1 : 2^n \Pi(n)$, kde $\Pi(n)$ je funkce gamma (str. 104), je partikulární integrál

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Pi(n)} \left[1 - \frac{x^2}{2^2 (n+1)} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 2! (n+1)(n+2)} - \dots\right],$$

t. zv. *Besselova (cylindrická) funkce prvního druhu n-tého řádu*; zde jest n číslo kladné, celé nebo lomené.

Není-li n číslo celé, je $J_{-n}(x)$ druhý partikulární integrál. V tomto případě obecný integrál

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x).$$

Při celém n je druhý partikulární integrál

$$Y_n(x) = J_n(x) \int \frac{dx}{x [J_n(x)]^2},$$

t. zv. *cylindrická funkce druhého druhu*, při $n > 0$ vyjádřená tvarem

$$Y_n(x) = J_n(x) \operatorname{cotg} n\pi - J_{-n}(x) \frac{1}{\sin n\pi}.$$

Besselovy funkce prvního druhu.

Besselova funkce prvního druhu n-tého řádu je při kladném n definována řadou

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Pi(k)\,\Pi(n+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \qquad (1)$$

konvergující pro každé x. Na př.

$$J_n(2i\sqrt{x}) = (i\sqrt{x})^n \left[\frac{1}{n!} + \frac{x}{1!(n+1)!} + \frac{x^2}{2!(n+2)!} + \dots\right].$$

Dále pro celé n jest

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \qquad (2)$$

Ve tvaru integrálu je při celém reálném $n = 0, 1, 2, \dots$

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix\cos\varphi}\, e^{in\varphi}\, d\varphi; \qquad (3)$$

při kladném n

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi. \qquad (4)$$

Pro liché násobky zlomku $\frac{1}{2}$ plynou výrazy

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x; \qquad J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right); \tag{5}$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x; \qquad J_{-\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\cos x}{x} + \sin x \right). \tag{6}$$

Pro celé nebo lomené n platí diferenciální vzorec

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{J_n(x)}{x^n} \right] = - \frac{J_{n+1}(x)}{x^n}. \tag{7}$$

Redukční vzorce při celém n

$$2 \frac{\mathrm{d} J_n(x)}{\mathrm{d}x} = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x), \tag{8}$$

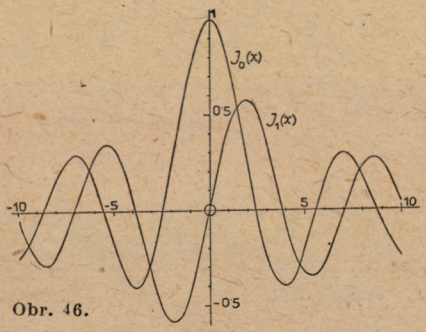
$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x). \tag{9}$$

Obecně $\quad |J_n(x)| \leqq 1; \qquad \lim_{x \to \infty} J_n(x) = 0.$

Zejména pro $n = 0$ a $n = 1$ jest

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \ldots \tag{10}$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^6}{2 \cdot (4 \cdot 6)^2 \cdot 8} + \ldots \right\}. \tag{11}$$



Obr. 46.

Tyto řady konvergují rovnoměrně pro každé reálné i komplexní x. Průběh obou funkcí je zřejmý z tabulky a z obr. 46. Mezi oběma platí vztah

$$J_1(x) = - \frac{\mathrm{d} J_0(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{12}$$

Besselovy funkce nultého a prvního řádu.

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0,0	1,0000	0,0000	5,5	−0,0068	−0,3414	11,0	−0,1712	−0,1768
0,5	0,9385	0,2423	6,0	0,1506	−0,2767	11,5	−0,0677	−0,2284
1,0	0,7652	0,4401	6,5	0,2601	−0,1538	12,0	0,0477	−0,2234
1,5	0,5118	0,5579	7,0	0,3001	−0,0047	12,5	0,1469	−0,1655
2,0	0,2239	0,5767	7,5	0,2663	0,1352	13,0	0,2069	−0,0703
2,5	−0,0484	0,4971	8,0	0,1717	0,2346	13,5	0,2150	0,0380
3,0	−0,2601	0,3391	8,5	0,0419	0,2731	14,0	0,1711	0,1334
3,5	−0,3801	0,1374	9,0	−0,0903	0,2453	14,5	0,0875	0,1934
4,0	−0,3971	−0,0660	9,5	−0,1939	0,1613	15,0	−0,0142	0,2051
4,5	−0,3205	−0,2311	10,0	−0,2459	0,0435	15,5	−0,1092	0,1672
5,0	−0,1776	−0,3276	10,5	−0,2366	−0,0789	16,0	−0,1749	0,0904

Rozvoj v řadu funkcí cylindrických. Libovolná funkce $f(x)$, v intervalu $(0, \pi)$ konečná, jednoznačná a spojitá, může být v tomto intervalu rozvinuta v řadu

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 J_0(x) + a_2 J_0(2x) + a_3 J_0(3x) + \dots \qquad (13)$$

s koeficienty

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u \cos n u \, du \int_0^1 \frac{f'(ut)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt. \qquad (14)$$

4. *Legendreova* diferenciální rovnice

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)\,y = 0,$$

kde je n číslo celé kladné nebo nula; substitucí $x = \cos\vartheta$ přejde na tvar

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dy}{d\vartheta}\right) + n(n+1)\,y = 0.$$

Partikulární integrál

$$P_n(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{n!}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \dots\right] \qquad (1)$$

je t. zv. *(Legendreova) kulová (sférická) funkce prvního druhu* nebo *Legendreův polynom*; je to racionální celistvá funkce proměnné x. Při $x = \cos\vartheta$ je integrálem $P_n(\cos\vartheta)$. Druhý partikulární integrál

$$Q_n(x) = P_n(x) \int \frac{dx}{(1-x^2)\,[P_n(x)]^2}$$

sluje *kulová funkce druhého druhu*. Obecně při $|x| \leqq 1$

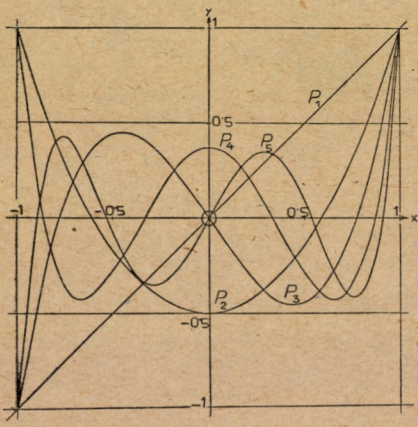
$$Q_n(x) = \tfrac{1}{2} P_n(x) \lg \frac{x+1}{x-1} - \left[\frac{2n-1}{n} P_{n-1}(x) + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3}(x) + \frac{2n-9}{5(n-2)} P_{n-5}(x) + \ldots\right], \qquad (2)$$

kde členy P_k se záporným k jest vynechati.

Obecný integrál $y = AP_n(x) + BQ_n(x)$.

Kulové funkce prvního druhu.

Kulové funkce $P_n(x)$ jsou funkce n-tého stupně, sudé nebo liché pro sudé, resp. liché $n = 0, 1, 2, \ldots$ Podle definice (1)



Obr. 47.

$$P_0(x) = 1;$$

$$P_1(x) = x = \cos\vartheta;$$

$$P_2(x) = \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}(3\cos^2\vartheta - 1) = \tfrac{1}{4}(3\cos 2\vartheta + 1);$$

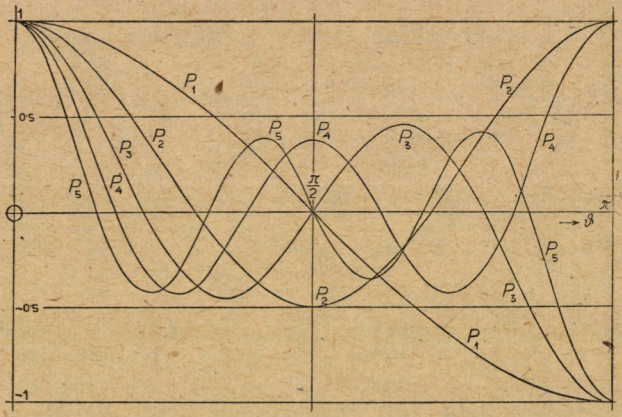
$$P_3(x) = \tfrac{5}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x = \tfrac{1}{2}(5\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta) = \tfrac{1}{8}(5\cos 3\vartheta + 3\cos\vartheta);$$

$$P_4(x) = \tfrac{35}{8}x^4 - \tfrac{15}{4}x^2 + \tfrac{3}{8} = \tfrac{1}{8}(35\cos^4\vartheta - 30\cos^2\vartheta + 3) = \tfrac{1}{64}(35\cos 4\vartheta + 20\cos 2\vartheta + 9);$$

. . . . . .

Průběh čtyř prvních kulových funkcí $P_n(x)$ a $P_n(\cos\vartheta)$ ukazuje výtah z tabulky a obr. 47. a 48.

x	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	ϑ	$P_1(\vartheta)$	$P_2(\vartheta)$	$P_3(\vartheta)$	$P_4(\vartheta)$
0,0	0,000	−0,500	0,000	0,375	0°	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	0,100	−0,485	−0,148	0,338	10°	0,985	0,955	0,911	0,853
0,2	0,200	−0,440	−0,280	0,232	20°	0,940	0,825	0,665	0,475
0,3	0,300	−0,365	−0,383	0,073	30°	0,866	0,625	0,325	0,023
0,4	0,400	−0,260	−0,440	−0,113	40°	0,766	0,380	−0,025	−0,319
0,5	0,500	−0,125	−0,438	−0,289	50°	0,643	0,120	−0,300	−0,428
0,6	0,600	0,040	−0,360	−0,408	60°	0,500	−0,125	−0,438	−0,289
0,7	0,700	0,235	−0,193	−0,412	70°	0,342	−0,325	−0,413	−0,004
0,8	0,800	0,460	0,080	−0,233	80°	0,174	−0,455	−0,247	0,266
0,9	0,900	0,715	0,473	0,208	90°	0,000	0,500	0,000	0,375
1,0	1,000	1,000	1,000	1,000					



Obr. 48.

Pro tři sousední kulové funkce platí redukční vzorec

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n}\, x\, P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n}\, P_{n-2}(x). \qquad (3)$$

Obecně jest

$$|x| \leqq 1; \quad |P_n(x)| \leqq 1; \quad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x); \quad P_n(1) = 1. \qquad (4)$$

Kořeny rovnice $P_n(x) = 0$ jsou mezi $-1, +1$.

Kulové funkce také definuje n-tá derivace mocniny

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2 - 1)^n, \qquad (5)$$

nebo (způsobem *Laplaceovým*) integrál

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x \pm \cos\varphi + \sqrt{x^2-1})^n \,\mathrm{d}\varphi, \tag{6}$$

nebo koeficienty v binomickém rozvoji výrazu

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = [1-(2rx-r^2)]^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} r^n P_n(x) \text{ pro } |r|<1, \tag{7}$$

$$= \sum_0^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(x) \text{ pro } |r|>1.$$

Polynomy jsou orthogonální v intervalu $(-1,+1)$, t. j.

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \text{ pro } m \neq n; \qquad \int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}. \tag{8}$$

Rozvoj v řadu funkcí kulových. Libovolná funkce $f(x)$, v intervalu $(-1, 1)$ konečná, jednoznačná, s konečným počtem extrémů a přetržek, může být v tomto intervalu rozvinuta v řadu

$$f(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \ldots = \sum_0^{\infty} a_n P_n(x) \tag{9}$$

s koeficienty

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

V místě přetržky podává řada aritmetický průměr hodnot zprava a zleva $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

Legendreovy polynomy $P_n(\cos\vartheta)$ jsou jen zvláštním případem obecných Laplaceových kulových funkcí v theorii potenciálu.

5. *Gaußova* (hypergeometrická) diferenciální rovnice

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0$$

má obecný integrál

$$y = AF(\alpha,\beta,\gamma,x) + Bx^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,x),$$

kde t. zv. *hypergeometrická řada*

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \ldots$$

zahrnuje jako zvláštní případy rozvoje různých funkcí. Je-li $\alpha = 1$, $\beta = \gamma$, přejde v řadu geometrickou. Je-li $\alpha = -n$, $\beta = p + n$, $\gamma = q > 0$, $p - q > -1$, jsou partikulárním řešením racionální celistvé funkce n-tého stupně, zv. *hypergeometrické (Jacobiovy) polynomy*

$$J_n(p, q, x) = F(-n, p + n, q, x)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(p+n)(p+n+1)\dots(p+n+k-1)}{q(q+1)\dots(q+k-1)} x^k.$$

Z nich plynou pro $p = q = 1$ *Legendreovy polynomy*

$$P_n(x) = J_n\left(1, 1, \frac{1-x}{2}\right),$$

pro $p = 0$, $q = \frac{1}{2}$ jsou to *Čebyševovy polynomy*

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} J_n\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right).$$

6. *Laguerreova* diferenciální rovnice

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0.$$

Partikulárním řešením jsou *Laguerreovy polynomy*

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n^2 (n-1)^2 \dots (k+1)^2}{(n-k)!} x^k;$$

možno je vyjádřiti tvarem

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

7. *Hermiteova* diferenciální rovnice

$$y'' + (1 - x^2)y' + ny = 0.$$

Partikulárním řešením jsou *Hermiteovy polynomy*

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{h} (-1)^k \frac{n!}{k!\,(n-2k)!} (2x)^{n-2k},$$

kde $h = \frac{1}{2} n$ při n sudém, $h = \frac{1}{2}(n-1)$ při n lichém; možno je vyjádřiti tvarem

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Všechny uvedené polynomy jsou funkce orthogonální.

B. Parciální diferenciální rovnice.

1. Parciální diferenciální rovnice I. řádu.

Při dvou nezávisle proměnných x, y mají obecně tvar

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Každá rovnice, vyjadřující z jako funkci proměnných x, y, která dané rovnici identicky, t. j. pro každé x, y, vyhovuje, sluje *integrál* parciální diferenciální rovnice a značí geometricky integrální plochu.

α) Úplný integrál $f(x, y, z, a, b) = 0$ obsahuje dvě libovolné (nezávislé) konstanty; geometricky značí dvojmocnou soustavu ploch.

β) Partikulární integrál vznikne z úplného, přisoudíme-li konstantám a, b určité hodnoty.

γ) Singulární integrál plyne vyloučením konstant a, b z rovnic

$$f(x, y, z, a, b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

Geometricky značí obalovou plochu dvojmocné soustavy $f = 0$.

δ) Obecný integrál neobsahuje konstanty, nýbrž libovolnou funkci. Dostaneme jej, kladouce $b = \varphi(a)$, kde φ je libovolná funkce, eliminací a, b z rovnic

$$f(x, y, z, a, b) = 0, \quad b = \varphi(a); \quad \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0.$$

Geometricky značí obalovou plochu libovolné jednomocné soustavy ploch (obsažené v oné dvojmocné).

Pro zvláštní funkci φ dostaneme *integrál partikulární.*

1. Lineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu homogenní.

a) Při dvou nezávisle proměnných má tvar

$$P(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Řešíme pomocnou obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q},$$

jejíž integrál $\varphi(x, y) = C$ je současně partikulárním integrálem dané parciální rovnice. *Obecný integrál* $z = \Phi[\varphi(x, y)]$ obsahuje libovolnou funkci.

Na př. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Pomocná rovnice $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$; integrál $\frac{y}{x} = C$;

obecný integrál $z = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$ značí konoidy (řídicí přímka z, řídicí rovina xy).

b) Obecná lineární homogenní rovnice s parciálními derivacemi jest

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

kde X_i jsou funkce nezávisle proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a kde derivace $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ hledané funkce $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ přicházejí ve všech členech jen lineárně. Řešíme pomocnou soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Nezávislé integrály $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1, \ldots, \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = C_{n-1}$ této soustavy jsou současně partikulární integrály dané rovnice. *Obecný integrál* $z = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1})$ obsahuje libovolnou funkci.

2. Lineární rovnice I. řádu nehomogenní: *a)* U rovnice pro funkci z dvou nezávisle proměnných x, y tvaru

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z)$$

řešíme pomocnou soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R};$$

její *dva* nezávislé integrály $\varphi_1(x, y, z) = C_1$, $\varphi_2(x, y, z) = C_2$ jsou zároveň partikulární integrály dané parciální rovnice. Geometricky značí soustavu čar *(charakteristiky)*, v nichž plochy $\varphi_1 = C_1$, $\varphi_2 = C_2$ se protínají. Je-li Φ zcela libovolná funkce, jest rovnice

$$\Phi[\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)] = 0$$

nebo řešením odtud plynoucí funkce z *obecným integrálem* dané rovnice. Nalezený integrál vyjadřuje *integrální plochu*, obsahující všechny charakteristiky. Vzhledem k libovolnosti Φ možno připojiti podmínku, aby integrální plocha procházela určitou čarou, danou rovnicemi $f(x, y, z) = 0$; $g(x, y, z) = 0$. Eliminací x, y, z z rovnic $\Phi_1 = C_1$, $\varphi_2 = C_2$, $f = 0$, $g = 0$ plyne hledaná rovnice zvláštní plochy.

Příklad. $$(cy - bz) \frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx) \frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

Řešíme soustavu rovnic $$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay} = du,$$

kde u je pomocná proměnná;

$$dx = (cy - bz)\,du; \quad dy = (az - cx)\,du; \quad dz = (bx - ay)\,du.$$

Znásobíme-li pořadem činitele a, b, c, pak činitele x, y, z a sečteme, dostaneme úplné diferenciály $a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0$, $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$. Jejich integrály $ax + by + cz = C_1$; $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$. Obecný integrál dané rovnice je

$$\Phi\,(ax + by + cz,\ x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Rovnoběžné roviny C_1 protínají soustředné koule C_2 v kružnicích (charakteristiky), jejichž středy jsou na přímce $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Integrální plochy jsou plochy rotační.

b) V obecném případě

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial z}{dx_n} = Z$$

jsou X_i a Z funkce nezávisle proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a závisle proměnné z.

Soustava pomocných rovnic

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z}$$

má n nezávislých integrálů $\varphi_1\,(x_1, \ldots, x_n) = c_1, \ldots, \varphi_n\,(x_1, \ldots, x_n) = c_n$.

Obecný integrál jest

$$\Phi\,[\varphi_1\,(x_1, \ldots x_n, z), \ldots, \varphi_n\,(x_1, \ldots x_n, z)] = 0$$

nebo plyne odtud řešením podle z; obsahuje libovolnou funkci.

V případě, že rovnice

$X_i\,(x_1, \ldots x_n, z) = 0$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$, a $Z\,(x_1, \ldots x_n, z) = 0$

mají společné řešení z, vyhovuje také toto t. zv. *singulární řešení* dané diferenciální rovnici; v obecném integrálu není obsaženo.

3. Obecná parciální diferenciální rovnice I. řádu. Omezíme-li se na dvě nezávisle proměnné x, y, má tvar

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad \text{kde} \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Z dané diferenciální rovnice stanovíme derivace

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Z, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = Q$$

a řešíme pomocnou soustavu rovnic

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{pP + qQ} = -\frac{dp}{X + pZ} = -\frac{dq}{Y + qZ}.$$

Z integrálu této pomocné soustavy rovnic a z dané rovnice $F = 0$ určíme p a q, načež integrací totálního diferenciálu $dz = p\,dx + q\,dy$ najdeme úplný integrál dané diferenciální rovnice.

Příklad. $F = px + qy - pq = 0$; $X = p$, $Y = q$, $Z = 0$, $P = x - q$, $Q = y - p$. Pomocná soustava vzhledem k dané rovnici

$$\frac{dx}{x-q} = \frac{dy}{y-p} = -\frac{dz}{pq} = -\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q}.$$

Z poslední rovnice určíme integrací $q = ap$ a odtud ve spojení s danou rovnicí $p = \frac{x}{a} + y$, $q = x + ay$, což dosadíme do diferenciálu $dz = p\,dx + q\,dy$; dostaneme $a\,dz = (x + ay)(dx + a\,dy) = (x + ay)\,d(x + ay)$. Úplný integrál $2az = (x + ay)^2 + b$ značí parabolické válce s přímkami rovnoběžnými k rovině xy.

2. Parciální diferenciální rovnice II. řádu.

1. Obecná parciální diferenciální rovnice druhého řádu s dvěma nezávisle proměnnými

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

kde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$,

se nedá převésti na systém obyčejných diferenciálních rovnic jako parciální rovnice I. řádu. Vhodnou transformací podaří se však mnohdy úkol převésti na řešení parciální rovnice I. řádu nebo na řešení obyčejné diferenciální rovnice.

Příklad. Rovnice $r + Pp = Q$; $s + Pq = Q$; $s + Pp = Q$; $t + Pq = Q$, kde P, Q, R jsou funkce proměnných x, y, možno psáti ve tvarech

$$\frac{dp}{dx} + Pp = Q, \quad \frac{dq}{dx} + Pq = Q, \quad \frac{dp}{dy} + Pp = Q, \quad \frac{dq}{dy} + Pq = Q$$

a řešiti jako obyčejné lineární rovnice I. řádu, pokládáme-li v prvních dvou y, v druhých dvou x za konstantu; jejich integrál je diferenciální rovnice, obsahující mis. o konstanty libovolnou funkci proměnné y, resp. x, kterou zbývá integrovati jako obyčejnou.

Obecný integrál parciální diferenciální rovnice druhého řádu obsahuje dvě libovolné funkce.

2. Lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu homogenní se dvěma nezávisle proměnnými má obecný tvar

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\frac{\partial z}{\partial x} + E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = 0.$$

Koeficienty jsou obecně funkce x, y; hledaná funkce z a její derivace se vyskytují v každém členu jednotlivě a lineárně. Podle diskriminantu $B^2 - AC \gtreqless 0$ je rovnice *hyperbolická*, *parabolická* nebo *eliptická*. Reálnou transformací se dá převésti na t. zv. *normální tvar*, který se podle typu rovnice řeší příslušnými methodami.

Obecně platí věta: Jsou-li $z = \Phi_1(x, y)$, $z = \Phi_2(x, y)$ integrály uvedené rovnice, je také součet $z = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2$ její integrál.

3. Lineární rovnice II. řádu homogenní s konstantními koeficienty

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+f\frac{\partial z}{\partial x}+g\frac{\partial z}{\partial y}+hz=0$$

jsou v aplikacích zvlášť důležité. Substitucí $z=e^{\alpha x+\beta y}$ plyne *charakteristická rovnice*

$$a\alpha^2+b\alpha\beta+c\beta^2+f\alpha+g\beta+h=0,$$

které vyhovuje ∞^1 dvojic α_k, β_k. Každá dvojice podává partikulární integrál $z=e^{\alpha_k x+\beta_k y}$. Obecný integrál je dán součtem $z=\Sigma C_k e^{\alpha_k x+\beta_k y}$.

Možno-li polynom charakteristické rovnice rozložiti v lineární faktory

$$(a_1\alpha+b_1\beta+c_1)(a_2\alpha+b_2\beta+c_2)=0,$$

dostaneme pro každé α dvě hodnoty β, obecně $\beta_1=m_1\alpha+n_1$; $\beta_2=m_2\alpha+n_2$. Součet přejde na dva součty

$$z=e^{n_1 y}\Sigma C_{k1}e^{(x+m_1 y)\alpha}+e^{n_2 y}\Sigma C_{k2}e^{(x+m_2 y)\alpha}$$

s libovolnými dvěma konstantami pro každé α; součty jsou tedy libovolné funkce $\Phi_1(x+m_1y)$ a $\Phi_2(x+m_2y)$.

Obecný integrál diferenciální rovnice jest

$$z=e^{n_1 y}\Phi_1(x+m_1y)+e^{n_2 y}\Phi_2(x+m_2y).$$

Na př.

1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2a\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+b\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$; charakteristická rovnice $\alpha^2+2a\alpha\beta+b\beta^2=0$

podává pro $\beta:\alpha$ dvě hodnoty m_1, m_2; $\beta_1=m_1\alpha$, $\beta_2=m_2\alpha$.

Obecný integrál $z=\Phi_1(x+m_1y)+\Phi_2(x+m_2y)$.

2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$; $\alpha^2-a^2\beta^2=0$; $\beta_{1,2}=\pm\frac{1}{a}\alpha$.

$$z=\Phi_1\left(x+\frac{y}{a}\right)+\Phi_2\left(x-\frac{y}{a}\right)\text{ čili }z=\Phi_1(y+ax)+\Phi_2(y-ax).$$

3. Známe-li partikulární integrál (u) rovnice nehomogenní

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=k\cos(ct-bx),\qquad (u)=\frac{k}{a^2b^2-c^2}\cos(ct-bx),$$

jest obecný integrál

$$u=\Phi_1(x+at)+\Phi_2(x-at)+\frac{k}{a^2b^2-c^2}\cos(ct-bx)$$

složen z obecného integrálu rovnice homogenní tvaru 2. a partikulárního integrálu rovnice nehomogenní jako u obyčejných diferenciálních rovnic.

4. Řešení parciálních rovnic s danými podmínkami. V praxi nejde tak o stanovení obecného integrálu jako spíše o určení funkce, která dané diferenciální rovnici vyhovuje a na počátku a krajích oboru má předepsané hodnoty (*problém krajních hodnot*).

K cíli vedou různé methody a obraty. Neznámá funkce se předpokládá na př. ve tvaru součinu několika činitelů, z nichž každý je funkcí jen jediné proměnné. Úkol se tak mnohdy převede na řešení obyčejných rovnic, po jejichž integraci se určí konstanty z daných počátečních a krajních podmínek. Jindy se použije řad, konformního zobrazení, funkce Greenovy nebo integrálních rovnic.

Methodu partikulárních řešení a separace proměnných u lineární parciální diferenciální rovnice II. řádu s počátečními a krajními podmínkami objasní příklady.

Příklad 1. Řešiti rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

aby vyhovující funkce $u(x, t)$ splnila na počátku děje v čase $t = 0$ a na krajích intervalu $x = 0, x = l$

a) podmínky počáteční: $u(x, 0) = f(x)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = g(x)$;

b) podmínky krajní: $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$.

Řešení předpokládáme ve tvaru součinu dvou faktorů, z nichž každý závisí na jediné proměnné

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t), \tag{2}$$

takže $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2}.$$

Dosadíme-li do (1) a rozvedeme proměnné, plyne

$$\frac{1}{T} \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} = \frac{c^2}{X} \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}.$$

Poněvadž každá strana je funkcí jedné proměnné, rovnají se téže konstantě; označme ji $-k^2$. Dostaneme tak

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} + k^2 T = 0; \qquad \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{k^2}{c^2} X = 0, \tag{3}$$

dvě obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu, jejichž obecné integrály jsou

$$T(t) = a_1 \cos kt + a_2 \sin kt; \tag{4}$$

$$X(x) = b_1 \cos \frac{k}{c} x + b_2 \sin \frac{k}{c} x. \tag{5}$$

Má-li řešení (2) splniti krajní podmínky *b)*, musí (5) pro $x = 0$ a $x = l$ vymizet. Z první plyne $b_1 = 0$; zbývající druhý partikulární integrál $X(x) = b_2 \sin \frac{k}{c} x$ vymizí pro $x = l$, když buď $b_2 = 0$ nebo $\frac{k}{c} l = n\pi$. První případ, který dává triviální řešení $X(x) \equiv 0$, vyloučíme. V druhém případě plynou pro

vlastní hodnoty $k = \frac{n\pi c}{l}$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ *vlastní funkce* $X(x) = b_2 \sin \frac{n\pi}{l} x$, (6)

vyhovující diferenciální rovnici (3), a oběma krajním podmínkám. Dosadíme-li (6) do (4) a (2) a sloučíme konstanty, dostaneme

$$u(x,t) = \sin \frac{n\pi}{l} x \left(A \cos \frac{n\pi c}{l} t + B \sin \frac{n\pi c}{l} t \right),$$

pro každé celé n jedno řešení. Řešením lineární rovnice (1) je také součet

$$u(x,t) = \sum_{1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \left(A_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi c}{l} t \right). \qquad (7)$$

Neznámé konstanty určíme z počátečních podmínek. Pro $t = 0$ jest

$$u(x,0) = \sum A_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x); \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = \sum B_n \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x = g(x).$$

Obě dané funkce $f(x)$, $g(x)$ jsou vyjádřeny Fourierovými řadami s koeficienty

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx; \qquad B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx.$$

Dosazením do (7) vychází konečné řešení rovnice (1), vyhovující daným podmínkám.

Příklad 2. Budiž dána lineární parciální diferenciální rovnice 4. řádu homogenní

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Klademe $u = f(x) \cdot g(t)$. Derivováním a dosazením plyne

$$-\frac{f^{(4)}(x)}{f(x)} = \frac{g''(t)}{g(t)} = -\lambda \qquad \text{čili} \qquad f^{(4)} - \lambda f = 0; \qquad g'' + \lambda g = 0,$$

což jsou dvě obyčejné homogenní diferenciální rovnice se známými již obecnými integrály. K určení konstant jsou speciálním úkolem dány čtyři homogenní podmínečné rovnice, jejichž determinant musí býti nula; kořeny rovnice tak vznikající jsou vlastní hodnoty λ.

J. Vojtěch: Základy matematiky ke studiu věd přírod. a techn. II., 4. vyd. 1931.
H. Bateman: Differential equations, 1918.
A. Forsyth: A treatise on differential equations, 6. v. 1929 (něm. překl. 2. v. 1912).
L. Bieberbach: Theorie der Differentialgleichungen, 3. vyd. 1930.
E'. Picard: Traité d'analyse III., 3. vyd. 1925.
E'. Goursat: Cours d'analyse mathématique II. a III., 4. vyd. 1927.
E. Kamke: Differentialgleichungen reeller Funktionen, 1930.
G. Sansone: Equazioni differenziali nel campo reale, 2 sv. 1941.
A. Forsyth: Theory of differential equations, 6 sv., 1890—1906.
E. Kamke: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I., 1942.
Ph. Frank - R. Mises: Die Differential- und Integralgleichungen d. Mechanik u. Physik I., 2. vyd. 1930.
W. Hort - A. Thoma: Die Differentialgleichungen d. Technik u. Physik, 3. vyd. 1939.
L. Schlesinger: Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, 3 sv., 1895—97.
H. Bateman: Partial differential equations of mathematical physics, 1932.
F. Miller: Partial differential equations, 1941.
E'. Goursat: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, 2. vyd. 1921.
E'. Goursat: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du seconde ordre, 2 sv., 1896—98.
A. Webster: Partial differential equations of mathematical physics, 1927 (něm. 1930).
A. Gray - G. Mathews: A treatise on Bessel functions and their applications to physics, 2. vyd. 1922.
E. Hobson: The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, 1931.
G. Watson: A treatise on the theory of Bessel functions, 1922.
N. McLachlan: Bessel functions for engineers, 1934.
R. Weyrich: Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendung, 1927.

3. Symbolický počet operátorový.

Lineární diferenciální rovnice, obyčejné i parciální, a jejich systémy řeší zvláštním způsobem t. zv. *počet operátorový*.

1. *Základní diferenciální operátor* $\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ se pokládá za algebraickou veličinu a s jeho pomocí symbolicky psaná diferenciální rovnice se řeší algebraicky. Nehomogenní obyčejná rovnice s konstantními koeficienty

$$a_0 \frac{\mathrm{d}^n F(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1} F(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} + a_n F(t) = R(t)$$

neboli $(a_0 \mathrm{D}^n + a_1 \mathrm{D}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\mathrm{D} + a_n) F(t) = R(t)$,

symbolicky $\mathrm{L}_n(\mathrm{D}) F(t) = R(t)$, má symbolické řešení $F(t) = \mathrm{L}_n^{-1}(\mathrm{D}) R(t)$; L_n je *lineární diferenciální operátor* n-tého řádu a L_n^{-1} operátor k němu *inversní*.

2. *Základní integrální operátor* D^{-1}, k prvnímu D inversní, se zavádí pro integrál s dolní mezí $t = 0$:

$$\mathrm{D}^{-1} F(t) = \int_0^t \mathrm{d}t\, F(t).$$

Oba jsou komutativní jen tehdy, když $F(0) = 0$; pak

$$\mathrm{D}\mathrm{D}^{-1} F = \mathrm{D}^{-1}\mathrm{D} F = F.$$

3. Symbolické řešení nutno *realisovati*, t. j. vyjádřiti jako funkci proměnné t. Může se tak státi různým způsobem; na př. pro realisaci řešení $F(t) = \mathrm{L}^{-1}(\mathrm{D}) R(t)$ rozvineme operátor $\mathrm{L}^{-1}(\mathrm{D})$ v řadu podle mocnin symbolu D a potom aplikujeme operátor D na funkci $R(t)$.

K homogenní rovnici s konstantními koeficienty, jejímž integrálem je $F(t)$, patří diferenciální operátor $f(\mathrm{D})$, užívající *Laplaceovy transformace*

$$f(\mathrm{D}) = \mathrm{D} \int_0^\infty e^{-\mathrm{D}t} F(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{takže } F(t) = f(\mathrm{D});$$

jeho realisace je ekvivalentní k stanovení funkce $F(t)$ z této integrální rovnice.

J. Carson: Electrical circuit theory and the operational analysis, 1926 (něm. 1929).
E. Berg: Heaviside's operational calculus, 1929 (něm. zprac. 1932).
E. Stephens: The elementary theory of operational mathematics, 1937.
H. Ertel: Elemente der Operatorenrechnung, 1940.
K. Wagner: Operatorenrechnung nebst Anwendungen in Physik u. Technik, 1940.

XIII. Počet variační.

1. *Úkol variačního počtu* zní: stanoviti funkce, pro které omezený integrál, na nich a jejich derivacích až do určitého řádu závislý, nabývá extrémních hodnot. V nejjednodušším případě má se dvěma body $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ v rovině xy vésti křivka $y = y(x)$, pro kterou integrál

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx \text{ jest } \textit{minimum} \text{ nebo } \textit{maximum}. \tag{1}$$

Hledaná čára (funkce) slule *extremála*. Jiné křivky, probíhající mezi body M_1, M_2 v okolí extremály, vzniknou změnou (variací) funkce; pro ně má integrál hodnoty větší nebo menší než (1). Pořadnice variovaných čar $Y(x) = y + \delta y$ se liší od pořadnic extremály y o přírůstek δy.

2. *Variace funkce* y je přírůstek δy, vzniklý infinitesimální změnou funkční závislosti; vyjádříme ji tvarem

$$\delta y = \varepsilon \eta(x),$$

kde $\eta(x)$ je libovolná spojitá funkce, vyhovující podmínkám $\eta(x_1) = 0$, $\eta(x_2) = 0$ a ε je proměnný parametr, nezávislý na x.

Pro variační symbol δ platí stejná pravidla jako pro diferencování:

1. $\delta(u+v) = \delta u + \delta v$; 2. $\delta(u, v) = u\,\delta v + v\,\delta u$;

3. $\delta f(u, v, w \ldots) = \dfrac{\partial f}{\partial u}\delta u + \dfrac{\partial f}{\partial v}\delta v + \dfrac{\partial f}{\partial w}\delta w + \ldots$

4. $\delta\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\,\delta y$; 5. $\delta \int y\,\mathrm{d}x = \int \delta y\,\mathrm{d}x$.

Při zvoleném $\eta(x)$ závisí křivky vzniklé variací pouze na ε; je-li $\varepsilon = 0$, přejdou v extremálu. Také integrál variovaných čar

$$J(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta')\,dx \tag{2}$$

je funkcí parametru ε; $J(0) = J$ jest jeho extrém (1). Daný úkol je tím převeden na řešení obyčejného extrému s podmínkou $\dfrac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varepsilon} = 0$.

3. *Variace integrálu* slují členy řady

$$J(\varepsilon) = J(0) + \varepsilon J'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2!}J''(0) + \ldots = J + \delta J + \delta^2 J + \ldots$$

$$J(0) = J;$$

$$\varepsilon J'(0) = \delta J \quad \textit{první variace}; \tag{3}$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2} J''(0) = \delta^2 J \quad \textit{druhá variace}; \ldots$$

4. *Podmínka pro extrém:* první variace musí býti nula; o druhu extrému rozhodne znamení variace druhé.

$$\delta J = 0\,; \quad \delta^2 J > 0 \text{ při minimu;} \quad \delta^2 J < 0 \text{ při maximu.} \tag{4}$$

Povaha úkolu činí zpravidla vyšetřování druhé variace zbytečným; omezíme se proto na stanovení první variace $\delta J = \varepsilon J'(0)$.

5. *Variace integrálu* $J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,\mathrm{d}x$. Derivujeme integrál (2) se třemi proměnnými x, y, y' podle parametru ε a dosadíme $\varepsilon = 0$:

$$\left[\frac{\mathrm{d}J(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'\right)\mathrm{d}x.$$

Parciální integrací druhého členu, kde $\eta'\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\eta$, dostaneme

$$J'(0) = \left[\eta \frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \eta \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x.$$

Vzhledem k podmínkám pro η odpadá výraz v lomených závorkách, takže se stručnější symbolikou

$$\delta J = \varepsilon J'(0) = \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \eta \left(f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'}\right)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

6. *Eulerova diferenciální rovnice* variačního problému (1). Z podmínky $\delta J = 0$ soudíme, že při libovolném η vymizí v (5) výraz v závorkách. Rovnice

$$f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'} = 0$$

čili

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' = 0 \tag{6}$$

jest *Eulerova* diferenciální rovnice II. řádu pro hledanou funkci $y(x)$. Všechny funkce, které jí vyhovují, slují *extremály* (v širším smyslu). K určení dvou integračních konstant máme dvě okrajové podmínky: mezím x_1, x_2 příslušejí hodnoty y_1, y_2.

a) Chybí-li y ve funkci f, jest $f_y = 0$. Eulerova rovnice (6) přejde na $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'} = 0$, její první integrál

$$f_{y'} = C_1.$$

b) Chybí-li x ve funkci f, jest $f_x = 0$. Protože derivováním výrazu $f - y' f_{y'}$ dostaneme po redukci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f - y' f_{y'}) = y'\left(f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'}\right),$$

plyne odtud, nehledě k případu $y' = 0$ čili $y = C$, vzhledem k (6) první integrál Eulerovy rovnice ve tvaru

$$f - y' f_{y'} = C_1.$$

Příklad. Stanoviti křivku, jdoucí body (x_1, y_1), (x_2, y_2), která otáčením kolem osy x vytvoří rotační plochu o nejmenším povrchu. Zde jde o minimum integrálu

$$J = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x; \qquad f = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

Podle 6*b)* jest první integrál Eulerovy rovnice

$$y\sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1; \qquad y = C_1\sqrt{1 + y'^2}.$$

Dalším integrováním této rovnice I. řádu plyne

$$y = C_1 \cosh \frac{x + C_2}{C_1}.$$

Extremály jsou *řetězovky* s osou y. Určení konstant z okrajových podmínek závisí na poloze bodů M_1, M_2. Nalezená rotační (minimální) plocha sluje *katenoid*.

7. *Extrém integrálu* $J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', y'')\,\mathrm{d}x$.

Mezím x_1, x_2 patří hodnoty y_1, y_2, y'_1, y'_2; křivky procházejí dvěma body, v nichž mají předepsaný směr. Příslušná Eulerova rovnice, k níž dospějeme obdobným postupem jako v předcházejícím, je čtvrtého řádu

$$f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f_{y''} = 0.$$

a) Chybí-li y ve funkci f, jest $f_y = 0$; první integrál Eulerovy rovnice je třetího řádu

$$f_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y''} = C_1.$$

b) Chybí-li x ve funkci f, jest první integrál Eulerovy rovnice třetího řádu

$$f - y' f_{y'} + y' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y''} - y'' f_{y''} = C_1.$$

c) Chybí-li x a y ve funkci f, dostaneme dvojím integrováním integrál druhého řádu

$$f - y'' f_{y''} = C_2 + C_1 y'.$$

8. *Extrém integrálu* $J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z, y', z')\, dx.$

Hledané funkce $y = y(x)$, $z = z(x)$ vyjadřují prostorovou křivku, spojující dva body, pro niž má integrál extrém. Mezím x_1, x_2 patří hodnoty y_1, y_2, z_1, z_2. Extremály jsou určeny soustavou dvou diferenciálních rovnic druhého řádu

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0; \qquad f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} = 0.$$

Je-li prostorová čára vázána na určitou plochu $F(x, y, z) = 0$, vyloučíme s pomocí rovnic $F = 0$, $F_x + F_y y' + F_z z' = 0$ z integrálu z a z'; tím úkol převeden na stanovení jedné funkce.

9. *Isoperimetrický problém:* Stanoviti funkci $y(x)$, pro kterou integrál $J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx$ má extrém, aby současně pro tutéž funkci y jiný integrál $K = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y')\, dx$ nabyl předepsané hodnoty l. Úkol se řeší jako extrém integrálu $\int_{x_1}^{x_2} (f + \lambda g)\, dx$. Eulerova rovnice má tvar

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \lambda \left(g_y - \frac{d}{dx} g_{y'}\right) = 0.$$

Je-li její obecný integrál $y = \varphi(x, \lambda, C_1, C_2)$, určíme konstanty a faktor λ podle okrajových podmínek z rovnic

$$y_1 = \varphi(x_1, \lambda, C_1, C_2); \qquad y_2 = \varphi(x_2, \lambda, C_1, C_2); \qquad K = l.$$

Je to obdoba s určením relativního extrému v diferenciálním počtu.

O. Bolza: Lectures on the calculus of variations, 1904 (rozšíř. Vorlesungen über Variationsrechnung, 2. vyd. 1923).

G. Bliss: Calculus of variations, 1925 (něm. překl. 1932).

G. Grüss: Variationsrechnung, 1938.

A. Kneser: Lehrbuch der Variationsrechnung, 2. vyd. 1925.

R. Courant - D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik I., 2. vyd. 1931.

J. Hadamard: Leçons sur le calcul des variations, 1910.

C. Carathéodory: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, 1935.

L. Tonelli: Fondamenti di calcolo delle variazioni, 2 sv., 1921—1923.

XIV. Integrální rovnice.

Rovnice mezi funkcemi, v nichž je naznačena integrace hledané funkce, slují *rovnice integrální*. Je-li neznámá pouze v integrálu, je rovnice prvního druhu, je-li také mimo integrál, druhého druhu; přichází-li toliko v první mocnině, je rovnice lineární.

1. Integrální rovnice druhého druhu.

1. *Lineární integrální rovnice druhého druhu (Fredholmova)*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{1}$$

$$a \leqq x \leqq b\,; \qquad a \leqq \xi \leqq b\,.$$

Dány jsou: člen $f(x)$ a t. zv. *jádro* $K(x,\xi)$; hledá se funkce $\varphi(x)$, kterou jest identicky splněna rovnice (1). Obě proměnné x, ξ probíhají v témže intervalu téhož oboru. Předpokládá se existence integrálů

$$\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x\,; \qquad \int_a^b\int_a^b [K(x,\xi)]^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi\,; \qquad \int_a^b K(x,\xi)\,f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Jádro je symetrické, když $K(x,\xi) \equiv K(\xi,x)$. Libovolný stálý činitel λ sluje *parametr* integrální rovnice. Je-li v (1) člen $f(x) \equiv 0$, vznikne *homogenní lineární integrální rovnice druhého druhu*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{2}$$

Zvláštní hodnota parametru $\lambda = \lambda_n$, pro kterou má homogenní rovnice (2) ještě jiné řešení krom triviálního $\varphi(x) = 0$, je *vlastní hodnota* jádra; příslušné řešení $\varphi_n(x)$ sluje *vlastní funkce* jádra pro vlastní hodnotu λ_n. Poněvadž také libovolný násobek řešení vyhovuje homogenní rovnici, volí se pro jednoznačnost vlastní funkce *normovaná*, tak totiž, že

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

Normovati funkci $\varphi(x)$ v intervalu (a, b) znamená násobiti ji takovým faktorem C, aby platilo

$$\int_a^b [C\,\varphi(x)]^2\,\mathrm{d}x = 1\,; \qquad C^2 = 1 : \int_a^b \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Nehomogenní rovnice (1) má jediné řešení, není-li parametr λ vlastní hodnotou jádra.

Integrální rovnice řeší podobné problémy jako rovnice diferenciální s okrajovými podmínkami (dva tam oddělené úkoly najednou); jádro splňuje již dané podmínky. Obsáhlá theorie jedná o methodách řešení pro různé druhy jádra, o souvislosti s rovnicemi diferenciálními, variačním počtem atd. Užití v theoretické fysice, stavebné mechanice, v elektrotechnice a j.

2. *Řešení lineární integrální rovnice* (1) *s jádrem zvrhlým*, t. j. tvaru konečného součtu součinů vždy dvou funkcí proměnné x a proměnné ξ

$$K(x, \xi) = \alpha_1(x)\,\beta_1(\xi) + \alpha_2(x)\,\beta_2(\xi) + \ldots + \alpha_n(x)\,\beta_n(\xi), \qquad (3)$$

vede na řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. Dosadíme-li (3) do rovnice (1), možno ji psáti

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_1^n \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(\xi)\,\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

aneb, označíme-li neznámé stálé hodnoty integrálů zde obsažených C_i,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_1^n \alpha_i(x)\,C_i\,. \qquad (4)$$

Tuto rovnici, znásobenou postupně $\beta_k(x)\,\mathrm{d}x$, kde $k = 1, 2, \ldots, n$, integrujeme po každé v mezích a, b. Dostaneme tak vlevo opět neznámé C_i, vpravo integrály (čísla), tedy

$$\int_a^b \beta_k(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = C_k = C_i, \quad \int_a^b \beta_k(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x = F_k, \quad \int_a^b \beta_k(x)\,\alpha_i(x)\,\mathrm{d}x = A_{ki}$$

a odtud soustavu n algebraických lineárních rovnic

$$C_k = F_k + \lambda \Sigma A_{ki} C_i \qquad (k, i = 1, 2, \ldots, n)$$

čili

$$\begin{aligned}
C_1(1 - \lambda A_{11}) - C_2 \lambda A_{12} - \ldots \quad & - C_n \lambda A_{1n} = F_1 \\
- C_1 \lambda A_{21} + C_2(1 - \lambda A_{22}) - \ldots \quad & - C_n \lambda A_{2n} = F_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
- C_1 \lambda A_{n1} - C_2 \lambda A_{n2} - \ldots \quad & + C_n(1 - \lambda A_{nn}) = F_n
\end{aligned} \qquad (5)$$

k určení n neznámých C_i. Soustava (5) má řešení, když determinant soustavy je různý od nuly (str. 26). S vypočtenými neznámými je rovnice (4) řešením rovnice (1).

Když $f(x) \equiv 0$, jsou všechna $F_k = 0$; integrální rovnice i soustava (5) přejde na homogenní. Z podmínky, že determinant soustavy se rovná nule (str. 27), plynou vlastní hodnoty jádra. Je-li řád matice determinantu $n - r$, má homogenní rovnice (2) r lineárně nezávislých řešení, podle (4) tvaru

$$\varphi(x) = \lambda \Sigma A_{ki} C_i .$$

3. *Fredholmovo řešení* integrální rovnice (1) s libovolným jádrem $K(x, \xi)$ má tvar

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, \xi; \lambda) f(\xi) \, \mathrm{d}\xi ,$$

kde t. zv. *řešící jádro*

$$\Gamma(x, \xi; \lambda) = \frac{D(x, \xi; \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{K(x, \xi) + d_1(x, \xi)\lambda + d_2(x, \xi)\lambda^2 + \ldots}{1 + d_1 \lambda + d_2 \lambda^2 + d_3 \lambda^3 + \ldots}$$

je podílem dvou celistvých transcendentních funkcí parametru λ s koeficienty, jež lze určiti postupně,

$$d_m = -\frac{1}{m} \int_a^b d_{m-1}(\xi, \xi) \, \mathrm{d}\xi ; \qquad d_0(\xi, \xi) = K(\xi, \xi) ;$$

$$d_m(x, \xi) = K(x, \xi) \, d_m + \int_a^b K(x, t) \, d_{m-1}(t, \xi) \, \mathrm{d}t ; \qquad d_0(x, \xi) = K(x, \xi) .$$

Homogenní rovnice (2) má řešení, když $D(\lambda) = 0$; nulová místa jmenovatele $D(\lambda)$ jsou vlastní hodnoty jádra. Je-li $\lambda = \lambda_1$ k-násobné nulové místo čitatele $D(x, \xi; \lambda)$, jest nejméně $(k+1)$-násobným nulovým místem jmenovatele. Řada pro funkci $D(x, \xi; \lambda)$, rozvinutou podle mocnin rozdílu $\lambda - \lambda_1$, začíná členem k-tým

$$D(x, \xi; \lambda) = (\lambda - \lambda_1)^k d'_k(x, \xi) + (\lambda - \lambda_1)^{k+1} d'_{k+1}(x, \xi) + \ldots$$

Její první koeficient je řešením homogenní rovnice (2) pro každé $\xi = \xi_0 = \text{konst.}$

$$\varphi_1(x) = d'_k(x, \xi_0) .$$

Fredholmovo řešení, formálního rázu, je odvozeno z omezeného integrálu jako limity součtu a řešení soustavy lineárních rovnic determinanty.

4. *Řada Neumannova.* Řešením integrální rovnice (1) s libovolným jádrem je řada

$$\varphi(x, \lambda) = A_0(x) + A_1(x)\lambda + A_2(x)\lambda^2 + A_3(x)\lambda^3 + \ldots ,$$

jejíž koeficienty (6)

$$A_0(x)=f(x);\quad A_1(x)=\int_a^b K(x,\xi)\,A_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi;\quad A_2(x)=\int_a^b K(x,\xi)\,A_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi;\ldots$$

se stanoví postupně; sluje *řada Neumannova*. Vnitřní integrály v koeficientech $A_2, A_3, \ldots$ se nazývají *iterovaná jádra* ke $K(x,\xi)$ příslušná:

$$K_2(x,\xi)=\int_a^b K(x,t)\,K(t,\xi)\,\mathrm{d}t;\qquad K_3(x,\xi)=\int_a^b K_2(x,t)\,K(t,\xi)\,\mathrm{d}t;\ \ldots;$$

$$K_n(x,\xi)=\int_a^b K_{n-1}(x,t)\,K(t,\xi)\,\mathrm{d}t. \tag{7}$$

Lze po dosazení psáti

$$K_3(x,\xi)=\int_a^b\int_a^b K(x,t_1)\,K(t_1,t_2)\,K(t_2,\xi)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}\xi;\ldots;$$

$$K_n(x,\xi)=\int_a^b\ldots\int_a^b K(x,t_1)\,K(t_1,t_2)\ldots K(t_{n-1},\xi)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\ldots\mathrm{d}t_{n-1}.$$

Neumannova řada, kterou vzhledem k (6) a (7) píšeme také

$$\varphi(x,\lambda)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,f(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\lambda^2\int_a^b K_2(x,\xi)\,f(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\ldots, \tag{8}$$

konverguje pro hodnoty parametru $|\lambda|\leqq\eta$, kde

$$\eta^2=1:\int_a^b\int_a^b[K(x,\xi)]^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi.$$

5. *Methoda postupného přiblížení.* Funkci $\varphi(x)$, vyhovující rovnici (1) s libovolným jádrem, blíží se členy posloupnosti

$$y_1=f(x);\ldots;y_n=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,y_{n-1}(\xi)\,\mathrm{d}\xi;\ldots;(n=2,3,\ldots).$$

Dosazujíce předcházející hodnoty y_{n-1} do y_n s jinak označenou integrační proměnnou, dospějeme k řadě Neumannově (8).

Postupnou aproximací lze řešiti také homogenní rovnici (2). Neznámé jsou zde $\varphi(x)$ a parametr λ. Vyjdeme od libovolné normované funkce $y_1(x)$, na př.

$$y_1=c_1=1:\sqrt{b-a}$$

a stanovíme postupně pro $n=2,3,\ldots$

$$y_n=c_n\,q_n,\ \text{kde}\ \ q_n(x)=\int_a^b K(x,\xi)\,y_{n-1}(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\qquad c_n^2=1:\int_a^b q_n^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Konverguje-li s rostoucím n posloupnost čísel c_n k hodnotě c a posloupnost funkcí $y_n(x)$ k funkci $y(x)$, vyhovují vlastní hodnota $\lambda=c$ a vlastní funkce $\varphi(x)=y(x)$ rovnici (2).

6. *Symetrické jádro* $K(x, \xi) = K(\xi, x)$ má jen reálné vlastní hodnoty. Různým vlastním hodnotám λ_m, λ_n příslušné vlastní funkce $\varphi_m(x), \varphi_n(x)$ tvoří normovanou orthogonální soustavu, t. j.

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & \text{pro } m = n, \\ 0 & \text{„ } m \neq n. \end{cases}$$

Symetrické jádro lze rozvinouti v bilineární řadu vlastních funkcí

$$K(x, \xi) = \sum \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}$$

s předpokladem, že v celém intervalu rovnoměrně konverguje.

Řešení integrální rovnice (1) se symetrickým jádrem:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_1^\infty \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu - \lambda} \int_a^b f(\xi)\,\varphi_\nu(\xi)\,\mathrm{d}(\xi).$$

7. *Integrální rovnice Volterrova* druhého druhu

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x - \xi)\,\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{9}$$

$$\text{kde} \quad 0 \leqq \xi \leqq x.$$

Horní mez je proměnná. Tuto rovnici řeší řada Neumannova (8), která konverguje pro každý parametr λ. Hledanou funkci $\varphi(x)$ možno vyjádřiti také řadou Maclaurinovou (str. 81), pokud existuje.

Rovnici (9) napřed transformujeme substitucí $x - \xi = t$; $\mathrm{d}\xi = -\mathrm{d}t$ a pak derivujeme podle parametru x (str. 101, vzorec **14**). Při $\lambda = 1$ jest

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(t)\,\varphi(x-t)\,\mathrm{d}t;$$

$$\varphi'(x) = f'(x) + K(x)\,\varphi(0) + \int_0^x K(t)\,\varphi'(x-t)\,\mathrm{d}t;$$

$$\varphi''(x) = f''(x) + K'(x)\,\varphi(0) + K(x)\,\varphi'(0) + \int_0^x K(t)\,\varphi''(x-t)\,\mathrm{d}t; \ldots$$

Odtud

$$\varphi(0) = f(0); \quad \varphi'(0) = f'(0) + K(0)\,\varphi(0); \quad \varphi''(0) = f''(0) + K'(0)\,\varphi(0) + K(0)\,\varphi(0); \ldots$$

Proto

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{x}{1!}\,\varphi'(0) + \frac{x^2}{2!}\,\varphi''(0) + \ldots$$

Na integrální rovnici typu Volterrova lze převést lineární diferenciální rovnici n-tého řádu s danými počátečními podmínkami.

2. Integrální rovnice prvního druhu.

1. *Lineární integrální rovnice prvního druhu*

$$f(x) = \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, \mathrm{d}\xi \tag{10}$$

při libovolném $f(x)$ obecně nemá řešení. Je-li jádro zvrhlé (3), lze užíti methody 2. Příkladem integrálních rovnic 1. druhu jsou dvě vzájemně se podmiňující rovnice

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\, \mathrm{d}\xi; \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\, \mathrm{d}\xi, \tag{11}$$

plynoucí z Fourierova integrálu; každá z nich je řešením druhé. V reálném oboru jim odpovídají rovnice

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \cos x\xi\, \mathrm{d}\xi; \qquad \varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos x\xi\, \mathrm{d}\xi \tag{12}$$

pro funkce sudé; pro liché je v integrálech $\sin x\xi$.

Součet obou posledních rovnic $f(x) + \varphi(x) = F(x)$ jest

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\xi) \cos x\xi\, \mathrm{d}\xi.$$

To znamená, že symetrické jádro $\cos x\xi$ má v intervalu $(0, \infty)$ pro vlastní hodnotu $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ nekonečně mnoho vlastních funkcí $F(x)$.

2. *Abelova integrální rovnice*

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha}}\, \mathrm{d}\xi, \tag{13}$$

kde $0 < \alpha < 1$, má řešení:

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(\xi)}{(x-\xi)^{1-\alpha}}\, \mathrm{d}\xi \right].$$

Pro $\alpha = \frac{1}{2}$ jest

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}\, \mathrm{d}\xi; \qquad \text{řešení:} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{f(0)}{\sqrt{x}} + \int_0^x \frac{f'(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}\, \mathrm{d}\xi \right].$$

3. *Příčinková (zdrojná) definice funkce.* Funkce $f(x)$ je vyjádřena příčinkově (zdrojně) integrálem

$$f(x = \int_a^b K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{14}$$

jako lineární superposice účinků $K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, vyvolaných příčinkovou (*Greenovou*) funkcí $K(x,\xi)$ a intensitou zdroje $\varphi(\xi)$ v místě ξ. Obrácená závislost je integrální rovnice prvního druhu.

Příčinkově definovaná funkce (14) dá se rozvinouti v konvergentní řadu vlastních funkcí φ_ν jádra $K(x,\xi)$:

$$f(x) = \sum_1^\infty c_\nu \varphi_\nu(x), \text{ kde } c_\nu = \int_a^b f(x)\,\varphi_\nu(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. *Funkcionální transformace.* Integrál v rovnici (14) je lineární operátor, jímž daná funkce $\varphi(\xi)$ se mění na jinou funkci $f(x)$ jiné proměnné. Transformace je určena jádrem a mezemi, po případě vhodnou integrační cestou. Mnohostranné upotřebení má integrální

$$\textit{Laplaceova transformace } f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\,F(t)\,\mathrm{d}t = \mathfrak{L}\left\{F(t)\right\},$$

kterou daná funkce $F(t)$ reálné proměnné t (předmět, originál v oblasti horní) se transformuje na funkci $f(s)$ komplexního argumentu $s = x + \mathrm{i}y$ (výsledek, obraz v oblasti dolní). Obráceně

$$F(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{x-\mathrm{i}\infty}^{x+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{ts} f(s)\,\mathrm{d}s = \mathfrak{L}^{-1}\left\{f(s)\right\}.$$

Integrační cestou je přímka, kolmá k reálné ose v místě x.

M. Böcher: An introduction to the study of integral equations, 2. vyd. 1914.
T. Lalesco: Introduction à la théorie des équations intégrales, 1912.
G. Vivanti: Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari, 1916.
A. Kneser: Die Integralgleichungen u. ihre Anwendung in der mathematischen Physik, 2. vyd. 1922.
G. Wiarda: Integralgleichungen, 1930.
G. Kowalewski: Integralgleichungen, 1930.
G. Doetsch: Theorie u. Anwendung der Laplace-Transformation, 1937.
G. Hamel: Integralgleichungen. Einführung in Lehre u. Gebrauch, 1937.
E'. Goursat: Cours d'analyse mathématique III., 4. vyd. 1927.
R. Courant - D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik I., 2. vyd. 1931.
Ph. Frank - R. Mises: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik I., 2. vyd. 1930.

XV. Počet vektorový.

1. Skaláry a vektory.

Skalár jest každá *směruprostá* veličina, k jejímuž určení stačí číslo, udávající její poměr ke zvolené jednotce; její hodnoty lze sestaviti ve stupnici; značí se obyčejnou latinkou.

Skaláry jsou na př. délka, hmota, hustota, teplota, čas, energie, práce atd.

Vektor jest veličina *směrová*, která krom velikosti má určitý směr a smysl. Geometricky zobrazuje vektor šíp $A \longrightarrow B$, t. j. orientovaná úsečka, vytvořená v prostoru posuvem bodu A do B; značí se tučnou kursivou $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ (nebo kurentkou $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$).

Na př. plochu představuje vektor, který má směr normály určitého smyslu a délku úměrnou velikosti plochy. Fysikální vektory jsou na př. síla, rychlost, zrychlení, tlak atd.

Modul vektoru $\boldsymbol{a}$ je kladné číslo, udávající jeho absolutní velikost

$$\operatorname{mod} \boldsymbol{a} \equiv |\boldsymbol{a}| = a,$$

stejnojmenný skalár; geometricky prostá délka úsečky $\overline{AB}$.

Dva vektory jsou si rovny, mají-li týž modul, směr i smysl.

Pro analytické vyšetřování se volí *Descartesova* pravoúhlá pravotočivá soustava souřadnic, kde osy $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ kladného smyslu jsou v pořadí prstů pravé ruky: palec, ukazovák a střední prst. Směr ν jest určen třemi směrovými kosiny, mezi nimiž platí vztah

$$\cos^2(\nu\,\mathbf{x}) + \cos^2(\nu\,\mathbf{y}) + \cos^2(\nu\,\mathbf{z}) = 1;$$

úhel dvou směrů μ a ν se stanoví vzorcem

$$\cos(\mu\,\nu) = \cos(\mu\,\mathbf{x})\cos(\nu\,\mathbf{x}) + \cos(\mu\,\mathbf{y})\cos(\nu\,\mathbf{y}) + \cos(\mu\,\mathbf{z})\cos(\nu\,\mathbf{z}).$$

Analytická definice vektoru. Vektor $\boldsymbol{a}$ je dán přiřaděním skaláru a_ν směru ν v prostoru podle lineárního homogenního zákona

$$a_\nu = a_x \cos(\nu\,\mathbf{x}) + a_y \cos(\nu\,\mathbf{y}) + a_z \cos(\nu\,\mathbf{z}); \qquad (1)$$

souřadnice vektoru a_x, a_y, a_z jsou hodnoty a_ν pro $\nu = \mathbf{x}$, $\nu = \mathbf{y}$, $\nu = \mathbf{z}$.

Vektor je jednoznačně určen svými průměty do libovolné soustavy tří nekomplanárních os (nerovnoběžných s jednou rovinou).

Volný vektor lze libovolně pošinouti. *Radiusvektor* má pevný počáteční bod. *Vázaný vektor* zobrazuje pevná orientovaná úsečka.

Jednotkový vektor $\boldsymbol{a}^0 = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ je stejnosměrný s vektorem $\boldsymbol{a}$, má týž smysl a velikost 1.

Jednotkové vektory $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ mají směr kladných os souřadnic a velikost 1; tvoří *souřadnicový pravotočivý trojhran.*

Vektory, které výměnou soustavy pravotočivé za levotočivou mění znamení, slují *polární;* vektory, které změnou orientace znamení nemění, slují *axiální.* K polárním patří posuv, k axiálním otočení.

Vektorová analysa je jakýmsi matematickým těsnopisem, vyjadřujíc všechny operace, které při libovolné transformaci rovnoběžkových souřadnic zůstávají invariantními, zvláštními symboly; každá vektorová rovnice nahrazuje tři obyčejné. Symbolika vektorového počtu není ustálena. Vzhledem ke kritickým poznámkám v knize *Burali-Forti — Marcolongo*: Éléments de calcul vectoriel ponecháno označení jako v předešlém vydání tohoto svazku Technického průvodce.

2. Algebra. Základní úkony početní.

Součet a rozdíl vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$

1. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}; \qquad \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$

je geometricky zobrazen úhlopříčkou rovnoběžníka o stranách $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ nebo $\boldsymbol{a}$, $-\boldsymbol{b}$ jako výslednice sil.

2. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}; \qquad \lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b};$

$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}; \qquad \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = 0.$

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 0$, když $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ se liší jen smyslem.

Je-li řetěz vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \boldsymbol{a}_n$ uzavřen, jest

3. $$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_n = 0.$$

Násobení a dělení vektoru skalárem. Buďtež $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reálná určitá čísla různá od nuly; $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ vektory nenulové.

4. $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = 0$ značí, že $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

5. $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = 0$, jsou-li $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ vektory rovnoběžné s rovinou čili *komplanární.*

6. $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} + \delta\boldsymbol{d} = 0$ platí pro 4 libovolné vektory.

Nerovnoběžnými vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ lze vyjádřiti komplanární vektor

7. $$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}.$$

Vektor možno vyjádřiti třemi nekomplanárními vektory v lineárním, homogenním tvaru

8. $$\boldsymbol{d} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}.$$

Složky vektoru v soustavě pravoúhlé jsou jeho průměty do os

9. $$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z.$$

10. $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$; $\quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$; $\quad \boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{a}$.

11. $\lambda\boldsymbol{a} = \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k}$.

Radiusvektor $\boldsymbol{r} \equiv \overrightarrow{OM}$ určuje v prostoru polohu bodu $M\,(x, y, z)$.

12. $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$; $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $\quad \boldsymbol{r}^0 = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$.

13. Skalární (vnitřní) součin vektorů $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ (čti „a do b“) definujeme:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = a \cdot b \cos(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}),$$

kde $(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b})$ je nejmenší úhel vektorů. Je to součin modulu jednoho vektoru a průmětu (složky) druhého do směru prvního. Skalární součin je skalár.

Jiná označení: $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \equiv \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} \equiv (\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.

Prvek mechanické práce rovná se součinu ze síly a průmětu dráhy do směru síly.

14. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.
(Platí zákon komutativní)

15. $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.
(Platí zákon distributivní)

16. $m(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = m\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\times m\boldsymbol{b}$.

17. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^2$.

18. $(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 \pm 2\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2$ (věta kosinová).

Skalární součin dvou k sobě kolmých vektorů je nula.

19. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = 0$ značí: buď $\boldsymbol{a} = 0$ či $\boldsymbol{b} = 0$ nebo $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

20. $\boldsymbol{i}^2 = 1$; $\quad \boldsymbol{j}^2 = 1$; $\quad \boldsymbol{k}^2 = 1$;

21. $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = 0$; $\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = 0$; $\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = 0$.

22. $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} = 0$; $\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} = 0$; $\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} = 0$.

Vyjádříme-li vektory složkami podle **10.**, jest

23. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$; $\quad$ **24.** $\boldsymbol{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2$.

25. Vektorový (vnější) součin $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ (čti „a proti b“) definujeme:

$$\text{mod}\,(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}) = \text{mod}\,\boldsymbol{c} = ab\sin(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b});$$

$$\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b},\ \text{pravotočivý trojhran } \boldsymbol{abc}.$$

Je to *vektor*, kolmý k rovině rovnoběžné s vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, s nimiž tvoří soustavu pravotočivou; jeho modul se rovná obsahu rovnoběžníka o stranách $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$.

Jiná označení: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \equiv \mathfrak{a}\times\mathfrak{b} \equiv [\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$.

Vektorový součin sluje vnější, protože vektor jím daný je vně roviny rovnoběžníka, jehož plochu s jedné a druhé strany — vzhledem k určitému smyslu normály — nelze zaměniti.

Na př. moment točivé síly $\boldsymbol{a}$ na rameni $\boldsymbol{b}$ je dán vektorovým součinem $\mathfrak{M} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$; je kolmý k rovině vektorů a má směr a smysl osy soustavy pravotočivé.

26. $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}$. (Komutativní zákon neplatí)

27. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}$. (Platí zákon distributivní)

28. $m(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}) = m\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\wedge m\boldsymbol{b}$.

29. $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} = 0$ značí: buď $\boldsymbol{a} = 0$ či $\boldsymbol{b} = 0$ nebo $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$; vždy $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a} = 0$.

30. $\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{i} = 0$, $\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{j} = 0$, $\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{k} = 0$.

31. $\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$.

32. $\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}$.

33. Vektorový součin vyjádřený složkami:

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}.$$

34. Složené součiny. Skalární součin

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \equiv (\boldsymbol{abc})$$

jest při cyklické záměně vektorů neproměnný skalár; má znamení + nebo −, je-li vektorový trojhran pravotočivý či levotočivý. Značí objem rovnoběžnostěnu, jehož hrany jsou rovnoběžny s vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ a mají jejich délku.

35. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{b}$.

Znaky × a ∧ možno zaměniti při stálém pořadí faktorů; výměnou dvou činitelů změní však součin znamení (*pseudoskalár*).

36. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} = 0$, když vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ jsou komplanární.

37. $(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{a}$ (rozvedeno podle **33.** a **23.**)

38. $\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{a}$.

39. $(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

40. $(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d}) - \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d})$ (podle **34.** a **38.**).

Dělení. Děliti vektorem nemá smyslu; děliti možno jen veličinami skalárními.

3. Počet diferenciální.

Derivace a diferenciál vektoru. Vektor $\boldsymbol{a}(t)$, který je funkcí skalární proměnné t, mění s časem t svou velikost, směr i smysl. Spojitost, derivace a diferenciál jsou definovány jako u funkce skalární.

1. $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t) - \boldsymbol{a}(t)}{\Delta t} = \boldsymbol{a}'(t) = a'_x \boldsymbol{i} + a'_y \boldsymbol{j} + a'_z \boldsymbol{k},$$

kde derivace souřadnic vektoru podle t jsou

$$a'_x = \frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}t}; \qquad a'_y = \frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}t}; \qquad a'_z = \frac{\mathrm{d}a_z}{\mathrm{d}t}.$$

2. $\mathrm{d}\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}'(t)\,\mathrm{d}t$. Má-li vektor $\boldsymbol{a}$ stálou velikost, $\mathrm{mod}\,\boldsymbol{a} = \text{konst.}$, je diferenciál vektoru $\mathrm{d}\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{a}$.

3. Polohový vektor $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$;

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k} = \boldsymbol{r}'(t); \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{i}\,\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}y + \boldsymbol{k}\,\mathrm{d}z.$$

4. $$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 a_x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2 a_y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2 a_z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a}''(t).$$

5. $\mathrm{d}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times \mathrm{d}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \mathrm{d}\boldsymbol{a}$.

6. $\mathrm{d}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \mathrm{d}\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{a}$.

Derivace podle oblouku. Nezávisle proměnnou jest oblouk prostorové křivky, který opisuje hrot vektoru $\boldsymbol{r}$. Derivace ve směru vytčeném elementem oblouku $\mathrm{d}s$

7. $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{t}^0$$

je jednotkový vektor $\boldsymbol{t}^0$ směru tečny a smyslu rostoucího oblouku.

Jednotkové vektory $\boldsymbol{n}^0$ směru hlavní normály a $\boldsymbol{b}^0$ směru binormály tvoří s $\boldsymbol{t}^0$ soustavu pravotočivou.

8. $$\boldsymbol{n}^0 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} : \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}\right|. \qquad 9.\ \boldsymbol{b}^0 = \boldsymbol{t}^0 \wedge \boldsymbol{n}^0.$$

10. *Křivost* $$\frac{1}{\varrho} = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}\right|. \qquad 11.\ \textit{Torse}\ \frac{1}{\tau} = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}s}\right|.$$

Gradient skalárního pole. Část trojrozměrného prostoru, v níž skalární veličina $u = f(x, y, z)$ je funkcí polohového vektoru $\boldsymbol{r}$, sluje *skalární pole*; každému bodu oblasti náleží určitá hodnota funkce.

Plochy $u = \text{konst.}$ slují *hladiny* skalárního pole; každým bodem prostoru prochází jedna hladina. Z totálního diferenciálu plyne dělením ds *derivace v daném směru* čili rychlost změny *(spád)* funkce ve směru s

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(s\,\mathbf{x}) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(s\,\mathbf{y}) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(s\,\mathbf{z}),$$

kde $$\cos(s\,\mathbf{x}) = \frac{dx}{ds},\quad \cos(s\,\mathbf{y}) = \frac{dy}{ds},\quad \cos(s\,\mathbf{z}) = \frac{dz}{ds};$$

ve smyslu analytické definice (1) určuje vektor. Význačný vektor je *derivace ve směru normály k hladině*, značí se $\frac{\partial u}{\partial n}$ a sluje *gradient*. Směrová derivace je průmětem gradientu do směru s, t. j.

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial n}\cos(n\,s);$$

největší je ve směru normály $(s \equiv n)$, nulová na hladině $(s \perp n)$.

12. *Gradient funkce* $u = f(x, y, z)$ se značí $\operatorname{grad} u$;

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Gradient skalární funkce je vektor, kolmý v každém bodě oblasti k ploše hladinové; má směr největšího vzrůstu; jeho souřadnice jsou parciální derivace podle x, y a z. Je nezávislý na soustavě souřadnic.

Gradienty skalárního pole tvoří *vektorové pole.*

13. $du = \operatorname{grad} u \times (\boldsymbol{i}\,dx + \boldsymbol{j}\,dy + \boldsymbol{k}\,dz) = \operatorname{grad} u \times d\boldsymbol{r}.$

14. $\operatorname{grad} Cu = C \operatorname{grad} u$, kde je C skalární konstanta.

15. $\operatorname{grad}(u + v + \ldots) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v + \ldots$

16. $\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u;$ $\qquad \operatorname{grad} F(u) = F'(u) \operatorname{grad} u.$

17. $\operatorname{grad} r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{r}^0;$ $\qquad \operatorname{grad} \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{c},$ je-li $\boldsymbol{c}$ konstantní vektor;

$$\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\operatorname{grad} r = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3};\qquad \operatorname{grad} f(r) = f'(r)\,\boldsymbol{r}^0.$$

18. *Derivace skalární funkce* u *ve směru normály k hladině*

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \operatorname{grad} u \times \boldsymbol{n}^0;\qquad d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}^0\,dn.$$

19. $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \left|\operatorname{grad} u\right| = \left|\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\right|.$

20. *Derivace skalární funkce v libovolném směru s:*

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \operatorname{grad} u \times \boldsymbol{s}^0; \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}^0 \mathrm{d}s.$$

21. *Derivace skaláru $U(x, y, z, t)$ podle času:*

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \boldsymbol{v} \times \operatorname{grad} U, \text{ kde } \boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t};$$

je složena z lokální změny $\partial U/\partial t$ v čase $\mathrm{d}t$ na témže místě (x, y, z) a ze změny stacionární $\boldsymbol{v} \times \operatorname{grad} U$, při níž přejde bod za čas $\mathrm{d}t$ rychlostí $\boldsymbol{v}$ do sousedního bodu ve vzdálenosti $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

22. Gradient se též píše symbolicky

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) u = \nabla u.$$

23. *Hamiltonův operátor nabla*

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

je symbolický vektor. Se symbolem ∇ utvořený skalární operátor

24. $\boldsymbol{a} \times \nabla = a_x \dfrac{\partial}{\partial x} + a_y \dfrac{\partial}{\partial y} + a_z \dfrac{\partial}{\partial z}$

ve spojení se skalárem nebo vektorem značí:

25. $\boldsymbol{a} \times \nabla u = a_x \dfrac{\partial u}{\partial x} + a_y \dfrac{\partial u}{\partial y} + a_z \dfrac{\partial u}{\partial z};$

26. $\boldsymbol{a} \times \nabla \boldsymbol{v} = a_x \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + a_y \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} + a_z \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}.$

Divergence vektorového pole. Část prostoru, v níž existuje vektor

$$\boldsymbol{u}(x, y, z) = u_x \boldsymbol{i} + u_y \boldsymbol{j} + u_z \boldsymbol{k}$$

jako funkce polohy (x, y, z), sluje *vektorové pole*, $|\boldsymbol{u}|$ jeho *intensita*.

Radiusvektor $\boldsymbol{r}(u)$, který je funkcí jediné skalární proměnné, opisuje svým hrotem prostorovou křivku; hrot vektoru $\boldsymbol{r}(u, v)$ dvou nezávisle proměnných opisuje plochu, pokrytou sítí čar $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst}$. Vektor $\boldsymbol{r}(u, v, w)$ naplňuje část prostoru, kterou plochy $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$, $w = \text{konst.}$ dělí určitým způsobem; u, v, w slují křivočaré souřadnice.

Vektorové křivky (na př. silokřivky) mají v každém bodě směr příslušného vektoru. Je-li $\boldsymbol{r}$ radiusvektor křivky, je tečna rovnoběžna s diferenciálem $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, takže

$$\boldsymbol{u} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & & \boldsymbol{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{aneb} \quad \frac{\mathrm{d}x}{u_x} = \frac{\mathrm{d}y}{u_y} = \frac{\mathrm{d}z}{u_z}.$$

Obecné integrály druhých dvou diferenciálních rovnic prvního řádu značí dvě soustavy ekviskalárních ploch (hladin), které se protínají ve vektorových křivkách a tvoří vektorové trubice; spolu s třetí skalární funkcí, udávající tok vektoru (skalární součin vektoru do průřezu trubice), je vektorové pole zobrazeno.

27. *Divergence vektoru* $\boldsymbol{u}(x, y, z)$ je skalární součin nabla do $\boldsymbol{u}$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Divergence vektoru je skalár, nezávislý na volbě soustavy os; značí tok vektorového pole objemovou jednotkou nebo počet siločar v jednotce objemu.

Divergence rychlosti $\boldsymbol{v}$ značí přírůstek objemu pohybujícího se hmotného individua; pro nestlačitelné kapaliny jest $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$.

Divergence pohybového vektoru vyjadřuje úbytek hmoty v jednotce objemu za jednotku času. Je-li $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$, sluje vektor *solenoidální* (trubicový), pole $\boldsymbol{u}(x, y, z)$ jest bez zřídel (pole vírů); jeho modul je převrácená hodnota průřezu solenoidu.

28. $\operatorname{div}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \operatorname{div} \boldsymbol{v}$; $\quad \operatorname{div}(u\boldsymbol{v}) = u \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \operatorname{grad} u \times \boldsymbol{v}$.

29. $\operatorname{div} \boldsymbol{r} = 3$; $\quad \operatorname{div} \boldsymbol{r}^0 = \frac{2}{r}$; $\quad \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{r}^0}{r^2} = 0$.

$\operatorname{div} \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{r} = 0$, je-li $\boldsymbol{c}$ konstantní vektor; $\quad \operatorname{div} f(r) \cdot \boldsymbol{r}^0 = 2\frac{f(r)}{r} + f'(r)$.

Rotor vektorového pole.

30. *Rotor vektoru* $\boldsymbol{u}(x, y, z)$ je vektorový součin nabla proti $\boldsymbol{u}$:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \nabla \wedge \boldsymbol{u},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

čili

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}.$$

Rotor vektorové funkce $\boldsymbol{u}$ *je vektor*, nezávislý na změně soustavy souřadnic.

Rotor rychlosti značí dvojnásobnou úhlovou rychlost hmotného elementu v pohybujícím se prostředí.

31. $\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \operatorname{rot}\boldsymbol{u} + \operatorname{rot}\boldsymbol{v}$; $\operatorname{rot}(u\boldsymbol{v}) = u\operatorname{rot}\boldsymbol{v} + \operatorname{grad}u \wedge \boldsymbol{v}$.

32. $\operatorname{rot}\boldsymbol{r} = 0$; $\operatorname{rot}\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{c}$, je-li $\boldsymbol{c}$ konstantní vektor; $\operatorname{rot} f(r)\,\boldsymbol{r} = 0$.

Kombinace operátoru nabla se součiny skalárů $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ a vektorů $\boldsymbol{u}(x,y,z)$, $\boldsymbol{v}(x,y,z)$:

33. $\nabla(uv) = \operatorname{grad}(uv) = u\operatorname{grad}v + v\operatorname{grad}u$.

34. $\nabla\times(u\boldsymbol{v}) = \operatorname{div}(u\boldsymbol{v}) = u\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \operatorname{grad}u\times\boldsymbol{v}$.

35. $\nabla\wedge(u\boldsymbol{v}) = \operatorname{rot}(u\boldsymbol{v}) = u\operatorname{rot}\boldsymbol{v} + \operatorname{grad}u\wedge\boldsymbol{v}$.

36. $\nabla(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \operatorname{grad}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}\times\operatorname{grad})\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\times\operatorname{grad})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\wedge\operatorname{rot}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\wedge\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$.

37. $\nabla\times(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}) = \operatorname{div}(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$.

38. $\nabla\wedge(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}) = \operatorname{rot}(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}\times\operatorname{grad})\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\times\operatorname{grad})\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\operatorname{div}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{u}$.

39. *Laplaceův diferenciální operátor delta*

$$\nabla\times\nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta .$$

Funkce φ, jimiž je splněna *Laplaceova* diferenciální rovnice $\Delta\varphi = 0$, slují *harmonické* nebo *potenciální*.

40. $\nabla^2 u = \operatorname{div}\operatorname{grad}u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$.

41. $\Delta\boldsymbol{u} = (\Delta u_x)\boldsymbol{i} + (\Delta u_y)\boldsymbol{j} + (\Delta u_z)\boldsymbol{k}$.

42. $\nabla\wedge(\nabla u) = \operatorname{rot}\operatorname{grad}u = 0$.

43. $\nabla\times(\nabla\boldsymbol{u}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} = \Delta\boldsymbol{u} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$.

44. $\nabla\times(\nabla\wedge\boldsymbol{u}) = \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = 0$.

45. $\nabla\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{u}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} - \Delta\boldsymbol{u}$.

46. $\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v$.

47. $\Delta(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \Delta\boldsymbol{u} + \Delta\boldsymbol{v}$; $\Delta\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{grad}\Delta\varphi$; $\Delta\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = \operatorname{rot}\Delta\boldsymbol{u}$.

48. $\Delta\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}|} = 0$.

49. *Derivace vektoru* $\boldsymbol{V}(x,y,z,t)$ *podle času*, značí-li $\boldsymbol{v}$ rychlost:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\times\operatorname{grad})\boldsymbol{V} = \frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t} + \operatorname{grad}(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{v}) + (\operatorname{rot}\boldsymbol{v})\wedge\boldsymbol{v};$$

je-li $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}$, jest

50. $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\operatorname{grad}\boldsymbol{v}^2 + (\operatorname{rot}\boldsymbol{v})\wedge\boldsymbol{v}$.

Transformace diferenciálních výrazů. V orthogonální soustavě křivočarých souřadnic jdou jedním bodem tři k sobě kolmé průsečnice souřadnicových kolmosečných ploch. Jsou-li v tomto bodě $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ tři jednotkové vektory ve směrech průsečnic, u_1, u_2, u_3 průměty vektoru $\boldsymbol{u}$ do těchto směrů, jest

$$\boldsymbol{u} = u_1 \boldsymbol{i}_1 + u_2 \boldsymbol{i}_2 + u_3 \boldsymbol{i}_3 .$$

51. V souřadnicích cylindrických r, φ, z jest

$$x = r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi, \qquad z = z.$$

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r} \boldsymbol{i}_1 + \frac{\partial u}{r \partial \varphi} \boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \boldsymbol{i}_3 ;$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_3}{\partial z} ;$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_1 & r \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u_1 & r u_2 & u_3 \end{vmatrix} ;$$

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} .$$

52. V souřadnicích kulových r, φ, ϑ jest

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \qquad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \qquad z = r \cos \vartheta .$$

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r} \boldsymbol{i}_1 + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial u}{r \partial \vartheta} \boldsymbol{i}_3 ;$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_1) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \, u_3) ;$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_1 & r \sin \vartheta \boldsymbol{i}_2 & r \boldsymbol{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial \vartheta} \\ u_1 & r \sin \vartheta \, u_2 & r u_3 \end{vmatrix} ;$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) .$$

Knihovna

4. Počet integrální.

Křivkový integrál vektoru $\boldsymbol{u}(x, y, z)$ podél křivky s, kterou opisuje hrot vektoru od bodu 1 do 2. Píšeme-li element oblouku ve tvaru vektoru $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{t}^0 \mathrm{d}s$, kde $\boldsymbol{t}^0$ je jednotkový vektor směru tečny, je

$$1. \quad \int_s \boldsymbol{u} \times \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_s \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{t}^0 \, \mathrm{d}s = \int_s (u_x \, \mathrm{d}x + u_y \, \mathrm{d}y + u_z \, \mathrm{d}z)$$

křivkový integrál vektoru $\boldsymbol{u}$ podél oblouku s. Křivkový integrál je skalár; je-li křivka uzavřená, sluje *cirkulace* a značí se $\oint$.

Mechanická práce síly $\boldsymbol{u}$ na dráze s jest vyjádřena křivkovým integrálem.

Je-li rot $\boldsymbol{u} = 0$ (nevířivý vektor), jest cirkulace nula, t. j. součin $\boldsymbol{u} \times \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ jest úplným diferenciálem. Když rot $\boldsymbol{u} \neq 0$, závisí křivkový integrál na tvaru křivky.

Křivkový integrál gradientu skalární funkce u po oblouku $\overset{\frown}{12}$

$$2. \quad \int_1^2 \mathrm{grad}\, u \times \mathrm{d}\boldsymbol{s} = u_2 - u_1$$

je na integrační cestě nezávislý. Je-li cesta uzavřena, je cirkulace nula:

$$3. \quad \oint \mathrm{grad}\, u \times \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0.$$

Plošný integrál vektoru $\boldsymbol{u}(x, y, z)$ po ploše. Píšeme-li element plochy ve tvaru vektoru $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}^0 \mathrm{d}S$, kde $\boldsymbol{n}^0$ je jednotkový vektor směru vnější normály plochy, sluje

$$4. \quad \int_S \boldsymbol{u} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}^0 \, \mathrm{d}S = \iint_S (u_x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + u_y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + u_z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y)$$

plošný integrál vektoru nebo *tok vektorového pole* plochou S.

Transformace integrálů. *Věta Stokesova.* Budiž $\boldsymbol{u}$ vektorová funkce polohy, mající rotor; s uzavřená křivka, kterou je proložena část plochy S v sebe neuzavřená (diafragmatická); $\boldsymbol{n}^0$ jednotkový vektor normály plochy takového smyslu, že se strany, k níž normála směřuje, se jeví oběh křivky kladně, proti pohybu hodinových ručiček; pak

$$5. \quad \int_S \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_s \boldsymbol{u} \times \mathrm{d}\boldsymbol{s}; \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}^0 \mathrm{d}S; \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{t}^0 \mathrm{d}s;$$

t. j. plošný integrál složky rotoru, kolmé ku ploše, se rovná křivkovému integrálu složky vektoru, rovnoběžné s okrajem. Aneb: tok rotoru plochou se rovná cirkulaci vektorového pole po okraji.

Je-li S plocha uzavřená, je *plošný integrál*

6. $\oint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0.$

Věta Gaußova. Budiž V prostor, uzavřený plochou S; $\boldsymbol{n}^0$ jednotkový vektor vnější normály (směřující z uzavřeného prostoru ven); u skalární funkce polohy, v oborech V a S jednoznačná, s prvními derivacemi spojitá; $\boldsymbol{u}$ vektorová funkce, mající divergenci a rotor:

7. $\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{u} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S}; \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}^0\, \mathrm{d}S;$

t. j. prostorový integrál divergence vektoru rovná se plošnému integrálu kolmé složky vektoru.

8. $\int_V \operatorname{grad} u\, \mathrm{d}V = \oint_S u\, \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$ **9.** $\int_V \operatorname{rot} \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}V = -\oint_S \boldsymbol{u} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$

Věty Greenovy. Jsou-li u, v skalární funkce polohy, jest

10. $\int_V (\operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v)\, \mathrm{d}V + \int_V u \Delta v\, \mathrm{d}V = \int_S u \frac{\partial v}{\partial n}\, \mathrm{d}S.$

11. $\int_V (u \Delta v - v \Delta u)\, \mathrm{d}V = \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \mathrm{d}S.$

Je-li u funkce harmonická, vyhovující rovnici $\Delta u = 0$, jest

12. $\int_V (\nabla u)^2\, \mathrm{d}V = \int_S u \frac{\partial u}{\partial n}\, \mathrm{d}S,$ kde $(\nabla u)^2 = \nabla u \times \nabla u =$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

Je-li při zvoleném počátku uvnitř prostoru V funkce $v = \frac{1}{r}$, u funkce harmonická, u_0 její hodnota v počátku, pak

13. $\int_S \left(u \frac{\partial\, 1/r}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) \mathrm{d}S = 4\pi u_0.$

Gradient, divergence a rotor nezávisí na soustavě souřadnic a jako *prostorové derivace* jsou definovány výrazy:

14. $\operatorname{grad} u = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S u\, \mathrm{d}\boldsymbol{S};$ **15.** $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \boldsymbol{u} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S};$

16. $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \boldsymbol{u} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$

5. Vektorová pole.

Vektor $\boldsymbol{v}$, který v určité oblasti je funkcí polohy, tvoří vektorové pole. V proudovém poli má v každém bodě směr proudu a velikost rovnou množství, jež protéká jednotkou plochy, kolmé na jeho směr, za jednotku doby. Hrot vektoru opisuje křivku, jejíž tečny mají směr proudu (proudnice). V silovém poli představuje vektor sílu; vektorové čáry slují silokřivky.

1. Pole bez vírů č. potenciální: $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$. Křivkový integrál vektoru podél každé uzavřené křivky v nevířivém poli je nula. Gradienty skalární funkce $f(x, y, z)$ tvoří pole bez vírů; $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$.

Nevířivé silové pole možno vyjádřiti záporným gradientem skalární funkce; tato funkce slule *skalární potenciál* silového pole nebo funkce silová. Rovnice

$$\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} f; \quad f = \operatorname{pot} \boldsymbol{v}$$

mají, až na libovolnou součtovou konstantu v druhé, týž význam. Křivkový integrál podél křivky, spojující dva body potenciálního pole,

$$\int_1^2 \boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_1^2 \operatorname{grad} f \times \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_1^2 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s = f_1 - f_2$$

se rovná rozdílu jejich potenciálů a nezávisí na tvaru křivky; podél uzavřené křivky je nula.

Vektorové pole s jednoznačným skalárním potenciálem protíná ekvipotenciální plochy $f = \text{konst.}$ v pravém úhlu. Pole je *lamelární* (vrstvené); tloušťka vrstvy je nepřímo úměrna velikosti vektoru. V poli, které není bez vírů, existují plochy kolmé k vektorům jen tehdy, je-li splněna nutná podmínka

$$\boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0.$$

2. Zřídla. V místě, kde $\operatorname{div} \boldsymbol{v} \neq 0$, je zřídlo. Divergence je poměr přebytku vektorových čar — z prostorového elementu vystupujících a do něho vstupujících — k jeho objemu, tedy hustota či vydatnost zřídla; je-li kladná, vektorové čáry z něho vyvěrají a divergují; je-li záporná, sbíhají se v něm a tratí se (propad, nor). Podle rozložení jsou zřídla bodová, plošná a prostorová.

3. Pole bez zřídel č. solenoidální. V něm je všude $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$. Tok pole bez zřídel $\int \boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ plochou S s danou okrajovou křivkou je na tvaru plochy nezávislý; tok uzavřenou plochou je nula, stejné množství z plochy vystupuje jako do ní vstupuje.

Solenoidální vektor lze vyjádřiti jednak vektorovým součinem dvou gradientů

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} u \wedge \operatorname{grad} v,$$

jednak rotorem jiného vektoru

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}.$$

4. Pole vírů $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$ je bez zřídel; vektorové čáry slují vírnice.

Nevířivé pole je dáno vydatností zřídla, pole bez zřídel svým vírem. Libovolné vektorové pole určují s jistými předpoklady o spojitosti jednoznačně jeho zřídla a víry.

6. Tensory.

1. *Obecný dyadický součin* dvou vektorů

$$\boldsymbol{ab} = (\boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z)(\boldsymbol{b}_x + \boldsymbol{b}_y + \boldsymbol{b}_z)$$

je součet součinů jejich složek

$$\boldsymbol{ab} = \left\{ \begin{array}{l} a_x b_x \cdot \boldsymbol{ii} + a_x b_y \cdot \boldsymbol{ij} + a_x b_z \cdot \boldsymbol{ik} + \\ + a_y b_x \cdot \boldsymbol{ji} + a_y b_y \cdot \boldsymbol{jj} + a_y b_z \cdot \boldsymbol{jk} + \\ + a_z b_x \cdot \boldsymbol{ki} + a_z b_y \cdot \boldsymbol{kj} + a_z b_z \cdot \boldsymbol{kk}; \end{array} \right.$$

obsahuje 9 součinů jednotkových vektorů, o jejichž významu možno rozhodnouti; pro součiny skalární platí vzorce **20., 21., 22.** na str. 193, pro součiny vektorové vzorce **30., 31., 32.** na str. 194.

2. *Tensor (dyada, affinor)* je veličina určená devíti čísly. Tensor A je dán přiřaděním vektoru $\boldsymbol{a}_\nu$ směru ν v prostoru podle lineárního homogenního zákona

$$\boldsymbol{a}_\nu = \boldsymbol{a}_x \cos(\nu\,\mathbf{x}) + \boldsymbol{a}_y \cos(\nu\,\mathbf{y}) + \boldsymbol{a}_z \cos(\nu\,\mathbf{z}). \qquad (1)$$

Vektorové složky tensoru A, t. j. koeficienty $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$, $\boldsymbol{a}_z$, jsou hodnoty $\boldsymbol{a}_\nu$ pro směry $\nu = \mathbf{x}$, $\nu = \mathbf{y}$, $\nu = \mathbf{z}$, zapadající do os zvolené soustavy.

Rovnice (1), obsahující lineární funkci tří vektorů, je rovnocenná s třemi rovnicemi skalárních složek:

$$\begin{aligned} a_{\nu x} &= a_{xx}\cos(\nu\,\mathbf{x}) + a_{yx}\cos(\nu\,\mathbf{y}) + a_{zx}\cos(\nu\,\mathbf{z}), \\ a_{\nu y} &= a_{xy}\cos(\nu\,\mathbf{x}) + a_{yy}\cos(\nu\,\mathbf{y}) + a_{zy}\cos(\nu\,\mathbf{z}), \\ a_{\nu z} &= a_{xz}\cos(\nu\,\mathbf{x}) + a_{yz}\cos(\nu\,\mathbf{y}) + a_{zx}\cos(\nu\,\mathbf{z}), \end{aligned} \qquad (2)$$

jež definují vektory $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$, $\boldsymbol{a}_z$.

3. *Matice tensoru* je složena z koeficientů rovnic (2) s řádky vyměněnými za sloupce. Píšeme-li v indexech místo písmen x, y, z čísla 1, 2, 3, je tensor určen svou maticí

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (a_{ik}).$$

Symetrický tensor má koeficienty $a_{ik} = a_{ki}$ a 6 složek. *Antisymetrický tensor* má koeficienty $a_{ik} = -a_{ki}$, $a_{ii} = 0$ a 3 složky. Každý tensor možno rozložiti ve dva: symetrický a antisymetrický.

Vektorový součin je antisymetrický tensor se třemi složkami (na př. rotor).

4. *Součet dvou tensorů:*

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix} = B + A .$$

5. *Násobek tensoru:*

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

6. *Součin tensoru A s vektorem* $\boldsymbol{v}$*:*

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a_{11} v_1 & a_{12} v_2 & a_{13} v_3 \\ a_{21} v_1 & a_{22} v_2 & a_{23} v_3 \\ a_{31} v_1 & a_{32} v_2 & a_{33} v_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{w} .$$

Matice tensoru A značí tu lineární transformaci, kterou vektor $\boldsymbol{v}$ přejde na vektor $\boldsymbol{w}$.

7. $A(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{v}; \qquad (A + B)\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{u} + B\boldsymbol{u}; \qquad A(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda (A\boldsymbol{u}).$

8. *Geometrický obraz* symetrického tensoru. Ze šesti skalárů, určujících symetrický tensor, možno utvořiti kvadratickou formu

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2 a_{12} xy + 2 a_{13} xz + 2 a_{23} yz = \text{konst.},$$

která stanoví plochu 2. stupně (tensorový elipsoid); vhodnou orthogonální transformací se dá převést na tvar, v němž vymizí smíšené kvadratické členy (transformace k osám). Osy plochy jsou složky tensoru ve tvaru osovém.

K. Dusl: Úvod do vektorového počtu, 1923.
J. Klapka: Úvod do vektorového počtu a jeho užití v elektrotechnice, 1932.
C. Burali-Forti – R. Marcolongo: Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni 1909 (franc. 1910).
W. Gibbs-B. Wilson: Vectoranalysis (angl.), 3. vyd. 1916.
J. Spielrein: Lehrbuch der Vektorenrechnung, 2. vyd. 1927.
H. Schmidt: Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung, 1935.
E. Lohr: Vektor- und Dyadenrechnung für Physiker und Techniker, 1939.
M. Lagally: Vorlesungen über Vektorrechnung, 2. vyd. 1934.

XVI. Počet diferenční.

1. Diference.

1. V místech o stálé vzdálenosti Δx

$$\ldots x-2\Delta x, \quad x-\Delta x, \quad x, \quad x+\Delta x, \quad x+2\Delta x, \quad \ldots$$

má reálná, v uvažovaném oboru konečná funkce $y=f(x)$ hodnoty

$$\cdots y_{x-2\Delta x}, \quad y_{x-\Delta x}, \quad y_x, \quad y_{x+\Delta x}, \quad y_{x+2\Delta x}, \quad \cdots$$

Proměnná x (argument) je spojitá nebo přetržitá, na př. $x=0, 1, 2, \ldots$

Rozdíly dvou sousedních funkčních hodnot slují

1. diference $\Delta y_x = y_{x+\Delta x} - y_x$ čili $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$;

rozdíly prvních diferencí jsou

2. diference $\Delta^2 y_x = \Delta y_{x+\Delta x} - \Delta y_x$;

$$\vdots$$

rozdíly $(n-1)$-ních diferencí konečně jsou *n-té diference*

$$\Delta^n y_x = \Delta^{n-1} y_{x+\Delta x} - \Delta^{n-1} y_x.$$

2. Lineární transformací $u\Delta x = x - x_0$, kde x_0 je zvolené místo, přejde interval Δx na 1. V dalším klademe $\Delta x = 1$ a píšeme

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x, \qquad \text{symbolicky: } \Delta y_x = (e^D - 1)\, y_x;$$

$$\Delta^2 y_x = \Delta y_{x+1} - \Delta y_x, \qquad \text{,,} \qquad \Delta^2 y_x = (e^D - 1)^2 y_x;$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\Delta^n y_x = \Delta^{n-1} y_{x+1} - \Delta^{n-1} y_x, \qquad \text{,,} \qquad \Delta^n y_x = (e^D - 1)^n y_x.$$

V *Taylorově řadě* pro $y_{x+1} = f(x+1)$, psané s operátorem $D = \frac{d}{dx}$, je symbolicky

$$y_{x+1} = \left(1 + \frac{1}{1!} D + \frac{1}{2!} D^2 + \cdots\right) y_x = e^D y_x.$$

3. *Diference n-tá* čili diference *n-tého řádu*, vyjádřená hodnotami funkce:

$$\Delta^n y_x = y_{x+n} - \binom{n}{1} y_{x+n-1} + \binom{n}{2} y_{x+n-2} - \ldots + (-1)^n y_x.$$

4. *Hodnota funkce* v místě $x+n$, vyjádřená diferencemi:

$$y_{x+n} = y_x + \binom{n}{1} \Delta y_x + \binom{n}{2} \Delta^2 y_x + \ldots + \Delta^n y_x,$$

symbolicky $$y_{x+n} = (1+\Delta)^n y_x.$$

5. *Racionální funkce celistvá* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$:

$$f(x) = f(0) + \frac{\Delta f(0)}{1!} x + \frac{\Delta^2 f(0)}{2!} x(x-1) + \ldots$$

$$+ \frac{\Delta^n f(0)}{n!} x(x-1)\ldots(x-[n-1]).$$

a. Diferenční pravidla a vzorce.

$u = \bar{u}(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)\ldots$; $c = \text{konst}$; $\Delta x = 1$.

1. $\Delta(u+v+w+\ldots) = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \ldots$; $\quad \Delta c = 0$; $\quad \Delta(u+c) = \Delta u$.

2. $\Delta(cu) = c\,\Delta u$.

3. $\Delta(u \cdot v) = u\,\Delta v + v(x+1)\,\Delta u$; $\qquad v(x+1) = v_{x+1}$.

4. $\Delta \dfrac{u}{v} = \dfrac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{v \cdot v(x+1)}$.

5. $\Delta x^n = (x+1)^n - x^n = \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} x^{n-\nu}$ pro n celé kladné.

Je-li $y = f(x)$ funkce racionální celistvá n-tého stupně, jest n-tá diference stálá; další jsou nuly.

6. *Faktoriální funkce* spojitě proměnné x slují součiny n faktorů:

$$\overset{n}{F}(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-[n-1]);$$

$$\overset{n}{F}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+[n-1])}.$$

7. $\Delta \overset{n}{F}(x) = nx(x-1)(x-2)\ldots(x-[n-2]) = n\overset{n-1}{F}(x)$;

$\Delta^2 \overset{n}{F}(x) = n(n-1)\overset{n-2}{F}(x)$; $\ldots$ $\qquad \Delta^n \overset{n}{F}(x) = n!$

8. $\Delta \overset{n}{F}\left(\frac{1}{x}\right) = \dfrac{-n}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} = -\overset{n+1}{nF}\left(\frac{1}{x}\right)$.

9. $\Delta \binom{n}{x} = \binom{x}{n-1}$.

10. $\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = a^x(a-1)$;

$\Delta^2 a^x = a^x(a-1)^2$; $\quad \ldots \quad \ldots$; $\quad \Delta^n a^x = a^x(a-1)^n$.

Je-li obecněji $u = \varphi(x)$, jest

11. $\Delta a^u = a^{u+\Delta u} - a^u = a^u (a^{\Delta u} - 1)$.

12. $\Delta \sin u = \sin(u + \Delta u) - \sin u = \ldots = 2 \sin \frac{\Delta u}{2} \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)$.

13. $\Delta \cos u = \cos(u + \Delta u) - \cos u = \ldots = -2 \sin \frac{\Delta u}{2} \sin\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)$.

14. $\Delta \sinh u = 2 \sinh \frac{\Delta u}{2} \cosh\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)$.

15. $\Delta \cosh u = 2 \sinh \frac{\Delta u}{2} \sinh\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)$.

16. *Souvislost diference s derivací*:

$$\Delta^n f(x) = (\Delta x)^n f^{(n)}(\xi); \qquad x \leqq \xi \leqq x + n\Delta x,$$

kde totiž ξ jest číslo mezi x a $x + n\Delta x$.

b. Diference funkce dvou nezávisle proměnných.

Funkce $z = f(x, y)$ má v místech o stálé vzdálenosti $\Delta x = 1$, $\Delta y = 1$ hodnoty $z_{x+\mu, y+\nu}$. Rozdíl dvou sousedních hodnot ve směru **x** při stálém y, resp. ve směru **y** při stálém x, sluje částečná nebo parciální

1. diference podle x: $\Delta_x z_{x,y} = z_{x+1,y} - z_{x,y}$ při stálém y,

„ „ y: $\Delta_y z_{x,y} = z_{x,y+1} - z_{x,y}$ při stálém x.

Rozdíl prvních částečných diferencí je parciální

2. diference podle x: $\Delta_x^2 z_{x,y} = \Delta_x(\Delta_x z_{x,y}) = \Delta_x z_{x+1,y} - \Delta_x z_{x,y}$,

„ „ y: $\Delta_y^2 z_{x,y} = \Delta_y(\Delta_y z_{x,y}) = \Delta_y z_{x,y+1} - \Delta_y z_{x,y}$;

2. diference podle x a y má hodnotu *2. diference podle* y a x:

$$\Delta_{yx}^2 z_{x,y} = \Delta_y(\Delta_x z_{x,y}) = \Delta_{xy}^2 z_{x,y} = \Delta_x(\Delta_y z_{x,y}).$$

2. Sumy.

1. *Neomezená* čili *neurčitá suma*. Z daného diferenčního podílu

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = y_x \quad \text{nebo} \quad \Delta F(x) = y_x \Delta x$$

se má určiti $F(x)$. Podmínce $F(x + \Delta x) - F(x) = y_x \Delta x$ vyhovují

$$F(x) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} (y_{x+\nu\Delta x} \Delta x + c_\nu); \qquad F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (y_{x-\nu\Delta x} \Delta x + c_\nu);$$

$(\Sigma c_\nu = \text{konst.})$.

Konverguje-li alespoň jedna z těchto řad, je funkce y_x sčitatelná; hledaná funkce $F(x)$ sluje *suma* y a značí se

$$F(x) = \S y_x \Delta x + \omega(x).$$

Připojená *periodická konstanta* $\omega(x) = \omega(x + \Delta x)$ se v diferenci ruší. Je-li y_x definováno jen v osamocených (diskretních) místech, jako na př. $-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, má $\omega(x)$ v celém oboru tutéž hodnotu C.

2. Při $\Delta x = 1$ jest *neomezená (neurčitá) suma*

$$\S y_x \Delta x = y_{x-1} + y_{x-2} + \ldots + y_k + \ldots + C \qquad x > k,$$

$$\S y_x \Delta x = -[y_x + y_{x+1} + \ldots + y_k + \ldots + C] \qquad x \leqq k.$$

Sumace jest úkon jednak inversní k diferenčnímu, jednak skutečný součet za sebou jdoucích funkčních hodnot. Sumace a diference provedeny za sebou se ruší.

Suma $\S$ je symbolicky vyjádřena diferencí řádu $n = -1$:

$$\S y_x \Delta x = \Delta^{-1} y_x = (e^D - 1)^{-1} y_x.$$

3. *Omezená* čili *určitá suma* v mezích od $x = a$ do $x = a + n$ je rozdíl hodnot $F(x)$ na horní a dolní mezi

$$\sum_a^{a+n} y_x \Delta x = F(a+n) - F(a) = y_a + y_{a+1} + \ldots + y_{a+n-1}.$$

Konstanta odpadá; poslední člen řady má index $a + n - 1$.

Sumační pravidla a vzorce.

Obrácením vzorců diferenčních plynou vzorce sumační.

Libovolná konstanta $\omega(x)$ jest v dalším vynechána.

1. $\S \Delta f(x) \Delta x = f(x)$. **2.** $\Delta \S f(x) \Delta x = f(x)$.

3. $\S(u + v + w + \ldots)\Delta x = \S u \Delta x + \S v \Delta x + \S w \Delta x + \ldots,$

kde $u = u(x),\ v = v(x),\ w = w(x), \ldots$

4. $\S \omega(x) y_x \Delta x = \omega(x) \S y_x \Delta x$, kde $\omega(x) = \omega(x+1)$.

5. $\S u \Delta v \Delta x = uv - \S v(x+1) \Delta u \Delta x$.

6. $\S c \Delta x = cx$.

7. $\S x(x-1)\ldots(x-[n-2])\Delta x = \frac{1}{n} x(x-1)\ldots(x-[n-1])$.

8. $\S \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} \Delta x = -\frac{1}{n} \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}$

platí pro $n > 0$; x může býti kladné či záporné, vyjma nulu a záporná čísla celá $\leqq n$.

9. $\S \binom{x}{n} \Delta x = \binom{x}{n+1}$. **10.** $\S a^x \Delta x = \frac{a^x}{a-1}$, $a \neq 1$.

11. $\S \sin(\alpha x + \beta) \Delta x = -\cos\left[\alpha\left(x - \frac{1}{2}\right) + \beta\right] : 2 \sin\frac{\alpha}{2}$.

12. $\S \cos(\alpha x + \beta) \Delta x = \sin\left[\alpha\left(x - \frac{1}{2}\right) + \beta\right] : 2 \sin\frac{\alpha}{2}$.

13. $\S \sinh(\alpha x + \beta) \Delta x = \cosh\left[\alpha\left(x - \frac{1}{2}\right) + \beta\right] : 2 \sinh\frac{\alpha}{2}$.

14. $\S \cosh(\alpha x + \beta) \Delta x = \sinh\left[\alpha\left(x - \frac{1}{2}\right) + \beta\right] : 2 \sinh\frac{\alpha}{2}$.

15. *Eulerův součtový vzorec* vyjadřuje součet integrálem nebo naopak integrál součtem za předpokladu že sečítaná (integrovaná) funkce $f(x)$ a její derivace jsou spojité. Zde jest:

$$h = \frac{b-a}{n}; \quad x_\nu = a + \nu h; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots n; \quad x_0 = a, x_n = b.$$

$$\sum_a^b f(x) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$+ B_2 \frac{h}{2!}[f'(b) - f'(a)] + B_4 \frac{h^3}{4!}[f'''(b) - f'''(a)] + \ldots +$$

$$+ B_{2k-2} \frac{h^{2k-3}}{(2k-2)!}[f^{(2k-3)}(b) - f^{(2k-3)}(a)] + R;$$

zbytek $R = B_{2k} n \frac{h^{2k}}{(2k)!} f^{(2k)}(\xi)$; $\xi = a + \vartheta(b-a)$, $0 < \vartheta < 1$.

Bernoulliova čísla (str. 84) s lichým indexem jsou nuly, vyjma $B_1 = -\frac{1}{2}$; se sudým indexem:

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66},$$

$$B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}, \ldots$$

Součty mocnin čísel přirozené řady:

16. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$.

17. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

18. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$.

19. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

20. $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = \dfrac{(n-B)^{k+1} - B_{k+1}}{k+1}$

pro $k = 1, 2, 3 \ldots$; v rozvoji podle binomické věty na pravé straně se nahradí B^ν číslem B_ν.

21. $1 + \dfrac{1}{2^{2k}} + \dfrac{1}{3^{2k}} + \dfrac{1}{4^{2k}} + \ldots = (-1)^{k-1} \dfrac{B_{2k}}{2.(2k)!} (2\pi)^{2k} \; (= s_{2k})$

pro $k = 1, 2, 3, \ldots$ Na př. $s_2 = \dfrac{\pi^2}{6}$; $s_4 = \dfrac{\pi^4}{90}$; $s_6 = \dfrac{\pi^6}{945}$; ...

22. Z řady $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^2} + \ldots = \dfrac{\pi^2}{6}$

plyne odečtením členů sudých řada

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

G. Boole: A treatise on the calculus of finite differences, 3. v. 1880 (něm. překl. 1867).
A. Markov: Isčislenije kaněčnych raznostěj, 2. vyd. 1911 (překl. Differenzenrechnung, 1896).
D. Selivanov: Základy počtu diferenčního, 1930 (dříve Lehrbuch der Differenzenrechnung, 1904).
A. Henry: Le calcul des differences finies et ses applications (z angl.), 1932.
L. Milne-Thomson: The calculus of finite differences, 1933.
N. Nörlund: Vorlesungen über Differenzenrechnung, 1924.

3. Interpolace.

Úkolem interpolace jest určiti racionální celistvou funkci nejvýše n-tého stupně, která na daných místech $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ má dané hodnoty $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

a. Různé intervaly.

1. *Vzorec Lagrangeův*

$$y = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)} +$$
$$+ \ldots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

2. *Vzorec Newtonův* s dělenými diferencemi

$$y = y_0 + (x-x_0)\delta_1 + (x-x_0)(x-x_1)\delta_2^2 + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\delta_3^3 +$$
$$+ \ldots + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\delta_n^n.$$

Dělené diference čili *spády:*

$\delta_\nu = \dfrac{y_\nu - y_0}{x_\nu - x_0}$; $\delta_\nu^2 = \dfrac{\delta_\nu - \delta_1}{x_\nu - x_1}$; $\delta_\nu^3 = \dfrac{\delta_\nu^2 - \delta_2^2}{x_\nu - x_2}$; ...

$\nu = 1, 2, \ldots$ $\nu = 2, 3, \ldots$ $\nu = 3, 4, \ldots$

Schema pro výpočet dělených diferencí.

x_0	y_0									
x_1	y_1	$x_1 - x_0$	$y_1 - y_0$	δ_1						
x_2	y_2	$x_2 - x_0$	$y_2 - y_0$	δ_2	$x_2 - x_1$	$\delta_2 - \delta_1$	δ_2^2			
x_3	y_3	$x_3 - x_0$	$y_3 - y_0$	δ_3	$x_3 - x_1$	$\delta_3 - \delta_1$	δ_3^2	$x_3 - x_2$	$\delta_3^2 - \delta_2^2$	δ_3^3
x_4	y_4	$x_4 - x_0$	$y_4 - y_0$	δ_4	$x_4 - x_1$	$\delta_4 - \delta_1$	δ_4^2	$x_4 - x_2$	$\delta_4^2 - \delta_2^2$	δ_4^3 ...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Je-li $f(x)$ racionální celistvá funkce n-tého stupně, jest n-tá dělená diference stálá a je koeficientem členu n-tého stupně. Vzorec *Neut nův* jest pro numerický výpočet výhodnější než *Lagrangeův*, neboť s každou další dělenou diferencí dostaneme nový člen vyššího stupně.

b. Stejné intervaly.

Funkce $y = f(x)$ má v místech $x_\nu = x_0 + \nu \Delta x$ se stálým intervalem argumentu $\Delta x = x_{\nu+1} - x_\nu = h$ hodnoty $y_\nu = f(x_\nu)$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

Diference značí se stručně:

$$\Delta_\nu = y_{\nu+1} - y_\nu; \qquad \Delta_\nu^2 = \Delta_{\nu+1} - \Delta_\nu; \qquad \ldots \Delta_\nu^k = \Delta_{\nu+1}^{k-1} - \Delta_\nu^{k-1}; \ldots$$

Schema pro výpočet diferencí.

...	...	...					
x_{-3}	y_{-3}	Δ_{-3}	...				
x_{-2}	y_{-2}	Δ_{-2}	Δ_{-3}^2	...			
x_{-1}	y_{-1}	Δ_{-1}	Δ_{-2}^2	Δ_{-3}^3	...		
x_0	y_0	Δ_0	Δ_{-1}^2	Δ_{-2}^3	Δ_{-3}^4	...	
x_1	y_1	Δ_1	Δ_0^2	Δ_{-1}^3	Δ_{-2}^4	Δ_{-3}^5	...
x_2	y_2	Δ_2	Δ_1^2	Δ_0^3	Δ_{-1}^4	Δ_{-2}^5	Δ_{-3}^6
x_3	y_3	...	...	...	...	...	...
...	...						

Kontrola: $\sum_{\nu=m}^{n} \Delta_\nu^k = \Delta_{n+1}^{k-1} - \Delta_m^{k-1}; \qquad n > m.$

Součet diferencí ve sloupci rovná se rozdílu krajních hodnot sousedního sloupce vlevo.

Je-li $f(x)$ racionální celistvá funkce n-tého stupně, jest n-tá diference stálá a další jsou nuly.

Interpolace tabulek.

3. *Vzorec Newtonův*, vhodný *pro začátek* tabulky:

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1!}\frac{\Delta_0}{h} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!}\frac{\Delta_0^2}{h^2} + \ldots + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{n!}\frac{\Delta_0^n}{h^n}.$$

4. Substitucí $x - x_0 = uh$, $f(x) = f(x_0 + uh)$ přejde na tvar

$$y = y_0 + \binom{u}{1}\Delta_0 + \binom{u}{2}\Delta_0^2 + \binom{u}{3}\Delta_0^3 + \ldots + \binom{u}{n}\Delta_0^n.$$

Se vzestupnými diferencemi je *pro konec* tabulky vhodný vzorec

$$y = y_0 + \binom{u}{1}\Delta_{-1} + \binom{u+1}{2}\Delta_{-2}^2 + \binom{u+2}{3}\Delta_{-3}^3 + \ldots + \binom{u+n-1}{n}\Delta_{-n}^n.$$

5. *Vzorec Stirlingův*, vhodný *pro okolí* hodnoty x_0 ($-0{,}5 \leqq u \leqq +0{,}5$):

$$y = y_0 + u\cdot\frac{\Delta_{-1} + \Delta_0}{2} + \frac{u^2}{2!}\cdot\Delta_{-1}^2 + \frac{u(u-1)(u+1)}{3!}\cdot\frac{\Delta_{-2}^3 + \Delta_{-1}^3}{2} + \frac{u^2(u-1)(u+1)}{4!}\cdot\Delta_{-2}^4 + \frac{u(u-1)(u+1)(u-2)(u+2)}{5!}\cdot\frac{\Delta_{-3}^5 + \Delta_{-2}^5}{2} + \ldots$$

6. *Vzorec Besselův*, vhodný *pro interval od* x_0 *do* $x_0 + h$ ($0 \leqq u \leqq 1$)

$$y = y_0 + u\cdot\Delta_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\cdot\frac{\Delta_{-1}^2 + \Delta_0^2}{2} + \frac{u(u-1)(u-0{,}5)}{3!}\cdot\Delta_{-1}^3 + \frac{u(u-1)(u+1)(u-2)}{4!}\cdot\frac{\Delta_{-2}^4 + \Delta_{-1}^4}{2} + \frac{u(u-1)(u+1)(u-2)(u-0{,}5)}{5!}\cdot\Delta_{-2}^5 + \ldots$$

Vzorce platí přesně pro funkci racionální celistvou, jinak jen přibližně.

(Pro koeficienty vzorců **5.** a **6.** *viz Matematické a statické tabulky. Díl I, str. 57.*)

Interpolace funkce dvou proměnných.

V místech pravoúhlé sítě

$x_\mu = x_0 + \mu \Delta x$, kde $\mu = 0, 1, 2, \ldots$; $y_\nu = y_0 + \nu \Delta y$, kde $\nu = 0, 1, 2, \ldots$,

se stálými intervaly $\Delta x = h$, $\Delta y = k$ jsou dány hodnoty funkce

$$z_{\mu,\nu} = f(x_\mu, y_\nu).$$

Má se určiti celistvá funkce, která v síťových bodech má dané hodnoty. Substitucí $x - x_0 = uh$; $y - y_0 = vk$ přejdou intervaly na 1;

$$z = f(x_0 + uh, y_0 + vk); \qquad z_0 = f(x_0, y_0).$$

Vzorec Newtonův:

$$z = z_0 + u \Delta_x z_0 + v \Delta_y z_0 +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[u(u-1)\Delta_x^2 z_0 + 2uv\Delta_{xy}^2 z_0 + v(v-1)\Delta_y^2 z_0\right] + \ldots$$

4. Numerická derivace a integrace.

Derivace funkce $f(x)$, dané pro $x_\nu = x_0 + \nu h$ tabulkou hodnot y_ν. V místě x_0 jest

1. $$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\frac{\Delta_0 + \Delta_{-1}}{2} - \frac{1}{6}\frac{\Delta_{-1}^3 + \Delta_{-2}^3}{2} + \frac{1}{30}\frac{\Delta_{-2}^5 + \Delta_{-3}^5}{2} - \ldots\right).$$

2. $$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta_{-1}^2 - \frac{1}{12}\Delta_{-2}^4 + \frac{1}{90}\Delta_{-3}^6 - \ldots\right).$$

Nahrazuje-li polynom uspokojivě funkci, nemusí jeho derivace býti dobrou náhražkou derivace funkce.

Integrál funkce $f(x)$, dané pro $x_\nu = x_0 + \nu h$ tabulkou hodnot y_ν. Tabulku pro integrál vypočteme s počáteční známou hodnotou $J(x_0)$

$$J(x) = J(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

postupně: $J(x_1)$, $J(x_2)$, $J(x_3)\ldots$ Na začátku podle vzorce

3. $$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx = h\left(y_0 + \frac{1}{2}\Delta_0 - \frac{1}{12}\Delta_0^2 + \frac{1}{24}\Delta_0^3 - \frac{19}{720}\Delta_0^4 + \ldots\right)$$

a dále podle vzorce *Besselova*

$$4.\quad \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx = h\left(y_0 + \frac{1}{2}\Delta_0 - \frac{1}{12}\frac{\Delta_0^2+\Delta_{-1}^2}{2} + \frac{11}{720}\frac{\Delta_{-1}^4+\Delta_{-2}^4}{2} - \dots\right)$$

nebo podle vzorce *Stirlingova* ze středu intervalu

$$5.\quad \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx = 2h\left(y_0 + \frac{1}{6}\Delta_{-1}^2 - \frac{1}{180}\Delta_{-2}^4 + \frac{1}{1512}\Delta_{-3}^6 - \dots\right).$$

H. Rice: The theory and practice of interpolation, 1899.
J. Steffensen: Interpolation (angl.), 1927.
L. Schrutka: Leitfaden der Interpolation, 1941.
V. Láska – V. Hruška: Teorie a prakse numerického počítání, 1934.
C. Runge – H. König: Vorlesungen über numerisches Rechnen, 1924.
J. Scarborough: Numerical mathematical analysis, 1930.

5. Rovnice diferenční.

Diferenční rovnice vyjadřují původně vztah mezi nezávisle proměnnou x, neznámou funkcí $y_x = f(x)$ a jejími diferencemi

$$\Phi(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \dots, \Delta^n y_x) = 0.$$

Podle vzorců, obsažených v obecném vzorci

$$\Delta^n y_x = y_{x+n} - \binom{n}{1} y_{x+n-1} + \binom{n}{2} y_{x+n-2} - \dots + (-1)^n y_x,$$

převedeme předcházející rovnici vždy na *normální tvar*

$$\Psi(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \dots, y_{x+n}) = 0;$$

hodnoty funkce $y_x, y_{x+1}, \dots y_{x+n}$ jsou v místech $x, x+1, \dots x+n$; $(\Delta x = 1)$. Řád diferenční rovnice je pak dán rozdílem nejvyššího a nejnižšího indexu u funkce. Úkolem je stanoviti y_x jako funkci proměnné x.

Theorie diferenčních rovnic je obdobná theorii rovnic diferenciálních.

1. Lineární diferenční rovnice jsou lineární v $y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+n}$ tvaru

$$p_x^{(0)} y_x + p_x^{(1)} y_{x+1} + \dots + p_x^{(n)} y_{x+n} = U_x;$$

koeficienty p_x a člen U_x jsou obecně funkce x nebo konstanty. Tyto rovnice jsou n-tého řádu, obsahují-li aspoň členy s y_x a y_{x+n}. Funkce $\eta = f(x)$, která dané diferenční rovnici identicky (t. j. pro každé x) vyhovuje, je její *partikulární řešení*. Je-li $U_x = 0$, sluje

$$p_x^{(0)} y_x + p_x^{(1)} y_{x+1} + \dots + p_x^{(n)} y_{x+n} = 0,$$

rovnice homogenní.

O homogenních rovnicích platí věty:

a) Je-li η_x partikulární řešení homogenní lineární diferenční rovnice, jest také $C\eta_x$ jejím řešením.

b) Značí-li $\omega(x)$ libovolnou periodickou funkci s periodou 1

$$\omega(x) = \omega(x+1) = \omega(x+2) = \ldots = \omega(x+n),$$

je také $\omega(x)\,\eta_x$ řešením dané homogenní rovnice. Ve zvláštních případech přejde faktor $\omega(x)$ na konstantu.

c) Obecné řešení homogenní lineární diferenční rovnice n-tého řádu je složeno z n partikulárních řešení

$$y_x = C_1\eta_x^{(1)} + C_2\eta_x^{(2)} + \ldots + C_n\eta_x^{(n)}$$

a obsahuje n libovolných konstant.

2. Lineární rovnice n-tého řádu homogenní s konstantními koeficienty.

Rovnice ty mají tvar:

$$a_0 y_{x+n} + a_1 y_{x+n-1} + \ldots + a_{n-1} y_{x+1} + a_n y_x = 0.$$

Jejich t. zv. *charakteristická rovnice* zní:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

a) Jsou-li kořeny této charakteristické rovnice $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ vesměs různé, má rovnice n partikulárních řešení $y_x = \lambda_\nu^x$. Obecné řešení

$$y_x = C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x + \ldots + C_n\lambda_n^x.$$

b) Při k-násobném kořenu $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k$ jest obecné řešení

$$y_x = (C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1})\,\lambda_k^x + C_{k+1}\lambda_{k+1}^x + \ldots + C_n\lambda_n^x.$$

c) Má-li charakteristická rovnice dva komplexní sdružené kořeny, jest

$$\lambda_{1,2} = a \pm ib = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi); \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}; \qquad r = \left|\sqrt{a^2+b^2}\right|;$$

$$y_x = Ar^x\cos\varphi x + Br^x\sin\varphi x + C_3\lambda_3^x + \ldots + C_n\lambda_n^x.$$

d) Opakují-li se komplexní sdružené kořeny, jest obecné řešení

$$y_x = (A_1 + A_2 x + \ldots)\,r^x\cos\varphi x + (B_1 + B_2 x + \ldots)\,r^x\sin\varphi x + \ldots$$

Obecné řešení obsahuje n libovolných konstant. Je-li dáno n hodnot hledané funkce pro určité hodnoty nezávisle proměnné, vypočteme konstanty ze soustavy n lineárních rovnic, plynoucích dosazením oněch dvojic do obecného řešení.

Příklad. Rovnice $y_{x+2} + 2a\,y_{x+1} + b\,y_x = 0$

má charakteristickou rovnici $\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$.

a) Při $a^2 > b$ jsou kořeny reálné různé

$$\lambda_1 = -a + \sqrt{a^2 - b}; \qquad \lambda = -a - \sqrt{a^2 - b}.$$

Obecné řešení $$y_x = C_1 \lambda_1^x + C_2 \lambda_2^x$$

převedeme na jiný tvar substitucí $\lambda_1 = r\,e^{\varphi}$, $\lambda_2 = r\,e^{-\varphi}$:

$$\lambda_1 \lambda_2 = b, \qquad \lambda_1 \lambda_2 = r^2 e^0, \qquad r = \sqrt{b};$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2a, \qquad \lambda_2 + \lambda_2 = r(e^{\varphi} + e^{-\varphi}) = 2r \cosh \varphi, \qquad \cosh \varphi = \frac{-a}{\sqrt{b}}.$$

Znaménko odmocniny zvolíme tak, aby výraz $\frac{-a}{\sqrt{b}}$ byl kladný, neboť hyperbolický kosinus má hodnoty jen kladné. Obecné řešení

$$y_x = r^x (C_1 e^{\varphi x} + C_2 e^{-\varphi x})$$

aneb, klademe-li libovolné konstanty $C_1 = \frac{A+B}{2}$, $C_2 = \frac{A-B}{2}$,

$$y_x = (\sqrt{b})^x (A \cosh \varphi x + B \sinh \varphi x).$$

b) Při $a^2 = b$ má charakteristická rovnice dvojnásobný kořen $\lambda_1 = \lambda_2 = -a$. Obecné řešení

$$y_x = (-a)^x (C_1 + C_2 x).$$

c) Při $a^2 < b$ jsou kořeny komplexní sdružené $\lambda_{1,2} = -a \pm i\sqrt{b - a^2}$. Klademe

$$\lambda_{1,2} = r(\cos \varphi \pm i \sin \varphi); \qquad r = |\sqrt{b}|; \qquad \cos \varphi = \frac{-a}{r} = \frac{-a}{|\sqrt{b}|};$$

$$y_x = C_1 r^x (\cos \varphi x + i \sin \varphi x) + C_2 r^x (\cos \varphi x - i \sin \varphi x),$$

$$y_x = |\sqrt{b}|^x (A \cos \varphi x + B \sin \varphi x).$$

3. Lineární rovnice n-tého řádu nehomogenní s konst. koeficienty

$$a_0 y_{x+n} + a_1 y_{x+n-1} + \ldots + a_n y_x = U_x$$

se řeší obdobným způsobem jako diferenciální rovnice téhož druhu. Obecné řešení dostaneme, jestliže k řešení příslušné rovnice homogenní (bez členu U_x) připojíme partikulární řešení rovnice dané.

Je-li U_x tvaru $r^x g_x$, kde g_x je racionální celistvá funkce m-tého stupně, je *partikulární řešení* úplné rovnice $\eta_x = r^x u_x$, kde u_x je racionální funkce téhož stupně. Kdyby však r bylo k-násobným kořenem charakteristické rovnice, jest η_x stupně $(m+k)$-tého. Má-li pravá strana úplné rovnice některý z tvarů

$$g_x \sin kx, \quad g_x \cos kx; \qquad g_x \sinh kx, \quad g_x \cosh kx,$$

kde g_x je racionální celistvá funkce stupně m-tého, jest η_x tvaru

$$u_x \sin kx + v_x \cos kx; \qquad u_x \sinh kx + v_x \cosh kx,$$

při čemž

$$u_x = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_m x^m, \qquad v_x = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_m x^m.$$

Dosazením do dané rovnice a přirovnáním součinitelů dostaneme soustavu $2(m+1)$ rovnic, z nichž plynou koeficienty α_k, β_k.

Obecně vede k cíli *Lagrangeova methoda variace konstant.*

G. Wallenberg - A. Guldberg: Theorie der linearen Differenzengleichungen, 1911.
P. Batchelder: An introduction to linear difference equations, 1927.
F. Bleich–E. Melan: Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik, 1927.

XVII. Počet pravděpodobnosti.

Počet pravděpodobnosti hodnotí číselně očekávání, že ze souboru (kolektiva) stejnorodých, stejně možných (zaměnitelných) a na sobě nezávislých případů (znaků) jeden nebo určitá skupina z nich *zcela náhodně* (t. j. z neznámých a nezjistitelných příčin) se objeví.

Pravděpodobnost zjevu Z, že v s pokusech nastane m případů příznivých (žádoucích), je dána zlomkem

$$p = \frac{\text{počet případů příznivých}}{\text{počet případů všech možných}} = \frac{m}{s}.$$

Číslo $p = 1$ značí jistotu, $p = 0$ nemožnost uskutečnění zjevu Z.

Opačná pravděpodobnost, že nenastane Z, čili že nastane opačný (kontrární) zjev Z', je

$$q = 1 - p \qquad \text{(neboť } p + q = 1\text{)}.$$

Číslo $p = \frac{1}{2} = q$ vyjadřuje nejistotu: oba zjevy Z i Z' jsou stejně pravděpodobné.

1. Pravděpodobnost „a priori".

Počet všech případů příznivých m a možných s je *předem* znám.

Schematicky se znázorňuje tahy koule určité barvy ze skupiny různobarevných koulí v jednom nebo několika osudích, kde jsou ve známém poměru smíšeny.

1. *Pravděpodobnost absolutní.* Uskutečnění zjevu není závislé na nějakých zvláštních podmínkách:

$$p = m : s.$$

2. *Pravděpodobnost relativní*, že z několika se vylučujících zjevů $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ s pravděpodobnostmi $p_1, p_2, \ldots, p_n$ jeden Z_k *spíše* nastane než ostatní:

$$P_k = \frac{p_k}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}.$$

3. *Pravděpodobnost úhrnná* čili *totální*, že ze vzájemně se vylučujících zjevů nastane *buď* Z_1 *nebo* $Z_2 \ldots$ *anebo* Z_n, je dána *součtem*

$$P = p_1 + p_2 + \ldots + p_n.$$

4. *Pravděpodobnost složená*, že zjevy $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ nastanou současně nebo po sobě: *jak* Z_1, *tak* Z_2, ..., *tak* Z_n, je dána *součinem*

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n.$$

Pravděpodobnost, že zjev Z s jednoduchou pravděpodobností p *se bude opakovati* n-krát:

$$P = p^n.$$

5. Pravděpodobnost, že v $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_i$ pokusech se objeví n_1-krát zjev Z_1 pravděpodobnosti p_1, n_2-krát Z_2 pravděpodobnosti p_2 atd., n_i-krát Z_i pravděpodobnosti p_i v libovolném pořadí:

$$P = \frac{N!}{n_1! n_2! \ldots n_i!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_i^{n_i};$$

t. zv. *Newtonův vzorec*, aplikovaný ve fysikální statistice.

6. Pravděpodobnost, že ze dvou *se vylučujících* zjevů Z, Z_1 s pravděpodobnostmi p, $q = 1 - p$ v řadě $s = m + n$ pokusů nastane m-krát Z, $n = (s - m)$-krát Z', vyjadřuje obecný člen binomické věty

$$P = \frac{s!}{m!\, n!} p^m q^n.$$

7. *Bernoulliho theorém.* Dva opačné zjevy Z, Z' mají v řadě $s = m + n$ pokusů známé *stálé* pravděpodobnosti p, $q = 1 - p$.

Pravděpodobnost, že při velikém s zůstane počet případů m v mezích $sp \pm s\delta$, relativní četnost $m:s$ v mezích $p \pm \delta$, kde δ značí libovolně malé kladné číslo, je přibližně

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt = \Phi(\gamma); \qquad \gamma = \delta \sqrt{\frac{s}{2pq}}.$$

Zvětšováním počtu pokusů s blíží se P jedné. Vzorce nelze použíti, je-li součin $spq < 20$.

8. *Poissonův theorém.* Pravděpodobnost zjevu Z je v řadě s pokusů *proměnlivá*, nabývajíc hodnot $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Označíme-li *střední pravděpodobnosti*

$$\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_s}{s} = p, \qquad \frac{q_1 + q_2 + \ldots + q_s}{s} = q,$$

je pravděpodobnost, že při velkém s zůstane počet případů m v mezích $sp \pm s\delta$, relativní četnost $m:s$ v mezích $p \pm \delta$, kde δ značí libovolně malé kladné číslo, jako v předcházejícím

$$P = \Phi(\gamma); \qquad \gamma = \delta \sqrt{\frac{s}{2pq}}.$$

9. *Zákon velkých čísel.* Relativní četnost zjevu se blíží s rostoucím bez omezení počtem pokusů jeho pravděpodobnosti:

$$\lim_{s \to \infty} \frac{m}{s} = p.$$

Statistické relativní četnosti $m:s$ jsou při stálých nebo málo se měnících podmínkách dění a dostatečně velikém s *stabilní*.

10. *Pravděpodobnost řídkých zjevů.* Pravděpodobnost, že ve velkém počtu s pozorování se objeví n-krát zjev, jehož pravděpodobnost p je velmi malá, vyjadřuje *Poissonův vzorec*

$$P = \frac{(sp)^n}{n!} e^{-sp}.$$

Není-li pravděpodobnost p známa, nahradíme číslo sp střední hodnotou $\bar{n}$, přibližně aritmetickým průměrem pozorovaných n.

Řídkým zjevem je na př. t. zv. *iterace*, t. j. opakování po sobě; iterace má délku m, nastane-li zjev m-krát za sebou.

Pravděpodobnost, že v n pokusech se ukáže x-krát iterace délky m, je

$$P = \frac{a^x}{x!} e^{-a}, \quad \text{kde} \quad a = \frac{n}{2^{m+1}}$$

2. Pravděpodobnost „a posteriori".

Získána je ze zkušenosti (empiricky, z řady pokusů).

1. *Bayesovo pravidlo.* Pravděpodobnost hypothes (příčin).

a) Pro uskutečnění zjevu Z existuje n a priori *stejně* možných hypothes. Podle hypothesy H_1 nastane zjev Z s pravděpodobností p_1, podle H_2 s pravděpodobností p_2 atd., podle H_n s pravděpodobností p_n. Pravděpodobnost, že po provedeném pokusu zjev Z se uskutečnil podle hypothesy H_k, je

$$P_k = \frac{p_k}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}.$$

b) Pro uskutečnění zjevu Z existuje n a priori *různě* možných hypothes s pravděpodobnostmi $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$. Pravděpodobnost, že po provedeném pokusu nastal zjev Z podle hypothesy H_k, která zjevu Z přisuzuje pravděpodobnost p_k, je

$$P_k = \frac{\omega_k p_k}{\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \ldots + \omega_n p_n}.$$

2. *Obrácený Bernoulliho theorém.* Jestliže v $s = m + n$ pokusech se zjev objevil m-krát, jest jeho neznámá pravděpodobnost p obsažena v mezích $\frac{m}{s} \pm \delta$ (kde δ jest libovolně malé číslo) s pravděpodobností

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt = \Phi(\gamma); \qquad \gamma = \delta \sqrt{\frac{s^3}{2mn}},$$

3. *Střední hodnota (očekávaná hodnota, matematická naděje)* proměnné veličiny X je součet součinů vzájemně se vylučujících hodnot proměnné X_i a jim příslušných pravděpodobností p_i:

$$\overline{X} = X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = \sum_1^n X_i p_i \quad \text{při} \quad \sum_1^n p_i = 1.$$

Aritmetický průměr všech X_i, které se opakovaly m_i-krát, se blíží při $n \to \infty$ střední hodnotě $\overline{X}$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{m_1 X_1 + m_2 X_2 + \ldots + m_n X_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \overline{X}.$$

Je-li $P(x)$ pravděpodobnost zjevu, charakterisovaného funkcí $f(x)$, je *střední hodnota funkce* $f(x)$ v intervalu $a \leqq x \leqq b$

$$\overline{f(x)} = \sum_a^b f(x) P(x) : \sum_a^b P(x);$$

při spojité proměnné x jest

$$\overline{f(x)} = \int_a^b f(x) P(x) \, dx : \int_a^b P(x) \, dx.$$

4. *Rozptyl (disperse).* Míra kolísání pozorovaných hodnot X_i kolem střední hodnoty $\overline{X}$ se odvozuje z rozdílu zvaného

odchylka od střední hodnoty (chyba) $x_i = X_i - \overline{X}$.

Ježto střední hodnota odchylek $\overline{x_i} = 0$, volí se pro konstrukci míry proměnnosti

kvadratická odchylka $x_i^2 = (X_i - \overline{X})^2$.

Střední hodnota kvadratické odchylky $\overline{x_i^2} = \sigma^2$ sluje *rozptyl.*

Odmocnina z rozptylu, t. zv. *směrodatná odchylka* σ, je mírou kolísání. Při konstantní pravděpodobnosti (v nezávislých pokusech) je

rozptyl $\sigma^2 = np\,(1-p) = npq$,

směrodatná odchylka (střední chyba) $\sigma = \sqrt{npq}$.

Řídké zjevy (**10.**, str. 220), jejichž pravděpodobnost je velmi malá, mají rozptyl $\sigma^2 = \overline{n}$.

5. *Rozptyl součtu* $X + Y$ nezávisle proměnných X, Y

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2.$$

6. *Rozptyl aritmetického průměru* nezávislých pokusů

$$\sigma^2 \left[\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \right] = \frac{1}{n} \sigma_X^2.$$

7. *Věta Čebyševova.* Jsou-li $a, b, c, \ldots$ střední hodnoty proměnných $x, y, z, \ldots$, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ střední hodnoty jejich čtverců $x^2, y^2, z^2 \ldots$, lze očekávati, že pozorovaný součet $x + y + z + \ldots$ bude v mezích

$$a + b + c + \ldots \pm t \sqrt{\alpha + \beta + \gamma + \ldots - (a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)}$$

s pravděpodobností

$$P > 1 - 1 : t^2.$$

8. *Pravděpodobná hodnota očekávané výhry* rovná se součinu z výhry a její pravděpodobnosti. Ve spravedlivé hře má se sázka rovnati matematické naději ve výhru.

9. *Matematické risiko.* Je-li v řadě vzájemně se vylučujících případů V_k výhra, S sázka, $X_k = V_k - S$ očekávaná změna čistého jmění s pravděpodobností p_k, jest matematická naděje této změny u hráče $\Sigma p_k X_k$, u podnikatele $\Sigma p_k (-X_k)$. Při spravedlivé hře musí oba tyto součty býti rovny nule.

Matematická naděje v čistou výhru nebo v čistou ztrátu sluje

$$\textit{průměrné matematické risiko } R = \tfrac{1}{2} \Sigma p_k | V_k - S |.$$

Mírou bezpečnosti podniku je

$$\textit{střední risiko } M = \sqrt{\Sigma p_k (V_k - S)^2}.$$

V. Láska: Počet pravděpodobnosti, 1921.
B. Hostinský: Geometrické pravděpodobnosti, 1926.
J. Kaucký: Úvod do počtu pravděpodobností a teorie statistiky, 1934.
E. Borel: Éléments de la théorie des probabilités, 3. vyd. 1924.
A. Markov: Ischislenije věrojatnostj, 4. vyd. 1924 (něm. překl. 1912).
E. Kamke: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie, 1932.
A. Fisher: The mathematical theory of probability, 2. vyd. 1922.
T. Fr...: Probability and its en ineering uses, 1928.
E. Czuber: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlertheorie, Statistik und Lebensversicherung I., 4. vyd. 1924.
H. Poincaré: Calcul des probabilités, 3. vyd. 1923.
G. Castelnuovo: Calcolo delle probabilità, 2. sv., 2. vyd. 1925—28.

XVIII. Počet vyrovnávací.

1. Theorie chyb.

1. *Počet vyrovnávací* stanoví nejvýhodnější (pravdě nejpodobnější) hodnotu opětovně měřené veličiny a odhaduje spolehlivost výsledku s předpoklady: *nevyhnutelné chyby pozorování* jsou zcela nahodilé, nesystematické, se stejnou pravděpodobností kladné nebo záporné; malé chyby jsou pravděpodobnější než velké.

Chyby systematické (pravidelné, stálé) a *chyby hrubé* vylučujeme.

Základy vyrovnávacího počtu jsou:

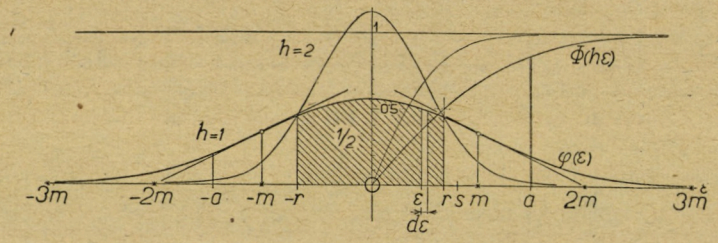
a) Axiom aritmetického průměru: Pravdě nejpodobnější hodnota veličiny, měřené přímo s touže přesností, jest aritmetický průměr všech pozorování.

b) Gaußův zákon chyb, odvozený z předpokladu *a)*: Relativní četnost čili hustota pravděpodobnosti chyby ε je vyjádřena funkcí (obr. 49)

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2};$$

parametr h sluje *míra přesnosti*. Z Gaußova zákona plyne princip,

zvaný *methoda nejmenších čtverců:* Pravdě nejpodobnější hodnota měřené veličiny je ta, pro kterou *součet čtverců chyb je minimum.*



Obr. 49.

V obr. 49 jsou zobrazeny funkce $\varphi(\varepsilon)$ a její integrální funkce $\Phi(h\varepsilon)$ s parametry $h = 1$ a $h = 2$.

2. Pravděpodobnost, že se objeví chyba velikosti ε, čili že zapadne do intervalu $d\varepsilon$, je dána diferenciálem

$$dP_\varepsilon = \varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon.$$

Pravděpodobnost, že chyba ε bude v mezích $\pm a$,

$$P_{-a}^{a} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{ha} e^{-t^2}\,dt = \Phi(ha),$$

je zobrazena plochou křivky $y = \varphi(\varepsilon)$ nad intervalem od $-a$ do $+a$ nebo pořadnicí integrální čáry $y = \Phi(h\varepsilon)$ v místě $\varepsilon = a$. Při známém h může být určena z tabulky.

Tabulku hodnot integrálu $\Phi(\gamma)$, kde $\gamma = h\varepsilon$, obsahují *Matematické a statické tabulky. Díl I., str. 66.*

Pravděpodobnost, že chyba zůstane v mezích $\pm\infty$, je rovna 1 a zobrazena plochou celé křivky

$$P_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon = 1.$$

3. *Chyby skutečné:* $\varepsilon_\nu = X - l_\nu$ jsou odchylky jednotlivých pozorování l_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ od pravé hodnoty měřené veličiny X.

4. *Chyby domnělé (zdánlivé)* nebo *opravy:* $v_\nu = x - l_\nu$ jsou odchylky jednotlivých pozorování l_ν od jejich aritmetického průměru.

Obojí stanovíme jednotným pravidlem: *má býti — jest;* to znamená, že se od pravé hodnoty X (aritmetického průměru x) odčítá hodnota naměřená l_ν.

Opravy v se řídí týmž Gaußovým zákonem jako skutečné chyby ε, avšak jinou mírou přesnosti:

$$h_v = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\, h_\varepsilon .$$

Skutečné chyby známe zřídka; jsou to na př. rozdíly mezi součiny, stanovenými počtem a logaritmickým pravítkem. Diference dvojic pozorování mají povahu skutečných chyb (str. 229).

Pro posouzení přesnosti měření slouží t. zv. chyby měrné:

5. *Průměrná chyba s* jest aritmetický průměr absolutních hodnot jednotlivých chyb:

$$s = \frac{|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \ldots + |\varepsilon_n|}{n} .$$

Při nekonečně velkém počtu pozorování a Gaußově zákonu je

$$s = \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon| \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} .$$

6. *Střední chyba m* je druhá odmocnina z aritmetického průměru čtverců všech chyb:

$$m = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2}{n}} .$$

Při nekonečně velkém počtu pozorování a Gaußově zákonu jest

$$m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{2h^2} .$$

Posouzení spolehlivosti měření střední chybou m je nejbezpečnější.

V obrazu *Gaußova* zákona jsou $\pm m$ úsečky bodů obratu; tečny utínají na ose x délky $\pm 2m$.

7. *Pravděpodobná chyba r* je v řadě pozorování se stejnou pravděpodobností nedosažena jako překročena. Pravděpodobnost, že chyba zůstane v mezích $\pm r$, jest

$$P_{-r}^{r} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-r}^{r} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{hr} e^{-t^2} dt = \Phi(hr) = \frac{1}{2} .$$

Z tabulky transcendenty $\Phi(x)$ dostaneme interpolací

$$rh = 0{,}4769363.$$

V řadě chyb, srovnaných podle velikosti bez ohledu na znaménko, je pravděpodobná chyba r uprostřed.

V obrazu Gaußova zákona je obsah plochy nad úsečkami od $-r$ do $+r$ roven polovině obsahu celé plochy.

8. *Míra přesnosti* může býti vypočtena z kterékoli měrné chyby:

$$a)\ h = \frac{0.47694}{r}; \qquad b)\ h = \frac{1}{s\sqrt{\pi}}; \qquad c)\ h = \frac{1}{m\sqrt{2}};$$

$$h = \frac{0{,}47694}{r} = \frac{0{,}56419}{s} = \frac{0\ 707\,10}{m}.$$

9. *Váha pozorování* p_ν. Různou přesnost jednotlivých měření l_ν hodnotíme poměrným kladným číslem, jež sluje *váha*. Jedno pozorování váhy p váží tolik, co p pozorování váhy 1.

Váhy jsou přímo úměrny mírám přesnosti h_ν, nepřímo úměrny čtvercům středních chyb:

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_n = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} : \ldots : \frac{1}{m_n^2} \text{ čili } p_\nu = \frac{C}{m_\nu^2},$$

kde C je libovolná konstanta; $\nu = 1, 2, 3, \ldots n$.

Podrobná úvaha o současném vyrovnání různých veličin ukazuje, že váhy ve smyslu definice $p = C : m^2$ jsou čísla pojmenovaná: mají pojmenování příslušné střední chyby.

10. *Střední chyba jednotky váhy* μ neboli *jednotková (střední) chyba* (značí se také m_0) je střední chyba zvoleného (skutečného nebo myšleného) pozorování, jemuž jsme přisoudili váhu 1; pak $C = \mu^2$, a pozorování l_ν přísluší

$$\text{váha } p_\nu = \frac{\mu^2}{m_\nu^2}.$$

11. *Střední chyba* se vypočte ze skutečných chyb nebo z oprav. Označíme-li součty čtverců chyb $[\varepsilon\varepsilon]$ (suma $\varepsilon;\varepsilon$), součty čtverců oprav $[vv]$ (suma v, v), jest

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}; \qquad m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}};$$

ve středních mezích

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2n}}\right); \qquad m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}\right).$$

Při malém n má střední chyba býti rovna asi $\frac{1}{4}$, při větším n asi $\frac{1}{6}$ rozdílu mezi největší kladnou a nejmenší zápornou chybou.

Největší nahodilá chyba ve 100 pozorováních theoreticky

$$\varepsilon_{\max} \leqq 2{,}5\,m;$$

pozorování s větší chybou než $3\,m$ (*hrubá chyba*) vylučujeme.

12. *Pravděpodobnost,* že chyba nepřestoupí k-násobnou střední chybu m,

$$P_{-km}^{km} = \Phi(hkm) = \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$$

najdeme ve zmíněné tabulce pro transcendentu $\Phi(\gamma)$ na str. 66. Tak jest

$$P_{-m}^{m} = 0{,}68261\,; \qquad P_{-2m}^{2m} = 0{,}95446\,; \qquad P_{-3m}^{3m} = 0{,}99730\,.$$

13. *Zkouška seskupení chyb.* Přirovnáme počet chyb v, připadajících v n pozorováních do zvoleného intervalu $(-a, +a)$, k počtu, vyplývajícímu z Gaußova zákona,

$$v_{-a}^{+a} = n\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ha} e^{-t^2}\,dt = n\,\Phi(ha)\,.$$

Počet chyb v libovolném intervalu (a, b)

$$v_a^b = n\left[\Phi(hb) - \Phi(ha)\right].$$

Míra přesnosti h se vypočte ze střední chyby m podle vzorce **8.** *c*).

Počet chyb v intervalu $(0, x)$ vyčteme přímo z tabulky na str. 65, sestavené pro argument $\frac{x}{\sigma}$, v označení užívaném ve statistice: x oprava, σ střední chyba, počítaná tam ze vzorce $\sigma^2 = (\Sigma x^2) : n$. Viz též str. 246.

Uspokojivý souhlas skutečnosti s theorií svědčí, že seskupení chyb je *normální* (t. j. podle Gaußova zákona); příkrý nesouhlas ukazuje na *chyby systematické*, vyvolané soustavným působením rušivých příčin. K jejich zjištění jsou odvozena různá kriteria.

Geometrické místo bodů téže pravděpodobnosti v rovině a v prostoru jsou podobné a podobně položené elipsy a elipsoidy. Maximum a minimum nejistoty v určení polohy bodu v rovině je ve směrech os chybové elipsy. Užití ve statistice a v geodesii při vyrovnávání souřadnic.

2. Vyrovnání pozorování přímých.

a. Pozorování stejné přesnosti.

V pozorováních přímo měřené veličiny X byly zjištěny hodnoty $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Pravdě nejpodobnější (nejvýhodnější) hodnotou neznámé jest:

1. *Aritmetický průměr* všech pozorování

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n}$$

$[l]$ čte se: „suma l“.

2. *Chyby skutečné:* $\varepsilon_\nu = X - l_\nu$. 3. *Opravy:* $v_\nu = x - l_\nu$.

Prakticky zavádíme přibližnou hodnotu neznámé X_0, kladouce

pozorování: $l_\nu = X_0 + \lambda_\nu$; *doplňky:* $\lambda_\nu = l_\nu - X_0$.

4. $x = X_0 + \frac{[\lambda]}{n} = X_0 + \xi$; 5. $v_\nu = \xi - \lambda_\nu$, kde $\xi = \frac{[\lambda]}{n}$.

6. *Kontrola:* Součet všech oprav je nula,

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0; \qquad [v] = 0.$$

7. *Součty čtverců chyb:*

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2 = [\varepsilon\varepsilon]; \qquad v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 = [vv].$$

8. *Kontrola:* $[vv] = [\lambda\lambda] - \frac{[\lambda]^2}{n}$.

Střední chyba jednoho pozorování:

9. $m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$; 10. $m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$.

Střední chyba aritmetického průměru:

11. $m_x = \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$.

12. *Výsledek vyrovnání:* $X = x \pm m_x$.

b. Pozorování různé přesnosti.

V n pozorováních veličiny X byly zjištěny hodnoty $l_1, l_2, \ldots, l_n$ s vahami $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Přibližná hodnota neznámé budiž X_0 s doplňky

$$\lambda_\nu = l_\nu - X_0.$$

Obecný (zvážený) aritmetický průměr:

1. $x = \frac{p_1 l_1 + \ldots + p_n l_n}{p_1 + \ldots + p_n} = \frac{[pl]}{[p]}$; 2. $x = X_0 + \frac{[p\lambda]}{[p]} = X_0 + \xi$.

3. *Opravy:* $v_\nu = x - l_\nu = \xi - \lambda_\nu$, kde $\xi = \frac{[p\lambda]}{[p]}$.

4. *Kontrola:* $p_1 v_1 + p_2 v_2 + \ldots + p_n v_n = 0; \qquad [pv] = 0.$

5. *Součty čtverců chyb násobených váhami:*

$$p_1 v_1^2 + \ldots + p_n v_n^2 = [pvv].$$

6. *Kontrola:* $[pvv] = [p\lambda\lambda] - [p](x - X_0)^2$.

7. *Střední chyba jednotky váhy:* $\mu = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}$

8. *Střední chyba pozorování* l_ν *váhy* p_ν*:*

$$m_\nu = \frac{\mu}{\sqrt{p_\nu}} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{(n-1)\,p_\nu}}.$$

9. *Střední chyba aritmetického průměru:*

$$m_x = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{(n-1)\,[p]}}.$$

10. *Výsledek vyrovnání:* $X = x \pm m_x$.

c. Dvojice pozorování.

Dvojí, sdružená pozorování (l'_ν, l''_ν) každé z n stejnorodých veličin se konají pro zjištění přesnosti určitého druhu měření místo opakovaného pozorování veličiny jedné. Rozdíly čili diference dvojic mají povahu skutečných chyb v určení nuly.

α. Dvojice stejné přesnosti.

1. *Diference dvojic:* $\Delta_\nu = l'_\nu - l''_\nu$, $\quad \nu = 1, 2, \ldots n$;

2. *střední diference:* $m_\Delta = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$;

3. *střední chyba jednoho měření:* $m = \frac{m_\Delta}{\sqrt{2}}$;

4. *střední chyba aritm. průměru dvojice:* $M = \frac{1}{2} m_\Delta$.

Největší přípustná diference $\Delta_{\max} \approx 4\,m$.

β. Dvojice různé přesnosti.

5. *Diference dvojic:* $\Delta_\nu = l'_\nu - l''_\nu$ váhy p_ν, $\nu = 1, 2, \ldots n$;

6. *střední jednotková diference:* $\mu_\Delta = \sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{n}}$;

7. *jednotková chyba jednoho měření:* $\mu = \frac{\mu_\Delta}{\sqrt{2}}$;

8. *jednotková chyba aritm. průměru dvojice:* $\mu_0 = \frac{1}{2}\mu_\Delta$;

9. *střední chyba pozorování* l_ν*:* $m_\nu = \frac{\mu}{\sqrt{p_\nu}}$;

10. *střední chyba aritm. průměru v-té dvojice:* $M_\nu = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_\nu}}$.

Největší přípustná diference $\Delta_{\max} \approx 4\,\mu$.

3. Funkce pozorování (pozorování nepřímá).

Hromadění (šíření) chyb.

1. *Funkce nezávislých pozorování.* Dána je funkce $F(X_1, X_2, X_3, \ldots)$ nezávislých veličin $X_1, X_2, X_3, \ldots$, pro něž byly měřením zjištěny hodnoty $l_1 \pm m_1$, $l_2 \pm m_2$, $l_3 \pm m_3, \ldots$. Má se stanoviti střední chyba

funkce pozorování $F(l_1, l_2, l_3, \ldots)$,

jsou-li místo pravých hodnot X dosazeny naměřené l.

2. *Střední chyba* m_F *funkce pozorování* $F(l_1, l_2, l_3, \ldots)$

$$m_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial l_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial l_2}\right)^2 m_2^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial l_3}\right)^2 m_3^2 + \ldots}$$

vyjadřuje t. zv. *zákon hromadění (šíření) chyb.* Pro zapamatování slouží *pravidlo:* Čtverec střední chyby napíšeme podle diferenciálu funkce

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial l_1}\mathrm{d}l_1 + \frac{\partial F}{\partial l_2}\mathrm{d}l_2 + \frac{\partial F}{\partial l_3}\mathrm{d}l_3 + \ldots,$$

kde diferenciály $\mathrm{d}F$, $\mathrm{d}l_1$, $\mathrm{d}l_2, \ldots$ nahradíme středními chybami $m_F, m_1, m_2, \ldots$ a první mocniny všech členů jejich čtverci.

Střední chyba funkce v procentech $m_F\,\% = 100\,\frac{m_F}{F}$.

3. *Váha funkce pozorování* p_F je dána vzorcem

$$\frac{1}{p_F} = \left(\frac{\partial F}{\partial l_1}\right)^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial F}{\partial l_2}\right)^2 \frac{1}{p_2} + \left(\frac{\partial F}{\partial l_3}\right)^2 \frac{1}{p_3} + \dots$$

4. *Lineární funkce pozorování* $l_1 \pm m_1, l_2 \pm m_2, l_3 \pm m_3$:

$$F = a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3; \quad m_F = \pm \sqrt{(a_1 m_1)^2 + (a_2 m_2)^2 + (a_3 m_3)^2};$$

$$p_F = 1 : \left(\frac{a_1^2}{p_1} + \frac{a_2^2}{p_2} + \frac{a_3^2}{p_3}\right).$$

5. $F = l + l + \dots + l = nl; \quad m_F = \pm m\sqrt{n}; \quad p_F = \frac{p}{n}.$

6. $F = al; \quad m_F = \pm am; \quad p_F = \frac{p}{a^2}.$

7. *Logaritmické diference.* Střední chybu funkce, kterou lze logaritmovati, stanovíme s logaritmickým výpočtem funkce.

Na př. pro funkci

$$F(l_1, l_2, l_3) = C \frac{l_1^\alpha (\sin l_2)^\beta}{l_3^\gamma};$$

V diferenciálu logaritmu ($\mathrm{d} \log C = 0$)

$$\left(\frac{\mathrm{d} \log F}{\mathrm{d}F}\right) \mathrm{d}F = \alpha \left(\frac{\mathrm{d} \log l_1}{\mathrm{d}l_1}\right) \mathrm{d}l_1 + \beta \left(\frac{\mathrm{d} \log \sin l_2}{\mathrm{d}l_2}\right) \mathrm{d}l_2 - \gamma \left(\frac{\mathrm{d} \log l_3}{\mathrm{d}l_3}\right) \mathrm{d}l_3$$

nahradíme derivace logaritmů logaritmickými diferencemi, připadajícím na jednotku posledního místa argumentu nebo na 1″:

$$\Delta 1_F = \log(F + 1) - \log F; \qquad \Delta 1_1 = \log(l_1 + 1) - \log l_1;$$

$$\Delta 1_2'' = \log \sin(l_2 + 1'') - \log \sin l_2; \dots$$

Píšeme-li podle pravidla 2. všude čtverce a místo diferenciálů střední chyby, dostaneme vzorec

$$m_F = \frac{1}{\Delta 1_F} \sqrt{(\alpha m_1 \cdot \Delta 1_1)^2 + (\beta m_2 \cdot \Delta 1_2'')^2 + (\gamma m_3 \cdot \Delta 1_3)^2}.$$

Z tabulek vyčteme s logaritmy čísel i diference; diferenci $\Delta 1_F$ určíme na konci výpočtu při $\log F$.

4. Vyrovnání pozorování zprostředkujících při lineární závislosti neznámých.

a. Pozorování stejné přesnosti.

1. *Rovnice určující.* Neznámé $X, Y, Z, \ldots$ v počtu u jsou vázány s veličinou L n-krát přímo měřenou *lineárním vztahem*

$$aX + bY + cZ + \ldots = L.$$

Každému z n zprostředkujících *pozorování* L_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) patří *koeficienty* $a_\nu, b_\nu, c_\nu, \ldots$ buď předem známé nebo bez chyby zjištěné.

Kdybychom znali pravé hodnoty L, stačilo by k určení u neznámých právě tolik rovnic a pozorování. Poněvadž však každé měření je zatíženo chybou, provádíme větší počet pozorování L než je počet neznámých.

Je-li $n > u$, jest úkolem vyrovnávacího počtu vyrovnati rozpory a stanoviti *nejvýhodnější hodnoty neznámých* $X, Y, Z, \ldots$, aby součet čtverců chyb (oprav) byl minimum.

2. *Rovnice oprav* sestavíme podle určující rovnice a podle pravidla: *výpočet — pozorování.* Omezíme-li se na 3 neznámé, jsou

$$\text{rovnice oprav: } v_\nu = a_\nu X + b_\nu Y + c_\nu Z - L_\nu. \qquad (\alpha)$$

Pro zjednodušení numerického výpočtu zavádíme do rovnic oprav *přibližné hodnoty neznámých* X_0, Y_0, Z_0 a *neznámé doplňky* x, y, z substitucí:

$$X = X_0 + x, \qquad Y = Y_0 + y, \qquad Z = Z_0 + z,$$

a dále

$$a_\nu X_0 + b_\nu Y_0 + c_\nu Z_0 - L_\nu = l_\nu,$$

takže

$$\text{rovnice oprav: } v_\nu = a_\nu x + b_\nu y + c_\nu z + l_\nu. \qquad (\beta)$$

Tento tvar rovnic oprav s absolutním členem kladným podržíme z důvodů formálních i v dalším. Ve skutečnosti je znaménko absolutního členu dáno pravidlem: *výpočet (theorie) minus pozorování.*

3. *Normální rovnice* plynou z podmínek pro $[vv] = \text{minimum}$:

$$\frac{\partial [vv]}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial [vv]}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial [vv]}{\partial z} = 0;$$

tedy

$$[av] = 0, \qquad [bv] = 0, \qquad [cv] = 0$$

aneb, dosadíme-li za v_ν výrazy (β),

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + [al] &= 0 \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + [bl] &= 0 \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + [cl] &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

K nim se druží *kontrolní rovnice* pro součet čtverců oprav $[vv]$:

$$[al]x + [bl]y + [cl]z + [ll] = [vv].$$

Normální rovnice jsou souměrné k hlavní příčce s koeficienty:

$$[aa] \equiv a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2; \quad [bb] \equiv b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2; \quad [cc].$$

Řešením normálních rovnic najdeme neznámé x, y, z. Při větším počtu neznámých je výhodný *Gaußův algoritmus:* První rovnici násobíme faktorem $-[ab]:[aa]$ a přičteme k druhé; pak násobíme první rovnici faktorem $-[ac]:[aa]$ a přičteme ke třetí; konečně násobíme první rovnici faktorem $-[al]:[aa]$ a přičteme k čtvrté.

4. *Gaußovy redukční znaky.* Postup eliminace veličiny x vyjadřuje symbol

$$[ik \cdot 1] \equiv [ik] - \frac{[ai]}{[aa]}[ak] \text{ (čti: suma } i, k, \text{ jedna).}$$

Normální rovnice 1. redukce:

$$\begin{aligned} [bb \cdot 1]y + [bc \cdot 1]z + [bl \cdot 1] &= 0 \\ [bc \cdot 1]y + [cc \cdot 1]z + [cl \cdot 1] &= 0 \\ [bl \cdot 1]y + [cl \cdot 1]z + [ll \cdot 1] &= [vv]. \end{aligned} \tag{2}$$

Postup eliminace veličiny y vyjadřuje znak 2. redukce; obecně

$$[ik \cdot 2] \equiv [ik \cdot 1] - \frac{[bi \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[bk \cdot 1].$$

Normální rovnice 2. redukce:

$$\begin{aligned} [cc \cdot 2]z + [cl \cdot 2] &= 0 \\ [cl \cdot 2]z + [ll \cdot 2] &= [vv]. \end{aligned} \tag{3}$$

Postup eliminace veličiny z vyjadřuje znak 3. redukce; obecně

$$[ik \cdot 3] \equiv [ik \cdot 2] - \frac{[ci \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}[ck \cdot 2].$$

Výsledkem eliminace třetí (poslední) neznámé je

$$\textit{kontrolní rovnice} \quad [ll \cdot 3] = [vv]. \tag{4}$$

Redukce se provádí logaritmicky nebo počítacím strojem s průběžnými kontrolami koeficientů (str. 236) ve zvláštních početních schematech.

Techniku numerického výpočtu třeba si osvojiti podle vzorů a schemat v učebnicích samostatným provedením číselných příkladů.

5. *Redukované rovnice normální:*

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + [al] &= 0 \\ [bb\cdot 1]y + [bc\cdot 1]z + [bl\cdot 1] &= 0 \\ [cc\cdot 2]z + [cl\cdot 2] &= 0 \\ [ll\cdot 3] &= [vv]. \end{aligned} \qquad (5)$$

Z redukovaných rovnic vypočteme zpětným postupem z, y, x. Kontrola: *Vypočtené hodnoty musí vyhovovati normálním rovnicím.*

6. *Váha neznámých.* Jmenovatel poslední neznámé je zároveň její vahou; při třech neznámých

$$p_z = [cc\cdot 2].$$

Váhy p_x, p_y najdeme, přestavíme-li normální rovnice tak, aby neznámá, jejíž váhu hledáme, přišla na poslední místo a koeficienty byly souměrně položeny k hlavní příčce. Pro každou transposici dlužno redukci provésti znovu.

Při větším počtu neznámých je proto daleko výhodnější řešiti pomocné rovnice vah.

7. *Normální rovnice vah* určují *váhové činitele* $Q_{ik} = Q_{ki}$:

a) pro váhu neznámé x:

$$\begin{aligned} [aa]Q_{11} + [ab]Q_{12} + [ac]Q_{13} &= 1 \\ [ab]Q_{11} + [bb]Q_{12} + [bc]Q_{13} &= 0 \\ [ac]Q_{11} + [bc]Q_{12} + [cc]Q_{13} &= 0; \end{aligned}$$

b) pro váhu neznámé y:

$$\begin{aligned} [aa]Q_{21} + [ab]Q_{22} + [ac]Q_{23} &= 0 \\ [ab]Q_{21} + [bb]Q_{22} + [bc]Q_{23} &= 1 \\ [ac]Q_{21} + [bc]Q_{22} + [cc]Q_{23} &= 0; \end{aligned}$$

c) pro váhu neznámé z:

$$\begin{aligned} [aa]Q_{31} + [ab]Q_{32} + [ac]Q_{33} &= 0 \\ [ab]Q_{31} + [bb]Q_{32} + [bc]Q_{33} &= 0 \\ [ac]Q_{31} + [bc]Q_{32} + [cc]Q_{33} &= 1. \end{aligned}$$

Rovnice vah mají koeficienty normálních rovnic (1), pravé strany 1 a 0. Koeficienty redukovaných rovnic vah, pokud jsou potřebny pro další řešení, vyčteme z redukovaných normálních rovnic (5).

Ze *tří* rovnic redukované soustavy *c)*

$$\begin{aligned} [aa]Q_{31} + [ab]Q_{32} + [ac]Q_{33} &= 0 \\ [bb\cdot 1]Q_{32} + [bc\cdot 1]Q_{33} &= 0 \\ [cc\cdot 2]Q_{33} &= 1 \end{aligned}$$

vypočteme Q_{33}, $Q_{32} = Q_{23}$ a $Q_{31} = Q_{13}$.

Ze *dvou* rovnic soustavy *b)*

$$[aa]\,Q_{21} + [ab]\,Q_{22} + \quad [ac]\,Q_{32} = 0$$
$$[bb \cdot 1]\,Q_{22} + [bc \cdot 1]\,Q_{23} = 1,$$

kde Q_{23} již známe, vypočteme Q_{22} a $Q_{21} = Q_{12}$.

Z *první* rovnice soustavy *a)*

$$[aa]\,Q_{11} + [ab]\,Q_{12} + [ac]\,Q_{13} = 1,$$

v níž Q_{12}, Q_{13} již známe, vypočteme Q_{11}.

Váhové činitele Q kontrolujeme součtem normálních rovnic vah.

8. *Váhy neznámých:*

$$p_x = \frac{1}{Q_{11}}; \qquad p_y = \frac{1}{Q_{22}}; \qquad p_z = \frac{1}{Q_{33}}.$$

9. *Střední chyba jednotky váhy.* Z hodnot x, y, z vypočteme opravy v_ν podle **2.** a součet čtverců $[vv]$.

$$\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{n-3}}; \qquad \text{při } u \text{ neznámých } \mu = \sqrt{\frac{[vv]}{n-u}}$$

10. *Střední chyby neznámých:*

$$m_x = \pm\frac{\mu}{\sqrt{p_x}} = \pm\mu\sqrt{Q_{11}}; \qquad m_y = \pm\frac{\mu}{\sqrt{p_y}} = \pm\mu\sqrt{Q_{22}};$$

$$m_z = \pm\frac{\mu}{\sqrt{p_z}} = \pm\mu\sqrt{Q_{33}}.$$

11. *Výsledek vyrovnání:* $X = x \pm m_x$; $Y = y \pm m_y$; $Z = z \pm m_z$.

Početní kontroly.

12. *Součty koeficientů rovnic oprav.* V rovnicích oprav sečteme koeficienty neznámých s absolutními členy; součtům s_ν dáme však opačné znamení, takže

$$a_\nu + b_\nu + c_\nu + d_\nu + l_\nu + s_\nu = 0.$$

Kontrola se provádí v početních schematech při redukci.

13. *Kontrola koeficientů rovnic normálních:*

$$[aa]+[ab]+[ac]+[al]+[as]=0$$
$$[ab]+[bb]+[bc]+[bl]+[bs]=0$$
$$[ac]+[bc]+[cc]+[cl]+[cs]=0$$
$$[al]+[bl]+[cl]+[ll]+[ls]=0$$
$$[as]+[bs]+[cs]+[ls]+[ss]=0.$$

14. *Kontrola koeficientů rovnic 1. redukce:*

$$[bb\cdot 1]+[bc\cdot 1]+[bl\cdot 1]+[bs\cdot 1]=0$$
$$[bc\cdot 1]+[cc\cdot 1]+[cl\cdot 1]+[cs\cdot 1]=0$$
$$[bl\cdot 1]+[cl\cdot 1]+[ll\cdot 1]+[ls\cdot 1]=0$$
$$[bs\cdot 1]+[cs\cdot 1]+[ls\cdot 1]+[ss\cdot 1]=0.$$

15. *Kontrola koeficientů rovnic 2. a 3. redukce:*

$$[cc\cdot 2]+[cl\cdot 2]+[cs\cdot 2]=0$$
$$[cl\cdot 2]+[ll\cdot 2]+[ls\cdot 2]=0 \qquad [ll\cdot 3]+[ls\cdot 3]=0$$
$$[cs\cdot 2]+[ls\cdot 2]+[ss\cdot 2]=0. \qquad [ls\cdot 3]+[ss\cdot 3]=0.$$

Kontrola oprav $v_\nu = a_\nu x + b_\nu y + c_\nu z + l_\nu$:

16. $[av]=0; \qquad [bv]=0; \qquad [cv]=0.$

17. $[vv]=[lv]$.

18. $[vv]=[al]x+[bl]y+[cl]z+[ll]$.

19. $[vv]=[ll\cdot 3]=[ss\cdot 3]$; obecně $[vv]=[ll\cdot u]=[ss\cdot u]$.

20. *Kontrola* Σ (*sigmová*) je na str. 238 při pozorování různé přesnosti; příslušné vzorce sem spadající dostaneme, kladouce tam $p=1$.

b. Pozorování různé přesnosti.

Každé z n pozorování l_ν ($\nu=1, 2, \ldots, n$) má obecně váhu p_ν.

1. *Rovnice oprav*, sestavené podle pravidla *výpočet — pozorování*, píšeme formálně s absolutním členem kladným:

$$v_\nu = a_\nu x + b_\nu y + c_\nu z + l_\nu; \qquad \text{váhy } p_\nu.$$

2. *Normální rovnice* plynou z podmínek pro $[pvv]=$ minimum:

$$[paa]x+[pab]y+[pac]z+[pal]=0$$
$$[pab]x+[pbb]y+[pbc]z+[pbl]=0$$
$$[pac]x+[pbc]y+[pcc]z+[pcl]=0.$$

K nim se druží *kontrolní rovnice* pro $[pvv]$:

$$[pal]x+[pbl]y+[pcl]z+[pll]=[pvv].$$

3. *Redukované rovnice normální* při třech neznámých:

$$\begin{aligned}[paa]x + [pab]y + [pac]z + [pal] &= 0\\ [pbb\cdot 1]y + [pbc\cdot 1]z + [pbl\cdot 1] &= 0\\ [pcc\cdot 2]z + [pcl\cdot 2] &= 0\\ [pll\cdot 3] &= [pvv].\end{aligned}$$

4. *Váha neznámých.* Jmenovatel poslední neznámé, vypočtené Gaußovou eliminací z normálních rovnic, je zároveň její vahou:

$$p_z = [pcc\cdot 2].$$

Cyklickou záměnou rovnic i členů možno stanoviti váhu ostatních neznámých. Při větším počtu neznámých vedou pohodlněji k cíli rovnice vah.

5. *Rovnice vah* mají koeficienty normálních rovnic **2.** a pravé strany jako rovnice vah *a), b), c)* na str. 234.

6. *Váhy neznámých:*

$$p_x = \frac{1}{Q_{11}}; \qquad p_y = \frac{1}{Q_{22}}; \qquad p_z = \frac{1}{Q_{33}}.$$

7. *Střední chyba jednotky váhy:*

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-3}}; \qquad \text{při } u \text{ neznámých } \mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}}.$$

8. *Střední chyby neznámých:*

$$m_x = \pm\frac{\mu}{\sqrt{p_x}} = \pm\mu\sqrt{Q_{11}}; \qquad m_y = \pm\frac{\mu}{\sqrt{p_y}} = \pm\mu\sqrt{Q_{22}};$$

$$m_z = \pm\frac{\mu}{\sqrt{p_z}} = \pm\mu\sqrt{Q_{33}}.$$

9. *Výsledek vyrovnání:*

$$X = x \pm m_x; \qquad Y = y \pm m_y; \qquad Z = z \pm m_z.$$

Početní kontroly.

10. *Součtová kontrola koeficientů normálních rovnic.* Příslušné vzorce na str. 236 jsou rozšířeny vahami.

$$[paa] + [pab] + [pac] + [pal] + [pas] = 0 \text{ atd.}$$

Kontroly oprav. Po řešení normálních rovnic a výpočtu oprav v_y jsou kontrolní rovnice

11. $[pav] = 0$; $[pbv] = 0$; $[pcv] = 0$.

12. $[pvv] = [plv]$.

13. $[pvv] = [pal]x + [pbl]y + [pcl]z + [pll]$.

14. $[pvv] = [pll \cdot 3] = [pss \cdot 3]$.

15. *Kontrola Σ (sigmová).* Součty

$$\Sigma_1 = [pal]x + [pbl]y + [pcl]z\,; \quad \Sigma_2 = [pvv] - [pll]\,;$$

$$\Sigma_3 = -\frac{[pal]}{[paa]}[pal] - \frac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}[pbl \cdot 1] - \frac{[pcl \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}[pcl \cdot 2]$$

jsou veskrze záporné. Při správném výpočtu

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3\,.$$

5. Vyrovnání pozorování zprostředkujících při nelineární závislosti neznámých.

Přímo n-krát měřená veličina L je s neznámými X, Y, Z, obecně v počtu $u < n$, vázána nelineárním vztahem

$$F(X, Y, Z) = L.$$

Jsou-li $X = X_0 + x$, $Y = Y_0 + y$, $Z = Z_0 + z$ nejvýhodnější hodnoty neznámých; X_0, Y_0, Z_0 jejich přibližné hodnoty; x, y, z neznámé doplňky; L_ν pozorování, pak jsou podle pravidla *má býti — jest* opravy

$$v_\nu = F_\nu(X_0 + x,\ Y_0 + y,\ Z_0 + z) - L_\nu.$$

S předpokladem, že pro nepatrnost doplňků možno v Taylorově řadě omeziti se na členy lineární, takže

$$v_\nu = F_\nu(X_0, Y_0, Z_0) + \frac{\partial F_\nu}{\partial X_0}x + \frac{\partial F_\nu}{\partial Y_0}y + \frac{\partial F_\nu}{\partial Z_0}z - L_\nu\,,$$

aneb označíme-li

$$\frac{\partial F_\nu}{\partial X_0} = a_\nu,\quad \frac{\partial F_\nu}{\partial Y_0} = b_\nu,\quad \frac{\partial F_\nu}{\partial Z_0} = c_\nu \text{ a dále } F_\nu(X_0, Y_0, Z_0) - L_\nu = l_\nu\,,$$

platí

$$v_\nu = a_\nu x + b_\nu y + c_\nu z + l_\nu.$$

Z těchto oprav sestavíme rovnice normální, které řešíme. Konečná kontrola je dána určující rovnicí $F(X, Y, Z) = L$. Neuspokojuje-li, nutno výpočet s nalezenými hodnotami X, Y, Z jako přibližnými znovu opakovati.

6. Vyrovnání pozorování závislých.

Veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vázány jsou $r < n$ podmínkami.

1. *Rovnice závislosti* nebo *rovnice podmínečné:*

$$f_1(X_1, X_2 \ldots, X_n) = 0;\ f_2(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0;\ \ldots;\ f_r(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0.$$

Pro veličiny X_ν byly naměřeny hodnoty l_ν váhy p_ν ($\nu = 1, 2, \ldots n$), které však podmínkám nevyhovují. Dosazením do rovnic závislosti dostaneme vpravo místo nul jiné hodnoty čili *odchylky.*

2. *Odchylky:*

$$f_1(l_1, l_2, \ldots, l_n) = U_1;\ f_2(l_1, l_2, \ldots, l_n) = U_2;\ \ldots;\ f_r(l_1, l_2, \ldots, l_n) = U_r.$$

Opravíme proto pozorování l_ν o opravy v_ν, aby $[pvv]$ bylo minimum a všem podmínkám bylo vyhověno.

3. *Opravená pozorování:*

$$x_1 = l_1 + v_1,\quad x_2 = l_2 + v_2,\quad \ldots,\quad x_n = l_n + v_n$$

splňují již podmínečné rovnice **1.**, takže

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0;\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0;\ \ldots;\ f_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

a. Převod na pozorování zprostředkující.

Tohoto způsobu použijeme, je-li eliminace snadná a když $n < 2r$. V rovnicích závislosti vyjádříme tolik neznámých, jako je podmínek r, zbývajícími $n - r$ neznámými; dostaneme tak r rovnic

$$x_k = \varphi_k(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n); \qquad k = 1, 2, \ldots, r,$$

k nimž připojíme $n - r$ identit $x_i \equiv x_i$; $\qquad i = r+1,\ r+2,\ \ldots,\ n.$

Na pravé straně zavedeme opravená pozorování $x_\nu = l_\nu + v_\nu$, takže *rovnice oprav:*

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varphi_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) = l_1 + v_1\\
x_2 &= \varphi_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) = l_2 + v_2\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots\\
x_r &= \varphi_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) = l_r + v_r\\
x_{r+1} &\qquad\qquad\qquad\quad = l_{r+1} + v_{r+1}\\
x_{r+2} &\qquad\qquad\qquad\quad = l_{r+2} + v_{r+2}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots\\
&\qquad\qquad\qquad\quad x_n = l_n + v_n.
\end{aligned}$$

Z těchto oprav sestavíme rovnice normální a z nich vypočteme neznámé $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Neznámé $x_1, x_2, \ldots, x_r$ plynou z prvních r rovnic oprav.

b. Vyrovnání pozorování závislých korelátami.

Methoda korelát se volí v případech, když $n > 2r$.

1. *Opravená pozorování* $x_\nu = l_\nu + v_\nu$ mají splnit r *rovnic závislosti:*

$$f_1(l_1 + v_1, \ldots, l_n + v_n) = 0; \ldots; f_r(l_1 + v_1, \ldots, l_n + v_n) = 0.$$

Nelineární závislosti nutno vždy přetvořiti na tvar lineární.

2. *Přetvoření závislostí na lineární.* S předpokladem, že opravy v_ν jsou proti l_ν malé, podržíme v Taylorově řadě jen členy lineární:

$$f_1(l_1, l_2, \ldots, l_n) + \frac{\partial f_1}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial f_1}{\partial l_2} v_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial l_n} v_n = 0$$

$$f_2(l_1, l_2, \ldots, l_n) + \frac{\partial f_2}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial f_2}{\partial l_2} v_2 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial l_n} v_n = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_r(l_1, l_2, \ldots, l_n) + \frac{\partial f_r}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial f_r}{\partial l_2} v_2 + \ldots + \frac{\partial f_r}{\partial l_n} v_n = 0.$$

Závislosti ve tvarech součinu a podílu napřed logaritmujeme (podstata závislosti se tím nemění) a derivace logaritmů nahradíme logaritmickými diferencemi $\Delta 1$ jako na str. 231. Obecně

$$\log (l + v) = \log l + \frac{\mathrm{d} \log l}{\mathrm{d}l} v = \log l + \Delta 1 \cdot v;$$

$$\log \sin (l + v'') = \log \sin l + \frac{\mathrm{d} \log \sin l}{\mathrm{d}l} v'' = \log \sin l + \Delta 1'' \cdot v''.$$

3. *Odchylky a derivace* označíme

$$f_1(l_1, \ldots, l_n) = U_1; \quad f_2(l_1, \ldots, l_n) = U_2; \ldots; f_r(l_1, \ldots, l_n) = U_r;$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial l_\nu} = a_\nu; \quad \frac{\partial f_2}{\partial l_\nu} = b_\nu; \quad \frac{\partial f_3}{\partial l_\nu} = c_\nu; \ldots; \quad \frac{\partial f_r}{\partial l_\nu} = r_\nu.$$

4. *Přetvořené rovnice závislosti* při čtyřech podmínkách ($r = 4$):

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n + U_1 = 0 \quad \text{čili} \quad [av] + U_1 = 0$$
$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n + U_2 = 0 \quad ,, \quad [bv] + U_2 = 0$$
$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n + U_3 = 0 \quad ,, \quad [cv] + U_3 = 0$$
$$d_1 v_1 + d_2 v_2 + \ldots + d_n v_n + U_4 = 0, \quad ,, \quad [dv] + U_4 = 0.$$

S těmito přetvořenými rovnicemi, které jsou přesné při lineárních závislostech, přibližné v jiných případech, má býti $[pvv]$ minimum. Úkol se řeší podle **6.** na str. 89 jako *absolutní extrém* výrazu

$$W = [pvv] - 2K_1\{[av] + U_1\} - 2K_2\{[bv] + U_2\} - 2K_3\{[cv] + U_3\} - 2K_4\{[dv] + U_4\},$$

kde *Lagrangeovy* činitele K nazval *Gauß koreláty*. Z n rovnic

$$\frac{\partial W}{\partial v_1} = 0; \qquad \frac{\partial W}{\partial v_2} = 0; \qquad \ldots; \qquad \frac{\partial W}{\partial v_n} = 0$$

a z $r = 4$ podmínek **4.** vypočteme opravy i koreláty.

5. *Rovnice oprav*

$$v_1 = \frac{a_1}{p_1} K_1 + \frac{b_1}{p_1} K_2 + \frac{c_1}{p_1} K_3 + \frac{d_1}{p_1} K_4$$

$$v_2 = \frac{a_2}{p_2} K_1 + \frac{b_2}{p_2} K_2 + \frac{c_2}{p_2} K_3 + \frac{d_2}{p_2} K_4$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_n = \frac{a_n}{p_n} K_1 + \frac{b_n}{p_n} K_2 + \frac{c_n}{p_n} K_3 + \frac{d_n}{p_n} K_4$$

aneb, označíme-li stručně *převrácené hodnoty vah* $\frac{1}{p_\nu} = q_\nu$,

$$v_\nu = q_\nu a_\nu K_1 + q_\nu b_\nu K_2 + q_\nu c_\nu K_3 + q_\nu d_\nu K_4 .$$

Dosazením do rovnic **4.** plynou

6. *Normální rovnice korelát:*

$$[qaa] K_1 + [qab] K_2 + [qac] K_3 + [qad] K_4 + U_1 = 0$$
$$[qab] K_1 + [qbb] K_2 + [qbc] K_3 + [qbd] K_4 + U_2 = 0$$
$$[qac] K_1 + [qbc] K_2 + [qcc] K_3 + [qcd] K_4 + U_3 = 0$$
$$[qad] K_1 + [qbd] K_2 + [qcd] K_3 + [qdd] K_4 + U_4 = 0 .$$

7. *Redukované rovnice normální:*

$$[qaa] K_1 + [qab] K_2 + [qac] K_3 + [qad] K_4 + U_1 = 0$$
$$[qbb \cdot 1] K_2 + [qbc \cdot 1] K_3 + [qbd \cdot 1] K_4 + [U_2 \cdot 1] = 0$$
$$[qcc \cdot 2] K_3 + [qcd \cdot 2] K_4 + [U_3 \cdot 2] = 0$$
$$[qdd \cdot 3] K_4 + [U_4 \cdot 3] = 0 .$$

Z redukovaných rovnic vypočteme postupně koreláty K_4, K_3, K_2, K_1 a dosadíme do rovnic oprav **5.** S vypočtenými opravami jsou pak *opravená pozorování:*

$$x_1 = l_1 + v_1, \qquad x_2 = l_2 + v_2, \qquad x_3 = l_3 + v_3, \qquad x_4 = l_4 + v_4,$$

která již vyhovují podmínečným rovnicím **4.**

8. *Kontrola.* Součet $[pvv]$ z oprav **5.** se kontroluje rovnicí

$$[pvv] = -[UK]$$

nebo

9. $$[pvv] = \frac{U_1^2}{[qaa]} + \frac{[U_2 \cdot 1]^2}{[qbb \cdot 1]} + \frac{[U_3 \cdot 2]^2}{[qcc \cdot 2]} + \frac{[U_4 \cdot 3]^2}{[qdd \cdot 3]}.$$

10. *Střední chyba jednotky váhy* při r podmínkách:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{r}}.$$

11. *Střední chyba neopraveného pozorování* l_v*:*

$$m_v = \frac{\mu}{\sqrt{p_v}}.$$

12. *Střední chyba funkce* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *opravených pozorování:*

$$m_F^2 = \mu^2 \left\{ [qF\,F] - \left(\frac{[qa\,F]^2}{[qaa]} + \frac{[qb\,F \cdot 1]^2}{[qbb \cdot 1]} + \frac{[qc\,F \cdot 2]^2}{[qcc \cdot 2]} + \frac{[qd\,F \cdot 3]^2}{[qdd \cdot 3]} \right) \right\},$$

kde v součtech značí

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial l_1}; \qquad F_2 = \frac{\partial F}{\partial l_2}; \quad \ldots; \quad F_n = \frac{\partial F}{\partial l_n}.$$

13. *Střední chyba opraveného pozorování* $x_v = l_v + v_v$ plyne z **12.** pro $F = x_v$. Pouze jedna z derivací F_v je 1, ostatní jsou nuly.

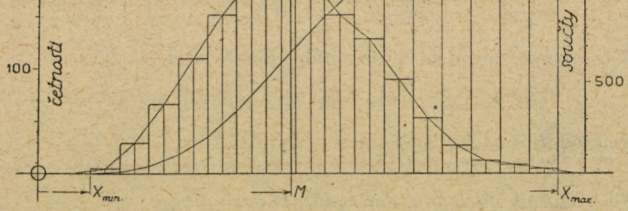
F. Čuřík: Počet vyrovnávací, 1936.
J. Ryšavý: Geodesie nižší, 1942.
R. Deltheil: Erreurs et moindres carrés, 1930.
H. Mineur: Technique de la méthode des moindres carrés, 1938.
F. Helmert: Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 3. vyd. 1924.
W. Jordan—O. Eggert: Handbuch der Vermessungskunde I., 8. vyd. 1935.

XIX. Statistika.

Statistika vyšetřuje číselně hromadné (kolektivní) zjevy čili soubory stejnorodých prvků (jedinců), majících aspoň jeden společný znak, a stanoví charakteristické vlastnosti souboru. Zevšeobecnění závěrů na širší kolektiva slouje *statistická indukce*.

Tabulka rozložení četností podává souvislost proměnného, spojitého nebo přetržitého znaku s jeho četností. Prvky, v celkovém počtu N, seřadí se podle postupující číselné hodnoty pozorovaného znaku X, zv. *argument*, do stejných intervalů, skupin nebo tříd ΔX, na něž celou variační šíři $X_{max} - X_{min}$ rozdělíme; přibližně je vhodný *počet tříd* $k \approx 2\sqrt[3]{N}$.

Graficky vyznačíme na ose x stupnici třídních intervalů a v jejich středech nanášíme *absolutní četnosti* (počty prvků v třídě) m nebo *relativní četnosti* $f = m : N$ ve zvoleném měřítku jako pořadnice. Spojením koncových bodů pořadnic dostaneme *mnohoúhelník četností* (frekvenční polygon). Nebo sestrojíme nad každým intervalem obdélník o výšce rovné četnosti třídy; stupňovitý obrazec takto získaný slouje *histogram* (obr. 50). Zmenšováním intervalů $\lim \Delta X \to 0$ při rostoucím bez omezení počtu pozorování (t. j. pro $\lim N \to \infty$) vznikne ideální *frekvenční křivka* jako obraz *rozdělovací funkce* $y = f(X)$.



Obr. 50.

Nanášíme-li od počátečního znaku $X = a$ v koncových bodech intervalů na pořadnice (třebas v jiném, zmenšeném měřítku) *součty* četností všech předcházejících tříd, dostaneme *obraz funkce součtové*, v mezném případě

$$\text{integrální funkce } F(X) = \int_a^X f(X)\,dX.$$

Konstrukce je nezávislá na volbě tříd, poslední pořadnice je N. Křivka tvaru S trvale stoupá, bod obratu odpovídá vrcholu křivky frekvenční. Grafickým diferencováním možno ze součtové funkce $F(X)$ odvoditi rozdělovací funkci $f(X)$.

1. Statistické charakteristiky.

Hodnota pozorovaného znaku $X_1, X_2, \ldots, X_k$, vyznačená středy intervalů, se vyskytuje v souboru $m_1, m_2, \ldots, m_k$-krát;

rozsah souboru $N = \Sigma m_i$; *relativní četnost znaku* $f_i = \frac{m_i}{N}$.

1. *Aritmetický* (obecný, zvážený) *průměr*

$$M = \frac{m_1 X_1 + m_2 X_2 + \ldots + m_k X_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k} = \frac{1}{N} \sum_1^k m_i X_i .$$

Je-li speciálně ve skupině n prvků každý jen jednou, je průměr (prostý)

$$M = \frac{1}{n} \sum_1^n X_i .$$

Odchylky od aritmetického průměru $x_i = X_i - M$;

kontrola odchylek $\sum_1^k m_i x_i = 0$.

2. *Směrodatná odchylka* (ve vyrovnávacím počtu *střední chyba*) je měřítkem proměnnosti znaku:

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{1}{N}\left(m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + \ldots + m_k x_k^2\right)} = \pm \sqrt{\frac{1}{N} \sum_1^k m_i x_i^2} ;$$

je-li ve skupině n prvků každý jen jednou, je

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{1}{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)} = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \sum_1^n x_i^2} .$$

Rozptyl (*disperse*) sluje čtverec směrodatné odchylky:

$$\sigma^2 = \Sigma x_i^2 f_i \text{ (moment druhého stupně).}$$

3. *Směrodatná odchylka aritmetického průměru* $\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$.

4. *Směrodatná odchylka směrodatné odchylky* $\sigma_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2\,(N-1)}}$.

5. *Činitel proměnnosti* $100\,\frac{\sigma}{M}$ v procentech průměru slouží k přirovnání stability dvou souborů.

6. *Medián* čili *centrální hodnota* argumentu X dělí rozsah souboru, seřaděného podle velikosti znaku, na dva sobě rovné díly.

Rovnoběžka s osou x, vedená v polovině poslední pořadnice součtové křivky, protne křivku v bodě, jehož úsečka je centrální hodnota znaku.

7. *Modus* je hodnota znaku, který má v souboru největší četnost (*typický znak*).

Modus je zobrazen úsečkou vrcholu křivky frekvenční nebo úsečkou bodu obratu křivky součtové.

Z momentů třetího a čtvrtého stupně jsou odvozeny:

8. *Činitel kososti* $\frac{1}{\sigma^3}\Sigma x_i^3 f_i$. **9.** *Činitel plochosti* $\frac{1}{\sigma^4}\Sigma x_i^4 f_i$.

10. *Rozptyl (disperse) statistických řad.* Kolísání hodnot znaku kolem střední hodnoty je buď náhodné nebo způsobeno systematickými vlivy. Poměr skutečného (empirického) a očekávaného (apriorního) rozptylu při stálé pravděpodobnosti (**4.** str. 222) je t. zv. *Lexisův poměr (koeficient divergence) Q:*

$$Q^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{s} : npq,$$

kde s je počet serií (výběrů), n počet pokusů v serii, p pravděpodobnost známá nebo statisticky určená.

Podle toho je rozptyl

normální: $Q = 1$, pravděpodobnost je stálá (nezávislost pokusů);

nadnormální: $Q > 1$, pravděpodobnost je v serii stálá, v každé jiná;

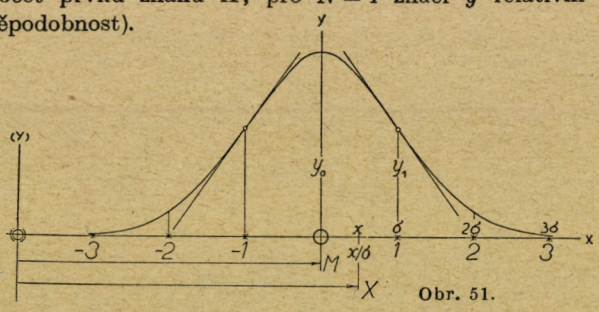
podnormální: $Q < 1$, pravděpodobnost je v seriích stejně proměnná.

2. Normální rozložení.

11. *Gaußův zákon.* Hromadné zjevy, kde kolísání hodnot argumentu X kolem průměru M je zcela náhodné, t. j. děje se z neznámých a nezjistitelných příčin, mají *rozložení normální:*

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-M)^2}{2\sigma^2}};$$

y je počet prvků znaku X; pro $N = 1$ značí y relativní četnost (pravděpodobnost).



Obr. 51.

Normální křivka (obr. 51), zobrazující Gaußův zákon, je souměrná podle největší pořadnice y_0 v místě $X = M$.

12. *Největší pořadnice* $y_0 = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Zavedením odchylek $x = X - M$ pošine se počátek do bodu M.

13. *Rovnice normální křivky*

$$y = y_0 \, e^{-\frac{(x:\sigma)^2}{2}}.$$

Body obratu křivky mají souřadnice $x = \pm\sigma$; $y = y_0 \, e^{-\frac{1}{2}}$.

Při normálním rozložení četností se aritmetický průměr, medián a modus ztotožňují; činitel kososti je 0, činitel plochosti 3.

3. Přirovnání daného rozložení k normálnímu.

Přirovnáme buď frekvenční polygon k normální křivce nebo normální (theoretické) četnosti ke skutečným.

14. *Konstrukce křivky.* Rovnici normální křivky, odpovídající danému rozložení, dostaneme dosazením N a σ do rovnic **12.** a **13.** Pro různé hodnoty poměrných úseček $x:\sigma$, t. j. pro odchylky $x = X - M$, vyjádřené v jednotce σ, vyhledáme v tabulce (viz *Matematické a statické tabulky I., str. 64*)

$$\text{poměr pořadnic } \frac{y}{y_0} = e^{-\frac{(x:\sigma)^2}{2}} = q$$

a z něho vypočteme příslušnou pořadnici $y = y_0 q$; z jednotlivých bodů pak křivku sestrojíme (obr. 51).

Na př. pro odchylky $x_1 = \pm\sigma$; $x_2 = \pm 2\sigma$; $x_3 = \pm 3\sigma$ jako poměrné úsečky $x:\sigma = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ jsou příslušné pořadnice $y_1 = 0{,}60653\, y_0$; $y_2 = 0{,}13534\, y_0$; $y_3 = 0{,}01111\, y_0$.

Tečny v bodech obratu protínají osu **x** v bodech $\pm 2\sigma$; poloměr křivosti ve vrcholu je $\sigma^2 : y_0$. Osa **x** je asymptota.

15. *Počet prvků*, který při normálním rozložení četností možno očekávati v intervalu od $x = a$ do $x = b$, je dán integrálem

$$F_a^b = y_0 \int_a^b e^{-\frac{(x:\sigma)^2}{2}} \, dx,$$

t. j. *obsahem plochy normální křivky* mezi pořadnicemi y_a, y_b a osou **x**. Celá plocha křivky má obsah $F_{-\infty}^{\infty} = N$.

Ve zmíněné tabulce na str. 65 jsou k poměrným číslům $x:\sigma$ vypočteny hodnoty $F(x:\sigma)$, t. j. obsahy částí plochy normální křivky mezi její osou souměrnosti a pořadnicí v místě x, při čemž polovina plochy má obsah $F_0^{\infty} = 0{,}5$. Celá plocha znázorňuje celkový rozsah souboru N.

Jde-li o soubor jiného rozsahu N', než je v tabulce, kde $N = 1$, dostaneme hledanou četnost v intervalu $(0, x:\sigma)$, násobíme-li příslušnou hodnotu tabulky číslem N'.

Podle tabulky je v souboru $N' = 100\,000$ prvků při normálním rozložení

od M do σ nebo od M do $-\sigma$ 34 134 prvků, t. j. 34,1% rozsahu souboru;
„ M „ 2σ „ „ M do -2σ 47 725 „ „ „ 47,7% „ „
„ M „ 3σ „ „ M do -3σ 49 865 „ „ „ 49,9% „ „

16. Četnost v libovolném intervalu $x_2 - x_1$ je vyjádřena rozdílem $F(x_2:\sigma) - F(x_1:\sigma)$, který stanovíme rovněž podle tabulky.

V intervalu od 3σ do ∞ je $50\,000 - 49\,865 = 135$ prvků, t. j. jen 0,135% souboru.

Značí-li určitá střední část plochy toleranci výrobku, vyjadřuje zbytek riziko dodávky. Jiné způsoby užití statistiky na kontrolu hromadné výroby (s tabulkami, obrazci a příklady) viz ČSN 2240-1940, Statistická kontrola jakosti.

4. Nesouměrné rozložení.

Působením jednostranných zákonitých vlivů nebo jiných soustavných příčin je frekvenční křivka nesymetrická. S rostoucí nesouměrností vzdalují se od sebe průměr M, medián M' a modus M''.

Nesouměrné rozložení, časté v biologii, mají řídké zjevy (10., str. 222). Křivka, zobrazující t. zv. Poissonovu funkci, probíhá podobně jako v obr. 52; s rostoucím $sp \approx \overline{n}$ se vrchol snižuje a šine se doprava.

17. *Absolutní míra nesouměrnosti (kososti) rozložení* $M - M''$ je kladná při levostranné asymetrii (obr. 52), jež se často vyskytuje v biologii.



Obr. 52.

18. *Relativní míra nesouměrnosti rozložení* $\dfrac{M - M''}{\sigma}$.

Pearson stanovil 12 základních typů frekvenčních křivek. Dvouvrcholová frekvenční křivka svědčí o nesourodosti souboru; možno si představiti, že vznikla ze dvou jednovrcholových. Rozbor viz ČSN 2240-1940.

5. Korelace.

Korelace čili *souvztažnost* je vztah dvou statistických řad $X_1, X_2, \ldots; Y_1, Y_2, \ldots$, při němž s měnícími se hodnotami znaku řady jedné mění se rozložení četností znaku řady druhé a naopak.

Kdežto při funkční závislosti patří každé hodnotě X jedna určitá hodnota Y, přísluší při stochastické čili kolektivní závislosti argumentu X řada hodnot Y.

Korelační tabulka má dva vchody (řádky a sloupce); podává rozložení četností podle jednoho znaku a v rámci jeho každé třídy rozložení podle znaku druhého. Grafický obraz tabulky je *korelační pole* s pravoúhlou sítí tříd, v němž body (X, Y) tvoří nepravidelný shluk; je-li směr nejhustšího pásma k osám šikmý, je mezi znaky korelace; je-li rovnoběžný s některou osou, není mezi nimi příčinného vztahu.

Nanášíme-li k úsečkám X průměry příslušných Y jako pořadnice, vznikne spojením bodů t. zv. *regresní čára;* podobně druhá, nanášíme-li k hodnotám Y průměry příslušných X jako úsečky. Obě nahradíme přímkami regrese, které nejlépe přiléhají k hodnotám průměrů. Čím ostřejší úhel svírají, tím těsnější je příčinný vztah obou znaků.

Nanášíme-li na kolmice, vztyčené ve středu každého pole korelační tabulky pro dva znaky X a Y, délky úměrné četnostem v poli, dostaneme soustavu bodů v prostoru, jimiž v mezném případě je naplněna spojitá *korelační plocha četností*. Při normální korelaci jsou řezy kolmé k rovině **x y** křivky normální; vrstevnice plochy jsou podobné a podobně položené elipsy. Jejich průměty spojují v korelační tabulce body téže četnosti.

Korelace dvou znaků X, Y se zjistí početně. Podle korelační tabulky stanovíme *aritmetické průměry* M_X, M_Y a pak *odchylky od aritm. průměrů:* $x_i = X_i - M_X$; $y_i = Y_i - M_Y$.

19. *Koeficient korelace:* $r = \dfrac{\Sigma x_i y_i}{\sqrt{\Sigma x_i^2 \Sigma y_i^2}}$

je mírou příčinného vztahu znaků X a Y. Když $r = 0$, není mezi znaky žádný vztah; při $r = 1$ je korelace úplná. Je-li $r > 0$, stoupá Y s přibývajícím X; je-li $r < 0$, klesá.

20. *Směrodatná odchylka koeficientu korelace:* $\sigma_r = \dfrac{1 - r^2}{\sqrt{n}}$.

Vypočtený koeficient korelace **19.** je v mezích $r \pm \sigma_r$.

J. Janko: Základy statistické indukce, 1937.
U. Yule: An introduction to the theory of statistics, 11. vyd. 1937 (čes. dle 7. vyd. V. Novák–J. Mráz: Úvod do teorie statistiky, 1926).
S. Kohn: Základy teorie statistické metody, 1929 (s přehledem literatury).
Ch. Jordan: Statistique mathématique, 1927.
R. Fisher: Statistical methods for research workers, 6. vyd. 1936.
O. Anderson: Einführung in die matematische Statistik, 1935.
G. Darmois: Statistique mathématique, 1928.
E. Czuber: Die statistischen Forschungsmethoden, 3. vyd. 1938.
H. Rietz: Handbook of mathematical statistics. 1924 (něm. překl. 1930).
E. Kohlweiler: Statistik im Dienste der Technik, 1931.
W. Shewhart: Economic control of quality of manufactured product, 1931.

XX. Methody praktické analysy.

1. Výpočet a konstrukce racionální funkce celistvé.

Píšeme-li indexy koeficientů souhlasně s mocniteli proměnné, má racionální celistvá funkce obecně tvar

$$f(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 .$$

1. *Hornerovo schema.* Pro dané $x = x_0$ je hodnota dané funkce $f(x_0)$ zbytkem dělení $f(x) : (x - x_0)$. Výpočet se provede ve schematu:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_2	a_1	a_0
	*	$x_0 a_n$	$x_0 s_{n-1}$	$\ldots$	$x_0 s_3$	$x_0 s_2$	$x_0 s_1$
x_0	a_n	s_{n-1}	s_{n-2}	$\ldots$	s_2	s_1	$(s_0) = f(x_0)$.

V prvním řádku jsou všechny i nulové koeficienty (se svými znaménky), druhý až na * pod a_n zatím volný podtrhneme, do třetího napíšeme vlevo x_0, pod * první koeficient a_n. Pak vypočteme součin $x_0 a_n$, napíšeme jej do řádku druhého pod a_{n-1} a součet $a_{n-1} + x_0 a_n = s_{n-1}$ do třetího. Ten násobíme faktorem x_0, součin napíšeme do řádku druhého pod a_{n-2} a součet do třetího atd. Poslední součet (s_0) je hledaná hodnota funkce $f(x_0)$.

Je-li $f(x_0) = 0$, jest x_0 nulové místo funkce čili kořen rovnice $f(x) = 0$.

Příklad 1. Stanoviti hodnotu funkce $f(x) = 1{,}8x^3 - 2{,}1x^2 + 3x + 1$ pro $x = 0{,}5$ a pro $x = -0{,}5$. Schema je následující:

	1,8	−2.1	3	1
	*	0,9	−0,6	1,2
0,5	1,8	−1,2	2,4	(2,2) = f(0,5)

	1,8	−2,1	3	1
	*	−0,9	1,5	−2 25
−0,5	1,8	−3	4,5	(−1,25) = f(−0,5)

Součiny vyčteme třebas na logaritmickém pravítku nebo provedeme strojem při jediném ustavení faktoru x_0; jsou-li to jednoduchá čísla, vynecháme druhý řádek a pod čáru píšeme hned součty.

Příklad 2. Průběh funkce $f(x) = x^3 - 11x + 12$ zobraziti křivkou $y = f(x)$. Ke zvoleným úsečkám x vypočteme v Hornerově schematu pořadnice y. Na př.

	1	0	−11	12
$x = -4$	1	−4	5	$(-8) = y$
−3	1	−3	−2	(18)
−2	1	−2	−7	(26)
−1	1	−1	−10	(22)

	1	0	−11	12
$x = 0$				$(12) = y$
1	1	1	−10	(2)
2	1	2	− 7	(−2)
3	1	3	− 2	(6)

Všechny řádky jsou odvozeny z podtrženého prvního. V intervalech (−4, −3); (1, 2) a (2, 3), kde funkce mění znamení, protíná křivka osu x; úsečky průsečíků jsou kořeny rovnice $f(x) = 0$.

Schema je výhodné také při vyčíslení částečného součtu mocninové řady.

2. *Transformace substitucí* $x = \xi + h$. Koeficienty transformované funkce, počínaje nejnižším, jsou zbytky postupného dělení; stanoví se methodou Hornerovou.

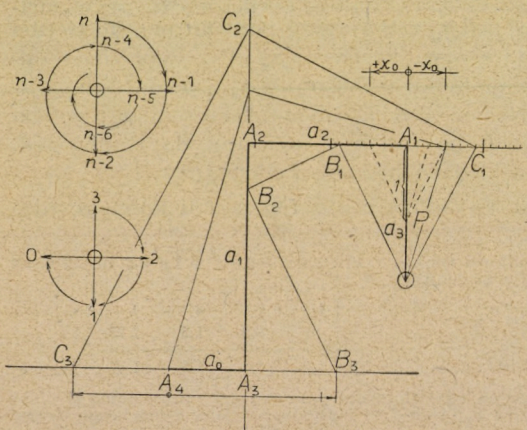
Příklad. Funkce $f(x) = x^3 + 6x^2 + x - 2$ se redukuje substitucí $x = \xi - 2$ tak, že odpadne kvadratický člen. Ve schematu je teď každý řádek odvozen z podtrženého předcházejícího; v závorkách jsou hledané koeficienty transformované funkce

	1	6	1	−2
−2	1	4	−7	(12)
−2	1	2	(−11)	
−2	1	(0)		
	(1)			

$$f(\xi - 2) = \xi^3 - 11\xi + 12.$$

Křivky $y = f(x)$ a $y = f(\xi - 2)$ jsou shodné; druhá vznikne posunutím o délku $h = 2$ ve směru $+x$.

3. *Konstrukce Lillova* (obr. 53) patří k nejrychlejším způsobům, jak určiti hodnoty racionální celistvé funkce pro dané $x = x_0$. Koeficienty, počínaje nejvyšším a_n, řadí se k sobě jako úsečky do pravoúhlého rámce podle pravotočivého směrového kříže. Ramena kříže jsou orientována ze středu O šipy a kol dokola označena v pořadí všemi čísly od $n\uparrow$ (směru $+y$) do nuly. Každému koeficientu je tím v rámci vytčen určitý směr a smysl; chybí-li některý, naneseme další ve směru a smyslu jemu příslušném (záporný běží proti šípu). Do rámce se pak napne od středu O pravoúhlý mnohoúhelník, jehož strany mají spád $\operatorname{tg} \varphi = x_0$. Úsek na poslední straně rámce od koncového bodu úsečky a_0 je již hledaná délka $f(x_0)$; kladná má opačný, záporná souhlasný smysl se směrem, jehož šip je označen nulou.



Obr. 53.

Příklad. Stanoviti hodnotu funkce $f(x) = 1{,}8x^3 - 2{,}1x^2 + 3x + 1$ pro $x = 0{,}5$, $x = -0{,}5$ (obr. 53). Napřed vyznačíme směrový kříž s počátečním směrem $3\uparrow$. Podle něho pak sestrojíme na milimetrovém papíru rámec o stranách

$$a_3 = 1{,}8 = OA_1; \quad a_2 = -2{,}1 = A_1A_2; \quad a_1 = 3 = A_2A_3; \quad a_0 = 1 = A_3A_4.$$

Od bodu A_1 dolů naneseme jednotku délky do bodu P a na kolmici doleva kladné, doprava záporné x_0; s přeponou tak určeného trojúhelníka vedeme bodem O rovnoběžku. Dále jest

$$B_1B_2 \perp OB_1; \quad B_2B_3 \perp B_1B_2; \quad A_4B_3 = f(0{,}5) = +2{,}2.$$

Zápornému $x_0 = -0{,}5$ patří mnohoúhelník $OC_1C_2C_3$ a $A_4C_3 = f(-0{,}5) = -1{,}25$. Měníme-li mnohoúhelník v rámci tak, až poslední rameno zapadne do bodu A_4, a bodem P vedeme rovnoběžku s prvním ramenem, nalezli jsme v úseku $x = -0{,}27$ přibližný kořen rovnice $f(x) = 0$; uvedeným schematem vypočteme $f(-0{,}27) = 0{,}0015$ místo nuly.

Lillova konstrukce je grafická úprava Hornerovy methody; čísla třetího řádku (v příkladu 1.) jsou tu zobrazena úsečkami na stranách rámce.

2. Řešení rovnic algebraických i transcendentních.

1. *Obrazy reálných kořenů* rovnice $f(x) = 0$ a jejich přibližné hodnoty se přehledně zjistí graficky dvojím způsobem:

a) zobrazíme křivku $y = f(x)$; její průsečíky s osou x jsou obrazy kořenů. Nebo

b) rovnici $f(x) = 0$ rozvedeme na tvar $\varphi(x) = \psi(x)$ a zobrazíme křivky $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$. Úsečky průsečíků těchto křivek jsou kořeny rovnice $f(x) = 0$.

Druhého způsobu užijeme zvláště pro řešení rovnice kubické a rovnic transcendentních. V obou případech možno voliti na osách různá měřítka. Přibližnou hodnotu kořene určíme přesněji zvětšením výkresu v oblasti průsečíku nebo ji zlepšíme některou numerickou methodou.

Reálné kořeny dvou rovnic o dvou neznámých

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0$$

najdeme přibližně graficky jako souřadnice průsečíků dvou křivek, určených danými rovnicemi. Zpravidla jde o jednu určitou dvojici kořenů (x, y).

2. *Separace kořenů.* Podle grafického obrazu vytkneme snadno interval (x_1, x_2), v němž hledaný kořen je uzavřen. Obecně platí věta:

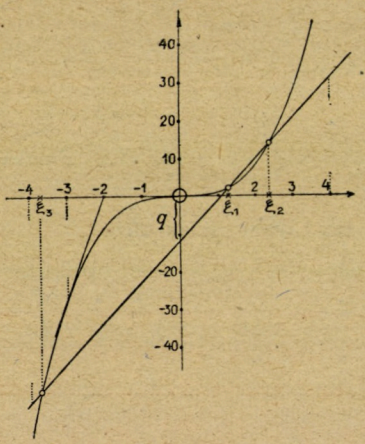
Mezi dvěma hodnotami x_1, x_2, pro které spojitá funkce $f(x)$ má různá znamení, jest jeden nebo lichý počet kořenů; nemění-li derivace $f'(x)$ v intervalu (x_1, x_2) znamení, je v něm jen jeden kořen.

Pro algebraické rovnice platí četná pravidla, jimiž lze určiti hranice i počet kladných a záporných reálných kořenů.

Příklad 1. Kubická rovnice $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ se převede napřed substitucí $x = \xi - \frac{a}{3}$ na redukovanou $\xi^3 + p\xi + q = 0$, kterou rozvedeme na dvě rovnice

$$y = \xi^3; \quad y = -p\xi - q.$$

První značí kubickou parabolu (subtangenta rovná se třetině úsečky, obr. 54), druhá přímku. Obě zobrazíme na milimetrovém papíru (ξ v centimetrech, y v milimetrech, po případě v menším měřítku). Přímka protíná parabolu v jednom nebo ve třech bodech, z nichž dva mohou splynouti. Úsečky průsečíků jsou přibližné kořeny redukované rovnice; kořeny původní rovnice plynou potom z rovnice substituční.



Obr. 54.

Příklad 1. Rovnice $x^3+6x^2+x-2=0$ přejde substitucí $x=\xi-2$ na redukovanou $\xi^3-11\xi+12=0$, kterou řešíme parabolou $y=\xi^3$ a přímkou $y=11\xi-12$. V obr. 54 určena přímka dvěma body: (4, 32) a $(-4, -56)$, kde úsečky zvoleny, pořadnice vypočteny. Přibližné hodnoty kořenů jsou 1,3; 2 4; -3 7; přibližné kořeny rovnice původní $-0,7$; 0,4; $-5,7$.

Příklad 2. Transcendentní rovnice $\cos x=x$ se řeší křivkou $y=\cos x$, sestrojenou podle tabulek, a přímkou $y=x$ při stejném měřítku na osách. Obě se protínají v jediném bodě, jehož úsečka $x=0.7$ je přibližná hodnota kořenu; opravíme ji některou numerickou methodou.

Příklad 3. Komplexní kořeny rovnice $f(z)=0$ určíme rovněž graficky. Levou stranu rovnice rozvedeme na část reálnou a imaginární $f(x+iy)=u(x.y)+iv(x,y)$ a zobrazíme křivky $u(x,y)=0$; $v(x.y)=0$. Souřadnice x, y průsečíků obou křivek jsou součásti kořenů $z=x+iy$. Hodnoty tak nalezené možno ještě opraviti numerickými methodami.

3. *Regula falsi* (methoda úměrných částí). Jsou-li x_1, x_2 přibližné hodnoty kořenu rovnice $f(x)=0$, pro něž $f(x_1)$ a $f(x_2)$ mají různá znamení, je další přibližná hodnota

$$x_3=x_1-\frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)}f(x_1).$$

Geometricky je to úsečka průsečíku sečny s osou x, kterým se interval (x_1, x_2) dělí na dva: (x_1, x_3) a (x_3, x_2). Další přiblížení hodnotou x_4 je v tom z obou, na jehož koncích má funkce různá znamení. Tak pokračujeme, až žádaný počet míst zůstane při nové hodnotě beze změny.

4. *Methoda Newtonova.* Je-li x_1 přibližná hodnota kořenu rovnice $f(x)=0$, je další hodnota přibližná

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Geometricky je to úsečka průsečíku tečny s osou x. Obecně (není-li hodnota $f(x_1)$ už blízká nule) mají hodnoty funkce $f(x_1)$ i druhé derivace $f''(x_1)$ míti totéž znamení.

Je záhodno při výpočtu přibližné hodnoty kořene (při jeho postupné *aproximaci*) kombinovati obě uvedené methody (**3.** a **4.**).

Příklad 1. Rovnice $\cos x = x$ má přibližný kořen $x_1 = 0{,}7$. Píšme

$$f(x) = x - \cos x; \quad f'(x) = 1 + \sin x; \quad f''(x) = \cos x.$$

Zde jest

$$x_2 = 0{,}7 - \frac{0{,}7 - 0.76484}{1 + 0{,}64422} = 0{,}7394$$

další přibližnou hodnotou kořenu. S tou vypočteme podobně x_3 atd. (kořen je 0,739085).

Příklad 2. Rovnice $x^x = 100$ se řeší ve tvaru $x \log x = 2$. Z logaritmických tabulek nebo graficky (průsečíkem křivky $y = x \log x$ a přímky $y = 2$) zjistíme, že jediný reálný kořen rovnice je v intervalu (3, 4). Ježto

$$f(x) = x \log x - 2; \qquad f'(x) = x \frac{\log e}{x} + \log x; \qquad f''(x) = \frac{\log e}{x};$$

$$f(3) = 3 \log 3 - 2 = - \ldots; \qquad \log e = M = 0{,}434\,294; \qquad f''(3) = + \ldots;$$

$$f(4) = 4 \log 4 - 2 = + \ldots; \qquad f''(4) = + \ldots,$$

vyjdeme od $x_1 = 4$. Další přiblížení

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 4 - \frac{4 \log 4 - 2}{M + \log 4} = 3{,}606\,081.$$

S touto hodnotou je

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 3{,}606\,081 - \frac{3{,}606\,081 \log 3{,}606\,081 - 2}{0{,}434\,294 + \log 3{,}606\,081} = 3{,}597\,289$$

přesně na 5 des. míst, neboť $x_4 = 3{,}597\,284$.

Poznámka. Rovnice, které mají neznámou v mocniteli mocniny nebo v argumentu logaritmu, jsou transcendentní a slují *exponenciální* nebo *logaritmické*. Logaritmováním a vhodnou úpravou lze je však mnohdy převésti na tvar rovnic algebraických. Na př.

$$\sinh x = 1 \quad \text{čili} \quad e^x - e^{-x} = 2$$

je rovnice exponenciální. Násobíme-li ji činitelem e^x, přejde na tvar rovnice kvadratické

$$e^{2x} - 2e^x - 1 = 0; \quad e^x = 1 \pm \sqrt{2}, \quad x = \lg (1 \pm \sqrt{2}).$$

Reálný kořen $x = \lg 2{,}41421 = 2{,}302585 \log 2{,}41421 = 0{,}88137$;

komplexní kořeny $x_k = \lg (-0{,}41421) = \lg 0{,}41421 + i(2k + 1)\pi$; (viz str. 14).

Dvě rovnice o dvou neznámých: $f(x, y) = 0; \quad g(x, y) = 0.$

Jsou-li x_1, y_1 přibližné hodnoty dvojice kořenů soustavy daných rovnic, je další přiblížení

$$x_2 = x_1 - \frac{f g'_y - g f'_y}{D}; \qquad y_2 = y_1 - \frac{f g'_x - g f'_x}{D}$$

s podmínkou, že funkcionální determinant z parciálních derivací $D = f'_x g'_y - f'_y g'_x \neq 0$. Methoda vede rychle k cíli, jsou-li první přibližné hodnoty x_1, y_1 dosti blízké dvojici kořenů.

5. *Iterace.* Možno-li danou rovnici $f(x) = 0$ převésti na tvar $x = \varphi(x)$ a je-li v intervalu mezi kořenem x a jeho přibližnou hodnotou x_1 derivace $|\varphi'(x)| < 1$, jsou další přibližné hodnoty

$$x_2 = \varphi(x_1); \quad x_3 = \varphi(x_2); \quad \ldots$$

Je-li $|\varphi'(x)| > 1$, převedeme rovnici $x = \varphi(x)$ na inversní $\psi(x) = x$; tu možno již řešiti iterací, ježto $\psi'(x) = \frac{1}{\varphi'(x)}$ je pravý zlomek.

Dvě rovnice o dvou neznámých: $f(x, y) = 0$; $g(x, y) = 0$ převedeme nejprve na tvar

$$x = \varphi(x, y); \quad y = \psi(x, y)$$

tak, aby funkce φ a ψ v okolí nulového místa málo se měnily. Jsou-li x_1, y_1 přibližné hodnoty dvojice kořenů, je další přiblížení

$$x_2 = \varphi(x_1, y_1); \quad y_2 = \psi(x_1, y_1)$$

atd. Postup konverguje k hodnotám přesným, když všechny parciální derivace funkcí φ a ψ jsou menší než $\frac{1}{2}$.

3. Analysa empirických funkcí.

Empirické závislosti jsou zjišťovány pokusně: řadě zvolených (bezvadných) hodnot $x_0, x_1, \ldots, x_n$ přísluší naměřené hodnoty funkce $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Vzhledem k nevyhnutelným chybám pozorování neleží body takto určené na hladké křivce, nýbrž jsou různě rozptýleny. Užijeme-li Lagrangeova vzorce (**4.** na str. 211), prochází parabola n-tého stupně nalezenými body v počtu $n + 1$ bez ohledu na okolí. Proto určíme raději parametry náhradní funkce, která všem pozorováním nejlépe se bliží, vyrovnávacím počtem.

1. *Lineární závislost.* Leží-li body $M_\nu(x_\nu, y_\nu)$ přibližně na přímce $y = a_0 + a_1 x$, určíme její nejvýhodnější polohu napjatou nití a stanovíme parametry a_0 (úsek na ose **y**), $a_1 = \operatorname{tg} \alpha$ (směrnice). Nebo vyrovnávacím počtem: píšeme-li podle odst. (α) na str. 232 rovnice oprav $v_\nu = a_0 + a_1 x_\nu - y_\nu$ pro $\nu = 1, 2 \ldots n$, jsou normální rovnice

$$\begin{aligned} n a_0 + [x] a_1 - [y] &= 0 \\ [x] a_0 + [xx] a_1 - [xy] &= 0; \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{[xx][y] - [x][xy]}{n[xx] - [x]^2}, \qquad a_1 = \frac{n[xy] - [x][y]}{n[xx] - [x]^2}.$$

Vyrovnaná přímka jde těžištěm soustavy bodů $M_\nu(x_\nu, y_\nu)$; jeho souřadnice jsou $x_T = [x] : n$, $y_T = [y] : n$.

2. *Anamorfosa.* Probíhá-li ve funkční síti $\xi = \varphi(x)$, $\eta = \psi(y)$ empirická funkce jako přímka $\eta = a_0 + a_1 \xi$, na př. funkce mocninová v jednoduché, exponenciální ve dvojité logaritmické síti (str. 265), vyrovnáme graficky nebo počtem. Při bezvadných ξ mají body (ξ, η) váhu $p = 1 : \psi'^2$; normální rovnice jsou

$$[p]a_0 + [p\,\xi]\,a_1 - [p\,\eta] = 0$$

$$[p\,\xi]a_0 + [p\,\xi^2]\,a_1 - [p\,\xi\,\eta] = 0.$$

3. *Aproximace racionální funkcí celistvou.* Podle průběhu empirické funkce (seskupení bodů) rozhodneme o stupni funkce náhradní: při souměrném zakřivení volíme funkci 2. stupně, při nesouměrném s jedním bodem obratu funkci 3. stupně, se dvěma body obratu funkci 4. stupně atd. Většinou vystačíme v menším intervalu s funkcí třetího stupně.

Pro usnadnění výpočtu převedeme interval (a, b) na $(-1, +1)$ substitucí

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\,t.$$

Náhradní funkce: $y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$.

Volíme-li ekvidistantní hodnoty t, odpadnou v normálních rovnicích součty lichých mocnin a soustava se rozpadne na dvě

$$na_0 + [t^2]\,a_2 - [y] = 0, \qquad [t^2]\,a_1 + [t^4]\,a_3 - [ty] = 0,$$

$$[t^2]\,a_0 + [t^4]\,a_2 - [t^2 y] = 0, \qquad [t^4]\,a_1 + [t^6]\,a_3 - [t^3 y] = 0;$$

z první vypočteme a_0, a_2, z druhé a_1, a_3.

4. Vyrovnání empirické řady.

Na ekvidistantních místech $x_\nu = x_0 + \nu\Delta x$ byly pokusným měřením zjištěny silně kolísající hodnoty y_ν jisté empirické funkce. Obrazem závislosti je řada rozptýlených bodů (x_ν, y_ν), kterou před diferencováním nutno nahraditi souvislou hladkou křivkou.

Při slabém zakřivení nahradíme každé y_ν aritmetickým průměrem tří sousedních

$$\overline{y_\nu} = \frac{1}{3}(y_{\nu-1} + y_\nu + y_{\nu+1}) = y_\nu + \frac{1}{3}\Delta^2_\nu.$$

Vyrovnání možno provésti graficky. Jsou-li A_1, A_2, A_3 tři sousední body, spojíme body A_1 a A_3 příčkou, která pořadnici bodu A_2 protne v bodě B_2. Úsečku $F_2 B_2$ rozdělíme na tři díly, dělicí bod k příčce přilehlý je bodem náhradním. Tak opravíme všechny body mimo oba krajní.

Nevyhovuje-li první oprava, možno výkon znovu opakovati.

Při silném zakřivení nahradíme každé y_ν hodnotou

$$\overline{y_\nu} = y_\nu - \frac{3}{35} \Delta^4_{\nu-2} .$$

Vzorců nelze upotřebiti na začátku a konci řady pozorování.

5. Harmonická analysa periodické funkce.

Periodická funkce $f(x) = f(x + 2\pi)$ s periodou 2π je zobrazena buď empirickou křivkou nebo přetržitou (diskretní) řadou bodů. Na ekvidistantních místech, obecně pro

$$x_\nu = \frac{2\pi}{n} \nu, \quad \text{kde} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n, \text{ čili pro}$$

$$x_0 = 0, \quad x_1, \quad x_2, \ldots \quad \ldots, x_{n-1}, \quad x_n = 2\pi$$

má funkce hodnoty (křivka pořadnice)

$$y_0, \quad y_1, \quad y_2, \ldots \quad \ldots, y_{n-1}, \quad y_n = y_0 .$$

Hledá se pro ni přibližný analytický výraz ve tvaru goniometrického mnohočlenu.

Funkce $f(x)$ s periodou l přejde transformací $t = \frac{2\pi x}{l}$ na periodu 2π.

1. *Náhradní funkce* budiž

$$\psi(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_m \cos mx$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_m \sin mx$$

a počet daných pořadnic budiž větší než počet členů náhradní funkce,

$$n > 2m + 1 .$$

Methodou nejmenších čtverců plynou z podmínky

$$\sum_\nu [\psi(x_\nu) - y_\nu]^2 = \text{minimum} \qquad (1)$$

koeficienty náhradní funkce, která se dané funkci nejlépe blíží:

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_\nu y_\nu ; \quad a_\mu = \frac{2}{n} \sum_\nu y_\nu \cos \mu x_\nu ; \quad \text{v součtech } \nu = 1, 2, \ldots n ;$$

$$b_\mu = \frac{2}{n} \sum_\nu y_\nu \sin \mu x_\nu ; \quad \text{pro } \mu = 1, 2 \ldots m .$$

Při pevném $\mu = 1, 2, \ldots m$ probíhá ν hodnotami $\nu = 1, 2, \ldots n$. Stejnolehlé sinové a kosinové členy možno spojiti, klademe-li

$$a_\mu = A_\mu \sin \varphi_\mu , \; b_\mu = A_\mu \cos \varphi_\mu ; \quad A_\mu = + \sqrt{a_\mu^2 + b_\mu^2} , \; \operatorname{tg} \varphi_\mu = b_\mu : a_\mu ;$$

náhradní funkce nabude tvaru

$$\psi(x) = a_0 + A_1 \sin (x + \varphi_1) + A_2 \sin (2x + \varphi_2) + \ldots + A_m \sin (mx + \varphi_m) .$$

2. *Methoda Rungeova. Náhradní funkce* má tvar

$$\psi(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_{m-1} \cos (m-1)x + a_m \cos mx$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_{m-1} \sin (m-1)x$$

a počet daných pořadnic se shoduje s počtem členů; prakticky se volí násobek čtyř,

$$n = 2m = 4p.$$

Výraz (1) lze teď učiniti nulou, takže náhradní funkce v místech (x_ν) s danou souhlasí (goniometrická interpolace).

Koeficienty náhradní funkce

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_\nu y_\nu; \qquad a_\mu = \frac{2}{n} \sum_\nu y_\nu \cos \mu x_\nu;$$

$$a_m = \frac{1}{n} \sum_\nu y_\nu \cos m x_\nu = \frac{1}{n} \sum_\nu (-1)^\nu y_\nu; \qquad b_\mu = \frac{2}{n} \sum_\nu y_\nu \sin \mu x_\nu;$$

v součtech $\nu = 1, 2, \ldots, n$; pro $\mu = 1, 2, \ldots, m-1$.

Početní schema pro 12 daných pořadnic.

Pořadnice analysované křivky přeložíme do dvou řádek a utvoříme jejich součty a rozdíly.

Pořadnice	*	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
	y_{12}	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	*
součet	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
rozdíl	*	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	*

Součty s a rozdíly d přeložíme znovu a utvoříme z nich:

	s_0	s_1	s_2	s_3	d_1	d_2	d_3
	s_6	s_5	s_4	*	d_5	d_4	*
součet	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3	σ_1	σ_2	σ_3
rozdíl	Δ_0	Δ_1	Δ_2	*	δ_1	δ_2	*

Koeficienty členů kosinových.

cos $0^0 = 1$	s_0	s_1	δ_0		s_0	$-s_3$	δ_0	δ_2
	s_2	s_3						
cos $30^0 = 1 - 0{,}1340$				δ_1				
cos $60^0 = 0{,}5$			δ_2		$-s_2$	s_1		
součet	*I*	*II*	*I*	*II*	*I*	*II*	*I*	*II*
$I + II$	$12\,a_0$		$6\,a_1$		$6\,a_2$			
$I - II$	$12\,a_6$		$6\,a_5$		$6\,a_4$		$6\,a_3$	

Koeficienty členů sinových.

sin $30^0 = 0{,}5$	σ_1					
sin $60^0 = 1 - 0{,}1340$		σ_2	δ_1	δ_2		
sin $90^0 = 1$	σ_3				σ_1	σ_3
součet	*I*	*II*	*I*	*II*	*I*	*II*
$I + II$	$6\,b_1$		$6\,b_2$			
$I - II$	$6\,b_5$		$6\,b_4$		$6\,b_3$	

Veličiny s, δ, σ, δ znásobíme čísly v prvním sloupci téhož řádku a součiny sečteme do sloupců *I*, *II*; z těch pak součtem a rozdílem plynou vypsané násobky koeficientů.

Místo cos $30^0 = \sin 60^0 = 0{,}8660$ jest psáno $1 - 0{,}1340$, ježto na logaritmickém pravítku je násobení číslem 0,1340 přesnější.

Kontrola koeficientů: $[y^2] = \frac{1}{6}(A + B)$, kde značí

$$[y^2] = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{11}^2 + y_{12}^2;$$

$$A = \tfrac{1}{2}(12\,a_0)^2 + (6\,a_1)^2 + (6\,a_2)^2 + \ldots + (6\,a_5)^2 + \tfrac{1}{2}(12\,a_6)^2;$$

$$B = (6\,b_1)^2 + (6\,b_2)^2 + \ldots + (6\,b_5)^2.$$

Rovnice analysované křivky:

$$y = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + a_4 \cos 4x + a_5 \cos 5x + a_6 \cos 6x + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + b_4 \sin 4x + b_5 \sin 5x.$$

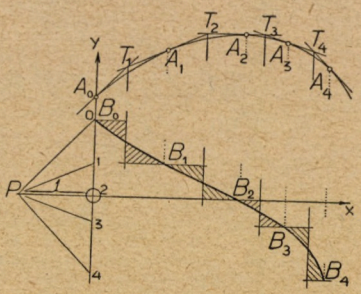
Pro přesnější analysu (24 pořadnic) jsou tištěné formuláře *(Runge-Emde)*, šablony *(Zipperer)* a tabulky *(Pollak)*. Koeficienty možno stanoviti také graficky. Přístroje, které mechanicky analysují, slují *harmonické analysátory*.

6. Grafické diferencování a integrování.

1. *Konstrukce křivky diferenciální* (obr. 55). *a)* V jednotlivých bodech $A_1, A_2, A_3, \ldots$ dané křivky (A) sestrojíme tečny a pólem P, ve vzdálenosti 1 vlevo od počátku zvoleným, vedeme s nimi rovnoběžky:

$$P_1 0 \parallel A_0 T_1, \quad P1 \parallel T_1 T_2,$$
$$P2 \parallel T_2 T_3, \ldots$$

Úseky na ose y (goniometrické tangenty) přenášíme rovnoběžkami s osou x na pořadnice dotykových bodů do $B_1, B_2, B_3, \ldots$, které jsou již body hledané diferenciální křivky (B). Jimi vedeme mezi pořadnicemi průsečíků tečen $T_1, T_2, T_3, \ldots$ úsečky rovnoběžné s osou x; body spojíme křivkou tak, aby vždy dva křivočaré trojúhelníky po obou stranách pořadnic bodů T měly stejný obsah.



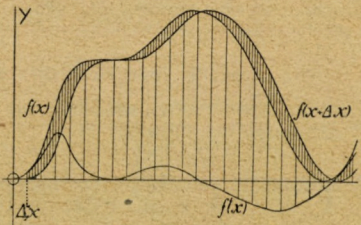
Obr. 55.

Nesprávná poloha tečen křivky (A) má značný vliv na tvar diferenciální křivky (B). Rychlou a přesnou konstrukci tečen lze provésti mechanickými prostředky: normálním zrcátkem nebo hranolovým derivátorem.

b) Přibližná konstrukce diferenciální křivky. Interval rozdělíme na jistý počet stejných dílů, tečny nahradíme sečnami a goniometrické tangenty nanášíme prostě na střední pořadnice.

c) Konstrukce Slabyho (obr. 56) nahrazuje diferenciální křivku křivkou diferenční. Danou křivku pošineme směrem $+x$ o malou délku Δx; rozdíly pořadnic obou křivek nanášíme jako pořadnice, pošinuté zpět o Δx.

Křivka nahrazuje velmi dobře křivku diferenciální tvarem i polohou. V polární soustavě pootočíme křivku o malý úhel $\Delta\varphi$ a nanášíme rozdíly průvodičů.



Obr. 56.

Z první diferenciální křivky (znázorňující rychlost) odvodíme obdobně druhou (zrychlení). Při konstrukci se chyby snadno hromadí.

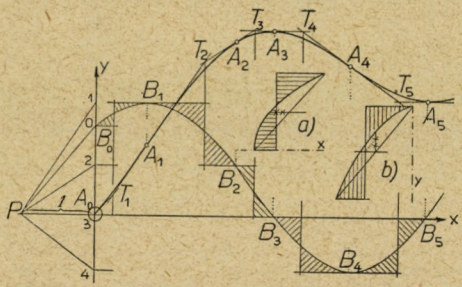
2. *Konstrukce čáry integrální* (obr. 57) je obrácená k předcházející. Danou křivku, jejíž rovnice $y = f(x)$ nemusí být známa, nahradíme nejprve stupňovitým obrazcem téhož obsahu. Řadou význačných bodů $B_0, B_1, B_2, \ldots$ (body krajní, body obratu, vrcholy, nulová místa a j.) vedeme rovnoběžky s osou x a mezi nimi umístíme svislé příčky tak,

aby přilehlé dva trojúhelníky měly stejný obsah. Dosáhneme toho odhadem, odpočítáním čtverečních milimetrů nebo pomocnou konstrukcí, při níž oblouk křivky nahradíme obloukem paraboly; má-li osa této směr x, jde příčka první třetinou průměru (*a*), při směru y šikmým průmětem třetiny (*b*). Body $B_0, B_1, B_2, \ldots$ promítneme do osy y a jejich průměty 0, 1, 2, ... spojíme s pólem $P(-1, 0)$. Vycházejíce z bodu A_0 $(a, 0)$, vedeme mezi prodlouženými příčkami rovnoběžky

$$A_0T_1 \parallel P0, \quad T_1T_2 \parallel P1, \quad T_2T_3 \parallel P2, \ldots$$

které jsou tečnami integrální čáry

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x);$$



Obr. 57.

dotykové body $A_0, A_1, A_2, \ldots$ leží na pořadnicích bodů $B_0, B_1, B_2, \ldots$

Pořadnice $F(x)$ udává svým měrným číslem obsah křivky $y = f(x)$ v intervalu od a do x. Zvětšíme-li vzdálenost pólu od počátku, zmenší se v témže poměru pořadnice.

Graficou integrací integrální čáry dostaneme druhou čáru integrální; její pořadnice udává statický moment plochy křivky $y = f(x$ vzhledem k pořadnici jako ose. Další graficou integrací vznikne třetí integrální čára; její pořadnice vyjadřuje poloviční moment setrvačnosti plochy. Mechanicky řeší tyto úkoly přístroje zvané *integrafy* (na př. *Abdank-Abakanoviczův*), které integrální čáru samy kreslí.

7. Integrace diferenciálních rovnic I. řádu.

1. *Numerická methoda* (*Runge-Kutta*). Partikulární integrál dané diferenciální rovnice

$$y' = f(x, y)$$

zobrazuje integrální čára, vycházející z daného počátečního bodu $A_0(x_0, y_0)$. Souřadnice dalšího bodu $x_1 = x_0 + h$, $y_1 = y_0 + k$ vypočteme; ke zvolenému h stanovíme přírůstek k podle vzorců:

$$k_1 = hf(x_0, y_0); \qquad k_2 = hf(x_0 + h/2,\ y_0 + k_1/2);$$

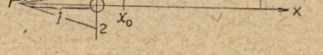
$$k_4 = hf(x_0 + h,\ y_0 + k_3); \qquad k_3 = hf(x_0 + h/2,\ y_0 + k_2/2);$$

$$k = \tfrac{1}{6}(k_1 + k_4) + \tfrac{1}{3}(k_2 + k_3).$$

Podobně určíme souřadnice $x_2 = x_1 + h$, $y_2 = y_1 + k$ bodu A_2 atd. Přírůstek h není třeba voliti příliš malý, neboť chyba je řádu h^5. Výpočet sestavíme v tabulce.

2. *Grafické methody.* Diferenciální rovnicí $y' = f(x.y)$ je v každém bodě roviny xy dán určitý směr ($y' = \operatorname{tg}\alpha$), který určíme v pomocném obrazci s pólem P.

a) V daném počátečním bodě $A_0(x_0, y_0)$ (obr. 58) vypočteme $f(x_0\, y_0) = c_0 = \operatorname{tg}\alpha_0$ a vedeme jím přímku směru α_0. Na přímce vytkneme bod $A_1(x_1, y_1)$ a bod B_1 s úsečkou $(x_0 + x_1) : 2$. Vypočteme $f(x_1, y_1) = \operatorname{tg}\alpha_1$ a bodem B_1 vedeme přímku směru α_1; na ní vytkneme bod $A_2(x_2, y_2)$ a bod B_2 s úsečnou $(x_1 + x_2) : 2$. Vypočteme $f(x_2.y_2) = \operatorname{tg}\alpha_2$ a bodem B_2 vedeme přímku směru α_2 atd. Dostaneme tak polygon z tečen přibližné integrální čáry s dotykovými body $A'_1, A'_2, \ldots$ na pořadnicích bodů $A_1, A_2, \ldots$. Lepšího přiblížení dosáhneme, vypočteme-li směr v bodě A'_1 a v tomto směru vedeme přímku bodem B_1; což opakujeme, až se směr nemění.



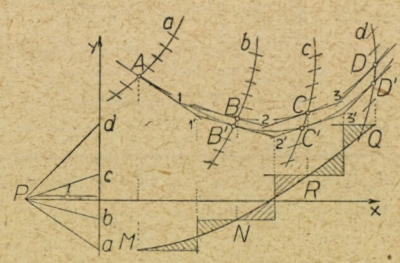
Obr. 58.

b) Isoklina $f(x,y) = \text{konst.}$ (obr. 59) spojuje body v rovině, v nichž integrální čáry mají týž směr. Pro různé hodnoty konstant zobrazíme síť isoklin $f(x,y) = a, b, c, \ldots$ a ke spádům $\operatorname{tg}\alpha = a$, $\operatorname{tg}\beta = b, \ldots$ určíme v pomocném obrazci s pólem P směry $\alpha, \beta, \ldots$ Daným bodem A vedeme úsečku směru α do bodu 1 mezi isoklinami a, b, odtud úsečku směru β do bodu 2 mezi b, c atd. Polygon z tečen protíná isokliny v bodech $A, B, C, \ldots$

c) Postupné přiblížení umožňuje nahraditi integrální čáru $y = y_1(x)$ lépe vyhovující čarou

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\, dx.$$

Obrazem funkce $f(x, y_1) = \dfrac{dy_2}{dx}$ je křivka, kterou proložíme body $M, N, R, \ldots$; jejich pořadnice $a, b, c, \ldots$ leží v pořadnicích bodů $A, B, C, \ldots$ Tuto křivku graficky integrujeme. První příčka s přilehlými křivočarými trojúhelníky stejných obsahů protíná přímku $A1$ v bodě $1'$; jím vedeme přímku směrem β k druhé příčce do bodu $2'$ atd. Průseky s isoklinami $B', C', D', \ldots$ jsou body dotyku druhé přibližné integrální čáry.



Obr. 59.

Další přiblížení $y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)\,dx$

provedeme obdobně. Pořadnice $a, b, c, \ldots$ sestrojené křivky se nemění, jen úsečky a příčky se pošinou. Vše opakujeme, až se čára v mezích grafické přesnosti od předcházející neliší. Postup konverguje k řešení $y(x)$, je-li K kladná konstanta,

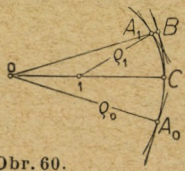
$$|[f(x, y_n) - f(x, y)] : (y_n - y)| < K; \qquad K|x - x_0| < 1.$$

8. Grafická integrace diferenciálních rovnic II. řádu.

Methoda Thompsonova. Diferenciální rovnice druhého řádu

$$y'' = f(x, y, y') \quad \text{čili} \quad \frac{1}{\varrho} = \cos^3\alpha \cdot f(x, y, \operatorname{tg}\alpha)$$

vyjadřuje křivost jako funkci polohy a směru, při čemž



Obr. 60.

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \frac{dx}{ds} = \cos\alpha,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\,\frac{d\alpha}{dx}, \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\varrho}.$$

Integrální čáru sestrojíme z oblouků kružnic křivosti. Ve výchozím bodě A_0 vypočteme z daných souřadnic x_0, y_0 a derivace y_0' poloměr křivosti ϱ_0 a naneseme jej ve správném směru a smyslu na kolmici k tečně (obr. 60). Směr je určen derivací, smysl znamením poloměru křivosti; při kladném smyslu je křivka nad tečnou, při záporném pod tečnou (str. 132). Poloměrem ϱ_0 opíšeme přiměřený kruhový oblouk A_0B. V bodě B vypočteme ze souřadnic x_1, y_1 a $\operatorname{tg}\alpha_1$ poloměr křivosti ϱ_1; naneseme jej však na rameno $C0$, půlící oblouk A_0B. Ze středu 1 opíšeme poloměrem ϱ_1 oblouk, který protne průvodič $0B$ v bodě A_1. Různí-li se příliš bod A_1 od B nebo směry v nich, vypočteme ze souřadnic a směru bodu A_1 znovu poloměr křivosti; což opakujeme, až se nový bod od předchozího znatelně neliší. Obdobně postupujeme dále.

V místech s velkým poloměrem křivosti nahradíme křivku úsečkami; změna jejich směru je dána rovnicí

$$\Delta y' = y''\,\Delta x = f(x, y, y')\,\Delta x.$$

V bodě obratu, kde $y'' = 0$, plyne y' z rovnice $f(x, y, y') = 0$.

V. Láska—V. Hruška: Theorie a prakse numerického počítání, 1934.
H. Bruns: Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens, 1903.
C. Runge—H. König: Vorlesungen über numerisches Rechnen, 1924.
J. Scarborough: Numerical mathematical analysis, 1930.
V. Láska—V. Hruška: Počet grafický a grafico mechanický, 1923.
C. Runge: Graphical methods, 1912 (Graphische Methoden, 2. vyd. 1919).
R. Mehmke: Leitfaden zum graphischen Rechnen, 2. vyd. 1924.
J. Lipka: Graphical and mechanical computation, 1918.
H. Sanden: Praktische Analysis, 2. vyd. 1923.
E. Whittaker-G. Robinson: The calculus of observations; a treatise on numerical mathematics, 2. vyd. 1926.
F. Willers: Methoden der praktischen Analysis, 1928.
G. Cassinis: Calcoli numerici, grafici e meccanici, 1928.

XXI. Nomografie.

Nomografie jedná o výpočtu a konstrukci grafických tabulek (nomogramů), zobrazujících přehledně funkční závislosti proměnných veličin tak, že k dané skupině hodnot nezávisle proměnných možno čísti příslušnou hodnotu závisle proměnné.

Proměnné veličiny ve vzorci, rovnici, funkci $F(x, y, z, \ldots) = 0$ jsou označeny $x, y, z, \ldots$, proměnným v obrazci odpovídající souřadnice $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, zvolená jednotka délky čili *modul* je označen q.

Pro často používaný vzorec sestrojíme na tuhém papíru nomogram jednou provždy; výpočet kterékoli proměnné z ostatních daných redukuje se pak na pouhé čtení v tabulce. Konstrukce nomogramu je mnohdy pracná.

1. Funkční stupnice.

Základním útvarem nomogramů jsou stupnice pro funkce jedné nezávisle proměnné.

1. *Stupnice pro funkci* $y = f(x)$. Při zvoleném modulu, na př. $q = 1$ cm, nanášíme na přímku od pevného bodu úsečky délek

$$\eta_1 = q f(x_1), \quad \eta_2 = q f(x_2), \quad \eta_3 = q f(x_3), \ldots$$

a k jejich koncovým bodům připojíme jako kóty hodnoty argumentu $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Jsou-li meze intervalu x_0, x_n, kde $f(x_0) = \min.$, $f(x_n) = \max.$, je

$$\textit{délka funkční stupnice } L = q[f(x_n) - f(x_0)],$$

z čehož k dané délce L možno vypočísti modul q a naopak.

Často se vyskytují:

a) Stupnice pravidelná jest obrazem lineární funkce $y = ax + b$; všechny úsečky stupnice jsou si rovny. Je-li $y = x$, sluje *měřítko*.

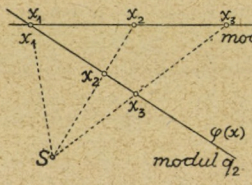
b) Stupnice mocninová jest obrazem funkce $y = x^n$.

c) Stupnice logaritmická pro funkci $y = \log x$. Při zvoleném modulu q nanášíme podle tabulek od počátku úsečky

$q \log 1 = 0$, $q \log 2$, $q \log 3$, ..., $q \log 10 = q$; ... $q \log 100 = 2q$; ...;

koncové body označíme 1 (počátek), 2, 3, ... 10; ... 100; ...; stupnice se opakuje.

Takové stupnice jsou na přední straně logaritmického pravítka. Relativní přesnost v odečtení je po celé logaritmické stupnici stejná.



Obr. 61.

2. *Stupnice projektivní* (obr. 61) je obrazem funkce

$$f(x) = \frac{a\varphi(x) + b}{c\varphi(x) + d}$$

s podmínkou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$,

kde a, b, c, d jsou konstanty, $\varphi(x)$ libovolná funkce. Stupnice $f(x)$ odvodí se ze stupnice $\varphi(x)$: Ke třem zvoleným hodnotám x_1, x_2, x_3 vypočteme $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, $\varphi(x_3)$ a $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$; zobrazíme stupnici $\varphi(x)$ s modulem q_1, stupnici $f(x)$ s modulem q_2 a sjednotíme jeden pár příslušných bodů. Spojnice ostatních dvojic protínají se ve středu promítání S. Ke každému bodu stupnice jedné dostaneme promítnutím ze středu bod stupnice druhé. Zvláštním případem je

projektivní stupnice pro funkci lineární lomenou

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

odvodí se z pravidelné stupnice (x); dále

stupnice reciproká pro funkci

$$y = \frac{1}{\varphi(x)}; \text{ na př. } y = \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}.$$

3. *Stupnice křivá* jest umístěna na křivce. Z rovnic

$$x = \varphi(t); \qquad y = \psi(t)$$

vypočteme souřadnice jednotlivých bodů křivky pro postupující ekvidistantní hodnoty parametru t, jež k bodům připojíme.

4. *Stupnice sdružené.* Závislost $F(x, y) = 0$, kterou možno rozvésti na tvar $f_1(x) = f_2(y)$, zobrazíme dvěma stupnicemi na téže přímce. Od společného počátku nanášíme při stejném modulu po jedné straně úsečky $qf_1(x)$, po druhé straně $qf_2(y)$.

Empirickou křivku, zobrazující nějakou závislost $y = f(x)$, můžeme nahraditi dvojitou stupnicí na ose x. Na spodní straně zůstává stupnice pravidelná, na horní straně dostaneme stupnici funkce, když body křivky, určené body pravidelné stupnice osy y, promítneme do osy x a k průmětům připojíme kóty y.

5. Platí-li současně vztahy $f_1(x) = f_2(y) = f_3(z) = f_4(u)$, umístíme funkční stupnice s týmž modulem na rovnoběžkách vedle sebe s počátky ležícími na přímce. Rovnoběžka se spojnicí počátků, t. zv. *nomografická přímka*, podává řešení.

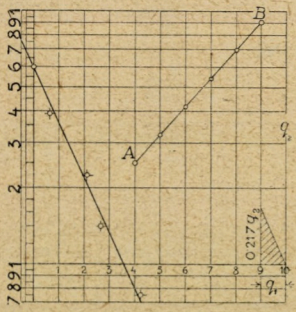
2. Funkční sítě.

Jsou-li na jedné nebo obou osách pravoúhlé soustavy souřadnic místo pravidelných stupnice funkční, vzniknou sítě, v nichž určité funkce jsou zobrazeny přímkou *(geometrická anamorfosa)*. Nejužívanější jsou sítě logaritmické (logaritmické papíry).

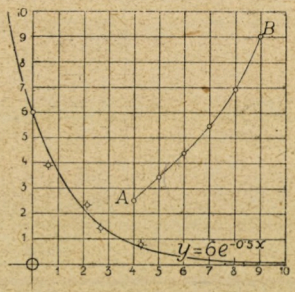
1. *Jednoduchá soustava (síť) logaritmická* (obr. 62) pro exponenciální funkci

$$y = be^{cx}.$$

Na ose x je stupnice pravidelná s modulem q_1, na ose y logaritmická s modulem q_2.



Obr. 62.



Obr. 63.

Z logaritmu dané rovnice $\log y = \log b + cx \log e$ plyne substitucí

$$\xi = q_1 x, \quad x = \xi : q_1; \qquad \eta = q_2 \log y, \quad \log y = \eta : q_2; \qquad \log e = M = 0{,}4343$$

vztah

$$\eta = cM \frac{q_2}{q_1} \xi + q_2 \log b,$$

rovnice přímky; její směrnice $\operatorname{tg} \alpha = cM q_2 : q_1$, na ose y úsek $q_2 \log b$. Kótu b čteme přímo na stupnici. Bezpečně sestrojíme přímku ze dvou bodů.

Možno-li očekávati, že nějaký zjev se řídí zákonem exponenciálním, užijeme k jeho stanovení jednoduchého logaritmického papíru, kde k různým hodnotám x naneseme příslušná y. Jsou-li body tak určené na přímce, je zákon vskutku exponenciální. Konstantu c vypočteme ze směrnice, b čteme přímo na stupnici v průsečíku s osou y. Rozptýlené body vyrovnáme mechanicky napjatou nití v přímku. V obr. 62 a 63 je zobrazena funkce $y = 6e^{-0,5x}$.

V jednoduché soustavě logaritmické možno interpolovati geometrickou řadu, jsou-li dány dva její členy; funkce $y = aq^x$ je zobrazena spojnicí dvou bodů A, B.

2. *Dvojitá soustava (síť) logaritmická* (obr. 64) pro mocninovou funkci

$$y = bx^m.$$

Na obou osách je stupnice logaritmická s týmž nebo různým modulem. Z logaritmu

$$\log y = \log b + m \log x$$

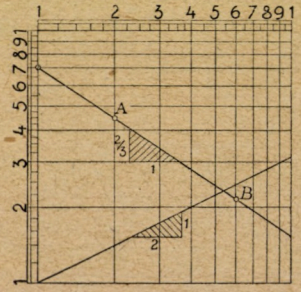
plyne substitucí

$$\xi = q_1 \log x, \quad \log x = \xi : q_1; \qquad \eta = q_2 \log y, \quad \log y = \eta : q_2$$

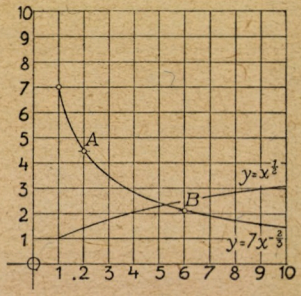
vztah

$$\eta = m \frac{q_2}{q_1} \xi + q_2 \log b,$$

rovnice přímky; její směrnice $\operatorname{tg} \alpha = mq_2 : q_1$, na ose y úsek $q_2 \log b$



Obr. 64.



Obr. 65.

Kótu b čteme přímo na stupnici. Jsou-li oba moduly stejné, udává směrnice již mocnitele m.

Na dvojitém logaritmickém papíru zobrazíme mocninovou funkci (paraboly, hyperboly, polytropy) přímkou ze dvou bodů; odtud vyčteme souřadnice dalších bodů pro obraz funkce na milimetrovém papíru (obr. 65).

Na př. při kalkulaci cen může cena výrobku býti v jistých mezích charakterisována funkcí $C = kD^m$, ve dvojité soustavě zobrazená přímkou.

3. *Dvojitá logaritmická síť* pro funkce $\beta = a\,(\sin\alpha)^m$, $\beta = a\,(\operatorname{tg}\alpha)^m$ (papír sinový a tangentový).

Na ose x je logaritmická stupnice sinů nebo tangent, na ose y stupnice logaritmická; tyto funkce se zobrazují přímkou.

3. Průsečíkové nomogramy pro vztahy tří proměnných.

a. Nomogramy kartesiánské.

V pravoúhlé soustavě *Descartesově* lze proměnné, vázané vztahem $F(x, y, z) = 0$, zobraziti třemi soustavami kótovaných čar. Každý bod, v němž se protínají tři čáry různých soustav, podává trojici k sobě příslušných hodnot x, y, z (vyhovujících dané rovnici).

1. *Nomogram rovnice* $F(x, y, z) = 0$. Jednu z proměnných, na př. z, pokládáme za proměnný parametr a při zvolených modulech q_1, q_2 zobrazíme soustavy:

$\xi = q_1 x$, t. j. osnova rovnoběžek s osou y, kótovaná čísly x;

$\eta = q_2 y$, t. j. „ „ „ „ x, „ „ y;

$F(\xi : q_1, \eta : q_2\ z) = 0$, t. j. soustava křivek, kótovaná čísly z.

Křivky sestrojíme pro četné ekvidistantní hodnoty parametru: jsou to průměty vrstevnic plochy $F = 0$ do roviny xy; konstrukce je pracná.

V nomogramu čteme takto: Abychom k danému x, y určili z, jdeme kótou x na ose x ve směru y, kótou y na ose y ve směru x; obě přímky se protínají v bodě, jímž prochází křivka s kótou z.

Anamorfosa. Provedení nomogramu se usnadní, dá-li se soustava čar z přeměniti na soustavu přímek. Místo pravidelných stupnic na osách jsou pak stupnice funkční. Možné jsou tyto případy:

2. *Nomogram rovnice*

$$f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) = 0,$$

kde f_1, f_2, f_3 jsou různé funkce jednotlivých proměnných, vyznačených indexem. Zavedením funkčních stupnic $\xi = q_1 f_1(x)$, $\eta = q_2 f_2(y)$ přejde rovnice na lineární

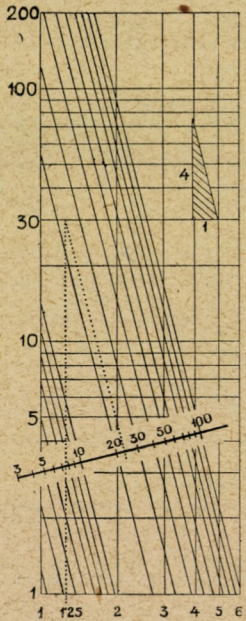
$$\frac{\xi}{q_1} + \frac{\eta}{q_2} + f_3(z) = 0,$$

t. j. osnova rovnoběžek o směrnici $-q_2 : q_1$, kótovaná čísly z.

3. *Nomogram rovnice*

$$f_1(x)\, f_3(z) - f_2(y) = 0\,.$$

Logaritmováním dostaneme tvar **2.**



Obr. 66.

Příklad. Nomogram pro vzorec

$$Q = 2{,}672\, d^3 \sqrt{h}\,,$$

kde Q je průtok vodoměrem ve vteřinových litrech, d průměr kruhového průřezu v dm, h spád v dm (obr. 66).

$$\log Q = \log 2{,}672 + 2 \log d + \frac{1}{2} \log h\,.$$

Substitucí $x = q \log d$; $y = q \log h$ při stejném modulu na osách plyne

$$y = -4x + 2q\ (\log Q - \log 2{,}672)\,,$$

t. j. ve dvojité logaritmické soustavě osnova rovnoběžek o směrnici $\operatorname{tg} \alpha = -4$, utínajících na ose y proměnný úsek $2q\ (\log Q - \log 2{,}672)$. Stupnice pro Q na ose y má modul $2q$ a je pošinuta směrem záporným (dolů) o $2q \log 2{,}672$; v obraze není vyznačena. Osnovu přímek Q nahradíme příčnou logaritmickou stupnicí; její modul je dán vzdálenostmi přímek $Q = 10$, $Q = 100$. V nomogramu čteme takto: Je-li na př. dáno $d = 1{,}25$ dm, $h = 30$ dm, vedeme bodem 1,25 na ose x rovnoběžku s y, bodem 30 na ose y rovnoběžku s x, jejich průsečíkem přímku, kolmou k příčné stupnici, kde čteme kótu $Q = 22{,}8$.

Vhodnou volbou modulu dosáhneme, že přímky Q svírají s osou x úhel 45° nebo 135°. Klademe-li na př. $x = 2q \log d$, modul $2q$; $y = \frac{1}{2} q \log h$, modul $\frac{q}{2}$, jest

$$y = -x + q\ (\log Q - \log 2{,}672).$$

Osnova přímek svírá s osou x úhel 135°; stupnice pro Q na ose y má modul q a je pošinuta dolů o $q \log 2{,}672$.

4. *Nomogram rovnice*

$$f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z) = 1\,.$$

Logaritmováním dostaneme tvar **2.**

5. *Nomogram rovnice*

$$f_1(x)\, f_3(z) + f_2(y) = 0\,.$$

Substitucí $\xi = q_1 f_1(x)$; $\eta = q_2 f_2(y)$ přejde rovnice na lineární

$$\frac{\xi}{q_1} f_3(z) + \frac{\eta}{q_2} = 0\,,$$

t. j. svazek přímek, jdoucích počátkem, kótovaných čísly z.

6. *Nomogram rovnice*

$$f_1(x)\,f_3(z) + f_2(y)\,g_3(z) + h_3(z) = 0.$$

Substitucí $\xi = q_1 f_1(x)$; $\eta = q_2 f_2(y)$ přejde rovnice na lineární

$$\frac{\xi}{q_1} f_3(z) + \frac{\eta}{q_2} g_3(z) + h_3(z) = 0,$$

t. j. obecná soustava přímek, kótovaných čísly z.

7. *Obecná anamorfosa.* Funkce $F(x, y, z) = 0$, kterou lze převést na *Massauův determinant*

$$F(x, y, z) \equiv \begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(y) & g_2(y) & h_2(y) \\ f_3(z) & g_3(z) & h_3(z) \end{vmatrix} = 0$$

se dá zobraziti třemi obecnými soustavami přímek

$$\xi f_1 + \eta g_1 + h_1 = 0, \quad \xi f_2 + \eta g_2 + h_2 = 0, \quad \xi f_3 + \eta g_3 + h_3 = 0,$$

z nichž žádná není osnovou rovnoběžek. Eliminací ξ a η z těchto rovnic plyne Massauův determinant.

Krom anamorfosy v přímky používá se také anamorfosy v soustavu kružnic.

b. Nomogramy trojúhelníkové a hexagonální.

Jsou vytvořeny třemi osnovami rovnoběžek, které mají směr úhlopříček v pravidelném šestiúhelníku.

1. *Nomogramy trojúhelníkové* pro vztahy

$$x + y + z = k; \qquad f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) = k.$$

V rovnostranném trojúhelníku je součet vzdáleností libovolného bodu od stran roven výšce trojúhelníka k. Vzdálenost je záporná, leží-li bod a plocha trojúhelníka po různém boku strany. Pravidelné nebo funkční stupnice se nanesou na průsvitném papíru na úhlopříčky šestiúhelníka v měřítku výšky (pohyblivý ukazatel).

2. *Nomogramy hexagonální* ($k = 0$) řeší rovnice tvaru

$$x + y + z = 0; \qquad f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) = 0.$$

Stupnice s týmž modulem jsou ve stranách rovnostranného trojúhelníka; počátek dvou možno libovolně zvolit, třetí je tím určen. Na stupnicích čteme pohyblivým ukazatelem (tři úhlopříčky pravidelného šestiúhelníka) na průsvitném papíru.

4. Spojnicové nomogramy pro vztahy tří proměnných.

Duální obdobou nomogramů průsečíkových, kde tři přímky, kótované x, y, z, se protínají v jednom bodě, jsou *nomogramy spojnicové:* tři body s kótami x, y, z, jež vyhovují dané rovnici $F(x, y, z) = 0$, leží na přímce. Pro svou přehlednost a čitelnost jsou výhodnější než průsečíkové a nejčastěji používány.

1. *Funkce* $F(x, y, z) = 0$ dá se zobraziti spojnicovým nomogramem, je-li splněna podmínka

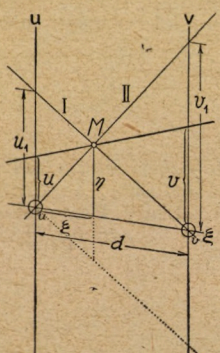
$$F(x, y, z) \equiv \begin{vmatrix} \xi_1(x) & \eta_1(x) & 1 \\ \xi_2(y) & \eta_2(y) & 1 \\ \xi_3(z) & \eta_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Na tento tvar lze *Massauův* determinant vždy převést; v prvních dvou sloupcích dostaneme přímo souřadnice bodů stupnic (x), (y), (z). Různým tvarům rovnice odpovídají různé typy spojnicových nomogramů. Praktický význam mají ty, při nichž aspoň dvě funkční stupnice jsou přímé. Pro jejich konstrukci možno užít souřadnic přímkových *(d'Ocagneových).*

2. *d'Ocagneovy souřadnice přímky* (obr. 67) jsou úsečky u, v, které utíná přímka na dvou rovnoběžných osách u, v s libovolně volenými počátky O_u, O_v o vzdálenosti d; spojnice počátků nemusí být kolmá k směru os. Přímka I má souřadnice $u = u_1$, $v = 0$; přímka II souřadnice $u = 0$, $v = v_1$. Souřadnice u, v všech přímek, jdoucích průsečíkem M uvedených dvou, jsou vázány vztahem $u : (v_1 - v) = \text{konst}$. Obráceně rovnice prvního stupně pro u a v

$$1) \quad au + bv + c = 0$$

s konstantami a, b, c vyjadřuje bod, průsečík přímek o souřadnicích u, v, a sluje *rovnice bodu;* tento bod je zejména průsečíkem přímek o souřadnicích



Obr. 67.

$$u = 0, \quad v = -\frac{c}{b}; \qquad v = 0, \quad u = -\frac{c}{a}.$$

Pokládáme-li $O_u O_v \equiv \xi$, $u \equiv \eta$ za osy obecně kosoúhlé soustavy rovnoběžkových souřadnic, plynou úměry

$$\xi : d = u_1 : (u_1 + v_1); \qquad \eta : \xi = v_1 : d.$$

Dosazením

$$u_1 = u = -c : a; \quad v_1 = v = -c : b$$

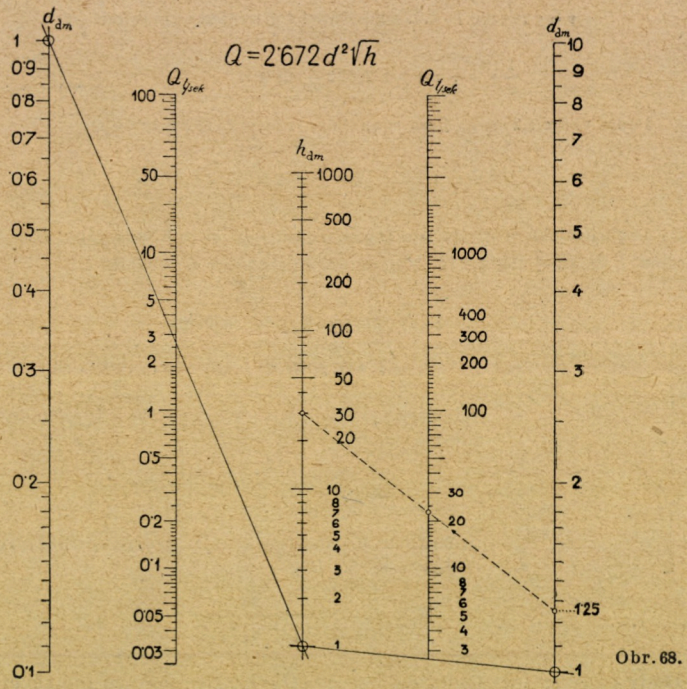
dostaneme *rovnoběžkové souřadnice bodu* $M(\xi, \eta)$, daného rovnicí 1) ve tvaru

$$2) \quad \xi = d\frac{b}{a+b}; \qquad 3) \quad \eta = -\frac{c}{a+b}.$$

Jsou-li a, b, c funkce nějakého proměnného parametru, jsou jimi také souřadnice ξ, η a body M leží na křivce.

3. *Nomogram pro rovnici* $f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) = 0$. Klademe $u = q_1 f_1(x)$, t. j. přímá stupnice na ose u s modulem q_1; $v = q_2 f_2(y)$, t. j. přímá stupnice na ose v s modulem q_2;

$$\frac{1}{q_1} u + \frac{1}{q_2} v + f_3(z) = 0.$$



Obr. 68.

Koeficienty této rovnice dosadíme do vzorců 2) a 3); souřadnice bodů řady (z) jsou

$$\xi = d\frac{q_1}{q_1 + q_2}; \qquad \eta = -\frac{q_1 q_2}{q_1 + q_2} f_3(z).$$

Ježto ξ = konst., je funkční stupnice (z), daná vzorcem pro η s modulem $-q_1 q_2 : (q_1 + q_2)$, přímá, rovnoběžná s osami ve vzdálenosti ξ od osy u.

Podle toho sestrojen v obr. 68 nomogram pro vzorec

$$Q = 2{,}672\, d^2 \sqrt{h},$$

pro nějž byl kartesiánský nomogram proveden na str. 268: V logaritmu

$$2 \lg d + \frac{1}{2} \log h + \log 2{,}672 - \log Q = 0$$

klademe

$u = q \,.\, 2 \log d$, t. j. logaritmická stupnice s modulem $2q$;

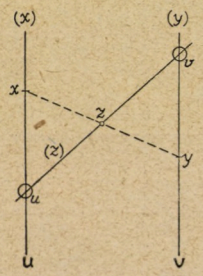
$v = q \,.\, \frac{1}{2} \log h$, t. j. logaritmická stupnice s modulem $\frac{q}{2}$;

$$\frac{1}{q} u + \frac{1}{q} v + \log 2{,}672 - \log Q = 0 \,.$$

Podle vzorců 2) a 3) jsou rovnoběžkové souřadnice bodů Q

$$\xi = \frac{d}{2}; \qquad \eta = \frac{q}{2} (\log Q - \log 2{,}672) \,.$$

Logaritmická stupnice pro Q má modul $\frac{q}{2}$ a je pošinuta záporným směrem (dolů) o délku $\frac{q}{2} \log 2{,}672$. Nomogram je rozdělen ve dvě části.



Obr. 69.

4. *Nomogram pro rovnici*

$$f_1(x)\, f_3(z) + f_2(y) = 0 \,. \quad \text{(Obr. 69)}$$

Klademe $u = q_1 f_1(x)$; $v = q_2 f_2(y)$ a koeficienty rovnice

$$\frac{f_3(z)}{q_1} u + \frac{1}{q_2} v = 0$$

dosadíme do vzorců 2) a 3) pro rovnoběžkové souřadnice bodů (z),

$$\xi = d \frac{q_1}{q_1 + q_2 f_3(z)}; \qquad \eta = 0 \,.$$

Body řady (z) leží tudíž na ose $\xi \equiv O_u O_v$. Nomogram má tři stupnice přímé. Stupnici pro ξ odvodíme projektivně ze stupnice $f_3(z)$.

5. *Nomogram pro rovnici* $f_1(x)\, g_3(z) + f_2(y)\, h_3(z) + f_3(z) = 0 \,.$

Klademe $u = q_1 f_1(x)$; $v = q_2 f_2(y)$ a koeficienty rovnice

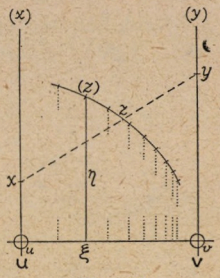
$$\frac{g_3(z)}{q_1} u + \frac{h_3(z)}{q_2} v + f_3(z) = 0 \,,$$

dosadíme do vzorců 2) a 3); rovnoběžkové souřadnice bodů (z) jsou

$$\xi = d\,\frac{q_1 h_3 : g_3}{q_1 h_3 : g_3 + q_2}\,; \qquad \eta = -\,\frac{f_3}{g_3 : q_1 + h_3 : q_2}$$

Nomogram má dvě stupnice přímé a pro (z) stupnici křivou (obr. 70).

Na spojnici $O_u O_v$ sestrojíme stupnici ξ projektivně ze stupnice h_3/g_3 a dělicími body vedeme rovnoběžku s osami; pak vypočteme η pro tolik hodnot z, kolik je třeba ku přesné konstrukci křivé stupnice.



Obr. 70.

5. Spojnicové nomogramy pro vztahy čtyř proměnných.

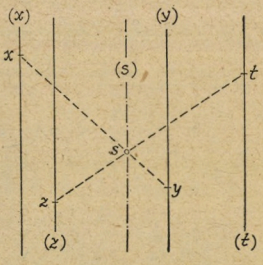
1. *Nomogram pro rovnici* $f_1(x) + f_2(y) = f_3(z) + f_4(t)$.

Má pět rovnoběžných stupnic (obr. 71). Rovnici rozvedeme ve dvě

$$f_1(x) + f_2(y) = \varphi(s)\,; \qquad f_3(z) + f_4(t) = \varphi(s)$$

a sestrojíme podle předcházejícího odstavce pro obě rovnice nomogramy se společnou stupnicí (s), která je *osou kolineace*; na ní se obě nomografické přímky protínají. Je-li v nekonečnu, jsou obě nomografické přímky rovnoběžné.

V nomogramu čteme takto: K danému x, y na stupnicích (x), (y) najdeme nomografickou přímkou na stupnici (s) příslušný bod s; jeho spojnice s daným bodem z stupnice (z) určuje na stupnici (t) hledané t.



Obr. 71.

2. *Nomogram pro rovnici*

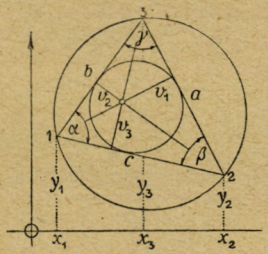
$$f_1(x)\, f_2(y) = f_3(z)\, f_4(t).$$

Rovnici rozvedeme na dvě $f_1(x)\, f_2(y) = \varphi(s)$; $f_3(z)\, f_4(t) = \varphi(s)$ a logaritmováním převedeme na tvar **1.**; obě rovnice pak zobrazíme se společnou stupnicí (s).

V. Láska — V. Hruška: Počet grafický a graficko-mechanický, 1923.
V. Pleskot: Spojnicové nomogramy, 1941.
M. d'Ocagne: Traité de nomographie, 2. vyd. 1921.
O. Lacmann: Die Herstellung gezeichneter Rechentafeln, 1923.
P. Werkmeister: Das Entwerfen von graphischen Rechentafeln, 1923.
H. Schwerdt: Lehrbuch der Nomographie, 1924.
H. Schwerdt: Die Anwendung der Nomographie in der Mathematik, 1931.
R. Soreau: Nomographie ou traité des abaques, 2 sv. 1921.

XXII. Obvody a obsahy rovinných ploch.

Trojúhelník (obr. 72). Strany a, b, c, protilehlé úhly α, β, γ s vrcholy $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$; výšky v_1, v_2, v_3; spojnice vrcholů se středy protějších stran m_1, m_2, m_3; poloměr kružnice vepsané r; poloměr kružnice opsané R; obsah p (i v dalším).



Obr. 72.

$$2s = a + b + c; \qquad 2\sigma = m_1 + m_2 + m_3.$$

1. $p = \frac{1}{2} a v_1 = \frac{1}{2} b v_2 = \frac{1}{2} c v_3$;

2. $p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$;

3. $p = \frac{4}{3}\sqrt{\sigma(\sigma - m_1)(\sigma - m_2)(\sigma - m_3)}$;

4. $$p = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3).$$

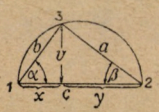
Obsah plochy je kladný při kladném oběhu jejího obvodu (zůstává po levé straně oběhu), t. j. v obrazci ve smyslu 1, 2, 3.

5. $p = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} ac \sin\beta$;

6. $p = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$;

7. $p = r^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$; **8.** $p = rs = \frac{abc}{4R}$.

Trojúhelník pravoúhlý (obr. 73). Odvěsny a, b, přepona c; v výška, x, y úseky na přeponě.



Obr. 73.

9. $p = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} cv$;

10. $p = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{2} b^2 \operatorname{tg}\alpha$;

11. $p = \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha$;

12. $a^2 = cy$; **13.** $b^2 = cx$; **14.** $v^2 = xy$; **15.** $a^2 + b^2 = c^2$.

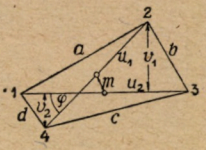
V pravoúhlém trojúhelníku: Výška je střední měrčickou úměrnou obou úseků přepony; $x : v = v : y$. Odvěsna je střední měrčickou úměrnou celé přepony a přilehlého úseku; $c : a = a : y$; $c : b = b : x$.

Čtyrúhelník (obr. 74). Strany a, b, c, d; u_1, u_2 úhlopříčky; v_1, v_2 výšky nad u_2; úhel úhlopříček φ; spojnice středů úhlopříček m.

1. $p = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)\, u_2$;

2. $p = \frac{1}{2} u_1 u_2 \sin\varphi$;

3. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = u_1^2 + u_2^2 + 4m^2$.



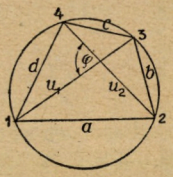
Obr. 74.

Čtyrúhelník z tětiv (opsané) kružnice (obr. 75).

4. $p = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$;

$s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$;

5. $u_1 \cdot u_2 = a \cdot c + b \cdot d$.

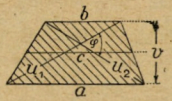


Obr. 75.

Lichoběžník (obr. 76).

Základny a, b, výška v, střední příčka $c = \frac{a+b}{2}$.

6. $p = \frac{1}{2}(a + b)\, v = cv = \frac{1}{2} u_1 u_2 \sin\varphi$.

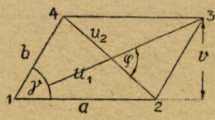


Obr. 76.

Rovnoběžník (obr. 77).

7. $p = ab \sin\gamma = \frac{1}{2} u_1 u_2 \sin\varphi$;

8. $2(a^2 + b^2) = u_1^2 + u_2^2$.

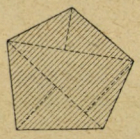


Obr. 77.

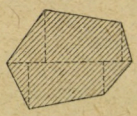
Obdélník. **9.** $p = ab = \frac{1}{2} u^2 \sin\varphi$.

Kosočtverec ($u_1 \perp u_2$). **10.** $p = a^2 \sin\gamma = \frac{1}{2} u_1 u_2$.

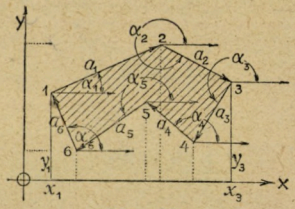
Mnohoúhelník nepravidelný. Rozloží se podle obrazu 78 nebo 79 a stanoví se obsahy jednotlivých částí.



Obr. 78.



Obr. 79.



Obr. 80.

Jsou-li dány souřadnice vrcholů (x_ν, y_ν), je *obsah* mnohoúhelníka

1. $p = \frac{1}{2}\left\{x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_4-y_2)+\ldots+x_n(y_1-y_{n-1})\right\}$;

2. $p = \frac{1}{2}\left\{y_1(x_2-x_n)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_4-x_2)+\ldots+y_n(x_1-x_{n-1})\right\}$.

Obvod mnohoúhelníka (obr. 80). Strany $a_1, a_2, \ldots, a_n$ svírají se směrem + x úhly $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; měří se pořadem otočením ramene směru + x kolem vrcholu kladným smyslem do stran.

3. $\sum_1^n a_\nu = \frac{x_2-x_1}{\cos\alpha_1}+\frac{x_3-x_2}{\cos\alpha_2}+\ldots+\frac{x_n-x_{n-1}}{\cos\alpha_{n-1}}+\frac{x_1-x_n}{\cos\alpha_n}$;

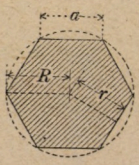
4. $\sum_1^n a_\nu = \frac{y_2-y_1}{\sin\alpha_1}+\frac{y_3-y_2}{\sin\alpha_2}+\ldots+\frac{y_n-y_{n-1}}{\sin\alpha_{n-1}}+\frac{y_1-y_n}{\sin\alpha_n}$.

Průmět uzavřené lomené čáry do libovolného směru je nula:

5. $a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + \ldots + a_n\cos\alpha_n = \sum_1^n a_\nu \cos\alpha_\nu = 0$;

6. $a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2 + \ldots + a_n\sin\alpha_n = \sum_1^n a_\nu \sin\alpha_\nu = 0$.

Mnohoúhelník pravidelný (obr. 81). n počet stran, a strana, o obvod, r poloměr kružnice vepsané, R opsané; polovice středového úhlu ke straně příslušného $\varphi^0 = \frac{180^0}{n}$; úhel stran $180^0 - 2\varphi^0$.



Obr. 81.

$$a = 2\sqrt{R^2-r^2} = 2R\sin\varphi = 2r\,\mathrm{tg}\,\varphi;$$

$$o = na = 2nR\sin\varphi = 2nr\,\mathrm{tg}\,\varphi;$$

$$p = \frac{nar}{2} = nr^2\,\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{nR^2}{2}\sin 2\varphi = \frac{na^2}{4}\,\mathrm{cotg}\,\varphi.$$

Tabulka pravidelných mnohoúhelníků.

n	$\frac{p}{a^2}$	$\frac{p}{R^2}$	$\frac{p}{r^2}$	$\frac{R}{a}$	$\frac{a}{R}$	$\frac{a}{r}$	$\frac{r}{R}$
3	0,4330	1,2990	5,1962	0,5774	1,7321	3,4641	0,50000
4	1,0000	2,0000	4,0000	0,7071	1,4142	2,0000	0,70711
5	1,7205	2,3776	3,6327	0,8507	1,1756	1,4531	0,80902
6	2,5981	2,5981	3,4641	1,0000	1,0000	1,1547	0,86603
7	3,6339	2,7364	3,3710	1,1524	0,8678	0,9631	0,90097
8	4,8284	2,8284	3,3137	1,3066	0,7654	0,8284	0,92388
9	6,1818	2,8925	3,2757	1,4619	0,6840	0,7279	0,93969
10	7,6942	2,9389	3,2492	1,6180	0,6180	0,6498	0,95106
12	11,1962	3,0000	3,2154	1,9319	0,5176	0,5359	0,96593
15	17,6424	3,0505	3,1883	2,4049	0,4158	0,4251	0,97815
16	20,1094	3,0615	3,1826	2,5629	0,3902	0,3978	0,98079
20	31,5688	3,0902	3,1677	3,1962	0,3129	0,3168	0,98769
24	45,5745	3,1058	3,1597	3,8306	0,2611	0,2633	0,99144
32	81,2254	3,1214	3,1517	5,1011	0,1960	0,1970	0,99518
48	183,0846	3,1326	3,1461	7,6449	0,1308	0,1311	0,99786
64	325,6875	3,1365	3,1441	10,1900	0,0981	0,0983	0,99880

Čísla tabulky pro různá n násobíme daným jmenovatelem zlomku v záhlaví; dostaneme tak hledaného čitatele.

Kružnice. Poloměr r, průměr d, délka (obvod kruhu) o, obsah (kruhu) p.

1. $o = 2\pi r = \pi d = 3{,}141\,592\,65\,d.$

2. $p = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{od}{4} = 0{,}785\,398\,16\,d^2.$

3. $r = 0{,}564\,189\,58\sqrt{p}.$ **4.** $d = 1{,}128\,379\sqrt{p}.$

Obvody a obsahy kruhů daného průměru (n) podávají *Matematické a statické tabulky. Díl I., str. 4—27.*

Oblouk kružnice. Je-li středový úhel v míře stupňové (šedesátinné), jest

5. $s = \frac{\pi r}{180^0}\alpha^0;$ $\qquad s = \frac{\pi r}{180 \cdot 60'}\beta';$ $\qquad s = \frac{\pi r}{180 \cdot 60 \cdot 60''}\gamma''.$

Zlomky čísla π jsou vypočteny v **9.** jako oblouky arc 1°, arc 1′, arc 1″ kružnice o poloměru $r = 1$.

Míra oblouková (absolutní, analytická). Středovému úhlu α^0 v míře stupňové přísluší (nerovná se) na kružnici o poloměru $r = 1$ oblouk (arkus) arc α^0 nebo je roven úhel α v míře obloukové; délka oblouku je měřena poloměrem.

V analyse se používá výhradně míry obloukové; tam vždy

$$\alpha \equiv \operatorname{arc} \alpha^0 = \frac{\pi}{180^0}\,\alpha^0 .$$

Je-li středový úhel α v míře obloukové, jest

6. $s = r\alpha$. **7.** $r = \frac{s}{\alpha}$. **8.** $\alpha = \frac{s}{r}$.

9. Úhlům α^0, β', γ'' (v míře stupňové šedesátinné) přísluší oblouky

$$\operatorname{arc} \alpha^0 = \frac{\pi}{180^0}\,\alpha^0 ; \qquad \operatorname{arc} \beta' = \frac{\pi}{180 \cdot 60'}\,\beta' ; \qquad \operatorname{arc} \gamma'' = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60''}\,\gamma'' .$$

$$\operatorname{arc} 1^0 = \pi : 180 = 0{,}017\,453\,292\,5,$$
$$\operatorname{arc} 1' = \pi : 10800 = 0{,}000\,290\,888,$$
$$\operatorname{arc} 1'' = \pi : 648000 = 0{,}000\,004\,848.$$

10. Obloukům $\operatorname{arc} \alpha^0$, $\operatorname{arc} \beta'$, $\operatorname{arc} \gamma''$ odpovídají úhly

$$\alpha^0 = \frac{180^0}{\pi} \operatorname{arc} \alpha^0 ; \qquad \beta' = \frac{180 \cdot 60'}{\pi} \operatorname{arc} \beta' ; \qquad \gamma'' = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60''}{\pi} \operatorname{arc} \gamma'' .$$

K převodu míry stupňové na obloukovou a naopak užijeme tabulek. *Viz Matematické a statické tabulky. Díl I., str. 37 a násl.*

11. *Radiant* jest úhel, příslušný k oblouku kružnice o délce poloměru. V míře stupňové šedesátinné:

$$\varrho^0 = \frac{180^0}{\pi} = 57{,}295\,779\,5^0 = 57^0\,17'\,44{,}806'' ;$$

$$\varrho' = \frac{10800'}{\pi} = 3437{,}746\,77' ; \qquad \varrho'' = \frac{648000''}{\pi} = 206\,264{,}806'' .$$

V míře setinné (centesimální) je radiant

$$\varrho^g = \frac{400^g}{2\pi} = 63{,}661\,977^g \text{ (gradů)},$$

$$\varrho^{cc} = \frac{400 \cdot 100 \cdot 100^{cc}}{2\pi} = 636\,619{,}772^{cc}$$

(centesimálních vteřin, decimiligradů).

12. *Převodné vzorce* vyjadřují podle **9.** a **10.** formálně přechod z míry stupňové na obloukovou:

$$\alpha = \frac{\alpha^0}{\varrho^0} ; \qquad \beta = \frac{\beta'}{\varrho'} ; \qquad \gamma = \frac{\gamma''}{\varrho''} ;$$

z míry obloukové na stupňovou:

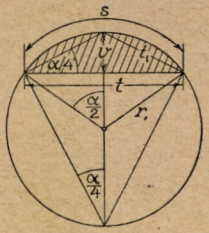
$$\alpha^0 = \alpha\varrho^0 ; \qquad \beta' = \beta\varrho' ; \qquad \gamma'' = \gamma\varrho'' .$$

Oblouk kružnice s (obr. 82). Tětiva t, výška v, tětiva poloviny oblouku t_1.

13. $s \approx \frac{1}{3}(8t_1 - t)$; $\quad s \approx \sqrt{t^2 + \frac{16}{3}v^2}$;

14. $t = 2r \sin\frac{\alpha}{2}$; $\quad$ **15.** $r = \frac{t^2 + 4v^2}{8v}$;

16. $v = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = 2r\sin^2\frac{\alpha}{4}$.



Obr. 82.

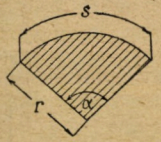
Kruhová výseč (obr. 83). Středový úhel $\alpha \equiv \text{arc}\,\alpha^0$. Obsah:

17. $p = \frac{1}{2}rs = \frac{1}{2}r^2\alpha$; $\quad \alpha = \frac{2p}{r^2}$.

Kruhová úseč (obr. 82). $\alpha \equiv \text{arc}\,\alpha^0$, obsah u.

18. $u = \frac{1}{2}r^2(\alpha - \sin\alpha) = \frac{1}{2}\left\{rs - t(r - v)\right\}$;

19. $u \approx \frac{2}{3}tv + \frac{v^3}{2t}$;



Obr. 83.

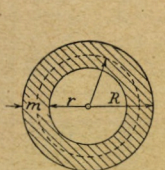
20. $r = \frac{t^2 + 4v^2}{8v}$; $\quad$ **21.** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{t}{2(r - v)}$.

Mezikruží (obr. 84). Obsah:

22. $p = \pi(R^2 - r^2) = \frac{1}{4}\pi(D^2 - d^2)$;

23. $p = 2\pi\varrho \cdot m$, kde $\varrho = \frac{1}{2}(R + r)$, $\quad m = R - r$

(obvod střední kružnice násobený šířkou mezikruží m).

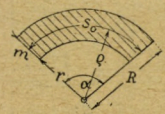


Obr. 84.

Výseč mezikruží (obr. 85). $\alpha \equiv \text{arc}\,\alpha^0$.

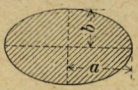
24. $p = \varrho\alpha \cdot m$

(střední oblouk $s_\sigma = \varrho\alpha$ násobený šířkou m).



Obr. 85.

Elipsa (obr. 86). Hlavní poloosa a, vedlejší poloosa b, lineární výstřednost $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, numerická výstřednost $\varepsilon = \frac{e}{a}$, obsah (plochy) p, délka (obvod plochy) o.



Obr. 86.

1. $p = \pi ab$. 2. $o = 4a\,\mathbf{E}$,

kde $\mathbf{E} = E\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)$ je úplný eliptický integrál druhého druhu.

(Viz str. 108 a Matematické a statické tabulky. Díl I., str. 59.)

Po dosazení jest

$$o = 4a\,\mathbf{E} = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{\varepsilon^6}{5} - \ldots\right].$$

3. $o = ak$, kde činitel k pro různé poměry poloos $n = \frac{b}{a}$ je v této tabulce:

Tabulka pro délky elips.

n	k	n	k	n	k	n	k	n	k
0,00	4,0000	0,20	4,2020	0,40	4,6026	0,60	5,1054	0,80	5,6723
01	0011	21	2186	41	6258	61	324	81	7020
02	0038	22	2356	42	6492	62	1596	82	7317
03	0078	23	2531	43	6728	63	1870	83	7615
04	0131	24	2710	44	6966	64	2145	84	7915
05	0194	25	2892	45	7207	65	2421	85	8215
06	0267	26	3078	46	7450	66	2699	86	8516
07	0348	27	3268	47	7695	67	2978	87	8819
08	0438	28	3462	48	7942	68	3259	88	9122
09	0535	29	3659	49	8191	69	3541	89	9426
0,10	0640	0,30	3859	0,50	8442	0,70	3824	0,90	9732
11	0752	31	4062	51	8695	71	4108	91	6,0038
12	0870	32	4269	52	8950	72	4394	92	0345
13	0994	33	4479	53	9207	73	4681	93	0653
14	1125	34	4692	54	9466	74	4969	94	0962
15	1261	35	4908	55	9726	75	5258	95	1271
16	1403	36	5126	56	9988	76	5549	96	1582
17	1550	37	5347	57	5,0252	77	5841	97	1893
18	1702	38	5571	58	0518	78	6134	98	2205
19	1859	39	5797	59	0785	79	6428	99	2518

Přibližné vzorce. Při malém $a - b$ lze délku elipsy vypočísti z nerovnosti

4. $\pi(a+b) + \frac{\pi(a-b)^2}{8a} < o < \pi(a+b) + \frac{\pi(a-b)^2}{8b}$;

5. $o \approx \pi\left\{\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\right\}$;

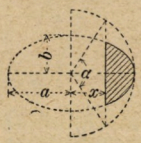
6. $o \approx \pi\left\{\frac{a+b}{2} + \sqrt{(a^2+b^2):2}\right\}$;

7. $\frac{1}{4}o \approx 0{,}9827\,a + 0{,}3110\,b + 0{,}2867\,\frac{b^2}{a}$

Eliptická úseč s tětivou kolmou k hlavní ose (obr. 87) má obsah

8. $u_e = \frac{ab}{2}(\alpha - \sin\alpha)$; úhel α vypočteme z rovnice

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ a vyjádříme v míře obloukové.



Obr. 87.

(Viz Matematické a statické tabulky. Díl I., str. 37.)

9. Užijeme-li z téže tabulky hodnoty u pro úseč kruhovou ($r = 1$), je obsah eliptické úseče

$$u_e = abu.$$

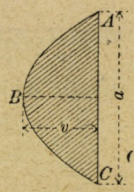
Parabola (obr. 88). *Parabolický oblouk* $ABC \equiv s$, rozpětí a, výška v.

1. $s = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (4v)^2} + \frac{a^2}{8v} \cdot \lg\left[\frac{4v}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + (4v)^2}\right]$.

Je-li $\frac{v}{a}$ malý zlomek, je přibližně

2. $s \approx a\left\{1 + \frac{8}{3}\left(\frac{v}{a}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{v}{a}\right)^4\right\}$.

Vzorce lze použíti pro nízký oblouk libovolné křivky.



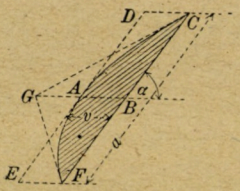
Obr. 88.

Úseč paraboly s tětivou kolmou k ose má obsah (ABC).

3. $p = \frac{2}{3}av$.

Vzorce lze použíti přibližně pro nízkou úseč libovolné křivky.

Parabolická úseč CAF (obr. 89). Tětiva $a = CF$ svírá se sdruženým průměrem $v = AB$ úhel α ($AG = AB$).



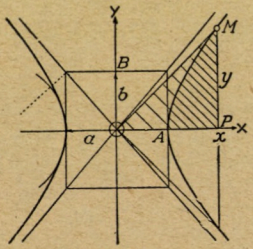
Obr. 89.

4. $p = \frac{2}{3} av \sin \alpha$.

Parabolická výseč (*GCAFG*) se doplňuje s úsečí (*CAF*) na trojúhelník, omezený tětivou a tečnami v jejích krajních bodech.

5. $p = \frac{1}{3} av \sin \alpha$.

Hyperbola (obr. 90). *Úseč hyperboly* o poloosách a, b, omezená křivkou, osou **x** a pořadnicí $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ má obsah



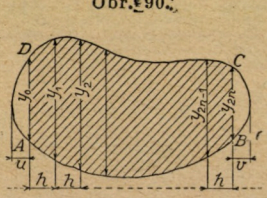
Obr. 90.

1. $p = \frac{1}{2}\left[xy - ab \lg \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\right]$.

Hyperbolická výseč (druhý člen vzorce **1.**)

2. $p' = \frac{1}{2} ab \lg \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) =$

$= \frac{1}{2} ab \operatorname{argcosh} \frac{x}{a}$.



Obr. 91.

Libovolná plocha (obr. 91).

1. *Pravidlo Simpsonovo.* Rovnoběžnými úsečkami $y_0, y_1, \ldots, y_{2n}$ rozdělíme vyčárkovanou plochu (*ABCD*) na *sudý* počet $2n$ dílů stejné šířky h. Potom

$$p \approx \frac{h}{3}\left\{y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + y_{2n}\right\}.$$

Krajní oddělené části stanovíme podle odst. **3.**; přibližně je obsah úsečí

$$p' \approx \frac{2}{3}(uy_0 + vy_{2n}).$$

2. *Vzorec Ponceletův.* Pořadnicemi rozdělíme plochu na n dílů stejné šířky h; zde

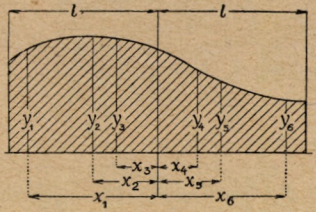
$$p \approx h\left\{2(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + \frac{1}{4}(y_0 + y_n) - \frac{1}{4}(y_1 + y_{n-1})\right\}.$$

3. *Vzorec Čebyševův* (pro $n = 6$). Interval rozdělíme na dva stejné díly délky $\pm l$ (obr. 92); od středu naneseme souměrně úsečky

$$-x_1 = 0{,}866\,2468 = x_6$$

$$-x_2 = 0{,}422\,5187 = x_5$$

$$-x_3 = 0{,}266\,6354 = x_4$$



Obr. 92.

a změříme vnitřní pořadnice $y_1, y_2, \ldots, y_6$; krajní se neuplatňují.

$$p \approx \frac{l}{3}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6).$$

Vzorec je vhodný pro empirické hodnoty y_ν zjištěné přesně v místech x_ν.

XXIII. Povrchy a objemy těles.

Povrch S; plášť p; objem V.

1. *Krychle.* Hrana a, úhlopříčka $u = a\sqrt{3}$; $S = 6a^2$; $V = a^3$.

2. *Pravoúhlý rovnoběžnostěn.* Hrany a, b, c.

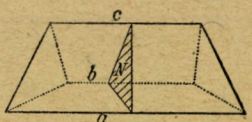
$S = 2(ab + ac + bc)$; $V = abc$; úhlopříčka $u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

3. *Hranol* kolmý nebo kosý. Obsah podstavy P, výška v, obsah normálového řezu N, jeho obvod o_N, pobočná hrana h.

$$p = o_N \cdot h; \qquad V = P \cdot v = N \cdot h.$$

4. *Hranol trojboký*, koso seříznutý (obr. 93). Pobočné hrany a, b, c, obsah normálového řezu $\triangle$.

$$V = \frac{\triangle}{3}(a + b + c).$$



Obr. 93.

5. *Hranol koso seříznutý.* N obsah normálového řezu, o_N jeho obvod; l_N, l_o příčky rovnoběžné s pobočnou hranou těžištěm normálového řezu a těžištěm jeho obvodu.

$$p = o_N \cdot l_o; \qquad V = N \cdot l_N.$$

6. *Jehlan* kolmý nebo kosý. Obsah podstavy P, výška v.

$$V = \frac{1}{3} P \cdot v .$$

7. *Čtyrstěn*, jehož jeden vrchol je v počátku a souřadnice ostatních jsou x_k, y_k, z_k $(k = 1, 2, 3)$.

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} .$$

8. *Jehlan komolý* (obr. 94). Podstavy P_1, P_2, výška v.

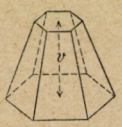
$$V = \frac{v}{3} (P_1 + \sqrt{P_1 P_2} + P_2), \qquad \text{přibližně } V \approx \frac{P_1 + P_2}{2} v .$$

9. *Obelisk* (obr. 95). $V = \frac{v}{6} \left[(2a + a_1) b + (2a_1 + a) b_1 \right]$.

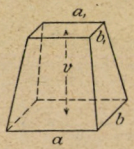
10. *Klín* (obr. 96). $V = \frac{bv}{6} (2a + a_1)$.

11. *Válec* kolmý nebo kosý. Obsah podstavy P, výška v. $V = P \cdot v$;

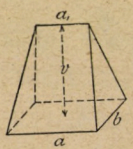
kruhový: $p = 2\pi r v$; $\quad S = 2\pi r (r + v)$; $\quad V = \pi r^2 v$.



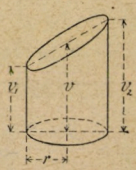
Obr. 94.



Obr. 95.



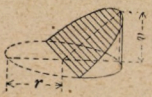
Obr. 96.



Obr. 97.

12. *Válec rotační* (kruhový kolmý) *koso seříznutý* (obr. 97). Jako seříznutý hranol **5.**

$$p = \pi r (v_1 + v_2); \qquad V = \pi r^2 \frac{v_1 + v_2}{2} .$$



Obr. 98.

13. *Klín*, úsek kruhového válce (obr. 98).

$$p = 2rv; \qquad V = \frac{2}{3} r^2 v .$$

14. *Válec kruhový dutý*. Tloušťka $a = R - r$, střední poloměr $\varrho = \frac{1}{2} (R + r)$.

$$V = \pi (R^2 - r^2) v = \pi a v (2R - a) = \pi a v (2r + a); \quad V = 2\pi \varrho a v .$$

15. *Kužel* kolmý nebo kosý. Obsah podstavy P, výška v.

$$V = \frac{1}{3} P \cdot v;$$

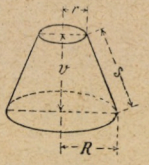
rotační (kruhový kolmý), poloměr podstavy r, výška v,

strana $s = \sqrt{r^2 + v^2}$: $\quad p = \pi r s;$ $\quad S = \pi r (r + s);$ $\quad V = \frac{1}{3} \pi r^2 v.$

16. *Kužel rotační komolý* (obr. 99).

$$p = \pi (R + r) s; \qquad S = \pi (R^2 + r^2) + \pi (R + r) s;$$

$$V = \frac{1}{3} \pi v (R^2 + Rr + r^2).$$



Obr. 99.

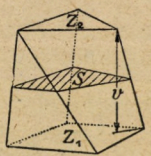
Značí-li $a = R + r$, $b = R - r$,

je $s = \sqrt{b^2 + v^2}$,

$$V = v \left(\frac{\pi a^2}{4} + \frac{1}{3} \frac{\pi b^2}{4} \right).$$

17. *Hranolec* (prismatoid, obr. 100) s pobočnými stěnami rovinnými nebo zborcenými. P_1, P_2 obsahy podstav, P_s obsah středního řezu, v výška,

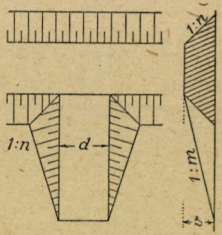
$$V = \frac{v}{6} (P_1 + 4 P_s + P_2).$$



Obr. 100.

18. *Rampa* (obr. 101). Spád příjezdu $1 : m$, spád boků $1 : n$, $m > n$, výška v, šířka d.

$$V = \frac{v^2}{6} (m - n) \left\{ 3d + 2nv \left(1 - \frac{n}{m} \right) \right\}.$$



Obr. 101.

19. *Koule.* Poloměr r, průměr d.

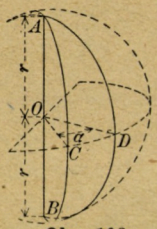
$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = 4{,}188\,790\,205\, r^3;$$

$$V = \frac{1}{6} \pi d^3 = 0{,}523\,598\,776\, d^3;$$

(Viz: Matematické a statické tabulky I., str. 41.)

$$r = \sqrt[3]{3\,V : 4\,\pi} = 0{,}620\,3505 \sqrt[3]{V}.$$

Koule dutá. $V = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3) = \frac{1}{6} \pi (D^3 - d^3).$



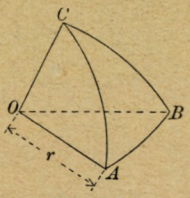
Obr. 102.

20. *Klín omezený plochou kulovou* (obr. 102).

Obsah kruhové výseče OCD $\quad p_0 = \frac{1}{2} r^2 \alpha$;

$$V = \frac{2}{3} r^3 \alpha = \frac{4}{3} r p_0 .$$

Sférický dvojúhelník $p = 2r^2 \alpha = 4 p_0$
(všude α v míře obloukové).



Obr. 103.

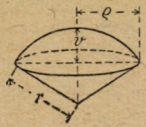
21. *Trojboká výseč kulová* (obr. 103).

Obsah sférického trojúhelníka ABC

$$\triangle = \frac{\varepsilon^0}{180^0} \pi r^2 ;$$

$$V = \frac{1}{3} \triangle r = \frac{\varepsilon}{3} r^3 .$$

Exces (nadbytek) ε^0 ve stupních, ε v míře obloukové.



Obr. 104.

22. *Kulová výseč* (obr. 104).

$$S = \pi r (2v + \varrho).$$

$$V = \frac{2}{3} \pi r^2 v = 2{,}094\,395\,102\, r^2 v.$$

23. *Kulová úseč* (obr. 104).

$$p = 2\pi r v; \qquad S = 2\pi r v + \pi \varrho^2 ;$$

$$V = \frac{1}{6} \pi v (3\varrho^2 + v^2) = \frac{1}{3} \pi v^2 (3r - v).$$

24. *Kulová vrstva* (obr. 105).

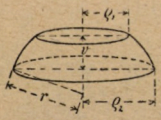
$$p = 2\pi r v; \quad S = 2\pi r v + \pi (\varrho_1^2 + \varrho_2^2);$$

$$r^2 = \varrho_2^2 + \left(\frac{\varrho_2^2 - \varrho_1^2 - v^2}{2v} \right)^2 ;$$

$$V = \frac{1}{6} \pi v (3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + v^2);$$

$$V = \pi \varrho_1^2 \frac{v}{2} + \pi \varrho_2^2 \frac{v}{2} + \frac{1}{6} \pi v^3$$

(t. j. dva válce a vepsaná koule).



Obr. 105.

Vyřízneme-li z kulové vrstvy komolý kužel o poloměrech ϱ_1, ϱ_2, výšce v a straně s, jest obsah prstence

$$V = \frac{1}{6}\pi v s^2.$$

25. *Elipsoid rotační protáhlý*, vzniklý otočením elipsy kolem hlavní osy.

$$S = 2\pi ab\left\{\frac{b}{a} + \frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right\}; \qquad \varepsilon = \sqrt{a^2 - b} : a;$$

$$V = \frac{4}{3}\pi ab^2 = 4{,}188\,790\,205\,ab^2.$$

26. *Elipsoid rotační zploštělý* (sféroid), vzniklý otočením elipsy kolem vedlejší osy.

$$S = 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{\varepsilon}\lg\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}; \qquad \varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2} : a;$$

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2 b = 4{,}188\,790\,205\,a^2 b.$$

27. *Elipsoid trojosý.* Poloosy a, b, c. Povrch je dán eliptickými integrály $F(k, \alpha)$; $E(k, \alpha)$. Vyjádříme-li k, α jako funkce poloos, plyne vzorec *Legendreův*

$$S = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}}\left\{c^2 F\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}, \arccos\frac{c}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + (a^2 - c^2) E\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}, \arccos\frac{c}{a}\right)\right\}.$$

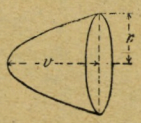
Při malé výstřednosti řezů (a, c), (b, c) platí přibližně $S \approx 4\pi(\sqrt[3]{abc})^2$;

$$V = \frac{4}{3}\pi abc = 4{,}188\,790\,205\,abc.$$

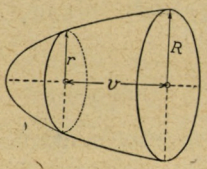
28. *Rotační paraboloid* (obr. 106).

$$p = \frac{\pi r}{6v^2}\left\{\sqrt{(r^2 + 4v^2)^3} - r^3\right\};$$

$$V = \frac{1}{2}\pi r^2 v = 1{,}570\,796\,327\,r^2 v.$$



Obr. 106.



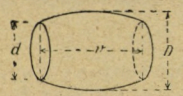
Obr. 107.

29. *Vrstva rotačního paraboloidu* (obr. 107).

Klademe-li $q = \frac{R^2 - r^2}{2v}$, je

$$p = \frac{2\pi}{3q}\left\{\sqrt{(q^2+R^2)^3} - \sqrt{(q^2+r^2)^3}\right\}$$

$$V = \frac{1}{2}\pi v(R^2 + r^2).$$



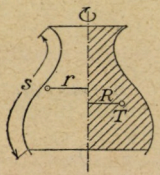
Obr. 108.

30. *Sud* s dužinami zakřivenými *kruhově*. Dna průměru d, střední řez průměru D, délka v (obr. 108). Přesně podle pravidla *Guldinova* **32.** Přibližně podle *Simpsonova* vzorce **34.**

$$V \approx \frac{\pi v}{12}(2D^2 + d^2).$$

31. *Sud* s dužinami zakřivenými *parabolicky*. Dna průměru d, střední řez průměru D, délka v.

$$V = \frac{\pi v}{15}(2D^2 + Dd + \frac{3}{4}d^2).$$



Obr. 109.

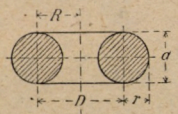
32. *Rotační plochy a tělesa.* Rovinná křivka (meridián) se otáčí kolem osy, která leží v téže rovině a křivku neprotíná; s délka oblouku křivky, r vzdálenost těžiště oblouku od osy; p obsah plochy křivkou omezené (profil), R vzdálenost těžiště plochy od osy (obr. 109).

Pravidlo Guldinovo. a) Obsah rotační plochy (povrch rotačního tělesa) se rovná délce oblouku, násobené drahou jeho těžiště:

$$S = 2\pi r \cdot s.$$

b) Objem rotačního tělesa se rovná obsahu plochy křivkou omezené, násobenému drahou jejího těžiště:

$$V = 2\pi R \cdot p.$$



Obr. 110.

Prstenec (*anuloid*, obr. 110).

$$S = 4\pi^2 Rr = 39{,}4784\,Rr = \pi^2 Dd = 9{,}8696\,Dd;$$

$$V = 2\pi^2 Rr^2 = 19{,}7392\,Rr^2 = \frac{1}{4}\pi^2 Dd^2 = 2{,}4674\,Dd^2.$$

Při eliptickém profilu $V = 2\pi^2 ab\,R$; při obdélníkovém $V = 2\pi ab\,R$.

Zobecněné pravidlo Guldinovo. Profil se pohybuje tak, že jeho rovina zůstává kolmá k prostorové křivce, kterou opisuje jeho těžiště. Plášť tělesa se rovná oblouku profilu, násobenému drahou jeho těžiště. Objem tělesa se rovná obsahu profilu, násobenému drahou těžiště plochy profilu.

Objem (nikoli povrch) se nezmění, otáčí-li se při pohybu profil v normálové rovině křivky kolem svého těžiště.

33. *Objem šroubového závitu.* Obsah profilu v rovině osy p, poloměr šroubovice opsané těžištěm profilu r.

$$V = 2\pi r \cdot p.$$

34. *Vzorec Simpsonův* pro objem těles, jejichž rovnoběžné řezy jsou funkcí vzdálenosti nejvýše 3. stupně (jehlan, kužel, hranolec, koule, elipsoidy, hyperboloidy, paraboloidy). Jsou-li p_1, p_2 obsahy krajních řezů, v jejich vzdálenost, p_s obsah středního řezu, jest objem

$$V = \frac{v}{6}(p_1 + 4p_s + p_2).$$

Podle *Keplera* (*Stereometria doliorum*, 1615) sluje tento vzorec také *pravidlo sudu.*

35. *Vrstva eliptického paraboloidu.* Podstavy jsou podobné elipsy s poloosami $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$; poloosy středního řezu a_s, b_s, o nichž platí

$$a_s^2 = \tfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2); \qquad b_s^2 = \tfrac{1}{2}(b_1^2 + b_2^2); \text{ výška } v.$$

$$V = \tfrac{1}{6}\pi v[a_1 b_1 + 4a_s b_s + a_2 b_2].$$

36. *Eliptický kbelík s dužinami přímými.* Poloosy eliptických podstav a_1, b_1; a_2, b_2; výška v.

$$V = \tfrac{1}{6}\pi v\left[2(a_1 b_1 + a_2 b_2) + a_1 b_2 + a_2 b_1\right].$$

37. *Objem libovolného tělesa.* Podle pravidla *Simpsonova.* Těleso mezi dvěma rovinami rozdělíme rovnoběžnými řezy na sudý počet $2n$ dílů šířky h. Jsou-li obsahy řezů $p_0, p_1, \ldots, p_{2n}$, je přibližně

$$V \approx \frac{h}{3}\Big\{p_0 + 4(p_1 + p_3 + \ldots + p_{2n-1}) + 2(p_2 + p_4 + \ldots + p_{2n-2}) + p_{2n}\Big\}.$$

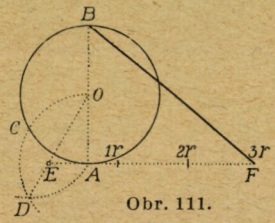
Obdobně můžeme vypočísti objem libovolného tělesa podle vzorce *Ponceletova* (str. 282) nebo *Čebyševova* (str. 283), nahradíme-li v nich pořadnice obsahy rovnoběžných řezů.

XXIV. Křivky a konstrukce.

Pro rýsování křivky volíme konstrukci nejvýhodnější; v jednotlivých bodech sestrojíme také tečny, které běh křivky dobře charakterisují; ve vrcholech určíme kružnice křivosti, jimiž křivku zčásti nahradíme, a pak ji vytáhneme podle křivítka. Tečny z daného bodu vedeme prostým přiložením pravítka a zjistíme dotykový bod. Normálu bodem mimo křivku sestrojíme zkusmo buď dotykovou kružnicí, kterou z daného bodu opisujeme, nebo normálním zrcátkem (str. 319).

A. Křivky.

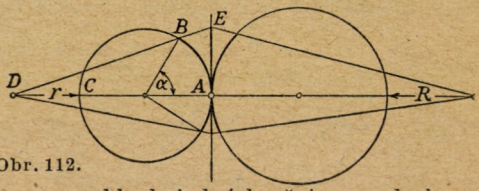
1. Kružnice.



Obr. 111.

1. *Rektifikace kružnice* (obr. 111). Z bodu A opišme poloměrem r oblouk OCD a přetněme jej obloukem téhož poloměru z C v bodě D; spojme O a D, v bodě A veďme tečnu kružnice a na ni od jejího průsečíku E na OD nanesme $EF = 3r$. Úsečka $BF = 3{,}1415\,3\,r \doteq \pi r$ je přibližně polovina délky kružnice s chybou v π na pátém místě.

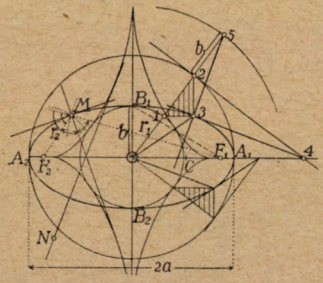
2. *Rektifikace oblouku kružnice* ($\overset{\frown}{AB}$, obr. 112). Průměr AC prodlužme o poloměr r do D. Přímka DB protíná tečnu v A v bodě E. Přibližně $AE \doteq \overset{\frown}{AB}$; při $\alpha = 30^0$ s chybou $0{,}042\,\%$; při $\alpha = 60^0$ s chybou $0{,}76\,\%$. Větší oblouky rozdělíme na dva. Touž konstrukcí přeneseme oblouk jedné kružnice na druhou.



Obr. 112.

2. Elipsa.

1. *Konstrukce elipsy z daných poloos* $OA_1 = a$, $OB_1 = b$ (obr. 113).



Obr. 113.

a) Užitím ohnisek podle věty $r_1 + r_2 = 2a$. Z koncového bodu vedlejší poloosy B_1 opišme poloměrem OA_1 kružnici, která na hlavní ose určuje ohniska F_1, F_2. Mezi nimi zvolme libovolný bod C; poloměrem $A_2C = r_1$ opišme kružnici z ohniska F_1 a zbytkem $A_1C = r_2$ kružnici z ohniska F_2. Průsečík M obou kružnic je bod elipsy. Vzhledem k souměrnosti elipsy dostaneme tak vždy zároveň čtyři body.

b) Na základě afinity s kružnicí: Ze středu O opišme kružnice poloměry a, b; libovolná přímka jdoucí středem protíná je v bodech 1, 2; jimi vedené rovnoběžky s osami určují bod elipsy 3.

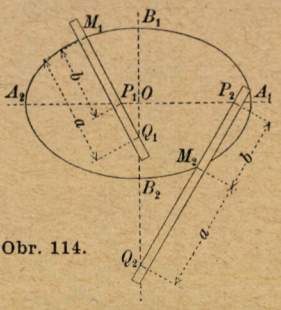
Tečna elipsy v bodě 3 odpovídá tečně kružnice v bodě 2, obě se protínají na hlavní ose (osa afinity) v bodě 4.

Normála v bodě 3. Přímka středem O a bodem 2 seče kružnici opsanou z O poloměrem $a + b$ v bodě 5; spojnice bodů 3 a 5 je normála. Normála z daného bodu N je tečnou evoluty (geometrického místa středů křivosti) elipsy.

Tečna a normála půlí oba vedlejší úhly průvodičů.

2. *Proužková konstrukce z daných poloos* (obr. 114). Při velkých poloosách naneseme na proužek papíru od téhož bodu v témž smyslu $a = M_1 Q_1$, $b = M_1 P_1$. Pohybujeme-li proužkem tak, aby P_1 zůstal na hlavní ose, Q_1 na vedlejší, opisuje bod M_1 elipsu.

Při malých poloosách naneseme v opačných smyslech $a = M_2 Q_2$, $b = M_2 P_2$ a pohybujeme proužkem tak, aby P_2 zůstal na ose hlavní, Q_2 na vedlejší; M_2 opisuje elipsu.

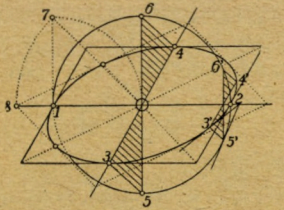


Obr. 114.

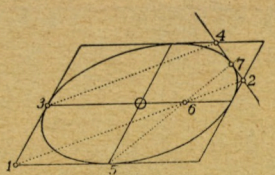
3. *Sestrojiti vedlejší poloosu, je-li dána hlavní poloosa a bod elipsy* (obr. 114). Z bodu M_1 přetněme vedlejší osu poloměrem a v bodě Q_1 a spojme M_1 s Q_1; $M_1 P_1 = b$.

4. *Sestrojiti elipsu ze sdružených průměrů* (obr. 115). Nad průměrem 1 2 opišme kružnici a v ní k 1 2 kolmý průměr 5 6. Spojnice 3 5, 4 6 udávají směr afinity, 1 2 je osa afinity.

Podobné trojúhelníky, v obraze vyčárkované, určují body elipsy 3′, 4′; tečny v nich protínají se s tečnami v příbuzných bodech kružnice na ose afinity 1 2. Úhlopříčky opsaného rovnoběžníka omezíme takto: učiňme $1\,7 = 1\,O$; $O\,8 = O\,7$ a bodem 8 veďme rovnoběžky s úhlopříčkami.



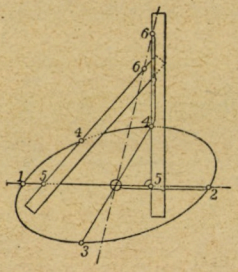
Obr. 115.



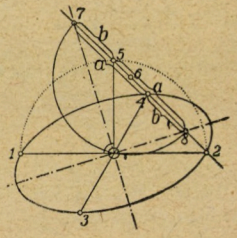
Obr. 116.

5. *Jiná konstrukce* (obr. 116). S libovolnou přímkou 1 2 veďme rovnoběžku 3 4; přímka 4 2 je tečna. Spojnice 5 6 určuje její dotykový bod 7.

6. *Proužková konstrukce ze sdružených průměrů* (obr. 117). V koncovém bodě 4 jednoho průměru veďme k druhému kolmici, nanesme na ni úsečku $4\,6 = O\,2$ a spojme body O a 6. Na proužku papíru poznamenáme body 4, 5, 6 a pohybujeme jím tak, aby bod 5 zůstal na 1 2, bod 6 na přímce $O\,6$; bod 4 opisuje elipsu.



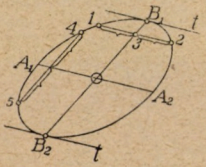
Obr. 117.



Obr. 118.

7. *Konstrukce os ze sdružených průměrů* (obr. 118). Nad průměrem 1 2 opišme půlkružnici, ve středu O vztyčme kolmici do bodu 5, spojnici 4 5 rozpulme bodem 6. Kružnice z bodu 6 poloměrem $6\,O$ opsaná protne přímku 4 5 v bodech 7, 8, které se středem O určují osy. Délky poloos $4\,7 = 5\,8 = a$, $5\,7 = 4\,8 = b$.

8. *K průměru sestrojiti sdružený* (obr. 119). S průměrem $A_1\,A_2$ veďme rovnoběžnou tětivu 1 2; spojnice půlícího bodu 3 se středem O je sdružený průměr $B_1\,B_2$ podle věty: Rovnoběžné tětivy elipsy jsou sdruženým průměrem půleny.



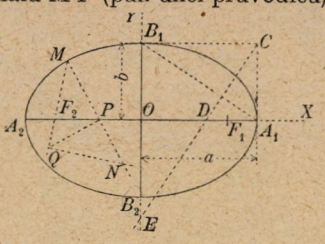
Obr. 119.

9. *V bodě elipsy B_1 sestrojiti tečnu* (obr. 119). K průměru $B_1\,B_2$ sestrojme rovnoběžnou tětivu 4 5 a spojením jejího středu se středem elipsy O sdružený průměr $A_1\,A_2$; s tímto veďme bodem B_1 rovnoběžku podle věty: Tečna v koncovém bodě průměru je rovnoběžná s průměrem sdruženým.

Konstrukce **8.** a **9.** platí obecně pro všechny kuželosečky (t. j. kružnici, elipsu, parabolu, hyperbolu).

10. *Sestrojiti dotykový bod tečny* (obr. 119). S danou tečnou t veďme rovnoběžný průměr $A_1\,A_2$; průměr k němu sdružený $O\,3$ určuje dotykový bod B_1 tečny t.

11. *Středy křivosti* (obr. 120). *a)* V obecném bodě: Daný bod M spojme s ohniskem (F_2); sestrojme normálu MP (půlí úhel průvodičů) a učiňme $PQ \perp MP$; $QN \perp MQ$. Bod N je středem křivosti elipsy v bodě M. Konstrukce platí i pro parabolu a hyperbolu.



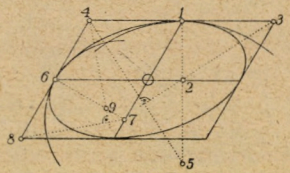
Obr. 120.

b) Ve vrcholech: Bodem C veďme kolmici k B_1A_1; její průsečíky s osami D, E jsou středy křivosti pro vrcholy A_1, B_1.

Poloměry křivosti

$$\varrho_a = A_1D; \quad \varrho_b = B_1E.$$

c) Středy křivosti v krajních bodech sdružených průměrů (obr. 121). Sestrojme rovnoběžník z tečen v krajních bodech průměrů; potom v bodě 1 normálu 1 2, k spojnici 2 3 veďme z bodu 4 kolmici; bod 5 je středem křivosti pro bod 1. Podobně sestrojíme: normálu 6 7, spojnici 7 8 a z bodu 4 kolmici na 7 8; bod 9 je středem křivosti pro bod 6.

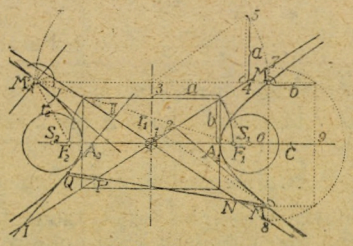


Obr. 121.

3. Hyperbola.

1. *Konstrukce hyperboly z daných poloos* (obr. 122). *a)* Sestrojíme nad osami obdélník podle nich souměrný; jeho úhlopříčky jsou asymptoty, opsaná kružnice určuje ohniska. Jednotlivé body hyperboly sestrojíme podle vztahu $r_1 - r_2 = 2a$; $A_2C = r_1$, $A_1C = r_2$ pro libovolný bod C na hlavní ose. Pro libovolnou sečnu platí $MN = PQ$.

b) Rovnoběžka s hlavní osou, protínající vedlejší osu v bodě 3, protne asymptotu v bodě 4; v něm na kolmici naneseme $45 = a$. Kružnice se středem v bodě 3 o poloměru 3 5 protne přímku 3 4 v bodě hyperboly M.

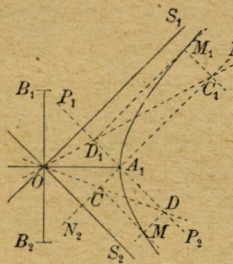


Obr. 122.

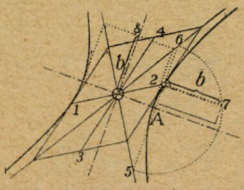
Rovnoběžka s vedlejší osou seče asymptoty v bodech 7, 8. Nad průměrem 7 8 opišme půlkružnici a protněme ji rovnoběžnou tětivou ve vzdálenosti $69 = b$; její průsečíky s kružnicí se promítají na přímku 7 8 do bodů hyperboly.

2. *Tečna a normála* půlí úhly průvodičů. Aneb: bodem hyperboly M veďme rovnoběžku s asymptotou a učiňme $12 = O1$; spojnice $2M$ je tečna hyperboly v bodě M.

3. *Sestrojiti dotykový bod tečny.* Dotykový bod Q půlí úsek tečny mezi asymptotami: $QI = QII$.



Obr. 123.



Obr. 124.

4. *Středy křivosti:* *a)* V obecném bodě jako u elipsy.

b) Ve vrcholu; vrcholem obdélníka nad osami veďme kolmici k asymptotě; její průsečík s hlavní osou je střed křivosti pro vrchol hyperboly.

5. *Sestrojiti hyperbolu rovnoosou* (obr. 123). Na jedné z obou rovnoběžek, vedených v koncovém bodě A_1 hlavní poloosy k asymptotám, zvolme body $C, C_1, \ldots$; jejich spojnice se středem O protnou druhou rovnoběžku v bodech $D, D_1, \ldots$ Rovnoběžky s osami, vedené body C a D, C_1 a $D_1, \ldots$, protínají se v bodech hyperboly M. Kružnice křivosti ve vrcholu má poloměr rovný OA_1 (v obraze není narýsována).

6. *Sestrojiti osy ze sdružených průměrů* (obr. 124). Nad sdruženými průměry 1 2, 3 4 sestrojme rovnoběžník; jeho úhlopříčky jsou asymptoty. Rozpůlíme-li jejich úhly, dostaneme osy.

Bodem 2 veďme rovnoběžky s osami; nad úsečkou 5 6, omezenou asymptotami, opišme půlkružnici, která protne rovnoběžku k hlavní ose v bodě 7. Úsečka $2\,7 = b = O\,8$ je vedlejší poloosa; s asymptotami určuje poloosu hlavní OA.

4. Parabola.

1. *Sestrojiti parabolu, je-li dán vrchol O a ohnisko F* (obr. 125).

a) V libovolném bodě A osy x vztyčme kolmici, učiňme $OB = OA$ a poloměrem FB opišme z ohniska kružnici do bodů paraboly C, D.

b) Sestrojme vrcholovou tečnu a ve vzdálenosti $OR = OF = \frac{p}{2}$ rovnoběžnou přímku řídicí. Libovolný paprsek, vedený ohniskem F, protíná obě v bodech 1, 2; kolmice k němu bodem 1 a rovnoběžka s osou bodem 2 protínají se v bodě paraboly 3; 1 3 je tečnou paraboly v bodě 3.

c) Podle definice: vzdálenost bodu paraboly od ohniska se rovná jeho vzdálenosti od přímky řídicí.

d) Parabola je obalována ramenem pravého úhlu, jehož vrchol se pohybuje po pevné přímce (vrcholová tečna) a druhé rameno prochází pevným bodem (ohnisko).

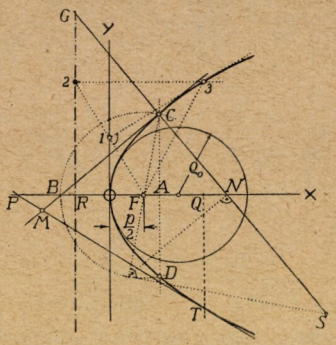
2. *Tečna a normála v bodě paraboly C* sestrojí se podle věty: Subtangenta je vrcholem půlena (platí i pro kosoúhlý průmět).

Učiníme-li $OB = OA$, je BC tečna v bodě C. Podle toho najdeme také dotykový bod tečny, je-li neznámý.

Subnormála rovná se polovici parametru:

$$AN = p = 2 \cdot OF.$$

3. *Tečny z daného bodu M* sestrojíme přiložením pravítka a dotykový bod T zjistíme podle vztahu $2 \cdot PO = PQ$.

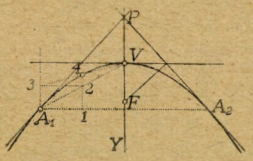


Obr. 125.

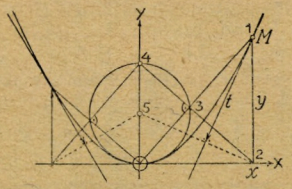
4. *Sestrojiti parabolu, je-li dána osa, vrchol a bod paraboly* (obr. 126).

a) V daném bodě sestrojíme tečnu podle **2.**, v jejím průsečíku s vrcholovou tečnou vedeme k ní kolmici, která osu protne v ohnisku F.

b) Daným bodem A_1 a libovolným bodem 1 na kolmici bodem A_1 k ose veďme rovnoběžky s danou osou. Druhá protínná spojnici bodu A_1 s vrcholem V v bodě 2; bodem 2 veďme rovnoběžku k A_1 1, jež protne rovnoběžku bodem A_1 k ose v bodě 3. Spojnice 3 V protíná 1 2 v bodě 4 paraboly.



Obr. 126.



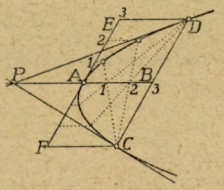
Obr. 127.

c) Daný bod M (obr. 127) spojme s vrcholem O a k této spojnici veďme patou 2 kolmice, spuštěné z M na vrcholovou tečnu paraboly, kolmici 23. Její průsečík 4 s osou určuje průměr 2ϱ kružnice křivosti ve vrcholu; na této kružnici leží také bod 3. Tečna v bodě M je kolmá k spojnici bodu 2 a středu 5 kružnice křivosti.

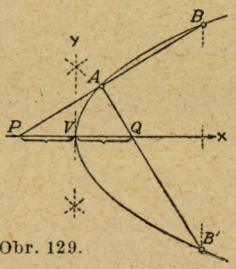
Zpětnou konstrukcí sestrojíme libovolný další bod paraboly a její tečnu v něm. Rovnice zobrazené paraboly, je-li vrcholová tečna osou **x** a daná osa **y**, jest

$$y = Cx^2; \qquad C = \frac{1}{2\varrho} = \frac{1}{2p}.$$

5. *Sestrojiti parabolu, je-li dán bod, jím jdoucí průměr a sdružená tětiva* nebo dvě tečny s dotykovými body (obr. 128). Učiníme $BC = BD$; $AB = AP$. V rovnoběžníku $CDEF$ rozdělme AE, AF, AB na stejný počet rovných dílů, z bodů C a D veďme dělícími body na AB paprsky a protněme je přímkami, jež vedeme příslušnými dělícími body na tečně EF rovnoběžně k průměru.



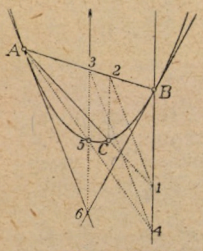
Obr. 128.



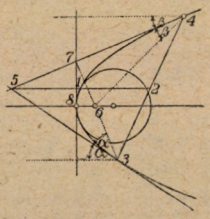
Obr. 129.

6. *Sestrojiti parabolu, je-li dána osa a dva body* (obr. 129). Spojnice daných bodů AB a daného bodu s bodem k druhému souměrně podle osy sdruženým AB' protínají osu v bodech P a Q; vrchol V půlí úsečku PQ.

7. *Sestrojiti parabolu, jsou-li dány tři body a směr osy* (obr. 130). Body B, C veďme rovnoběžky s daným směrem; spojnice AC protne první v bodě 1, tětiva AB druhou v bodě 2. K přímce 1 2 veďme libovolnou rovnoběžku s bodem 3 na AB a 4 na $B1$, potom přímku vedenou bodem 3 v daném směru protněme spojnicí $A4$ v bodě 5 na parabole. Je-li 3 středem tětivy AB, je 5 bodem sdruženého průměru na parabole. Tečna paraboly v bodě A je rovnoběžná s 1 2, její průsečík s průměrem 6 určuje tečnu v bodě B.



Obr. 130.



Obr. 131.

8. *Sestrojiti osu, ohnisko a vrchol paraboly, je-li dán bod, jím jdoucí průměr a sdružená tětiva* (obr. 131). V krajních bodech 3, 4 dané tětivy sestrojme tečny (1 5 = 1 2). Jejich úhly s přímkami rovnoběžnými k průměru přenesme na druhou stranu od nich; průsečík nových ramen je ohnisko 6, jímž jde osa rovnoběžně s průměrem. Z ohniska spusťme kolmici na tečnu, na př. do bodu 7; tím je určena vrcholová tečna, kolmá k ose, a vrchol 8.

9. *Středy křivosti* paraboly v obecném bodě jako u elipsy a hyperboly aneb podle věty: Poloměr křivosti paraboly rovná se dvojnásobnému úseku normály mezi tečnou a přímkou řídicí (opačného smyslu). V obr. 125. je v bodě C poloměr křivosti $CS = 2 \cdot CG$.

Poloměr křivosti ve vrcholu paraboly rovná se polovici jejího parametru $\varrho_0 = 2 \cdot OF = p$.

5. Křivky mocninové $y = Cx^n$.

Jsou-li dány dva body křivky souřadnicemi $P_1(x_1, y_1)$; $P_2(x_2, y_2)$, určí se exponent buď počtem podle vzorce

$$n = \frac{\log y_1 - \log y_2}{\log x_1 - \log x_2}$$

aneb graficky ve dvojité soustavě logaritmické (str. 266), kde mocninové křivky se zobrazují přímkami.

a) Paraboly; n kladné, celé neb lomené.

1. Při daném exponentu n je křivka určena jedním bodem $P_0(x_0, y_0)$ a má rovnici

$$\frac{y}{y_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^n.$$

Při $n = 0$ jest $y = y_0$, rovnoběžka s osou x;

„ $n = 1$ „ $y = y_0 \frac{x}{x_0}$, přímka OP_0 jdoucí počátkem;

„ $n = 2$ „ $y = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2$, parabola kvadratická;

„ $n = 3$ „ $y = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^3$, parabola kubická;

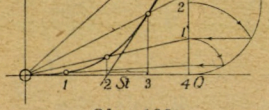
„ $n = \frac{3}{2}$ „ $y = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{3}{2}}$, parabola semikubická *(Neilova)*.

2. *Konstrukce* (obr. 132). Daným bodem P_0 a v libovolném místě x veďme rovnoběžky s osou y. Spojnice OP_0 určuje na rovnoběžce vedené v místě x bod A ($n = 1$); jím veďme rovnoběžku s osou x do B na rovnoběžce bodem P_0; spojnice OB určuje bod C ($n = 2$) atd.; E je bod kubické paraboly. Průsečík přímek EF a CB je bodem paraboly semikubické ($n = 3/2$).

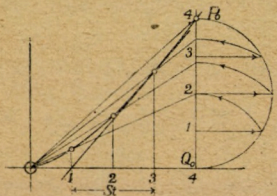
Obr. 132.

3. *Tečna* se sestrojí na základě subtangenty $s_t = \frac{x}{n}$ (nebo $-\frac{x}{n}$, měřeno od průmětu bodu dotykového); na př. tečna v bodě E kubické paraboly má subtangentu $\frac{x}{3}$.

4. *Konstrukce paraboly kubické* (obr. 133) a *paraboly semikubické* (obr. 134). Souřadnice x_0, y_0 rozdělme na týž počet sobě rovných dílů; nad úsečkou $P_0 Q_0$ opišme půlkružnici, v dělících bodech na ose x veďme rovnoběžky s y. Oblouky kružnic středu Q_0, jdoucí dělícími body na $P_0 Q_0$, určují na uvedené půlkružnici body, jejichž průměty na $P_0 Q_0$, spojeny s O, protínají příslušné rovnoběžky v bodech kubické paraboly. V druhém případě vedeme dělícími body na $P_0 Q_0$ rovnoběžky k ose **x**, načež oblouky kružnic středu Q_0, jdoucí průsečíky těchto rovnoběžek s uvedenou půlkružnicí, určují na $P_0 Q_0$ body, jež spojeny s O protínají se s prvými rovnoběžkami v bodech semikubické paraboly.



Obr. 133.



Obr. 134.

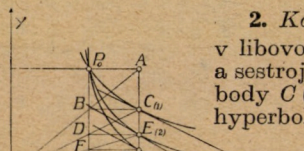
b) Hyperboly; n záporné, celé neb lomené.

1. Při daném exponentu $n = -m$ je křivka určena jedním bodem $P_0 (x_0, y_0)$ a má rovnici

$$\frac{y}{y_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-m} = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{m}.$$

Při $m = 1$ jest $y = y_0 \frac{x_0}{x}$, rovnoosá hyperbola;

„ $m = 2$ „ $y = y_0 \left(\frac{x_0}{x}\right)^2$, hyperbola 2. stupně, atd.



Obr. 135.

2. *Konstrukce* (obr. 135). Daným bodem P_0 a v libovolném místě x veďme rovnoběžky s osou y a sestrojme podle obrazu postupně body $A, B, C, \ldots$; body $C\,(m = 1)$; $E\,(m = 2)$; $G\,(m = 3)$ jsou body hyperbolických křivek.

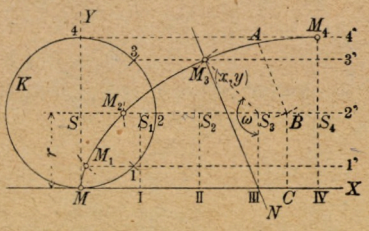
3. *Tečna* se sestrojí na základě subtangenty $s_t = -\frac{x}{m}$ (od průmětu dotykového bodu $\frac{x}{m}$). Na př. tečna hyperboly $y = cx^{-3}$ v bodě G má subtangentu $-\frac{x}{3}$.

6. Křivky cyklické (kotálnice).

a. Cykloida prostá.

Vytvoří ji bod kružnice, valící se po přímce (obr. 136).

1. *Konstrukce.* Kružnici a její rektifikovanou délku na tečně rozdělme od bodu dotyku M na týž počet rovných dílů; body kružnice veďme rovnoběžky s tečnou, body tečny rovnoběžky s průměrem k tečně kolmým a z bodů S_1, S_2,... na rovnoběžce středem S kružnice s tečnou protněme první z nich poloměrem kružnice.



Obr. 136.

2. *Rovnice cykloidy.* Značí-li r poloměr kružnice, ω úhel valení, jsou souřadnice bodů křivky

$$x = r(\omega - \sin\omega); \qquad y = r(1 - \cos\omega).$$

3. *Tečna a normála.* Normála prochází příslušným dotykovým bodem kružnice a přímky (okamžitým středem otáčení); k normále sestrojíme tečnu. Délka normály

$$n = 2r\sin\frac{\omega}{2} = \sqrt{2ry}.$$

4. *Poloměr křivosti* rovná se dvojnásobné délce normály,

$$\varrho = 4r\sin\frac{\omega}{2} = 2\sqrt{2ry}.$$

Ve vrcholu cykloidy je $\varrho = 4r$.

5. *Oblouk* $s = 4r\left(1 - \cos\frac{\omega}{2}\right) = 4r - 2\sqrt{2r(2r-y)}$.

Celý oblouk od $x = 0$ do $x = 2\pi$ je $s = 8r$.

6. *Obsah plochy* omezené obloukem, osou x a pořadnicí y:

$$r^2\left(\frac{3}{2}\omega - 2\sin\omega + \frac{1}{4}\sin 2\omega\right) = \frac{3}{2}rx - \frac{1}{2}y\sqrt{(2r-y)y};$$

plocha od počátku k vrcholu cykloidy má obsah $\frac{3}{2}\pi r^2$.

7. *Evoluta cykloidy* (geometrické místo středů křivosti cykloidy) jest opět cykloida, shodná s původní.

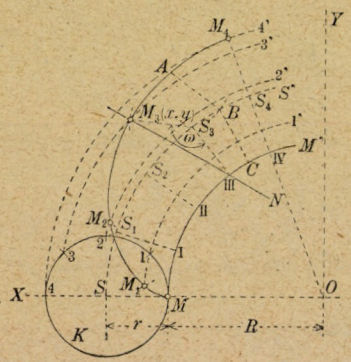
b. Cykloida zkrácená, cykloida prodloužená.

Vzniknou valivým pohybem kružnice po přímce, je-li tvořící bod uvnitř nebo vně kružnice. Označíme-li vzdálenost tohoto bodu od středu kružnice $c \lesseqgtr r$, úhel valení ω, jsou souřadnice bodů křivky

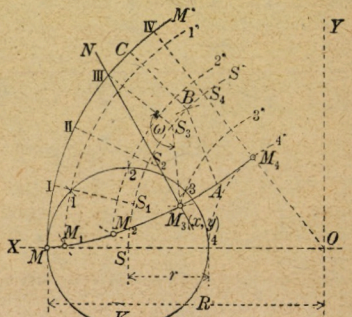
$$x = r\omega - c\sin\omega; \qquad y = r - c\cos\omega.$$

c. Epicykloida a hypocykloida.

Vzniknou valivým pohybem kružnice po kružnici; u epicykloidy je pohyblivá kružnice vně (obr. 137), u hypocykloidy uvnitř (obr. 138).



Obr. 137.



Obr. 138.

1. *Konstrukce.* Poloviční délku valící se kružnice poloměru r a stejně dlouhý oblouk pevné kružnice poloměru R $\overset{\frown}{M4} = \overset{\frown}{M\,\mathrm{IV}}$ rozdělme od bodu dotyku na týž počet rovných dílů; úhel $MO\,\mathrm{IV} = \frac{r}{R}\,180^0$. Opišme ze středu O soustředné kružnice, jdoucí body 1, 2, ... pohyblivé kružnice, veďme paprsky středem O a body I, II, ... pevné kružnice a ze středů $S_1, S_2, \ldots$ na kružnici středu O a poloměru OS protněme první poloměrem valící se kružnice. Konstrukce platí pro obě křivky.

2. *Rovnice epicykloidy a hypocykloidy.* Horní znamení patří první, dolní druhé křivce.

$$x = (R \pm r)\cos\frac{r}{R}\omega \mp r\cos\frac{R \pm r}{R}\omega;$$

$$y = (R \pm r)\sin\frac{r}{R}\omega - r\sin\frac{R \pm r}{R}\omega.$$

Je-li $\frac{r}{R}$ racionální, plyne eliminací ω rovnice algebraická.

Knihovna

3. *Normála* prochází okamžitým středem otáčení.

4. *Poloměr křivosti* $\varrho = \dfrac{4r(R \pm r)}{R \pm 2r} \sin\dfrac{\omega}{2}$.

5. *Oblouk* $s = 4r\dfrac{R \pm r}{R}\left(1 - \cos\dfrac{\omega}{2}\right)$.

$$\overset{\frown}{M M_4} = \frac{4r}{R}(R \pm r).$$

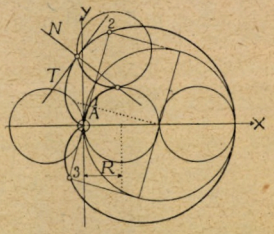
6. Je-li $r = \dfrac{R}{2}$, přejde hypocykloida v přímku (úsečku $2R$); bod, který leží ve vzdálenosti $c < r$ od středu valící se kružnice, opisuje elipsu s poloosami $r + c$, $r - c$.

d. Kardioida (srdcovka).

Je zvláštní případ epicykloidy, když $r = R$. *Rovnice:*

$$x = r(2\cos\omega - \cos 2\omega);$$

$$y = r(2\sin\omega - \sin 2\omega).$$



Obr. 139.

Je-li A počátkem (obr. 139) a vyloučíme-li ω,

$$(x^2 + y^2 - 2Rx)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

V polární soustavě rovnice kardioidy

$$r = 2R(1 + \cos\varphi).$$

Kardioida je též úpatnicí kružnice [zde středu $(2R, 0)$, poloměru $2R$] vzhledem k jejímu bodu (zde počátku). V obrazci jsou tak sestrojeny body 2 a 3.

e. Asteroida.

Je zvláštní případ hypocykloidy, když $r = \dfrac{R}{4}$.

Rovnice:

$$x = \tfrac{1}{4}R(3\cos\omega + \cos 3\omega); \qquad y = \tfrac{1}{4}R(3\sin\omega - \sin 3\omega).$$

Eliminací ω plyne algebraická rovnice asteroidy

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}.$$

Asteroida jest obalovou čarou přímky délky R, jejíž koncové body se pošinují po osách x a y; každý bod takové přímky opisuje elipsu (elipsograf).

f. Epicykloida a hypocykloida zkrácená nebo prodloužená.

Vzniknou valivým pohybem kružnice po kružnici, je-li tvořící bod uvnitř nebo vně valící se kružnice. Označíme-li vzdálenost tohoto bodu od středu valící se kružnice $c \lesseqgtr r$, úhel valení ω a soustavu os zvolíme jako v obr. 137 a 138, jsou křivky dány rovnicemi:

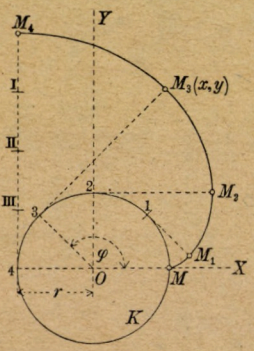
$$x = (R \pm r) \cos\frac{r}{R}\omega \mp c \cos\frac{R \pm r}{R}\omega,$$

$$y = (R \pm r) \sin\frac{r}{R}\omega - c \sin\frac{R \pm r}{R}\omega.$$

Je-li $R = r$ (a $c \neq r$), má epicykloida algebraickou rovnici čtvrtého stupně a sluje *Pascalova závitnice*.

g. Evolventa kružnice.

Vytvoří ji bod vlákna, odvinovaného z kružnice (a při tom napjatého) nebo bod přímky, valící se po kružnici (obr. 140).



Obr. 140.

1. *Konstrukce.* Polovinu kružnice rozdělme na jistý počet stejných dílů; v dělicích bodech veďme tečny a nanesme na ně rektifikované oblouky:

$$\overline{1M_1} = \overset{\frown}{1M}, \quad \overline{2M_2} = \overset{\frown}{2M} \text{ atd.}$$

Jednotlivé části křivky lze přibližně (při malé jejich délce) nahraditi kruhovými oblouky, opsanými ze středů 1, 2, 3, ...

2. *Rovnice:*

$$x = r(\cos\varphi + \varphi \sin\varphi);$$

$$y = r(\sin\varphi - \varphi \cos\varphi),$$

kde φ je úhel poloměru kružnice s osou x.

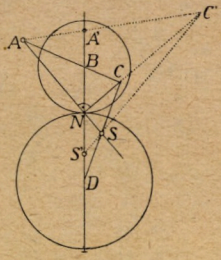
3. *Tečna, normála a poloměr křivosti.* Normály evolventy jsou tečny kružnice; její středy křivosti jsou v dotykových bodech normál; poloměr křivosti má délku odvinutého vlákna $\varrho = r\varphi$.

4. *Oblouk* $s = \frac{1}{2} r \varphi^2$.

5. *Obsah plochy*, omezené obloukem evolventy (od bodu na kružnici), příslušným obloukem základní kružnice a její tečnou v koncovém bodě, jest $\frac{1}{6} r^2 \varphi^3$.

h. Konstrukce středů křivosti křivek cyklických.

Bod křivky A (obr. 141) spojme se středem B valící se kružnice a s okamžitým středem otáčení N. Kolmice v bodě N k normále AN vztyčená protne přímku AB v bodě C; spojíme-li tento bod se středem pevné kružnice D, dostaneme v bodě S, průsečíku spojnic AN a CD, střed křivosti pro bod A. Je-li bod křivky A' na spojnici středů obou kružnic, užijeme středu nalezeného pro jiný bod A: Přímka AA' protne NC v bodě C', spojnice $C'S$ normálu $A'D$ v hledaném středu křivosti S'.



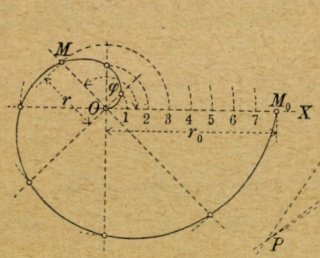
Obr. 141.

Konstrukce platí i pro obecné kotálnice, při čemž B a D jsou středy křivosti pohyblivé a pevné křivky.

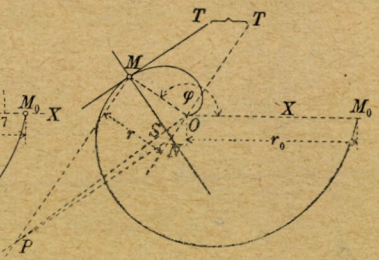
7. Spirály.

a. Archimedova spirála.

Vznikne rovnoměrným pohybem bodu na průvodiči, otáčejícím se rovnoměrně kolem počátku; má vlastně dvě souměrně sdružené větve. (Vznikne také jako obecná evolventa kružnice valením přímky po pevné kružnici, při čemž tvořící bod s přímkou pevně spojený je v počáteční poloze středem základní kružnice.)



Obr. 142.



Obr. 143.

1. *Konstrukce* (obr. 142). Úsečku délky $OM_0 = r_0$, které nabude průvodič po jedné otočce, a úhel 360° (v obloukové míře 2π) rozdělme na týž počet n rovných dílů a na jednotlivé paprsky nanesme postupně úsečky $\frac{r_0}{n}$, $2\frac{r_0}{n}$, $3\frac{r_0}{n}$, ...

2. *Rovnice* $r = \frac{r_0}{2\pi}\varphi = a\varphi$,

kde r_0 nebo $a = \frac{r_0}{2\pi}$ jsou dané konstanty.

3. *Normála a tečna* v bodě M (obr. 143). Polární subnormála má délku $ON = a = \frac{r_0}{2\pi}$; spojnice MN je normála; tečna se sestrojí jako kolmice k normále.

4. *Střed křivosti.* Veďme $MP \perp MO$, $NP \perp MN$; spojnice OP protíná normálu MN ve středu křivosti S (obr. 143).

b. Hyperbolická spirála.

1. *Rovnice křivky* jest

$$r = \frac{a}{\varphi}.$$

2. *Konstrukce.* Úhel φ vyjádříme v míře obloukové a podle rovnice vypočteme příslušnou délku průvodiče r. S rostoucím bez omezení φ, t. j. pro $\varphi \to \infty$ zmenšuje se $r \to 0$, pól je *asymptotický bod*, k němuž se křivka v nesčetných závitech blíží. Pro $\varphi \to 0$ platí o souřadnici

$$y = r \sin\varphi = a\frac{\sin\varphi}{\varphi} \to a \text{ (podle 10. str. 74),}$$

t. j. přímka $y = a$ (rovnoběžka s polární osou ve vzdálenosti a) jest asymptota hyperbolické spirály.

Zvolíme-li na příklad $a = 2\pi = 6.28$, jsou pro násobky 45° čili pro $n\pi : 4$, kde $n = 0, 1, 2, \ldots$ délky průvodičů $8 : n$. Body křivky jsou pak dány souřadnicemi:

$\varphi =$	0,	45°,	90°,	135°,	180°,	225°,	270°,	315°,	360°, ...
$r =$	∞,	8,	4,	2.67,	2,	1.6,	1.33,	1.14,	1, ...

Pro záporné úhly dostaneme druhou větev křivky, souměrně sdruženou k prvé podle osy y.

Tečna je určena polární subtangentou $s_t = a$.

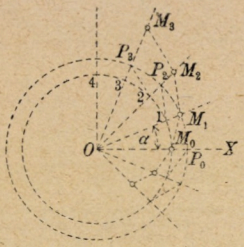
c. Logaritmická spirála.

1. *Rovnice křivky.* Jsou-li b, $c > 0$ konstanty, $e = 2{\cdot}71828\ldots$, φ úhel v míře obloukové, jest

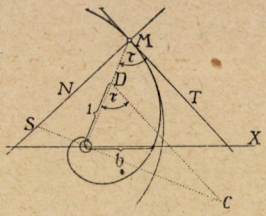
$$r = be^{c\varphi}.$$

Pro $\varphi = 0$ je průvodič $r_0 = b$. Tvoří-li odchylky φ řadu aritmetickou $\varphi = 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$, rostou průvodiči řadou geometrickou s podílem $q = e^{c\alpha}$. Ježto pro $\varphi \to -\infty$ průvodič $r \to 0$, je pól asymptotickým bodem logaritmické spirály.

2. *Konstrukce* (obr. 144). Rozdělme plný úhel na větší počet, na př. na 16 rovných dílů. Vypočteme dva sousední průvodiče, v tomto případě $r_0 = b$, $r_1 = b\,e^{c\pi/8}$; opíšeme jimi soustředné kružnice středu O a se spojnicemi vždy dvou sousedních koncových bodů jednoho a druhého poloměru vedeme postupně rovnoběžky. Body M_0, M_1, M_2, M_3 jsou body spirály.



Obr. 144.



Obr. 145.

3. *Tečna a normála* (obr. 145). Logaritmická spirála je isogonální trajektorie průvodičů, protínajíc je v stálém úhlu $\operatorname{tg}\tau = \frac{1}{c}$. Křivka si je ve všech částech podobna; její tvar závisí na parametru c. Veďme $OC \perp OM$, učiňme $OD = 1$, $OC = \frac{1}{c}$ a spojme C, D. Tečna v bodě M je rovnoběžná s DC. Subnormála $OS = bc\,e^{c\varphi} = cr = r\operatorname{cotg}\tau$.

4. *Poloměr křivosti* má délku normály,

$$\varrho = MS = r\sqrt{1 + c^2} = \frac{r}{\sin\tau}.$$

d. Sinové spirály.

Obecná rovnice křivek, zvaných sinové spirály,

$$r^m = a^m \sin m\varphi$$

přejde otočením soustavy o úhel $\psi = \frac{\pi}{2m} - \varphi$ na tvar

$$r^m = a^m \cos m\varphi.$$

Při racionálním m jsou sinové spirály křivky algebraické, při iracionálním transcendentní.

Na příklad:

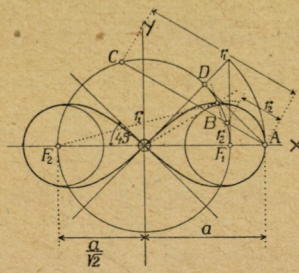
1. $m = 1$: $r = a \cos \varphi$ je *kružnice* $x^2 + y^2 = a x$ o průměru a.

2. $m = -1$: $r^{-1} = a^{-1} \cos(-\varphi)$ čili $r = \dfrac{a}{\cos \varphi}$ je *přímka* $x = a$.

3. $m = 2$: $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ je *lemniskata* (obr. 146).

Rovnice lemniskaty v pravoúhlé soustavě jest

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$



Obr. 146.

Součin vzdáleností bodu křivky od dvou pevných bodů (F_1, F_2 o vzdálenosti $a\sqrt{2}$) je stálý a roven čtverci jejich poloviční vzdálenosti $r_1 r_2 = \dfrac{a^2}{2}$; a je poloosa. Opíšeme-li nad průměrem $F_1 F_2$ kružnici středu O a protneme ji z bodu $A\,(a, 0)$ libovolnou sečnou v bodech B, C, dostaneme průvodiče $AB = r_1$, $AC = r_2$, ježto

$$AB \,.\, AC = AD^2 = OA^2 - OD^2 = \frac{a^2}{2}$$

(mocnost bodu ke kružnici). Průvodič svírá s normálou úhel 2φ: největší pořadnice $\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$ je v bodě $\varphi = 30^0$, $r = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$; poloměr křivosti $\varrho = \dfrac{a^2}{3r}$, ve vrcholu $\varrho_A = \dfrac{a}{3}$. Počátek je dvojný bod obratu, v něm tečny svírají s osou x úhly 45^0 a 135^0. Obsah plochy obou částí $p = a^2$.

Lemniskata jest úpatnicí rovnoosé hyperboly vzhledem k jejímu středu. Vznikne také průsekem anuloidu s tečnou rovinou, rovnoběžnou s osou anuloidu, je-li $R = 2r$.

Křivky, vytvořené bodem, jehož součin vzdáleností od dvou pevných bodů je stálý, slují *křivky Cassiniho;* lemniskata je jejich významným případem.

4. $m = \dfrac{1}{2}$: $r^{1/2} = a^{1/2} \cos(\varphi : 2)$ je *kardioida* (obr. 139). Klademe-li

$$a = 4R, \text{ má rovnici } r = 4R \cos^2 (\varphi : 2) = 2R\,(1 + \cos \varphi).$$

5. $m = -2$: $\dfrac{1}{r^2} = \dfrac{\cos 2\varphi}{a^2}$ je *rovnoosá hyperbola* $x^2 - y^2 = a^2$.

6. $m = -\dfrac{1}{2}$: $\dfrac{1}{\sqrt{r}} = \dfrac{\cos(\varphi : 2)}{\sqrt{a}}$ je *parabola* $y^2 = 4a\,(a - x)$

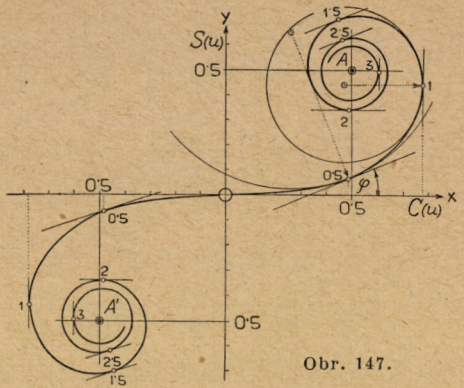
8. Klothoida.

1. *Přirozená rovnice**) *klothoidy* (obr. 147)

$$\varrho = \frac{a^2}{s}$$

značí, že křivost $1 : \varrho = s : a^2$ je přímo úměrná délce oblouku s; proto se jí používá jako přechodnice.

Pravoúhlé souřadnice bodů klothoidy vyjadřují Fresnelovy integrály:



Obr. 147.

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi; \qquad y = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi; \qquad s = a\sqrt{2\varphi}. \tag{1}$$

Ježto $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \operatorname{tg}\varphi$, značí $\varphi = \frac{s^2}{2a^2}$ úhel tečny s osou x. Počátek, kde $\varrho = \infty$, je bod obratu, v něm osa x tečnou. Asymptotický bod A, k němuž se křivka blíží pro $\varphi \to \infty$, má vzhledem k **17.** str. 103 souřadnice

$$x_A = y_A = \frac{1}{2}a\sqrt{\pi}.$$

2. Substitucí $\varphi = \frac{1}{2}\pi u^2$ přejdou výrazy (1) na

$$x = a\sqrt{\pi} \int_0^{u} \cos\frac{\pi u^2}{2}\,\mathrm{d}u; \qquad y = a\sqrt{\pi} \int_0^{u} \sin\frac{\pi u^2}{2}\,\mathrm{d}u; \qquad s = a\sqrt{\pi}\,u. \tag{2}$$

Pro kladné i záporné u mají x, y, s stejné hodnoty opačného znamení: křivka je souměrná vzhledem k počátku.

---

*) *Přirozená rovnice křivky* má tvar $\varrho = f(s)$; vyjadřuje poloměr křivosti ϱ jako funkci oblouku s. K pravoúhlé soustavě vedou transformační rovnice:

$$\varphi = \int \frac{\mathrm{d}s}{f(s)}; \qquad x = \int \cos\varphi\,\mathrm{d}s; \qquad y = \int \sin\varphi\,\mathrm{d}s.$$

3. Zvolíme-li ve (2) konstantu $a = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, jest $x_A = y_A = \frac{1}{2}$;

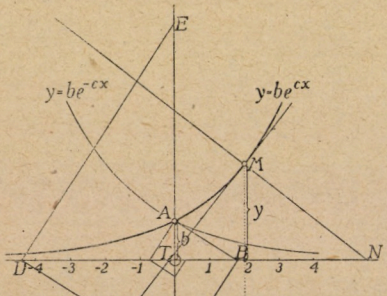
$$x = \int_0^u \cos\frac{\pi u^2}{2}\,du = C(u); \quad y = \int_0^u \sin\frac{\pi u^2}{2}\,du = S(u); \quad s = u. \qquad (3)$$

4. *Konstrukce* provedena podle (3) a dat, sestavených v tabulce, z několika bodů, oddělujících na křivce stejné oblouky délky 0,5.

$u = s$	$x = C(u)$	$y = S(u)$	$\varphi = \pi u^2 : 2$	$\varrho = 1 : \pi u$
0,5	0,4923	0,0647	$\pi : 8$	0,63662
1	0,7799	0,4383	$\pi : 2$	0,31831
1,5	0,4453	0,6975	$9\pi : 8$	0,21221
2	0,4883	0,3434	2π	0,15915
2,5	0,4574	0,6192	$25\pi : 8$	0,12732
3	0,6057	0,4963	$9\pi : 2$	0,10610

9. Křivka exponenciální (logistika).

1. *Rovnice křivky* $y = ba^{cx}$, kde $a > 0$, $b > 0$, c jsou konstanty. Když $a = e = 2{,}71828\ldots$, je $y = be^{cx}$. Křivka $y = ba^{-cx}$ je souměrná ke křivce $y = ba^{cx}$ podle osy y. Exponenciální křivka má jen kladné pořadnice. Pro $x = 0$ je $y = b$. Osa x je asymptota. V jednoduché logaritmické soustavě (str. 265) je křivka exponenciální (zvaná též logistika) zobrazena přímkou.



Obr. 148.

2. *Konstrukce* (obr. 148). Rostou-li úsečky řadou aritmetickou, rostou pořadnice řadou geometrickou. Nanesme $OA = b$, $OB = ba^c$ a učiňme $BC \perp AB$, $CD \perp BC$, atd.; úsečky OB, OC, OD, ... jsou pořadnice v bodech $x = 1, 2, 3, \ldots$ Podobně dostaneme body křivky ve směru $-x$.

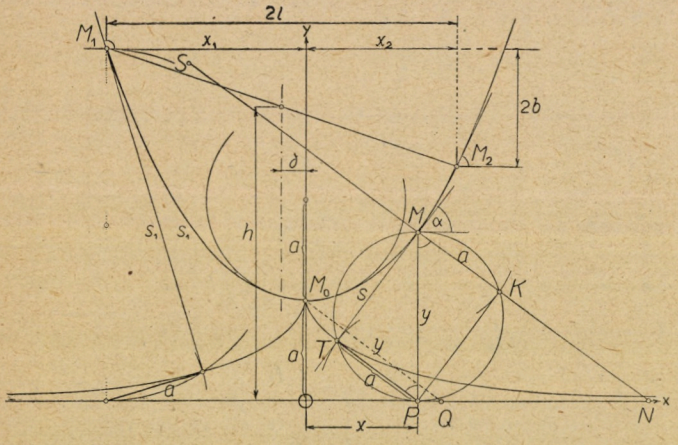
3. *Tečna.* Subtangenta (**6.** str. 131) je stálá: $s_t = -\frac{1}{c \lg a}$; vypočtenou délku naneseme na osu x od průmětu dotykového bodu M a koncový bod spojíme s bodem M.

4. *Poloměr křivosti* sestrojíme na základě úměry y: $MT = NT : \varrho$. V obraze jest $MP = NT$, $MQ = \varrho = MS$.

10. Řetězovky.

a. Obecná řetězovka.

Obecná řetězovka (obr. 149) má tvar těžkého homogenního dokonale ohebného nepružného vlákna, zavěšeného ve dvou bodech.



Obr. 149.

1. *Rovnice křivky*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x:a} + e^{-x:a}\right) \text{ čili } y = a \cosh \frac{x}{a}$$

aneb, je-li y nezávisle proměnná

$$x = a \lg \frac{y \pm \sqrt{y^2 - a^2}}{a} \text{ čili } x = a \operatorname{argcosh} \frac{y}{a}.$$

Záporné znaménko odmocniny dává při témže y záporné x. Parametr a značí vzdálenost nejnižšího bodu křivky od osy x. Řetězovku narýsujeme podle tabulky hyperbolického kosinu.

Všechny obecné řetězovky jsou si podobny.

Při malém prohnutí je zlomek $x:a$ velmi malý, křivka se blíží parabole; podržíme-li v řadě pro cosh $(x:a)$ jen dva členy, jest

$$y = a + \frac{x^2}{2a}.$$

Je-li závěsný bod počátkem soustavy, m úsečka vrcholu M_0, je rovnice obecné řetězovky

$$y = a\left(\cosh\frac{x-m}{a} - \cosh\frac{m}{a}\right).$$

2. *Tečna a normála* v bodě $M(x,y)$. Učiňme $M_0Q = MP = y$; normála $MN \parallel M_0Q$, tečna $MT \perp M_0Q$. Opíšeme-li nad průměrem y kružnici a přetneme ji z bodů M, P poloměrem a, je T bod tečny, K bod normály. Pro úhel tečny s osou x platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \sinh\frac{x}{a}; \qquad \cos\alpha = \frac{a}{y}.$$

3. *Oblouk* $s = M_0M = MT = OQ$; je průmětem pořadnice na tečnu.

$$s = a\sinh\frac{x}{a} = \sqrt{y^2 - a^2} = a\operatorname{tg}\alpha.$$

4. *Poloměr křivosti* $\varrho = \frac{y^2}{a} = \frac{a}{\cos^2\alpha}$

má délku normály $\varrho_M = MN$; ve vrcholu $\varrho_0 = a$.

5. *Obsah plochy* MM_0OP je roven $a^2\sinh\frac{x}{a} = a\sqrt{y^2 - a^2} = as$.

6. *Stanovení parametru a polohy os*, jsou-li dány: délka vlákna $2s$, horizontální vzdálenost závěsů $2l$, rozdíl jejich výšek $2b$. Jsou-li oba závěsy ve stejné výši, je $b = 0$. K řešení vedou vztahy

$$\frac{\sqrt{s^2 - b^2}}{l} = \frac{\sinh u}{u}; \quad \text{parametr } a = \frac{l}{u}.$$

Vypočteme podíl $\sqrt{s^2 - b^2} : l = c$ a z transcendentní rovnice $\sinh u = cu$ kořen u. Podle tabulky zobrazíme křivku $y = \sinh u$ v soustavě (u, y) a přímku $y = cu$; úsečka jejich průsečíku udává kořen u, který zlepšíme některou numerickou methodou (str. 251). Je-li po ruce tabulka funkce $\Theta(u) = \frac{\sinh u}{u}$, najdeme přímo k hodnotě $c = \Theta(u)$ argument u; s tím pak vypočteme parametr a.

Vzdálenost osy x od středu spojnice obou závěsů jest $h = s\operatorname{cotgh} u$.

Pošinutí osy y směrem nižšího závěsu $\delta = av$, kde $\operatorname{tgh} v = b:s$.

Úhly v závěsech $\operatorname{tg}\alpha_1 = \sinh\frac{x_1}{a}$; $\operatorname{tg}\alpha_2 = \sinh\frac{x_2}{a}$.

7. *Evolventa obecné řetězovky* (obr. 149) je křivka zv. *traktrix* (tažnice). Její tečna má stálou délku $a = TP$.

Rovnice křivky

$$x = a \lg \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Podle **2.** a **3.** je T bodem křivky; její $\varrho_T = TM = s$. Traktrix je také orthogonální trajektorie soustavy půlkružnic o poloměru a, jejichž středy P jsou na ose x.

b. Řetězovka stálé pevnosti.

Řetězovka stálé pevnosti klade všude týž odpor proti přetržení.

8. *Rovnice křivky*

$$y = -a \lg \cos \frac{x}{a}.$$

Střední větev se dotýká osy x v počátku, kde má tvar paraboly $y = \frac{x^2}{2a}$. Přímky $x = \pm \frac{1}{2} \pi a$ jsou asymptoty řetězovky. Křivka má vzhledem k periodičnosti kosinu nekonečně mnoho větví, které vzniknou pošinutím střední větve o násobky $2\pi a$.

c. Pružná řetězovka.

Zavěšené vlákno je *pružné*. Buďtež v_1, v_2, v, v_0 napětí vlákna v bodech M_1 (0, 0) (počátek soustavy), M_2 (a, b), M (x, y) a ve vrcholu M_0, kde $\alpha = 0$; q měrná váha, E modul pružnosti.

9. *Souřadnice* bodů křivky jsou vyjádřeny jako funkce napětí

$$x = \frac{v_0}{Eq}\left(\sqrt{v^2 - v_0^2} - \sqrt{v_1^2 - v_0^2}\right) + \frac{v_0}{q} \lg \frac{v + \sqrt{v^2 - v_0^2}}{v_1 + \sqrt{v_1^2 - v_0^2}}; \qquad (1)$$

$$y = \frac{1}{2qE}(v^2 - v_1^2) + \frac{1}{q}(v - v_1). \qquad (2)$$

Ve vzorci (1) je odmocnina $\sqrt{v^2 - v_0^2}$ na sestupné části řetězovky záporná, na vzestupné kladná. Klademe-li $E = \infty$, dostaneme souřadnice bodů řetězovky obecné (nepružné).

10. *Délka vlákna* v nenapjatém stavu

$$\lambda = \frac{1}{q}\left(\sqrt{v_2^2 - v_0^2} - \sqrt{v_1^2 - v_0^2}\right). \qquad (3)$$

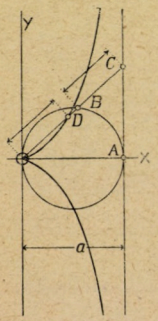
11. *Průhyb* proti tětivě $M_1 M_2$ v bodě $M(x, y)$ $\quad \eta = \frac{b}{a} x - y$.

12. *Poloměr křivosti* $\varrho = \frac{v^2}{q v_0}\left(1 + \frac{v}{E}\right)$.

Mezi napětími v_0, v_1, v_2 a délkou vlákna s platí rovnice (1) a (2), kde klademe $x = a$, $y = b$, $v = v_2$ a rovnice (3). Zvolíme-li jednu z veličin v_0, v_1, v_2, s, jsou ostatní těmito třemi rovnicemi určeny.

V. Hruška: Venkovní elektrická vedení, počítaná jako pružná řetězovka, 1940.
K. Čupr: O pružné řetězovce, Práce Mor. přírodověd. společnosti, 1943.

11. Některé algebraické křivky.



Obr. 150.

a. Kisoida Dioklova.

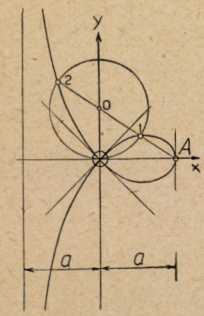
Ke kružnici (obr. 150) průměru $OA = a$ vedeme tečnu v bodě A a na každý paprsek jdoucí bodem O naneseme jako průvodič od bodu O (pólu) úsek jeho, omezený kružnicí a tečnou, $OD = BC$; D je bod kisoidy.

Rovnice křivky v soustavě polární

$$r = a \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi},$$

v soustavě pravoúhlé

$$(x^2 + y^2)\, x - a y^2 = 0 \qquad \text{aneb} \qquad y = x \sqrt{\frac{x}{a - x}}.$$



Obr. 151.

Kisoida jest algebraická křivka třetího stupně.

b. Strofoida.

Soustavu kružnic (obr. 151), které se dotýkají osy x v počátku (pólu), protneme průměry, vedenými pevným bodem $A(a, 0)$; koncové body průměrů jsou body strofoidy

Rovnice křivky v soustavě polární

$$r = a \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi},$$

v soustavě pravoúhlé

$$(x^2 + y^2)\, x - a (x^2 - y^2) = 0 \qquad \text{aneb} \qquad y = x \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}.$$

Substitucí $y = ux$ je možno vyjádřiti souřadnice strofoidy jako racionální funkce parametru u

$$x = a(1 - u^2) : (1 + u^2); \qquad y = au(1 - u^2) : (1 + u^2).$$

Křivky toho druhu slují *unikursální (racionální)*; jsou vedeny jedním tahem (kuželosečky, kisoida a j.).

c. Konchoida Nikomedova.

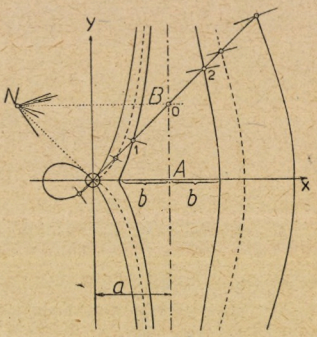
Pevnou přímku $x = a$ (obr. 152) protneme svazkem přímek, jdoucích počátkem O (pólem), a od průsečíku každé s přímkou pevnou naneseme na obě strany stálou úsečku b.

Rovnice křivky

$$r = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b;$$

$$(x^2 + y^2)(x - a)^2 - b^2x^2 = 0.$$

Počátek je bod uzlový, bod vratu nebo bod isolovaný podle toho, je-li $b \gtrless a$. Křivka má dvě větve.



Obr. 152.

Konchoida přímky je algebraická křivka čtvrtého stupně; sluje také konchoida Nikomedova. Kolmice k průvodiči, vedená počátkem, a kolmice k pevné přímce v jejím průsečíku B s průvodičem, protnou se v bodě N; jím procházejí normály všech konchoid ve všech bodech průvodiče.

d. Konchoida kružnice.

Základem je kružnice $r = a\cos\varphi$ o průměru a. Na každou přímku, vedenou bodem kružnice O (pólem), naneseme od druhého průsečíku jejího s kružnicí na obě strany stálou úsečku b.

Rovnice křivky

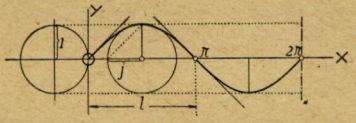
$$r = a\cos\varphi \pm b; \qquad (x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2).$$

Konstrukce normály je obdobná konstrukci v předcházejícím odstavci c. Je-li B průsečík průvodiče se základní kružnicí, je bod N druhým krajním bodem průměru BN.

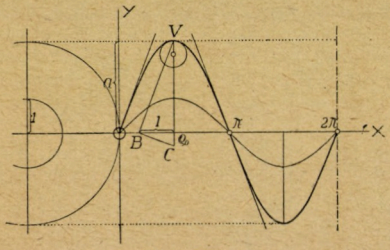
Konchoida kružnice je algebraická křivka čtvrtého stupně; sluje také *Pascalova závitnice*. Pro $b = a$ je to kardioida.

12. Křivky sinové.

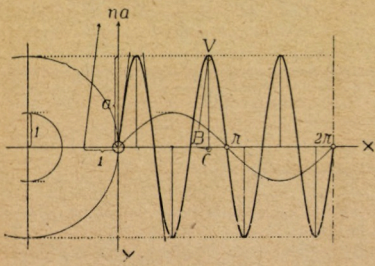
Zvolíme-li pro π úsečku l, má jednotka délky velikost $j = l : \pi = 0{\cdot}318\,310\,l$. Perioda je 2π.



Obr. 153.



Obr. 154.



Obr. 155.

1. $y = \sin x$ (obr. 153). Tečny v bodech obratu svírají s osou **x** úhly $\pm 45^0$. Poloměr křivosti ve vrcholech $\varrho_0 = 1$.

2. $y = a \sin x$ (obr. 154). Činitel a *(amplituda)* je pořadnice vrcholů. Tečny v bodech obratu $x = \pm k\pi$, kde $k = 0, 1, 2, \ldots$, mají směr přepony pravoúhlého trojúhelníka, jehož jednou odvěsnou je pořadnice vrcholu, druhou (na ose **x**) délková jednotka. Poloměr křivosti ve vrcholech $\varrho_0 = 1 : a$; sestrojíme jej tak, že vrcholem V vedeme rovnoběžku s tečnou v bodě obratu (spojnici VB, kde B je koncový bod jednotky od paty V na **x**) a potom $BC \perp BV$.

3. $y = a \sin nx$ (obr. 155). Číslo n *(frekvence)* je počet vln, připadajících na jednu periodu. Tečny v bodech obratu $x = \pm k\pi : n$, kde $k = 0, 1, 2, \ldots$, mají směr přepony pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami na, 1 ve směru osy **y**, **x**. Poloměr křivosti ve vrcholech $\varrho_0 = 1 : n^2 a$ sestrojíme obdobně jako v předcházejícím. V obrazci je $n = 3$.

4. $y = a \sin(nx \pm c)$. Vlna je pošinuta směrem $\mp$ **x** o délku $c : n$.

Sinové křivky rozvinují časově *harmonický pohyb*, daný rovnicí

$$y = a \sin(\omega t + \varphi).$$

Vektor a, otáčející se stálou úhlovou rychlostí ω, opíše za čas t úhel $\omega t = x$; okamžitá výchylka y je průmět vektoru do směru **y**. Argument $\omega t + \varphi$ sluje fáze, úhel $\varphi = c$ fázový posun;

$$\textit{perioda}\ T = \frac{2\pi}{\omega}; \qquad \textit{frekvence}\ n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

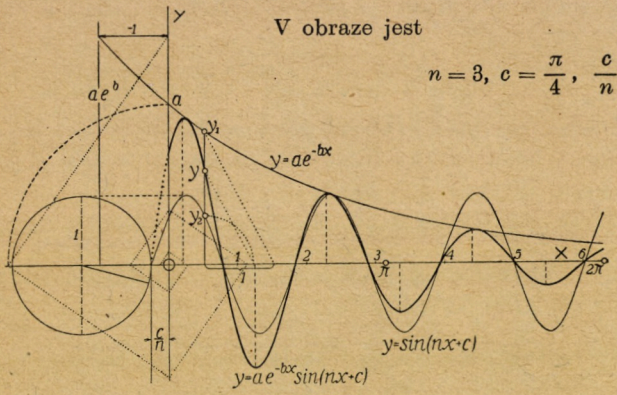
13. Křivka tlumeného chvění.

1. *Rovnice* $y = a\,e^{-bx} \sin(nx + c)$.

2. *Konstrukce* (obr. 156). Napřed zobrazíme křivky

$$1)\ y = a\,e^{-bx}; \qquad 2)\ y = \sin(nx + c).$$

Exponenciální křivku 1) sestrojíme podle str. 308: pro $x = 0$, $x = -1$ vypočteme $y = a$, $y = a\,e^{+b}$ a naneseme prvou hodnotu na osu $-x$, druhou na osu y. Pro další úsečky $x = 1, 2, 3, \ldots$ jsou pořadnice dány úseky lomené čáry na osách. Pak zobrazíme sinovou křivku 2); n je počet vln, připadajících na periodu 2π; křivka je pošinuta ve směru $-x$ o $c : n$.



V obraze jest

$$n = 3,\ c = \frac{\pi}{4},\ \frac{c}{n} = \frac{\pi}{12}.$$

Obr. 156.

Pořadnice 1), 2) znásobíme graficky podle úměry $1 : y_1 = y_2 : y$.

3. *Souřadnice vrcholů*

$$x_k = \frac{1}{n}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - c - \alpha\right]; \qquad y_k = (-1)^k\, a\,e^{-bx}\, k \cos\alpha;$$

$$\cos\alpha = \frac{n}{\sqrt{n^2 + b^2}}; \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Rozdíl úseček vrcholů je konstantní $\pi : n$.

4. *Úsečky průsečíků s osou* x

$$(x_k)_0 = \frac{1}{n}(k\pi - c).$$

Rozdíl úseček průsečíků je opět $\pi : n$.

14. Křivky vývoje.

Probíhá-li vývoj (vzrůst nebo pokles) nějaké veličiny x v čase t bez vnějších zásahů, možno předpokládati, že rychlost vývoje $dx:dt$ je jistou funkcí $f(x)$ měnící se veličiny x. Řešením diferenciální rovnice

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \qquad (A)$$

je dán zákon vzrůstu $x = F(t)$, který se (po stanovení parametrů na základě statistických dat) vyšetřovanému zjevu podloží; podle něho pak se odhaduje vývoj v budoucnosti.

Funkce $f(x)$ se předpokládá v jednoduchých tvarech:

1. $f(x) = m = \text{konst.}$ Obecný integrál rovnice (A) jest $x = mt + C$. Při počáteční podmínce, aby v čase $t = 0$ bylo $x = x_0$, jest integrační konstanta $C = x_0$. *Zákon vzrůstu*

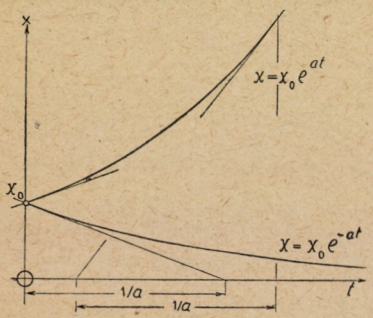
$$x = mt + x_0 \qquad (1)$$

zobrazuje *přímka*, jdoucí bodem $(0, x_0)$ o směrnici $\operatorname{tg} \alpha = m$.

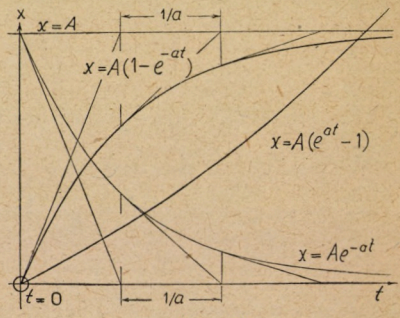
2. $f(x) = ax + b$. Obecný integrál rovnice (A) jest $x = -b:a + Ce^{at}$. Při počáteční podmínce $t = 0$, $x = x_0$ je konstanta $C = x_0 + b:a$. *Zákon vzrůstu*

$$x = -\frac{b}{a} + \left(x_0 + \frac{b}{a}\right) e^{at} \qquad (2)$$

zobrazuje *křivka exponenciální*, jdoucí bodem $(0, x_0)$. Je-li $b = 0$ nebo $x_0 = 0$, po případě konstanta při x záporná, a klademe-li $b:a = A$, má zákon (2) při $a > 0$ tvary:



Obr. 157.



Obr. 158.

a) $x = x_0 e^{at}$; *b)* $x = x_0 e^{-at}$ (obr. 157).

c) $x = A(e^{at} - 1)$; *d)* $x = A(1 - e^{-at})$ (obr. 158).

Přímka $x = A$ je asymptota křivky *d) (stagnace vývoje)*.

3. $f(x) = m + ax - bx^2$; $m > 0$, $a > 0$, $b > 0$. Z rovnice (A), psané

$$\frac{dx}{dt} = b\,(x - x_2)\,(x_1 - x),$$

kde

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4\,bm}}{2\,b}$$

jsou kořeny kvadratické rovnice $f(x) = 0$, plyne integrací

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x} = e^{(x_1 - x_2)\,(bt + c)} \tag{3}$$

a řešením této rovnice podle x

zákon vzrůstu

$$x = x_2 + \frac{x_1 - x_2}{1 + C\,e^{-(x_1 - x_2)\,bt}}. \tag{4}$$

Počáteční podmínkou $t = 0$, $x = x_0$ jest určena konstanta

$$C = \frac{x_1 - x_0}{x_0 - x_2}. \tag{5}$$

Jiný, pro výpočet vhodnější tvar zákona (4) najdeme z poměru rozdílu čitatele a jmenovatele k jejich součtu na obou stranách rovnice (3), užijeme-li vzorce

$$\operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1},$$

odvozeného ze **3.** str. 50:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 - x_2}{2}\operatorname{tgh}\frac{x_1 - x_2}{2}\,(bt + c). \tag{6}$$

Klademe-li $dx : dt = 0$, dostaneme tečny integrálních čar, rovnoběžné s osou t; podle (A) $x = x_1$, $x = x_2$. Ježto pro tyto hodnoty $t = \pm\infty$, jsou to asymptoty.

Rovnice $d^2x : dt^2 = 0$ určuje pořadnici bodu obratu $\xi = (x_1 + x_2) : 2$. Označíme-li jeho úsečku τ a dosadíme obě souřadnice do (6), plyne $b\tau + c = 0$ a odtud $c = -b\tau$, takže

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 - x_2}{2}\operatorname{tgh}\frac{x_1 - x_2}{2}\,b\,(t - \tau). \tag{7}$$

Rovnicí (3), kde $c = -b\tau$, a podmínkou $t = 0$, $x = x_0$ je určena úsečka τ. *Souřadnice bodu obratu* křivky, která jde bodem $(0, x_0)$, jsou

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad \tau = \frac{1}{b\,(x_1 - x_2)}\lg\frac{x_1 - x_0}{x_0 - x_2}. \tag{8}$$

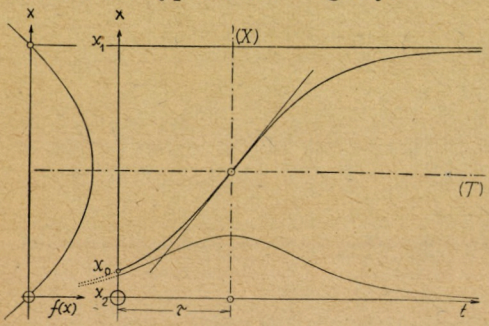
Pošinutím os do bodu obratu transformací: $X = x - \xi$, $T = t - \tau$, přejde (7) na tvar

$$X = \frac{x_1 - x_2}{2} \operatorname{tgh} \frac{x_1 - x_2}{2} bT. \tag{9}$$

Směrnice tečny $dX : dT$ v bodě obratu ($T = 0$)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{4} (x_1 - x_2)^2. \tag{10}$$

Zákon vzrůstu, daný rovnicemi (4) nebo (7) nebo (9), zobrazuje t. zv. *demografická křivka*, též *logistika*, mající podobu hyperbolické tangenty (obr. 24, str. 50). Probíhajíc mezi asymptotami $x = x_1$, $x = x_2$, je souměrná podle bodu obratu, jehož souřadnice vypočteme podle (8). Ke zvoleným úsečkám T určíme pořadnice X bodů křivky podle (9) s tabulkou hyperbolické tangenty.



Obr. 159.

4. *Robertsonův zákon vzrůstu* (obr. 159) je modifikací obecnějšího případu **3.**, když $m = 0$. Zde $f(x) = ax - bx^2 = (a - bx)x$ a kořeny rovnice

$$f(x) = 0$$

jsou

$$x_1 = \frac{a}{b}, \quad x_2 = 0.$$

S podmínkou $t = 0$, $x = x_0$ je podle vzorců předcházejícího odstavce

Robertsonův zákon vzrůstu:

$$x = \frac{a : b}{1 + Ce^{-at}}; \tag{4'}$$

druhý tvar:

$$x = \frac{a}{2b} + \frac{a}{2b} \operatorname{tgh} \frac{a}{2} (t - \tau); \tag{7'}$$

s počátkem v bodě obratu:

$$X = \frac{a}{2b} \operatorname{tgh} \frac{a}{2} T; \tag{9'}$$

konstanta:

$$C = \frac{a - bx_0}{bx_0}; \tag{5'}$$

souřadnice bodu obratu:

$$\xi = \frac{a}{2b}, \quad \tau = \frac{1}{a} \lg \frac{a - bx_0}{bx_0}; \tag{8'}$$

směrnice tečny obratu:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a^2}{4b}. \tag{10'}$$

V obrazci je při daných a, b vlevo funkce $f(x) = ax - bx^2$, t. j. parabola, protínající osu x v bodech $x_1 = a:b$, $x_2 = 0$; vpravo zákon vzrůstu (4′) s počáteční podmínkou $t = 0$, $x = x_0$; stanoveny souřadnice bodu obratu (8′) a křivka sestrojena v soustavě (T, X) podle (9′). Diferenciální čára

$$x = \frac{a^2}{4b} : \cosh^2 \frac{aT}{2}$$

ukazuje dole rychlost vzrůstu.

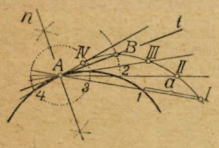
Při praktickém použití ve statistice, demografii, národním hospodářství a j. třeba stanoviti parametry zákona. Jako hrubý odhad, zda dané údaje lze zpracovati podle logistiky, slouží podmínka, aby dvojpoměr čtyř za sebou jdoucích hodnot byl v intervalu (1, 4/3).

V. List: Hospodářství elektrických podniků, 1926.
K. Čupr: Matematické základy nauky o logistické křivce, Statistický obzor, 1942.

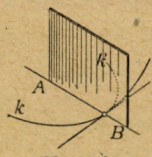
B. Obecné konstrukce.

1. *Tečna křivky v daném bodě.* (Obr. 160.) Daným bodem A veďme řadu sečen předem zvolenými body křivky *1, 2, 3, 4, ...* Na sečny nanášejme zvolenou úsečku a v témž smyslu do bodů *I, II, III, IV, ...*; veďme jimi hladkou křivku a protněme ji z bodu A kruhovým obloukem poloměru a; průsečík B je bod tečny.

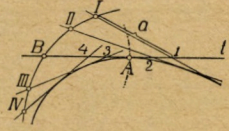
2. *Normála křivky v daném bodě.* Z bodu A přetněme křivku kružnicí o vhodném poloměru a sestrojme symetrálu úsečky, omezené průsečnými body.



Obr. 160.



Obr. 161.



Obr. 162.

Mechanicky řeší úkol *normální zrcátko* (obr. 161). Hrana AB má polohu normály, když křivka se svým obrazem splývá v jediný hladký celek beze zlomu.

3. *Dotykový bod tečny* (obr. 162). Přiložením pravítka sestrojme ke křivce jiné tečny, které danou tečnu protínají po obou stranách od hledaného bodu v bodech *1, 2, 3 ...*; od nich nanesme na pomocné tečny stálou úsečku a do bodů *I, II, III, IV, ...*; hladká křivka jimi vedená protne danou tečnu v bodě B. Učiníme-li $BA = a$, je A hledaný bod.

F. Kadeřávek-J. Klíma-J. Kounovský: Deskriptivní geometrie, 2 sv., 1930–32.
G. Loria: Curve piane speciali algebriche e trascendenti. 2 sv., 1930 (dříve Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, 2. vyd. 1910–11).
G. Teixeira: Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches, 2 sv., 1908–09.
M. Aoust: Analyse infinitésimale des courbes planes, 1873.
H. Wieleitner: Spezielle ebene Kurven, 1908.
F. Ebner: Leitfaden der technisch wichtigen Kurven, 1906.

XXV. Matematické pomůcky a stroje.

1. Matematické tabulky.

Pro nejrůznější potřeby numerického výpočtu sestaveny jsou přečetné tabulky logaritmické, tabulky elementárních funkcí a vyšších transcendent. Ve stručném výběru možno zde uvésti:

A. Crelle: Rechentafeln (do 999 krát 999), nově 1930.

L. Zimmermann: Rechentafeln (do 99 krát 9999), nově 1923.

W. Oakes: Table of the reciprocals of numbers 1... 100 000 (sedmimístné), 1864.

P. Barlow: Tables of squares, cubes, square roots, cube roots and reciprocals, 3. vyd. 1930.

M. Valouch: Tabulky logaritmické (pětimístné) s četnými tabulkami matematickými, fysikálními, astronomickými a chemickými, 10. vyd. 1937.

M. Valouch-M. A. Valouch: Sedmimístné logaritmy čísel od 1 do 120 000, 1932.

J. Peters: Zehnstellige Logarithmentafel, 2 sv., 1922.

H. Andoyer: Tables logarithmiques à 13 décimales, 1922.

K. Hayashi: Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen, sowie der Funktionen e^x und e^{-x}, 1938.

C. Becker-C. Orstrand: Hyperbolic functions, 1909.

J. Peters: Sechsstellige trigonometrische Tafel für neue Teilung, 1930.

J. Peters: Siebenstellige Werte der trigonometrischen Funktionen, 1918.

V. Elznic: Osmimístné tabulky přirozených hodnot goniometrických funkcí pro dělení šedesátinné, 1940.

V. Elznic: Sintacos 10; desetimístné tabulky hodnot goniometrických funkcí pro setinné dělení, 1941.

K. Hayashi: Sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen und deren Produkte, sowie der Gammafunktion, 1926.

F. Emde: Tafeln elementarer Funktionen, 1940.

K. Bremiker: Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit 6 Dezimalstellen, 17. vyd. Th. Albrechtovo, 1924.

W. Jordan: Logarithmisch-trigonometrische Tafeln für neue (zentesimale) Teilung mit 6 Dezimalstellen, 6. vyd. 1942.

G. Vega: Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch (o 7 místech), 91. vyd. K. Bremikerovo, 1926.

C. Bruhns: Neues logarithm.-trigonometr. Handbuch auf 7 Decimalen, 18. v. 1934.

J. Bauschinger-J. Peters: Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit 8 Dezimalstellen, 2 sv. 1910—11.

L. Pollack: Rechentafeln zur harmonischen Analyse, 1926.

A. Legendre: Tafeln der elliptischen Normalintegrale, nově 1931.

L. Milne-Thomson: Die elliptischen Funktionen von Jacobi (o 5 místech), 1931.

E. Pearson: Table of the logarithms of the complete Γ-function (10-místné).

K. Pearson: Tables of the incomplete Γ-function (7-místné), 1922.

G. Prevost: Tables des fonctions sphériques, 1933.

K. Hayashi: Tafeln der Besselschen, Theta-, Kugel- und anderer Funktionen, 1930.

K. Hayashi: Tafeln für die Differenzenrechnung sowie für die Hyperbel-, Besselschen, elliptischen und anderen Funktionen, 1933.

E. Jahnke-F. Emde: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, 3. vyd. 1938.

Soupis tabulek podávají:

V. Láska-V. Hruška: Theorie a praksé numerického počítání, 1934.

R. Mises: Verzeichnis berechneter Funktionentafeln, 1927.

2. Logaritmické pravítko.

Logaritmické pravítko je důležitou pomůckou numerického počítání, pokud vystačíme s výsledkem o 3 až 4 číslicích. Nahrazuje logaritmické tabulky, tabulku druhých i třetích mocnin a odmocnin, převrácených hodnot, funkcí goniometrických a různých konstant. V mezích dosažitelné přesnosti, odpovídající (při normální délce pravítka 25 cm) 3-místným logaritmům, vypočteme jím zcela mechanicky každý výraz, který lze logaritmovati.

Podstatou pravítka jsou vzájemně posuvné logaritmické stupnice (str. 264), kde logaritmy jsou naneseny jako úsečky u zvolené délkové jednotky (modulu) nejčastěji 250 a 125, po případě i 83,3 mm.

Pravítko se skládá z části pevné (vlastního pravítka), šoupátka (jazýčku) a běžce (jezdce) s vlasovou svislou ryskou (indexem) na skle k ustavení čísel a současnému čtení na různých stupnicích.

Na pravítku obvyklé délky 25 cm jsou na vrchní straně stupnice:

A, *kvadratická* ($u = 125 \log x$, dvakrát) s čísly $x = 1$ až 1(0) až 1(00);

B, shodná se stupnicí *A*, 1 až 1(0) až 1(00)
C, shodná se stupnicí *D*, 1 až 1(0) } na šoupátku;

D, *základní* ($u = 250 \log x$) s čísly $x = 1$ až 1(0).

Na rubu šoupátka jsou stupnice, přiřaděné k stupnicím *A* a *D* nebo jen k stupnici *D* pravítka.

S, *sinová* ($u = 125 \log 100 \sin \alpha$) pro $\alpha = 35'$ až 90^0;

L, *pravidelná* ($u = 250\, x/10$) pro *mantisy logaritmů*:

T, *tangentová* ($u = 250 \log 10 \operatorname{tg} \alpha$) pro $\alpha = 5^0\,44'$ až 45^0.

Na některých pravítkách přísluší i stupnice *S* stupnici *D* ($u = 250 \log 10 \sin \alpha$).

Kromě toho jsou někdy na vrchní straně ještě stupnice:

K, *kubická* ($u = 83{,}3 \log x$, třikrát), 1 až 1(0) až 1(00) až 1(000);

R, *reciproká* ($u = 250 \log 10/x$), obrácená *D*, 10 až 1;

P, *potenční* pro $\log \log x$ o modulu 250 mm, rozdělená ve dvě části.

Na stupnicích *A* až *D* vyčteme tříciferné číslo; v příznivé poloze (na počátku stupnic *C*, *D*) i čtyři číslice. První podmínkou správného výpočtu je správné čtení na stupnicích. Relativní přesnost čtení je po celé délce stupnice stejná. Přesnost výpočtu je asi 2%.

1. *Násobení a dělení.* Podle pravidel o logaritmu součinu a podílu dvě čísla znásobíme, sečteme-li příslušné úsečky na stupnicích; odečtením dostaneme podíl, což obé se děje pouhým posunutím šoupátka. Při větším počtu činitelů střídavě dělíme a násobíme. Desetinnou čárku určíme hrubým výpočtem se zaokrouhlenými čísly. Na př.

$$x = \frac{0{,}045 \cdot 2475}{13425 \cdot 0\,625} \approx \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{3}}{1 \cdot 10^{4} \cdot 6 \cdot 10^{-1}} = \frac{10}{6}\, 10^{-2} \approx 1 \cdot 10^{-2};\quad x = 0{,}01327.$$

Nebo poznamenáme počet míst, o která jsme pošinuli desetinnou čárku, abychom dostali čísla, jak jsou vyznačena na stupnici, v čitateli s opačným, ve jmenovateli se souhlasným znaménkem směru podle schematu

$$\begin{array}{c} + \quad \text{čitatel} \quad - \\ \longleftarrow \cdot \longrightarrow \\ - \ \text{jmenovatel} \ + \end{array} \qquad \frac{0{,}045 \cdot 2475}{13425 \cdot 0{,}625} = 1{,}327 \cdot 10^{-2} = 0{,}01327. \qquad \begin{array}{r} -2 \\ +3 \\ -4 \\ +1 \\ \hline -2 \end{array}$$

Nestačí-li stupnice a nastavíme-li pod běžce 10 (nebo 100) místo 1, je třeba náhradou za toto dělení hned poznamenati + 1 (nebo + 2).

Na stupnici R uprostřed šoupátka čteme převrácené hodnoty čísel stupnice D. Kolik má číslo celých míst, tolik má převrácená hodnota vlevo nul a naopak. Stupnice užijeme s výhodou při násobení dvou čísel; oba činitele postavíme proti sobě a výsledek čteme na D pod 1 nebo 10.

2. *Přímá úměrnost* je dána vztahem $x:y = a:b =$ konst. Postavíme-li na shodných stupnicích proti sobě čísla a, b, jsou všechna nad sebou stojící čísla v témže poměru. Styčná přímka představuje zlomkovou čáru.

Je-li na př. rychlost 1 m/sek = 3,6 km/hod, vyčteme jiné rychlosti z postavení:

A	1	12,5	19.4	25 m/sek	D
B	3,6	45	70	90 km/hod	C

V procentech vyjádříme část celku podle vzorce $\% = \frac{100}{\text{celek}} \cdot$ část. Na př. váhy částí 22, 28, 46, 64 kg v procentech celku 160 kg vyčteme z postavení

A	1.00	13.75	17.5	28.75	40%	D
B	1,60	22	28	46	64 kg	C

Ceny výrobní a ceny prodejní se ziskem nebo ztrátou $\pm p$ % jsou v poměru $100 : (100 \pm p)$; z jednoho postavení šoupátka vyčteme všechna nad sebou stojící čísla téhož poměru.

3. *Druhé mocniny a odmocniny.* Čtverce čísel na stupnicích C, D vyčteme běžcem na stupnicích A, B; naopak odmocniny čísel na stupnicích A, B najdeme na C, D. Počet míst, o který jsme pošinuli desetinnou čárku, poznamenáme dvojnásobně. Odmocněnce ustavíme běžcem na správném místě; desetinnou čárku posunujeme o dvouciferné skupiny a poznamenáme počet skupin.

4. *Třetí mocniny a odmocniny* vyčteme na kubické stupnici K a základní D. Odmocněnce stavíme na správném místě; desetinnou čárku posunujeme o skupiny tříciferné a poznamenáme počet skupin.

5. *Obsah kruhu* $p = 1/4\,\pi d^2 = (d/c)^2$. Konstanta $c = \sqrt{4/\pi} = 1{,}128$ je vyznačena na stupnici C; na tříčárkovém běžci je dána vzdáleností dvou rysek. Postavíme-li značku c (pravou krajní rysku) na průměr d na stupnici D, čteme obsah p nad 1 stupnice B (pod střední ryskou běžce) na stupnici A.

Objem rotačního válce délky l stanovíme tak, že obsah podstavy $p = (d/c)^2$, přečtený podle předešlého odstavce na stupnici A, násobíme s pomocí stupnice B délkou l. Výsledek $V = (d/c)^2 \cdot l$ čteme na stupnici A.

6. *Přeměna míry stupňové na obloukovou* se provede podle vzorců 12. na str. 278: arc $\alpha = \widehat{\alpha} = \alpha'/\varrho' = \alpha''/\varrho''$. Konstanty $\varrho' = 3\,44 \cdot 10^3$, $\varrho'' = 2{,}06 \cdot 10^5$, v míře setinové $\varrho'' = 6{,}37 \cdot 10^5$ jsou vyznačeny na stupnicích C a D.

7. *Goniometrické funkce.* Siny a tangenty úhlů, které ustavíme indexem ve výřezu pravítka vzadu na stupnicích S a T, čteme na některých pravítkách pod 100 A na stupnici B (sinus) a nad 10 D na stupnici C (tangentu). Na novějších pravítkách se spodními výřezy na obou koncích pravítka se hodnoty sinů i tangent

čtou na stupnici C a to pro sinus úhlu daného v pravém výřezu nad 10 D, pro tangentu úhlu daného v levém výřezu nad 1 D. Obrátí-li se šoupátko rubem vzhůru, čtou se tu siny a tangenty úhlů vyznačených na stupnici S a T šoupátka v základní poloze na stupnici D. Má-li stupnice S modul 125 mm, čtou se siny úhlů od 35′ do 5° 45′ v první polovině stupnice A velikostmi od 0,01 do 0,1 a úhlů od 5° 45′ do 90° v její druhé polovině velikostmi od 0,1 do 1,0. Na stupnici T, jejíž modul jest 250 mm, čtou se tangenty úhlů od 5° 44′ do 45° hodnotami od 0,1 do 1,0 na stupnici D. Přísluší-li stupnici S modul také 250 mm, čteme na stupnici D i siny úhlů od 5° 45′ ($\sin \alpha = 0{,}1$) do 90° ($\sin \alpha = 1{,}0$).

Kosinus najdeme podle vzorce $\cos \alpha = \sin (90° - \alpha)$, tangentu úhlů $> 45°$ podle vzorce $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} (90° - \alpha) = 1/\operatorname{tg} (90° - \alpha)$. Na obráceném šoupátku postavíme doplněk $90° - \alpha$ nad 10 D a pod levým koncem stupnice T čteme $\operatorname{tg} x$. Na př. $\operatorname{tg} 65° = 1/\operatorname{tg} 25° = 2{,}14$.

Siny a tangenty malých úhlů, které nejsou na stupnicích, nahradíme obloukem: $\sin \varepsilon \approx \operatorname{arc} \varepsilon = \varepsilon/\varrho$ pro $\varepsilon < 35'$; $\operatorname{tg} \delta \approx \operatorname{arc} \delta = \delta/\varrho$ pro $\delta < 5° 44'$.

Na pravítkách se stupnicemi S a T, příslušejícími stupnici D, je k tomu účelu na rubu šoupátka stupnice označená S & T s úhly od 35′ do 5° 44′, pro které se na stupnici D čte $\sin \varepsilon \approx \operatorname{tg} \varepsilon$.

V trojúhelníku jest a: $\sin \alpha = b$: $\sin \beta = c$: $\sin \gamma$. Postavíme-li na stupnicích A, S (po př. D, S) proti sobě čísla a, α, vyčteme při této poloze strany k ostatním úhlům protější. Na př. $a = 19$ m, $\alpha = 25°$; k úhlům $\beta = 37°$, $\gamma = 118° = 180° - 62°$ najdeme z postavení

A	19	27	39,7 m
S	25°	37°	62°

strany $b = 27$ m, $c = 39{,}7$ m.

8. *Logaritmus.* Postavíme 1 C nad číslo a stupnice D; nad pravou dolní značkou výřezu vzadu čteme na stupnici L mantisu $\log a$, charakteristiku připojíme.

Na novějších pravítkách je stupnice L na líci pravítka; tu se mantisy logaritmů čísel stupnice D čtou přímo na stupnici L.

9. *Mocniny s libovolným základem a mocnitelem* čteme na stupnici potenční P (log log), kde jsou naneseny logaritmy logaritmů čísel od $x = 1{,}1$ až 10^4.

Logaritmováním logaritmu mocniny (odmocniny)

$$x = a^b, \qquad \log x = b \log a, \qquad \log \log x = \log \log a + \log b;$$

$$x = \sqrt[b]{a} = a^{1/b}, \qquad \log x = \frac{1}{b} \log a, \qquad \log \log x = \log \log a - \log b$$

plyne pravidlo, jak pravítkem určiti x: Na stupnici P najdeme číslo a, k němu přičteme (odečteme) úsečku $\log b$ stupnice C a nad číslem b čteme na P hledané x. Protože je na stupnici P vyznačeno číslo $e = 2{,}718$, možno tímto způsobem vyčísti hodnoty přirozené exponenciální funkce.

F. Pešek: Logaritmické pravítko, 2. vyd. 1938.
E. Baranovský: Počtářský těsnopis, 2. vyd. 1944.
L. Schrutka: Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenschiebers, 2. vyd. 1929.
Návody firem, vyrábějících logaritmická pravítka.

3. Počítací a jiné stroje.

Obsáhlé součty provádějí stroje sčítací s klávesnicí a pákovým nebo elektrickým pohonem. Stroj sčítá, odečítá, tvoří součty částečné i celkové a píše výsledky.

Čtyři základní úkony početní vykonávají mechanicky počítací stroje četných soustav; numerický výpočet se jimi velmi usnadní. Většinou jsou to stroje adiční, které násobí sečítáním, dělí odečítáním (na př. Archimedes, Brunsviga, Mercedes, Triumphator, Monroe atd.). Některé jsou zařízeny i na elektrický pohon.

Úkoly vyšší analysy řeší mechanicky stroje analytické. Numericky pracují:

Rektifikátory.

Slouží k určení délky oblouku čili rektifikaci křivky (longimetry, kurvimetry, kartometry). Nejjednodušší je měřicí kolečko, kterým daný oblouk přejedeme; na ciferníku ukazuje ručička délku oblouku v určitém měřítku.

Planimetry.

Planimetry stanoví plošný obsah rovinných obrazců. Hrotem stroje objedeme křivku, plochu omezující, a na stupnici měřicího kolečka vyčteme číslo, které násobeno konstantou stroje dá hledaný obsah. Z četných soustav planimetrů nejužívanější je polární planimetr Amslerův.

Integrátory.

Stroje mechanicky integrující slují integrátory. V prvé řadě jsou to planimetry. Tak zv. momentové planimetry stanoví obsah rovinné plochy, její statický moment a moment setrvačnosti. Jiné integrátory řeší lineární diferenciální rovnice s konstantními i proměnnými koeficienty.

Analysátory.

Stanoví mechanicky koeficienty řady Fourierovy pro harmonickou analysu.

Integrafy.

Integrátory, které graficky registrují průběh integrace, slují integrafy. Řeší tytéž úkoly jako integrátory.

V. Láska-V. Hruška: Počet grafický a graficko-mechanický, 1923.
A. Bednář-J. Ježek: Počítací stroje a přístroje, 1940.
K. Lenz: Die Rechen- und Buchungsmaschinen, 3. vyd. 1932.
L. Jacob: Le calcul mécanique, 1911.
A. Galle: Mathematische Instrumente, 1912.
H. Morin: Les appareils d'intégration, 1913.
L. Couffignal: Les machines à calculer, leurs principes, leur évolution, 1938.
W. Meyer zur Capellen: Mathematische Instrumente, 2. vyd. 1944.

ABECEDNÍ SEZNAM.

A

Absolutní hodnota . 9
— — komplexního čísla 13
— míra úhlu 277
Afinita 57
Algebraická čísla . . 9
Amortisace 21
Amplituda hyperbolická 51
— komplexního čísla 13
Analogie Neperovy . 44
Analysa empirických funkcí 254
Analysátor 324
Analytická geometrie v prostoru . . . 63
— — v rovině . . . 52
— míra úhlu 277
Anamorfosa . . . 255, 269
Anuita 21
Anuloid 288
Aproximace racionál. funkcí celistvou . 255
Area 49
Argument 33, 73
— hyperb. funkcí . 52
Aritmet. průměr 26, 227
Arkus goniometr. funkcí . .48, 277, 278
Asteroida 301
Asymptoty . . .61, 132

B

Bayesovo pravidlo . 221
Bernoulliova čísla 84, 210
Bernoulliův theorém 219
— — obrácený . . . 221
Besselovy funkce . . 165
Besselův interpolační vzorec 213
Béta funkce 106
Bézoutova věta . . 28
Bikvadratické rovnice 31
Binomická řada nekon. 81
— věta 12
Binomické rovnice 32
Binomála 135
Bod asymptotický 304, 307
— obratu (inflexní) . 132
— singulární . . 122, 132

C

Casus irreducibilis . 29
Cauchyho věta . . . 126
— vzorec 127
Cykloidy . . . 299–302

Č

Částečná derivace . . 78
Částečný diferenciál . 78
Čebyševův vzorec . 110
— věta 222
Činitel kososti . . . 245
— plochosti 245
— proměnnosti . . 244
Čísla algebraická, irracionální, racionální, reálná, transcendentní . . 9
— komplexní (soujemná) sdružená 12, 13
— nekonečně malá a nekonečně velká . 74
Čtyrúhelnik 275

D

Delambreovy vzorce 45
Délka křivky . . . 144
— normály, tečny . 131
Derivace 74–80
— částečná 78
— integrálu 101
— numerická . . . 214
— parciální 78
— prostorové . . . 202
— ve směru normály 196
— vektoru 195
Determinant . . . 17
— funkcionální . . 90
— Massauův 269
— Wronskiho . . . 90
Diference . . . 206–208
Diferenciál 75–79
— oblouku . 130, 135, 138
— totální 78, 79
Diferenciální geometrie 130
— křivka 259
— parametr 142
— počet 73, 195
— rovnice . . 147–178
Diferenciální rovnice
obyčejné I. řádu . 147
— — d'Alembertova 150
— — Bernoulliova . 150
— — Clairautova . . 151
— — exaktní . . . 151
— — homogenní . . 148
— — lineární . . . 149
— — Riccatiova . . 150
— — II. řádu . . . 153
— — Besselova . . 164
— — Gaußova (hypergeometrická) . . 170
— — Hermiteova . 171

Diferenciální rovnice
Laguerreova . . 171
— — Legendreova . 167
— — lineární homogenní 154
— — s konstantními koeficienty . . . 155
— — lineární nehomogenní . . 155, 156
Diferenciální rovnice obyč. n-tého řádu 158
— — Eulerova . . . 160
— — homogenní s konst. koeficienty 158
— — nehomogenní . 159
Diferenciální rovnice soudobé I. řádu . 161
— — soustava d'Alembertova . 161
Diferenciální rovnice parciální I. řádu . 172
— — lineární homogenní 172
— — nehomogenní . 173
— — obecná 174
Diferenciální rovnice parciální II. řádu . 175
— — lineární s konst. koeficienty . . . 176
— — řešení s danými podmínkami . . 177
Diferenční počet . . 206
— rovnice . . . 215–218
Dirichletův přetržitý faktor 103
Diskriminant . . . 28
Disperse 222
Divergence . . 197, 198
Dotyk dvou křivek . 131
Dvojpoměr 56

E

Ekvidistanta. . . . 134
Element objemu . . 145
— obsahu . . . 143, 144
— plochy 139
Eliminace Gaußova . 233
Elipsa . 59, 61, 280, 290
Elipsoid . . . 69, 70, 287
Eliptické funkce . . 108
Epicykloida 300
Eulerova konstanta . 107
— diferenc. rovnice variač. problému . 181
— věta o křivosti . . 140
Eulerův vzorec pro $e^{i\varphi}$ 13
— — pro homogenní funkce 79
— — součtový . . . 210

Eulerovy trojúhelníky 44
Evoluta 133
Evolventa 133
— kružnice 302
Exces sférický . . . 44
Exponenciální rovnice 32, 253
Extrém funkce . . 88, 89
— integrálu . . 180, 182
— relativní 89
Extremála . . . 180, 181

F

Faktoriál 12
Fourierův integrál . 119
Fourierova řada 117—119
Frenetovy vzorce . . 136
Fresnelovy integrály 103, 107
Funkce analytická . 122
— Besselovy (cylindrické) . . . 165—167
— béta 106
— cyklometrické . . 48
— eliptické 108
— faktoriální . . . 207
— gamma 104
— Gaußova 106
— goniometrické . 33—40
— Greenova 157
— homogenní . . . 79
— hyperbolické . 49—51
— hyperbolometrické 52
— integrální 106
— komplexní proměnné 120
— Legendreovy (sférické, kulové) 168
— lichá 73
— nerozvinutá (implicitní) . . . 73, 74
— periodická . . . 73
— přetržitá 74
— racionální celistvá 26, 249
— rozvinutá (explicitní) 73, 74
— spojitá 74
— sudá 73
— transcendentní . 73
— závislé a nezávislé 90

G

Gamma funkce . . . 104
Gaußova eliminace . 233
— funkce 106
— míra křivosti . . 140
— věta 115, 202
Gaußovy redukční znaky 233
— základní veličiny u ploch. 138
Gaußův integrál . . 107
— zákon chyb . . . 223
Geodetická křivka . 141
Geometrický průměr 26
Goniometrické funkce . . . . 33—40
— rovnice 39
— součty 39
Gradient 196
Grafické diferencování, integrování 259
— integrování difer. rovnic . . . 261, 262
— řešení rovnic . . 251
Greenova funkce . . 157
Greenovy věty . 116, 202
Guldinovo pravidlo . 288

H

Hamiltonův operátor 197
Harmonická analysa 256
— čtveřina 56
Harmonický průměr 26
Hlavní normála . . 135
Hornerovo schema . 249
Hranol 283
Hranolec (prismatoid) 285
Hromadění chyb . . 230
Hyperbola . . 59, 61, 282
Hyperboloid 70
Hypocykloida . . . 300

CH

Charakteristika. . 11, 173
Chyba domnělá. . . 224
— hrubá 226
— pravděpodobná . 225
— průměrná 225
— skutečná 224
— střední 225

I

Indikatrix Dupinova 140
Integrace numerická 214
— řadami 163
Integrační faktor . . 152
Integrál dvojnásobný 113
— eliptický 107
— funkce komplexní proměnné. . . . 125
— křivkový . . 111, 201
— neomezený (neurčitý). . . . 91
— obecný diferenciál. rovnic . . . 147, 172
— omezený 99
— partikulární difer. rovnic . . . 147, 172
— plošný 113
— prostorový . . . 114
— singulární. . 151, 172
Integrál trojnásobný 113
— úplný 172
Integrální křivky . . 259
— počet . . . 91, 201
— rovnice . . . 184—190
— — Abelova . . . 189
— — Volterrova . . 188
Integraf, integrátor. 324
Integrování úplných diferenciálů . . . 151
Interpolace 211
Interpolační vzorec Besselův 213
— — Langrangeův . 211
— — Newtonův 211, 213, 214
— — Stirlingův . . 213
Iracionální čísla . . 9
Isoklina 147, 261
Isoperimetrický problém 183
Iterace 254

J

Jednotka váhy . . . 226
Jednotka imaginární 12
Jehlan 284

K

Kardioida 301
Kisoida 312
Klín 284, 286
Klothoida 307
Kolineace 57
Kombinace 16
Kombinatorika . . 16
Komplanace 144
Komplexní čísla . . 12
— — sdružená . . . 13
Konfokální elipsy a hyperboly . . . 61
— paraboly 62
— plochy 2. stupně . 70
Konformní zobrazení 123
Konchoida 313
Konoid 72
Konstrukce křivek . 290
— elipsy . . . 290—293
— hyperboly 293, 294, 298
— paraboly . . 294—298
Konstrukce středů křivosti cykl. křivek 303
— tečny a normály . 319
Korelace 248
Kosiny směrové . 64, 65, 135, 136, 139
Koule 70, 285
Konvergence nekon. řad 85
Kosinová věta . . 41, 44

Kotálnice 299
Kroucenost 136
Křivka demografická 318
— diferenciální . . 259
— exponenciální . . 308
— integrální 259
— mocninová . . . 297
— obalová 133
— sinová 314
— tlumeného chvění 315
— vývoje 316
Křivky prostorové . 134
Kružnice 59, 277
— hyperoskulační . 132
— křivosti (oskulační) 132
Křivost čáry . . 131, 136
— plochy 140
Kubatura 145
Kubické rovnice . . 29
Kužel . . . 70, 71, 285
Kvadratické rovnice 28

L

Lagrangeova identita 19
— věta 80
Laplaceova transformace 179, 190
Laplaceův integrál . 107
— operátor 199
Laurentova řada . . 128
Legendreova věta . 45
— diferenciální rovnice 167
Leibnizův vzorec . . 77
Lemniskata 306
L'Huilierův vzorec . 44
Lillova konstrukce . 250
Limity 74
Lineární rovnice . . 26
Logaritmické diference 231
— pravítko 321
— rovnice . . . 32, 253
Logaritmus . . 11, 14, 15
— integrální 106
Logistika . . . 308, 318

M

Maclaurinova řada . 81
Malá čísla 86
Mantisa 11
Matice 18, 90
Maxima a minima . 88
Medián 244
Methoda nejmenších čtverců 224
— Newtonova . . . 252
— Rungeova . . 257, 260
Methody praktické analysy 249
Meusnierova věta . . 139
Mezikruží 279
Minima a maxima . 88
Míra přesnosti . 223, 226
Mnohoúhelník pravid. a nepravid. . 276, 277
Mocniny 9, 14
Modul funkční stupnice 263
— komplexního čísla 13
— logaritmické soustavy 11
— zobrazení 123
Modus 244
Moivreova věta . . 14

N

Nabla 197
Nadbytek sférický . 44
Nadčje matematická 221
Neperovo pravidlo . 45
Neperovy analogie . 44
Neurčité tvary . . . 87
Nomografie 263
Nomogramy hexagonální. 269
— průsečíkové . . . 267
— spojnicové . 270, 273
— trojúhelníkové. . 269
Normála 60, 62, 66, 131, 138, 319
— hlavní 135
Normální křivka . . 245
Normální rovnice 232, 234
Normálový řez . 139, 140
Numerická derivace a integrace . . . 214
— integrace diferenciálních rovnic. . 260

O

Obalová křivka . . 133
— plocha 140
Objemy 145, 283
Oblouk (arkus) kružnice 277, 279
Oblouková míra úhlu 277
Obvody rovinných ploch . . . 274–283
Obsahy ploch křivých . . 144, 288
— — rovinných . . 143, 274–283
Odmocniny . . . 10, 15
Operátor delta . . . 199
— diferenciální . . 179
— integrální 179
— nabla. 197
Operátorový počet . 179
Opravy 224

P

Parabola . . 62, 281, 294
Paraboloidy . 71, 287, 289
Paralelní čára . . . 134
Parciální derivace . 78
Permutace 16
Planimetry 324
Plocha kuželová . . 71
— obalová 140
— přímková 71
— rotační 72
— rozvinutelná . . 141
— šroubová 72
— translační. . . . 72
Plochy 69–73, 138–141
— druhého stupně . 69
— — konfokální . . 70
Počet diferenciální 73, 195
— diferenční. . . . 206
— integrální . . . 91, 201
— operátorový . . . 179
— pravděpodobnosti 218
— variační 180
— úrokový 20
— vyrovnávací . . 223
Počítací stroje . . . 323
Počítání s malými čísly 86
Podobnost. 57
Poissonův theorém . 220
— vzorec 220
Pól 122
Pole vektorové . . . 203
Poloměr křivosti . . 131, 136, 139
— torse 136
Povrchy těles . 144, 283
Pravděpodobnost 218–223
Projektivnost . . . 56
Průběh křivky . . . 132
Průměr . 26, 227, 228, 244
Průměry sdružené 60, 291, 294
Průměty plochy . . 139
Přibližné hodnoty výrazů s malými čísly 86
Přímka . . . 52–54, 65

R

Racionální čísla . . 9
Radiant 278
Radiusvektor . . . 193
Rampa 285
Reálná čísla 9
Reciproké rovnice . 32
Regula falsi 252
Rektifikace . . 144, 290
Rektifikátor 324
Residuum 129
Resolventa 31
Resultant 27
Risiko matematické. 223
Rolleova věta . . . 80

Rotor 198
Rovina 67
— normálová . . . 135
— oskulační 135
— rektifikační . . . 136
— tečná 138
Rovnice algebraické 26–32
— bikvadratické . . 31
— binomické . . . 32
— diferenciální. 147–178
— diferenční. . . . 215
— exponenciální . 32, 253
— integrální . . 184–190
— kubické 29
— kvadratické . . . 28
— lineární 26
— logaritmické . 32, 253
— reciproké 32
— transcendentní . 32
Rozložení četností, normální 245
— — nesouměrné . 247
Rozptyl 222, 245

Ř

Řada alternující . . 85
— aritmetická . . . 19
— binomická . . . 81
— exponenciální . . 82
— Fourierova . . . 117
— geometrická. . . 19
— Lagrangeova . . 46
— Laurentova . . . 128
— logaritmická . . 82
— Maclaurinova . . 81
— mocninová . .80, 127
— Neumannova . . 187
— Taylorova 80, 81, 127
Řady pro funkce goniometrické . . 83
— jiné 84
Řešení grafické rovnic algebraických a transcendentních 251
Řetězovky. 309

S

Sdružená komplexní čísla 13
Sdružené průměry 60, 291, 294
Separace kořenů . . 251
— proměnných . . 147
Sférický exces . . . 44
Simpsonovo pravidlo 109
Simpsonův vzorec . 110
Singulární body 122, 132
— řešení dif. rovnic 151
Sinová věta . . . 41, 44
Síť logaritmická 265, 266
Skalár 191
Skalární součin . . 193
Složené úrokování . 20
Směrodatná odchylka 244
Směrové kosiny . . 64, 135, 139
Součin nekonečný . 87
— skalární 193
— vektorový . . . 193
Součty mocnin . 210, 211
— goniometrické . . 39
Souřadnice cylindrické 141
— homogenní . . . 55
— křivočaré 141
— kulové . . . 142, 200
— nomografické (d'Ocagneovy) 56, 270
— polární prostorové 142
— pravoúhlé. . . 52, 63
— přímkové 55
— semipolární . . . 141
— sférické. 142
Spirála Archimedova 303
— hyperbolická . . 304
— logaritmická 304, 305
— sinová . . . 305, 306
Statistické charakteristiky 244
Statistika . . . 243–248
— — interpolační . 213
Stokesova věta. 116, 201
Strofoida 312
Stroje počítací . . . 323
Střadatel 20, 23
Střed křivosti křivek 132, 293–295, 297, 303, 304
Střední chyba . 225, 226, 228–230, 235, 237, 242
Střední hodnota . . 221
Supnice funkční 263–264
Subdeterminant . . 18
Subnormála 131
Subtangenta 131
Svazek paprsků . . 54
Symetrála úhlu. . . 42

T

Tangentová věta . . 41
Taylorova věta 80–81, 127
Tensor 204
Torse 136
Trajektorie 133
Transcendentní čísla 9
— rovnice 32
Traktorie 134
Transformace diferenciálních výrazů 200
— souřadnic . . . 54, 68
Trigonometrie rovinná 40
Trigonometrie sférická 43
Trojúhelník . 40, 43, 274
Tvary neurčité . . . 87

U

Úhel asymptot . . . 61
— dvou křivek . . . 131
— dvou přímek . 53, 65
— dvou rovin . . . 67
— dvou směrů . . . 64
Úměry 25
Úmor. 21
Úpatnice 134
Úročitel 20, 22
Úrokový počet . . . 20
Úrokování složené polhůtné . . . 20, 21
— — předlhůtné . . 21
Úseč eliptická . . . 281
— hyperbolická . . 282
— kruhová 279
— kulová 286
— parabolická . . . 282
Úspora 20

V

Váha pozorování . . 226
— funkce pozorování 231
Válec 284
Variace 180
— konstant . . 155, 159
Variační počet . . . 180
Vektor 191
Vektorové pole . 196, 203
Vektorový počet . . 191
— součin 193
Vrcholy křivky . . . 132
Vrstva kulová . . . 286
— rotačního paraboloidu 288
Vyrovnání empir. řady 255
— pozorování 227, 232, 239, 240
Vyrovnávací počet . 223
Výseč hyperboly . . 282
— kruhová 279
— paraboly 282
Vzdálenost bodu od přímky 53
— — od roviny . . 66
— mimoběžek . . . 64
— rovnoběžek . . . 53

Z

Zákon velkých čísel 220
— vzrůstu . . . 316–317
— — Robertsonův . 318
Zásobitel 23

Řecká abeceda.

A	*)	α	alfa	N	*)	ν	ný
B	*)	β	béta	Ξ		ξ	xí (ksí)
Γ		γ	gamma	O	*)	o *)	omíkron
Δ		δ	delta	Π		π	pí
E	*)	ε	epsílon	P	*)	ϱ	rhó
Z	*)	ζ	(d)zéta	Σ		σ	sígma
H	*)	η	éta	T	*)	τ	tau
Θ		ϑ	théta	Y	*)	υ *)	ýpsílon
I	*)	ι *)	ióta	Φ		φ	fí
K	*)	$\varkappa$	kappa	X	*)	χ	chí
Λ		λ	lambda	Ψ		ψ	psí
M	*)	μ	mí	Ω		ω	ómega

Poloha písmen (malé řecké abecedy) v řádce:

$$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \zeta\ \eta\ \vartheta\ \iota\ \varkappa\ \lambda\ \mu\ \nu\ \xi\ o\ \pi\ \varrho\ \sigma\ \tau\ \upsilon\ \varphi\ \chi\ \psi\ \omega$$

*) Hvězdičkou označených písmen se podle ČSN 1295-1940, Matematické značky, neužívá, aby nedošlo k záměně s písmeny latinskými.

Autor	† Prof. Ing. Dr. František Čuřík
Redaktoři	† Prof. Ing. Dr. František Čuřík Prof. Ing. František Klokner Prof. Dr. Jan Vojtěch
Název díla	Matematika
Vydala	Česká matice technická
Roku	1944
V edici	Technický průvodce, svazek 1.
Vytiskla	Politika, Praha
Vydání	Druhé, přepracované a rozšířené
Cena	K 90,—