624 D 3938/III.

Ing. Dr. ZDENĚK BAŽANT

STAVEBNÁ MECHANIKA

III.

624 D 3938/III.
AKADEMICKÁ KNIHOVNA
Jednota
V PRAZE

624.04

ČESKÁ MATICE TECHNICKÁ

ROČNÍK LI. (1946) SPISŮ ČÍSLO 232.

STAVEBNÁ MECHANIKA

NAPSAL

ING. DR. ZDENĚK BAŽANT,

PROFESOR STAVEBNÉ MECHANIKY PŘI ČESKÉM VYSOKÉM UČENÍ TECHNICKÉM V PRAZE

DÍL TŘETÍ

STATICKY NEURČITÉ SOUSTAVY PRUTOVÉ – THEORIE PLNOSTĚNNÝCH NOSNÍKŮ OBLOUKOVÝCH – THEORIE TLAKU HMOT SYPKÝCH – KONSTRUKCE ZDĚNÉ

(SE 169 OBRAZCI V TEXTU A NA 3 TABULKÁCH)

DRUHE OPRAVENÉ A DOPLNĚNÉ VYDÁNÍ

V PRAZE

NÁKLADEM ČESKÉ MATICE TECHNICKÉ – V KOMISI KNIHKUPECTVÍ FRANT. ŘIVNÁČE V PRAZE

1946

RP A 9267

Rezervní fond
Národní knihovna ČR

624 D 3938/III.

NÁRODNÍ KNIHOVNA
1004093226
1004093226

AKADEMICKÁ KNIHOVNA ČSSM
Jednota
V PRAZE

110/50.

TISKEM „PRÁCE“ V PRAZE

Předmluva k prvému vydání.

Třetím dílem tohoto spisu je dokončena látka probíraná ve výkladech stavebné mechaniky (2. běhu) na české vysoké škole technické v Praze. Jsou tu řešeny staticky neurčité soustavy prutové, plnostěnné nosníky obloukové, tlak hmot sypkých a konstrukce zděné (klenby valené, opěry klenbové a zdi opěrné).

Obloukovými nosníky obíral se soustavně a podrobně *Jos. Šolín* v „Theorii plnostěnných nosníků obloukových o dvou opěrách“ (Praha 1892). Celou látku této knihy obsahují ovšem též Šolínovy výklady stavebné mechaniky, jež hleděl spisovatel doplniti tak, aby byl každý uvažovaný případ řešen dokonale pro zatížení stálé i pohyblivé. Proto jsou uvedeny při neurčitých soustavách prutových i při nosnících obloukových příčinkové čáry pro všechny statické veličiny, jichž je třeba k řešení. Také hleděl spisovatel k tomu, aby byla látka probrána co nejúplněji, připojil tedy u nosníků obloukových aspoň stručně i řešení nosníků lomených.

Proti dnešním výkladům stavebné mechaniky obsahuje tato kniha hojné doplňky, hledící k praktické potřebě a zpracované po většině samostatně. Je to zvláště řešení oblouku o dvou kloubech proměnného průřezu, oblouku kruhového o dvou kloubech i bez kloubů, lomeného nosníku o dvou kloubech v obecném tvaru, lomeného nosníku bez kloubů, vyšetřování oblouků při vodorovných břemenech i jejich přetvoření, konečně též napjatost uvnitř neomezené hmoty sypké. Látka výkladů jest i zde doplněna příklady, jež mají osvětliti do podrobností, jak lze užíti theorie v praktických případech.

Obsáhlost látky stavebné mechaniky nepřipouští ovšem, aby byla úplně vyčerpána ve spise, který má podati soustavný výklad od prvých začátků, zvláště nutí-li praktické zřetele ke stručnosti. Některé případy v tomto spise neřešené, zvláště složitější, nalezne čtenář ve spisovatelově „Theorii čar příčinkových“, myšlené jako pokračování látky probírané ve výkladech stavebné mechaniky na českém vysokém učení technickém v Praze. Jinak odkazuje spisovatel na díla uvedená ve stručném přehledu literatury připojeném na konci tohoto dílu. Stručný výtah a přehled celé stavebné mechaniky je v „Technickém průvodci“, sv. III. (2. vyd. Praha 1919).

Po několikaleté práci dokončuje spisovatel knižní vydání stavebné mechaniky, v němž se snažil vyhověti potřebám studia i praxe; pokud se to podařilo, posoudí laskavý čtenář. Celé dílo vycházelo v poměrech svízelných a umožněno bylo jen tím, že Česká matice technická převzala značný náklad na vydání spisu.

Také tentokráte pomohli spisovateli uspíšiti vydání knihy jeho asistenti Ing. *Ant. Zvolský* a Ing. *J. Laciný* svou pomocí při rýsování obrazců.

V Praze v červnu 1920.

Zdeněk Bažant.

Předmluva k druhému vydání.

Nové vydání tohoto spisu připravil podepsaný již v červnu 1944. Pro zákaz německé censury, nepřipouštějící vydávání českých vysokoškolských učebnic, mohla býti kniha dána do tisku až po šťastném skončení války.

Druhé vydání je proti prvému podstatně rozšířeno. U prutových soustav staticky neurčitých jsou připojeny odstavce: 9. Spojitý nosník příhradový (s číselným příkladem). 10. Příhradový oblouk bez kloubů. 11. Staticky neurčitá soustava základní (s číselným příkladem spojitého nosníku příhradového s třetím pasem). V theorii nosníků obloukových jsou rovněž některé dodatky: u oblouku o třech a o dvou kloubech případ opěrových kloubů v různé výši, u oblouku bez kloubů vyšší oblouk stálého průřezu a oblouk nesouměrný, u lomeného nosníku o dvou kloubech i bez kloubů nosníky obecného tvaru jako základ pro řešení zvláštních případů.

Za dobu, jež uplynula od prvého k druhému vydání, vzrostla česká literatura stavebné mechaniky velmi značně, jak ukazuje přehled literatury na konci knihy. Za tu dobu byla mimo jiné propracována i u nás theorie rámových soustav. Podepsaný ji zpracoval zatím soustavně v novém (5. a 6.) vydání „Technického průvodce", sv. 4 (1941 a 1946).

Třetím dílem je ukončeno nové vydání celé „Stavebné mechaniky", jež se podařilo uskutečniti průběhem jednoho roku, tedy v době na nynější poměry velmi krátké. O to má zásluhu též tiskárna, jež věnovala všem třem dílům příkladnou péči.

V Praze v červnu 1946.

Zdeněk Bažant.

A) Staticky neurčité soustavy prutové.

1. Statická neurčitost. *Staticky neurčitou* nazýváme prutovou soustavu, jejíž osové síly a podporové reakce nelze řešiti ze statických výminek rovnováhy. Soustava měj obecně π prutů, α_1 podpor posouvatelných, α_2 podpor pevných a β bodů styčných. Předpokládáme-li ve styčných bodech kloubové spojení, působí v každém prutu jediná neznámá síla osová; v každé podpoře posouvatelné jest jedna, v podpoře pevné dvě neznámé složky reakcí. Celkem je tedy $\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \pi$ neznámých složek reakcí a osových sil prutů. Rovnováha v každém bodě styčném dá dvě statické výminky; všechny body styčné dají pak $2\,\beta$ statických výminek rovnováhy, což jsou všechny výminky vzájemně nezávislé. Je-li

$$\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \pi > 2\,\beta, \tag{1}$$

jest více neznámých než statických výminek rovnováhy; tyto výminky nestačí pak k řešení neznámých sil a soustava je staticky neurčitá.

Řešení takové soustavy je vždy možné. Další výminky dá totiž ve způsobu *výminek přetvárných* přetvoření soustavy prutové, jež je vázáno jednak výminkami podporovými, jednak výminkami, které dávají pruty. Přetvoření soustavy prutové bude dáno změnami souřadnic styčných bodů. V každé pevné podpoře platí dvě výminky tvaru $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$; v každé podpoře posouvatelné po čáře odchýlené od vodovorovnice o úhel α jsou pak vázány změny souřadnic výminkou $\Delta y = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Vzdálenost dvou bodů styčných spojených prutem rovná se délce prutu s; přetvořením změní se tato vzdálenost o roztažení prutu Δs, čímž je dána v každém prutu jedna výminka pro změny souřadnic obou jeho koncových bodů styčných.[1]) Výminek podporových je celkem $\alpha_1 + 2\,\alpha_2$, výminek daných pruty π a změn souřadnic všech bodů styčných $2\,\beta$. Poněvadž podle nerovnice (1) je $2\,\beta < \alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \pi$, přebývá právě tolik výminek z přetvoření nosníku, kolika statických výminek se k řešení soustavy nedostává. Tím je dokázána theoretická možnost řešení každé soustavy neurčité. Z přetvoření této soustavy lze odvoditi výminky přetvárné, jež, připojeny ke statickým výminkám rovnováhy, umožní řešení osových sil i podporových reakcí.

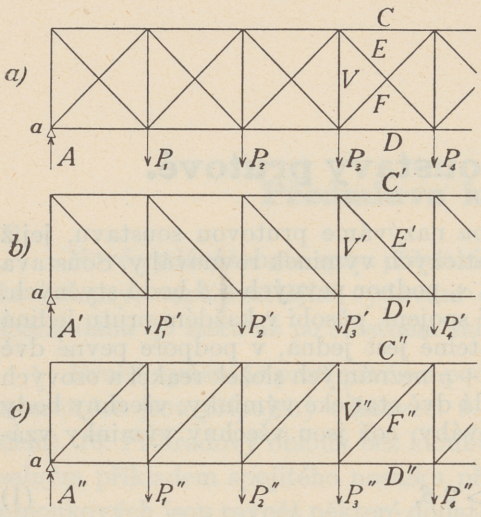
Soustava staticky neurčitá obsahuje více prutů nebo výminek podporových, než je nezbytně třeba k jednoznačnému určení tvaru soustavy, jak ukazuje nadbytek výminek pro přetvoření soustavy. Má tedy soustava staticky neučitá vedle prutů a výminek podporových *nutných* také pruty nebo výminky podporové *zbytné*. Vynecháme-li zbytné pruty nebo výminky podporové, obdržíme soustavu, jež obsahuje pouze nutné pruty a výminky podporové, je tedy staticky určitá; tuto soustavu nazývejme *soustavou základní*. Na jejím řešení založme řešení dané soustavy neurčité.

I. Řešení přibližné.

2. Soustava složená. V některých případech lze řešiti soustavy neurčité rozkladem na několik soustav určitých. Lze tak učiniti především u *soustavy složené*, která vznikne z *jednoduché*, t. j. staticky určité soustavy pravoúhlé, přidá-li se v každé příhradě

[1]) Viz druhý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1946), str. 259.

příčka (obr. 1 *a*). Tím vznikne nosník tolikrát neurčitý, kolik má příhrad; v každé příhradě je jedna příčka zbytná. Takovýto nosník složiti lze ze dvou nosníků staticky určitých, z nichž jeden má mimo pasy a svislice na př. příčky sestupné (obr. 1 *b*), druhý pak příčky výstupné (obr. 1 *c*). Lze si mysliti místo nosníku složené soustavy vedle sebe dva takové nosníky soustav jednoduchých, z nichž každý nese část zatížení původního nosníku soustavy složené. Z původních břemen $P_1, P_2, P_3, \ldots$ přisoudíme prvé jednoduché soustavě části $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$, druhé soustavě části $P''_1, P''_2, P''_3, \ldots$, ovšem tak, že



Obr. 1.

$$P_1 = P'_1 + P''_1,\ P_2 = P'_2 + P''_2,\ P_3 = P'_3 + P''_3 \ldots$$

Původní reakce A se pak rozdělí na části A', A'', pro něž platí opět

$$A = A' + A''.$$

V prvé soustavě jednoduché (obr. 1 *b*) vzniknou uvedeným zatížením v obecných prutech horního pasu, spodního pasu, příčce a svislici osové síly C', D', E', V'; v druhé soustavě (obr. 1 *c*) vyvozují břemena $P''_1, P''_2, P''_3, \ldots$ v prutech téže příhrady osové síly C'', D'', F'', V''. Přiblíží-li se obě jednoduché soustavy k sobě, až splynou a vytvoří původní soustavu složenou, dají jejich břemena sečtením břemena původní. V prutech, které splynou, budou osové síly přibližně rovny součtům osových sil v obou soustavách jednoduchých; v prutech, jež nesplynou, zůstanou osové síly jako v soustavě ednoduché. V prutech soustavy složené jsou tedy přibližně osové síly

$$\left.\begin{aligned} C = C' + C'', \quad D = D' + D', \\ E = E', \quad F = F'', \quad V = V' + V''. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Výslední síly vyhovují patrně výminkám rovnováhy ve styčných bodech původní soustavy složené. Neboť v každé jednoduché soustavě určujeme osové síly z rovnováhy ve styčných bodech; složíme-li pak, jak bylo uvedeno, obě jednoduché soustavy i síly v nich působící, bude zase rovnováha ve všech styčných bodech. Tento stav rovnováhový je v původní neurčité soustavě jedním z možných stavů. Neboť u soustavy neurčité není dosti statických výminek rovnováhy ke stanovení neznámých sil; rovnováhový stav soustavy není tím pak jednoznačně určen, i jest více stavů rovnováhových, které mohou vyhověti výminkám rovnováhy ve styčných bodech. Správné síly osové jsou blíže určeny přetvořením soustavy. Je tedy naznačené řešení rozkladem pouze přibližné.

Obě jednoduché soustavy jsou v podstatě téhož rázu; přisoudíme tedy každé té soustavě totéž zatížení, t. j. polovinu zatížení původní soustavy. Obecně bude pak

$$P'_i = P''_i = \tfrac{1}{2} P_i, \quad A' = A'' = \tfrac{1}{2} A.$$

Jde-li o přímopasový nosník soustavy složené, stanoví se osové síly v obou jednoduchých soustavách snadno. Znamená-li v výšku nosníku a M_m, M_n ohybové momenty k bodům m, n prostého nosníku (viz obr. 3) zatíženého břemeny $P_1, P_2, P_3, \ldots$, platí tu podle vzorců pro nosník přímopasový[1]), jelikož každému jednoduchému nosníku přisuzujeme polovinu původního zatížení,

$$D' = \frac{M_m}{2v} = -C'', \quad D'' = \frac{M_n}{2v} = -C'.$$

[1]) Viz prvý díl tohoto spisu (4. vyd. 1946), str. 207.

Podle vzorců (2) plyne pak

$$D = D' + D'' = \frac{M_m + M_n}{2v} = \frac{M_p}{v} = -C, \tag{3}$$

kde znamená $\frac{1}{2}(M_m + M_n) = M_p$ ohybový moment ke středu p oddílu $m\,n$, jelikož tu jde o zatížení nepřímé a tedy momentovou čarou je v každém oddílu přímka.

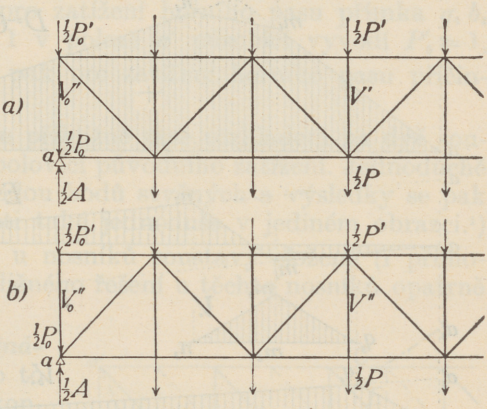
Dále jest

$$E' \sin \varepsilon = \frac{T}{2}, \quad F'' \sin \varepsilon = -\frac{T}{2},$$

znamená-li T posouvající sílu v oddílu $m\,n$ prostého nosníku, zatíženého břemeny $P_1, P_2, P_3, \ldots$. Podle vzorců (2) je tedy

$$E \sin \varepsilon = -F \sin \varepsilon = \frac{T}{2}. \tag{4}$$

Pro výpočet osových sil ve svislicích hodí se lépe rozklad soustavy složené v jednoduché soustavy, jež obsahují pasy i svislice, prvá pak má ty příčky, jejichž osy tvoří souvislou lomenou čáru začínající v horním konci krajní svislice (obr. 2 *a*), druhá příčky ostatní (obr. 2 *b*). V pasech a příčkách dostaneme za tohoto rozkladu tytéž síly osové jako při způsobu prvém, jak se snadno přesvědčíme. Na osové síly pasů a příček nemá také žádného vlivu, působí-li celá břemena P ve styčných bodech téhož pasu nebo rozdělují-li se na oba pasy. Osové síly svislic jsou však v obou těchto případech různé. Uvažujme proto břemena P ve spodních styčných bodech původní soustavy i břemena P' v horních styčných bodech jejich; rozdělujme je na obě soustavy jednoduché ovšem zase rovným dílem. Také v bodě a mysleme si v původní soustavě břímě P_0 a v horním konci krajní svislice břímě P'_0.



Obr. 2.

V prvé jednoduché soustavě (obr. 2 *a*) plyne z rovnováhy v horním konci svislice V' osová síla

$$V' = -\frac{P'}{2},$$

v druhé soustavě (obr. 2 *b*) určíme z rovnováhy ve spodním konci svislice V'' osovou sílu

$$V'' = \frac{P}{2}.$$

Celkem obdržíme tedy podle vzorců (2) v původní soustavě osovou sílu

$$V = V' + V'' = \frac{P - P'}{2}. \tag{5}$$

Obdobně plyne v prvé soustavě z rovnováhy v bodě a síla

$$V'_0 = -\frac{A - P_0}{2};$$

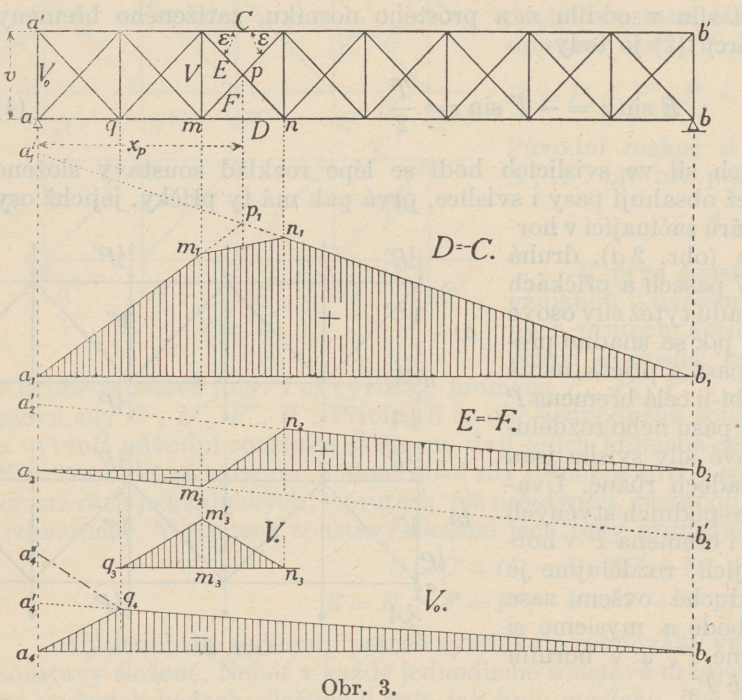
rovnováha v horním konci krajní svislice dá v druhé soustavě

$$V_0'' = -\frac{P_0'}{2}.$$

Je pak celkem

$$V_0 = V_0' + V_0'' = -\frac{A - P_0 + P_0'}{2}. \tag{6}$$

Odvozené vzorce řeší přibližně osové síly ve všech prutech soustavy složené pro jakékoli zatížení stálé. Lze z nich odvoditi též příčinkové čáry (obr. 3), jimiž se stanoví přibližné krajní hodnoty osových sil za libovolného zatížení pohyblivého. Příčinková čára osové síly $D = -C$ má podle vzorce (3) týž tvar jako příčinková čára momentu ke středu p oddílu $m\,n$, v němž je prut. Podle vzorce je tato čára stanovena pořadnicí $\overline{a_1 a_1'} = 1 \cdot \frac{x_p}{v}$, jež znamená přibližnou sílu osovou, vyvozenou v prutu D levou reakcí $A = 1$, která dá k bodu p moment $M_p = 1 \cdot x_p$. Pořadnice $\overline{a_1 a_1'}$ stanoví pravou přímku příčinkovou $p_1 b_1$, s níž se protíná levá přímka příčinková na svislici momentového středu p; v oddílu $m\,n$ je pak příčinkovou čarou přímka $m_1 n_1$.



Obr. 3.

Příčinkový obrazec síly $E \sin \varepsilon = -F \sin \varepsilon$ je podle vzorce (4) shodný s obrazcem $\frac{1}{2}\,T$. Obrazec pro síly $E = -F$ bude pak dán v podporových svislicích pořadnicemi $\overline{a_2 a_2'} = \overline{b_2' b_2} = \frac{1}{2 \sin \varepsilon}$; pořadnice $\overline{a_2 a_2'}$ ($\overline{b_2 b_2'}$) určuje pravou (levou) přímku příčinkovou $n_2 b_2$ ($a_2 m_2$) a v oddílu $m\,n$ platí přímka $m_2 n_2$.

Ve svislicích záleží na tom, přenáší-li se pohyblivé zatížení do horních nebo spodních bodů styčných. Působí-li pohyblivé zatížení na horní body styčné, je spodní břímě $P = 0$ a $V = -\frac{1}{2}P'$. Ve svislici vzniká pak jen tlak, jehož největší hodnota (min V) plyne ze zatížení, které dá největší břímě P'. Je-li naopak spodní pás zatížen, vyjde $P' = 0$ a $V = \frac{1}{2}P$; svislice je tu tažena a největší tah v ní (max V) vyvodí zatížení, které dá největší břímě P. Nebylo by tu tedy příčinkové čáry ani třeba. Sestrojíme ji jakožto příčinkovou čáru břemene $\frac{1}{2}P'$ ($\frac{1}{2}P$), na něž působí pouze zatížení obou sousedních oddílů, a to po zákonu prostého nosníku, neboť tu jde o zatížení nepřímé. Pohyblivé břímě $P = 1$, působící vlevo od bodu q a vpravo od bodu n, nemá účinku na břímě P' (P) ve svislici bodu m. Je-li pak břímě $P = 1$ ve svislici bodu m, působí svou plnou hodnotou. Pro osovou sílu V platí tedy ve svislicích bodů q, n pořadnice

nulové a ve svislici bodu m pořadnice $\overline{m_3 m_3'} = \frac{1}{2}$, kladná (záporná), působí-li pohyblivé zatížení na spodní (horní) pás. V oddílech $q\,m$, $m\,n$ jsou příčinkovými čarami síly V přímky $q_3 m_3'$, $m_3' n_3$.

Pro podporovou svislici V_0 obdržíme, působí-li zatížení na spodní pás, tedy je-li $P_0' = 0$, podle vzorce (6) sílu

$$V_0 = -\frac{A - P_0}{2}.$$

Je-li pohyblivé břímě $P = 1$ vpravo od bodu q, je také $P_0 = 0$ a $V_0 = -\frac{1}{2} A$. Příčinkovou čarou je tedy vpravo od bodu q přímka $q_4 b_4$, určená ve svislici bodu a pořadnicí $\overline{a_4 a_4'} = -\frac{1}{2}$. Břímě $P = 1$ v bodě a působící dá $P_0 = P$, $A = P$, i jest $V_0 = 0$. V oddílu $a\,q$ je pak příčinkovou čarou přímka $a_4 q_4$.

Působí-li pohyblivé zatížení na horní pás, je $P_0 = 0$ a

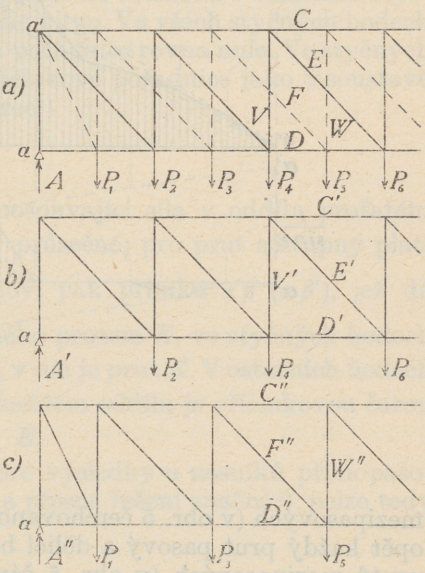
$$V_0 = -\frac{A + P_0'}{2}.$$

Pro břemena vpravo od svislice bodu q působící je též $P_0' = 0$, tedy $V_0 = -\frac{1}{2} A$ jako při zatížení spodního pasu; zůstává proto i pro zatížení horního pasu přímka $q_4 b_4$ příčinkovou čarou osové síly V_0. Břímě $P = 1$ v poloze a' působící vyvodí $P_0' = 1$, $A = 1$, tedy $V_0 = -1 = \overline{a_4 a_4''}$. V oddílu $a\,q$ je pak pro zatížení horního pasu příčinkovou čarou přímka $a_4'' q_4$.

Graficky bychom řešili složenou soustavu přibližně zase rozkladem na dvě soustavy jednoduché, přisuzujíce každé soustavě polovici původního zatížení. Jednoduché soustavy řeší se graficky snadno na př. methodou bodů styčných a výsledky se pak sečtou podle vzorců (2). Řešení lze tu provésti také jednoduše v jediném obrazci.[1])

Výsledky přibližného a přesného řešení u nosníků soustavy složené (i přímopasových) liší se dosti značně,[2]) sluší tedy přibližného řešení u těchto nosníků opatrně užívati.

3. Soustavy násobné. *α) Soustava dvojnásobná* vzniká ze soustavy jednoduché, jde-li o to zmenšiti délky příhrad a učiniti tím příčnou konstrukci mostu, spojující dva hlavní nosníky, lehčí. Pak se rozdělí každý prut pasový na dva díly; aby tyto pruty nebyly namáhány nepříznivě na ohyb mimostyčným zatížením břemeny uprostřed původních příhrad, spojíme dělicí body novou soustavou mezipasových prutů, jež začne v horním styčném bodě a' krajní svislice (obr. 4 *a*). Z jednoduché soustavy pravoúhlé obdržíme tak *dvojnásobnou soustavu pravoúhlou*. Řešíme ji přibližně rozkladem na dvě jednoduché soustavy, z nichž vznikla (obr. 4 *b*, *c*). Každé té soustavě přisoudíme ovšem celá břemena, jež působí ve styčných bodech té soustavy, tedy jedné soustavě původní břemena sudá, druhé soustavě původní břemena lichá. Za naznačeného zatížení určíme snadno v obecném horním pasu, spodním pasu, příčce a svislici v prvé jednoduché soustavě osové síly C', D', E', V', v druhé soustavě osové síly C'', D'', F'', W''



Obr. 4.

[1]) Viz *A. V. Velflík* „Stavitelství mostní", díl II. (Praha 1905), str. 100, 400 a j.

[2]) Srovnej *A. F. Zschetzsche* „Handbuch der Baustatik", I. (Düsseldorf 1912), str. 449 a d.

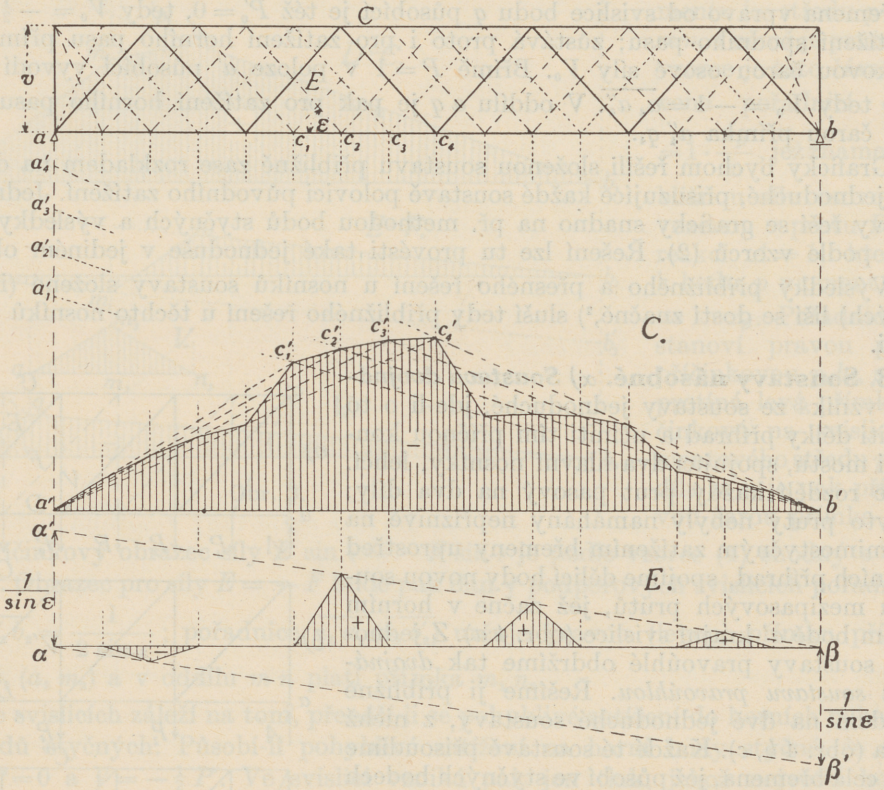
a v podpoře a v prvé soustavě reakci A', v druhé soustavě A''. Splynou-li obě jednoduché soustavy v původní soustavu dvojnásobnou, sčítají se opět přibližně osové síly v prutech oběma jednoduchým soustavám společných, v ostatních prutech zůstanou pak síly jako v jednoduchých soustavách, tedy obdobně ke vzorcům (2)

$$C = C' + C'', \quad D = D' + D'', \quad E = E',$$
$$F = F'', \quad V = V', \quad W = W''.$$

Ovšem je též reakce $A = A' + A''$.

Naznačený postup platí pro řešení početní i grafické za stálého zatížení. Grafické řešení tímto způsobem provede se snadno v jediném obrazci silovém.[1])

*β) **Soustavy vícenásobné.*** Soustavy násobné mohou býti vytvořeny též z více než dvou soustav jednoduchých. Tak na př. z jednoduché soustavy kosoúhlé (v obr. 5 plně vytažené) odvodíme *dvojnásobnou soustavu kosoúhlou*, rozpůlíme-li novými styčnými body každý prut pasový a spojíme-li tyto body opět kosoúhlou soustavou prutů



Obr. 5.

mezipasových (v obr. 5 čerchovanou). Je-li i pak délka prutů pasových přílišná, půlíme opět každý prut pasový a dělicí body spojíme dalšími dvěma kosoúhlými soustavami prutů mezipasových (v obr. 5 čárkovanou a tečkovanou soustavou). Vytvoříme tím *čtyrnásobnou soustavu kosoúhlou.* Nosníky takové a složitější nazývají se též *nosníky mřížovanými.*

[1]) Viz *A. V. Velflík* „Stavitelství mostní", díl II. (Praha 1905), str. 127, 174, 474 a j.

Nosníky soustav vícenásobných řešíme zase rozkladem na tolik soustav jednoduchých, z kolika soustav vznikly, přisuzujíce každé jednoduché soustavě pouze břemena, jež působí ve styčných bodech této soustavy. Pro toto přibližné řešení odvodíme snadno příčinkové čáry osových sil prutů. Jde-li na př. o prut C v přímopasovém nosníku čtyrnásobné soustavy kosoúhlé (obr. 5), náleží tento prut všem čtyřem jednoduchým soustavám, v nichž by byly přidrženými středy momentovými pro prut C styčné body c_1, c_2, c_3, c_4. V každé jednoduché soustavě byl by příčinkovým obrazcem trojúhelník, jehož vrchol je na svislici přidruženého středu momentového a jehož pravá strana je dána ve svislici levé podpory pořadnicí $C' = -1 \cdot \frac{x}{v}$, znamená-li x vzdálenost přidruženého středu momentového od svislice levé podpory a v výšku nosníku přímopasového. V jednoduché soustavě, jež obsahuje bod c_1 (c_2, c_3, c_4) byl by tedy příčinkovým obrazcem pro osovou sílu C trojúhelník $a' c_1' b'$, ($a' c_2' b'$, $a' c_3' b'$, $a' c_4' b$), daný ve svislici bodu a pořadnicí $\overline{a' a_1'} = -1 \cdot \frac{x_1}{v}$ $\left(\overline{a' a} = -1 \cdot \frac{x_2}{v}, \ \overline{a' a_3'} = -1 \cdot \frac{x_3}{v}, \right.$ $\left. \overline{a' a_4'} = -1 \cdot \frac{x_4}{v}\right)$, při čemž znamenáme $\overline{a c_1} = x_1$ ($\overline{a c_2} = x_2$, $\overline{a c_3} = x_3$, $\overline{a c_4} = x_4$). Poněvadž přisuzujeme každé jednoduché soustavě břemena, jež působí ve styčných bodech této soustavy, jsou v těchto bodech dány příčinkové pořadnice osové síly C v původní čtyrnásobné soustavě příčinkovým trojúhelníkem platným pro příslušnou soustavu jednoduchou. Přenáší-li se pohyblivé zatížení do styčných bodů spodního pasu (obr. 5), jsou příčinkové pořadnice osové síly C dány ve styčných bodech spodního pasu té soustavy, která obsahuje bod c_1 (c_2, c_3, c_4), trojúhelníkem $a' c_1' b'$ ($a' c_2' b'$, $a' c_3' b'$, $a' c_4' b'$). V každém oddílu e pak příčinkovou čarou přímka, tedy koncové body příčinkových pořadnic v sousedních bodech styčných spojujeme přímkami. Stejně by se určila i příčinková čára osové síly v prutu spodního pasu, pro kterou by však platilo znaménko kladné.

V libovolném mezipasovém prutu E vyvodí osovou sílu pouze břemena, působící ve styčných bodech té jednoduché soustavy, v níž je prut E; břemena v ostatních styčných bodech působící nemají na osovou sílu E žádného vlivu. Ve všech styčných bodech oněch soustav, jež neobsahují prutu E, je příčinková pořadnice rovna nule. Ve styčných bodech soustavy, která obsahuje prut E, určíme příčinkové pořadnice jako v soustavě jednoduché. Platí tu pro přímopasový nosník vzorec[1])

$$E \sin \varepsilon = \pm T,$$

je-li ε odchylka osy prutu E od vodorovné a T posouvající síla v oddílu protatém řezem, vedeným prutem E podle pravidel methody průsečné; pro prut sestupný platí znaménko horní. Pořadnice $\overline{\alpha \alpha'} = \overline{\beta' \beta} = \frac{1}{\sin \varepsilon}$ stanoví pak přímku $\alpha' \beta$ ($\alpha \beta'$), jež dá říčinkové pořadnice vpravo (vlevo) od řezu, vedeného prutem E, ve styčných bodech zatíženého (v obr. 5 spodního) pasu, a to v soustavě, v níž je prut E. V ostatních bodech styčných jsou příčinkové pořadnice rovny nule a v každém oddílu je příčinkovou čarou přímka, čímž je stanoven příčinkový obrazec síly E.

Přibližné řešení soustav násobných dává dobré výsledky u nosníků přímopasových[2]). U nosníků s pasy lomenými liší se přibližné a přesné řešení značně[3]), nelze tedy u nich spolehlivě užívati řešení přibližného.

---

[1]) Viz prvý díl tohoto spisu (4. vyd. 1946), str. 208.

[2]) Viz spisovatelovo pojednání „Přímopasové nosníky dvojnásobné soustavy pravoúhlé“ v Technickém obzoru r. 1904, str. 227 a d., kdež je srovnáno řešení přesné a přibližné.

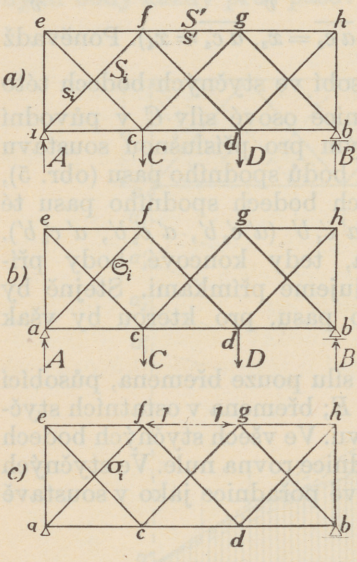
[3]) Srovnej *H. F. B. Müller-Breslau* „Die graphische Statik der Baukonstruktionen“, I., 3. vyd. (Lipsko 1901), str. 528, a II., 3. vyd. (Lipsko 1903), str. 440 a d.

II. Řešení přesné.

a) Soustavy jednoduše neurčité.

4. Obecná výminka přetvárná a přetvárná práce. *α) Výminka přetvárná.* Z prutové soustavy staticky neurčité s jedním zbytným prutem s' obdržíme, vynecháme-li zbytný prut, soustavu základní, jež obsahuje jen pruty nutné a je tedy staticky určitá. Nutnými pruty, jejichž délky jsou vzájemně nezávislé, dán jest úplně tvar soustavy, tedy také délka zbytného prutu. Přetvoří-li se daná neurčitá soustava, pak je již přetvořením prutů nutných dáno přemístění všech styčných bodů, tedy i přetvoření zbytného prutu plyne z přetvoření prutů nutných. Tento vztah dává výminku přetvárnou, jež spolu se statickými výminkami rovnováhy ve styčných bodech stačí k řešení dané soustavy jednoduše neurčité.

Přetvárnou výminku odvodíme, myslíme-li si zbytný prut $s' = \overline{fg}$ (obr. 6 *a*) z prutové soustavy vyňat a nahrazen osovou silou S' v obou jeho koncových bodech. Tím se nezmění patrně nic ani na rovnováhovém stavu ani na přetvoření dané soustavy; neboť osová síla nahrazuje prut úplně, jde-li o rovnováhu ve styčných bodech, a přetvoření soustavy je dáno úplně přetvořením prutů nutných. V soustavě bez zbytného prutu (základní) mění se vzdálenost s' bodů f, g, jež spojoval původně zbytný prut, přetvořením soustavy o délku $\Delta s'$, kterou stanovíme jakožto změnu vzdálenosti dvou bodů prutem nespojených podle vzorce (192^a) v druhém dílu tohoto spisu (3. vyd., str. 262). Stanovíme proto ze sil vnějších rovných jednotce, jež působí na body f, g ve smyslu zvětšení délky s' (obr. 6 *c*) a jež lze tedy pokládati za osovou sílu $S' = -1$, nahrazující prut zbytný, v obecném prutu nutném s_i osovou sílu σ_i. Je-li pak Δs_i roztažení prutu s_i, platí



Obr. 6.

$$\Delta s' = \Sigma \sigma_i \cdot \Delta s_i; \qquad (7^a)$$

součet na pravé straně rovnice vztahuje se na všechny pruty nutné.

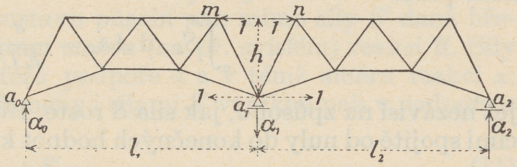
Je-li zbytný prut v soustavě prutové, mění se jeho délka s' přetvořením soustavy o roztažení $\Delta s'$. Pokládáme-li tedy v rovnici (7^a) veličinu $\Delta s'$ za roztažení zbytného prutu, máme rovnici, která váže toto roztažení s roztaženími prutů nutných, t. j. výminku přetvárnou. Na jednodušší tvar uvedeme ji, přisoudíme-li také zbytnému prutu s' součinitele $\sigma' = -1$, odpovídajícího síle $S' = -1$, kterou si můžeme mysliti nahrazený prut s', hledáme-li v nutných prutech součinitele σ_i. Člen $\Delta s'$ v rovnici (7^a) převedeme na pravou stranu ve tvaru $-\Delta s' = \sigma' \cdot \Delta s'$ a spojíme se členy, které se týkají prutů nutných, pod jedním znaménkem součtovým ve tvar

$$\Sigma \sigma \cdot \Delta s = 0. \qquad (7^b)$$

Vynecháním přípon naznačujeme, že se součet vztahuje na všechny pruty, nutné i zbytný.

V uvažované soustavě (obr. 6) nevyvodí zatížení silami $S' = -1$ žádných reakcí v podporách. Podporové reakce jsou tu staticky určité a *popuštění podpor* nemá pak účinku na podporové reakce i osové síly. Jsou ovšem také soustavy jednoduše neurčité, jejichž podporové reakce jsou staticky neurčité. Příkladem budiž prutová soustava trojúhelníková podepřená v bodě a_0 pevně, v bodech a_1, a_2 posouvatelně po vodorovné (obr. 7), tedy *spojitý nosník příhradový*. Při jedné podpoře pevné a jedné posouvatelné byla by soustava určitou; přibude-li jedna podpora posouvatelná, tedy

jedna neznámá reakce, stane se soustava jednoduše neurčitou. Zbytnou je tu jedna výminka podporová. Lze však pokládati za zbytný též jeden prut, na př. prut $s' = \overline{mn}$ proti bodu a_1; soustavu základní tvoří pak dva nosníky prosté, jež jsou v bodě a_1 spojeny. Nahradíme-li vodorovný prut mn silami $S' = -1$ v bodech m, n, vznikají v podporách a_0, a_1, a_2 svislé reakce α_0, α_1, α_2, jež jsou samy o sobě v rovnováze; v bodě a_1 působí pak oba díly soustavy navzájem ve směru vodorovném rovnými a protivnými silami o velikosti jednotky, jak plyne z rovnováhy sil působících na kterýkoli z dílů a_0a_1, a_1a_2. Z rovnováhy sil působících na díl a_0a_1, t. j. síly α_0, části síly α_1, jednotky silové v bodě m a vodorovné jednotky silové v bodě a_1, nahrazující pravý díl soustavy, plyne momentovou výminkou rovnováhy k bodu a_1 reakce



Obr. 7.

$$\alpha_0 = 1 \cdot \frac{h}{l_1},$$

užíváme-li označení v obrazci vyznačeného. Obdobně určíme reakci

$$\alpha_2 = 1 \cdot \frac{h}{l_2}$$

a rovnováha všech sil, jež působí na základní soustavu, dá z výminky pro svislé síly

$$\alpha_1 = -(\alpha_0 + \alpha_2).$$

Přetvárná výminka plyne vlastně použitím věty o virtuálných pracích[1]) na základní soustavu při zatížení silami $S' = -1$. Vyvodí-li toto zatížení v podporách reakce α, konají také tyto reakce jakožto vnější síly při popuštění podpor virtuálnou práci. Popuštění podpor znamenejme obecně Δa a berme je kladně ve smyslu kladných tlaků podporových, tedy proti smyslu kladných podporových reakcí. Síly $S' = -1$ konají virtuálnou práci $1 \cdot \Delta s'$, příslušné reakce α virtuálnou práci $-\Sigma \alpha \cdot \Delta a$ a osová síla σ_i v nutném prutu s_i práci $\sigma_i \cdot \Delta s_i$. Podle věty o virtuálných pracích je tedy

$$\Delta s' - \Sigma \alpha \cdot \Delta a = \Sigma \sigma_i \cdot \Delta s_i$$

anebo kratčeji

$$\Sigma \sigma \cdot \Delta s + \Sigma \alpha \cdot \Delta a = 0, \qquad (7^c)$$

přisuzujeme-li zbytnému prutu součinitele $\sigma' = -1$ a zahrnujeme-li prvým znaménkem součtovým všechny pruty, nutné i zbytný. Rovnice (7^c) je pak přetvárná výminka, ze které lze řešiti také účinek popuštění podpor (opěr, jde-li o šikmé reakce).

*β) **Přetvárná práce a věta o nejmenší práci přetvárné.*** Výminku přetvárnou můžeme uvésti na jiný tvar, hledíme-li k *přetvárné práci* soustavy prutové, t. j. k práci, kterou konají při přetvoření soustavy vnitřní síly, rostou-li znenáhla vnější síly a tedy i síly vnitřní (osové) od nuly do jisté konečné hodnoty. Osová síla libovolného prutu mění se tu spojitě od nuly do S; roztažení prutu roste pak od nuly do [2])

$$\Delta s = \frac{Ss}{EU}, \qquad (8^a)$$

je-li s délka prutu, U obsah jeho průřezu a E modul pružnosti v tahu neb tlaku. Mezilehlé hodnotě S_x osové síly odpovídá roztažení

$$\Delta s_x = \frac{S_x s}{EU}.$$

[1]) Srovnej druhý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1946), str. 261.
[2]) Viz druhý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1946), str. 244.

Vzroste-li toto roztažení o

$$\mathrm{d}\,\Delta s_x = \frac{s}{EU} \cdot \mathrm{d}\,S_x,$$

koná při tom síla S_x práci $S_x \cdot \mathrm{d}\,\Delta s_x$. Mění-li se osová síla od nuly do S, vykoná celkem práci

$$\int_0^S S_x \cdot \mathrm{d}\,\Delta s_x = \frac{s}{EU} \int_0^S S_x \cdot \mathrm{d}\,S_x = \frac{S^2 s}{2EU},$$

jež nezávisí na způsobu, jak síla S roste. Roztažením všech prutů osovými silami rostoucími spojitě od nuly do konečných hodnot koná se tedy přetvárná práce soustavy prutové

$$\Pi = \Sigma \frac{S^2 s}{2EU}. \tag{9a}$$

Dosazením roztažení Δs ze vzorce (8a) dostaneme též

$$\Pi = \tfrac{1}{2} \Sigma S . \Delta s. \tag{9b}$$

Přetvárná práce soustavy prutové rovná se tedy polovici oné práce, kterou by za roztažení Δs vykonaly osové síly S, kdyby působily od počátku přetvoření svými konečnými hodnotami. Užijeme-li dále věty o virtuálných pracích na skutečné zatížení i přetvoření soustavy prutové, obdržíme

$$\Sigma P \cdot \Delta p = \Sigma S \cdot \Delta s,$$

jsou-li P vnější síly a Δp jimi vyvozená posunutí jejich působišť ve směrech sil P; osové síly S plynou tu ze zatížení břemeny P, a Δs jsou příslušná roztažení prutů. Pak jest

$$\Pi = \tfrac{1}{2} \Sigma P \cdot \Delta p, \tag{9c}$$

tedy přetvárná práce soustavy prutové rovná se také polovici práce, kterou by konaly za přetvoření soustavy vnější síly, jež by působily od počátku přetvoření svými konečnými hodnotami; tuto větu odvodil prvý[1]) *Clapeyron.*

Spojitost přetvárné práce, dané vzorcem (9a), s přetvárnou výminkou (7b) vyšetříme, zavedeme-li do přetvárné výminky za roztažení Δs hodnotu ze vzorce (8a); vyjde tu

$$\Sigma \sigma \frac{S s}{EU} = 0.$$

Osovou sílu obecného prutu vyjádříme si nyní jakožto funkci osové síly zbytného prutu S'. Vyjmeme-li zbytný prut s' ze soustavy a nahradíme-li jej osovou silou S' v jeho obou koncových bodech, můžeme všechny vnější síly na základní soustavu působící rozvrhnouti na dvě soustavy rovnováhové: 1. dané zatížení a příslušné reakce A, B, C, D (obr. 6 *b*), 2. osové síly S', jež jsou samy o sobě v rovnováze a nevyvodí reakcí, jsou-li reakce samy staticky určité (jako v soustavě podle obr. 6). Prvá soustava vnějších sil A, B, C, D vyvodí v obecném nutném prutu s_i staticky určité soustavy základní (obr. 6 *b*) osovou sílu $\mathfrak{S}_i$. Síly S', jež neznáme, mysleme si zatím nahrazeny silami $S' = -1$ (obr. 6 *c*), jež vyvodí v prutu s_i základní soustavy osovou sílu σ_i. Působí-li místo sil $S' = -1$ síly S', vyvodí v prutu s_i sílu $-\sigma_i S'$. Celkem dá prvá i druhá soustava vnějších sil, jež působí na základní soustavu, v prutu s_i osovou sílu rovnou součtu účinků obou soustav, tedy

$$S_i = \mathfrak{S}_i - \sigma_i S'. \tag{10a}$$

[1]) Viz *O. Mohr* „Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik" (Berlín 1906), str. 384.

Síly $\mathfrak{S}$ ve zbytném prutu není. Přisuzujeme-li zbytnému prutu součinitele $\sigma' = -1$, můžeme psáti též pro všechny pruty, nutné i zbytný,

$$S = \mathfrak{S} - \sigma S'. \tag{10^b}$$

Jsou-li i podporové reakce staticky neurčité, stanovíme jejich správné hodnoty podobně jako osové síly. Zbytný prut myslíme si tu zase vyňatý a nahrazený osovou silou S' v jeho obou koncích. Na základní soustavu působí pak mimo síly S' daná břemena, jež vyvodí v obecné podpoře a v určitém směru (na př. svislém) reakci $\mathfrak{A}$. Síly S' nahradíme silami $S' = -1$, jež vyvodí v téže podpoře a a v témž směru reakci α; síly S' daly by tedy reakci $-\alpha S'$. Danými břemeny i silami S' vznikne pak v podpoře a ve vytknutém směru celkem reakce

$$A = \mathfrak{A} - \alpha S'. \tag{11}$$

Ze vzorce (10^b) plyne, pokládáme-li osovou sílu zbytného prutu S' za proměnnou,

$$\frac{\partial S}{\partial S'} = -\sigma.$$

Pak jest

$$\Sigma \sigma \frac{S s}{E U} = -\Sigma \frac{S s}{E U} \cdot \frac{\partial S}{\partial S'} = -\Sigma \frac{s}{2 E U} \cdot \frac{\partial S^2}{\partial S'} = -\frac{\partial \Pi}{\partial S'}$$

a tedy podle výminky přetvárné

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S'} = 0. \tag{12}$$

Poslední rovnice je výminkou maxima nebo minima přetvárné práce Π jakožto funkce síly S'. Poněvadž pak jest

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S'} = -\Sigma \sigma \frac{S s}{E U}, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S'^2} = \Sigma \frac{\sigma^2 s}{E U} > 0,$$

jde tu o minimum práce přetvárné. Tím jest odvozena *věta* (*Castiglianova*) *o nejmenší práci přetvárné*:[1]) Pokládáme-li osovou sílu zbytného prutu za proměnnou, stanoví se její hodnota z výminky, že činí přetvárnou práci soustavy prutové minimem.

Této věty lze užívati i ke stanovení účinku změny teploty a popuštění opěr, doplní-li se patřičně přetvárná práce. Dbáme-li také změny teploty, jež mívá při soustavách neurčitých podstatný účinek, musíme roztažení prutu, plynoucí podle vzorce (8^a) z osové síly S, doplniti hodnotou, jež plyne ze změny teploty. Znamená-li tu ε *součinitele tepelné roztažnosti*, t. j. změnu délkové jednotky při oteplení o 1°, a δ změnu teploty ve stupních, má změna délky prutu s při oteplení o δ stupňů hodnotu $\delta \varepsilon s$, kterou přičteme k účinku osové síly podle vzorce (8^a) a dostaneme celkové roztažení prutu

$$\Delta s = \frac{S s}{E U} + \delta \varepsilon s. \tag{8^b}$$

Touto hodnotou roztažení plyne z obecné výminky přetvárné (7^c), v níž je též popuštění opěr,

$$\Sigma \sigma \cdot \Delta s + \Sigma \alpha \cdot \Delta a = \Sigma \sigma \frac{S s}{E U} + \Sigma \delta \varepsilon \sigma s + \Sigma \alpha \cdot \Delta a =$$

$$= -\Sigma \frac{s}{2 E U} \cdot \frac{\partial S^2}{\partial S'} - \Sigma \delta \varepsilon s \frac{\partial S}{\partial S'} - \Sigma \Delta a \cdot \frac{\partial A}{\partial S'} = 0,$$

[1]) Větu vyslovil již *Menabrea* v pojednání „Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques" (Paříž, Comptes rendus de l'Académie 1858); v širší známost vešla teprve z díla *A. Castigliana* „Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques" (Turin 1879), str. 30.

neboť podle vzorců (10^b) a (11) jest

$$\frac{\partial S}{\partial S'} = -\sigma, \qquad \frac{\partial A}{\partial S'} = -\alpha.$$

Chceme-li i nyní psáti výminku přetvárnou ve tvaru rovnice (12), tedy užívati věty o nejmenší práci přetvárné i při změně teploty a popuštění opěr, musíme doplniti skutečnou přetvárnou práci, danou vzorcem (9^a), na hodnotu

$$\Pi' = \Sigma \frac{S^2 s}{2EU} + \Sigma \delta \varepsilon S s + \Sigma A \cdot \Delta a, \tag{13}$$

což jest ovšem pouhá hodnota početní, nikoli skutečná práce.

Staticky neurčité soustavy prutové řeší se nejlépe přímo z přetvárné výminky (7^c), na kterou vede ovšem také věta o nejmenší práci přetvárné postupným dosazením. U neurčitých nosníků plnostěnných vede však rychleji k cíli přetvárná práce, jejíž hodnota pro tyto nosníky plyne z hodnoty pro soustavu prutovou, jak bude dále ukázáno.

5. Obecné řešení soustavy jednoduše neurčité. *α) Obecný vzorec pro osovou sílu zbytného prutu.* Vyjděme z obecné výminky přetvárné (7^c), do níž dosadíme, hledíce také ke změně teploty, za roztažení prutu Δs ze vzorce (8^b). Poznamenejme kratčeji

$$\beta = \frac{s}{EU}; \tag{14}$$

tohoto součinitele, znamenajícího roztažení prutu s osovou silou $S = 1$, můžeme určiti předem pro každý prut, známe-li průřezy prutů. Zaveďme ještě za sílu S hodnotu danou vzorcem (10^b), čímž obdržíme

$$\Delta s = \beta S + \delta \varepsilon s = \beta (\mathfrak{S} - \sigma S') + \delta \varepsilon s.$$

Touto hodnotou roztažení Δs nabývá přetvárná výminka (7^c) tvaru

$$\Sigma \beta \sigma \mathfrak{S} - S' \Sigma \beta \sigma^2 + \Sigma \delta \varepsilon \sigma s + \Sigma \alpha \cdot \Delta a = 0;$$

prvé tři součty vztahují se tu na všechny pruty, nutné i zbytný. Z toho plyne osová síla zbytného prutu

$$S' = \frac{\Sigma \beta \sigma \mathfrak{S} + \Sigma \delta \varepsilon \sigma s + \Sigma \alpha \cdot \Delta a}{\Sigma \beta \sigma^2}. \tag{15}$$

V tomto vzorci jsou jednotlivými členy v čitateli vyjádřeny zvláště účinek libovolného zatížení, změny teploty a popuštění opěr. Účinky ty se prostě sčítají, i lze určiti každý účinek zvláště a výsledky sečísti. Za hlavní pokládejme účinek zatížení; dán je prvým členem v čitateli, tedy

$$S' = \frac{\Sigma \beta \sigma \mathfrak{S}}{\Sigma \beta \sigma^2}. \tag{15a}$$

Z osové síly zbytného prutu, kterou určíme z posledního vzorce počtem, stanovíme pak osové síly ostatních prutů podle vzorce (10^a) a reakce podporové, jsou-li staticky neurčité, podle vzorce (11).

β) Účinky vedlejší. Vynecháme-li ve vzorci (15) v čitateli člen prvý a poslední, obdržíme pouhý účinek změny teploty

$$S'_t = \frac{\Sigma \delta \varepsilon \sigma s}{\Sigma \beta \sigma^2}. \tag{15b}$$

Jsou-li pruty z téže látky a změna teploty ve všech prutech stejná, tedy δ i ε stálé, vyjde

$$S'_t = \frac{\delta \varepsilon \Sigma \sigma s}{\Sigma \beta \sigma^2}. \qquad (15^c)$$

Změnu teploty měříme od jisté *teploty základní*, za kterou bráti jest teplotu, při níž se nosník zřizuje, obyčejně asi 10° C. Počítáme-li s nejvyšší teplotou + 45° C a nejnižší — 25° C, vychází změna $\delta = \pm 35°$ C. Pro látky, z nichž se zřizují nosníky příhradové, mají modul pružnosti E a součinitel tepelné roztažnosti ε hodnoty uvedené v tabulce.[1])

	Dřevo	Ocel	Litina šedá	Beton
E	110 000	2 100 000	1 000 000	210 000 kg/cm²
ε	0,000 004	0,000 012	0,000 010	0,000 012 pro 1° C

Účinek popuštění opěr je dán třetím členem v čitateli vzorce (15) a dá sám o sobě ve zbytném prutu osovou sílu

$$S'_{(a)} = \frac{\Sigma \alpha \cdot \Delta a}{\Sigma \beta \sigma^2}. \qquad (15^d)$$

Popuštění opěr Δa buď vypočteme z přetvoření opěr nebo je odhadneme; u provedené konstrukce můžeme je měřiti. Jsou-li opěry nepoddajné, byla by jejich popuštění $\Delta a = 0$.

U soustav staticky neurčitých má důležitý vliv též délka zbytného prutu, jež není tak libovolná jako délky prutů nutných, nýbrž je délkami těchto prutů úplně stanovena. Správnou délku zbytného prutu určíme z přetvárné výminky (7^a), jež platí pro libovolná možná roztažení všech prutů. Odmyslíme-li si podpory, může se soustava přetvořovati po zákonu podobnosti; pak je poměrné roztažení všech prutů stálé, tedy

$$\frac{\Delta s'}{s'} = \frac{\Delta s_i}{s_i} = \lambda_0.$$

Z toho plyne

$$\Delta s' = \lambda_0 s', \qquad \Delta s_i = \lambda_0 s_i;$$

dosazením do výminky (7^a) a krácením stálým činitelem λ_0 obdržíme vzorec pro správnou délku zbytného prutu

$$s' = \Sigma \sigma_i s_i. \qquad (16)$$

Je-li základní soustava nezatížena a tedy nenapjata, nebudou její pruty napjaty, i když do ní vložíme zbytný prut ve správné délce s', jaká plyne podle vzorce (16) z délek prutů nutných. Má-li však zbytný prut nesprávnou délku $s^+ \leqq s'$, bude i soustava nezatížená napjata, vložíme-li do ní tento prut. Neboť zbytný prut délky s^+ musíme mimo soustavu převésti do správné délky s', aby bylo lze jej do soustavy vložiti; stane se to silou S'_1, jež vyvodí roztažení

$$\beta' S'_1 = s' - s^+,$$

znamená-li $\beta' = \frac{s'}{E' U'}$ součinitele stanoveného pro zbytný prut podle vzorce (14).

[1]) Podrobněji viz v Technickém průvodci, seš. 19, II. Statické tabulky, 2. vyd. (1939) str. 60.

Vložíme-li do soustavy zbytný prut napjatý silou S'_1, snaží se silou S'_2 nabýti původní délky, čímž se vyvodí ve všech prutech síly osové i roztažení. Osová síla zbytného prutu změní se tím na sílu

$$S' = S'_1 + S'_2 .$$

Změně S'_2 této síly odpovídá roztažení $\Delta s' = \beta' S'_2$, jež vyhovuje přetvárné výmince (7^a).

Nedbáme-li zatížení, je v obecném prutu nutném s_i síla $\mathfrak{S} = 0$, tedy podle vzorce (10^a) působí v něm síla $S_i = -\sigma_i S'$, jež vyvodí roztažení $\Delta s_i = \beta_i S_i = -\beta_i \sigma_i S'$. Z přetvárné výminky ($7^a$) plyne pak

$$\beta' S'_2 = -S' \Sigma \beta_i \sigma_i^2 .$$

Dále jest podle předešlého odvození

$$S'_2 = S' - S'_1 , \quad \beta' S'_2 = \beta' S' - \beta' S'_1 = \beta' S' - (s' - s^+),$$

což dá

$$\beta' S' - (s' - s^+) = -S' \Sigma \beta_i \sigma_i^2 .$$

Člen $\beta' S'$ lze psáti $S' \cdot \beta' \sigma'^2$, jelikož zbytnému prutu přisuzujeme $\sigma' = -1$. Sloučíme-li všechny členy, jež obsahují S', do jednoho součtu, obsahujícího pruty nutné i prut zbytný, obdržíme

$$S' \Sigma \beta \sigma^2 = s' - s^+ .$$

Nesprávná délka zbytného prutu dá tedy v tomto prutu osovou sílu

$$S' = \frac{s' - s^+}{\Sigma \beta \sigma^2} . \qquad (15^e)$$

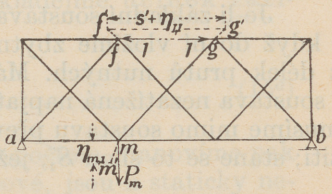
Vzorec (15^c) pro osovou sílu zbytného prutu, vyvozenou při prutech z téže látky stejnou změnou teploty, zjednoduší se použitím rovnice (16) pro správnou délku zbytného prutu. Předpokládejme, že je soustava tak podepřena, že se může přetvořovati po zákonu podobnosti, jak předpokládá rovnice (16); tuto rovnici lze též psáti

$$\Sigma \sigma s = 0,$$

vztahujeme-li součet na všechny pruty, nutné i zbytný. Pak vyjde ze vzorce (15^c) ve zbytném prutu síla $S'_t = 0$. Nedbáme-li zatížení, je v nutném prutu s_i síla $\mathfrak{S}_i = 0$ a celková síla $S_i = -\sigma_i S'_t = 0$. Tedy **může-li se soustava přetvořovati po zákonu podobnosti, nemá stejné oteplení všech prutů žádného účinku**, jsou-li ovšem pruty z téže látky.

γ) ***Řešení grafické*** odvodíme pro účinek zatížení, daný vzorcem (15^a), uvažujeme-li přetvoření základní soustavy při zatížení $S' = -1$ (obr. 8). Přetvoření řešme z rovnice virtuálných prací

$$\Sigma P \cdot (\Delta p) = \Sigma S \cdot (\Delta s).$$



Obr. 8.

Zatížení $S' = -1$ vyvodí v obecném prutu nutném s_i osovou sílu σ_i a roztažení

$$\Delta s_i = \frac{\sigma_i s_i}{E_i U_i} = \beta_i \sigma_i .$$

Působiště m břemene P_m nabude nové polohy m' a posouvá se ve směru břemene o délku $\eta_{m,1}$. Bereme-li břemena P_m za pomocné síly vnější, jsou $\mathfrak{S}$ příslušné síly osové vyvozené v základní soustavě břemeny P_m. Z věty o virtuálných pracích plyne pak

$$\Sigma P_m \eta_{m,1} = \Sigma \mathfrak{S}_i \cdot \beta_i \sigma_i = \Sigma \beta \sigma \mathfrak{S}; \qquad (17^a)$$

v prutu zbytném není síly $\mathfrak{S}$, můžeme tedy součet na pravé straně rovnice vztahovati na všechny pruty.

Totéž zatížení $S' = -1$ vyvodí nové polohy f', g' bodů f, g a změní vzdálenost $\overline{fg} = s'$ o délku $\eta_{I,I}$. Za pomocné síly vnější berme tu síly $S' = -1$, jež vyvozují osové síly σ_i. Věta o virtuálných pracích dá pak

$$1 \cdot \eta_{I,I} = \Sigma \beta_i \sigma_i^2;$$

dále jest

$$\Sigma \beta \sigma^2 = \Sigma \beta_i \sigma_i^2 + \beta' = \eta_{I,I} + \beta'. \qquad (17^b)$$

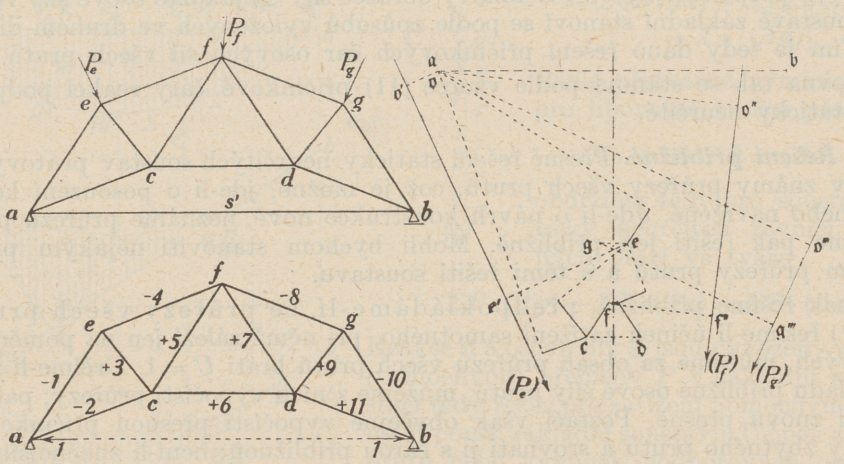
Stanovenými hodnotami vychází ze vzorce (15^a)

$$S' = \frac{\Sigma P_m \eta_{m,I}}{\eta_{I,I} + \beta'}. \qquad (18)$$

Zde znamená $\eta_{m,I}$ posunutí působiště břemene ve směru břemene, působí-li na základní soustavu zatížení $S' = -1$; $\eta_{I,I}$ je pak za téhož zatížení a v téže soustavě změna vzdálenosti bodů, jež spojoval vyňatý zbytný prut. Určíme-li tedy na př. translokační obrazec základní soustavy pro zatížení $S' = -1$, odvodíme z něho všechna η ve vzorci (18), a to při břemenech libovolného zaměření.

Příklad 1. Stanoviti jest osovou sílu zbytného prutu s' v soustavě naznačené v obr. 9, zatížené libovolnými břemeny P_e, P_f, P_g.

Daná soustava skládá se z trojúhelníkové soustavy, k níž je připojen prut $s' = \overline{a\,b}$; podepřena jsouc v bodě a pevně, v bodě b posouvatelně po vodorovné, je jednoduše neurčitá, a zbytný je tu na př. prut s'. Řešíce ji vynecháme zbytný prut a nahradíme jej v bodech a, b silou $S' = -1$, t. j. jednotkou silovou působící do bodů a, b. Za tohoto zatížení základní soustavy určili bychom v prutech nutných osové síly σ, jejichž znaménka jsou v obrazci připsána, a vypočteme roztažení $\Delta s = \frac{\sigma s}{EU}$ ve všech prutech. Pak řešíme přetvoření základní soustavy translokačním obrazcem.



Obr. 9.

Je-li soustava souměrná, bude souměrná i po přetvoření zatížením $S' = -1$ a prut $c\,d$ zůstane vodorovný. Tomu vyhovíme předem, volíme-li zatím bod c za pevný, d za posouvatelný po vodorovné. Pak stačí sestrojiti translokační obrazec pouze pro polovici nosníku; celý obrazec bude souměrný ke svislici bodu $\mathfrak{f}$, čímž jsou dány polohy $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$. V translokačním obrazci vrátíme se k původním výminkám podporovým, přeložíme-li původní polohu všech bodů do bodu $\mathfrak{o} \equiv \mathfrak{a}$.

Z obrazce translokačního určíme posunutí $\eta_{e,I} = \overline{\mathfrak{o}'\,\mathfrak{e}'}$, $\eta_{f,I} = \overline{\mathfrak{o}''\,\mathfrak{f}''}$, $\eta_{g,I} = \overline{\mathfrak{o}'''\,\mathfrak{g}'''}$ bodů e, f, g ve směrech břemen P_e, P_f, P_g jakožto průměty úplných přemístění $\overline{\mathfrak{o}\,\mathfrak{e}}$, $\overline{\mathfrak{o}\,\mathfrak{f}}$, $\overline{\mathfrak{o}\,\mathfrak{g}}$ do směrů břemen. Dále jest $\eta_{I,I} = \overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}$ změna vzdálenosti bodů a, b, a tedy podle vzorce (18)

$$S' = \frac{P_e \eta_{e,I} + P_f \eta_{f,I} + P_g \eta_{g,I}}{\eta_{I,I} + \beta'},$$

kde $\beta' = \frac{s'}{E' U'}$. Posunutí η měřili bychom v měřidle obrazce translokačního. Je-li síla S' určena, lze řešiti osové síly ostatních prutů na př. obrazcem silovým podle methody bodů styčných; začalo by se v bodě a nebo b.

*δ) **Zatížení pohyblivé*** řeší se nejlépe příčinkovými čarami osových sil i reakcí podporových, jež dávají proměnu oněch sil, pohybuje-li se po nosníku jediné svislé břímě $P = 1$. Pro jediné břímě P_m plyne ze vzorce (18)

$$S' = P_m \frac{\eta_{m,\,I}}{\eta_{I,\,I} + \beta'}. \qquad (18^a)$$

Znamená pak $\eta_{m,\,I}$ svislé posunutí působiště m břemene P_m v základní soustavě, zatížené silami $S' = -1$; přeneseme-li tato posunutí ve svislicích příslušných poloh břemene jakožto pořadnice, spojuje koncové body *ohybová čára* základní soustavy pro uvedené zatížení. Nehledíme-li tedy ke stálému jmenovateli, je příčinkovou čarou osové síly zbytného prutu ohybová čára základní soustavy, zatížené silami $S' = -1$. Tato čára se určí snadno graficky z translokačního obrazce základní soustavy pro zatížení $S' = -1$ anebo graficky, po případě počtem jakožto výslednicová čára k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$. Ve jmenovateli lze stanoviti $\eta_{I,\,I}$ také graficky, lze však též celého jmenovatele počítati podle vzorce (17^b).

Osové síly ostatních prutů plynou ze známé osové síly S' zbytného prutu podle vzorce (10^a)

$$S_i = \mathfrak{S}_i - \sigma_i S',$$

platného pro libovolné zatížení, tedy pro každou polohu pohyblivého břemene $P = 1$. V každé poloze břemene $P = 1$ dány jsou síly S_i, $\mathfrak{S}_i$ a S' příčinkovými pořadnicemi. Podle poslední rovnice určíme tedy z příčinkových pořadnic sil S' a $\mathfrak{S}_i$ v určitém bodě příčinkovou pořadnici síly S_i. Příčinkový obrazec síly $\mathfrak{S}_i$ jakožto osové síly ve staticky určité soustavě základní stanoví se podle způsobů vyložených ve druhém dílu tohoto spisu. Tím je tedy dáno řešení příčinkových čar osových sil všech prutů.

Zrovna tak se stanoví podle vzorce (11) příčinkové čáry reakcí podporových, jsou-li staticky neurčité.

*ε) **Řešení přibližné.*** Přesné řešení staticky neurčitých soustav prutových žádá, aby byly známy průřezy všech prutů, což je možné, jde-li o posouzení konstrukce hotové nebo navržené. Jde-li o návrh konstrukce nové, neznáme průřezů prutových a můžeme pak řešiti jen přibližně. Mohli bychom stanoviti nějakým přibližným způsobem průřezy prutů a s těmi řešiti soustavu.

Jinak řešíme přibližně, předpokládáme-li, že průřezy všech prutů jsou stejné;[1]) řešíme-li účinek zatížení samotného, při němž záleží jen na poměru obsahů průřezových, můžeme za obsah průřezu všech prutů bráti $U = 1$. Určíme-li za tohoto předpokladu přibližně osové síly prutů, můžeme z nich vypočísti průřezy; pak bylo by lze řešiti znovu přesně. Postačí však obyčejně vypočísti přesnou příčinkovou čáru osové síly zbytného prutu a srovnati ji s čarou přibližnou; není-li značnějšího rozdílu mezi oběma čarami, není nového řešení pro ostatní pruty třeba.

Často se řeší přibližně tak, že se nedbá prutů mezipasových, tedy se kladou jejich roztažení $\Delta s = 0$, v pasech se pak předpokládají průřezy stejné a nejčastěji v obou pasech rovné;[2]) za obsah průřezový obou pasů se tu bere $U = 1$, jde-li o řešení účinku zatížení. Tento způsob předpokládá vlastně v mezipasových prutech průřez o obsahu $U = \infty$, je tedy vzdálenější skutečnosti než způsob předešlý, při němž se bere průřezový obsah mezipasových prutů roven průřezovému obsahu pasových prutů.

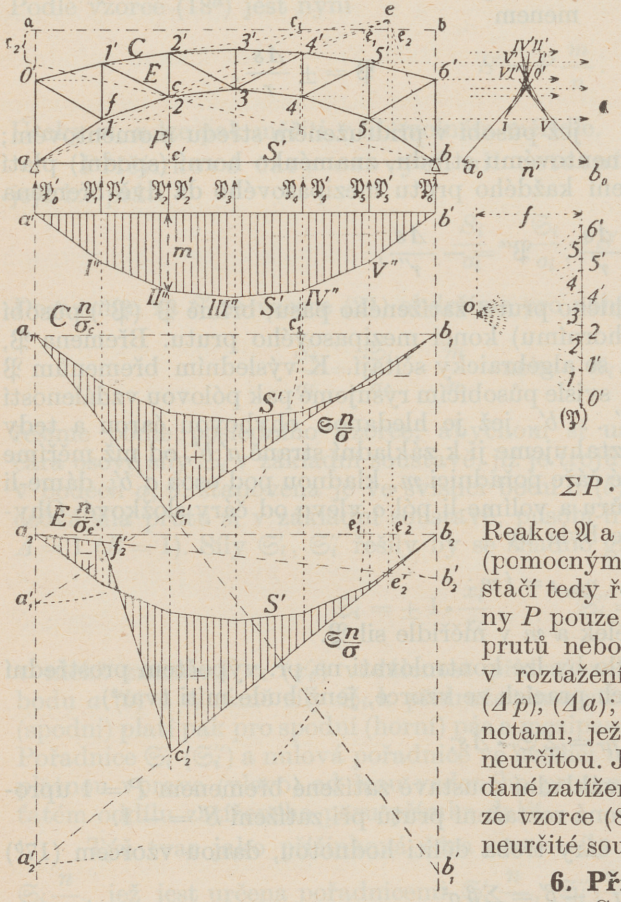
[1]) Viz *A. F. Zschetzsche* „Handbuch der Baustatik", I. (Düsseldorf 1912), str. 413.
[2]) Viz *H. F. B. Müller-Breslau* „Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen", 4. vyd. (Lipsko 1913), str. 71.

ζ) ***Přetvoření.*** Tvar soustavy staticky neurčité jest úplně dán nutnými pruty a nutnými výminkami podporovými, jež dávají dohromady soustavu základní. Pak také přetvoření soustavy staticky neurčité je dáno přetvořením prutů nutných, tedy přetvořením soustavy základní. Řešíme-li přetvoření soustavy staticky neurčité, můžeme se proto omeziti na soustavu základní, jež může býti jakákoli, obecně i jiná než soustava základní užitá při řešení osových sil a podporových reakcí; neboť přetvoření dané soustavy staticky neurčité bude vždy totožné s přetvořením jakékoli soustavy základní, obsahující nutné pruty a výminky podporové. Ovšem třeba v prutech nutných počítati roztažení z osových sil, jež skutečně vzniknou v dané soustavě neurčité; v tom se pak jeví účinek zbytných prutů nebo zbytných výminek podporových.

Počtem se řeší přetvoření prutové soustavy z věty o virtuálných pracích, jež platí obecně pro jakoukoli soustavu prutovou, ať staticky určitou nebo neurčitou.[1]) Dbáme-li též popuštění opěr (Δa), jež měříme kladně proti kladným opěrovým reakcím A, má rovnice virtuálných prací tvar

$$\Sigma P \cdot (\Delta p) - \Sigma A \cdot (\Delta a) = \Sigma S \cdot (\Delta s);$$

zde jsou P libovolné síly vnější, jež vyvodí opěrové reakce A a osové síly S.



Obr. 10.

V soustavě jednoduše neurčité dosaďme za reakce ze vzorce (11) hodnotu $A = \mathfrak{A} - \alpha S'$ a za osové síly ze vzorce (10^b) hodnotu $S = \mathfrak{S} - \sigma S'$; pak vyjde

$$\Sigma P \cdot (\Delta p) - \Sigma \mathfrak{A} \cdot (\Delta a) = \\ = \Sigma \mathfrak{S} \cdot (\Delta s) - S' [\Sigma \sigma \cdot (\Delta s) + \\ + \Sigma \alpha \cdot (\Delta a)].$$

Podle přetvárné výminky (7^c) je pro libovolné možné přetvoření

$$\Sigma \sigma \cdot (\Delta s) + \Sigma \alpha \cdot (\Delta a) = 0,$$

obdržíme tedy pro soustavu staticky neurčitou rovnici virtuálných prací ve tvaru

$$\Sigma P \cdot (\Delta p) - \Sigma \mathfrak{A} \cdot (\Delta a) = \Sigma \mathfrak{S} \cdot (\Delta s). \quad (19)$$

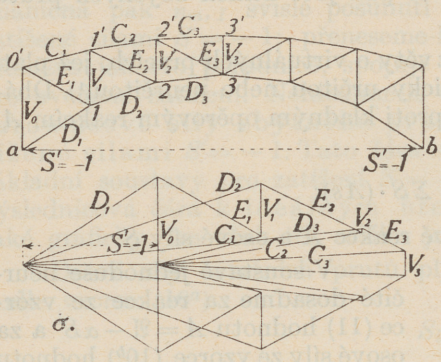
Reakce $\mathfrak{A}$ a osové síly $\mathfrak{S}$ jsou vyvozeny volenými (pomocnými) břemeny P v základní soustavě; stačí tedy řešiti pro zatížení pomocnými břemeny P pouze základní soustavu. Účinek zbytných prutů nebo výminek podporových obsažen je v roztaženích (Δs) a příslušných posunutích (Δp), (Δa); tyto veličiny dosazujeme proto hodnotami, jež platí pro danou soustavu staticky neurčitou. Jde-li na př. o přetvoření, jež vyvodí dané zatížení a změna teploty, dosadíme za (Δs) ze vzorce (8^b), znamená-li S osovou sílu v dané neurčité soustavě, pro niž platí vzorec (10^b).

6. Příklady. *α)* ***Soustava se zbytným prutem.*** Soustava jednoduše neurčitá vznikne

[1]) Viz druhý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1946), str. 261.

na př., přidáme-li k trojúhelníkové soustavě, podepřené v bodě a pevně, v bodě b posouvatelně po vodorovné, prut $s' = \overline{ab}$, jenž je pak prutem zbytným (obr. 10). Základní soustava je bez prutu zbytného, tvoří tedy prostý nosník příhradový. Má-li daný nosník tvar oblouku, nazývá se též *příhradovým obloukem s táhlem*, jímž je zbytný prut s'. Pro osovou sílu zbytného prutu S' platí všechny vzorce (15) a (18), dříve odvozené.

Příčinkovou čarou síly S' jest ohybová čára základní soustavy, zatížené silami $S' = -1$, které nahrazují vyňatý prut zbytný (obr. 11). Toto zatížení vyvodí v prutech základní soustavy osové síly σ, jež určíme na př. graficky methodou bodů styčných, vycházejíce od bodu a. Z osových sil σ vypočteme roztažení prutů $\Delta s = \frac{\sigma s}{EU}$; k přesnému řešení je třeba znáti průřezy prutů. Ohybovou čáru zatíženého pasu stanovili bychom pak na př. graficky z obrazce translokačního nebo jakožto výslednicovou čáru k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$,[1]) jimiž nahradíme roztažení jednotlivých prutů (obr. 10). Roztažení každého prutu pasového nahradíme tu ideálným břemenem



Obr. 11.

$$\mathfrak{P} = \pm \frac{\Delta s}{r},$$

jež působí v přidruženém středu momentovém; r je rámě prutu k přidruženému momentovému středu, znaménko horní (spodní) platí pak pro spodní (horní) pás. Roztažení každého prutu mezipasového dá dvě břemena

$$\mathfrak{P}' = \frac{\Delta s}{r'}, \quad \mathfrak{P}'' = -\frac{\Delta s}{r''},$$

jež působí ve styčných bodech přilehlého prutu zatíženého pasu; břímě $\mathfrak{P}'$ ($\mathfrak{P}''$) působí v bodě, jenž odpovídá spodnímu (hornímu) konci mezipasového prutu. Břemena $\mathfrak{P}$, připadající do téhož styčného bodu, se algebraicky sčítají. K výsledním břemenům $\mathfrak{P}$ ve styčných bodech $0', 1, 1', 2, 2', \ldots$ svisle působícím rýsujeme pak pólovou vzdáleností f výslednicovou čáru $a'\ I''\ II''\ III'' \ldots b'$, jež je hledanou ohybovou čarou a tedy i příčinkovou čarou osové síly S'. Vztahujeme ji k základní straně $a'b'$, od níž měříme v paprsku břemene P k výslednicové čáře pořadnici m, kladnou pod osou $a'b'$, dáme-li kladným břemenům $\mathfrak{P}$ působiti vzhůru a volíme-li pól o vlevo od čáry složkové. Ohybová pořadnice v působišti břemene byla by

$$\eta_{m,I} = f\,m\,;$$

f měřili bychom na př. v měřidle délek a m v měřidle sil $\mathfrak{P}$.

Stanovenou ohybovou čáru bylo by lze kontrolovati na př. výpočtem prostřední pořadnice η_r podle věty o virtuálných pracích ze vzorce, jenž bude míti tvar[2])

$$\eta_r = \Sigma\, \mathfrak{S}_r \cdot \Delta s;$$

$\mathfrak{S}_r$ znamená tu osovou sílu prutu v základní soustavě zatížené břemenem $P = 1$ uprostřed působícím, Δs jsou pak stanovená roztažení prutů při zatížení $S' = -1$.

Pořadnice stanovené ohybové čáry třeba děliti hodnotou, danou vzorcem (17[b])

$$\eta_{I,I} + \beta' = \Sigma\, \beta\, \sigma^2,$$

[1]) Viz druhý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1946), str. 273 a d.
[2]) Srovnej druhý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1946), str. 231.

kde

$$\beta' = \frac{s'}{E'U'};$$

stanovíme-li $\eta_{I,I}$ přímo, je ve vzorci (17^b) kontrola řešení. Určíme pak $\eta_{I,I}$ jakožto změnu vzdálenosti s' bodů a, b, jež spojoval vyňatý zbytný prut, a to zase, působí-li na základní soustavu síly $S' = -1$. Určíme-li břemena $\mathfrak{P}$, jak bylo uvedeno, nezávisí na směru, v němž ohyb hledáme, a lze pak také výslednicovou čarou k vodorovným břemenům $\mathfrak{P}$ určiti posunutí styčných bodů ve vodorovném směru, tedy i $\eta_{I,I}$ jakožto posunutí bodu b ve směru ab, je-li bod a pevný. Sestrojíme proto k vodorovným břemenům $\mathfrak{P}$ pólovou vzdáleností f výslednicovou čáru $a_0 0' I I' II II' \ldots b_0$; břemena v horních a spodních styčných bodech, jež se při svislém zaměření břemen $\mathfrak{P}$ v téže svislici sčítala, musíme při vodorovném zaměření bráti ovšem zvláště. Poslední čára výslednicová stanoví na prodloužené ose ab prutu s' úsek $\overline{a_0 b_0} = n'$, jímž jest určena změna $\eta_{I,I} = f n'$; dosadíme f na př. v měřidle délek a n' v měřidle sil $\mathfrak{P}$. Pak vypočteme úsek

$$n = n' + \frac{\beta'}{f}; \tag{20}$$

měříme-li f v měřidle délek, musíme n' měřiti a $\frac{\beta'}{f}$ přenésti v měřidle sil $\mathfrak{P}$ a naopak. Podle vzorce (18^a) jest nyní

$$S' = P\frac{m}{n}. \tag{21}$$

Úseky m, n lze pak měřiti v libovolném měřidle.

Příčinkové čáry osových sil ostatních prutů plynou ze vzorce (10^a), jejž lze psáti

$$\frac{S_i}{\sigma_i} = \frac{\mathfrak{S}_i}{\sigma_i} - S'.$$

Dosazením za S' ze vzorce (21) obdržíme pro pohyblivé břímě $P = 1$

$$\frac{S_i}{\sigma_i} = \frac{\mathfrak{S}_i}{\sigma_i} - \frac{m}{n} \quad \text{nebo} \quad S_i\frac{n}{\sigma_i} = \mathfrak{S}_i\frac{n}{\sigma_i} - m; \tag{22}$$

řešíme podle posledního vzorce, abychom si uspořili redukci čáry S'. Příčinková čára osové síly $\mathfrak{S}_i$ v základní soustavě, jíž je trojúhelníková soustava podepřená prostě v bodech a, b, stanovena je ve svislici bodu a (b) pořadnicí $\mathfrak{S}'_i$ ($\mathfrak{S}''_i$), jež se určí jako osová síla prutu s_i v základní soustavě, působí-li po levé (pravé) straně pouze reakce $A = 1$ ($B = 1$). Síly $\mathfrak{S}'_i$, $\mathfrak{S}''_i$ řešily by se snadno graficky; počtem plynou z rovnic[1])

$$\mathfrak{S}'_i = \pm 1 \cdot \frac{x_i}{r_i}, \qquad \mathfrak{S}''_i = \pm 1 \cdot \frac{x'_i}{r_i},$$

v nichž znamená x_i (x'_i) vzdálenost přidruženého středu momentového od svislice bodu a (b) a r_i rámě síly $\mathfrak{S}_i$ k přidruženému středu momentovému, znaménko horní (spodní) platí pak pro spodní (horní) pás a mezipasový prut vpravo sestupný (výstupný). Pořadnice $\mathfrak{S}'_i$ ($\mathfrak{S}''_i$) a nulová pořadnice ve svislici bodu b (a) stanoví příčinkovou přímku platnou vpravo (vlevo) od řezu vedeného prutem; mezi obě přímky vkládá se v protatém oddílu zatíženého pasu přímka další.

Týž tvar jako příčinková čára osové síly $\mathfrak{S}_i$ má také příčinková čára výrazu $\mathfrak{S}_i\frac{n}{\sigma_i}$, jež jest určena pořadnicemi $\mathfrak{S}'_i\frac{n}{\sigma_i}$, $\mathfrak{S}''_i\frac{n}{\sigma_i}$ ve svislicích podporových; tyto po-

[1]) Viz druhý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1946), str. 193.

řadnice by se určily snadno graficky, kdybychom řešili $\mathfrak{S}'_i, \mathfrak{S}''_i, \sigma_i$ graficky. Počtem lze vyjádřiti

$$\sigma_i = \pm 1 \cdot \frac{y_i}{r_i},$$

je-li y_i pořadnice přidruženého středu momentového nad osou prutu $a\,b$; v posledním vzorci platí totéž znaménko jako ve vzorci pro $\mathfrak{S}'_i$ ($\mathfrak{S}''_i$), pokládáme-li x_i (x'_i) za kladné, je-li přidružený střed momentový vpravo (vlevo) od svislice bodu a (b), a y_i za kladné, je-li přidružený střed momentový nad osou $a\,b$. Pak jest

$$\mathfrak{S}'_i \frac{n}{\sigma_i} = n \frac{x_i}{y_i}, \qquad \mathfrak{S}''_i \frac{n}{\sigma_i} = n \frac{x'_i}{y_i}, \tag{23}$$

což se snadno sestrojí: Přeneseme $\overline{a\,\mathfrak{a}} = \overline{b\,\mathfrak{b}} = n$ a protneme přímku $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ se spojnicí bodu a (b) s přidruženým středem momentovým; vzdálenost průsečíku od svislice levé (pravé) podpory je pak $n \frac{x_i}{y_i} \left(n \frac{x'_i}{y_i} \right)$. Výsledek je kladný, padne-li zmíněný průsečík vpravo (vlevo) od svislice podpory a (b). Tím je stanoven příčinkový obrazec výrazu $\mathfrak{S}_i \frac{n}{\sigma_i}$; od něho odčítáme příčinkový obrazec síly S', jenž má pořadnice m. Sestrojíme-li příčinkovou čáru S' při téže ose jako čáru $\mathfrak{S}_i \frac{n}{\sigma_i}$, a to ve smyslu kladných pořadnic $\mathfrak{S}_i \frac{n}{\sigma_i}$, je mezi oběma čarami příčinkový obrazec výrazu $S_i \frac{n}{\sigma_i}$, jehož kladné pořadnice mají smysl kladných pořadnic $\mathfrak{S}_i \frac{n}{\sigma_i}$. Hodnoty odvozené z obrazce $S_i \frac{n}{\sigma_i}$ je třeba ovšem násobiti poměrem $\frac{\sigma_i}{n}$, čímž se určí příslušné hodnoty síly S_i.

Podle toho sestrojíme příčinkový obrazec $C \cdot \frac{n}{\sigma_c}$ (obr. 10), protneme-li spojnici bodu a a přidruženého středu momentového c s přímkou $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ v bodě $\mathfrak{c}_1$; tím jsme sestrojili $n \frac{x}{y} = \overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}_1}$, kdež $x = \overline{a\,c'}$, $y = \overline{c'\,c}$. Přeneseme pak $\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}_1} = \overline{a_1\,\mathfrak{c}'_1} = \overline{a_1\,a'_1}$ a obdržíme v přímce $a'_1 b_1$ příčinkovou čáru $\mathfrak{S} \frac{n}{\sigma}$ vpravo od řezu vedeného prutem C, tedy vpravo od svislice bodu c. Podobně dá spojnice $b\,c$ na přímce $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ bod $\mathfrak{c}_2$, jenž má úsečku $\overline{\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{b}} = n \frac{x'}{y}$, je-li $x' = \overline{c'\,b}$; přeneseme-li $\overline{\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{b}} = \overline{b_1\,b'_1}$, určuje bod b'_1 přímku $a_1 b'_1$, jež je příčinkovou čarou vlevo od řezu. Přímky $a_1 b'_1$, $a'_1 b_1$ sekou se v bodě c'_1 na svislici přidruženého středu momentového, což je kontrolou. Pro horní pás C bylo by $\mathfrak{S}$ i σ záporné, příčinkový obrazec $\mathfrak{S} \frac{n}{\sigma}$ je tedy kladný. Ve smyslu kladné pořadnice $\overline{a_1\,a'_1}$ přenášíme od osy $a_1 b_1$ příčinkové pořadnice m síly S'; mezi příčinkovou čarou S' a lomenou čarou $a_1 c'_1 b_1$ je pak příčinkový obrazec $C \frac{n}{\sigma_c}$; kladné jeho pořadnice jsou zde od čáry S' ve smyslu $a_1 a'_1$. Správné znaménko síly C plyne, násobí-li se na konec hodnoty odvozené z obrazce $C \frac{n}{\sigma_c}$ poměrem $\frac{\sigma_c}{n}$.

Stejně sestrojíme příčinkový obrazec $E \frac{n}{\sigma_e}$: Přidružený střed momentový e spojíme s bodem a a spojnici protneme s přímkou $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$, čímž dostaneme bod $\mathfrak{e}_1$; úsek $\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{e}_1} = \overline{a_2\,\mathfrak{e}'_1} = \overline{a_2\,a'_2}$ stanoví přímku $a'_2 b_2$, jež je příčinkovou čarou $\mathfrak{S} \frac{n}{\sigma}$ vpravo od řezu vedeného prutem E, tedy vpravo od bodu c'_2. Spojnice $b\,e$ určí na přímce $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ obdobně

bod e_2 a úsek $\overline{e_2 b} = \overline{e'_2 b_2} = \overline{b_2 b'_2}$ dá přímku $a_2 b'_2$, platnou v části $a_2 f'_2$ vlevo od řezu vedeného prutem E. Přímky $a'_2 b_2$, $a_2 b'_2$ sekou se v bodě e'_2 na svislici bodu e, což je kontrolou, a mezi nimi v oddílu $f c$ proťatého zatíženého pasu platí přímka $f'_2 c'_2$. Od osy $a_2 b_2$ přenášíme pak v kladném smyslu $a_2 a'_2$ příčinkové pořadnice m osové síly S' a obdržíme mezi čarou S' a lomenou čarou $a_2 f'_2 c'_2 b_2$ příčinkový obrazec $E \cdot \frac{n}{\sigma_c}$; kladné pořadnice mají od čáry S' týž smysl jako pořadnice $a_2 a'_2$.

Příklad 2. Na příhradový nosník trojúhelníkové soustavy se zbytným prutem s' spojujícím body m, n působí stálé zatížení rovnoměrné $q_0 = 3{,}2$ t/m a pohyblivé zatížení rovnoměrné $q' = 2{,}3$ t/m; stanoviti jest krajní hodnoty osových sil prutů S', C_4, D_4, E_4, dále účinek nestejné změny teploty, a to $\delta' = 0$ pro prut s a $\delta = \pm 15^0$ C pro ostatní pruty, a největší průhyb středu nosníku příčinkovou čarou. Nosník měj rozpětí $l = \overline{a b} = 50{,}4$ m, dělené na dvanáct stejných oddílů délky $a = 4{,}2$ m; krajní výška budiž $v_0 = \overline{a a'} = 6{,}2$ m, prostřední svislice $v_6 = \overline{6\,6'} = 2{,}36$ m a prostřední výška spodního pasu nad spojnicí ab jest $y_6 = 10{,}24$ m (obr. 12, tab. 1).

a) Tvar nosníku určíme na př. tak, že stanovíme osy pasů jakožto výslednicové čáry k břemenům ve styčných bodech působícím.[1]) Kdyby byla břemena stejná, byly by oba pasy vepsány do parabol; pro úhlednost zvolíme ve styčných bodech na př. břemena, jejichž velikost se od podpor ke středu nosníku zmenšuje, čímž obdržíme u podpor zakřivení větší, uprostřed menší. Počítajíce pořadnice výslednicové čáry k břemenům P uvedeným v číselné tabulce I. stanovíme nejprve síly posouvající. Jelikož jde o zatížení ke středu nosníku souměrné, vyvodila by břemena P reakci

$$A = \frac{1}{2} \sum_1^{11} P = \sum_1^5 P + \frac{1}{2} P_6$$

a v oddílu *5 6* sílu posouvající

$$T_6 = A - \sum_1^5 P = \frac{1}{2} P_6.$$

Pak jest

$$T_5 = T_6 + P_5, \quad T_4 = T_5 + P_4, \quad T_3 = T_4 + P_3, \ldots .$$

Pro momenty platí obecně

$$M_m = M_{m-1} + T_m a \quad \text{nebo} \quad \frac{M_m}{a} = \frac{M_{m-1}}{a} + T_m.$$

V podpoře je $M_0 = 0$, tedy podle posledního vzorce

$$\frac{M_1}{a} = T_1, \quad \frac{M_2}{a} = \frac{M_1}{a} + T_2, \quad \frac{M_3}{a} = \frac{M_2}{a} + T_3, \ldots .$$

Délka oddílu a je stálá; momenty M mají tedy týž poměr jako podíly M/a. Pořadnice y_m styčných bodů spodního pasu nad spojnicí $a\,b$ a pořadnice y'_m styčných bodů horního pasu nad spojnicí $a'\,b'$ budou násobky poměrů M/a. Násobitele určuje poměr dané prostřední pořadnice pasu a hodnoty $M_6/a = 128$. Pro spodní pás je dáno $y_6 = 1024$ cm, vyjde tedy násobitel $y_6 : \frac{M_6}{a} = 8$. Výška prostředního bodu horního pasu nad spojnicí $a'\,b'$ jest $y'_6 = y_6 + v_6 - v_0 = 640$ cm, tedy násobitel $y'_6 : \frac{M_6}{a} = 5$. Pořadnice pasů nad jejich tětivami $a\,b$, $a'\,b'$ určíme tedy v cm ze vzorců

$$y_m = 8 \frac{M_m}{a}, \quad y'_m = 5 \frac{M_m}{a}. \tag{a}$$

Libovolná svislice má pak délku

$$v_m = v_0 + y'_m - y_m. \tag{b}$$

Délky c, d, e prutů horního pasu, spodního pasu a příček určíme ze vzorců

$$\left.\begin{aligned} c_m &= \sqrt{a^2 + (y'_m - y'_{m-1})^2}, \quad d_m = \sqrt{a^2 + (y_m - y_{m-1})^2}, \\ e_m &= \sqrt{a^2 + (y_{m-1} + v_{m-1} - y_m)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

[1]) Srovnej *H. F. B. Müller-Breslau* „Die graphische Statik der Baukonstruktionen", I. Bd., 3. vyd. (Lipsko 1901), str. 427 a d.

Výsledky výpočtu podle předešlých vzorců jsou v tab. I., kde jsou délky v cm jako v celém dalším výpočtu.

Tabulka I.

Bod m	P_m	T_m	$\frac{M_m}{a}$	y_m	y'_m	v_m	c_m	d_m	e_m
1	10	43	43	344	215	491	471,8	542,3	502,6
2	9	33	76	608	380	392	451,2	496,1	477,4
3	8	24	100	800	500	320	436,8	461,8	465,2
4	7	16	116	928	580	272	427,6	439,1	461,8
5	6	9	125	1000	625	245	422,4	426,1	465,2
6	6	3	128	1024	640	236	420,3	420,7	473,7

b) Přibližné řešení příčinkové čáry S' provedeme za předpokladu, že průřezy všech prutů jsou rovny. Určíme nejprve osové síly σ, jež vyvodí v prutech základní soustavy (bez zbytného prutu) zatížení $S' = -1$. Počtem řešili bychom podle vzorců platných pro soustavu trojúhelníkovou se zatížením libovolného směru[1])

$$C_m \cos \gamma_m = -\frac{M_m}{v_m}, \quad D_m \cos \delta_m = \frac{M'_{m-1}}{v_{m-1}}, \quad E_m \cos \varepsilon_m = \frac{M_m}{v_m} - \frac{M_{m-1}}{v_{m-1}},$$

$$V_m = \frac{1}{a}\left(\frac{M_m}{v_m} v'_{m+1} - M_{m+1}\right),$$

v nichž znamená M_m, M'_m moment vnějších sil po levé straně řezu k bodu m, m' a v'_{m+1} úsek, který na svislici bodu $(m+1)$ utínají prodloužená osa pasu C_m a osa pasu D_{m+1}; zde vyjde, jelikož jsou oddíly stejné,

$$v'_{m+1} = y_m + v_m + y'_m - y'_{m-1} - y_{m+1}.$$

Pro osovou sílu v prostřední svislici platí

$$V_6 = \frac{M_6}{v_6}(\operatorname{tg} \gamma_6 - \operatorname{tg} \gamma_7);$$

úhly γ měříme od vodorovnice k ose horního pasu a pokládáme je za kladné, jsou-li vytvořeny točením proti ručičkám hodinovým. Zatížení $S' = -1$ vyvodí pak k bodu m moment $M_m = 1 \cdot z_m$, je-li z_m svislá pořadnice bodu m nad osou prutu s'. Síly σ řešiti lze ovšem též graficky (obr. 12). Hodnoty jejich jsou uvedeny v číselné tabulce II.

Ze sil σ měli bychom vypočísti roztažení

$$\Delta s = \frac{\sigma s}{E U}.$$

Poněvadž však neznáme předem průřezů prutových, předpokládáme přibližně ve všech prutech týž průřez o obsahu $U = 1$; vynecháme též stálého činitele E ve jmenovateli, určíme tedy vlastně

$$E U \cdot \Delta s = \sigma s \qquad (d)$$

a tyto hodnoty budeme dále dosazovati místo Δs. Stanovíme pak ohybovou čáru zatíženého pasu, jímž budiž pás spodní. Mohli bychom ji vyšetřiti graficky z obrazce translokačního. Počtem stanovíme ji jakožto výslednicovou čáru k ideálným břemenům

$$\mathfrak{P}' = \frac{\Delta s}{r'}, \quad \mathfrak{P}'' = -\frac{\Delta s}{r''}. \qquad (e)$$

Pro horní pasy platí břemena $\mathfrak{P}''$, pro spodní pasy břemena $\mathfrak{P}'$; roztažení každého prutu mezipasového nahrazujeme oběma břemeny $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, a to ve styčných bodech toho pasu, jehož ohyb hledáme. Pro horní pasy určíme délku ramen ze vzorce

$$r''_m = v_m \cos \gamma_m = v_m \frac{a_m}{c_m};$$

u spodních pasů platí

$$r'_m = v_{m-1} \cos \delta_m = v_{m-1} \frac{a_m}{d_m}.$$

[1]) Viz prvý díl tohoto spisu (4. vyd. 1946), str. 199.

Pro příčku E_m máme

$$r'_m = v_m \cos \varepsilon_m = v_m \frac{a_m}{e_m}, \quad r''_m = v_{m-1} \cos \varepsilon_m = v_{m-1} \frac{a_m}{e_m}$$

a pro svislici V_m jest

$$r'_m = a_{m+1} \frac{v_m}{v'_{m+1}}, \quad r''_m = a_{m+1}.$$

Podle toho byla určena ramena uvedená v tab. II.; bylo by lze je též odměřiti z mnohostranu osového narýsovaného co nejpřesněji ve velkém měřidle. Pak vypočteme břemena $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ pro všechny pruty podle hořejších vzorců, dosazujíce σs místo Δs; jen pro svislici V_6 platí vzorec

$$\mathfrak{P} = \frac{\Delta v_6}{v_6} (\operatorname{tg} \gamma_6 - \operatorname{tg} \gamma_7), \qquad (f)$$

kde

$$\operatorname{tg} \gamma_6 = -\operatorname{tg} \gamma_7 = \frac{y'_1 - y'_5}{a} = \frac{15}{420}.$$

Za Δv_6 dosadíme jako v ostatních prutech pouze $\sigma s = 49$ a obdržíme

$$\mathfrak{P} = \frac{49}{236} \cdot \frac{2 \cdot 15}{420} = 0{,}015.$$

Výsledky výpočtu uvedeny jsou v tabulce II., v níž jsou připojeny také ve všech prutech hodnoty $s\,\sigma^2$; bude jich dále třeba pro kontrolu.

Tabulka II.

Prut	σ	s	$s\,\sigma$	r'	r''	$\mathfrak{P}'$	$\mathfrak{P}''$	$s\,\sigma^2$
C_1	—	471,8	—	—	437	—	—	—
C_2	− 0,72	451,2	− 325	—	365	—	+ 0,890	234
C_3	− 1,48	436,8	− 646	—	308	—	+ 2,099	957
C_4	− 2,18	427,6	− 932	—	267	—	+ 3,491	2032
C_5	− 2,69	422,4	− 1136	—	244	—	+ 4,657	3057
C_6	− 2,88	420,3	− 1210	—	236	—	+ 5,129	3486
D_1	—	542,3	—	465	—	—	—	—
D_2	+ 1,18	496,1	+ 585	416	—	+ 1,407	—	691
D_3	+ 1,84	461,8	+ 850	356	—	+ 2,387	—	1563
D_4	+ 2,53	439,1	+ 1111	306	—	+ 3,630	—	2811
D_5	+ 3,19	426,1	+ 1359	268	—	+ 5,072	—	4336
D_6	+ 3,69	420,7	+ 1552	244	—	+ 6,362	—	5728
E_1	—	502,6	—	410	501	—	—	—
E_2	+ 0,764	477,4	+ 365	345	432	+ 1,057	− 0,844	279
E_3	+ 0,831	465,2	+ 387	289	354	+ 1,338	− 1,092	321
E_4	+ 0,792	461,8	+ 366	248	291	+ 1,474	− 1,257	290
E_5	+ 0,591	465,2	+ 275	221	246	+ 1,244	− 1,118	162
E_6	+ 0,228	473,7	+ 108	209	217	+ 0,517	− 0,498	25
V_0	—	620	—	—	420	—	—	—
V_1	− 0,628	491	− 308	467	420	− 0,660	+ 0,734	194
V_2	− 0,501	392	− 196	451	420	− 0,435	+ 0,468	98
V_3	− 0,333	320	− 107	431	420	− 0,247	+ 0,254	35
V_4	− 0,133	272	− 36	408	420	− 0,089	+ 0,086	5
V_5	+ 0,063	245	+ 15	390	420	+ 0,040	− 0,037	1
V_6	+ 0,206	236	+ 49	—	—	+ 0,015	—	10

Ideálná břemena, jež připadají do téhož styčného bodu, algebraicky sčítáme. Horní pás C_m dá břímě do spodního styčného bodu m, spodní pás D_m do horního bodu $(m'-1)$; příčka E_m dá břímě $\mathfrak{P}'$ do spodního bodu m, břímě $\mathfrak{P}''$ do spodního bodu $(m-1)$ a svislice V_m břímě $\mathfrak{P}'$ do bodu m, břímě $\mathfrak{P}''$ do bodu $(m+1)$, svislice V_6 pak dá břímě do bodu 6. Tak obdržíme břemena

$$\mathfrak{P}_1 = -0{,}66 - 0{,}84 = -1{,}50, \qquad \mathfrak{P}'_1 = +1{,}41;$$
$$\mathfrak{P}_2 = +0{,}89 + 1{,}06 + 0{,}73 - 1{,}09 - 0{,}44 = +1{,}15, \qquad \mathfrak{P}'_2 = +2{,}39;$$
$$\mathfrak{P}_3 = +2{,}10 + 1{,}34 + 0{,}47 - 1{,}26 - 0{,}25 = +2{,}40, \qquad \mathfrak{P}'_3 = +3{,}63;$$
$$\mathfrak{P}_4 = +3{,}49 + 1{,}48 + 0{,}25 - 1{,}12 - 0{,}09 = +4{,}01, \qquad \mathfrak{P}'_4 = +5{,}07;$$
$$\mathfrak{P}_5 = +4{,}66 + 1{,}24 + 0{,}09 + 0{,}04 - 0{,}50 = +5{,}53, \qquad \mathfrak{P}'_5 = +6{,}36;$$
$$\mathfrak{P}_6 = +2 \cdot (5{,}13 + 0{,}52 - 0{,}04) + 0{,}02 = +11{,}24.$$

Příčinková čára síly S' je výslednicovou čarou k břemenům $\mathfrak{P}$; poněvadž jde o nosník prostě podepřený na koncích, určí se příčinkové pořadnice jako momentové pořadnice prostého nosníku. Stanovíme tedy k břemenům $\mathfrak{P}$ momenty $\mathfrak{M}$ uvažujíce nosník prostý o délce $\overline{a\,b} = l$. Jako v tab. I. vyjdeme od posouvající síly

$$\mathfrak{T}_6 = \frac{1}{2}\,\mathfrak{P}_6,$$

ze které určíme dále

$$\mathfrak{T}_5 = \mathfrak{T}_6 + \mathfrak{P}_5 + \mathfrak{P}'_5, \quad \mathfrak{T}_4 = \mathfrak{T}_5 + \mathfrak{P}_4 + \mathfrak{P}'_4 \ldots.$$

Dále jest

$$\mathfrak{M}_0 = 0, \quad \frac{\mathfrak{M}_1}{a} = \mathfrak{T}_1, \quad \frac{\mathfrak{M}_2}{a} = \frac{\mathfrak{M}_1}{a} + \mathfrak{T}_2, \ldots.$$

Z podílů $\frac{\mathfrak{M}}{a}$ určíme pak příčinkové pořadnice

$$m = \frac{a}{10\,000} \cdot \frac{\mathfrak{M}}{a}, \tag{g}$$

dosazujíce $a = 420$ cm; dělíme 10 000, abychom dostali menší čísla.

Dále vypočteme $\eta_{I,\,I}$, což je změna vzdálenosti bodů m, n základní soustavy při zatížení silami $S' = -1$. Tuto změnu určili bychom (viz obr. 10) také výslednicovou čarou k břemenům $\mathfrak{P}$, působícím v příslušných bodech styčných vodorovně; znamená tedy $\eta_{I,\,I}$ součet momentů vodorovných břemen $\mathfrak{P}$ k ose $m\,n$, totiž

$$\eta_{I,\,I} = \sum_1^{11} \mathfrak{P}\,z = 2 \cdot \sum_1^{5} \mathfrak{P}\,z + \mathfrak{P}_6\,z_6, \tag{h}$$

znamená-li z svislou pořadnici styčného bodu nad osou zbytného prutu $m\,n$. Pro kontrolu máme vzorec (17^b)

$$\eta_{I,\,I} + \beta' = \Sigma\,\beta\sigma^2 = \Sigma\,\frac{s\,\sigma^2}{E\,U}, \tag{i}$$

kde $\beta' = \frac{s'}{E'\,U'}$ platí pro zbytný prut. Poněvadž jsme vynechali, počítajíce břemena $\mathfrak{P}$, ve jmenovateli $E\,U$, pokládajíce tohoto činitele za stálého, musíme místo uvedené hodnoty $\eta_{I,\,I} + \beta'$ bráti pouze $\Sigma\,s\,\sigma^2$. Jelikož jsme pořadnice m dělili 10 000, musíme týmž číslem děliti i jmenovatele ve vzorci (18^a); bude míti tedy tento jmenovatel místo $\eta_{I,\,I} + \beta'$ hodnotu

$$n = \frac{\Sigma\,s\,\sigma^2}{10\,000};$$

součet v čitateli vztahuje se zde na všechny pruty, nutné i zbytný. Podle hořejší hodnoty $\eta_{I,\,I}$ obdržíme též, vynecháme-li $E\,U$ a dělíme-li 10 000,

$$n = \frac{\sum_1^{11} \mathfrak{P}\,z + s'}{10\,000}.$$

Výpočet je proveden podle odvozených vzorců v číselné tabulce III.

Tabulka III.

Bod i	z_i	$\mathfrak{P}_i$	$\mathfrak{T}_i$	$\frac{\mathfrak{M}_i}{a}$	m	$\mathfrak{P}_i z_i$
1	0	− 1,50	+ 36,07	36,07	1,515	0
1′	491	+ 1,41	−	−	−	692
2	264	+ 1,15	+ 36,16	72,23	3,034	304
2′	656	+ 2,39	−	−	−	1 568
3	456	+ 2,40	+ 32,62	104,85	4,404	1 094
3′	776	+ 3,63	−	−	−	2 817
4	584	+ 4,01	+ 26,59	131,44	5,521	2 342
4′	856	+ 5,07	−	−	−	4 340
5	656	+ 5,53	+ 17,51	148,95	6,256	3 628
5′	901	+ 6,36	−	−	−	5 730
6	680	+11,24	+ 5,62	154,57	6,492	7 643

Z hodnot v tabulce uvedených plyne

$$\sum_1^{11} \mathfrak{P} z = 2 \cdot \sum_1^{5'} \mathfrak{P} z + \mathfrak{P}_6 z_6 = 2 \cdot 22\,515 + 7\,643 = 52\,673,$$

tedy

$$n = \frac{\sum^{11} \mathfrak{P} z + s'}{10\,000} = \frac{52\,673 + 4\,200}{10\,000} = 5{,}687\,3.$$

Pro kontrolu stanovíme z hodnot v tab. II. pro nutné pruty, jichž je v tab. II. až na prut V_5 pouze polovice obsažena,

$$\Sigma s_i \sigma_i^2 = 2 \cdot 26\,305 + 10 = 52\,620;$$

s hodnotou $s' \sigma'^2 = s' = 4\,200$ pro zbytný prut vyjde

$$\Sigma s \sigma^2 = 52\,620 + 4\,200 = 56\,820 \quad \text{a} \quad n = \frac{\Sigma s \sigma^2}{10\,000} = 5{,}6820,$$

což se liší od dřívější hodnoty pouze asi o $1‰$.

Kdybychom pro kontrolu řešili výslednicové čáry k břemenům $\mathfrak{P}$ též graficky, bylo by voliti $f = 1$, aby řešení početní a grafické souhlasilo; úseky m rovnaly by se momentovým pořadnicím v měřidle sil $\mathfrak{P}$, kdyby bylo f v měřidle délek, a naopak. Volíme-li místo f vzdálenost $f_1 = \mu f$, obdržíme pořadnice m_1, z nichž se určí správné pořadnice m podle vzorce[1])

$$m = m_1 \frac{f_1}{f} = \mu m_1;$$

přenášíme-li f_1 podle měřidla délek, třeba měřiti m_1 v měřidle sil $\mathfrak{P}$ a naopak. Totéž platí o úseku n', jejž určíme výslednicovou čarou k vodorovným břemenům $\mathfrak{P}$ (viz obr. 10); vzdáleností $f_1 = \mu f$ obdržíme úsek n_1', z něhož plyne

$$n' = n_1' \frac{f_1}{f} = \mu n_1',$$

dále pak se vypočte n podle vzorce (20).

Z příčinkové pořadnice m v poloze břemene P plyne osová síla S' podle vzorce (21)

$$S' = P \frac{m}{n};$$

úseky m, n můžeme pak měřiti v jakémkoli měřidle.

c) Příčinkové čáry osových sil C_4, D_4, E_4 stanovíme podle vzorce (22)

$$S_i \frac{n}{\sigma_i} = \mathfrak{S}_i \frac{n}{\sigma_i} - m.$$

[1]) Viz druhý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1946), str. 65.

Příčinkový obrazec $S_i \frac{n}{\sigma_i}$ je tedy dán rozdílem obrazce $\mathfrak{S}_i \frac{n}{\sigma_i}$ a S'. Příčinkový obrazec $\mathfrak{S}_i \frac{n}{\sigma_i}$ je dán ve svislici levé (pravé) podpory pořadnicí $\mathfrak{S}'_i \frac{n}{\sigma_i}$ $\left(\mathfrak{S}''_i \frac{n}{\sigma_i}\right)$, jež stanoví příčinkovou přímku platnou vpravo (vlevo) od řezu vedeného prutem; při tom znamená $\mathfrak{S}'_i$ ($\mathfrak{S}''_i$) osovou sílu příslušného prutu v základní soustavě, působí-li vlevo (vpravo) od řezu vedeného prutem pouze reakce $A = 1$ ($B = 1$). Jak bylo ukázáno u soustavy v obr. 10, jest

$$\mathfrak{S}'_i = \pm 1 \cdot \frac{x_i}{r_i}, \quad \mathfrak{S}''_i = \pm 1 \cdot \frac{x_i}{r_i},$$

jsou-li x_i, x'_i vzdálenosti přidruženého středu momentového od svislic podpor a, b a r_i rámě síly S_i k přidruženému středu. Je-li pak z_i výška přidruženého středu momentového nad osou $m\,n$ zbytného prutu, dá zatížení základní soustavy silami $S' = -1$ v prutu s_i obdobně jako u soustavy v obr. 10 sílu

$$\sigma_i = \pm 1 \cdot \frac{z_i}{r_i}.$$

Znaménka ve vzorcích pro $\mathfrak{S}'_i$, $\mathfrak{S}''_i$, σ_i souhlasí, bereme-li x_i (x'_i) za kladné vpravo (vlevo) od svislice bodu a (b) a z_i za kladné nad osou $m\,n$. Vychází tedy jako u soustavy v obr. 10

$$\mathfrak{S}'_i \frac{n}{\sigma_i} = n \frac{x_i}{z_i}, \quad \mathfrak{S}''_i \frac{n}{\sigma_i} = n \frac{x'_i}{z_i},$$

což snadno sestrojíme. Přeneseme $\overline{a'' \mathfrak{a}} = \overline{b'' \mathfrak{b}} = n$ v měřidle příčinkových pořadnic m. Spojíme-li pak bod a'' s přidruženým středem momentovým, tedy pro prut C_4 s bodem c, obdržíme na přímce $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ bod $\mathfrak{c}_4$, jenž dá úsek $\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}_4} = n \frac{x}{z} = \overline{a_2 \mathfrak{c}_4} = \overline{a_2 a'_2}$; touto pořadnicí je dána pravá přímka příčinková $c'_2 b_2$ výrazu $\mathfrak{S} \frac{n}{\sigma}$. Levá přímka příčinková $a_2 c'_2$ seče pravou přímku na svislici přidruženého středu momentového; kontrolovala by se pořadnicí $n \frac{x'}{z}$ ve svislici bodu b, jež by se určila z bodu b'' jako pořadnice $\overline{a_2 a'_2}$ z bodu a''. Rýsujeme-li pak od osy $a_2 b_2$ ve smyslu $a_2 a'_2$ příčinkovou čáru S', je mezi touto čarou a lomenou čarou $a_2 c'_2 b_2$ příčinkový obrazec výrazu $S \frac{n}{\sigma}$ pro sílu C_4.

Zrovna tak určíme příčinkové obrazce $S \frac{n}{\sigma}$ pro síly D_4, E_4. Spojnice $a'' d$ dá na $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ bod $\mathfrak{d}_4$; pak je $\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}_4} = \overline{a_2 \mathfrak{d}'_4} = \overline{a_2 a'_3}$ pořadnice přímky $d'_3 b_2$ ve svislici bodu a a mezi čarou S' a lomenou čarou $a_2 d'_3 b_2$ je příčinkový obrazec $S \frac{n}{\sigma}$ pro sílu D_4. Osy pasů C_4, D_4 sekou se v přidruženém středu e_4 pro prut E_4 a spojnice $a'' e_4$, $b'' e_4$ určují na $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ body $\mathfrak{e}_4$, $(\mathfrak{e}_4)$; pak jest $\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{e}_4} = \overline{a_2 \mathfrak{e}'_4} = \overline{a_2 a'_4}$, $\overline{(\mathfrak{e}_4)\,\mathfrak{b}} = \overline{(\mathfrak{e}'_4) b_2} = \overline{b_2 b'_4}$, a přímky $a'_4 b_2$, $a_2 b'_4$ sekou se v bodě e'_4 na svislici bodu e_4. Mezi čarou S' a lomenou čarou $a_2 d'_4 c'_4 b_2$ je příčinkový obrazec $S \frac{n}{\sigma}$ pro prut E_4. Od čáry S' směřují kladné pořadnice ve smyslu $a_2 a'_2$. Z příčinkových obrazců $S \frac{n}{\sigma}$ určíme hodnoty síly S, násobíme-li výsledky poměrem $\frac{\sigma}{n}$; tím obdržíme též správná znaménka.

Kdyby měl přidružený střed momentový nepříhodnou polohu, mohli bychom ovšem stanoviti $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$, σ graficky a určiti pak $\mathfrak{S}' \frac{n}{\sigma}$, $\mathfrak{S}'' \frac{n}{\sigma}$ grafickým násobením. Počítajíce osové síly, užívali bychom známých vzorců, platných pro soustavu trojúhelníkovou, jež nežádají pro mezipasové pruty přidružených středů momentových.

d) Z příčinkových obrazců určíme účinek rovnoměrného zatížení stálého q_0 i pohyblivého q' podle vzorců

$$S_0 = q_0 \mathfrak{U}, \quad \max S'_q = q' \mathfrak{U}_+, \quad \min S'_q = q' \mathfrak{U}_-, \tag{k}$$

je-li $\mathfrak{U}$ celková, $\mathfrak{U}_+$ kladná a $\mathfrak{U}_-$ záporná příčinková plocha síly S, jejíž pořadnice znamenejme η. Jsou-li oddíly stejné, vyjde

$$\mathfrak{U} = a \Sigma \eta, \tag{l'}$$

je-li $\Sigma \eta$ součet příčinkových pořadnic ve styčných bodech. Přibližně můžeme též počítati

$$\mathfrak{U}_+ = a \Sigma \eta_+, \qquad \mathfrak{U}_- = a \Sigma \eta_-, \tag{l''}$$

znamená-li $\Sigma\eta_+$ ($\Sigma\eta_-$) součet kladných (záporných) pořadnic příčinkových ve styčných bodech. Tím poněkud přidáváme k plochám $\mathfrak{U}_+$, $\mathfrak{U}_-$, součet

$$\mathfrak{U}_+ + \mathfrak{U}_- = \mathfrak{U}$$

je však správný. Pro stálé zatížení obdržíme tak správné síly; z pohyblivého zatížení obdržíme krajní hodnoty nepatrně větší, než skutečně vzniknou. Výhodou jest, že lze řešení provésti jednoduše počtem.

Pro prut C_4 určili bychom, kdyby šlo o početní řešení, hodnotu

$$n\frac{x}{z} = 5{,}687 \cdot \frac{1680}{584} = 16{,}36 = \overline{a_2 a_2'}.$$

koučet pořadnic η příčinkového trojúhelníka $\mathfrak{S}\frac{n}{\sigma}$ vypočteme jako obsah tohoto trojúhelníka, Slademe-li délku oddílu $a = 1$; pak jest

$$\sum_1^{11} \eta = \frac{1}{2}\, 16{,}36 \cdot \frac{8}{12} \cdot 12 = 16{,}36 \cdot 4 = 65{,}44;$$

dosadili jsme tu

$$\overline{c_2 c_2'} = \overline{a_2 a_2'} \cdot \frac{\overline{c_2 b_2}}{\overline{a_2 b_2}} = \overline{a_2 a_2'} \cdot \frac{8}{12}.$$

Od toho odečteme součet pořadnic čáry S'

$$\sum_1^{11} m = 2 \cdot \sum_1^{5} m + m_6 = 2 \cdot 20{,}730 + 6{,}492 = 47{,}95.$$

Rozdílem obdržíme pro obrazec $S\frac{n}{\sigma}$, znamenáme-li η pořadnice síly S, součet pořadnic

$$\frac{n}{\sigma} \cdot \Sigma\eta = 65{,}44 - 47{,}95 = 17{,}49,$$

tedy

$$\Sigma\eta = 17{,}49 \cdot \frac{\sigma}{n} = -17{,}49 \cdot \frac{2{,}18}{5{,}687} = -6{,}705.$$

Z obr. 12 poznáváme dále, že jsou příčinkové pořadnice v bodech *8* až *11* záporné. Součet pořadnic η plochy $\mathfrak{S}\frac{n}{\sigma}$ mezi body *8* až *11* vypočteme jako plochu trojúhelníka, jehož základna by obsahovala od podpory *b* počínaje pět oddílů o délce $a = 1$, vrchol by pak byl na čáře $\mathfrak{S}\frac{n}{\sigma}$ ve svislic bodu *8*, tedy

$$\sum_8^{11} \eta = \frac{1}{2}\, 16{,}36 \cdot \frac{4}{12} \cdot 5 = 13{,}63.$$

Od toho odečteme součet pořadnic m v týchž mezích, t. j.

$$\sum_8^{11} m = \sum_1^{4} m = 14{,}47$$

a obdržíme pro obrazec $S\frac{n}{\sigma}$ součet záporných pořadnic

$$\frac{n}{\sigma} \cdot \sum_8^{11} \eta = 13{,}63 - 14{,}47 = -0{,}84;$$

z toho plyne

$$\Sigma\eta_+ = \sum_8^{11} \eta = -0{,}84 \cdot \frac{\sigma}{n} = 0{,}84 \cdot \frac{2{,}18}{5{,}687} = 0{,}322.$$

Pak jest

$$\Sigma\eta_- = \Sigma\eta - \Sigma\eta_+ = -6{,}705 - 0{,}322 = -7{,}027.$$

Zatížení stálé $q_0 = 3{,}2$ t/m dá ve styčném bodě břímě $Q_0 = q_0 a = 3{,}2 \cdot 4{,}2 = 13{,}44$ t a vyvodí sílu

$$C_4 = q_0 \mathfrak{U} = q_0 a \Sigma\eta = -13{,}44 \cdot 6{,}705 = -90{,}115 \text{ t}.$$

Z pohyblivého zatížení rovnoměrného $q' = 2{,}3$ t/m vypočteme zatížení oddílu $Q' = q'a = 2{,}3 \cdot 4{,}2 = 9{,}66$ t a krajní hodnoty osové síly

$$\max C_4' = q' \mathfrak{U}_+ = q' a \Sigma \eta_+ = 9{,}66 \cdot 0{,}322 = 3{,}111 \text{ t},$$
$$\min C_4' = q' \mathfrak{U}_- = q' a \Sigma \eta_- = -9{,}66 \cdot 7{,}027 = -67{,}881 \text{ t}.$$

Obdobně řešíme také osové síly v ostatních prutech. Pro prut D_4 obdrželi bychom tak

$$\Sigma \eta = -2{,}844, \qquad \Sigma \eta_- = -5{,}306, \qquad \Sigma \eta_+ = 2{,}462,$$

což lze kontrolovati též sčítáním pořadnic obrazce $S\frac{n}{\sigma}$ v měřidle pořadnic m a násobením výsledků poměrem $\frac{\sigma}{n} = \frac{2{,}53}{5{,}687}$. Zatížení stálé vyvodí sílu

$$D_4 = q_0 a \Sigma \eta = -13{,}44 \cdot 2{,}844 = -38{,}223 \text{ t},$$

z pohyblivého zatížení určíme pak krajní hodnoty

$$\max D_4' = q' a \Sigma \eta_+ = 9{,}66 \cdot 2{,}462 = 23{,}783 \text{ t},$$
$$\min D_4' = q' a \Sigma \eta_- = -9{,}66 \cdot 5{,}306 = -51{,}256 \text{ t}.$$

Pro prut E_4 určili bychom, řeše počtem, přidružený střed momentový e_4 souřadnicemi $x = 4060$ cm, $z = 1309$ cm, jež bychom buď vypočetli nebo odměřili z výkresu; pak jest

$$n\frac{x}{z} = 5{,}687 \cdot \frac{4060}{1309} = 17{,}64 = \overline{a_2 a_4'}.$$

Součet pořadnic příčinkového obrazce $S\frac{n}{\sigma}$ ve styčných bodech vypočteme, odečteme-li od součtu pořadnic trojúhelníka $a_2 c_4' b_2$ součet pořadnic trojúhelníka $a_2 c_4' d_4'$ a součet všech pořadnic m ve styčných bodech. K tomu stanovíme pořadnice

$$\overline{c_2 c_4'} = \overline{a_2 a_4'} \cdot \frac{\overline{c_2 b_2}}{\overline{a_2 b_2}} = \overline{a_2 a_4'} \cdot \frac{8}{12}, \qquad \overline{d_4' d_4''} = \overline{a_2 a_4'} \cdot \frac{\overline{d_4 e_4''}}{\overline{a_2 e_4''}} = \overline{a_2 a_4'} \cdot \frac{2800}{4060},$$
$$\overline{d_4'' d_4''} = \frac{1}{4}\overline{a_2 a_4'}, \qquad \overline{d_4' d_4'''} = \overline{d_4' d_4''} - \overline{d_4'' d_4''} = \overline{a_2 a_4'}\left(\frac{2800}{4060} - \frac{1}{4}\right).$$

Součet pořadnic η trojúhelníka $a_2 c_4' b_2$ ve styčných bodech určíme jako jeho obsah, kladouce délku oddílu $a = 1$, což dá

$$\Sigma \eta = \frac{1}{2} 17{,}64 \cdot \frac{8}{12} \cdot 12 = 70{,}56.$$

Součet pořadnic η' v trojúhelníku $a_2 c_4' d_4'$ jest obdobně

$$\Sigma \eta' = \frac{1}{2} 17{,}64 \left(\frac{2800}{4060} - \frac{1}{4}\right) \cdot 4 = 15{,}51.$$

Určili jsme již $\sum_1^{11} m = 47{,}95$, vyjde tedy pro obrazec $S\frac{n}{\sigma}$ součet pořadnic

$$\frac{n}{\sigma} \Sigma \eta = 70{,}56 - 15{,}51 - 47{,}95 = 7{,}10,$$

což dá

$$\Sigma \eta = 7{,}10 \cdot \frac{\sigma}{n} = 7{,}10 \cdot \frac{0{,}792}{5{,}687} = 0{,}988.$$

Kladné pořadnice příčinkové jsou v bodech *4* až *9*. Součet jejich stanovíme počtem, určíme-li nejprve součet pořadnic η obrazce $\mathfrak{S}\frac{n}{\sigma}$ od bodu *4* do bodu *11* jako obsah trojúhelníka $d_4 c_4' b_2$, je-li $a = 1$, tedy

$$\sum_4^{11} \eta = \frac{1}{2} 17{,}64 \cdot \frac{8}{12} \cdot 9 = 52{,}92.$$

Stejně určíme součet pořadnic η v bodě *10* a *11* jako obsah trojúhelníka $f_4 g_4' b_2$, kladouce $a = 1$; to dá

$$\sum_{10}^{11} \eta = \frac{1}{2} 17{,}64 \cdot \frac{2}{12} \cdot 3 = 4{,}41.$$

Z tab. III. vypočteme

$$\sum_4^9 m = \sum_4^6 m + \sum_3^5 m = 18{,}27 + 16{,}18 = 34{,}45.$$

Součet pořadnic obrazce $S\frac{n}{\sigma}$ od bodu *4* do bodů *9* je pak

$$\frac{n}{\sigma}\sum_4^9 \eta = 52{,}92 - 4{,}41 - 34{,}45 = 14{,}06;$$

z toho plyne

$$\Sigma\eta_+ = \sum_4^9 \eta = 14{,}06 \cdot \frac{\sigma}{n} = 14{,}06 \cdot \frac{0{,}792}{5{,}687} = 1{,}958,$$

$$\Sigma\eta_- = \Sigma\eta - \Sigma\eta_+ = 0{,}988 - 1{,}958 = -0{,}970.$$

Zatížení stálé vyvodí sílu

$$E_4 = q_0\, a\, \Sigma\eta = 13{,}44 \cdot 0{,}988 = 13{,}279 \text{ t},$$

z pohyblivého zatížení plynou pak krajní hodnoty

$$\max E_4' = q'\, a\, \Sigma\eta_+ = 9{,}66 \cdot 1{,}958 = 18{,}914 \text{ t},$$
$$\min E_4' = q'\, a\, \Sigma\eta_- = -9{,}66 \cdot 0{,}970 = -9{,}370 \text{ t}.$$

Pro osovou sílu zbytného prutu S' mají příčinkové pořadnice, plynoucí z břemene $P = 1$, hodnoty $\eta = \frac{m}{n}$ a jsou vesměs kladné. Určili jsme již

$$\sum_1^{11} m = 47{,}95, \quad n = 5{,}687,$$

vyjde tedy

$$\Sigma\eta = \frac{\Sigma m}{n} = 8{,}431.$$

Stálým zatížením vzniká pak síla

$$S' = q_0\, a\, \Sigma\eta = 13{,}44 \cdot 8{,}431 = 113{,}313 \text{ t}$$

a zatížením pohyblivým

$$S' = q'\, a\, \Sigma\eta = 9{,}66 \cdot 8{,}431 = 81{,}443 \text{ t}.$$

e) Přesné řešení lze provésti, jsou-li známy průřezy prutů. Přibližným řešením určili bychom, jak bylo ukázáno, osové síly ve všech prutech, a z jejich celkových krajních hodnot, plynoucích ze zatížení stálého i pohyblivého, vyšetřili bychom průřezy prutů, jejichž obsahy U v cm² uvedeny jsou v číselné tabulce IV. Počítáme zde jako vůbec při přetvoření s plnými, neoslabenými obsahy průřezovými.[1]) Postačí, určíme-li dále přesně pouze příčinkovou čáru síly S' a srovnáme-li ji s přibližným řešením; není-li rozdíl značnější, není třeba opakovati řešení všech sil osových.

Příčinkovou čáru síly S' určíme opět jakožto výslednicovou čáru k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$, pro něž platí vzorce uvedené při řešení přibližném. Z tohoto řešení použijeme hodnot σ, s, r', r'' uvedených v tabulce II. a dosadíme nyní

$$\Delta s = \frac{s\,\sigma}{U},$$

vynechávajíce ve jmenovateli stálého činitele E. Stanovíme také ve všech prutech hodnoty $\frac{s\,\sigma^2}{U}$, jichž užijeme ke kontrole. Výsledky jsou v tabulce IV. Pro svislici V_6 platí vzorec (*f*), do něhož dosadíme $\frac{s\,\sigma}{U} = 1{,}225$ místo Δv_6; vyjde tak

$$\mathfrak{P} = \frac{1{,}225}{236} \cdot \frac{2 \cdot 15}{420} = 0{,}0004.$$

[1]) Viz druhý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1946), str. 79 a 252.

Tabulka IV.

Prut	U	$\frac{s\sigma}{U}$	$\mathfrak{P}'$	$\mathfrak{P}''$	$\frac{s\sigma^2}{U}$	Prut	U	$\frac{s\sigma}{U}$	$\mathfrak{P}'$	$\mathfrak{P}''$	$\frac{s\sigma^2}{U}$
C_1	200	—	—	—	—	E_1	180	—	—	—	—
C_2	140	− 2,321	—	+ 0,0064	1,671	E_2	90	+ 4,056	+ 0,0118	− 0,0094	3,089
C_3	180	− 3,589	—	+ 0,0118	5,312	E_3	60	+ 6,450	+ 0,0223	− 0,0182	5,360
C_4	225	− 4,142	—	+ 0,0155	9,030	E_4	50	+ 7,320	+ 0,0295	− 0,0251	5,797
C_5	245	− 4,637	—	+ 0,0190	12,474	E_5	60	+ 4,563	+ 0,0206	− 0,0185	2,697
C_6	255	− 4,745	—	+ 0,0201	13,666	E_6	50	+ 2,160	+ 0,0103	− 0,0100	0,492
D_1	70	—	—	—	—	V_0	280	—	—	—	—
D_2	220	+ 2,659	+ 0,0064	—	3,138	V_1	70	− 4,400	− 0,0094	+ 0,0105	2,763
D_3	195	+ 4,359	+ 0,0122	—	8,021	V_2	60	− 3,267	− 0,0072	+ 0,0078	1,637
D_4	170	+ 6,535	+ 0,0214	—	16,534	V_3	50	− 2,140	− 0,0050	+ 0,0051	0,713
D_5	140	+ 9,707	+ 0,0362	—	30,965	V_4	60	− 0,600	− 0,0015	+ 0,0014	0,080
D_6	80	+ 19,400	+ 0,0795	—	71,586	V_5	50	+ 0,300	+ 0,0008	− 0,0007	0,019
						V_6	40	+ 1,255	+ 0,0004	—	0,252

Ideálná břemena $\mathfrak{P}$, připadající do téhož bodu styčného, sčítají se algebraicky. Jako u přibližného řešení obdržíme pak celková břemena ideálná

$$\mathfrak{P}_1 = -0{,}0094 - 0{,}0094 = -0{,}0188, \quad \mathfrak{P}'_1 = +0{,}0064;$$
$$\mathfrak{P}_2 = +0{,}0064 + 0{,}0118 + 0{,}0105 - 0{,}0182 - 0{,}0072 = +0{,}0013, \quad \mathfrak{P}'_2 = +0{,}0122;$$
$$\mathfrak{P}_3 = +0{,}0118 + 0{,}0223 + 0{,}0078 - 0{,}0251 - 0{,}0050 = +0{,}0118, \quad \mathfrak{P}'_3 = +0{,}0214;$$
$$\mathfrak{P}_4 = +0{,}0155 + 0{,}0295 + 0{,}0051 - 0{,}0185 - 0{,}0015 = +0{,}0301, \quad \mathfrak{P}'_4 = +0{,}0362;$$
$$\mathfrak{P}_5 = +0{,}0190 + 0{,}0206 + 0{,}0014 + 0{,}0008 - 0{,}0100 = +0{,}0318, \quad \mathfrak{P}'_5 = +0{,}0795;$$
$$\mathfrak{P}_6 = 2 \cdot (0{,}0201 + 0{,}0103 - 0{,}0007) + 0{,}0004 = +0{,}0598.$$

Z břemen $\mathfrak{P}$ vypočteme příčinkové pořadnice m a hodnoty $\mathfrak{P}z$; postupujeme jako u přibližného řešení, vynecháme však při výpočtu m ve jmenovateli vzorce (g) činitele 10 000. Výsledky jsou v číselné tabulce V.

Tabulka V.

Bod i	z_i	$\mathfrak{P}_i$	$\mathfrak{T}_i$	$\frac{\mathfrak{M}_i}{a}$	$m_i = a\frac{\mathfrak{M}_i}{a}$	$\mathfrak{P}_i z_i$
1	0	− 0,0188	+ 0,2418	+ 0,2418	101,6	—
1′	491	+ 0,0064	—	—	—	3,142
2	264	+ 0,0013	+ 0,2542	+ 0,4960	208,3	0,343
2′	656	+ 0,0122	—	—	—	8,003
3	456	+ 0,0118	+ 0,2407	+ 0,7367	309,4	5,381
3′	776	+ 0,0214	—	—	—	16,606
4	584	+ 0,0301	+ 0,2075	+ 0,9442	396,6	17,578
4′	856	+ 0,0362	—	—	—	30,987
5	656	+ 0,0318	+ 0,1412	+ 1,0854	455,9	20,861
5′	901	+ 0,0795	—	—	—	71,630
6	680	+ 0,0598	+ 0,0299	+ 1,1153	468,4	40,664

Podle vzorců (h), (i) jest, vynecháme-li E ve jmenovateli a nahradíme-li $\eta_{II,I} + \beta'$ hodnotou n,

$$n = \sum_1^{11} \mathfrak{P} z + \frac{s'}{U'} = \Sigma \frac{s\sigma^2}{U}, \qquad (m)$$

jelikož pro zbytný prut je $\sigma' = -1$. Obsah průřezu zbytného prutu budiž $U' = 240\ \text{cm}^2$. Z tab. V. plyne

$$\sum_1^{11} \mathfrak{P}\, z = 2 \cdot \sum_1^{5'} \mathfrak{P}\, z + \mathfrak{P}_6\, z_6 = 2 \cdot 174{,}531 + 40{,}664 = 389{,}726,$$

tedy

$$n = \sum_1^{11} \mathfrak{P}\, z + \frac{s'}{U'} = 389{,}726 + \frac{4200}{240} = 407{,}226.$$

Pro kontrolu vypočteme z tab. IV., berouce všechny pruty nutné až na V_6 dvakráte,

$$\Sigma \frac{s_i\, \sigma_i^2}{U_i} = 2 \cdot 195{,}044 + 0{,}252 = 390{,}340;$$

pak by bylo

$$n = \Sigma \frac{s\, \sigma^2}{U} = \Sigma \frac{s_i\, \sigma_i^2}{U_i} + \frac{s'}{U'} = 390{,}340 + 17{,}5 = 407{,}840.$$

Rozdíl proti předešlé hodnotě jest asi $1{,}6‰$, tedy nepatrný; je následkem počítání neúplným čísly. Pro další řešení berme prvou hodnotu $n = 407{,}226$.

Srovnejme výsledky přibližného a přesného řešení v příčinkových pořadnicích $\eta = \frac{m}{n}$ jež si pro obojí řešení vypočteme. Přibližné řešení dalo $n = 5{,}687$; ve styčných bodech *1* až *6* je pa poměr

$$\eta = \frac{m}{n} = 0{,}266,\quad 0{,}533,\quad 0{,}774,\quad 0{,}971,\quad 1{,}100,\quad 1{,}141.$$

Přesným řešením vyšlo $n = 407{,}226$ a pořadnice příčinkové mají tu hodnoty

$$\eta = \frac{m}{n} = 0{,}249,\quad 0{,}512,\quad 0{,}760,\quad 0{,}974,\quad 1{,}120,\quad 1{,}150.$$

Srovnejme příčinkové plochy $\mathfrak{U} = a \Sigma \eta$; stačí tu porovnati $\Sigma \eta$ pro obojí řešení. Přibližné řešení dá

$$\sum_1^{11} \eta = 2 \cdot \sum_1^{5} \eta + \eta_6 = 2 \cdot 3{,}644 + 1{,}141 = 8{,}429,$$

přesným řešením pak vyjde

$$\sum_1^{11} \eta = 2 \cdot \sum_1^{5'} \eta + \eta_6 = 2 \cdot 3{,}615 + 1{,}150 = 8{,}380.$$

Dá tedy přesné řešení hodnotu menší o $0{,}6\%$, což je rozdíl tak malý, že tu není třeba řešiti znovu (přesněji) osové síly prutů nutných. Malý rozdíl v přibližné a přesné čáře S' ukáže se jasně, vyneseme-li obě čáry v témž měřidle; v obr. 12 vytažena je přibližná čára S' plně, přesná čerchovaně.

f) Účinek změny teploty řešíme ze vzorce (15^b). Stejná změna teploty ve všech prutech neměla by zde účinku, poněvadž nosník může měniti tvar po zákonu podobnosti. Uvažujeme tedy různé změny, předpokládajíce ve zbytném prutu s' (chráněném na př. konstrukcí mostovky) rozdíl teplot $\delta' = 0$ a ve všech nutných prutech $\delta = \pm 15^0$ C. Pak jest

$$\Sigma\, \delta\, \varepsilon\, \sigma\, s = \delta\, \varepsilon\, \Sigma\, \sigma_i\, s_i$$

a podle vzorce (16)

$$\Sigma\, \sigma_i\, s_i = s',$$

tedy

$$S_t' = \frac{\delta\, \varepsilon\, s'}{\Sigma\, \beta\, \sigma^2}.$$

Pro výpočet jmenovatele užijme podle vzorce (*m*) hodnoty z přesného řešení

$$n = \Sigma \frac{s\, \sigma^2}{U} = 407{,}226;$$

pak jest

$$\Sigma\, \beta\, \sigma^2 = \Sigma \frac{s\, \sigma^2}{E\, U} = \frac{n}{E},$$

což dá

$$S_t' = \frac{\delta\, \varepsilon\, E\, s'}{n}.$$

Dosaďme pro ocel $E = 2\,100\ \mathrm{t/cm^2}$, $s = 0{,}000012$; dále jest $s' = 4200$ cm, i vyjde

$$S'_t = \pm \frac{15 \cdot 0{,}000\,012 \cdot 2\,100 \cdot 4\,200}{407{,}226} = \pm 3{,}899\ \mathrm{t}.$$

V ostatních prutech vyvodí změna teploty osové síly dané vzorcem (10^a). Vynecháváme-li zatížení, jest $\mathfrak{S}_i = 0$ a

$$S_i = -\sigma_i S'_t .$$

K řešení účinku změny teploty třeba znáti průřezy prutů, jež lze obyčejně určiti z osových sil vyvozených samotným zatížením; tyto průřezy vyhoví pravidlem i změně teploty, jež sice zvětšuje krajní hodnoty sil osových, avšak připouští také větší dovolené namáhání. Pak ovšem lze určiti přibližným řešením osové síly z daného zatížení, z nich vyšetřiti průřezy prutů a přesně řešiti účinek změny teploty. Stanovíme-li tento účinek předem na základě zvoleného stálého (průměrného) obsahu průřezového U, musíme toto řešení kontrolovati a, je-li třeba, opraviti uvažujíce správné obsahy průřezové, jak bylo právě ukázáno.

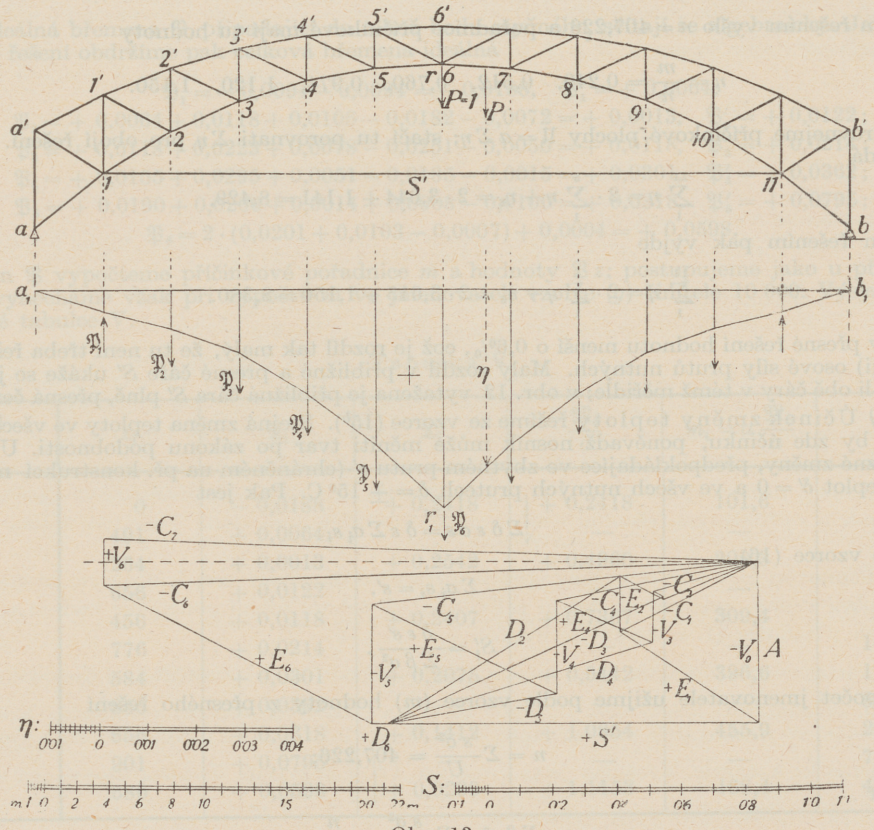
g) Přetvoření nosníku můžeme řešiti jen, známe-li průřezy prutů. Vyšetřme průhyb nosníku. Příčinková čára průhybu středu nosníku jest ohybovou čarou zatíženého pasu, působí-li na nosník břímě $P = 1$ ve středu nosníku. Za tohoto zatížení určíme skutečné síly osové ve všech prutech. Ve zbytném prutu vznikne tu podle přesného řešení síla

$$S' = P \frac{m_6}{n} = 1{,}150.$$

Kdyby nebyla příčinková čára S' přesně řešena, vypočetli bychom S' podle vzorce (15^a)

$$S' = \frac{\Sigma \beta \sigma \mathfrak{S}}{\Sigma \beta \sigma^2} ;$$

za $\mathfrak{S}$ dosadili bychom osové síly v základní soustavě zatížené břemenem $P = 1$ uprostřed nosníku.



Obr. 13.

Známe-li S', můžeme určiti ostatní osové síly buď graficky methodou bodů styčných, vycházejíce od reakce $A = \frac{1}{2} P$ (obr. 13), nebo počtem ze vzorce (10^a); síly σ byly již určeny, $\mathfrak{S}$ vyšetřili bychom pak snadno graficky nebo počtem podle vzorců pro soustavu trojúhelníkovou.

Ze sil S vypočteme roztažení

$$\Delta s = \frac{S s}{E U};$$

v dalším výpočtu je vynechán stálý činitel E ve jmenovateli, jsou tedy stanoveny hodnoty

$$E \cdot \Delta s = \frac{S s}{U}.$$

Z roztažení Δs vyšetříme dále ohybovou čáru zatíženého pasu spodního buď graficky obrazcem translokačním nebo počtem jakožto výslednicovou čáru k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$, jimiž nahradíme roztažení prutů. Postupujeme zde, jak bylo ukázáno u přibližného řešení příčinkové čáry S'; břemena $\mathfrak{P}$ určujeme podle vzorců (*e*). Hodnoty s, r', r'', U jsou uvedeny v předchozích tabulkách. Výsledky výpočtu jsou v číselné tabulce VI. Pro svislici V_6 platí vzorec (*f*), jenž zde dá, násobíme-li stálým činitelem E,

$$E\,\mathfrak{P} = \frac{E \cdot \Delta v_6}{v_6} (\operatorname{tg} \gamma_6 - \operatorname{tg} \gamma_7) = \frac{0{,}83}{236} \cdot \frac{2 \cdot 15}{420} = 0{,}0003.$$

Břemena $\mathfrak{P}$ takto určená působí svisle, jde-li o svislé posunutí středu nosníku; břemena v téže svislici mohou se pak algebraicky sečísti. Do svislice bodu a dá břímě prut D_1 a břímě $\mathfrak{P}''$ prut E_1; tato břemena nemají vlivu na čáru ohybovou, lze je tedy vynechati. Do svislice bodu i dají břemena $\mathfrak{P}$ pruty C_i, D_{i+1}, břímě $\mathfrak{P}'$ pruty E_i, V_i a břímě $\mathfrak{P}''$ pruty E_{i+1}, V_{i-1}. Do svislice středu

Tabulka VI.

Prut	S	$E \cdot \Delta s$	$E\,\mathfrak{P}'$	$E\,\mathfrak{P}''$	$ES \cdot \Delta s$	Prut	S	$E \cdot \Delta s$	$E\,\mathfrak{P}'$	$E\,\mathfrak{P}''$	$ES \cdot \Delta s$
C_1	− 0,48	− 1,13	—	+ 0,0026	+ 0,54	E_1	+ 0,51	+ 1,42	+ 0,0035	− 0,0028	+ 0,72
C_2	− 0,32	− 1,03	—	+ 0,0028	+ 0,33	E_2	− 0,14	− 0,79	− 0,0023	+ 0,0018	+ 0,11
C_3	− 0,34	− 0,83	—	+ 0,0027	+ 0,28	E_3	+ 0,04	+ 0,31	+ 0,0011	− 0,0009	+ 0,01
C_4	− 0,64	− 1,22	—	+ 0,0046	+ 0,78	E_4	+ 0,32	+ 2,96	+ 0,0119	− 0,0101	+ 0,95
C_5	− 1,20	− 2,07	—	+ 0,0085	+ 2,45	E_5	+ 0,64	+ 4,96	+ 0,0224	− 0,0202	+ 3,17
C_6	− 2,03	− 3,34	—	+ 0,0142	+ 6,78	E_6	+ 0,93	+ 8,81	+ 0,0421	− 0,0406	+ 8,19
D_1	—	—	—	—	—	V_0	− 0,50	− 1,11	—	+ 0,0026	+ 0,56
D_2	− 0,85	− 1,92	− 0,0046	—	+ 1,63	V_1	+ 0,17	+ 1,19	+ 0,0026	− 0,0029	+ 0,20
D_3	− 0,94	− 2,22	− 0,0062	—	+ 2,09	V_2	+ 0,01	+ 0,07	+ 0,0002	− 0,0002	+ 0,00
D_4	− 0,85	− 2,19	− 0,0072	—	+ 1,86	V_3	− 0,16	− 1,02	− 0,0024	+ 0,0024	+ 0,16
D_5	− 0,53	− 1,61	− 0,0060	—	+ 0,85	V_4	− 0,29	− 1,32	− 0,0032	+ 0,0031	+ 0,38
D_6	+ 0,05	+ 0,24	+ 0,0010	—	+ 0,01	V_5	− 0,38	− 1,86	− 0,0048	+ 0,0044	+ 0,71
						V_6	+ 0,14	+ 0,83	+ 0,0003	—	+ 0,12

6 dají s levé strany břímě $\mathfrak{P}$ prut C_6, břímě $\mathfrak{P}'$ prut E_6 a břímě $\mathfrak{P}''$ prut V_5; pruty souměrné na pravé straně dají táž břemena, mimo to pak dá břímě $\mathfrak{P}$ také prut V_6. Celkem obdržíme

$$\begin{aligned}
E\,\mathfrak{P}_1 &= +0{,}0026 - 0{,}0046 + 0{,}0035 + 0{,}0018 + 0{,}0026 + 0{,}0026 = +0{,}0085,\\
E\,\mathfrak{P}_2 &= +0{,}0028 - 0{,}0062 - 0{,}0023 - 0{,}0009 - 0{,}0029 + 0{,}0002 = -0{,}0093,\\
E\,\mathfrak{P}_3 &= +0{,}0027 - 0{,}0072 + 0{,}0011 - 0{,}0101 - 0{,}0002 - 0{,}0024 = -0{,}0161,\\
E\,\mathfrak{P}_4 &= +0{,}0046 - 0{,}0060 + 0{,}0119 - 0{,}0202 + 0{,}0024 - 0{,}0032 = -0{,}0105,\\
E\,\mathfrak{P}_5 &= +0{,}0085 + 0{,}0010 + 0{,}0224 - 0{,}0406 + 0{,}0031 - 0{,}0048 = -0{,}0102,\\
E\,\mathfrak{P}_6 &= +2 \cdot (0{,}0142 + 0{,}0421 + 0{,}0044) + 0{,}0003 = +0{,}1217.
\end{aligned}$$

K břemenům $E\,\mathfrak{P}$ určíme nyní nejprve posouvající síly $\mathfrak{T}$, vycházejíce od hodnoty $\mathfrak{T}_6 = \frac{1}{2} E\,\mathfrak{P}_6$, k níž přičítáme postupně břemena předchozí; pak stanovíme poměry $\frac{\mathfrak{M}}{a}$, začínajíce hodnotou $\frac{\mathfrak{M}_1}{a} = \mathfrak{T}_1$, k níž přičítáme postupně další hodnoty $\mathfrak{T}$. Momenty k břemenům $\mathfrak{P}$ daly by příčinkové pořadnice η. Poněvadž jsme brali břemena $E\,\mathfrak{P}$, vyjde

$$\eta = \frac{a}{E} \cdot \frac{\mathfrak{M}}{a};$$

dosadíme sem $a = 420$ cm a $E = 2000$ t/cm², tedy hodnotu menší, než je skutečné E pro ocel, čímž vyrovnáme poněkud, že jsme zanedbali oslabení nýtovými otvory v tažených prutech. Výpočet je v číselné tabulce VII.

Tabulka VII.

Bod i	$E\,\mathfrak{P}_i$	$\mathfrak{T}_i$	$\frac{\mathfrak{M}_i}{a}$	η_i
1	+ 0,0085	+ 0,0232	+ 0,0232	+ 0,0045
2	− 0,0093	+ 0,0147	+ 0,0379	+ 0,0080
3	− 0,0161	+ 0,0240	+ 0,0619	+ 0,0130
4	− 0,0105	+ 0,0401	+ 0,1020	+ 0,0214
5	− 0,0102	+ 0,0506	+ 0,1526	+ 0,0320
6	+ 0,1217	+ 0,0608	+ 0,2134	+ 0,0448

Vypočtená příčinková čára je vynesena v obr. 13. Bylo by lze určiti ji též graficky z translokačního obrazce jakožto ohybovou čáru zatíženého pasu. Správnost řešení zkontrolujeme, vypočteme-li snížení středu nosníku podle věty o virtuálných pracích. Můžeme se tu omeziti na základní soustavu, pro kterou obdržíme

$$\eta_6 = \Sigma\, \mathfrak{S}_i \cdot \Delta s_i;$$

zde by byly $\mathfrak{S}_i$ osové síly prutů v základní soustavě, zatížené břemenem $P = 1$ v bodě 6, Δs_i by pak byla správná roztažení v soustavě neurčité, jež jsou obsažena v tab. VI. Lze však též užíti věty o virtuálných pracích na původní soustavu neurčitou, pro kterou platí pak, je-li v bodě 6 břímě $P = 1$,

$$1 \cdot \eta_6 = \Sigma S \cdot \Delta s = \frac{1}{E}\, \Sigma E S \cdot \Delta s;$$

znaménko součtové vztahuje se zde na všechny pruty, nutné i zbytný, jsou-li S osové síly vyvozené v prutech dané neurčité soustavy břemenem $P = 1$ v bodě 6 působícím. Síly S i hodnoty $E S \cdot \Delta s$ jsou v tabulce VI. Z této tabulky plyne pro nutné pruty, berou-li se všechny pruty v tab. VI. uvedené dvakráte, až na prut V_6,

$$\Sigma E S_i \cdot \Delta s_i = 2 \cdot 32{,}72 + 0{,}12 = 65{,}56.$$

Ve zbytném prutu jest $S' = 1{,}15$, $U' = 240$ cm² i vychází

$$E S' \cdot \Delta s' = \frac{S'^2 s'}{U'} = \frac{1{,}15^2 \cdot 4200}{240} = 23{,}14.$$

Vyjde tedy celkem pro všechny pruty

$$\Sigma E S \cdot \Delta s = 65{,}56 + 23{,}14 = 88{,}70;$$

pak jest

$$\eta_6 = \frac{1}{E}\, \Sigma E S \cdot \Delta s = \frac{88{,}70}{2000} = 0{,}0444.$$

Tento výsledek souhlasí dobře s pořadnicí η_6 v tab. VII.; nepatrná odchylka zaviněna je počítáním neúplnými čísly.

Z tab. VII. vypočteme

$$\sum_1^{11} \eta = 2 \cdot \sum^{5} \eta + \eta_6 = 2 \cdot 0{,}0789 + 0{,}0448 = 0{,}2026.$$

Zatížení stálé, jež činí v oddílu $q_0\, a = 13{,}44$ t, vyvodí průhyb

$$y_6 = q_0\, \mathfrak{U} = q_0\, a\, \Sigma \eta = 13{,}44 \cdot 0{,}2026 = 2{,}72 \text{ cm}.$$

Pohyblivé zatížení celého oddílu jest $q'\, a = 9{,}66$ t; největší průhyb žádá plného zatížení nosníku a jest

$$\max y'_6 = q'\, \mathfrak{U} = q'\, a\, \Sigma \eta = 9{,}66 \cdot 0{,}2026 = 1{,}96 \text{ cm}.$$

β) ***Soustava se dvěma pevnými opěrami*** nazývá se též *příhradovým obloukem o dvou kloubech* (obr. 14). Její *opěrové klouby* a, b buďtež na vodorovnici. Svislá břemena P vyvodí v opěrách reakce šikmé, jež mají v bodě a svislou složku A, vodorovnou H_a a v bodě b svislou složku B, vodorovnou H_b. Svislé reakce se určí ze dvou výminek rovnováhy, jež se týkají svislých složek a momentů k bodu b, majíce tvar

$$A + B - \Sigma P = 0, \quad A\,l - \Sigma P\,p' = 0;$$

p' znamená vzdálenost paprsku P od bodu b. Obě výminky jsou totožné s výminkami rovnováhy pro nosník prostý délky $\overline{a\,b} = l$, na nějž by působila táž břemena. Z toho plyne, že svislé složky reakcí jsou staticky určité a stanoví se jako reakce prostého nosníku délky $\overline{a\,b}$, zatíženého týmiž břemeny jako daná soustava.

Pro vodorovné složky reakcí platí za svislého zatížení výminka rovnováhy

$$H_a - H_b = 0,$$

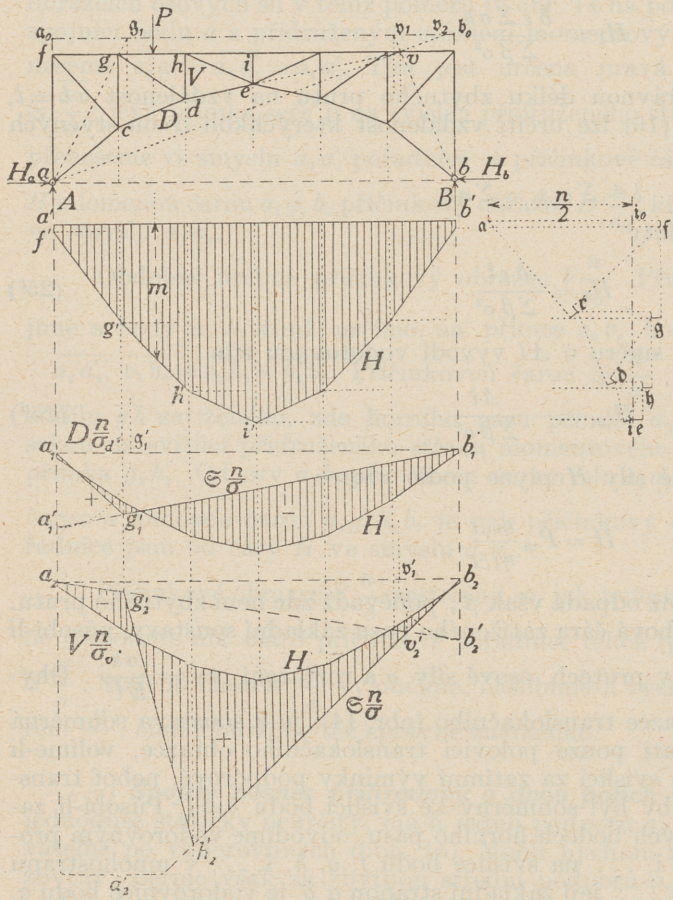
jež dá

$$H_a = H_b = H;$$

vodorovná složka obou reakcí, již můžeme nazvati *vodorovnou silou oblouku*, je rovná a protivná a je staticky neurčitá. K jejímu řešení je třeba přetvárné výminky, jež je zde dána tím, že body a, b jsou pevné, tedy že se jejich vzdálenost nemění, nepopustí-li opěry. Vynecháme-li vodorovnou sílu H, obdržíme jakožto základní soustavu prostý nosník příhradový, pro nějž určíme změnu vzdálenosti $\overline{a\,b} = l$ jakožto změnu vzdálenosti dvou bodů prutem nespojených z rovnice

$$\Delta l = \Sigma \sigma_i \cdot \Delta s_i.$$

Dosazujeme-li za Δl popuštění opěr, je poslední rovnice výminkou přetvárnou. Na pravé straně rovnice jsou všechny pruty, poněvadž tu zbytného prutu není; můžeme tedy na pravé straně rovnice vynechati přípony.



Obr. 14.

Přetvárná výminka má i zde tvar obecné výminky (7ᶜ); Δl znamená popuštění opěr a nahrazuje člen $\Sigma \alpha \cdot \Delta a$. Neboť zatížení $H = -1$, dané vodorovnými jednotkami silovými v bodě a vlevo, v b vpravo působícími, jež vyvozují v prutech osové síly σ, nevyvodí svislých reakcí; jsou tu jen vodorovné reakce $\alpha = -1$, popuštění opěr ve směru vodorovném je pak Δl, jež berme za kladné, znamená-li zvětšení délky l. Dané zatížení vyvodí v prutu s základní soustavy sílu $\mathfrak{S}$, reakce $H = -1$ sílu σ a tedy

reakce H sílu $-\sigma H$; správná osová síla v prutu s je pak

$$S = \mathfrak{S} - \sigma H, \tag{24}$$

což odpovídá úplně vzorci (10^b), nahradíme-li sílu S' reakcí H.

Pro reakci H platí všechny vzorce (15), jež jsme odvodili pro sílu S'. Vyvodí tedy dané zatížení vodorovnou sílu

$$H = \frac{\Sigma \beta \sigma \mathfrak{S}}{\Sigma \beta \sigma^2}. \tag{25^a}$$

Změna teploty dá obecně

$$H_t = \frac{\Sigma \delta \varepsilon \sigma s}{\Sigma \beta \sigma^2}; \tag{25^b}$$

pro stejnou změnu ve všech prutech a pruty z téže látky plyne z toho

$$H_t = \frac{\delta \varepsilon \Sigma \sigma s}{\Sigma \beta \sigma^2}.$$

Užijeme-li rovnice (16) pro správnou délku zbytného prutu na vzdálenost $\overline{a\,b} = l$, což je možné, neboť z rovnice (16) lze určiti vzdálenost kterýchkoli dvou styčných bodů soustavy, obdržíme

$$l = \Sigma \sigma_i s_i = \Sigma \sigma s.$$

Pak je pro stejnou změnu teploty

$$H_t = \frac{\delta \varepsilon l}{\Sigma \beta \sigma^2}. \tag{25^c}$$

Popuštění opěr ve vodorovném směru o Δl vyvodí vodorovnou sílu

$$H_{(a)} = -\frac{\Delta l}{\Sigma \beta \sigma^2}. \tag{25^d}$$

Příčinková čára vodorovné síly H plyne podle vzorce

$$H = P_m \frac{\eta_{m,I}}{\eta_{I,I}},$$

obdobného ke vzorci (18^a), v němž odpadá však β', poněvadž zde není zbytného prutu. Příčinkovou čarou H je zase ohybová čára zatíženého pasu základní soustavy, působí-li na ni síly $H = -1$, jež vyvodí v prutech osové síly σ a roztažení $\Delta s = \frac{\sigma s}{EU}$. Ohybovou čáru určíme na př. z obrazce translokačního (obr. 14); je-li soustava souměrná ke střední svislici, stačí rýsovati pouze polovici translokačního obrazce, volíme-li bod e pevný, i posouvatelný po svislici za zatímní výminky podporové, neboť translokační obrazec celého nosníku by byl souměrný ke svislici bodu $\mathfrak{e} \equiv \mathfrak{i}$. Působí-li zatížení pohyblivé na př. ve styčných bodech horního pasu, odvodíme vodorovným promítnutím nových poloh $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{i}$, ... na svislice bodů f, g, h, i, ... v mnohostranu osovém ohybovou čáru $f'\,g'\,h'\,i'\,\ldots$; její základní stranou $a'\,b'$ je vodorovnice bodu $\mathfrak{a}$. Ohybovou pořadnici středu nosníku i mohli bychom kontrolovati přímým výpočtem z věty o virtuálných pracích jako v předešlém případě. Ohybové pořadnice máme děliti úsekem $\eta_{I,I}$, jenž znamená změnu vzdálenosti bodů a, b v základní soustavě, zatížené silami $H = -1$; v obrazci translokačním jest úsek $\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{i}_0} = \frac{1}{2}\eta_{I,I}$. Kontrolou je tu vzorec (17^b), v němž odpadá zde β', platí tedy

$$\eta_{I,I} = \Sigma \beta \sigma^2.$$

Měřme úseky $\eta_{m,\,I}$, $\eta_{I,\,I}$ v libovolném měřidle a znamenejme ohybovou pořadnici m, úsek $\eta_{I,\,I}$ pak n; tu platí podle vzorce (21)

$$H = P\frac{m}{n}. \tag{26}$$

Příčinkové čáry osových sil prutů odvodíme ze vzorce (24) pro sílu S. Dosadíme-li do něho za H ze vzorce (26) a řešíme-li pro břímě $P = 1$, obdržíme

$$S = \mathfrak{S} - \sigma\frac{m}{n}, \quad \text{z čehož plyne} \quad S\frac{n}{\sigma} = \mathfrak{S}\frac{n}{\sigma} - m;$$

výsledek je totožný se vzorcem (22). Příčinkový obrazec $S\frac{n}{\sigma}$ sestrojíme pak úplně stejně jako u soustavy se zbytným prutem spojujícím body a, b (obr. 10). Přeneseme $\overline{a\,\mathfrak{a}_0} = \overline{b\,\mathfrak{b}_0} = n$; nehodí-li se tato délka, redukujeme ji a pořadnice m v příčinkových obrazcích osových sil v témž poměru (v obr. 14 na polovici). Jde-li o prut D, stanovíme spojnicí bodu a s přidruženým středem momentovým g na přímce $\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0$ bod $\mathfrak{g}_1$ a přeneseme $\overline{\mathfrak{a}_0\mathfrak{g}_1} = \overline{a_1\mathfrak{g}_1'} = \overline{a_1 a_1'}$. Tím jest určena pravá přímka příčinková $g_1' b_1$ výrazu $\mathfrak{S}\frac{n}{\sigma}$; levá přímka seče ji na svislici přidruženého středu momentového g. Od osy $a_1 b_1$ přeneseme ve smyslu $a_1 a_1'$ pořadnice m příčinkové čáry H a dostaneme pak mezi čarou H a lomenou čarou $a_1 g_1' b_1$ příčinkový obrazec $D\frac{n}{\sigma_d}$; kladné pořadnice směřují od čáry H ve smyslu $a_1 a_1'$.

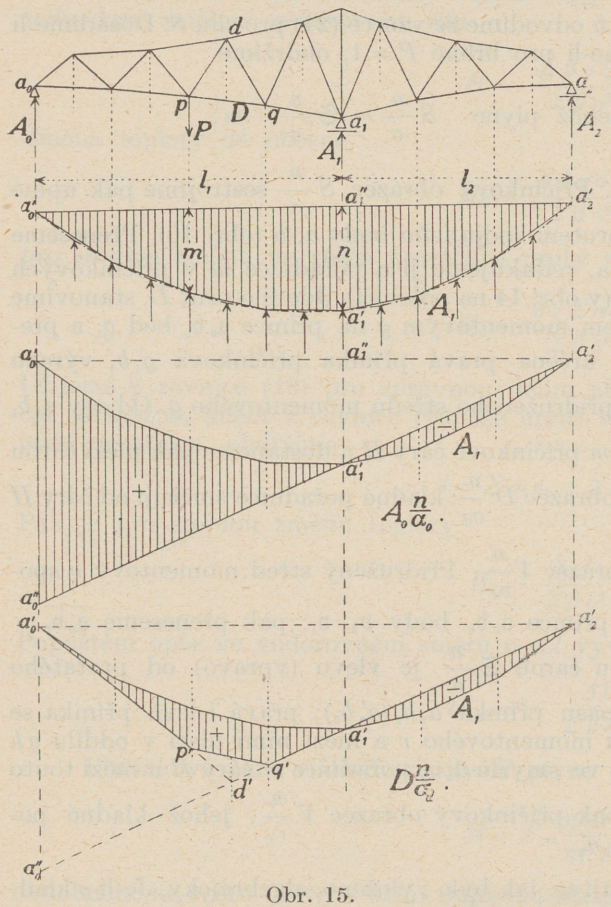
Obdobně určíme příčinkový obrazec $V\frac{n}{\sigma_v}$. Přidružený střed momentový v spojíme s body a, b, čímž určíme na přímce $\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0$ body $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_1$; pak přeneseme $\overline{\mathfrak{a}_0\mathfrak{v}_2} = \overline{a_2 a_2'}$, $\overline{\mathfrak{v}_1\mathfrak{b}_0} = \overline{\mathfrak{v}_1' b_2} = \overline{b_2 b_2'}$. Příčinkovou čarou $\mathfrak{S}\frac{n}{\sigma}$ je vlevo (vpravo) od proťatého oddílu gh zatíženého, zde horního pasu přímka $a_2 b_2'$ $(a_2' b_2)$; pravá i levá přímka se sekou na svislici přidruženého středu momentového v a mezi nimi platí v oddílu gh přímka $g_2' h_2'$. Od osy $a_2 b_2$ přeneseme ve smyslu $a_2 a_2'$ pořadnice m čáry H a mezi touto čarou a lomenou čarou $a_2 g_2' h_2' b_2$ je pak příčinkový obrazec $V\frac{n}{\sigma_v}$, jehož kladné pořadnice jsou od čáry H ve smyslu $a_2 a_2'$.

Příčinkové obrazce $S\frac{n}{\sigma}$ sestrojují se, jak bylo vyloženo, algebraicky. Je-li σ kladné (záporné), má síla S příčinkové pořadnice téhož (protivného) znaménka jako výraz $S\frac{n}{\sigma}$. Stálého činitele $\frac{n}{\sigma}$ vyloučíme, násobíme-li výsledky odvozené z čáry $S\frac{n}{\sigma}$ poměrem $\frac{\sigma}{n}$, čímž obdržíme též správné znaménko.

γ) ***Spojitý nosník příhradový o dvou polích*** v soustavě trojúhelníkové je také jednoduše staticky neurčitý, má-li jednu podporu a_0 pevnou, obě ostatní a_1, a_2 posouvatelné po vodorovnicích (obr. 15). Mohli bychom zvoliti kterýkoli prut nosníku za zbytný. Berme však za zbytnou střední podporu a_1, tedy za staticky neurčitou sílu reakci A_1 v této podpoře; základní soustavou je pak daná soustava prostě podepřená v koncových bodech a_0, a_2. Pro reakci A_1 platí zde zase všechny vzorce odvozené pro osovou sílu zbytného prutu S'; je třeba ovšem dosaditi $\beta' = 0$, jelikož zde není zbytného prutu. Odvoďme zde však řešení jiným postupem, jímž bychom mohli vyšetřovati také v předešlých případech.

Na rovnováhovém stavu i přetvoření soustavy nezmění se nic, vynecháme-li podporu a_1 a nahradíme-li ji reakcí A_1. Přetvoření je zde vázáno výminkou, že je bod a_1

bodem podporovým; je-li pevný, rovná se jeho svislé posunutí nule, popustí-li o Δa_1, je tím jeho svislé posunutí dáno. Na základní prostý nosník $a_0 a_2$ působí vnější síly $P_1, P_2, \ldots P_n$, A_1 a reakce A_0, A_2; všechny tyto síly jsou v rovnováze. Rozdělme vnější síly základního nosníku na dvě soustavy rovnováhové: 1. břemena $P_1, P_2, \ldots P_n$ s příslušnými reakcemi $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_2$ v podporách krajních a 2. sílu A_1 rovněž s příslušnými reakcemi v bodech a_0, a_2. Vyšetřujme pak v základním nosníku snížení bodu a_1, jež se za současného působení obou soustav vnějších sil rovná hodnotě dané podepřením nosníku v bodě a_1. Obecné břímě $P_m = 1$, jež působí v bodě m, vyvodí v bodě a_1 základního nosníku snížení $\eta_{I,m}$; všechna břemena obecné velikosti P_m dají tedy v bodě a_1 snížení $\Sigma P_m \eta_{I,m}$. Neznámou reakci A_1 nahraďme zatím hodnotou $A_1 = -1$, jež vyvodí v bodě a_1 základního nosníku snížení $\eta_{I,I}$; reakce A_1 dá pak v bodě a_1 snížení $-A_1 \cdot \eta_{I,I}$. Současným působením všech vnějších sil vznikne v bodě a_1 snížení



Obr. 15.

$$\Delta a_1 = \Sigma P_m \eta_{I,m} - A_1 \eta_{I,I}.$$

Nahradíme-li podle věty o vzájemnosti posunutí $\eta_{I,m} = \eta_{m,I}$, obdržíme

$$A_1 = \frac{\Sigma P_m \eta_{m,I} - \Delta a_1}{\eta_{I,I}}. \qquad (27)$$

Druhý člen v čitateli dává účinek popuštění Δa_1 podpory a_1; popuštění Δa_1 je kladné, znamená-li snížení podpory a_1, tedy směřuje-li proti kladné reakci A_1. Snížení podpory a_1 vyvozuje podle vzorce (27) v podpoře a_1 reakci zápornou, jež zmenšuje kladnou reakci vyvozenou zatížením.

Zatížení samo vyvodí reakci

$$A_1 = \frac{\Sigma P_m \eta_{m,I}}{\eta_{I,I}}; \qquad (27^a)$$

vzorec tento souhlasí úplně se vzorcem (18), klademe-li $\beta' = 0$, poněvadž zde není zbytného prutu. S touto změnou platí pak ovšem všechny vzorce odvozené obecně pro sílu S', kterou zde nahrazuje reakce A_1.

Jediné břímě dá reakci

$$A_1 = P_m \frac{\eta_{m,I}}{\eta_{I,I}}. \qquad (27^b)$$

Podle tohoto vzorce je příčinkovou čarou reakce A_1 zase ohybová čára základního nosníku zatíženého silou $A_1 = -1$. Toto zatížení znamená svislé břímě rovné

jednotce, působící na základní nosník v bodě a_1 směrem dolů; vyvodí za označení délek podle obr. 15 v bodech a_0, a_2 reakce

$$\alpha_0 = 1 \cdot \frac{l_2}{l_1 + l_2}, \qquad \alpha_2 = 1 \cdot \frac{l_1}{l_1 + l_2}.$$

Z nich vycházejíce určíme v prutech osové síly σ a z těchto roztažení $\Delta s = \frac{\sigma s}{E U}$.

Ohybovou čáru zatíženého pasu základního nosníku určili bychom pak graficky obrazcem translokačním nebo jakožto výslednicovou čáru k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$, jimiž nahradíme roztažení prutů. Přenáší-li se pohyblivé zatížení na př. do styčných bodů spodního pasu, nahrazovali bychom roztažení prutů mezipasových břemeny $\mathfrak{P}$ ve styčných bodech spodního pasu. U kosoúhlé soustavy vepsali bychom pak do výslednicové čáry k břemenům $\mathfrak{P}$ lomenou čáru, jež má s ní společné vrcholy ve svislicích styčných bodů spodního pasu (obr. 15). Takto určená čára ohybová, rýsovaná libovolnou vzdáleností pólovou f, dá v působišti p břemene P pořadnici m a v bodě a_1 pořadnici n; pak jest $\eta_{p,I} = f m$, $\eta_{I,I} = f n$, tedy

$$A_1 = P \frac{\eta_{p,I}}{\eta_{I,I}} = P \frac{m}{n}, \tag{28}$$

což souhlasí úplně se vzorcem (21). Kontrolu řešení dává vzorec (17^b), z něhož zde plyne

$$\eta_{I,I} = \Sigma \beta \sigma^2.$$

Pro reakci A_0 platí vzorec obdobný vzorci (11)

$$A_0 = \mathfrak{A}_0 - \alpha_0 A_1.$$

Dosazením za A_1 ze vzorce (28) plyne pro břímě $P = 1$

$$A_0 = \mathfrak{A}_0 - \alpha_0 \frac{m}{n} \quad \text{nebo} \quad A_0 \frac{n}{\alpha_0} = \mathfrak{A}_0 \frac{n}{\alpha_0} - m.$$

Reakce $\mathfrak{A}_0$ prostého nosníku $a_0 a_2$ má za příčinkovou čáru přímku, danou ve svislici bodu a_0 pořadnicí $P = 1$, ve svislici bodu a_2 pořadnicí nulovou. Příčinkovou čarou hodnoty $\mathfrak{A}_0 \frac{n}{\alpha_0}$ je pak přímka, jež má ve svislici bodu a_0 pořadnici $\overline{a_0' a_0''} = 1 \cdot \frac{n}{\alpha_0}$ a ve svislici bodu a_2 pořadnici nulovou. Ve svislici bodu a_1 má přímka $a_0'' a_2'$ pořadnici

$$\overline{a_1'' a_1'} = \overline{a_0' a_0''} \cdot \frac{l_2}{l_1 + l_2} = n;$$

spojuje tedy příčinková přímka $\mathfrak{A}_0 \frac{n}{\alpha_0}$ body a_2', a_1' příčinkové čáry A_1. Mezi příčinkovou čarou A_1 a přímkou $a_2' a_1'$ je příčinkový obrazec $A_0 \frac{n}{\alpha_0}$, jenž má v poli $a_0 a_1$ pořadnice kladné, v poli $a_1 a_2$ záporné. Bod a_1 jest obojetnou (neutrálnou) polohou pro reakci A_0 a zároveň pro reakci A_2 i pro osové síly prutů, což plyne již z toho, že břímě působící v bodě a_1 vyvodí rovnou a protivnou reakci A_1, s níž se ruší, nevyvozuje tedy ani reakcí v krajních podporách ani osových sil v prutech.

V obecném prutu působí podle vzorce (10^b) osová síla

$$S = \mathfrak{S} - \sigma A_1.$$

Jako v předešlých případech určí se i zde příčinkový obrazec $S \frac{n}{\sigma}$ rozdílem obrazců $\mathfrak{S} \frac{n}{\sigma}$ a A_1, neboť dosazením za A_1 ze vzorce (28) plyne pro $P = 1$

$$S \frac{n}{\sigma} = \mathfrak{S} \frac{n}{\sigma} - m.$$

Příčinkovou čarou $\mathfrak{S}\frac{n}{\sigma}$ je pro prut v prvém poli vpravo od řezu vedeného prutem přímka, jež má ve svislici levé podpory a_0 pořadnici $\overline{a_0' a_0''} = \mathfrak{S}'\frac{n}{\sigma}$. Sílu $\mathfrak{S}'$ určíme ze svislé reakce $A_0 = 1$ jakožto jediné síly vnější po levé straně, součinitel σ se určí jako osová síla ze svislé reakce α_0; je tedy

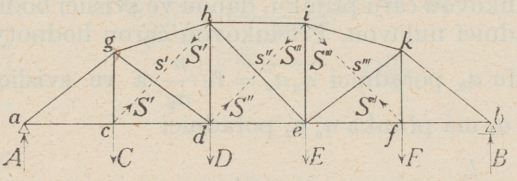
$$\frac{\mathfrak{S}'}{\sigma} = \frac{1}{\alpha_0}, \qquad \mathfrak{S}'\frac{n}{\sigma} = 1 \cdot \frac{n}{\alpha_0},$$

což dá jako při reakci A_0 přímku $a_0'' a_2'$ jdoucí bodem a_1'. S touto přímkou se seče přímka $a_0' p'$, platná na př. pro prut D vlevo od řezu, na svislici přidruženého středu momentového d; v probatém oddílu pq zatíženého pasu (spodního) je příčinkovou čarou přímka $p'q'$. Mezi příčinkovou čarou A_1 a lomenou čarou $a_0' p' q' a_2'$ je pak příčinkový obrazec $D\frac{n}{\sigma_d}$; kladné pořadnice směřují od čáry A_1 ve smyslu $a_0' a_0''$. Pro řešení je třeba určiti mimo příčinkové obrazce jen síly σ.

b) Soustavy několikrát neurčité.

7. Obecné řešení. *α) Osová síla obecného prutu.* Mějme soustavu se třemi zbytnými pruty s', s'', s''', tedy třikrát neurčitou, jaká vznikne na př. z trojúhelníkové soustavy pravoúhlé, přidáme-li ve třech příhradách po jednom prutu (obr. 16). Vyjmeme-li zbytné pruty, obdržíme staticky určitou soustavu základní; v obr. 16 je to soustava trojúhelníková, podepřená v bodě a pevně, v bodě b posouvatelně po vodorovnici. Nahradíme-li vyňaté pruty zbytné osovými silami S', S'', S''', a to každý prut v obou jeho koncových bodech, nemění se ani rovnováhový stav ani přetvoření soustavy; na tom založíme řešení.

Čítáme-li osové síly, jimiž nahrazujeme vyňaté pruty zbytné, ke vnějším silám základní soustavy, působí na tuto soustavu čtyři rovnováhové soustavy sil vnějších, jejichž účinky na osové síly nutných prutů stanovíme odděleně a pak je sečteme.



Obr. 16.

1. Daná břemena C, D, E, F s příslušnými reakcemi A, B (u soustavy podle obr. 16 staticky určitými) vyvodí v obecném nutném prutu s_i v základní soustavě osovou sílu $\mathfrak{S}_i$.

2. Síly S', S', jimiž nahrazujeme zbytný prut s' v jeho koncových bodech c, h, jsou samy o sobě v rovnováze a nevyvodí v podporách reakcí, jsou-li reakce staticky určité. Poněvadž sil S' neznáme, nahradíme je silami $S' = -1$, t. j. jednotkami silovými, jež působí v prutu s' do styčných bodů c, h; v základní soustavě vznikne silami $S' = -1$ v obecném prutu s_i osová síla σ_i'. Síly S' vyvodily by pak v témž prutu osovou sílu $-\sigma_i' S'$.

3. Místo sil S'', S'', jimiž nahrazujeme druhý zbytný prut s'' a jež jsou zase samy o sobě v rovnováze, mysleme si v koncových bodech d, i prutu s'' síly $S'' = -1$, jež by působily v prutu s'' do styčných bodů d, i. V prutu s_i základní soustavy vyvodí síly $S'' = -1$ osovou sílu σ_i''; síly S'' dají pak v témž prutu osovou sílu $-\sigma_i'' S''$.

4. Třetí zbytný prut s''' nahrazujeme rovnováhovou soustavou sil S''', S''' ve styčných bodech i, f, v nichž prut končí. Myslíme-li si místo nich v prutu s''' síly $S''' = -1$, jež působí do bodů i, f, obdržíme v prutu s_i základní soustavy osovou sílu σ_i'''; původní síly S''' vyvodí v témž prutu osovou sílu $-\sigma_i''' S'''$.

Působí-li na základní soustavu všechny čtyři soustavy sil vnějších, sčítají se jejich účinky v témž prutu algebraicky. V obecném nutném prutu s_i působí tedy celkem osová síla

$$S_i = \mathfrak{S}_i - \sigma_i' S' - \sigma_i'' S'' - \sigma_i''' S'''. \qquad (29^a)$$

Tento vzorec uvedeme na obecnější tvar vztahující se i k prutům zbytným, přisoudíme-li i zbytným prutům součinitele σ, a to tak, aby odpovídaly skutečnému stavu. Síly $S' = -1$, jimiž nahrazujeme zbytný prut s', můžeme pokládati za osovou sílu v tomto prutu, jemuž přisoudíme tedy součinitele $\sigma' = -1$; poněvadž i zbytné pruty s'', s''' jsou vyňaty, není v nich sil σ'. Podle toho přisoudíme prutu

$$s', \qquad s'', \qquad s'''$$

součinitele

$$\left.\begin{array}{rrrr} \sigma' = & -1, & 0, & 0 \\ \sigma'' = & 0, & -1, & 0, \\ \sigma''' = & 0, & 0, & -1. \end{array}\right\} \qquad (30)$$

a obdobně

Pak lze vzorec (29^a) psáti

$$S = \mathfrak{S} - \sigma' S' - \sigma'' S'' - \sigma''' S''' \qquad (29^b)$$

a vztahovati jej na všechny pruty, nutné i zbytné. Sil $\mathfrak{S}$ ve zbytných prutech není.

Jsou-li podporové reakce staticky neurčité, řešíme reakci v libovolné podpoře podobně jako osovou sílu v obecném prutu. V tom případě vyvodí síly $S' = -1$ ($S'' = -1$, $S''' = -1$), jimiž nahrazujeme vyňatý prut s' (s'', s'''), v obecné podpoře základní soustavy reakci α' (α'', α'''). Dané zatížení vyvodí v téže podpoře základní soustavy reakci $\mathfrak{A}$ v témž paprsku jako reakce $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ působící. Pak je v dané neurčité soustavě v oné podpoře reakce, pro niž platí vzorec obdobný ke vzorci (29^b)

$$A = \mathfrak{A} - \alpha' S' - \alpha'' S'' - \alpha''' S'''. \qquad (31)$$

Pokládáme-li místo některého prutu za zbytnou výminku podporovou, nastoupí místo osové síly jednoho zbytného prutu příslušná složka podporové reakce. Jinak se věc nemění a také vzorce (29), (31) zůstávají až na uvedenou záměnu v platnosti.

*β) **Výminky přetvárné a věta o nejmenší práci přetvárné.*** Osové síly zbytných prutů S', S'', S''' určíme z přetvárných výminek, jež lze vysloviti větou: Na rovnováhovém stavu soustavy prutové i na jejím přetvoření nemění se nic, jsou-li zbytné pruty v soustavě prutové nebo jsou-li vyňaty a nahrazeny osovými silami. Vyjmeme-li zbytné pruty ze soustavy prutové, obdržíme staticky určitou soustavu základní, v níž určíme změny vzdáleností $s' = \overline{ch}$, $s'' = \overline{di}$, $s''' = \overline{if}$ (obr. 16) jakožto změny vzdáleností bodů prutem nespojených podle rovnic

$$\left.\begin{array}{l} \Delta s' = \Sigma \sigma_i' \cdot \Delta s_i, \\ \Delta s'' = \Sigma \sigma_i'' \cdot \Delta s_i, \\ \Delta s''' = \Sigma \sigma_i''' \cdot \Delta s_i. \end{array}\right\} \qquad (32^a)$$

Součty na pravých stranách rovnic vztahují se zde jen na pruty soustavy základní, tedy na pruty nutné, což je naznačeno příponami. Součinitelé σ_i', σ_i'', σ_i''' mají význam již objasněný. Jsou-li zbytné pruty v soustavě prutové, znamenají $\Delta s'$, $\Delta s''$, $\Delta s'''$ jejich roztažení. Dosazujeme-li tedy do posledních rovnic za $\Delta s'$, $\Delta s''$, $\Delta s'''$ roztažení prutů zbytných, máme výminky, jež vážou roztažení prutů zbytných a prutů nutných, t. j. výminky přetvárné.

Přisuzujeme-li zbytným prutům součinitele σ', σ'', σ''' dané schematem (30), můžeme v posledních rovnicích členy $\Delta s'$, $\Delta s''$, $\Delta s'''$ převésti na pravé strany rovnic ve tvaru $-\Delta s' = \sigma' \cdot \Delta s'$, $-\Delta s'' = \sigma'' \cdot \Delta s''$, $-\Delta s''' = \sigma''' \cdot \Delta s'''$ a sloučiti je s členy, které se týkají prutů nutných. Přetvárné výminky nabudou pak jednoduššího tvaru

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma \sigma' \cdot \Delta s = 0, \\ \Sigma \sigma'' \cdot \Delta s = 0, \\ \Sigma \sigma''' \cdot \Delta s = 0; \end{array}\right\} \qquad (32^b)$$

součty v těchto rovnicích se vztahují na všechny pruty, nutné i zbytné, což je naznačeno tím, že zde není přípon.

Výminkám přetvárným můžeme dáti jiný tvar, hledíme-li k přetvárné práci soustavy prutové, jež je dána vzorcem (9^a)

$$\Pi = \Sigma \frac{S^2 s}{2EU}.$$

Dosadíme-li za roztažení prutu $\Delta s = \frac{Ss}{EU}$, uvažujíce zatím pouze účinek osových sil, můžeme přetvárné výminky (32^b) psáti

$$\Sigma\sigma' \frac{Ss}{EU} = 0, \quad \Sigma\sigma'' \frac{Ss}{EU} = 0, \quad \Sigma\sigma''' \frac{Ss}{EU} = 0.$$

Z rovnice (29^b) určíme, pokládajíce síly S', S'', S''' za proměnné,

$$\frac{\partial S}{\partial S'} = -\sigma', \quad \frac{\partial S}{\partial S''} = -\sigma'', \quad \frac{\partial S}{\partial S'''} = -\sigma'''.$$

Je tedy

$$\Sigma\sigma' \frac{Ss}{EU} = -\Sigma \frac{Ss}{EU} \cdot \frac{\partial S}{\partial S'} = -\frac{\partial \Pi}{\partial S'},$$

takže plyne

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S'} = 0 \text{ a obdobně } \frac{\partial \Pi}{\partial S''} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial S'''} = 0. \tag{33}$$

Poslední rovnice jsou výminkami minima přetvárné práce Π, jelikož druhé derivace jsou zase kladné jako u soustavy jednoduše neurčité. Lze tedy přetvárné výminky vysloviti větou (Castiglianovou) o nejmenší práci přetvárné: Pokládáme-li osové síly zbytných prutů (nebo zbytné složky reakcí) za nezávisle proměnné, stanoví se hodnoty jejich z výminky, že činí přetvárnou práci celé soustavy prutové minimem. Této věty užijeme při řešení staticky neurčitých nosníků plnostěnných; u soustav prutových řešíme kratčeji z přetvárných výminek (32^b).

Doplňme si přetvárné výminky také členy, jež se vztahují k popuštění opěr, abychom měli řešení zcela obecné. Výminky přetvárné plynou z věty o virtuálných pracích, použité na základní soustavu, na niž působí síly $S' = -1$ ($S'' = -1$, $S''' = -1$). Vyvodí-li tyto síly v opěrách základní soustavy reakce α' (α'', α''') a nastanou-li obecně popuštění opěr Δa, kladná ve smyslu protivném kladným reakcím opěrovým, třeba v rovnicích (32^a) virtuálnou práci $1 \cdot \Delta s'$ ($1 \cdot \Delta s''$, $1 \cdot \Delta s'''$) sil $S' = -1$ ($S'' = -1$, $S''' = -1$) doplniti prací reakcí $-\Sigma\alpha' \cdot \Delta a$ ($-\Sigma\alpha'' \cdot \Delta a$, $-\Sigma\alpha''' \cdot \Delta a$). Převedeme-li všechny členy na pravou stranu rovnic (32^a) a sloučíme-li jako dříve členy, jež se týkají prutů, v každé rovnici pod jedno znaménko součtové, obdržíme obecné výminky přetvárné

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\sigma' \cdot \Delta s + \Sigma\alpha' \cdot \Delta a = 0, \\ \Sigma\sigma'' \cdot \Delta s + \Sigma\alpha'' \cdot \Delta a = 0, \\ \Sigma\sigma''' \cdot \Delta s + \Sigma\alpha''' \cdot \Delta a = 0. \end{aligned}\right\} \tag{32^c}$$

Uvažujeme-li také změnu teploty, bylo by dosaditi podle vzorce (8^b)

$$\Delta s = \frac{Ss}{EU} + \delta\varepsilon s.$$

Chceme-li, aby i pak platily rovnice (33) jakožto výminky přetvárné, tedy aby platila i zde věta o nejmenší práci přetvárné, musíme skutečnou práci přetvárnou, danou

vzorcem (9^a), doplniti členy, jež se vztahují na změnu teploty a popuštění opěr; dostaneme tím pouhou početní hodnotu Π', danou vzorcem (13), uvedeným již při soustavě jednoduše neurčité.

*γ) **Řešení početní*** pro libovolné zatížení i různé účinky vedlejší odvodíme z přetvárných výminek (32^c), do nichž dosadíme, uvažujíce také změnu teploty, za roztažení prutu podle vzorce (8^b) hodnotu

$$\Delta s = \frac{S s}{E U} + \delta \varepsilon s.$$

Znamenáme-li kratčeji podle vzorce (14) $\beta = \frac{s}{EU}$ a dosadíme-li za osovou sílu S ze vzorce (29^b), dostaneme

$$\Delta s = \beta (\mathfrak{S} - \sigma' S' - \sigma'' S'' - \sigma''' S''') + \delta \varepsilon s.$$

Tím nabudou přetvárné výminky (32^c) tvaru

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma \beta \sigma' \mathfrak{S} - S' \Sigma \beta \sigma'^2 - S'' \Sigma \beta \sigma' \sigma'' - S''' \Sigma \beta \sigma' \sigma''' + \Sigma \delta \varepsilon \sigma' s + \Sigma \alpha' \cdot \Delta a = 0, \\ &\Sigma \beta \sigma'' \mathfrak{S} - S' \Sigma \beta \sigma'' \sigma' - S'' \Sigma \beta \sigma''^2 - S''' \Sigma \beta \sigma'' \sigma''' + \Sigma \delta \varepsilon \sigma'' s + \Sigma \alpha'' \cdot \Delta a = 0, \\ &\Sigma \beta \sigma''' \mathfrak{S} - S' \Sigma \beta \sigma''' \sigma' - S'' \Sigma \beta \sigma''' \sigma'' - S''' \Sigma \beta \sigma'''^2 + \Sigma \delta \varepsilon \sigma''' s + \Sigma \alpha''' \cdot \Delta a = 0. \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Z posledních rovnic vypočteme osové síly zbytných prutů vyvozené daným zatížením, vynecháme-li členy poslední a předposlední. Samotný účinek změny teploty stanovíme z týchž rovnic, vynecháme-li v nich členy první a poslední. Popuštění opěr vyvozuje pak ve zbytných prutech osové síly, jež se vypočtou z rovnic (34), vynechají-li se v nich členy prvé a předposlední.

Účinek nesprávné délky prutů zbytných uvažoval by se jako při soustavě jednoduše neurčité. Délky prutů nutných stanoví úplně tvar soustavy, tedy také správné délky zbytných prutů, pro něž lze odvoditi jako při soustavě jednoduše neurčité rovnice

$$s' = \Sigma \sigma_i' s_i, \quad s'' = \Sigma \sigma_i'' s_i, \quad s''' = \Sigma \sigma_i''' s_i. \quad (35)$$

Lze si totiž mysliti, že by soustava měla jen jeden zbytný prut, za nějž klademe po řadě prut s', s'', s'''; pak platí pro každý prut rovnice (16).

*δ) **Řešení grafické.*** Přetvárné výminky (34) lze uvésti na tvar příhodnější pro řešení grafické, jak bylo ukázáno u soustavy jednoduše neurčité; zde odvodíme tento tvar přetvárných výminek přímo. K tomu si mysleme zbytné pruty vyňaty a nahrazeny osovými silami, čímž se nezmění ani rovnováhový stav ani přetvoření dané soustavy prutové. Na základní soustavu působí pak vnější síly, jež rozvrhneme na čtyři rovnováhové soustavy, jako když jsme určovali osovou sílu S_i obecného prutu nutného; účinek každé té soustavy vyšetříme zvláště a všechny účinky pak algebraicky sečteme.

1. Obecné břímě P_m, jež působí v bodě m, nahradíme na okamžik břemenem $P_m = 1$; toto břímě, působíc na základní soustavu, změní vzdálenost

$$s', \qquad s'', \qquad s'''$$

o hodnotu

$$\eta_{I,m}, \qquad \eta_{II,m}, \qquad \eta_{III,m};$$

všechna břemena P_m libovolné velikosti změní pak onu vzdálenost o

$$\Sigma P_m \eta_{I,m}, \quad \Sigma P_m \eta_{II,m}, \quad \Sigma P_m \eta_{III,m}.$$

2. Síly S', jimiž nahrazujeme zbytný prut s', nahraďme zatím silami $S' = -1$; tyto síly změní vzdálenost s', s'', s''' o hodnotu

$$\eta_{I,I}, \qquad \eta_{II,I}, \qquad \eta_{III,I}.$$

Původní síly S' vyvodí pak změny

$$-S'\eta_{I,I}, \qquad -S'\eta_{II,I}, \qquad -S'\eta_{III,I}.$$

3. Podobně si mysleme místo sil S'', nahrazujících zbytný prut s'', síly $S''=-1$, jež změní vzdálenost s', s'', s''' o délku

$$\eta_{I,II}, \qquad \eta_{II,II}, \qquad \eta_{III,II};$$

z původních sil S'' plynou tu změny

$$-S''\eta_{I,II}, \qquad -S''\eta_{II,II}, \qquad -S''\eta_{III,II}.$$

4. Vyvodí-li konečně síly $S'''=-1$ změny týchž vzdáleností s', s'', s''' o hodnotách

$$\eta_{I,III}, \qquad \eta_{II,III}, \qquad \eta_{III,III}$$

dají síly S''', jež nahrazují zbytný prut s''', změny

$$-S'''\eta_{I,III}, \quad -S'''\eta_{II,III}, \quad -S'''\eta_{III,III}.$$

Všechny čtyři soustavy vnějších sil, působící současně na základní soustavu, vyvodí celkem změny $\Delta s', \Delta s'', \Delta s'''$ vzdáleností s', s'', s''', jež se rovnají algebraickým součtům hodnot plynoucích z jednotlivých soustav. Tyto celkové změny se pak rovnají, jsou-li zbytné pruty v soustavě, roztažením těchto prutů, čímž plynou přetvárné výminky

$$\begin{aligned}
\Delta s' &= \beta' S' = \Sigma P_m \eta_{I,m} - S'\eta_{I,I} - S''\eta_{I,II} - S'''\eta_{I,III},\\
\Delta s'' &= \beta'' S'' = \Sigma P_m \eta_{II,m} - S'\eta_{II,I} - S''\eta_{II,II} - S'''\eta_{II,III},\\
\Delta s''' &= \beta''' S''' = \Sigma P_m \eta_{III,m} - S'\eta_{III,I} - S''\eta_{III,II} - S'''\eta_{III,III}.
\end{aligned}$$

Podle věty o vzájemnosti posunutí můžeme dvojité přípony u posunutí η zaměniti, čímž dospíváme k rovnicím příhodným pro grafické řešení

$$\left.\begin{aligned}
(\eta_{I,I}+\beta')S' + \eta_{II,I}S'' + \eta_{III,I}S''' &= \Sigma P_m \eta_{m,I},\\
\eta_{I,II}S' + (\eta_{II,II}+\beta'')S'' + \eta_{III,II}S''' &= \Sigma P_m \eta_{m,II},\\
\eta_{I,III}S' + \eta_{II,III}S'' + (\eta_{III,III}+\beta''')S''' &= \Sigma P_m \eta_{m,III}.
\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Poslední rovnice bylo by lze odvoditi přímo z rovnic (34), s jejichž součiniteli se příslušní součinitelé v posledních rovnicích úplně shodují. Toho lze užíti jako u soustavy jednoduše neurčité ke kontrole řešení.

V každé z posledních rovnic se vyskytují posunutí vyvozená týmž zatížením základní soustavy, jak naznačuje shodná druhá přípona posunutí η v každé rovnici. V prvé (druhé, třetí) rovnici jsou jen posunutí η vyvozená silami $S'=-1$ ($S''=-1$, $S'''=-1$), jež působí na základní soustavu. Pro grafické řešení je třeba tedy rýsovati jen tolik translokačních obrazců základní soustavy, kolik je zbytných prutů. Z translokačního obrazce základní soustavy, na niž působí síly $S'=-1$ ($S''=-1$, $S'''=-1$), odvodíme pak všechna posunutí η v prvé (druhé, třetí) rovnici.

ε) ***Zatížení pohyblivé*** řešíme příčinkovými čarami, jež odvodíme, uvažujeme-li na nosníku jediné pohyblivé břímě $P_m=1$. Obdržíme tak rovnice

$$\left.\begin{aligned}
(\eta_{I,I}+\beta')S' + \eta_{II,I}S'' + \eta_{III,I}S''' &= P_m\eta_{m,I},\\
\eta_{I,II}S' + (\eta_{II,II}+\beta'')S'' + \eta_{III,II}S''' &= P_m\eta_{m,II},\\
\eta_{I,III}S' + \eta_{II,III}S'' + (\eta_{III,III}+\beta''')S''' &= P_m\eta_{m,III}.
\end{aligned}\right\} \quad (36^a)$$

V těchto rovnicích znamená $\eta_{m,I}$ svislé posunutí působiště břemene P_m v základním nosníku, působí-li naň síly $S'=-1$; pro různé polohy břemene bude $\eta_{m,I}$ dáno pořad-

nicemi ohybové čáry základního nosníku při zatížení $S' = -1$. Podobně znamená $\eta_{m,II}$ ($\eta_{m,III}$) pořadnici ohybové čáry základního nosníku v působišti břemene P_m při zatížení $S'' = -1$ ($S''' = -1$). Sestrojíme-li ohybové čáry základního nosníku pro zatížení $S' = -1$, $S'' = -1$, $S''' = -1$, celkem tedy tolik ohybových čar, kolik je prutů zbytných, jsou tím dány podle rovnic (36^a) příčinkové čáry osových sil S', S'', S'''. Pro libovolnou polohu m břemene P_m dosadili bychom do rovnic (36^a) ohybové pořadnice v poloze břemene a řešením rovnic bychom obdrželi příčinkové pořadnice sil S', S'', S''' v poloze břemene. Toto řešení opakovali bychom pro každý styčný bod zatíženého pasu a stanovili bychom tak příčinkové pořadnice sil S', S'', S'''.

Příčinkové čáry osových sil ostatních prutů řešíme pak podle vzorce (29^a), jenž dává osovou sílu S_i obecného prutu nutného s_i. Vzorec ten platí pro jakékoli zatížení, platí proto pro každou polohu pohyblivého břemene; váže tedy rovnice (29^a) příčinkové pořadnice sil S_i, $\mathfrak{S}_i$, S', S'', S''' v téže svislici.

Rovnice předchozí platí také, je-li místo zbytného prutu zbytná výminka podporová. Osová síla zbytného prutu, na př. S', nahradí se pak příslušnou zbytnou složkou reakce, pro kterou odpadá součinitel β', jelikož tu není zbytného prutu.

8. Praktické použití obecného řešení. Příklad 3. Příhradový nosník trojúhelníkové soustavy podepřen je v krajních bodech a, b pevně, v prostředním bodě c posouvatelně po vodorovné (obr. 19, tab. 2.). Stanoviti jest příčinkové čáry všech složek reakcí a osových sil prutů C_3, D_6, E_4, E_8, V_0, V_2, V_8.

Zatížen buď přímý horní pás. Obě pole jsou stejná a mají délku $l_1 = l_2 = 36$ m; každé je děleno na osm stejných oddílů o délce $a = 4{,}5$ m. Výšky svislic buďtež $v_0 = 8$, $v_1 = 5$, $v_2 = 3{,}2$, $v_3 = 2{,}3$, $v_4 = 2$ m; část nosníku v prvém poli je souměrná ke svislici středu tohoto pole a celý nosník je souměrný ke svislici střední podpory. Z délek oddílů a svislic určíme délky prutů horního pasu c, spodního pasu d a příček e; platí tu pro levou polovici prvého pole vzorce

$$c = a, \qquad d_m = \sqrt{a^2 + (v_{m-1} - v_m)^2}, \qquad e_m = \sqrt{a^2 + v_m^2}, \tag{a}$$

z nichž určíme délky prutů uvedené dále v číselné tabulce I.

Nosník je dvojnásob staticky neurčitý. Za staticky neurčitou zvolme vodorovnou složku X reakcí v podporách krajních a svislou reakci Y ve střední podpoře. Omezíme se na svislé zatížení, při němž jsou vodorovné složky reakcí v krajních podporách rovné a protivné. Vynecháme-li reakce X, Y, obdržíme základní nosník, jímž je zde nosník podepřený prostě v koncových bodech a, b. Poněvadž tu není zbytných prutů, mají přetvárné výminky podle rovnic (36) tvar

$$\left.\begin{aligned} \eta_{xx} X + \eta_{yx} Y &= \Sigma P_m \eta_{mx}, \\ \eta_{xy} X + \eta_{yy} Y &= \Sigma P_m \eta_{my}. \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

V prvé rovnici znamenají η_{mx} pořadnice ohybové čáry základního nosníku pro zatížení $X = -1$, při čemž jest $Y = 0$; totéž zatížení dá η_{xx} jakožto posunutí působišť reakcí X (změnu vzdálenosti bodů a, b) ve smyslu sil $X = -1$, tedy proti smyslu reakcí X, a η_{yx} jakožto posunutí působiště reakce Y, měřené kladně rovněž proti smyslu kladné reakce Y. Obdobný význam mají veličiny η_{my}, η_{xy}, η_{yy} v druhé rovnici. Podle věty Maxwellovy jest $\eta_{xy} = \eta_{yx}$, což bude kontrolou řešení.

a) Zatížení $X = -1$ (obr. 17) vyvodí ve všech prutech základní soustavy síly σ_x, jež určíme buď graficky methodou bodů styčných nebo počtem podle vzorců platných pro soustavu trojúhelníkovou. Nosník je zde souměrný ke střední svislici a každé pole samo je souměrné ke svislici středu pole. Proto jsou osové síly σ_x v souměrných prutech prvého pole rovny, a stačí řešiti jen polovici prvého pole; v prostřední svislici V_8 vyjde síla σ_x dvakrát větší než v krajní svislici V_0. Hodnoty sil σ_x jsou uvedeny v číselné tabulce I.; pro prut V_4 je $\sigma_x = 0$.

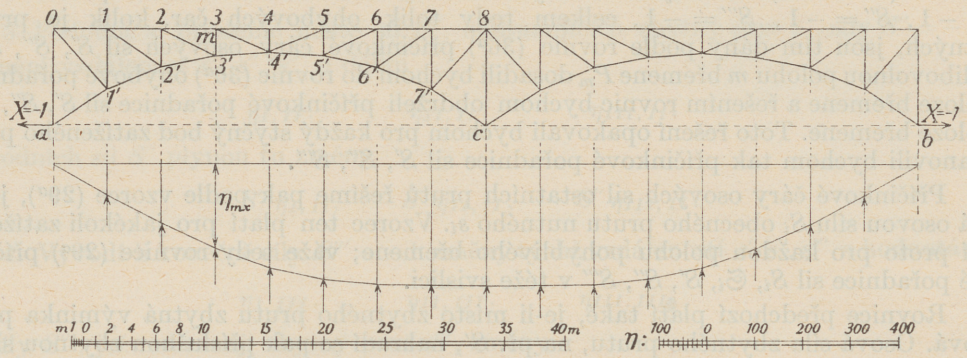
Ze sil σ_x určíme roztažení $\Delta s = \frac{\sigma s}{E U}$. Poněvadž neznáme průřezů prutových, vynecháme U ve jmenovateli, pokládajíce je ve všech prutech za stejné, a vynecháme také stálý modul pružnosti E, tedy vypočteme pouze

$$E U \cdot \Delta s = \sigma s.$$

Z roztažení Δs určili bychom ideálná břemena podle vzorců

$$\mathfrak{P}' = \frac{\Delta s}{r'}, \qquad \mathfrak{P}'' = -\frac{\Delta s}{r''}; \tag{c}$$

prvý platí pro spodní pasy a při mezipasových prutech pro břemena, jež odpovídají spodnímu konci prutu, z druhého vzorce řešíme pro horní pasy a při mezipasových prutech břemena, jež od-



Obr. 17.

povídají hornímu konci prutu. Každý mezipasový prut nahrazujeme břemeny ve styčných bodech přilehlého horního pasu, na nějž působí zatížení, a podle toho určíme ramena. Pro horní pás C_m platí

$$r''_m = v_m, \tag{d}$$

pro spodní pás D_m jest

$$r'_m = v_{m-1} \cos \delta_m = v_{m-1} \cdot \frac{a}{d_m}; \tag{d}$$

pro příčku E_m určíme ramena ze vzorců

$$r'_m = v_m \cos \varepsilon_m = v_m \cdot \frac{a}{e_m}, \quad r''_m = v_{m-1} \cos \varepsilon_m = v_{m-1} \cdot \frac{a}{e_m} \tag{d}$$

a pro svislici V_m vypočteme

$$r'_m = a, \quad r''_m = a \cdot \frac{v_m}{v''_{m-1}}, \quad \text{kde} \quad v''_{m-1} = 2\, v_m - v_{m+1} \tag{d}$$

znamená výšku, kterou na svislici V_{m-1} utínají prodloužené osy pasů C_m, D_{m+1}, proťatých s prutem V_m řezem podle methody průsečné. Ramena r určujeme podle uvedených vzorců pro pruty na levé polovici prvého pole; pro pravou polovici tohoto pole užijeme souměrnosti.

Roztažení svislice V_0 nahradíme na př. ideálným břemenem v bodě $1'$, jež se určí jako pro horní pasy ze vzorce

$$\mathfrak{P}'' = -\frac{\Delta s}{r''}, \quad \text{kde} \quad r'' = a. \tag{e}$$

Břímě $\mathfrak{P}''$ platí pro ohybové pořadnice spodního pasu. Jde-li o ohybovou čáru horního pasu, jako v tomto případě, neuvažujeme břemene $\mathfrak{P}''$; na ohyb horního pasu má roztažení svislice v_0 vliv jen potud, že posouvá základní stranu. Ovšem bude nám počítati s břemenem $\mathfrak{P}''$, když budeme určovati výslednicovou čarou k vodorovným břemenům $\mathfrak{P}$ změnu vzdálenosti $\overline{a\,b}$.

Pro svislici V_8 platí vzorec

$$\mathfrak{P}''_v = \frac{\Delta v_8}{v_8} (\operatorname{tg} \delta_9 - \operatorname{tg} \delta_8),$$

pokládáme-li odchylky δ spodního pasu od vodorovné za kladné, mají-li smysl točení ručiček na hodinách (δ_8); poslední vzorec plyne ze vzorce pro osovou sílu V_8 při horním pase zatíženém, nahradí-li se v něm moment k hornímu bodu 8 jedničkou, jelikož příčinková čára momentu M_8 jest výslednicovou čarou k břemeni $P_8 = 1$, a násobí-li se roztažením Δv_8. Stanovené břímě působí v horním styčném bodě 8 a výslednicová čára k tomuto břemeni dá ohybovou čáru horního pasu. Zde jest

$$\operatorname{tg} \delta_8 = -\operatorname{tg} \delta_9 = \frac{v_8 - v_9}{a},$$

tedy

$$\mathfrak{P}''_v = -\frac{\Delta v_8}{v_8} \cdot 2\, \frac{v_8 - v_9}{a} = -\frac{\Delta v_8}{r''_v}, \tag{f}$$

klademe-li

$$r''_v = \frac{a\, v_8}{2\,(v_8 - v_9)}; \qquad (g)$$

r''_v jest obdobné ramenům r u ostatních prutů a vyjde zde

$$r''_v = \frac{450 \cdot 800}{2 \cdot (800 - 500)} = 600 \text{ cm}.$$

Výsledky výpočtu podle odvozených vzorců jsou v číselné tabulce I., v níž jsou uvedeny všechny délky v cm.

Tabulka I.

Prut	s	σ_x	$s\,\sigma_x$	r'	r''	$\mathfrak{P}'_x$	$\mathfrak{P}''_x$	$\frac{s\,\sigma_x^2}{a}$
C_1	450	− 0,60	− 270	—	500	—	+ 0,54	0,36
C_2	450	− 1,50	− 675	—	320	—	+ 2,11	2,25
C_3	450	− 2,48	− 1115	—	230	—	+ 4,85	6,16
C_4	450	− 3,00	− 1350	—	200	—	+ 6,75	9,00
D_1	540,8	+ 1,20	+ 650	666	—	+ 0,98	—	1,73
D_2	484,7	+ 1,72	+ 835	464	—	+ 1,80	—	3,19
D_3	458,9	+ 2,55	+ 1169	314	—	+ 3,72	—	6,63
D_4	451,0	+ 3,49	+ 1572	230	—	+ 6,83	—	12,21
E_1	672,7	+ 0,90	+ 603	335	535	+ 1,80	− 1,13	1,21
E_2	552,2	+ 1,10	+ 610	261	407	+ 2,34	− 1,50	1,49
E_3	505,4	+ 1,10	+ 556	205	285	+ 2,71	− 1,95	1,36
E_4	492,4	+ 0,57	+ 281	183	210	+ 1,53	− 1,34	0,36
V_0	800	− 0,67	− 534	—	450	—	+ 1,19	0,80
V_1	500	− 0,64	− 320	450	331	− 0,71	+ 0,97	0,46
V_2	320	− 0,50	− 160	450	351	− 0,36	+ 0,46	0,18
V_3	230	− 0,23	− 53	450	398	− 0,12	+ 0,13	0,03
V_8	800	− 1,33	− 1067	—	600	—	+ 1,78	3,14

Ideálná břemena $\mathfrak{P}$ v témž bodě působící sčítáme algebraicky. Do styčných bodů spodního pasu dají břemena pouze horní pasy, a to v souměrných bodech prvého pole břemena stejná; jsou to břemena

$$\mathfrak{P}'_1 = \mathfrak{P}'_7 = + 0{,}54, \quad \mathfrak{P}'_2 = \mathfrak{P}'_6 = + 2{,}11, \quad \mathfrak{P}'_3 = \mathfrak{P}'_5 = + 4{,}85,$$
$$\mathfrak{P}'_4 = + 2 \cdot 6{,}75 = + 13{,}50.$$

Mimo to dá do bodu $1'$ prut V_0 břímě $\mathfrak{P}''_1 = + 1{,}19$, jež uvažujeme však jen ve vodorovném směru, určujíce výslednicovou čarou k vodorovným břemenům $\mathfrak{P}$ změnu η_{xx}; v ohybové čáře pro svislý směr jeví se účinek roztažení Δv_0 v základní straně.

V horních bodech styčných sčítají se účinky spodních pasů a prutů mezipasových. Do bodu m v levé polovici prvého pole dá ideálné břímě prut D_{m+1}, břímě $\mathfrak{P}'$ prut E_m, V_{m+1} a břímě $\mathfrak{P}''$ prut E_{m+1}, V_m. Do bodu 0 dá břímě prut D_1, břímě $\mathfrak{P}'$ prut V_1 a břímě $\mathfrak{P}''$ prut E_1. V souměrných bodech vnitřních prvého pole obdržíme táž břemena. Do bodu 8 dají břemena pruty V_8,

D_8, břímě $\mathfrak{P}'$ prut V_7, břímě $\mathfrak{P}''$ prut E_8 a táž břemena souměrné pruty v druhém poli; u prutů D_8, E_8, V_7 jsou pak táž břemena jako u souměrných prutů D_1, E_1, V_1. Takto určíme ideálná břemena

$$\mathfrak{P}_0 = +0{,}98 - 1{,}13 - 0{,}71 = -0{,}86,$$

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_7 = +1{,}80 + 1{,}80 - 1{,}50 + 0{,}97 - 0{,}36 = +2{,}71,$$

$$\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_6 = +3{,}72 + 2{,}34 - 1{,}95 + 0{,}46 - 0{,}12 = +4{,}45,$$

$$\mathfrak{P}_3 = \mathfrak{P}_5 = +6{,}83 + 2{,}71 - 1{,}34 + 0{,}13 = +8{,}33,$$

$$\mathfrak{P}_4 = +2 \cdot 1{,}53 = +3{,}06,$$

$$\mathfrak{P}_8 = +2 \cdot (0{,}98 - 1{,}13 - 0{,}71) + 1{,}78 = +0{,}06.$$

Stanoveným břemenům dáme působiti svisle na nosník podepřený v bodech a, b prostě a určíme k nim výslednicovou čáru. Nejprve vypočteme síly posouvající. Poněvadž jde o zatížení souměrné a uprostřed je břímě, je v oddílu *7 8* posouvající síla $\mathfrak{T}_8 = \frac{1}{2}\mathfrak{P}_8$; z ní vypočteme

$$\mathfrak{T}_7 = \mathfrak{T}_8 + \mathfrak{P}_7 + \mathfrak{P}_7', \qquad \mathfrak{T}_6 = \mathfrak{T}_7 + \mathfrak{P}_6 + \mathfrak{P}_6', \ldots . \tag{h}$$

připočítávajíce k síle $\mathfrak{T}_8$ postupně břemena předchozí. Dále je v podpoře a moment $\mathfrak{M}_0 = 0$; pro další body platí

$$\frac{\mathfrak{M}_1}{a} = \mathfrak{T}_1, \qquad \frac{\mathfrak{M}_2}{a} = \frac{\mathfrak{M}_1}{a} + \mathfrak{T}_2, \qquad \frac{\mathfrak{M}_3}{a} = \frac{\mathfrak{M}_2}{a} + \mathfrak{T}_3, \ldots \tag{i}$$

Momenty $\mathfrak{M}$ znamenaly by ohybové pořadnice bodů horního pasu. Tuto ohybovou čáru třeba vztahovati k základní straně, jež má v krajních podporách pořadnice $-\Delta v_0$. Poněvadž jsme určili poměry $\mathfrak{M}/a$, při čemž jsme vynechali v roztaženích Δs ve jmenovateli EU, obdržíme v krajních podporách pořadnice

$$-\frac{\sigma_x \cdot v_0}{a} = +\frac{534}{450} = +1{,}19;$$

tuto hodnotu připočteme k poměrům $\mathfrak{M}/a$ ve styčných bodech a obdržíme tak ohybové pořadnice η_{mx}.

Určíme též změnu vzdálenosti $\overline{ab}$, kterou dá výslednicová čára k vodorovným břemenům $\mathfrak{P}_x$; stanovíme tedy také statické momenty vodorovných sil $\mathfrak{P}_x$ k ose ab, a to ve tvaru $\mathfrak{P}_x \cdot \frac{y}{a}$ je-li y svislá pořadnice styčného bodu nad osou ab. Výpočet je proveden v číselné tabulce II.

Tabulka II.

Bod	$\mathfrak{P}_x$	$\mathfrak{T}_x$	$\frac{\mathfrak{M}_x}{a}$	y	$\mathfrak{P}_x \frac{y}{a}$
0	− 0,86	—	—	800	− 1,53
1	+ 2,71	+ 62,57	+ 62,57	800	+ 4,82
1′	+ 0,54	—	—	300	+ 0,36
2	+ 4,45	+ 59,32	+ 121,89	800	+ 7,91
2′	+ 2,11	—	—	480	+ 2,25
3	+ 8,33	+ 52,76	+ 174,65	800	+ 14,81
3′	+ 4,85	—	—	570	+ 6,14
4	+ 3,06	+ 39,58	+ 214,23	800	+ 5,44
4′	+ 13,50	—	—	600	+ 18,00
5	+ 8,33	+ 23,02	+ 237,25	800	+ 14,81
5′	+ 4,85	—	—	570	+ 6,14
6	+ 4,45	+ 9,84	+ 247,09	800	+ 7,91
6′	+ 2,11	—	—	480	+ 2,25
7	+ 2,71	+ 3,28	+ 250,37	800	+ 4,82
7′	+ 0,54	—	—	300	+ 0,36
8	+ 0,06	+ 0,03	+ 250,40	800	+ 0,11

Z tabulky II. určíme ohybové pořadnice připočtením hodnoty $+1{,}19$ k poměrům $\mathfrak{M}/a$; obdržíme tím

$$\eta_{0x} = 1{,}19, \quad \eta_{1x} = 63{,}76, \quad \eta_{2x} = 123{,}08, \quad \eta_{3x} = 175{,}84, \quad \eta_{4x} = 215{,}42, \quad \eta_{5x} = 238{,}44,$$
$$\eta_{6x} = 248{,}28, \quad \eta_{7x} = 251{,}56, \quad \eta_{8x} = 251{,}59.$$

Poslední hodnota znamená svislé posunutí bodu 8 horního pasu. Z ní určíme ohybovou pořadnici spodního pasu, kterou znamenáme η_{yx}, připočteme-li algebraicky roztažení Δv_8. Poněvadž jsou všechny hodnoty násobeny stálým činitelem $\frac{EU}{a}$, násobíme jím i Δv_8 a určíme tedy

$$\frac{EU}{a} \cdot \Delta v_8 = \frac{\sigma v_8}{a} = -1{,}33 \cdot \frac{800}{450} = -2{,}37;$$

pak jest

$$\eta_{yx} = \eta_{8x} + \frac{EU}{a} \cdot \Delta v_8 = 251{,}59 - 2{,}37 = 249{,}22. \qquad (k)$$

Dále určíme η_{xx} jakožto změnu vzdálenosti bodů a, b z výslednicové čáry k vodorovným břemenům $\mathfrak{P}_x$, tedy součtem statických momentů těchto břemen k ose $a\,b$. Poněvadž jsme užili místo $\mathfrak{M}_x$ hodnot $\mathfrak{M}_x/a$, třeba děliti délkou a a dostaneme

$$\eta_{xx} = \Sigma \mathfrak{P}_x \cdot \frac{y}{a}. \qquad (l)$$

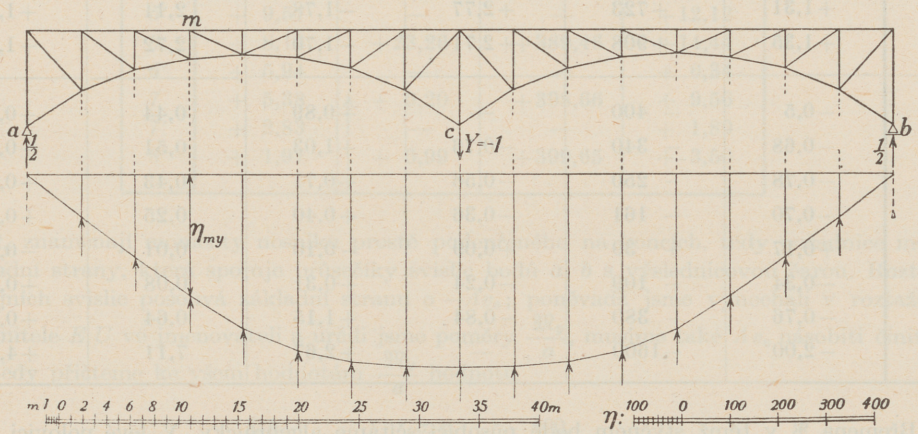
Pro všechny pruty máme hodnoty v tab. II. vyjma pro prut V_0, pro který jsme určili břímě $\mathfrak{P}_1'' = +1{,}19$ v bodě $1'$; určíme tedy pro tento prut

$$\mathfrak{P}_1'' \cdot \frac{y_1'}{a} = +1{,}19 \cdot \frac{300}{450} = +0{,}79.$$

Sčítáme dále hodnoty $\mathfrak{P}_x \cdot \frac{y}{a}$, uvedené v tab. II., pro všechny styčné body až na 8, vezmeme všechny tyto hodnoty a účinek prutu V_0 dvakráte a připočteme hodnotu pro bod 8, čímž vypočteme

$$\eta_{xx} = 2 \cdot (-1{,}53 + 96{,}02 + 0{,}79) + 0{,}11 = 190{,}67.$$

b) Zatížení $Y = -1$ (obr. 18) vyvodí v prutech základní soustavy osové síly σ_y; určíme je graficky methodou bodů styčných, vycházejíce od reakce $\alpha = \frac{1}{2}$ v bodě a, nebo počtem podle vzorců pro soustavu trojúhelníkovou. Nosník je souměrný a zatížení rovněž, stačí tedy řešiti polovici nosníku. V prutu V_4 vychází zase $\sigma_y = 0$, tedy pro tento prut všechny hodnoty odpadají.



Obr. 18.

Ze sil σ_y určíme ideálná břemena $\mathfrak{P}_y$ týmž způsobem jako dříve břemena $\mathfrak{P}_x$ ze sil σ_x. Užíváme tu ramen r', r'' a délek prutů s uvedených v tab. I. pro pruty v levé polovici prvého pole; v souměrných prutech pravé polovice téhož pole platí táž ramena. Vyjdou hodnoty sestavené v číselné tabulce III.

Tabulka III.

Prut	σ_y	$s\,\sigma_y$	$\mathfrak{P}'_y$	$\mathfrak{P}''_y$	$\frac{s\,\sigma_y^2}{a}$	$\frac{s\,\sigma_x\,\sigma_y}{a}$
C_1	−0,45	− 203	—	+ 0,41	0,20	+ 0,27
C_2	−1,41	− 634	—	+ 1,99	1,99	+ 2,11
C_3	−2,93	−1318	—	+ 5,73	8,58	+ 7,26
C_4	−4,50	−2025	—	+10,12	20,25	+13,50
C_5	−4,50	−2025	—	+10,12	20,25	+13,50
C_6	−4,89	−2200	—	+ 9,57	23,91	+12,12
C_7	−4,22	−1898	—	+ 5,94	17,81	+ 6,33
C_8	−3,15	−1417	—	+ 2,83	9,92	+ 1,89
D_1	—	—	—	—	—	—
D_2	+0,48	+ 233	+0,50	—	0,25	+ 0,89
D_3	+1,43	+ 656	+2,09	—	2,09	+ 3,72
D_4	+2,94	+1326	+5,76	—	8,66	+10,28
D_5	+4,90	+2218	+9,65	—	24,07	+17,13
D_6	+4,30	+1972	+6,28	—	18,87	+11,18
D_7	+3,39	+1642	+3,54	—	12,38	+ 6,28
D_8	+2,70	+1460	+2,19	—	8,76	+ 3,89
E_1	+0,67	+451	+1,34	− 0,84	0,67	+0,90
E_2	+1,18	+652	+2,50	−1,60	1,71	+1,59
E_3	+1,71	+864	+4,22	−3,03	3,28	+2,11
E_4	+1,72	+847	+4,63	−4,03	3,24	+1,07
E_5	−0,43	−212	−1,16	+1,01	0,20	−0,27
E_6	+0,75	+379	+1,85	−1,33	0,63	+0,93
E_7	+1,31	+723	+2,77	−1,78	2,11	+1,77
E_8	+1,35	+908	+2,71	−1,70	2,72	+1,82
V_0	−0,5	− 400	—	+0,89	0,44	+0,60
V_1	−0,68	− 340	−0,76	+1,03	0,51	+0,48
V_2	−0,78	− 250	−0,56	+0,71	0,43	+0,28
V_3	−0,70	− 161	−0,36	+0,40	0,25	+0,08
V_5	+0,17	+ 39	+0,09	−0,10	0,01	−0,02
V_6	−0,34	− 109	−0,24	+0,31	0,08	+0,12
V_7	−0,76	− 380	−0,84	+1,15	0,64	+0,54
V_8	−2,00	−1600	—	+2,67	7,11	+4,73

Břemena $\mathfrak{P}$ v témž styčném bodě působící sčítáme algebraicky. V levé polovici prvého pole a v bodě *8* postupujeme, jak bylo uvedeno při zatížení $X = -1$. Na pravé polovici prvého pole dá do bodu m horního pasu břímě $\mathfrak{P}$ prut D_m, břemena $\mathfrak{P}'$ pruty E_{m+1}, V_{m-1} a břemena $\mathfrak{P}''$ pruty E_m, V_m. Obdržíme tak celkem ve spodních styčných bodech (z horních pasů) břemena

$$\mathfrak{P}'_1 = +0{,}41, \quad \mathfrak{P}'_2 = +1{,}99, \quad \mathfrak{P}'_3 = +5{,}73, \quad \mathfrak{P}'_4 = +10{,}12 + 10{,}12 = +20{,}24,$$
$$\mathfrak{P}'_5 = +9{,}57, \quad \mathfrak{P}'_6 = +5{,}94, \quad \mathfrak{P}'_7 = +2{,}83.$$

Mimo to dá prut V_0 do bodu $1'$ břímě $\mathfrak{P}_1'' = +0{,}89$, jež však uvažujeme zase jen ve vodorovném směru, určujíce výslednicovou čarou k vodorovným břemenům $\mathfrak{P}$ změnu vzdálenosti η_{xy}. V horních bodech styčných stanovíme břemena

$$\mathfrak{P}_0 = -0{,}84 - 0{,}76 = -1{,}60,$$
$$\mathfrak{P}_1 = +0{,}50 + 1{,}34 - 1{,}60 + 1{,}03 - 0{,}56 = +0{,}71,$$
$$\mathfrak{P}_2 = +2{,}09 + 2{,}50 - 3{,}03 + 0{,}71 - 0{,}36 = +1{,}91,$$
$$\mathfrak{P}_3 = +5{,}76 + 4{,}22 - 4{,}03 + 0{,}40 = +6{,}35,$$
$$\mathfrak{P}_4 = +4{,}63 - 1{,}16 = +3{,}47,$$
$$\mathfrak{P}_5 = +9{,}65 + 1{,}01 + 1{,}85 - 0{,}10 = +12{,}41$$
$$\mathfrak{P}_6 = +6{,}28 - 1{,}33 + 2{,}77 + 0{,}09 + 0{,}31 = +8{,}12,$$
$$\mathfrak{P}_7 = +3{,}54 - 1{,}78 + 2{,}71 - 0{,}24 + 1{,}15 = +5{,}38,$$
$$\mathfrak{P}_8 = 2 \cdot (2{,}19 - 1{,}70 - 0{,}84) + 2{,}67 = +1{,}97.$$

Ke svislým břemenům $\mathfrak{P}$ určíme jako při zatížení $X = -1$ poměry $\frac{\mathfrak{M}}{a}$, berouce břemena $\mathfrak{P}$ jakožto zatížení prostého nosníku $a\,b$; výpočet je proveden v číselné tabulce IV., v níž jsou uvedeny též hodnoty $\mathfrak{P}\frac{y}{a}$, potřebné k výpočtu změny vzdálenosti $\overline{a\,b}$, kterou dává výslednicová čára k vodorovným břemenům $\mathfrak{P}$. Pořadnice y byly uvedeny v tab. II.

Tabulka IV.

Bod	$\mathfrak{P}_y$	$\mathfrak{T}_y$	$\frac{\mathfrak{M}_y}{a}$	$\mathfrak{P}_y \cdot \frac{y}{a}$
0	− 1,60	—	—	− 2,85
1	+ 0,71	+86,05	+ 86,05	+ 1,26
1'	+ 0,41	—	—	+ 0,27
2	+ 1,91	+84,93	+170,98	+ 3,40
2'	+ 1,99	—	—	+ 2,12
3	+ 6,35	+81,03	+252,01	+11,29
3'	+ 5,73	—	—	+ 7,26
4	+ 3,47	+68,95	+320,96	+ 6,17
4'	+20,24	—	—	+26,99
5	+12,41	+45,24	+366,20	+22,14
5'	+ 9,57	—	—	+12,12
6	+ 8,12	+23,26	+389,46	+14,44
6'	+ 5,94	—	—	+ 6,34
7	+ 5,38	+ 9,20	+398,66	+ 9,56
7'	+ 2,83	—	—	+ 1,89
8	+ 1,97	+ 0,99	+399,65	+ 3,50

$\mathfrak{M}_y$ znamenají momenty nosníku prostě podepřeného na koncích, tedy pořadnice měřené od základní strany, která spojuje průsečíky svislic bodů a, b s výslednicovou čarou. Roztažení Δv_0 krajních svislic posouvá základní stranu o $-\Delta v_0$; poněvadž jsme vynechali v roztaženích prutů činitele $E\,U$ ve jmenovateli a určili jsme poměry $\frac{\mathfrak{M}_y}{a}$, musíme také Δv_0 násobiti činitelem $\frac{E\,U}{a}$, tedy přičteme ke všem hodnotám $\frac{\mathfrak{M}_y}{a}$ hodnotu

$$-\frac{E\,U}{a} \cdot \Delta v_0 = -\frac{\sigma_y v_0}{a} = +\frac{400}{450} = +0{,}89.$$

Tím dostaneme ohybové pořadnice

$$\eta_{0y} = +0{,}89, \quad \eta_{1y} = +86{,}94, \quad \eta_{2y} = +171{,}87, \quad \eta_{3y} = +252{,}90, \quad \eta_{4y} = +321{,}85, \quad \eta_{5y} = +367{,}09,$$
$$\eta_{6y} = +390{,}35, \quad \eta_{7y} = +399{,}55, \quad \eta_{8y} = +400{,}54.$$

Stanovená pořadnice η_{8y} platí pro horní pás. Z ní vypočteme ohybovou pořadnici bodu c ve spodním pase, kterou znamenáme η_{yy}, přičteme-li algebraicky roztažení Δv_8. Všechny pořadnice ohybové jsou násobeny $\frac{EU}{a}$; násobíme tedy tímto činitelem také Δv_8 a určíme

$$\frac{EU}{a} \cdot \Delta v_8 = \frac{\sigma_y v_8}{a} = -\frac{1600}{450} = -3{,}56.$$

Pak jest

$$\eta_{yy} = \eta_{8y} + \frac{EU}{a} \cdot \Delta v_8 = 400{,}54 - 3{,}56 = 396{,}98. \qquad (m)$$

Dále určíme změnu vzdálenosti $\overline{a\,b}$, kterou znamenejme η_{xy}, výslednicovou čarou k vodorovným břemenům $\mathfrak{P}_y$ jakožto pořadnici této čáry ve vodorovné ose $a\,b$. Je tedy η_{xy} rovno součtu statických momentů vodorovných sil $\mathfrak{P}_y$ k ose $a\,b$. Momentové pořadnice ke svislým břemenům $\mathfrak{P}_y$ dělili jsme délkou a; touž délkou dělíme i momenty vodorovných sil a určíme

$$\eta_{xy} = \Sigma\, \mathfrak{P}_y \cdot \frac{y}{a}. \qquad (n)$$

V tab. IV. jsou hodnoty $\mathfrak{P}_y \cdot \frac{y}{a}$, plynoucí ze všech prutů vyjma V_0; tento prut dá břímě $\mathfrak{P}_1'' = +0{,}89$ v bodě $1'$, tedy

$$\mathfrak{P}_1'' \cdot \frac{y_1'}{a} = 0{,}89 \cdot \frac{300}{450} = +0{,}59.$$

Sečteme nyní tuto hodnotu s hodnotami z tab. IV. pro všechny styčné body až na bod 8, součet násobíme dvěma a připočteme hodnotu pro bod 8; vyjde tu

$$\eta_{xy} = 2 \cdot (0{,}59 - 2{,}85 + 125{,}25) + 3{,}50 = 249{,}48.$$

Podle věty Maxwellovy má být $\eta_{xy} = \eta_{yx}$; této kontrole vyhovují stanovené hodnoty až na nepatrnou odchylku dobře.

Hodnoty η_{xx}, $\eta_{xy} = \eta_{yx}$, η_{yy} můžeme kontrolovati podle vzorců

$$\eta_{xx} = \Sigma\, \beta\, \sigma_x^2, \quad \eta_{xy} = \eta_{yx} = \Sigma\, \beta\, \sigma_x\, \sigma_y, \quad \eta_{yy} = \Sigma\, \beta\, \sigma_y^2,$$

jež plynou z rovnosti součinitelů při staticky neurčitých silách v rovnicích (34) a (36), obrátíme-li u těchto členů v rovnicích (34) znaménko, poněvadž jsou v rovnicích (36) na opačné straně rovnic. Všechny dosavadní výsledky jsou násobeny stálým činitelem $\frac{EU}{a}$, jímž musíme také zde násobiti; místo $\beta = \frac{s}{EU}$ dosadíme tedy $\frac{EU}{a}\beta = \frac{s}{a}$ a obdržíme

$$\eta_{xx} = \Sigma \frac{s\, c_x^2}{a}, \quad \eta_{xy} = \eta_{yx} = \Sigma \frac{s\, \sigma_x\, \sigma_y}{a}, \quad \eta_{yy} = \Sigma \frac{s\, \sigma_y^2}{a}. \qquad (o)$$

Této kontroly bychom mohli užíti i pro každý prut ve způsobě rovnice

$$\frac{s\, \sigma_x^2}{a} = \frac{\mathfrak{P}_x \cdot y}{a}, \quad \frac{s\, \sigma_x\, \sigma_y}{a} = \frac{\mathfrak{P}_x \cdot x}{2a} = \frac{\mathfrak{P}_y \cdot y}{a}, \quad \frac{s\, \sigma_y^2}{a} = \frac{\mathfrak{P}_y \cdot x}{2a}, \qquad (p)$$

berouce vždy účinek jediného prutu, tedy při prutech pasových výslednicovou čáru k jedinému břemeni $\mathfrak{P}$ a z této čáry příslušné posunutí η_{xx}, η_{xy} a η_{yy}. Břímě $\mathfrak{P}$ působí v přidruženém středu momentovém a η_{yx} (η_{yy}) jest snížení bodu c, jež se určí jako moment prostého nosníku $a\,b$ v bodě c při zatížení svislým břemenem $\frac{\mathfrak{P}_x}{a}\left(\frac{\mathfrak{P}_y}{a}\right)$; η_{xx} (η_{xy}) znamená změnu vzdálenosti bodů a, b a rovná se statickému momentu vodorovného břemene $\frac{\mathfrak{P}_x}{a}\left(\frac{\mathfrak{P}_y}{a}\right)$ k ose $a\,b$. U prutů mezipasových sčítali bychom algebraicky účinky obou břemen, jimiž prut nahrazujeme. Takto lze zjistiti, u kterého prutu se snad stala chyba.

V tab. I. a III. jsou připojeny u všech prutů hodnoty $\frac{s\, \sigma_x^2}{a}$, $\frac{s\, \sigma_y^2}{a}$ a $\frac{s\, \sigma_x\, \sigma_y}{a}$; sečteme je zvláště pro pruty C, D, E, V a vezmeme všechny hodnoty dvakráte vyjma hodnotu pro prut V_8. Obdržíme tak

$$\Sigma \frac{s\, \sigma_x^2}{a} = 2 \cdot (35{,}54 + 47{,}52 + 8{,}84 + 2{,}14) + 3{,}14 = 191{,}22,$$

$$\Sigma \frac{s\, \sigma_x\, \sigma_y}{a} = 2 \cdot (56{,}98 + 53{,}37 + 9{,}92 + 2{,}08) + 4{,}73 = 249{,}43,$$

$$\Sigma \frac{s\, \sigma_y^2}{a} = 2 \cdot (102{,}91 + 75{,}08 + 14{,}56 + 2{,}36) + 7{,}11 = 396{,}93.$$

Tyto hodnoty se liší velmi nepatrně od hodnot η_{xx}, η_{xy}, η_{yy} dříve určených, což potvrzuje správnost řešení. Dále budeme počítati s dřívějšími hodnotami, okrouhle

$$\eta_{xx} = 190{,}7, \quad \eta_{xy} = \eta_{yx} = 249{,}4, \quad \eta_{yy} = 397{,}0.$$

c) Příčinkové čáry sil X, Y vyšetříme z přetvárných rovnic (*b*); dosadíme-li do nich za η_{xx}, η_{xy}, η_{yy} stanovené hodnoty, obdržíme rovnice

$$190{,}7\ X + 249{,}4\ Y = \eta_{mx},$$
$$249{,}4\ X + 397{,}0\ Y = \eta_{my},$$

z nichž plyne řešením

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{397{,}0\ \eta_{mx} - 249{,}4\ \eta_{my}}{190{,}7 \cdot 397{,}0 - 249{,}4^2} = 0{,}02939\ \eta_{mx} - 0{,}01846\ \eta_{my}, \\ Y &= \frac{190{,}7\ \eta_{my} - 249{,}4\ \eta_{mx}}{190{,}7 \cdot 397{,}0 - 249{,}4^2} = 0{,}01412\ \eta_{my} - 0{,}01846\ \eta_{mx}. \end{aligned}\right\} \qquad (q)$$

Poněvadž se ve výsledcích členy s pořadnicemi η_{mx} a η_{my} odčítají, musí být výpočet ohybových čar proveden pokud možno přesně. Příčinkové pořadnice sil X, Y pro levou polovici nosníku, vypočtené podle posledních rovnic pro každý styčný bod zvláště, uvedeny jsou dále v číselné tabulce V. a čáry samy, souměrné k prostřední svislici, vyneseny jsou podle toho v obr. 19 (tab. 2.).

Stanovíme dále příčinkové pořadnice reakce A a osových sil prutů V_0, V_2, V_8, C_3, D_6, E_4, E_8. Pro všechny tyto síly platí obecný vzorec

$$S = \mathfrak{S} - \sigma_x X - \sigma_y Y, \qquad (r)$$

znamená-li $\mathfrak{S}$ osovou sílu (nebo reakci) v základním nosníku, jímž je daný nosník prostě podepřený v bodech a, b. Poslední rovnice váže příčinkové pořadnice sil S, $\mathfrak{S}$, X a Y v každém bodě styčném; podle ní vypočteme hledané pořadnice, uvedené dále v číselné tabulce V. a VI. Součinitele σ_x, σ_y máme již v tabulkách I. a III.

Pro reakci A platí $\alpha_x = 0$, $\alpha_y = 0{,}5$; příčinkovou čarou reakce $\mathfrak{A}$ základního nosníku je přímka, jež má ve svislici bodu a pořadnici rovnou jedničce, ve svislici bodu b pořadnici nulovou.

Pro prut V_0 obdržíme $\sigma_x = -0{,}67$, $\sigma_y = -0{,}5$ podle tab. I. a III. Pro základní nosník platí $\mathfrak{V}_0 = -\mathfrak{A}$, příčinkovou čarou $\mathfrak{V}_0$ je tedy přímka, jež má ve svislici bodu a pořadnici -1, ve svislici bodu b pořadnici nulovou.

V prutu V_2 je podle tab. I. a III. součinitel $\sigma_x = -0{,}5$, $\sigma_y = -0{,}78$. Příčinková čára síly $\mathfrak{V}_2$ v základním nosníku jest určena ve svislicích bodů a, b pořadnicemi $\mathfrak{V}_2'$, $\mathfrak{V}_2''$, jež stanoví pravou a levou přímku příčinkovou. Pořadnice $\mathfrak{V}_2'$ ($\mathfrak{V}_2''$) se určí jako osová síla prutu z reakce $A = 1$ ($B = 1$) jakožto jediné síly vnější po levé (pravé) straně. Graficky bychom tu řešili snadno methodou bodů styčných, počtem podle vzorců platných pro soustavu trojúhelníkovou.[1]) Vyjde tu

$$\mathfrak{V}_2' = \frac{1}{a}\left(\frac{x_2}{v_2}\, v_3 - x_3\right) = \frac{1}{4{,}5}\left(\frac{9{,}0}{3{,}2} \cdot 2{,}3 - 13{,}5\right) = -1{,}563,$$

$$\mathfrak{V}_2'' = \frac{1}{a}\left(\frac{x_2'}{v_2}\, v_3 - x_3'\right) = \frac{1}{4{,}5}\left(\frac{14 \cdot 4{,}5}{3{,}2} \cdot 2{,}3 - 13 \cdot 4{,}5\right) = -2{,}938,$$

měříme-li úsečky x (x') od svislice bodu a (b). Z pořadnic $\mathfrak{V}_2'$, $\mathfrak{V}_2''$ vypočteme snadno příčinkové pořadnice síly $\mathfrak{V}_2$ uvedené dále v tab. V. a VI.

V prutu V_8 máme $\sigma_x = -1{,}33$, $\sigma_y = -2{,}00$. Příčinkovou čarou síly $\mathfrak{V}_8$ je vpravo od svislice bodu *8* přímka, jež má ve svislici bodu b pořadnici nulovou, ve svislici bodu a utíná pak pořadnici

$$\mathfrak{V}_8' = 1 \cdot \frac{x_8}{v_8}\,(\operatorname{tg}\delta_9 - \operatorname{tg}\delta_8) = -6{,}000;$$

vlevo od svislice bodu *8* platí přímka souměrná.

Pro prut C_3 platí $\sigma_x = -2{,}48$, $\sigma_y = -2{,}93$. Příčinkovou čarou síly $\mathfrak{C}_3$ je vpravo od svislice bodu *3* přímka, jež má ve svislici bodu b pořadnici nulovou, ve svislici bodu a pořadnici

$$\mathfrak{C}_3' = -1 \cdot \frac{x_3}{v_3} = -1 \cdot \frac{13{,}5}{2{,}3} = -5{,}870;$$

přímka levá seče pravou přímku příčinkovou na svislici bodu *3*.

[1]) Viz prvý díl tohoto spisu (4. vyd. 1946), vzorec (85^e) na str. 198.

V prutu D_6 jest $\sigma_x = +2{,}55$, $\sigma_y = +4{,}30$. Příčinkovou čarou síly $\mathfrak{D}_6$ je vpravo od svislice bodu *6* přímka, jež má ve svislici bodu *b* pořadnici nulovou, ve svislici bodu *a* pořadnici

$$\mathfrak{D}'_6 = 1 \cdot \frac{x_6}{v_6 \cdot \cos\delta_6} = \frac{27 \cdot 4{,}589}{3{,}2 \cdot 4{,}5} = 8{,}605\,;$$

levá přímka ji seče na svislici bodu *6*.

Pro prut E_4 jsme určili $\sigma_x = +0{,}57$, $\sigma_y = +1{,}72$. Příčinkovou čarou síly $\mathfrak{E}_4$ je vpravo od svislice bodu *4* přímka, jež má ve svislici bodu *b* pořadnici nulovou, ve svislici bodu *a* pořadnici

$$\mathfrak{E}'_4 = \frac{1}{\cos\varepsilon_4}\left(\frac{x_4}{v_4} - \frac{x_3}{v_3}\right) = 2\,\sigma_y = 3{,}427\,.$$

Přímka levá má ve svislici bodu *a* pořadnici nulovou, ve svislici bodu *b* pořadnici

$$\mathfrak{E}''_4 = \frac{1}{\cos\varepsilon_4}\left(\frac{x'_4}{v_4} - \frac{x'_3}{v_3}\right) = \frac{4{,}924}{4{,}5}\left(\frac{12 \cdot 4{,}5}{2{,}0} - \frac{13 \cdot 4{,}5}{2{,}3}\right) = +1{,}718\,.$$

Pro prut E_8 konečně platí $\sigma_x = +0{,}90$, $\sigma_y = +1{,}35$. Příčinkovou čarou síly $\mathfrak{E}_8$ je vpravo od svislice bodu *8* přímka, jež má ve svislici bodu *b* pořadnici nulovou, ve svislici bodu *a* pořadnici

$$\mathfrak{E}'_8 = \frac{1}{\cos\varepsilon_8}\left(\frac{x_7}{v_7} - \frac{x_8}{v_8}\right) = 2\,\sigma_y = +2{,}691\,.$$

Přímka levá má ve svislici bodu *a* pořadnici nulovou, ve svislici bodu *b* pořadnici

$$\mathfrak{E}''_8 = \frac{1}{\cos\varepsilon_8}\left(\frac{x'_7}{v_7} - \frac{x'_8}{v_8}\right) = \frac{6{,}727}{4{,}5}\left(\frac{9 \cdot 4{,}5}{5} - \frac{8 \cdot 4{,}5}{8}\right) = +5{,}382\,.$$

Výsledky výpočtu příčinkových pořadnic sil $\mathfrak{S}$ a S jsou dále v číselné tabulce V. pro levou a v tabulce VI. pro pravou polovici nosníku. Příčinkové čáry sil X, Y a V_8 jsou souměrné ke svislici středu nosníku, jsou tedy pro ně uvedeny hodnoty jen v tabulce V. Podle vypočtených hodnot jsou pak narýsovány příčinkové čáry všech sil v obr. 19 a 20 (tab. 2).

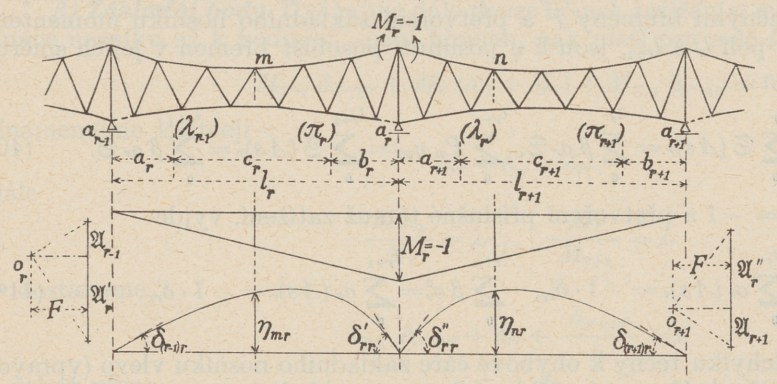
Tabulka V.

Síla	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
X	+0,019	+0,269	+0,444	+0,499	+0,390	+0,232	+0,091	+0,017	0
Y	−0,009	+0,051	+0,155	+0,325	+0,568	+0,781	+0,929	+0,998	+1,012
$\mathfrak{A}$	+1,000	+0,938	+0,875	+0,813	+0,750	+0,688	+0,625	+0,563	+0,500
A	+1,005	+0,912	+0,797	+0,650	+0,466	+0,297	+0,160	+0,064	−0,006
$\mathfrak{B}_0$	−1,000	−0,938	−0,875	−0,813	−0,750	−0,688	−0,625	−0,563	−0,500
V_0	−0,992	−0,732	−0,500	−0,316	−0,205	−0,142	−0,099	−0,053	+0,006
$\mathfrak{B}_2$	0	−0,184	−1,368	−1,270	−1,172	−1,075	−0,977	−0,879	−0,782
V_2	+0,002	−0,009	−1,025	−0,767	−0,534	−0,350	−0,206	−0,092	+0,007
$\mathfrak{B}_8$	0	−0,375	−0,750	−1,125	−1,500	−1,875	−2,250	−2,625	−3,000
V_8	+0,007	+0,085	+0,150	+0,188	+0,154	−0,005	−0,271	−0,606	−0,976
$\mathfrak{C}_3$	0	−1,590	−3,180	−4,770	−4,404	−4,037	−3,670	−3,302	−2,936
C_3	+0,021	−0,764	−1,625	−2,581	−1,774	−1,173	−0,722	−0,336	+0,029
$\mathfrak{D}_6$	0	+0,896	+1,793	+2,689	+3,586	+4,482	+5,379	+4,840	+4,303
D_6	−0,009	−0,009	−0,005	+0,020	+0,150	+0,532	+1,153	+0,506	−0,047
$\mathfrak{E}_4$	0	+0,107	+0,215	+0,322	+2,570	+2,356	+2,142	+1,928	+1,714
E_4	+0,004	−0,144	−0,305	−0,521	+1,371	+0,881	+0,492	+0,201	−0,027
$\mathfrak{E}_8$	0	+0,336	+0,672	+1,009	+1,345	+1,682	+2,018	+2,354	+1,346
E_8	−0,005	+0,025	+0,053	+0,121	+0,227	+0,419	+0,682	+0,992	−0,020

Tabulka VI.

Síla	9	10	11	12	13	14	15	16
$\mathfrak{A}$	+ 0,438	+ 0,375	+ 0,313	+ 0,250	+ 0,188	+ 0,125	+ 0,063	0
A	− 0,061	− 0,090	− 0,078	− 0,034	+ 0,025	+ 0,047	+ 0,037	+ 0,005
$\mathfrak{B}_0$	− 0,438	− 0,375	− 0,313	− 0,250	− 0,188	− 0,125	− 0,063	0
V_0	+ 0,072	+ 0,151	+ 0,233	+ 0,295	+ 0,309	+ 0,250	+ 0,143	+ 0,008
$\mathfrak{B}_2$	− 0,684	− 0,586	− 0,488	− 0,391	− 0,293	− 0,195	− 0,098	0
V_2	+ 0,103	+ 0,185	+ 0,237	+ 0,247	+ 0,210	+ 0,148	+ 0,077	+ 0,002
$\mathfrak{C}_3$	− 2,568	− 2,201	− 1,834	− 1,467	− 1,101	− 0,734	− 0,367	0
C_3	+ 0,398	+ 0,747	+ 1,030	+ 1,163	+ 1,088	+ 0,821	+ 0,449	+ 0,021
$\mathfrak{D}_6$	+ 3,765	+ 3,227	+ 2,689	+ 2,151	+ 1,613	+ 1,075	+ 0,538	0
D_6	− 0,569	− 0,999	− 1,261	− 1,285	− 1,056	− 0,723	− 0,367	− 0,009
$\mathfrak{E}_4$	+ 1,499	+ 1,285	+ 1,071	+ 0,857	+ 0,643	+ 0,428	+ 0,214	0
E_4	− 0,228	− 0,365	− 0,404	− 0,342	− 0,200	− 0,092	− 0,027	+ 0,004
$\mathfrak{E}_8$	+ 1,177	+ 1,009	+ 0,841	+ 0,673	+ 0,505	+ 0,336	+ 0,168	0
E_8	− 0,185	− 0,319	− 0,422	− 0,445	− 0,383	− 0,273	− 0,143	− 0,005

9. Spojitý nosník příhradový. *α) Obecné vztahy.* Prutová soustava trojúhelníková, podepřená ve více než dvou bodech, dává *spojitý nosník příhradový* (obr. 21). Je-li jedna podpora nosníku pevná, ostatní posouvatelné, je počet staticky neurčitých veličin o dvě menší než počet podpor. Nosník proměníme ve staticky určitý, vynecháme-li u každé vnitřní podpory jeden prut v pase u styčníku, ze kterého nevycházejí příčky. Základním nosníkem je pak v každém poli příhradový nosníkprostý. Místo osových sil vyňatých prutů můžeme voliti výhodněji za staticky neurčité momenty těchto sil k protilehlým styčníkům, tedy *podporové momenty* spojitého nosníku $\ldots M_{r-1}, M_r, M_{r+1}, \ldots$[1])



Obr. 21.

Nedbáme-li zde změny teploty, mají přetvárné výminky obecný tvar (32[c])

$$\Sigma \sigma_r \Delta s + \Sigma \alpha_r \Delta a = 0,$$

znamená-li σ_r osovou sílu prutu v základní soustavě a α_r podporovou reakci základního nosníku při zatížení staticky neurčitou veličinou $M_r = -1$. Z tohoto zatížení plynou

[1]) Theorie, jež následuje, je v podstatě theorie spojitého nosníku proměnného průřezu; srovnej spisovatelovu „*Theorii čar příčinkových*“, III (1912), str. 124 a d.

momenty v sousedních polích jako u prostých nosníků podle zákona přímek, a reakce jsou

$$\alpha_{(r-1)\,r} = -\frac{1}{l_r}, \quad \alpha'_{rr} = \frac{1}{l_r}, \quad \alpha''_{rr} = \frac{1}{l_{r+1}}, \quad \alpha_{(r+1)\,r} = -\frac{1}{l_{r+1}}. \tag{37}$$

Svislá popuštění podpor (dolů kladná) znamenejme... h_{r-1}, h_r, h_{r+1}, ... V obecném prutu jest

$$\Delta s = \frac{S s}{E U} = \beta S,$$

znamenáme-li podle vzorce (14) $\frac{s}{EU} = \beta$. Osovou sílu S můžeme vyjádřiti vzorci:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{v poli } l_r & S = \mathfrak{S} - \sigma_{r-1} M_{r-1} - \sigma_r M_r, \\ \text{,, ,, } l_{r+1} & S = \mathfrak{S} - \sigma_r \; M_r - \sigma_{r+1} M_{r+1}; \end{array}\right\} \tag{38}$$

moment M_r (M_{r-1}, M_{r+1}) $= -1$ vyvozuje osové síly pouze v prutech obou polí přilehlých k podpoře a_r (a_{r-1}, a_{r+1}), jež znamenejme σ_r (σ_{r-1}, σ_{r+1}). Dosazením hodnot nabude obecná výminka přetvárná tvar

$$\sum_0^{l_r} \beta \sigma_r \mathfrak{S} - M_{r-1} \sum_0^{l_r} \beta \sigma_{r-1} \sigma_r - M_r \sum_0^{l_r} \beta \sigma_r^2 + \sum_0^{l_{r+1}} \beta \sigma_r \mathfrak{S} - M_r \sum_0^{l_{r+1}} \beta \sigma_r^2 -$$

$$- M_{r+1} \sum_0^{l_{r+1}} \beta \sigma_r \sigma_{r+1} - \frac{h_{r-1}}{l_r} + h_r \left(\frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}}\right) - \frac{h_{r+1}}{l_{r+1}} = 0. \tag{39a}$$

Dostali jsme takto *třímomentovou rovnici*, jejíž jednotlivé členy vyjádříme přetvořením, použijeme-li věty o virtuálných pracích $\Sigma P\,(\Delta p) = \Sigma S\,(\Delta s)$. Uvažujme nejprve zatížení skutečnými břemeny P a přetvoření základního nosníku momentem $M_r = -1$; tu vyjde v poli l_r a l_{r+1}, jsou-li η posunutí působišť břemen v jejich směru, kladná dolů,

$$\sum_0^{l_r} P_m \eta_{mr} = \sum_0^{l_r} \mathfrak{S}\,(\Delta s)_r = \sum_0^{l_r} \beta \sigma_r \mathfrak{S}, \quad \sum_0^{l_{r+1}} P_n \eta_{nr} = \sum_0^{l_{r+1}} \mathfrak{S}\,(\Delta s)_r = \sum_0^{l_{r+1}} \beta \sigma_r \mathfrak{S}. \tag{40}$$

Volíme-li zatížení $M_r = -1$ a přetvoření příslušné témuž zatížení, vyjde

$$\sum_0^{l_r} \beta \sigma_r^2 = \sum_0^{l_r} \sigma_r\,(\Delta s)_r = -1 \cdot \delta'_{rr}, \quad \sum_0^{l_{r+1}} \beta \sigma_r^2 = \sum_0^{l_{r+1}} \sigma_r\,(\Delta s)_r = -1 \cdot \delta''_{rr}, \tag{41a}$$

znamená-li δ'_{rr} (δ''_{rr}) odchylku tečny k ohybové čáře základního nosníku vlevo (vpravo) od podpory a_r při zatížení $M_r = -1$. Úhly δ berme za kladné ve smyslu kladného momentu, tedy v levém (pravém) konci nosníku ve smyslu (proti smyslu) točení hodinových ručiček; moment $M_r = -1$ dá tedy zápornou práci. Podobně pro přetvoření momentem $M_r = -1$ a pomocné vnější síly $M_{r-1} = -1$ dostaneme

$$-1 \cdot \delta_{(r-1)\,r} = \sum_0^{l_r} \sigma_{r-1}\,(\Delta s)_r = \sum_0^{l_r} \beta \sigma_{r-1} \sigma_r \tag{41b}$$

a pro přetvoření momentem $M_r = -1$ a pomocné vnější síly $M_{r+1} = -1$ vychází

$$-1 \cdot \delta_{(r+1)\,r} = \sum_0^{l_{r+1}} \sigma_{r+1}\,(\Delta s)_r = \sum_0^{l_{r+1}} \beta \sigma_r \sigma_{r+1}. \tag{41c}$$

Dosazením nabude třímomentová rovnice tvaru

$$M_{r-1}\,\delta_{(r-1)r} + M_r\,(\delta'_{rr} + \delta''_{rr}) + M_{r+1}\,\delta_{(r+1)r} = -\sum_0^r P_m\,\eta_{mr} - \sum_0^{r+1} P_n\,\eta_{nr} +$$

$$+ \frac{h_{r+1} - h_r}{l_{r+1}} - \frac{h_r - h_{r-1}}{l_r}. \qquad (39^b)$$

Pro samotné zatížení, neuvažujeme-li účinek popuštění podpor ($h_{r-1} = h_r = h_{r+1} = 0$), má třímomentová rovnice tvar

$$M_{r-1}\,\delta_{(r-1)r} + M_r\,(\delta'_{rr} + \delta''_{rr}) + M_{r+1}\,\delta_{(r+1)r} = -\sum_0^{l_r} P_m\,\eta_{mr} - \sum_0^{l_{r+1}} P_n\,\eta_{nr}. \qquad (39^c)$$

Ohybovou čáru pro zatížení $M_r = -1$ můžeme určiti jako výslednicovou čáru k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$ počtem nebo graficky. Při grafickém řešení můžeme vyjádřiti úhly δ reakcemi $\mathfrak{A}$, jež jsou vyvozeny břemeny $\mathfrak{P}$ v podporách základního nosníku. Úhly δ se totiž jeví v složkovém obrazci v úhlu příslušných pólových paprsků, a vyjde, nahradíme-li jako pro úhly velmi malé úhly jejich tangentami,

$$\delta_{(r-1)r} = \frac{\mathfrak{A}_{r-1}}{F}, \quad \delta'_{rr} = \frac{\mathfrak{A}'_r}{F}, \quad \delta''_{rr} = \frac{\mathfrak{A}''_r}{F}, \quad \delta_{(r+1)r} = \frac{\mathfrak{A}_{r+1}}{F}. \qquad (42)$$

Při početním řešení by bylo $F = 1$.

Podporové svislice nebývají od svislého zatížení plně namáhány; abychom se vyhnuli komplikacím prakticky zbytečným, zanedbejme roztažení podporových svislic. Potom pro ohybovou čáru horního i dolního pasu dostaneme v podporách ohybové pořadnice rovné nule, a je možné ve všech případech použíti dalšího jednoduchého řešení.

*β) **Základní body.*** Uvažujme dále pouze účinek zatížení a mysleme si, že od levého konce nosníku až k bodu a_{r+1} není břemen; pak platí pro pole l_r, l_{r+1} rovnice

$$M_{r-1}\,\delta_{(r-1)r} + M_r\,(\delta'_{rr} + \delta''_{rr}) + M_{r+1}\,\delta_{(r+1)r} = 0.$$

Znamenejme kratčeji

$$\delta'_{rr} + \delta''_{rr} = \delta_{rr}, \qquad (41^d)$$

dále

$$\frac{M_{r-1}}{M_r} = \lambda_{r-1}, \quad \frac{M_r}{M_{r+1}} = \lambda_r \qquad (43^a)$$

a dostaneme

$$\lambda_{r-1}\,\delta_{(r-1)r} + \delta_{rr} + \frac{\delta_{(r+1)r}}{\lambda_r} = 0,$$

z čehož plyne

$$\lambda_r = -\frac{\delta_{(r+1)r}}{\delta_{rr} + \delta_{(r-1)r}\,\lambda_{r-1}}. \qquad (44^a)$$

Poměry posloupných momentů podporových v nezatížených polích levých jsou stálé, nezávislé na zatížení, které působí kdekoli vpravo. Z posledního vzorce určíme tyto poměry λ pro všechna pole. Končí-li nosník v bodě a_0 a je-li tu prostě podepřen, je $M_0 = 0$ a $\lambda_0 = M_0/M_1 = 0$. Dále plyne ze vzorce (44^a)

$$\lambda_1 = -\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}, \quad \lambda_2 = -\frac{\delta_{32}}{\delta_{22} + \delta_{12}\,\lambda_1}, \ldots$$

V nezatíženém poli redukuje se momentový obrazec na pouhý doplňovací lichoběžník, jenž má v podporách pořadnice dané podporovými momenty. Poměry λ jsou

AKADEMICKÁ KNIHOVNA SSM Jednota V PRAZE

vesměs záporné, tedy v sousedních podporách mají podporové momenty protivná znaménka, a obě strany doplňovacího lichoběžníka v poli $a_r a_{r+1}$ sekou se uvnitř pole ve svislici bodu λ_r; tento bod rozděluje pole v poměru

$$\frac{\overline{a_r \lambda_r}}{\overline{a_{r+1} \lambda_r}} = \frac{M_r}{M_{r+1}} = \lambda_r .$$

Bod λ_r nezávisí na zatížení, je to *levý bod základní.*

Kdyby byl nosník od podpory a_{s-1} až k pravému konci nezatížen, vyšla by obdobně pro poměry podporových momentů

$$\frac{M_s}{M_{s-1}} = \pi_s , \quad \frac{M_{s+1}}{M_s} = \pi_{s+1} \tag{43^b}$$

rovnice

$$\pi_s = - \frac{\delta_{(s-1)s}}{\delta_{ss} + \delta_{(s+1)s} \pi_{s+1}} , \tag{44^b}$$

z níž plynou poměry π pro všechna pole. Tím jsou určeny ve všech polích *pravé základní body.* Základní bod π_s rozděluje pole $a_s a_{s-1}$ v poměru

$$\frac{\overline{a_s \pi_s}}{\overline{a_{s-1} \pi_s}} = \pi_s .$$

γ) ***Příčinkové čáry.*** Vyšetříme nejprve příčinkové čáry podporových momentů. Je-li v bodě m pole l_r jediné břímě P a ostatní nosník není zatížen, platí pro pole l_r a předchozí i následující pole třímomentové rovnice

$$M_{r-2} \delta_{(r-2)(r-1)} + M_{r-1} \delta_{(r-1)(r-1)} + M_r \delta_{r(r-1)} = - P \eta_{m(r-1)} ,$$
$$M_{r-1} \delta_{(r-1)r} + M_r \delta_{rr} + M_{r+1} \delta_{(r+1)r} = - P \eta_{mr} .$$

V nezatížených částech nosníku vlevo od a_{r-1} (vpravo od a_r) lze vyjádřiti podle vzorců (43^a), (43^b)

$$M_{r-2} = M_{r-1} \lambda_{r-2} , \quad M_{r+1} = M_r \pi_{r+1} ;$$

dosazením dostaneme

$$M_{r-2} (\lambda_{r-2} \delta_{(r-2)(r-1)} + \delta_{(r-1)(r-1)}) + M_r \delta_{r(r-1)} = - P \eta_{m(r-1)} ,$$
$$M_{r-1} \delta_{(r-1)r} + M_r (\delta_{rr} + \pi_{r+1} \delta_{(r+1)r}) = - P \eta_{mr} .$$

Ze vzorců (44^a), (44^b) pro základní body určíme

$$\lambda_{r-2} \delta_{(r-2)(r-1)} + \delta_{(r-1)(r-1)} = - \frac{\delta_{r(r-1)}}{\lambda_{r-1}} , \quad \delta_{rr} + \pi_{r+1} \delta_{(r+1)r} = - \frac{\delta_{(r-1)r}}{\pi_r} ,$$

takže vyjde

$$- M_{r-1} \frac{\delta_{r(r-1)}}{\lambda_{r-1}} + M_r \delta_{r(r-1)} = - P \eta_{m(r-1)} , \quad M_{r-1} \delta_{(r-1)r} - M_r \frac{\delta_{(r-1)r}}{\pi_r} = - P \eta_{mr} .$$

Základní body λ_{r-1}, π_r rozdělují pole l_r na úseky (obr. 21)

$$\overline{a_{r-1} \lambda_{r-1}} = a_r , \quad \overline{\pi_r a_r} = b_r , \quad \overline{\lambda_{r-1} \pi_r} = c_r = l_r - a_r - b_r .$$

Tu jest

$$\lambda_{r-1} = \frac{\overline{a_{r-1} \lambda_{r-1}}}{\overline{a_r \lambda_{r-1}}} = - \frac{a_r}{l_r - a_r} , \quad \pi_r = \frac{\overline{a_r \pi_r}}{\overline{a_{r-1} \pi_r}} = - \frac{b_r}{l_r - b_r}$$

a z posledních rovnic plyne

$$\frac{l_r - a_r}{a_r} M_{r-1} + M_r = - P \frac{\eta_{m(r-1)}}{\delta_{r(r-1)}},$$

$$M_{r-1} + \frac{l_r - b_r}{b_r} M_r = - P \frac{\eta_{mr}}{\delta_{(r-1)r}}.$$

Podle Maxwellovy věty jest $\delta_{r(r-1)} = \delta_{(r-1)r}$, což je dobrou kontrolou řešení. Z posledních dvou rovnic vypočteme

$$\left.\begin{aligned} M_{r-1} &= - \frac{a_r P}{c_r l_r \delta_{(r-1)r}} [(l_r - b_r) \eta_{m(r-1)} - b_r \eta_{mr}], \\ M_r &= - \frac{b_r P}{c_r l_r \delta_{(r-1)r}} [- a_r \eta_{m(r-1)} + (l_r - a_r) \eta_{mr}]. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Při břemeni P v poli $\overline{a_r a_{r+1}} = l_{r+1}$ dostaneme podle prvého vzorce (45)

$$M_r = - \frac{a_{r+1} P}{c_{r+1} l_{r+1} \delta_{r(r+1)}} [(l_{r+1} - b_{r+1}) \eta_{mr} - b_{r+1} \eta_{m(r+1)}].$$

Lze dokázati, že se součinitelé při η_{mr} v obou vzorcích pro M_r rovnají. Ze vzorce (44^a) plyne

$$\lambda_{r-1} \delta_{(r-1)r} + \delta_{rr} + \frac{\delta_{r(r+1)}}{\lambda_r} = 0$$

a z toho dosazením

$$\lambda_{r-1} = - \frac{a_r}{l_r - a_r}, \quad \lambda_r = - \frac{a_{r+1}}{l_{r+1} - a_{r+1}}$$

dostaneme

$$- \frac{a_r}{l_r - a_r} \delta_{(r-1)r} + \delta_{rr} - \frac{l_{r+1} - a_{r+1}}{a_{r+1}} \delta_{r(r+1)} = 0.$$

Obdobně určíme ze vzorce (44^b)

$$\frac{\delta_{(r-1)r}}{\pi_r} + \delta_{rr} + \pi_{r+1} \delta_{(r+1)r} = 0;$$

nahradíme-li zase

$$\pi_r = - \frac{b_r}{l_r - b_r}, \quad \pi_{r+1} = - \frac{b_{r+1}}{l_{r+1} - b_{r+1}},$$

vyjde

$$- \frac{l_r - b_r}{b_r} \delta_{(r-1)r} + \delta_{rr} - \frac{b_{r+1}}{l_{r+1} - b_{r+1}} \delta_{(r+1)r} = 0.$$

Odečtením obou výsledních rovnic dostaneme

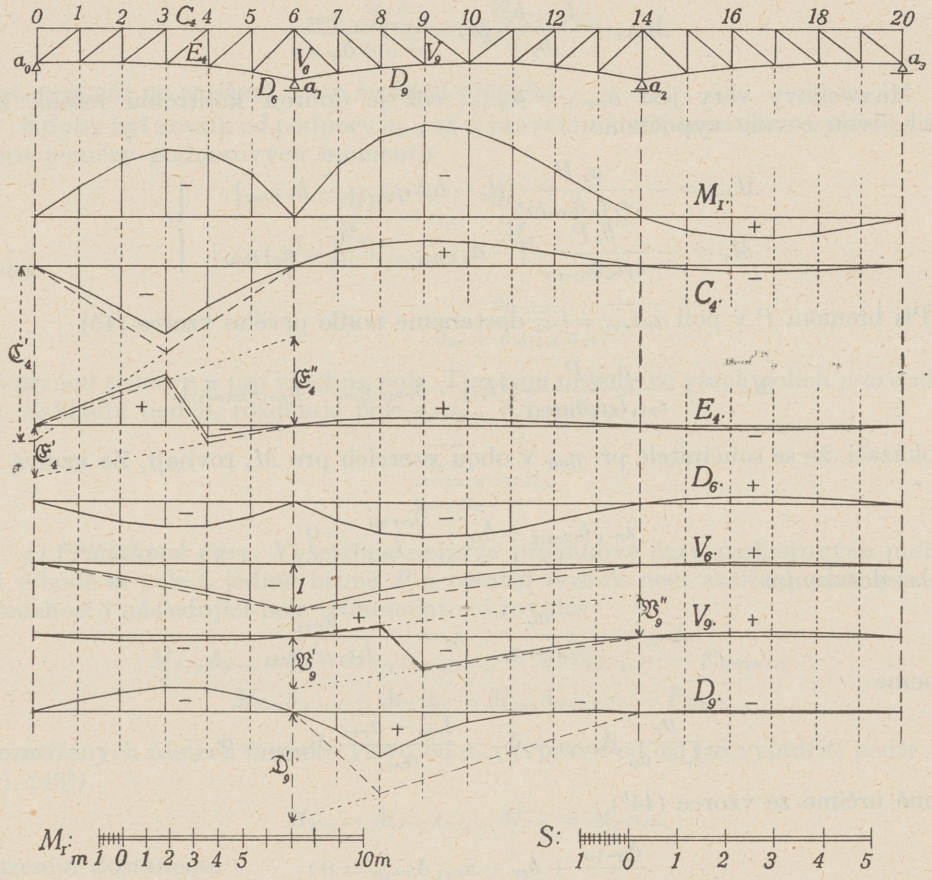
$$\left(\frac{l_r - b_r}{b_r} - \frac{a_r}{l_r - a}\right) \delta_{(r-1)r} = \left(\frac{l_{r+1} - a_{r+1}}{a_{r+1}} - \frac{b_{r+1}}{l_{r+1} - b_{r+1}}\right) \delta_{(r+1)r},$$

což dá po jednoduché úpravě

$$\frac{b_r (l_r - a_r)}{c_r l_r \delta_{(r-1)r}} = \frac{a_{r+1} (l_{r+1} - b_{r+1})}{c_{r+1} l_{r+1} \delta_{(r+1)r}}. \tag{46}$$

Tím je odvozena nová kontrola pro početní řešení.

Vzorci (45) jsou stanoveny příčinkové čáry podporových momentů. Z nich vypočteme příčinkové čáry osových sil prutů podle rovnic (38). Příčinkové čáry podporových reakcí určíme z čar momentů podporových jako u spojitého nosníku plnostěnného.



Obr. 22.

Příklad 4. Příhradový spojitý nosník trojúhelníkové soustavy pravoúhlé o třech polích délek $l_1 = l_3 = 27$ m, $l_2 = 36$ m má 20 stejných oddílů $a = 4{,}5$ m, výšky v podporách $v_0 = v_{20} = 3{,}6$ m, $v_6 = v_{14} = 5{,}4$ m, horní pás vodorovný a spodní lomený (obr. 22). Určíme příčinkové čáry osových sil prutů C_4, E_4, D_6, V_6, V_9 a D_9.

Nosník je souměrný; délky svislic a z nich vypočtené délky šikmých prutů jsou uvedeny v tab. I. a II. Pro souměrnost nosníku stačí k celému řešení vypočísti příčinkovou čáru podporového momentu M_I. Na staticky určitý převedeme daný nosník, vynecháme-li pruty spodního pasu D_6 a D_{15}; momenty jejich osových sil k horním styčným bodům *6*, *14* poznamenáme M_I, M_{II}. Moment $M_I = -1$ znamená pak ve zbytném prutu D_6 osovou sílu $\sigma' = -\frac{1}{r_6}$, je-li r_6 rámě síly D_6 k bodu *6*.

Zatížení $M_I = -1$, působící na část nosníku v prvém poli jakožto dvojice rovnoběžných a protivných sil $1/r_6$ v prutu D_6 a v bodě *6* (obr. 23*a*), vyvodí v podporách a_0, a_1 reakce

$$\alpha_0 = -\frac{1}{l_1} = -\frac{1}{27}, \qquad \alpha_1' = \frac{1}{l_1} = \frac{1}{27},$$

z nichž určíme snadno osové síly σ' v prutech prvého pole graficky. Pro část nosníku v druhém poli vyjádříme $M_I = -1$ dvojicí síly $1/r_6$ působící v prutu D_6 vpravo a rovnoběžné a protivné síly v bodě *6*; tato dvojice je v rovnováze s dvojicí reakcí $\alpha_1'' = -|\alpha_2| = \frac{1}{l_2} = \frac{1}{36}$. Z toho zase snadno určíme osové síly σ' v prutech druhého pole graficky (obr. 23*b*).

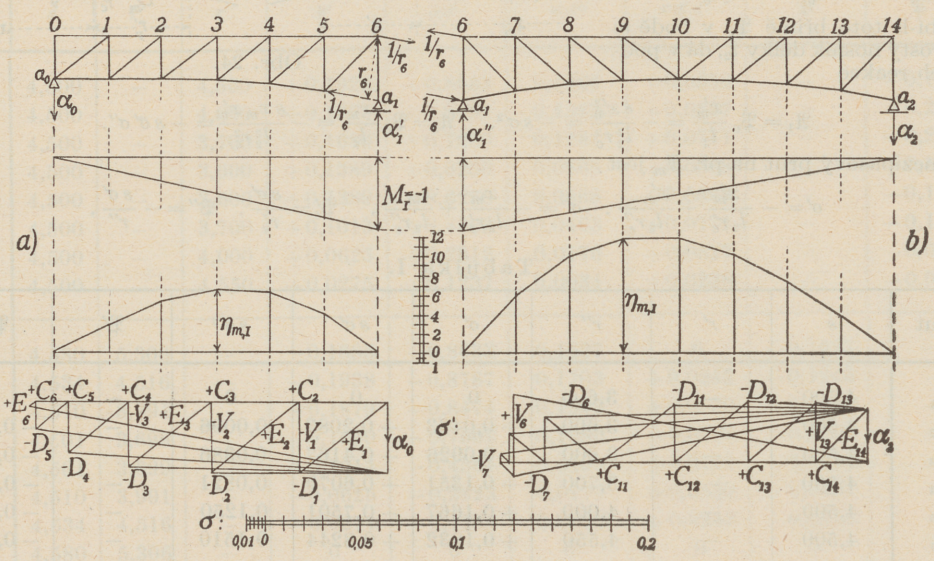
Přesněji řešili bychom síly σ' počtem podle vzorců pro soustavu trojúhelníkovou. Tyto vzorce lze s použitím ramen r', r'', jichž bude třeba k výpočtu ideálných břemen $\mathfrak{P}$, psáti takto: Pro pruty v prvém poli a v pravé části druhébo pole (obr. 24*a*) jest

$$C_m = -\frac{M_{m-1}}{r_c}, \quad D_m = \frac{M_m}{r_d}, \quad E_m = \frac{M_{m-1}}{r'_e} - \frac{M_m}{r''}, \quad V_m = \frac{M_{m+1}}{r'_v} - \frac{M_m}{r''_v},$$

při čemž ramena mají hodnoty

$$r_c = v_{m-1}, \quad r_d = v_m \cos\delta_m = v_m \frac{a}{d_m}, \quad r'_e = v_{m-1} \cos\varepsilon_m = v_{m-1} \frac{a}{e_m},$$

$$r''_e = v_m \cos\varepsilon_m = v_m \frac{a}{e_m}, \quad r'_v = a, \quad r''_v = a \frac{v_m}{v'_{m+1}} = a \frac{v_m}{2v_m - v_{m-1}}.$$



Obr. 23.

V levé polovici druhého pole (obr. 24*b*) platí vzorce

$$C_m = -\frac{M_m}{r_c}, \quad D_m = \frac{M_{m-1}}{r_d}, \quad E_m = \frac{M_m}{r'_e} - \frac{M_{m-1}}{r''_e}, \quad V_m = \frac{M_{m-1}}{r'_v} - \frac{M_m}{r''_v},$$

je-li

$$r_c = v_m, \quad r_d = v_{m-1} \cos\delta_m = v_{m-1} \frac{a}{d_m}, \quad r'_e = v_m \cos\varepsilon_m = v_m \frac{a}{e_m},$$

$$r''_e = v_{m-1} \cos\varepsilon_m = v_{m-1} \frac{a}{e_m}, \quad r'_v = a, \quad r''_v = a \frac{v_m}{v'_{m-1}} = a \frac{v_m}{2v_m - v_{m+1}}.$$

Ohybové momenty ke styčným bodům mají hodnoty:

$$\text{v prvém poli } M_m = -\frac{x_m}{l_1}, \quad \text{v druhém poli } M_m = -\frac{x'_m}{l_2},$$

je-li $x_m (x'_m)$ vzdálenost od levé (pravé) podpory příslušného dílu. Výsledky řešení sil σ' jsou obsaženy pro prvé pole v tab. I. a pro druhé pole v tab. II.

Ohybovou čáru základního nosníku pro zatížení $M_I = -1$ stanovíme jako výslednicovou čáru k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$. Neznáme-li předem rozměry prutů, řešíme přibližně tak, že předpokládáme ve všech prutech týž průřez U a vynecháme stálého činitele EU, tedy místo roztažení $\Delta s = \frac{Ss}{EU} = \beta\sigma'$ vypočteme

$$EU\Delta s = s\sigma',$$

kladouce $\beta = s$. Pro kontrolu určíme též $s\sigma'^2$ a $s\sigma'\sigma''$; poslední hodnoty se vyskytnou jen v prutech druhého pole, kde na základě souměrnosti je σ'' v libovolném prutu rovno σ' v prutu souměrném.

Ideálná břemena vypočteme ze vzorců

$$\mathfrak{P}' = \frac{\Delta s}{r'} = \frac{s\sigma'}{r'}, \quad \mathfrak{P}'' = -\frac{\Delta s}{r''} = -\frac{s\sigma'}{r''};$$

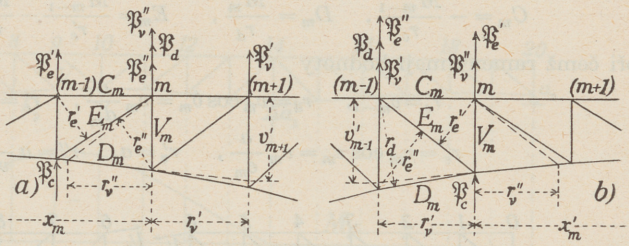
spodní pasy dají břemena $\mathfrak{P}'$ v přidružených středech momentových, horní pasy břemena $\mathfrak{P}''$ rovněž v přidružených středech, příčky a svislice pak obojí břemena podle obr. 24*a* (v prvém poli a v pravé polovici druhého pole) a 24*b* (v levé polovici druhého pole).

Výpočet můžeme podrobně kontrolovati hodnotami $s\sigma'^2$ a $s\sigma'\sigma''$. Pro pasový prut, na př. C_m v druhém poli, jest

$$\sigma' = \frac{x'_m}{l_2 r_c}, \quad \sigma'' = \frac{x_m}{l_2 r_c},$$

$$\mathfrak{P}_c = -\frac{s\sigma'}{r_c} = -\frac{s x'_m}{l_2 r_c^2}.$$

Působí-li toto břímě $\mathfrak{P}_c$ v bodě m na prostý nosník délky l_2, dá v podporách reakce



Obr. 24.

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{P}_c \frac{x'_m}{l_2} = -\frac{s x'^2_m}{l_2^2 r_c^2} = -s\sigma'^2, \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{P}_c \frac{x_m}{l_2} = -\frac{s x_m x'_m}{l_2^2 r_c^2} = -s\sigma'\sigma''.$$

Pro mezipasový prut na př. E_m jest

$$\sigma' = -\frac{x'_m}{l_2 r'_e} + \frac{x'_{m-1}}{l_2 r''_e}, \quad \sigma'' = -\frac{x_m}{l_2 r'_e} + \frac{x_{m-1}}{l_2 r''_e}, \quad \mathfrak{P}'_e = \frac{s\sigma'}{r'_e}, \quad \mathfrak{P}'' = -\frac{s\sigma'}{r''},$$

Tabulka I.

Prut	s	r'	r''	σ'	$s\sigma'$	$s\sigma'^2$	$\mathfrak{P}'$	$\mathfrak{P}''$
C_1	4,500	—	3,600	0	0	0	—	0
C_2	4,500	—	3,600	+0,0463	+0,2083	0,0096	—	−0,0579
C_3	4,500	—	3,600	+0,0926	+0,4167	0,0386	—	−0,1158
C_4	4,500	—	3,700	+0,1351	+0,6079	0,0821	—	−0,1643
C_5	4,500	—	4,000	+0,1667	+0,7501	0,1250	—	−0,1875
C_6	4,500	—	4,550	+0,1832	+0,8244	0,1510	—	−0,1812
D_1	4,500	3,600	—	−0,0463	−0,2083	0,0096	−0,0579	—
D_2	4,500	3,600	—	−0,0926	−0,4167	0,0386	−0,1158	—
D_3	4,501	3,699	—	−0,1352	−0,6085	0,0823	−0,1645	—
D_4	4,510	3,991	—	−0,1670	−0,7532	0,1258	−0,1887	—
D_5	4,534	4,516	—	−0,1845	−0,8365	0,1543	−0,1852	—
D_6	4,580	5,306	—	−0,1885	−0,8633	0,1627	−0,1627	—
E_1	5,763	2,811	2,811	+0,0593	+0,3417	0,0203	+0,1216	−0,1216
E_2	5,763	2,811	2,811	+0,0593	+0,3417	0,0203	+0,1216	−0,1216
E_3	5,763	2,811	2,889	+0,0545	+0,3141	0,0171	+0,1117	−0,1087
E_4	5,826	2,858	3,090	+0,0408	+0,2377	0,0097	+0,0831	−0,0769
E_5	6,021	2,990	3,401	+0,0220	+0,1325	0,0029	+0,0443	−0,0389
E_6	6,399	3,200	3,797	+0,0030	+0,0192	0,0001	+0,0060	−0,0051
V_1	3,600	4,500	4,500	−0,0370	−0,1332	0,0049	−0,0296	+0,0296
V_2	3,600	4,500	4,500	−0,0370	−0,1332	0,0049	−0,0296	+0,0296
V_3	3,700	4,500	4,382	−0,0340	−0,1258	0,0043	−0,0280	+0,0287
V_4	4,000	4,500	4,186	−0,0259	−0,1036	0,0027	−0,0230	+0,0243
V_5	4,550	4,500	4,015	−0,0146	−0,0664	0,0010	−0,0148	+0,0165
Součet						1,0678		

a tato dvě břemena dají v podporách prostého nosníku l_2 reakce

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{P}'_e \frac{x'_m}{l_2} + \mathfrak{P}'' \frac{x'_{m-1}}{l_2} = s\sigma' \left(\frac{x'_m}{l_2 r'_e} - \frac{x'_{m-1}}{l_2 r''_e} \right) = -s\sigma'^2, \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{P}'_e \frac{x_m}{l_2} + \mathfrak{P}''_e \frac{x_{m-1}}{l_2} = s\sigma' \left(\frac{x_m}{l_2 r'_e} - \frac{x_{m-1}}{l_2 r''_e} \right) = -s\sigma'\sigma''.$$

Podobně se dokáže totéž pro ostatní pruty. Můžeme tedy kontrolovati pro každý jednotlivý prut podle předchozích vzorců výpočet břemen $\mathfrak{P}$ a v součtu vychází též

$$\mathfrak{A}'_1 = \sum_0^1 \mathfrak{P} \frac{x}{l_1} = -\sum_0^{l_1} s\sigma'^2, \quad \mathfrak{A}''_1 = \sum_0^{l_2} \mathfrak{P} \frac{x'}{l_2} = -\sum_0^{l_2} s\sigma'^2, \quad \mathfrak{A}_2 = \sum_0^{l_2} \mathfrak{P} \frac{x}{l_2} = -\sum_0^{l_2} s\sigma'\sigma''.$$

Tabulka II.

Prut	s	r'	r''	σ'	$s\sigma'$	$s\sigma'^2$	$s\sigma'\sigma''$	$\mathfrak{P}'$	$\mathfrak{P}''$
C_7	4,500	—	4,550	+0,1923	+0,8653	0,1664	+0,0238	—	−0,1902
C_8	4,500	—	4,000	+0,1875	+0,8437	0,1582	+0,0527	—	−0,2109
C_9	4,500	—	3,700	+0,1689	+0,7600	0,1284	+0,0771	—	−0,2054
C_{10}	4,500	—	3,600	+0,1389	+0,6250	0,0868	+0,0868	—	−0,1736
C_{11}	4,500	—	3,600	+0,1389	+0,6250	0,0868	+0,0868	—	−0,1736
C_{12}	4,500	—	3,700	+0,1013	+0,4563	0,0463	+0,0771	—	−0,1233
C_{13}	4,500	—	4,000	+0,0625	+0,2812	0,0176	+0,0527	—	−0,0703
C_{14}	4,500	—	4,550	+0,0275	+0,1237	0,0034	+0,0238	—	−0,0272
D_7	4,580	5,306	—	−0,1885	−0,8633	0,1627	0	−0,1627	—
D_8	4,534	4,516	—	−0,1938	−0,8787	0,1703	+0,0243	−0,1946	—
D_9	4,510	3,991	—	−0,1879	−0,8474	0,1592	+0,0530	−0,2123	—
D_{10}	4,501	3,699	—	−0,1690	−0,7607	0,1286	+0,0771	−0,2056	—
D_{11}	4,501	3,699	—	−0,1014	−0,4564	0,0463	+0,0771	−0,1234	—
D_{12}	4,510	3,991	—	−0,0626	−0,2823	0,0177	+0,0530	−0,0707	—
D_{13}	4,534	4,516	—	−0,0277	−0,1256	0,0035	+0,0243	−0,0278	—
D_{14}	4,580	5,306	—	0	0	0	0	0	—
E_7	6,399	3,200	3,797	−0,0100	−0,0640	0,0006	+0,0025	−0,0200	+0,0168
E_8	6,021	2,990	3,401	+0,0065	+0,0391	0,0003	−0,0018	+0,0131	−0,0115
E_9	5,826	2,858	3,090	+0,0240	+0,1398	0,0034	−0,0070	+0,0489	−0,0452
E_{10}	5,763	2,811	2,889	+0,0384	+0,2213	0,0085	−0,0106	+0,0787	−0,0766
E_{11}	5,763	2,811	2,889	−0,0481	−0,2772	0,0133	−0,0106	−0,0986	+0,0959
E_{12}	5,826	2,858	3,090	−0,0503	−0,2930	0,0147	−0,0070	−0,1025	+0,0948
E_{13}	6,021	2,990	3,401	−0,0468	−0,2818	0,0132	−0,0018	−0,0942	+0,0828
E_{14}	6,399	3,200	3,797	−0,0391	−0,2502	0,0098	+0,0025	−0,0782	+0,0659
V_6	5,400	—	—	+0,0422	—	—	—	—	—
V_7	4,550	4,500	4,015	−0,0043	−0,0196	0,0001	−0,0006	−0,0043	+0,0049
V_8	4,000	4,500	4,186	−0,0152	−0,0608	0,0009	−0,0019	−0,0135	+0,0145
V_9	3,700	4,500	4,382	−0,0241	−0,0892	0,0021	−0,0027	−0,0198	+0,0203
V_{10}	3,600	—	—	0	0	0	0	0	0
V_{11}	3,700	4,500	4,382	+0,0300	+0,1110	0,0033	−0,0027	+0,0247	−0,0253
V_{12}	4,000	4,500	4,186	+0,0319	+0,1276	0,0041	−0,0019	+0,0284	−0,0305
V_{13}	4,550	4,500	4,015	+0,0311	+0,1415	0,0044	−0,0006	+0,0314	−0,0352
V_{14}	5,400	—	—	+0,0278	—	—	—	—	—
Součet						1,4609	+0,7454		

Sílu σ' v prutu V_6 vypočteme z rovnováhy v bodě a_1, v němž ze souměrnosti vyjde $D_7 = -\frac{1}{r_6}$ a

$$V_6 = -\alpha_1'' - \frac{2}{r_6}\sin\delta_6 = -\frac{1}{36} + \frac{2}{5{,}306}\cdot\frac{0{,}850}{4{,}580} = +0{,}0422.$$

V prutu V_{14} je síla

$$V_{14} = -\alpha_2 = +\frac{1}{l_2} = +0{,}0278.$$

Břemena $\mathfrak{P}$, působící v téže svislici, nyní algebraicky sečteme. Obrazce 24*a*,*b* ukazují, do kterých bodů dávají jednotlivé pruty břemena. V tab. III. jsou sečtena břemena z prutů v prvém poli, v tab. IV. břemena z prutů v druhém poli.

K břemenům v prvém poli stanovíme reakce prostého nosníku

$$\mathfrak{A}_0 = \frac{1}{6}(6\,\mathfrak{P}_0 + 5\,\mathfrak{P}_1 + 4\,\mathfrak{P}_2 + 3\,\mathfrak{P}_3 + 2\,\mathfrak{P}_4 + \mathfrak{P}_5) = -0{,}49401,$$

$$\mathfrak{A}_1' = \frac{1}{6}(\mathfrak{P}_1 + 2\,\mathfrak{P}_2 + 3\,\mathfrak{P}_3 + 4\,\mathfrak{P}_4 + 5\,\mathfrak{P}_5 + 6\,\mathfrak{P}_6) = -1{,}06829.$$

Kontrolou je vztah $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1' = \sum_0^6 \mathfrak{P}$. Druhou kontrolu dává rovnice

$$\mathfrak{A}_1' = -\sum_0^{l_1} s\,\sigma'^2;$$

z tab. I. vyjde $\sum_0^{l_1} s\,\sigma'^2 = 1{,}0678$, je zde tedy dobrý souhlas. Odčítáme-li od reakce $\mathfrak{A}_0$ postupně břemena $\mathfrak{P}$, dostaneme posouvající síly $\mathfrak{T}$; na konec musí ovšem vyjíti reakce $\mathfrak{A}_1'$ s opačným znaménkem. Sčítáme-li dále $\mathfrak{T}$ od levé podpory, počínajíce hodnotou 0, dostaneme podíly $\frac{\mathfrak{M}}{a}$ a z nich určíme ohybové pořadnice

$$\eta_{m,I} = a\cdot\frac{\mathfrak{M}}{a} = 4{,}5\,\frac{\mathfrak{M}}{a}.$$

Další kontrola je v tom, že v bodě 6 musí vyjíti $\eta_{m,I} = 0$; tomu je velmi přibližně vyhověno.

Tabulka III.

Bod	0	1	2	3	4	5	6
$\mathfrak{P}_v$	0	− 0,0579	− 0,1158	− 0,1643	− 0,1875	− 0,1812	−
$\mathfrak{P}_d$	0	− 0,0579	− 0,1158	− 0,1645	− 0,1887	− 0,1852	− 0,1627
$\mathfrak{P}_e$	+ 0,1216	− 0,1216	− 0,1216	− 0,1087	− 0,0769	− 0,0389	− 0,0051
	−	+ 0,1216	+ 0,1117	+ 0,0831	+ 0,0443	+ 0,0060	−
$\mathfrak{P}_v$	−	+ 0,0296	− 0,0296	− 0,0296	− 0,0280	− 0,0230	− 0,0148
	−	−	+ 0,0296	+ 0,0287	+ 0,0243	+ 0,0165	−
$\mathfrak{P}$	+ 0,1216	− 0,0862	− 0,2415	− 0,3553	− 0,4125	− 0,4058	− 0,1826
$\mathfrak{A}$	− 0,49401	−	−	−	−	−	− 1,06829
$\mathfrak{T}$	− 0,61561	− 0,52941	− 0,28791	+ 0,06739	+ 0,47989	+ 0,88569	
$\mathfrak{M}/a$	0	− 0,61561	− 1,14502	− 1,43293	− 1,36554	− 0,88565	+ 0,00004
$\eta_{m,I}$	0	− 2,7702	− 5,1526	− 6,4482	− 6,1449	− 3,9854	0

Stejně postupujeme v druhém poli (tab. IV.). K břemenům $\mathfrak{P}$ vypočteme reakce

$$\mathfrak{A}_1'' = \frac{1}{8}(8\,\mathfrak{P}_6 + 7\,\mathfrak{P}_7 + 6\,\mathfrak{P}_8 + 5\,\mathfrak{P}_9 + \ldots + \mathfrak{P}_{13}) = -1{,}46066,$$

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{8}(\mathfrak{P}_7 + 2\,\mathfrak{P}_8 + 3\,\mathfrak{P}_9 + 4\,\mathfrak{P}_{10} + \ldots + 8\,\mathfrak{P}_{14}) = -0{,}74524;$$

jest ovšem $\mathfrak{A}_1'' + \mathfrak{A}_2 = \sum_0^{14} \mathfrak{P}$. Dále stanovíme z tab. II. součty

$$\sum_0^{l_2} s\,\sigma'^2 = 1{,}4609, \quad \sum_0^{l_2} s\,\sigma'\sigma'' = +0{,}7454,$$

jež dávají kontroly

$$\mathfrak{A}_1'' = -\sum_0^{l_2} s\,\sigma'^2, \quad \mathfrak{A}_2 = -\sum_0^{l_2} s\,\sigma'\sigma'';$$

stanovené hodnoty tomu dobře vyhovují.

Tabulka IV.

Bod	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\mathfrak{P}_c$	—	− 0,1902	− 0,2109	− 0,2054	−0,1736 −0,1736	− 0,1233	− 0,0703	− 0,0272	—
$\mathfrak{P}_d$	− 0,1627	− 0,1946	− 0,2123	− 0,2056	—	− 0,1234	− 0,0707	− 0,0278	—
$\mathfrak{P}_e$	+ 0,0168	− 0,0200	+ 0,0131	+ 0,0489	+ 0,0787	+ 0,0959	+ 0,0948	+ 0,0828	+ 0,0659
	—	− 0,0115	− 0,0452	− 0,0766	− 0,0986	− 0,1025	− 0,0942	− 0,0782	—
$\mathfrak{P}_v$	− 0,0043	+ 0,0049	+ 0,0145	+ 0,0203	—	− 0,0253	+ 0,0247	+ 0,0284	+ 0,0314
	—	− 0,0135	− 0,0198	—	—	—	− 0,0305	− 0,0352	—
$\mathfrak{P}$	− 0,1502	− 0,4249	− 0,4606	− 0,4184	− 0,3671	− 0,2786	− 0,1462	− 0,0572	+ 0,0973
$\mathfrak{A}$	− 1,46066	—	—	—	—	—	—	—	− 0,74524
$\mathfrak{T}$	− 1,31046	− 0,88556	− 0,42496	− 0,00656	+ 0,36054	+ 0,63914	+ 0,78534	+ 0,84254	
$\mathfrak{M}/a$	0	− 1,31046	− 2,19602	− 2,62098	− 2,62754	− 2,26700	− 1,62786	− 0,84252	+ 0,00002
$\eta_{m,I}$	0	− 5,8971	− 9,8821	− 11,7944	− 11,8239	− 10,2015	− 7,3254	− 3,7913	0

Reakcemi $\mathfrak{A}$ jsou dány početně podle rovnic (42) odchylky tečen k ohybovým čarám $\eta_{m,I}$ v podporových bodech:

$\delta_{01} = \mathfrak{A}_0 = -0{,}49401$, $\delta_{11} = \delta_{11}' + \delta_{11}'' = \mathfrak{A}_1' + \mathfrak{A}_1'' = -1{,}06829 - 1{,}46066 = -2{,}52895$, $\delta_{21} = \mathfrak{A}_2 = -0{,}74524$.

Z toho určíme podle vzorců (44^a), (44^b) poměry základních bodů:

$$\lambda_0 = 0, \ \lambda_1 = -\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}} = -\frac{1}{3{,}3935} = \pi_2, \ \lambda_2 = -\frac{\delta_{32}}{\delta_{22} + \delta_{12}\lambda_1} = -\frac{\delta_{01}}{\delta_{11} + \delta_{21}\lambda_1} = -\frac{1}{4{,}6747} = \pi_1;$$

na základě souměrnosti platí totiž

$$\lambda_1 = \pi_2, \ \lambda_2 = \pi_1, \ \delta_{32} = \delta_{01}, \ \delta_{22} = \delta_{11}, \ \delta_{12} = \delta_{21}.$$

Úseky, na něž dělí základní body délky polí, jsou

$$a_1 = 0, \ b_1 = -\frac{\pi_1}{1 - \pi_1} l_1 = \frac{27}{5{,}6747} = 4{,}7580 \text{ m}, \ c_1 = l_1 - a_1 - b_1 = 22{,}2420 \text{ m},$$

$$a_2 = b_2 = -\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1} l_2 = \frac{36}{4{,}3935} = 8{,}1939 \text{ m}, \ c_2 = l_2 - a_2 - b_2 = 19{,}6122 \text{ m}.$$

Pro výpočet příčinkové čáry M_I potřebujeme součinitele

$$-\frac{b_1}{c_1\,\delta_{01}} = \frac{4{,}7580}{22{,}2420 \cdot 0{,}49401} = 0{,}43302, \quad -\frac{a_2\,(l_2 - b_2)}{c_2\,l_2\,\delta_{12}} = \frac{8{,}1939\,(36 - 8{,}1939)}{19{,}6122 \cdot 36 \cdot 0{,}74524} = 0{,}43302,$$

$$\frac{a_2\,b_2}{c_2\,l_2\,\delta_{12}} = -\frac{8{,}1939^2}{19{,}6122 \cdot 36 \cdot 0{,}74524} = -0{,}12760.$$

Je vyhověno kontrole dané rovnicí (46). Příčinková čára M_I má podle vzorců (45) v prvém poli pořadnice

$$M_I = -\frac{b_1}{c_1 \delta_{01}} \eta_{m,I} = 0{,}43302\, \eta_{m,I},$$

v druhém poli

$$M_I = -\frac{a_2 (l_2 - b_2)\, \eta_{m,I} - a_2 b_2\, \eta_{m,II}}{c_2 l_2 \delta_{12}} = 0{,}43302\, \eta_{m,I} - 0{,}12760 \eta_{m,II}.$$

Pořadnice M_I v třetím poli plynou z rovnice

$$M_I = M_{II}\, \lambda_1 = -\frac{M_{II}}{3{,}3935} = -0{,}29468\, M_{II}.$$

Na základě souměrnosti jsou pořadnice $\eta_{m,II}$ rovny pořadnicím $\eta_{m,I}$ v souměrných bodech a pořadnice M_{II} v třetím poli rovny pořadnicím M_I v souměrných bodech prvého pole. Výsledky výpočtu jsou sestaveny v tabulkách V. *a*, *b*, *c*.

Tabulka V*a*.

Bod	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
$\eta_{m,I}$	0	− 2,7702	− 5,1526	− 6,4482	− 6,1449	− 3,9854	0
M_I	0	− 1,1996	− 2,2312	− 2,7922	− 2,6609	− 1,7258	0

Tabulka V*b*.

Bod	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
$\eta_{m,I}$	− 5,8971	− 9,8821	− 11,7944	− 11,8239	− 10,2015	− 7,3254	− 3,7913	0
$\eta_{m,II}$	− 3,7913	− 7,3254	− 10,2015	− 11,8239	− 11,7944	− 9,8821	− 5,8971	0
$0{,}43302\, \eta_{m,I}$	− 2,5536	− 4,2791	− 5,1072	− 5,1200	− 4,4175	− 3,1720	− 1,6417	0
$-0{,}12760\, \eta_{m,II}$	+ 0,4838	+ 0,9347	+ 1,3017	+ 1,5087	+ 1,5050	+ 1,2610	+ 0,7525	0
M_I	− 2,0698	− 3,3444	− 3,8055	− 3,6113	− 2,9125	− 1,9110	− 0,8892	0

Tabulka V*c*.

Bod	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*
M_{II}	− 1,7258	− 2,6609	− 2,7922	− 2,2312	− 1,1996	0
M_I	+ 0,5086	+ 0,7841	+ 0,8228	+ 0,6575	+ 0,3535	0

Známe-li příčinkovou čáru M_I s níž je zde čára M_{II} souměrná, vypočteme příčinkové pořadnice osových sil podle rovnice

$$S = \mathfrak{S} - \sigma' M_I - \sigma'' M_{II}.$$

Pro stanovení čar $\mathfrak{S}$ v základní soustavě, již tvoří v každém poli prostý nosník, vypočteme pořadnice (obr. 22)

$$\mathfrak{C}'_4 = -1 \cdot \frac{x_c}{r_c} = -\frac{3 \cdot 4{,}5}{3{,}7} = -3{,}64865, \quad \mathfrak{D}_6 = 0,$$

$$\mathfrak{E}'_4 = \frac{1 \cdot x_3}{r'_e} - \frac{1 \cdot x_4}{r''_e} = \frac{3 \cdot 4{,}5}{2{,}858} - \frac{4 \cdot 4{,}5}{3{,}090} = -1{,}10166,$$

$$\mathfrak{E}''_4 = \frac{1 \cdot x'_3}{r'_e} - \frac{1 \cdot x'_4}{r''_e} = \frac{3 \cdot 4{,}5}{2{,}858} - \frac{2 \cdot 4{,}5}{3{,}090} = +1{,}81096,$$

$$\mathfrak{B}'_9 = \frac{1 \cdot x_8}{r'_v} - \frac{1 \cdot x_9}{r''_v} = \frac{2 \cdot 4{,}5}{4{,}5} - \frac{3 \cdot 4{,}5}{4{,}382} = -1{,}08079,$$

$$\mathfrak{B}''_9 = \frac{1 \cdot x'_8}{r'_v} - \frac{1 \cdot x'_9}{r''_v} = \frac{6 \cdot 4{,}5}{4{,}5} - \frac{5 \cdot 4{,}5}{4{,}382} = +0{,}86536,$$

$$\mathfrak{D}'_9 = \frac{1 \cdot x_8}{r_d} = \frac{2 \cdot 4{,}5}{3{,}991} = +2{,}25507.$$

Z těchto hodnot vypočteme dále podle obrazce příčinkové pořadnice $\mathfrak{S}$ pro jednotlivé osové síly. Síly σ', které náleží jen k prutům v prvém a druhém poli, jsou uvedeny pro všechny pruty v tabulce I. a II.; σ'' jsou rovny hodnotám σ' souměrných v prutech a vyskytují se pouze u prutů druhého a třetího pole. V prutu D_6 odpadá $\mathfrak{S}$ i σ'' a vyjde prostě $D_6 = -\sigma' M_I$ v celém rozsahu nosníku. Totéž platí pro pruty C_4, E_4 v druhém a třetím poli. U prutu D_9 odpadá v prvém a třetím poli $\mathfrak{S}$, rovněž tak u prutů V_6 a V_9 v třetím poli. Výpočet příčinkových pořadnic osových sil je proveden v tabulkách VI. *a*, *b*, *c* a příčinkové čáry jsou podle toho vyneseny v obr. 22.

Tabulka VI *a*.

Bod		*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
C_4	$\mathfrak{S}$	0	− 0,6081	− 1,2162	− 1,8243	− 1,2162	− 0,6081	0
	$-\sigma' M_I$	0	+ 0,1620	+ 0,3014	+ 0,3772	+ 0,3595	+ 0,2332	0
	S	0	− 0,4461	− 0,9148	− 1,4471	− 0,8567	− 0,3749	0
E_4	$\mathfrak{S}$	0	+ 0,3018	+ 0,6036	+ 0,9055	− 0,3672	− 0,1836	0
	$-\sigma' M_I$	0	+ 0,0449	+ 0,0910	+ 0,1139	+ 0,1086	+ 0,0704	0
	S	0	+ 0,3467	+ 0,6946	+ 1,0194	− 0,2586	− 0,1132	0
D_6		0	− 0,2261	− 0,4205	− 0,5263	− 0,5016	− 0,3253	0
V_6	$\mathfrak{S}$	0	− 0,1667	− 0,3333	− 0,5000	− 0,6667	− 0,8333	− 1,0
	$-\sigma' M_I$	0	+ 0,0506	+ 0,0942	+ 0,1178	+ 0,1123	+ 0,0728	0
	$-\sigma'' M_{II}$	0	− 0,0098	− 0,0183	− 0,0229	− 0,0218	− 0,0141	0
	S	0	− 0,1199	− 0,2574	− 0,4051	− 0,5762	− 0,7746	− 1,0
V_9	$-\sigma' M_I$	0	− 0,0289	− 0,0538	− 0,0673	− 0,0641	− 0,0416	0
	$-\sigma'' M_{II}$	0	− 0,0106	− 0,0197	− 0,0247	− 0,0235	− 0,0153	0
	S	0	− 0,0395	− 0,0735	− 0,0920	− 0,0876	− 0,0569	0
D_9	$-\sigma' M_I$	0	− 0,2254	− 0,4192	− 0,5247	− 0,4999	− 0,3243	0
	$-\sigma'' M_{II}$	0	+ 0,0221	+ 0,0412	+ 0,0515	+ 0,0491	+ 0,0318	0
	S	0	− 0,2033	− 0,3780	− 0,4732	− 0,4508	− 0,2925	0

Tabulka VI*b*.

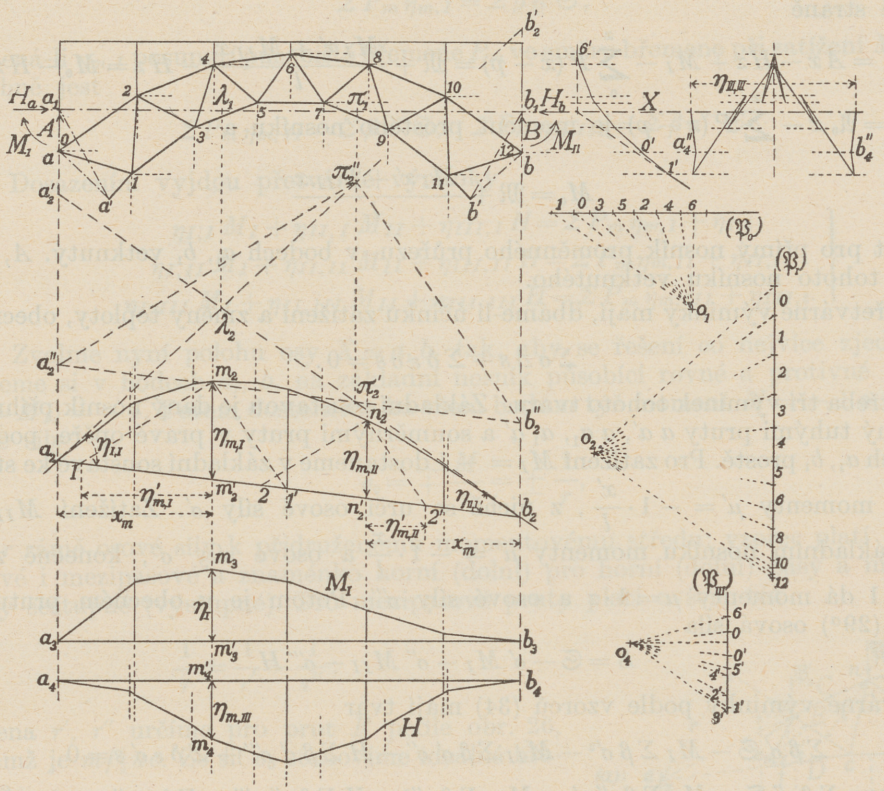
Bod		7	8	9	10	11	12	13
C_4		+ 0,2796	+ 0,4518	+ 0,5141	+ 0,4879	+ 0,3935	+ 0,2582	+ 0,1201
E_4		+ 0,0844	+ 0,1365	+ 0,1553	+ 0,1473	+ 0,1188	+ 0,0780	+ 0,0363
D_6		− 0,3901	− 0,6304	− 0,7173	− 0,6807	− 0,5490	− 0,3602	− 0,1676
V_6	$\mathfrak{S}$	− 0,8750	− 0,7500	− 0,6250	− 0,5000	− 0,3750	− 0,2500	− 0,1250
	$-\sigma' M_I$	+ 0,0873	+ 0,1411	+ 0,1606	+ 0,1524	+ 0,1229	+ 0,0806	+ 0,0375
	$-\sigma'' M_{II}$	+ 0,0247	+ 0,0531	+ 0,0810	+ 0,1004	+ 0,1058	+ 0,0930	+ 0,0575
	S	− 0,7630	− 0,5558	− 0,3834	− 0,2472	− 0,1463	− 0,0764	− 0,0300
V_9	$\mathfrak{S}$	+ 0,1082	+ 0,2163	− 0,6755	− 0,5404	− 0,4053	− 0,2702	− 0,1351
	$-\sigma' M_I$	− 0,0499	− 0,0806	− 0,0917	− 0,0870	− 0,0702	− 0,0461	− 0,0214
	$-\sigma'' M_{II}$	+ 0,0267	+ 0,0573	+ 0,0874	+ 0,1083	+ 0,1142	+ 0,1003	+ 0,0621
	S	+ 0,0850	+ 0,1930	− 0,6798	− 0,5191	− 0,3613	− 0,2160	− 0,0944
D_9	$\mathfrak{S}$	+ 0,8457	+ 1,6913	+ 1,4094	+ 1,1275	+ 0,8457	+ 0,5638	+ 0,2819
	$-\sigma' M_I$	− 0,3889	− 0,6284	− 0,7151	− 0,6786	− 0,5473	− 0,3591	− 0,1671
	$-\sigma'' M_{II}$	− 0,0557	− 0,1196	− 0,1823	− 0,2261	− 0,2382	− 0,2094	− 0,1296
	S	+ 0,4011	+ 0,9433	+ 0,5120	+ 0,2228	+ 0,0602	− 0,0047	− 0,0148

Tabulka VI*c*.

Bod		14	15	16	17	18	19	20
C_4		0	− 0,0687	− 0,1059	− 0,1112	− 0,0888	− 0,0478	0
E_4		0	− 0,0208	− 0,0320	− 0,0336	− 0,0268	− 0,0144	0
D_6		0	+ 0,0959	+ 0,1478	+ 0,1551	+ 0,1239	+ 0,0666	0
V_6	$-\sigma' M_I$	0	− 0,0215	− 0,0331	− 0,0347	− 0,0277	− 0,0149	0
	$-\sigma'' M_{II}$	0	+ 0,0480	+ 0,0740	+ 0,0776	+ 0,0620	+ 0,0333	0
	S	0	+ 0,0265	+ 0,0409	+ 0,0429	+ 0,0343	+ 0,0184	0
V_9	$-\sigma' M_I$	0	+ 0,0123	+ 0,0189	+ 0,0198	+ 0,0158	+ 0,0085	0
	$-\sigma'' M_{II}$	0	+ 0,0518	+ 0,0798	+ 0,0838	+ 0,0669	+ 0,0360	0
	S	0	+ 0,0641	+ 0,0987	+ 0,1036	+ 0,0827	+ 0,0445	0
D_9	$-\sigma' M_I$	0	+ 0,0956	+ 0,1473	+ 0,1546	+ 0,1235	+ 0,0664	0
	$-\sigma'' M_{II}$	0	− 0,1080	− 0,1666	− 0,1748	− 0,1397	− 0,0751	0
	S	0	− 0,0124	− 0,0193	− 0,0202	− 0,0162	− 0,0087	0

Předchozí přibližný výpočet obsahuje již všechny potřebné prvky pro přesný výpočet, jenž by se lišil od provedeného přibližného výpočtu jen tím, že by bylo břemena $\mathfrak{P}$ a hodnoty $s\sigma'^2$ i $s\sigma'\sigma''$ děliti pro každý prut jeho průřezovou plochou U.

10. Příhradový oblouk bez kloubů. Souměrný příhradový oblouk soustavy trojúhelníkové (obr. 25) je připojen k opěrám v bodech a, a', b, b', tedy bez kloubů. V opěrách působí výslední šikmé reakce $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, jež vztahujeme k bodům a_1, b_1 nad opěrovými body a, b. V bodě a_1 (b_1) má reakce $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$) složky A, H_a, M_I (B, $-H_b$, $-M_{II}$). Celkem je šest neznámých složek reakcí a tři statické výminky rovnováhy vnějších sil, je tedy příhradový oblouk bez kloubů trojnásob staticky neurčitý. Omezíme se na svislé zatížení, při němž je $H_a = H_b = H$.



Obr. 25.

Za staticky neurčité veličiny zvolme M_I, M_{II}, H, jimiž vyjádříme všechny ostatní složky reakcí i moment k libovolnému bodu styčnému, potřebný pro výpočet osových sil. Řešíme tu jako u plnostěnného oblouku proměnného průřezu.[1]) Pro zatížení svislými břemeny P platí výminky rovnováhy

$$A + B - \sum_0^l P = 0, \quad M_I + A\,l - \sum_0^l P\,p' - M_{II} = 0;$$

druhá je momentová výminka k bodu b_1 a dá

$$A = \frac{1}{l}\sum_0^l P\,p' + \frac{M_{II} - M_I}{l} = \mathfrak{A}_0 + \frac{M_{II} - M_I}{l}, \qquad (47^a)$$

znamená-li $\mathfrak{A}_0 = \frac{1}{l}\sum_0^l P\,p'$ levou reakci prostého nosníku délky $\overline{a_1\,b_1} = l$ při zatížení

[1]) Viz spisovatelovu „Theorii čar příčinkových“, III. (1922), str. 202 a d.

danými břemeny P. Obdobně plyne z momentové výminky rovnováhy k bodu a_1 reakce

$$B = \mathfrak{B}_0 - \frac{M_{II} - M_I}{l}, \tag{47b}$$

je-li $\mathfrak{B}_0 = \frac{1}{l}\sum_0^l P p$ pravá reakce prostého nosníku $a_1 b_1$ při daném zatížení. K libovolnému styčníku, jenž má k bodu a_1 (b_1) souřadnice x, z (x', z), je moment vnějších sil po levé straně

$$M = A x - H z + M_I - \sum_0^x P (x - p) = \mathfrak{M} + \frac{M_I x' + M_{II} x}{l} - H z = M_0 - H z, \tag{48a}$$

kde $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_0 x - \sum^x P (x - p)$ je moment prostého nosníku a

$$M_0 = \mathfrak{M} + \frac{M_I x' + \mathfrak{M}_{II} x}{l} \tag{48b}$$

moment pro přímý nosník proměnného průřezu, v bodech a_1, b_1 vetknutý. A, B jsou reakce tohoto nosníku vetknutého.

Přetvárné výminky mají, dbáme-li účinku zatížení a změny teploty, obecný tvar

$$\Sigma \sigma \Delta s + \Sigma \delta \varepsilon \sigma s = 0 .$$

Zde je třeba tří výminek tohoto tvaru. Základní soustavou je daný nosník příhradový doplněný tuhými pruty $a\,a'$, $a\,a_1$, $a_1\,a'$ a souměrnými pruty v pravé opěře, podepřený v bodech a_1, b_1 prostě. Pro zatížení $M_I = -1$ dostaneme v základní soustavě ke styčným bodům momenty $\mu' = -1 \cdot \frac{x'}{l}$, z nichž se určí osové síly σ'. Zatížení $M_{II} = -1$ dá v základním nosníku momenty $\mu'' = -1 \cdot \frac{x}{l}$ a osové síly σ'', konečně zatížení $H = -1$ dá momenty $\mu = 1 \cdot z$ a osové síly σ'''. Potom je v obecném prutu podle vzorce (29a) osová síla

$$S = \mathfrak{S} - \sigma' M_I - \sigma'' M_{II} - \sigma''' H, \tag{49}$$

a přetvárné výminky podle vzorců (34) mají tvar

$$\Sigma \beta \sigma' \mathfrak{S} - M_I \Sigma \beta \sigma'^2 - M_{II} \Sigma \beta \sigma' \sigma'' - H \Sigma \beta \sigma' \sigma''' + \Sigma \delta \varepsilon \sigma' s = 0,$$

$$\Sigma \beta \sigma'' \mathfrak{S} - M_I \Sigma \beta \sigma'' \sigma' - M_{II} \Sigma \beta \sigma''^2 - H \Sigma \beta \sigma'' \sigma''' + \Sigma \delta \varepsilon \sigma'' s = 0,$$

$$\Sigma \beta \sigma''' \mathfrak{S} - M_I \Sigma \beta \sigma''' \sigma' - M_{II} \Sigma \beta \sigma''' \sigma'' - H \Sigma \beta \sigma'''^2 + \Sigma \delta \varepsilon \sigma''' s = 0.$$

Jednotlivé členy v těchto rovnicích vyjádříme přetvořením základního nosníku. Při zatížení $M_I = -1$, jež dá osové síly σ' a tedy roztažení $\Delta s = \beta \sigma'$, dostáváme otočení tuhé části $a\,a_1\,a'$ ($b\,b_1\,b'$) ve smyslu momentu $M_I = -1$ ($M_{II} = -1$), které znamenejme $\eta_{I,I}$ ($\eta_{II,I}$), a změnu vzdálenosti bodů a_1, b_1 (kladnou při zvětšení délky) $\eta_{III,III}$. Z věty o virtuálních pracích plyne

$$\left.\begin{aligned} 1 \cdot \eta_{I,I} = \Sigma \sigma' \Delta s = \Sigma \beta \sigma'^2, \quad 1 \cdot \eta_{II,I} = \Sigma \sigma'' \Delta s = \Sigma \beta \sigma' \sigma'', \\ 1 \cdot \eta_{III,I} = \Sigma \sigma''' \Delta s = \Sigma \beta \sigma' \sigma''' . \end{aligned}\right\} \tag{50a}$$

Změna teploty dává roztažení $\Delta s = \delta \varepsilon s$ a otočení tuhé části $a\,a_1\,a'$

$$1 \cdot \eta_{I,t} = \Sigma \sigma' \Delta s = \Sigma \delta \varepsilon \sigma' s . \tag{50b}$$

Podobně plynou členy v druhé rovnici

$$1 \cdot \eta_{I,II} = \Sigma \beta \sigma'' \sigma', \quad 1 \cdot \eta_{II,II} = \Sigma \beta \sigma''^2, \quad 1 \cdot \eta_{III,II} = \Sigma \beta \sigma''' \sigma'', \quad 1 \cdot \eta_{II,t} = \Sigma \delta \varepsilon \sigma'' s \tag{50c}$$

a v třetí rovnici

$$\left.\begin{aligned} 1\cdot\eta_{I,III} &= \Sigma\,\beta\,\sigma'''\sigma', \quad 1\cdot\eta_{II,III} = \Sigma\,\beta\,\sigma'''\sigma'', \\ 1\cdot\eta_{III,III} &= \Sigma\,\beta\,\sigma'''^{2}, \quad 1\cdot\eta_{III,t} = \Sigma\,\delta\,\varepsilon\,\sigma'''\,s\,. \end{aligned}\right\} \tag{50d}$$

Dále vyvodí v základním nosníku dané zatížení břemeny P osové síly $\mathfrak{S}$, a pro přetvoření zatížením $M_I = -1$, tedy roztažení prutů $\Delta s = \beta\,\sigma'$, dostaneme

$$\Sigma P_m \eta_{m,I} = \Sigma\,\beta\,\sigma'\,\mathfrak{S}\,,$$

znamená-li $\eta_{m,I}$ posunutí působiště břemene P_m ve směru břemene při zatížení $M_I = -1$. Podobně jest

$$\Sigma P_m \eta_{m,II} = \Sigma\,\beta\,\sigma''\,\mathfrak{S}, \quad \Sigma P_m \eta_{m,III} = \Sigma\,\beta\,\sigma'''\,\mathfrak{S}\,.$$

Dosazením vyjdou přetvárné výminky

$$\left.\begin{aligned} \eta_{I,I}\,M_I + \eta_{II,I}\,M_{II} + \eta_{III,I}\,H &= \Sigma P_m \eta_{m,I} + \eta_{I,t}\,, \\ \eta_{I,II}\,M_I + \eta_{II,II}\,M_{II} + \eta_{III,II}\,H &= \Sigma P_m \eta_{m,II} + \eta_{II,t}, \\ \eta_{I,III}\,M_I + \eta_{II,III}\,M_{II} + \eta_{III,III}\,H &= \Sigma P_m \eta_{m,III} + \eta_{III,t}. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Zvolme nyní polohu osy $X \equiv a_1\,b_1$ tak, aby se řešení co nejvíce zjednodušilo. Mysleme si v bodech a_1, b_1 na základní nosník působící rovné a protivné momenty $M_I = M_{II} = -1$. Potom dostaneme ke všem bodům týž moment $M = -1$ a v prutech osové síly

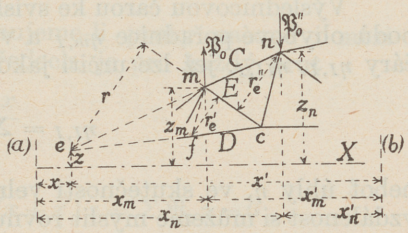
$$\sigma_0 = \mp\frac{M}{r} = \pm\frac{1}{r},$$

je-li r rámě osové síly k přidruženému momentovému středu; vzorec platí pro pruty pasové i mezipasové a znaménko horní (dolní) pro horní (dolní) pasy a mezipasové pruty sestupné (výstupné). Pro mezipasové pruty platí ovšem též

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} - \frac{1}{r''};$$

ramena r', r'' určíme pro prut E podle obr. 26, v němž je $mf \parallel nc$. Ze sil σ_0 stanovíme ideálná břemena

$$\mathfrak{P}_0 = \mp\frac{\Delta s}{r} = \mp\frac{\beta\,\sigma_0}{r},$$



Obr. 26.

jimiž nahrazujeme v přidruženém středu momentovém roztažení libovolného prutu (pasového nebo mezipasového) $\Delta s = \beta\,\sigma_0$, hledáme-li výslednicovou čarou k břemenům $\mathfrak{P}_0$ ohybovou čáru. Pro mezipasový prut lze též břímě $\mathfrak{P}_0$ v přidruženém středu momentovém působící nahraditi břemeny

$$\mathfrak{P}'_0 = \frac{\beta\,\sigma_0}{r'}, \quad \mathfrak{P}''_0 = -\frac{\beta\,\sigma_0}{r''},$$

jež působí ve styčných bodech m, n na př. pasu C proťatého řezem podle methody průsečné s prutem E, pro nějž břemena $\mathfrak{P}_0$ určujeme; břemena $\mathfrak{P}'_0$, $\mathfrak{P}''_0$ mají ovšem za výslednici břímě $\mathfrak{P}_0$ v přidruženém středu momentovém.

Za osu X zvolme paprsek výslednice vodorovných sil $\mathfrak{P}_0$, pro nějž platí

$$\sum_0^l \mathfrak{P}_0\,z = 0\,.$$

Bereme-li vodorovná břemena $\mathfrak{P}_0$ v složkové čáře v pořadu *1, 0, 3, 5, 2, 4, 6*, jak jdou po výšce za sebou, nekřižují se strany výslednicové čáry. Zvolíme-li pól o_1 na svislici středu úseku břemene *6*, vyjde výslednicová čára $1'\,0' \ldots 6'$ souměrná ke svislici bodu $6'$, a tato svislice protíná prodlouženou první stranu na paprsku výslednice sil $\mathfrak{P}_0$, jenž dává osu $X \equiv a_1 b_1$.

Zatížení $M_I = -1$ na základním nosníku prostém vyvodí momenty $\mu' = -\frac{x'}{l}$ a osové síly v prutech

$$\sigma' = \mp \frac{\mu'}{r} = \pm \frac{x'}{lr},$$

vztahujeme-li x', r na přidružený střed momentový; znaménko horní (dolní) platí opět pro horní (dolní) pás a mezipasový prut sestupný (výstupný). Pro mezipasový prut můžeme ovšem užíti též vzorce

$$\frac{x'}{r} = \frac{x'_m}{r'} - \frac{x'_n}{r''},$$

jenž plyne, myslíme-li si v bodě e břímě $1/r$ a v bodech m, n břemena $1/r', -1/r''$, jež mají břímě $1/r$ v bodě e za výslednici. Roztažení $\Delta s = \beta\sigma'$ při zatížení $M_I = -1$ vyvodí ohybovou čáru, která je výslednicovou čarou k ideálnému břemeni

$$\mathfrak{P}_I = \mp \frac{\beta\sigma'}{r},$$

působícímu v přidruženém středu momentovém; pro mezipasový prut E lze k výpočtu lépe použíti dvou břemen

$$\mathfrak{P}'_I = \frac{\beta\sigma'}{r'}, \quad \mathfrak{P}''_I = -\frac{\beta\sigma'}{r''},$$

jež působí v bodech m, n téhož pasu.

Výslednicovou čarou ke svislým břemenům $\mathfrak{P}_I$ dostaneme ve svislicích styčných bodů ohybové pořadnice $\eta_{m,I}$ a v krajních bodech odchylky krajních stran ohybové čáry $\eta_{I,I}$, $\eta_{II,I}$, jež lze určiti jako podporové reakce pro svislá břemena $\mathfrak{P}_I$, tedy

$$\eta_{I,I} = \Sigma \mathfrak{P}_I \frac{x'}{l}, \quad \eta_{II,I} = \Sigma \mathfrak{P}_I \frac{x}{l}, \tag{52a}$$

neboť úhly η, ve skutečnosti velmi malé, lze nahraditi jejich tangentami a pólovou vzdálenost si můžeme myslit rovnu jedničce. Při témž zatížení je $\eta_{III,I}$ změna vzdálenosti bodů a_1, b_1; určila by se výslednicovou čarou k vodorovným silám $\mathfrak{P}_I$, tedy

$$\eta_{III,I} = \Sigma \mathfrak{P}_I z. \tag{52b}$$

Podobně určíme pro zatížení $M_{II} = -1$ osové síly

$$\sigma'' = \mp \frac{\mu''}{r} = \pm \frac{x}{lr},$$

v mezipasovém prutu E též

$$\sigma'' = \frac{x_m}{lr'} - \frac{x_n}{lr''},$$

a z toho dále ideálná břemena

$$\mathfrak{P}_{II} = \mp \frac{\beta\sigma''}{r}$$

v přidružených středech momentových nebo v mezipasovém prutu E dvě břemena

$$\mathfrak{P}'_{II} = \frac{\beta\sigma''}{r'}, \quad \mathfrak{P}''_{II} = -\frac{\beta\sigma''}{r''},$$

působící v bodech m, n. Jako prve můžeme určiti

$$\eta_{I,II} = \Sigma\mathfrak{P}_{II}\frac{x'}{l}, \quad \eta_{II,II} = \Sigma\mathfrak{P}_{II}\frac{x}{l}, \quad \eta_{III,II} = \Sigma\mathfrak{P}_{II}z. \tag{52c}$$

Konečně zatížení $H = -1$, t. j. vodorovné síly rovné jedničce, působící v bodech a_1, b_1 směrem zevnitř, dá v obecném bodě moment $\mu''' = 1 \cdot z$, tedy v libovolném prutu osovou sílu

$$\sigma''' = \mp\frac{\mu'''}{r} = \mp\frac{z}{r},$$

v mezipasovém prutu E ovšem též

$$\sigma''' = -\frac{z_m}{r'} + \frac{z_n}{r''}.$$

Z roztažení $\Delta s = \beta\sigma'''$ plynou ideálná břemena

$$\mathfrak{P}_{III} = \mp\frac{\beta\sigma'''}{r}$$

v přidružených středech momentových, pro mezipasový prut E též dvě břemena

$$\mathfrak{P}'_{III} = \frac{\beta\sigma'''}{r'}, \quad \mathfrak{P}''_{III} = -\frac{\beta\sigma'''}{r''}$$

v bodech m, n téhož pasu. Z břemen $\mathfrak{P}_{III}$ vypočteme pak

$$\eta_{I,III} = \Sigma\mathfrak{P}_{III}\frac{x'}{l}, \quad \eta_{II,III} = \Sigma\mathfrak{P}_{III}\frac{x}{l}, \quad \eta_{III,III} = \Sigma\mathfrak{P}_{III}z. \tag{52d}$$

Pro kontrolu máme vzorce (50).

Ze souměrnosti plyne $\eta_{III,I} = \eta_{III,II}$. Nahrazujeme-li pruty pasové i mezipasové břemeny $\mathfrak{P}$ v přidružených momentových středech, je pro každý prut

$$\mathfrak{P}_I = \mathfrak{P}_0\frac{x'}{l}, \quad \mathfrak{P}_{II} = \mathfrak{P}_0\frac{x}{l}$$

a vyjde

$$\eta_{I,I} + \eta_{III,II} = \Sigma(\mathfrak{P}_I + \mathfrak{P}_{II})z = \frac{1}{l}\Sigma\mathfrak{P}_0(x + x')z = \Sigma\mathfrak{P}_0 z = 0,$$

tedy

$$\eta_{III,I} = \eta_{III,II} = 0.$$

Z Maxwellovy věty plyne ovšem

$$\eta_{III,I} = \eta_{I,III} = 0, \quad \eta_{III,II} = \eta_{II,III} = 0.$$

Přetvárné výminky mají pak jednoduchý tvar

$$\left.\begin{aligned} \eta_{I,I}M_I + \eta_{II,I}M_{II} &= \Sigma P_m\eta_{m,I} + \eta_{I,t}, \\ \eta_{I,II}M_I + \eta_{II,II}M_{II} &= \Sigma P_m\eta_{m,II} + \eta_{II,t}, \\ \eta_{III,III}H &= \Sigma P_m\eta_{m,III} + \eta_{III,t}. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Uvažujme samotný účinek změny teploty. Mysleme si stejnou změnu ve všech prutech a pruty z téže látky; tu je $\delta\varepsilon$ stejné ve všech prutech a vyjde

$$\eta_{I,t} = \delta\varepsilon\Sigma\sigma' s, \quad \eta_{II,t} = \delta\varepsilon\Sigma\sigma'' s, \quad \eta_{III,t} = \delta\varepsilon\Sigma\sigma''' s.$$

Výslední hodnoty můžeme zjednodušiti vhodnou volbou bodů a_1, b_1 na ose X.[1]) Mysleme si v soustavě, doplněné tuhými trojúhelníky $a\,a_1\,a'$, $b\,b_1\,b'$, opěry odňaty a soustavu přetvořenu podle zákona podobnosti, tedy tak, že roztažení každého prutu je $\Delta s = \lambda_0 s$, znamená-li λ_0 stálé poměrné roztažení; věta o virtuálných pracích, užitá na zatížení $H = -1$, dá

$$1 \cdot \Delta l = \Sigma \sigma''' \Delta s + \Sigma_1 \sigma''' \Delta s,$$

kde se týká Σ všech prutů skutečných, Σ_1 prutů v trojúhelnících $a\,a_1\,a'$, $b\,b_1\,b'$, a $l = \overline{a_1 b_1}$. Při změně podle zákona podobnosti je též $\Delta l = \lambda_0 l$, tedy platí

$$\lambda_0 l = \Sigma \sigma''' \cdot \lambda_0 s + \Sigma_1 \sigma''' \cdot \lambda_0 s \quad \text{neboli} \quad l = \Sigma \sigma''' s + \Sigma_1 \sigma''' s.$$

Vychází-li první mezipasový prut z bodu a, vyjde pro pruty 1, 2, 3, D_0 silový obrazec naznačený v obr. 27*a*). Přeneseme-li $\sphericalangle a_1 a c = \alpha$, je též $\sphericalangle a_1 c a = \beta$ a vyjde $\Delta a_1 a c \sim \Delta I o' o$; z toho plyne

$$\frac{\sigma_1'''}{\sigma_2'''} = -\frac{\overline{a_1 c}}{s_1} \quad \text{neboli} \quad \sigma_1''' s_1 + \sigma_2''' \cdot \overline{a_1 c} = 0.$$

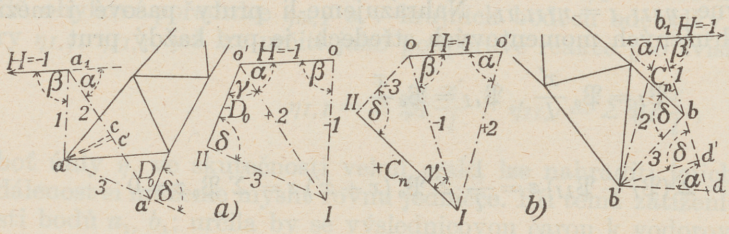
Přeneseme dále $\sphericalangle a c' a' = \delta$; tu jest $\sphericalangle c' a a' = \gamma$ a dostaneme $\Delta a c' a' \sim \Delta o' II I$, což dá

$$\frac{\sigma_3'''}{\sigma_2'''} = -\frac{\overline{c' a'}}{s_3}, \quad \text{tedy} \quad \sigma_3''' s_3 + \sigma_2''' \cdot \overline{c' a'} = 0.$$

Sečtením plyne

$$\sigma_1''' s_1 + \sigma_2''' (\overline{a_1 c} + \overline{c' a'}) + \sigma_3''' s_3 = 0.$$

Ztotožníme-li body c, c', bude $\overline{a_1 c} + \overline{c' a'} = \overline{a_1 a'} = s_2$ a tedy pro pruty trojúhelníka $a_1 a a'$ platí $\Sigma_1 \sigma''' s = 0$; v tom případě je $\beta = 180^0 - \delta$, čímž je dána poloha bodu a_1 a tím i při souměrném nosníku poloha bodu b_1, takže pro $\overline{a_1 b_1} = l$ platí $\Sigma \sigma''' s = l$.



Obr. 27.

Vychází-li první příčka z dolního opěrového bodu b', dá zatížení $H = -1$ silový obrazec podle obr. 27*b*). Přeneseme-li $\sphericalangle b' d b_1 = x$, vyjde $\Delta b' d b_1 \sim \Delta o o' I$; pak je

$$\frac{\sigma_1'''}{\sigma_2'''} = -\frac{s_2}{\overline{b_1 d}} \quad \text{čili}$$

$$\sigma_1''' \cdot \overline{b_1 d} + \sigma_2''' s_2 = 0.$$

Dále přenesením $\sphericalangle b' d' b_1 = \delta$ dostaneme $\sphericalangle b\,b'\,d' = \gamma$ a $\Delta b' d' b \sim \Delta I II o$, čímž vychází

$$\frac{\sigma_3'''}{\sigma_1'''} = \frac{\overline{b\,d'}}{s_3} \quad \text{neboli} \quad \sigma_3''' s_3 - \sigma_1''' \cdot \overline{b\,d'} = 0.$$

Sečtením výsledních rovnic dostaneme

$$\sigma_1''' (\overline{b_1 d} - \overline{b\,d'}) + \sigma_2''' s_2 + \sigma_3''' s_3 = 0.$$

Ztotožníme-li body d, d', vyjde $\overline{b_1 d} - \overline{b\,d'} = \overline{b_1 b} = s_1$ a $\Sigma_1 \sigma''' s = 0$ pro pruty trojúhelníka

[1]) Srovnej *H. F. B. Müller-Breslau*: „Die graphische Statik der Baukonstruktionen", Bd. II, 1. Abt. (2. vyd. Lipsko 1892), str. 320.

$b\,b_1\,b'$. Tu jest $\alpha = \delta$, což určuje bod b_1 i bod a_1 při souměrném nosníku tak, že pro $\overline{a_1 b_1} = l$ platí $\Sigma\sigma''' s = l$. Vynecháme-li zatížení, bude

$$H_t = \frac{\delta \varepsilon l}{\eta_{III,III}}. \tag{54}$$

Za téže polohy bodů a_1, b_1 vyjde obdobně $\Sigma\sigma' s = \Sigma\sigma'' s = 0$, tedy $\eta_{I,t} = \eta_{II,t} = 0$ a samotná změna teploty dá

$$M_I = M_{II} = 0.$$

Stejná změna teploty ve všech prutech vyvodí v opěrách oblouku pouze vodorovnou sílu H_t v bodech a_1, b_1 protivnými směry působící. Pro řešení účinku změny teploty je třeba správně určiti body a_1, b_1 a jejich vzdálenost l, není však třeba za této polohy bodů a_1, b_1 řešiti síly σ', σ''.

Uvažujme dále pouze účinek zatížení, pro nějž platí přetvárné výminky

$$\left.\begin{aligned} \eta_{I,I}\, M_I + \eta_{II,I}\, M_{II} &= \Sigma P_m \eta_{m,I}, \\ \eta_{I,II}\, M_I + \eta_{II,II} M_{II} &= \Sigma P_m \eta_{m,II}, \\ \eta_{III,III}\, H &= \Sigma P_m \eta_{m,III}. \end{aligned}\right\} \tag{53a}$$

Osa souměrnosti nosníku a osa X jsou hlavními osami pro soustavu bodů danou přidruženými momentovými středy prutů, jimž přisuzujeme břemena $\mathfrak{P}_0$. V bodech osy X jsou pak tato osa a svislice vždy hlavními osami, takže platí pro libovolnou polohu bodů a_1, b_1

$$\Sigma \mathfrak{P}_0\, x\, z = \Sigma \mathfrak{P}_0\, x'\, z = 0,$$

neboť tyto výrazy znamenají deviační momenty k hlavním osám bodové soustavy. Myslíme-li si pruty nahrazeny břemeny $\mathfrak{P}$ v přidružených středech momentových, bude

$$\eta_{III,I} = \Sigma \mathfrak{P}_I z = \frac{1}{l} \Sigma \mathfrak{P}_0\, x'\, z = 0 \quad \text{a obdobně} \quad \eta_{III,II} = 0.$$

Jelikož na poloze bodů a_1, b_1 zde nezáleží, je vhodné voliti pro řešení účinku zatížení body a_1, b_1 ve svislicích krajních bodů oblouku a, b (obr. 25); tím se řešení zjednoduší.

Kdybychom při výpočtu zanedbali roztažení prutů mezipasových, dostali bychom z pasových prutů břemena $\mathfrak{P}$ pouze ve styčných bodech, a tu by platilo pro všechna břemena

$$\mathfrak{P}_I = \mathfrak{P}_0 \frac{x'}{l}, \quad \mathfrak{P}_{II} = \mathfrak{P}_0 \frac{x}{l}, \quad \mathfrak{P}_{III} = \mathfrak{P}_0 z.$$

Tím by se stanovení břemen podstatně zjednodušilo. Při souměrném nosníku není třeba břemen $\mathfrak{P}_{II}$, jež jsou rovna břemenům $\mathfrak{P}_I$ v souměrných bodech, pročež také pořadnice $\eta_{m,II}$ jsou rovny pořadnicím $\eta_{m,I}$ v souměrných bodech. K řešení stačí proto výslednicová čára k břemenům $\mathfrak{P}_I$.

Pro stanovení příčinkových čar M_I, M_{II} poznamenejme

$$-\frac{\eta_{II,I}}{\eta_{I,I}} = \lambda, \quad -\frac{\eta_{I,II}}{\eta_{II,II}} = \pi. \tag{55}$$

V každém případě jest $\eta_{II,I} = \eta_{I,II}$ na základě věty o vzájemnosti posunutí, pro souměrný nosník je pak $\eta_{I,I} = \eta_{II,II}$, takže vyjde $\lambda = \pi$. Tím jsou určeny dělicí poměry *základních bodů* λ_1, π_1, jež dělí délku $\overline{a_1 b_1} = l$ na díly $a = \overline{a_1 \lambda_1}$, $b = \overline{\pi_1 b_1}$, $c = \overline{\lambda_1 \pi_1}$. Tu jest

$$\lambda = -\frac{a}{l-a}, \quad \pi = -\frac{b}{l-b}, \tag{55a}$$

takže $$a = -\frac{\lambda}{1-\lambda} l, \quad \text{obdobně} \quad b = -\frac{\pi}{1-\pi} l, \quad c = l - a - b\,; \tag{56b}$$

pro souměrný nosník vyjde $a = b$. Graficky jest určen bod λ_1 svislicí průsečíku krajních stran výslednicové čáry $a_2 m_2 b_2$ k břemenům $\mathfrak{P}_I$; tyto krajní strany svírají s osou $a_2 b_2$ úhly $\eta_{I,I}$, $\eta_{II,I}$, a tu platí

$$\frac{\overline{a_1 \lambda_1}}{\overline{\lambda_1 b_1}} = \frac{\overline{a_2 a_2'}}{\overline{b_2 b_2'}} = \frac{l \cdot \eta_{II,I}}{l \cdot \eta_{I,I}} = -\lambda,$$

neboť úhly $\eta_{II,I}$, $\eta_{II,II}$ můžeme nahraditi tangentami, jelikož by byly v ohybové čáře velmi malé, a tangenty určíme, jako by základní strana $a_2 b_2$ byla vodorovná.

Pro jediné břímě P_m nabudou prvé dvě přetvárné výminky (53a) tvaru

$$-\frac{M_I}{\lambda} + M_{II} = P_m \frac{\eta_{m,I}}{\eta_{II,I}}, \quad M_I - \frac{M_{II}}{\pi} = P_m \frac{\eta_{m,II}}{\eta_{I,II}}.$$

Dosazením z rovnic (56a) dostaneme

$$\frac{l-a}{a} M_I + M_{II} = P_m \frac{\eta_{m,I}}{\eta_{II,I}}, \quad M_I + \frac{l-b}{b} M_{II} = P_m \frac{\eta_{m,II}}{\eta_{I,II}};$$

řešením těchto rovnic vyjde

$$\left.\begin{aligned} M_I &= \frac{a}{c\,l\,\eta_{I,II}} P_m [(l-b)\,\eta_{m,I} - b\,\eta_{m,II}], \\ M_{II} &= \frac{b}{c\,l\,\eta_{I,II}} P_m [-a\,\eta_{m,I} + (l-a)\,\eta_{m,II}]. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Při souměrném nosníku jsou příčinkové čáry M_I, M_{II} vzájemně souměrné ke svislici středu nosníku, stačí tedy k řešení čára M_I.

Krajní strany výslednicové čáry $a_2 m_2 b_2$ k břemenům $\mathfrak{P}_I$ utínají na svislici bodu π úsek $\overline{\pi_2' \pi_2''}$, pro nějž plyne z podobnosti

$$\overline{\pi_2' \pi_2''} = \frac{\overline{\lambda_1 \pi_1}}{\overline{a_1 \lambda_1}} \overline{a_2 a_2'};$$

jelikož pak $\overline{a_2 a_2'} = l\,\eta_{II,I}$, vychází

$$\overline{\pi_2' \pi_2''} = \frac{c\,l\,\eta_{I,II}}{a}.$$

Nyní snadno určíme

$$\frac{a(l-b)}{c\,l\,\eta_{I,II}} \eta_{m,I} = \frac{l-b}{\overline{\pi_2' \pi_2''}} \eta_{m,I} = \eta'_{m,I}, \quad \frac{a\,b}{c\,l\,\eta_{I,II}} \eta_{m,II} = \frac{b}{\overline{\pi_2' \pi_2''}} \eta_{m,II} = \eta'_{m,II};$$

vedeme-li bodem π_2' přímku $a_2'' b_2'' \parallel a_2 b_2$ a koncovými body m_2, n_2 pořadnic $\eta_{m,I}$, $\eta_{m,II}$ ve dvou souměrných bodech přímky $m_2 1 \parallel \pi_2'' a_2''$, $n_2 2' \parallel \pi_2'' b_2''$, jsou vodorovné vzdálenosti bodů 1, $2'$ od svislic m_2, n_2 hledané úseky $\eta'_{m,I}$, $\eta'_{m,II}$. Tak vyjde

$$M_I = P_m \eta_I, \quad \text{kde} \quad \eta_I = \eta'_{mI} - \eta'_{m,II}$$

je příčinková pořadnice M_I v měřidle délek. Podle toho sestrojíme z jednotlivých bodů příčinkovou čáru $a_3 m_3 b_3$ momentu M_I. Zatížení $M_I = -1$ dá záporná břemena $\mathfrak{P}_I$ a vyjdou tedy pořadnice $\eta_{m,I}$, $\eta_{m,II}$ i pořadnice η_I záporné. Úhly $\eta_{I,I}$, $\eta_{II,I}$, ... jsou zde míněny prostými hodnotami.

Při jediném břemeni vyjde konečně

$$H = P_m \frac{\eta_{m,III}}{\eta_{III,III}}. \tag{58}$$

Výslednicová čára $a_4 m_4 b_4$ ke svislým břemenům $\mathfrak{P}_{III}$ má pořadnice $\eta_{m,III}$ a výslednicová čára $a_4'' b_4''$ k vodorovným břemenům $\mathfrak{P}_{III}$, rýsovaná kolmicemi k paprskům spojujícím pól o_4 s body složkové čáry ke svislým břemenům $\mathfrak{P}_{III}$, určí prodlouženými krajními stranami v ose $a_1 b_1$ úsek $\eta_{III,III}$; tento úsek znamená změnu vzdálenosti bodů a_1, b_1, pevně spojených s nosníkem, při zatížení $H = -1$. Volíme-li pól o_4 na vodorovnici středu úseku prostředního břemene $\mathfrak{P}_0$, vyjde čára $a_4 b_4$ i $a_4'' b_4''$ souměrná k prostřední svislici. Pólová vzdálenost může býti libovolná, poněvadž poměr $\eta_{m,III}/\eta_{III,III}$ na pólové vzdálenosti nezávisí.

Kdybychom zanedbali roztažení mezipasových prutů, byla by pro pasové pruty břemena $\mathfrak{P}_{III} = \mathfrak{P}_0 z$ a působila by ve styčných bodech; potom by vyšlo

$$\Sigma \mathfrak{P}_{III} = \Sigma \mathfrak{P}_0 z = 0,$$

což při souměrném nosníku platí i pro jeho polovinu.

Určíme-li podle předchozího výkladu příčinkové čáry M_I, M_{II}, H, můžeme stanoviti příčinkové pořadnice osových sil prutů podle vzorce (49).

11. Staticky neurčitá soustava základní. Můžeme-li u soustavy několikrát neurčité vynecháním jen některých zbytných prutů nebo veličin převésti soustavu na neurčitou, avšak jednoduchého řešení, lze tuto soustavu zvoliti za soustavu základní. Na tuto soustavu lze užíti všech rovnic, které byly odvozeny pro staticky určitou soustavu základní, neboť přetvárné výminky plynou z věty o virtuálných pracích, jež platí obecně pro jakoukoli soustavu prutovou, staticky určitou i neurčitou.

Zvláště výhodný je tento způsob řešení, jestliže vynecháním jediné zbytné veličiny přejde daná soustava v neurčitou soustavu známého a jednoduchého řešení. Pro stanovení vynechané zbytné veličiny S' platí pak jediná výminka přetvárná

$$\Sigma \sigma \Delta s = 0,$$

jíž se použije ovšem na neurčitou soustavu základní. Znamenají tedy σ osové síly ve staticky neurčité soustavě základní, vyvozené v ní zatížením $S' = -1$. Z přetvárné výminky plyne jako u soustavy jednoduše neurčité vzorec (15^a)

$$S' = \frac{\Sigma \beta \sigma \mathfrak{S}}{\Sigma \beta \sigma^2},$$

znamenají-li $\mathfrak{S}$ osové síly základní neurčité soustavy při daném zatížení. Vyjádříme-li čitatele i jmenovatele přetvořením základní soustavy při zatížení $S' = -1$, dostaneme vzorec (18)

$$S' = \frac{\Sigma P_m \eta_{m,I}}{\eta_{I,I} + \beta'},$$

kde znamená $\eta_{m,I}$ posunutí působiště m břemene P_m v jeho směru pro základní soustavu při zatížení $S' = -1$, $\eta_{I,I}$ změnu vzdálenosti bodů v základní soustavě, spojených původně zbytným prutem, při témž zatížení. Platí ovšem podle rovnice (17^b)

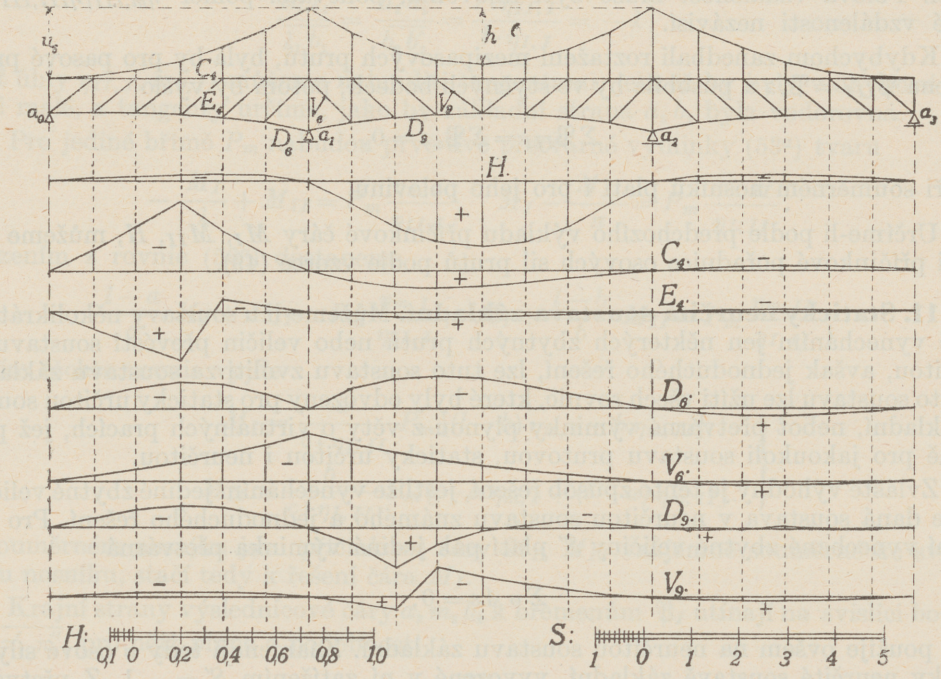
$$\eta_{I,I} + \beta' = \Sigma \beta \sigma^2.$$

Pro jediné břímě je podle vzorce (18^a)

$$S' = P_m \frac{\eta_{m,I}}{\eta_{I,I} + \beta'};$$

je tedy příčinkovou čarou S' ohybová čára základní soustavy neurčité při zatížení $S' = -1$.

Příklad 5. K příhradovému spojitému nosníku o třech polích, řešenému číselně v příkladě 4, připojme třetí, visutý pás, spojený s příhradovým nosníkem svislými pruty (obr. 28). Visutý pás je v každém poli vepsán do paraboly, jejíž svislá osa v krajních polích prochází krajní podporou, ve středním poli je v ose souměrnosti. Výška na vnitřní podpoře budiž $u_6 = 7{,}20$ m a průvěs visutého pasu ve středním poli $h = 5{,}60$ m. Délky u svislic mezi visutým pasem a horním pasem příhradového nosníku i délky k prutů visutého pasu jsou uvedeny v tab. I.



Obr. 28.

Osové síly v prutech třetího pasu K i v závěsných svislicích U jsou určeny, známe-li vodorovnou složku H osových sil v třetím pase, jež je pro všechny pruty stejná. Ze síly H plynou osové síly v prutech třetího pasu

$$K_m = \frac{H}{\cos \varkappa_m},$$

je-li $\varkappa_m$ úhel osy prutu K_m s vodorovnou, a v závěsných svislicích:

$$\text{v prvém poli} \ldots U_m = H(\operatorname{tg} \varkappa_{m+1} - \operatorname{tg} \varkappa_m) = H \frac{u_{m+1} - u_m - (u_m - u_{m-1})}{a},$$

$$\text{v druhém poli} \ldots U_m = H(\operatorname{tg} \varkappa_m - \operatorname{tg} \varkappa_{m+1}) = H \frac{u_{m-1} - u_m - (u_m - u_{m+1})}{a}.$$

Jsou-li visuté pasy zakřiveny podle kvadratických parabol, je pro všechny pruty U

$$\text{v prvém poli} \quad \frac{u_{m+1} - u_m - (u_m - u_{m-1})}{a} = \frac{0{,}4}{4{,}5} = 0{,}08889,$$

$$\text{v druhém poli} \quad \frac{u_{m-1} - u_m - (u_m - u_{m+1})}{a} = \frac{0{,}7}{4{,}5} = 0{,}15556.$$

Tím vychází pro zatížení $H = -1$ základního spojitého nosníku:

v prvém poli $U_m = -0{,}08889$, v druhém poli $U_m = -0{,}15556$;

v krajní podpoře dostaneme $U_0 = -\frac{0{,}08889}{2} = -0{,}04444$, ve vnitřní podpoře

$$U_6 = \frac{1}{a}(u_6 - u_5 + u_6 - u_7) = \frac{2{,}20 + 2{,}45}{4{,}5} = 1{,}03333.$$

Graficky plynou (obr. 29) síly K jako pólové paprsky a U jako břemena, pokládáme-li čáru třetího pasu za výslednicovou čáru k břemenům U; H je tu pólová vzdálenost.

Odejmeme-li třetí pás a závěsné svislice, musíme je nahraditi silami U na základní neurčitý (spojitý) nosník působícími a v krajních bodech mimo to vodorovnou silou $H = -1$ (obr. 29). Svislé síly U dají ve spojitém nosníku na základě souměrnosti podporové momenty $M_I = M_{II}$, jež určíme z příčinkové čáry momentu M_I, vypočtené v příkladě 4, podle vzorce

$$M_I^{(1)} = \Sigma U \eta,$$

jsou-li η příčinkové pořadnice M_I v paprscích sil U, obsažené v tabulkách V příkladu 4 Dostaneme zde

$$M_I^{(1)} = 0{,}08889 \cdot (-1{,}1996 - 2{,}2312 - 2{,}7922 - 2{,}6609 - 1{,}7258) + 0{,}15556 \cdot (-2{,}0698 - 3{,}3444 - 3{,}8055 - 3{,}6113 - 2{,}9125 - 1{,}9110 - 0{,}8892) + 0{,}08889 \cdot (0{,}5086 + 0{,}7841 + 0{,}8228 + 0{,}6575 + 0{,}3535) = 0{,}08889 \cdot (-10{,}6097 + 3{,}1265) + 0{,}15556 \cdot (-18{,}5437) = -3{,}55066.$$

Mimo svislé síly U dává zatížení $H = -1$ vodorovné síly na koncích nosníku, jež vyvodí ve všech horních pasech základního nosníku stejný tah $\mathfrak{S} = C = 1$. Pro výpočet momentů $M_I = M_{II}$ z těchto sil užijeme třímomentových rovnic tvaru (39^c), zde

$$M_I \delta_{11} + M_{II} \delta_{21} = -\sum_0^{l_1+l_2} \beta \sigma' \mathfrak{S} = -\sum_0^{l_1+l_2} s \sigma',$$

$$M_I \delta_{12} + M_{II} \delta_{22} = -\sum_0^{l_2+l_3} \beta \sigma'' \mathfrak{S} = -\sum_0^{l_2+l_3} s \sigma''.$$

Ze souměrnosti plyne

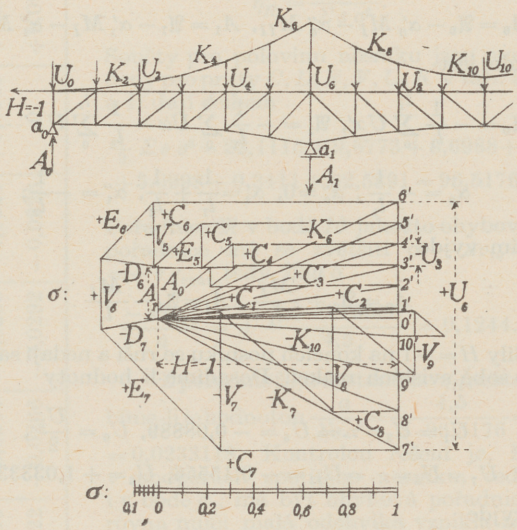
$$\delta_{11} = \delta_{22}, \quad \delta_{12} = \delta_{21}, \quad M_I = M_{II}, \quad \sum_0^{l_1+l_2} s \sigma' = \sum_0^{l_2+l_3} s \sigma'',$$

takže postačí k řešení jediná rovnice

$$M_I (\delta_{11} + \delta_{21}) = -\sum_0^{l_1+l_2} s \sigma',$$

jež dá

$$M_I^{(2)} = -\frac{\sum_0^{l_1+l_2} s \sigma'}{\delta_{11} + \delta_{21}}.$$



Obr. 29.

Tabulka I.

Prut	s	σ	$s\sigma^2$	Prut	s	σ	$s\sigma^2$
U_1	0,20	− 0,08889	0,0016	K_1	4,505	− 1,0011	4,5149
U_2	0,80	− 0,08889	0,0063	K_2	4,540	− 1,0089	4,6212
U_3	1,80	− 0,08889	0,0142	K_3	4,610	− 1,0244	4,8377
U_4	3,20	− 0,08889	0,0253	K_4	4,713	− 1,0473	5,1694
U_5	5,00	− 0,08889	0,0395	K_5	4,847	− 1,0771	5,6232
U_6	7,20	+ 1,03333	—	K_6	5,009	− 1,1131	6,2061
U_7	4,75	− 0,15556	0,1150	K_7	5,124	− 1,1387	6,6440
U_8	3,00	− 0,15556	0,0726	K_8	4,828	− 1,0729	5,5576
U_9	1,95	− 0,15556	0,0472	K_9	4,621	− 1,0269	4,8730
U_{10}	1,60	− 0,15556	2 · 0,0194	K_{10}	4,514	− 1,0031	4,5420
Σ			0,3411	Σ			52,5891

Součet v čitateli se týká pouze horních pasů C, pro které máme z tab. I a II příkladu 4:

$$\sum_{0}^{l_1+l_2} s\,\sigma' = 2{,}8074 + 4{,}5802 = 7{,}3876.$$

V příkladě 4 jsme určili

$$\delta_{11} = -2{,}52895,\quad \delta_{21} = -0{,}74524,$$

takže

$$M_I^{(2)} = +\frac{7{,}3876}{2{,}52895+0{,}74524} = +2{,}25631.$$

Celkem vyjde pro $H=-1$ podporový moment

$$M_I = M_I^{(1)} + M_I^{(2)} = -1{,}29435.$$

Ze zatížení silami U a z momentů $M_I = M_{II}$ určíme v podporách základního nosníku spojitého reakce

$$A_0 = \mathfrak{A}_0 - \alpha_0' M_I - \alpha_0'' M_{II},\quad A_1 = \mathfrak{A}_1 - \alpha_1' M_I - \alpha_1'' M_{II},$$

kde jest

$$\mathfrak{A}_0 = -\frac{1}{l_1}\sum_{0}^{l_1} U x',\quad \mathfrak{A}_1 = -\frac{1}{l_1}\sum_{0}^{l_1} U x - \frac{1}{l_2}\sum_{0}^{l_2} U x' - U_6,$$

$$\alpha_0' = -\frac{1}{l_1},\quad \alpha_0'' = 0,\quad \alpha_1' = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2},\quad \alpha_1'' = -\frac{1}{l_2};$$

tím vyjde

$$A_0 = \mathfrak{A}_0 + \frac{M_I}{l_1},\quad A_1 = \mathfrak{A}_1 - \frac{M_I}{l_1}.$$

Síly $H=-1$ na koncích nosníku se ruší a nedají samy o sobě svislých reakcí. Dosadíme-li hodnoty

$$U_1 = U_2 = \ldots = U_5 = -0{,}08889,\quad U_0 = \frac{U_1}{2},$$

$$U_7 = U_8 = \ldots = U_{13} = -0{,}15556,\quad U_6 = +1{,}03333,$$

vyjde

$$\mathfrak{A}_0 = +3\cdot 0{,}08889 = +0{,}26667,$$

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{5}{2}\,0{,}08889 + \frac{7}{2}\,0{,}15556 - 1{,}03333 = -0{,}26667,$$

$$\frac{M_I}{l_1} = -\frac{1{,}29435}{27} = -0{,}04794,$$

tedy

$$A_0 = 0{,}26667 - 0{,}04794 = 0{,}21883,$$
$$A_1 = -0{,}26667 + 0{,}04794 = -0{,}21883.$$

Síly H a U jsou samy o sobě v rovnováze i musí být reakce A také v rovnováze; při souměrném nosníku musí být pro polovinu nosníku $A_0 + A_1 = 0$ čili $A_0 = -A_1$, čemuž je vyhověno. Totéž platí i o reakcích $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1$.

Ze známých sil $H=-1$, U_0 až U_{10} (pro polovinu nosníku) a reakcí A_0, A_1 můžeme sestrojiti složkový obrazec pro základní soustavu neurčitou a vyřešiti graficky osové síly σ v prutech základní soustavy (obr. 29), jak jsou uvedeny v tab. II. Počtem bychom určili přesněji síly σ podle vzorců uvedených v pří-

Tabulka II.

	σ_c	$s\,\sigma_c^2$	$\mathfrak{R}_c$	σ_d	$s\,\sigma_d^2$	$\mathfrak{R}_d$	σ_e	$s\,\sigma_e^2$	$\mathfrak{R}_e'$	$\mathfrak{R}_e''$	σ_v	$s\,\sigma_v^2$	$\mathfrak{R}_v'$	$\mathfrak{R}_v''$
1	+ 1,0	4,5000	− 1,25	+ 0,2180	0,2139	+ 0,2725	− 0,2792	0,4492	− 0,5724	+ 0,5724	+ 0,0855	0,0263	+ 0,0684	− 0,0684
2	+ 0,7820	2,7519	− 0,9775	+ 0,3249	0,4750	+ 0,4061	− 0,1339	0,1080	− 0,2807	+ 0,2807	− 0,0034	0,0000	− 0,0027	+ 0,0027
3	+ 0,6751	2,0509	− 0,8438	+ 0,3120	0,4381	+ 0,3796	− 0,0166	0,0016	− 0,0340	+ 0,0331	− 0,0992	0,0364	− 0,0816	+ 0,0838
4	+ 0,6880	2,1300	− 0,8368	+ 0,1851	0,1545	+ 0,2091	+ 0,1648	0,1582	+ 0,3359	− 0,3107	− 0,1935	0,1498	− 0,1720	+ 0,1849
5	+ 0,8157	2,9941	− 0,9177	− 0,0169	0,0012	− 0,0170	+ 0,2720	0,4455	+ 0,5477	− 0,4815	− 0,2680	0,3268	− 0,2709	+ 0,3037
6	+ 1,0168	4,6525	− 1,0056	− 0,2435	0,2716	− 0,2102	+ 0,3164	0,6406	+ 0,6327	− 0,5332	+ 0,3092	—	—	—
7	+ 0,7454	2,5006	− 0,7372	− 0,2435	0,2716	− 0,2102	+ 0,7061	3,1904	+ 1,4120	− 1,1900	− 0,5755	1,5070	− 0,5819	+ 0,6522
8	+ 0,2731	0,3356	− 0,3072	+ 0,2565	0,2983	+ 0,2575	+ 0,6320	2,4049	+ 1,2727	− 1,1189	− 0,4374	0,7653	− 0,3888	+ 0,4180
9	− 0,0696	0,0218	+ 0,0846	+ 0,7289	2,3961	+ 0,8237	+ 0,4439	1,1480	+ 0,9049	− 0,8369	− 0,2571	0,2446	− 0,2113	+ 0,2171
10	− 0,1967	0,1741	+ 0,2459	+ 1,0704	5,1570	+ 1,3025	+ 0,1636	0,1524	+ 0,3334	− 0,3244	− 0,1556	2 · 0,0436	—	—
Σ		22,1115			9,6773			8,6988				3,0998		

kladě 4; takto byly stanoveny síly σ v tab. II. Z osových sil σ vypočteme jako v příkladě 4 ideálná břemena $\mathfrak{P}$. Při výpočtu příčinkové čáry H jako ohybové čáry základního nosníku spojitého zanedbejme roztažení horních dílů U_6 podporových svislic, jež budou míti jako podporové svislice vůbec při svislém zatížení namáhání značně menší než ostatní pruty, neboť jsou značně namáhány jako součásti příčného ztužení.

Tabulka III.

Bod	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathfrak{P}_c$	$-1,25$	$-0,9775$	$-0,8438$	$-0,8368$	$-0,9177$	$-1,0056$	—	$-0,7370$	$-0,3072$	$+0,0846$	$+2\cdot0,2459$
$\mathfrak{P}_d$	—	$+0,2725$	$+0,4061$	$+0,3796$	$+0,2091$	$-0,0170$	$\begin{cases}-0,2102\\-0,2102\end{cases}$	$+0,2575$	$+0,8237$	$+1,3025$	—
$\mathfrak{P}_e$	$-0,5724$	$+0,5724$	$+0,2807$	$-0,0331$	$-0,3107$	$-0,4815$	$-0,5332$	$+1,4120$	$+1,2727$	$+0,9049$	$+2\cdot0,3334$
	—	$-0,2807$	$+0,0340$	$+0,3359$	$+0,5477$	$+0,6327$	$-1,1900$	$-1,1189$	$-0,8369$	$-0,3244$	—
$\mathfrak{P}_v$	—	$-0,0684$	$+0,0684$	$-0,0027$	$-0,0816$	$-0,1720$	$-0,2709$	$+0,6522$	$+0,4180$	$+0,2171$	—
	—	—	$+0,0027$	$+0,0838$	$+0,1849$	$-0,3037$	$-0,5819$	$-0,3888$	$-0,2113$	—	—
$\mathfrak{P}$	$-1,8224$	$-0,4817$	$-0,0519$	$-0,0733$	$-0,3683$	$-0,7397$	$-2,9964$	$+0,0770$	$+1,1590$	$+2,1847$	$+2\cdot0,5793$
$\mathfrak{T}$		$-0,7113$	$-0,2296$	$-0,1777$	$-0,1044$	$+0,2639$	$+1,0036$	$+4,0000$	$+3,9230$	$+2,7640$	$+0,5793$
$\mathfrak{M}/a$	0	$-0,7113$	$-0,9409$	$-1,1186$	$-1,2230$	$-0,9591$	$+0,0445$	$+4,0445$	$+7,9675$	$+10,7315$	$\begin{cases}+11,3108\\+0,1244\end{cases}$
η'_H	0	$-0,0166$	$-0,0219$	$-0,0261$	$-0,0285$	$-0,0224$	$+0,0010$	$+0,0943$	$+0,1857$	$+0,2502$	$+0,2666$
η_H	0	$-0,0168$	$-0,0222$	$-0,0266$	$-0,0292$	$-0,0226$	0	$+0,0933$	$+0,1847$	$+0,2492$	$+0,2656$

Břemena $\mathfrak{P}$ v téže svislici sečteme v tab. III. a vypočteme z nich posouvající síly $\mathfrak{T}$ sčítáním od středu; pro souměrnost zatížení je posouvající síla vlevo od středu rovna polovině středního břemene, ostatní síly $\mathfrak{T}$ se dostanou pouhým přičítáním předchozích břemen. Podíly $\mathfrak{M}/a$ určíme sčítáním posouvajících sil od levého konce, kde je $\mathfrak{M}_0/a=0$. Pro souměrnost zatížení není třeba určovati reakce.

K výpočtu příčinkových pořadnic vodorovné síly H je třeba vypočísti

$$\eta'_H=\frac{\mathfrak{M}}{\Sigma s\,\sigma^2}.$$

Součty pro polovinu nosníku jsou uvedeny pro pruty C, D, E, V, U, K v tab. II a I; dají celkem

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma s\,\sigma^2=22,1115+9,6773+8,6988+$$
$$+3,0998+0,3411+52,5891=96,5176.$$

Pořadnice $\mathfrak{M}$ v bodě *10* jakožto ohybová pořadnice má se zvětšiti o $-\Delta v_{10}=$ $=-s\,\sigma_{v10}$, tedy $\mathfrak{M}/a$ o

$$\frac{-s\,\sigma_{v10}}{a}=+\frac{3,6\cdot0,15556}{4,5}=0,1244.$$

Z pořadnic $\mathfrak{M}/a$ dostaneme η'_H, násobíme-li je hodnotou $\frac{a}{\Sigma s\,\sigma^2}=\frac{4,5}{2\cdot96,5176}=$ $=0,0233118$. Kontrolou řešení je, že v podporách spojitého nosníku, tedy i v bodě a_1, má být ohybová pořadnice rovna nule; malá odchylka vznikla zaokrouhlováním čísel při výpočtu. Přibližně opravíme výsledek, odečteme-li v druhém poli pořadnici $+0,0010$, která vyšla nesprávně v bodě *6*, a v prvém poli odčítáme algebraicky pořadnice přímky, jež má v bodě *0* pořadnici nulovou a v bodě *6* pořadnici $+0,0010$. Tak určíme příčinkové pořadnice η_H.

Známe-li příčinkovou čáru H, určíme příčinkové pořadnice osových sil prutů podle rovnice

$$S=\mathfrak{S}-\sigma H,$$

kde znamená $\mathfrak{S}$ příčinkové pořadnice osové síly, o kterou jde, v základní soustavě neurčité, jak jsme je určili s označením S v příkladě 4, a σ jest osová síla v základní soustavě neurčité, vyvozená zatížením $H=-1$; tato síla je uvedena pro všechny pruty v tab. II. Výsledky pro pruty C_4, E_4, D_6, V_6, D_9, V_9 jsou v tabulkách IV. a), b), c), a příčinkové čáry takto vypočtené jsou vyneseny v obr. 28. Stejně by se řešily i podporové reakce.

Výsledek ukazuje, že je zde vliv zbytné síly H poměrně malý. To souvisí s tím, že třetí pás a závěsné svislice, jež závisí na zbytné síle H, mají značnou délku a jsou proto velmi poddajné.

Tab. IVa).

Bod		0	1	2	3	4	5	6
C_4	$\mathfrak{S}$	0	− 0,4461	− 0,9148	− 1,4471	− 0,8567	− 0,3749	0
	$-\sigma H$	0	+ 0,0116	+ 0,0153	+ 0,0183	+ 0,0201	+ 0,0155	0
	S	0	− 0,4345	− 0,8995	− 1,4288	− 0,8366	− 0,3594	0
E_4	$\mathfrak{S}$	0	+ 0,3467	+ 0,6946	+ 1,0194	− 0,2586	− 0,1132	0
	$-\sigma H$	0	+ 0,0028	+ 37	+ 44	+ 48	+ 37	0
	S	0	+ 0,3495	+ 0,6983	+ 1,0238	− 0,2538	− 0,1095	0
D_6	$\mathfrak{S}$	0	− 0,2261	− 0,4205	− 0,5263	− 0,5016	− 0,3253	0
	$-\sigma H$	0	− 0,0041	− 54	− 65	− 71	− 55	0
	S	0	− 0,2302	− 0,4259	− 0,5328	− 0,5087	− 0,3308	0
V_6	$\mathfrak{S}$	0	− 0,1199	− 0,2574	− 0,4051	− 0,5762	− 0,7746	− 1,0
	$-\sigma H$	0	+ 0,0052	+ 69	+ 82	+ 90	+ 70	0
	S	0	− 0,1147	− 0,2505	− 0,3969	− 0,5672	− 0,7676	− 1,0
D_9	$\mathfrak{S}$	0	− 0,2033	− 0,3780	− 0,4732	− 0,4508	− 0,2925	0
	$-\sigma H$	0	+ 0,0122	+ 162	+ 194	+ 213	+ 165	0
	S	0	− 0,1911	− 0,3618	− 0,4538	− 0,4295	− 0,2760	0
V_9	$\mathfrak{S}$	0	− 0,0395	− 0,0735	− 0,0920	− 0,0876	− 0,0569	0
	$-\sigma H$	0	− 0,0043	− 57	− 68	− 75	− 58	0
	S	0	− 0,0438	− 0,0792	− 0,0988	− 0,0951	− 0,0627	0

Tab. IVb).

Bod		7	8	9	10	11	12	13
C_4	$\mathfrak{S}$	+ 0,2796	+ 0,4518	+ 0,5141	+ 0,4879	+ 0,3935	+ 0,2582	+ 0,1201
	$-\sigma H$	− 0,0642	− 0,1271	− 0,1714	− 0,1827	− 0,1714	− 0,1271	− 0,0642
	S	+ 0,2154	+ 0,3247	+ 0,3427	+ 0,3052	+ 0,2221	+ 0,1311	+ 0,0559
E_4	$\mathfrak{S}$	+ 0,0844	+ 0,1365	+ 0,1553	+ 0,1473	+ 0,1188	+ 0,0780	+ 0,0363
	$-\sigma H$	− 0,0154	− 304	− 411	− 438	− 411	− 304	− 154
	S	+ 0,0690	+ 0,1061	+ 0,1142	+ 0,1035	+ 0,0777	+ 0,0476	+ 0,0209
D_6	$\mathfrak{S}$	− 0,3901	− 0,6304	− 0,7173	− 0,6807	− 0,5490	− 0,3602	− 0,1676
	$-\sigma H$	+ 0,0227	+ 450	+ 607	+ 647	+ 607	+ 450	+ 227
	S	− 0,3674	− 0,5854	− 0,6566	− 0,6160	− 0,4883	− 0,3152	− 0,1449
V_6	$\mathfrak{S}$	− 0,7630	− 0,5558	− 0,3834	− 0,2472	− 0,1463	− 0,0764	− 0,0300
	$-\sigma H$	− 0,0288	− 571	− 771	− 821	− 771	− 571	− 288
	S	− 0,7918	− 0,6129	− 0,4605	− 0,3293	− 0,2234	− 0,1335	− 0,0588
D_9	$\mathfrak{S}$	+ 0,4011	+ 0,9433	+ 0,5120	+ 0,2228	+ 0,0602	− 0,0047	− 0,0148
	$-\sigma H$	− 0,0680	− 1346	− 1816	− 1936	− 1816	− 1346	− 680
	S	+ 0,3331	+ 0,8087	+ 0,3304	+ 0,0292	− 0,1214	− 0,1393	− 0,0828
V_9	$\mathfrak{S}$	+ 0,0850	+ 0,1930	− 0,6798	− 0,5191	− 0,3613	− 0,2160	− 0,0944
	$-\sigma H$	+ 0,0240	+ 475	+ 641	+ 683	+ 641	+ 475	+ 240
	S	+ 0,1090	+ 0,2405	− 0,6157	− 0,4508	− 0,2972	− 0,1685	− 0,0704

Tab. IVc).

Bod		14	15	16	17	18	19	20
C_4	$\mathfrak{S}$	0	− 0,0687	− 0,1059	− 0,1112	− 0,0888	− 0,0478	0
	$-\sigma H$	0	+ 0,0155	+ 0,0201	+ 0,0183	+ 0,0153	+ 0,0116	0
	S	0	− 0,0532	− 0,0858	− 0,0929	− 0,0735	− 0,0362	0
E_4	$\mathfrak{S}$	0	− 0,0208	− 0,0320	− 0,0336	− 0,0268	− 0,0144	0
	$-\sigma H$	0	+ 0,0037	+ 48	+ 44	+ 37	+ 28	0
	S	0	− 0,0171	− 0,0272	− 0,0292	− 0,0231	− 0,0116	0
D_6	$\mathfrak{S}$	0	+ 0,0959	+ 0,1478	+ 0,1551	+ 0,1239	+ 0,0666	0
	$-\sigma H$	0	− 0,0055	− 71	− 65	− 54	− 41	0
	S	0	+ 0,0904	+ 0,1407	+ 0,1486	+ 0,1185	+ 0,0625	0
V_6	$\mathfrak{S}$	0	+ 0,0265	+ 0,0409	+ 0,0429	+ 0,0343	+ 0,0184	0
	$-\sigma H$	0	+ 0,0070	+ 90	+ 82	+ 69	+ 52	0
	S	0	+ 0,0335	+ 0,0499	+ 0,0511	+ 0,0412	+ 0,0236	0
D_9	$\mathfrak{S}$	0	− 0,0124	− 0,0193	− 0,0202	− 0,0162	− 0,0087	0
	$-\sigma H$	0	+ 0,0165	+ 213	+ 194	+ 162	+ 122	0
	S	0	+ 0,0041	+ 0,0020	− 0,0008	+ 0,0000	+ 0,0035	0
V_9	$\mathfrak{S}$	0	+ 0,0641	+ 0,0987	+ 0,1036	+ 0,0827	+ 0,0445	0
	$-\sigma H$	0	− 0,0058	− 75	− 68	− 57	− 0,0043	0
	S	0	+ 0,0583	+ 0,0912	+ 0,0968	+ 0,0770	+ 0,0402	0

B) Theorie plnostěnných nosníků obloukových.

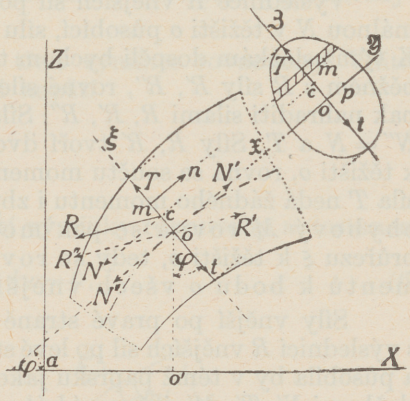
I. Úvod.

12. Základní pojmy. *Nosník obloukový*[1]) vznikne jakožto *křivý prut* po stránce měřické, pohybuje-li se rovinný obrazec tak, že těžiště obrazce opisuje rovinnou křivku a rovina obrazce zůstává k této křivce stále kolmá; obrazec sám je při tom buď stálý nebo proměnný. Každá poloha tvořicího obrazce slove *průřezem* nosníku. Křivka, kterou opisuje těžiště, nazývá se *střednicí* nosníku; je-li přímá, slove *osou*. Rovina střednice budiž rovinou souměrnosti nosníku.

Na prut působí vnější síly, o nichž předpokládejme, že jsou souměrné k rovině střednice. Pak lze každé dvě souměrné síly nahraditi výslednicí v rovině střednice, kterou lze tedy nazvati *rovinou sil vnějších*. Tato rovina jest ovšem též rovinou souměrnosti sil vnitřních a střednice nosníku zůstane i po přetvoření nosníku v této rovině. K silám vnějším náleží též vlastní váha nosníku; aby i tato dávala výslednice v rovině střednice, musí být rovina střednice svislá, což dále předpokládejme.

Libovolný bod m obloukového nosníku (obr. 30) je v průřezu ξ, který je dán svým těžištěm o na střednici. Vztahujme střednici k vodorovné ose X a svislé ose Z; v této soustavě má těžiště o souřadnice $\overline{a\,o'} = x$, $\overline{o'\,o} = z$. Je-li střednice dána rovnicí nebo graficky, stačí ke stanovení těžiště o jediná souřadnice x. Průřez ξ je kolmý ke střednici, svírá tedy se svislicí týž úhel φ jako tečna ke střednici s vodorovnou osou X; úhel φ určíme z některého ze známých vztahů

$$\sin\varphi = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}, \quad \cos\varphi = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},$$



Obr. 30.

znamená-li $\mathrm{d}\,s$ prvek střednice. Průřez sám vztahujeme k osám $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, jež jdou těžištěm o; osa $\mathfrak{Z}$ budiž v rovině střednice, osa $\mathfrak{Y}$ je k této rovině kolmá. Ze souměrnosti nosníku k rovině střednice plyne, že osa $\mathfrak{Z}$ jest osou souměrnosti průřezu; volme ji za kladnou na té straně těžiště, kam obrací nosník stranu vypuklou. K osám $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ má bod m souřadnice $\mathfrak{y} = \overline{o\,p}$, $\mathfrak{z} = \overline{p\,m}$, je-li $m\,p \perp \mathfrak{Y}$.

Veškeré vnější síly, jež působí na nosník, jsou v rovnováze. Rozdělíme-li nosník kterýmkoli průřezem na dvě části, jsou vnější síly jedné části v rovnováze s vnějšími silami druhé části. V průřezu samém působí navzájem obě části nosníku silami vnitř-

[1]) Podrobně se obírá nosníky obloukovými též *Jos. Šolín* v „Theorii plnostěnných nosníků obloukových o dvou opěrách“ (Praha 1892).

ními, jež jsou s obou stran průřezu rovné a protivné, tedy jsou též v rovnováze. Odejmeme-li jednu část nosníku, na př. pravou, musíme ji nahraditi silami vnitřními, kterými působí na část levou; tyto síly vnitřní jsou pak v rovnováze s vnějšími silami části levé. Na této rovnováze založíme stanovení sil vnitřních.

Vnější síly po levé straně průřezu ξ působí obecně po různu v rovině a skládají se ve výslednici R v rovině vnějších sil (obr. 30). Paprsek výslednice R seče průřez ξ na ose $\mathfrak{Z}$ v bodě c, jenž slove *středem napětí*; týmž bodem prochází i paprsek výslednice R'_1 vnitřních sil s pravé strany, jež se s výslednicí R ruší. Paprsek R může míti libovolnou polohu v rovině vnějších sil. Rozložme výslednici R v bodě c na složku N kolmou k průřezu a složku T v rovině průřezu, tedy v ose $\mathfrak{Z}$ působící. Síla N působí obecně mimo těžiště o; připojíme-li v těžišti o kolmo k průřezu síly N' a N'', jež jsou rovné síle N a protivné, tedy se ruší, můžeme sílu N nahraditi soustavou sil N, N', N''. Síla $N'' = N$ působí v těžišti o, síly N, N' dávají pak dvojici silovou, jež má za označení $\overline{o\,c} = c$ moment

$$M = -N \cdot c. \tag{59}$$

Znaménko *normálné síly* N pokládejme za kladné (záporné), je-li síla N tahem (tlakem), t. j. působí-li jakožto složka výslednice vnějších sil po levé straně průřezu ξ vlevo (vpravo). Moment M, jejž nazýváme *momentem ohybovým*, budiž kladný, točí-li jako ručičky na hodinách, pokud jde o výslednici vnějších sil po levé straně průřezu. Je-li pak c kladné ve směru kladné osy $\mathfrak{Z}$, dá kladná síla N na kladném rameni c záporný moment M, třeba tedy v poslední rovnici na pravé straně předložiti znaménko záporné, aby byla shoda znamének na obou stranách rovnice. Sílu T nazývejme *silou tangenciálnou* nebo *posouvající* a berme ji za kladnou (zápornou), má-li směr kladné (záporné) polovice osy $\mathfrak{Z}$.

Výslednice R vnějších sil po levé straně průřezu ξ má tedy tři složky: sílu normálnou N v těžišti o působící, sílu tangenciálnou T a dvojici o momentu ohybovém M. K týmž složkám dospěli bychom též, kdybychom připojili v těžišti o v paprsku rovnoběžném s R síly R', R'', rovné síle R a směrů protivných, jež se tedy ruší. Sílu R lze pak nahraditi silami R, R', R''. Síla $R'' = R$ působí v těžišti o a rozloží se tu ve složky $N'' = N$ a T. Síly R, R' tvoří dvojici silovou, jejíž moment, rovný momentu síly R k těžišti o, rovná se součtu momentů složek N, T v bodě c působících k témuž bodu o; síla T nedá žádného momentu i zbývá jako prve pouze moment $M = -N.c$. Moment ohybový M rovná se pak momentu výslednice R vnějších sil po levé straně průřezu ξ k těžišti o, tedy se rovná též algebraickému součtu statických momentů k bodu o všech vnějších sil, jež působí po levé straně průřezu.

Síly vnější po pravé straně průřezu daly by výslednici R'_1, jež se musí rušiti s výslednicí R vnějších sil po levé straně, poněvadž je rovnováha; byla by tedy $R'_1 = -R$ a působila by v témž paprsku jako síla R. Výslednici R'_1 vztahovali bychom k těžišti o složkami N', T', M', jež musí být rovny složkám N, T, M a působí v protivném smyslu. Platí tedy

$$N' = N,\ T' = -T,\ M' = -M, \tag{60}$$

jelikož N' je tahem, tedy kladné, je-li N také tahem; znaménko T' a M' je pak protivné znaménku T a M, jelikož je posuzujeme podle směru osy $\mathfrak{Z}$ a podle smyslu točení.

13. Síly vnitřní. *α) Výminky rovnováhy sil vnějších a vnitřních.* Na každý prvek průřezu působí obecně šikmá vnitřní síla s, kterou rozkládejme na složku normálnou n, působící v kolmici k průřezu, a složku tangenciálnou t, působící v rovině průřezové (obr. 30). Vnitřní síly, jimiž působí část nosníku vpravo od průřezu ξ na část levou, jsou v rovnováze s vnějšími silami levé části, jež lze nahraditi výslednicí R, tuto pak složkami N, T, M. Vnitřní síly s pravé strany průřezu ξ působící tvoří obecně prostorovou soustavu; poněvadž však předpokládáme, že nosník i vnější síly jsou souměrné k rovině střednice, jsou k této rovině souměrné i vnitřní síly, jež lze pak redukovati na

soustavu rovinnou. Normálné i tangenciálné síly vnitřní ve dvou prvcích souměrných k ose $\mathfrak{Z}$ skládají se ve výslednici n, jejíž paprsek seče osu $\mathfrak{Z}$, a ve výslednici t, jež působí v ose $\mathfrak{Z}$. Berme prvky omezené rovnoběžkami s osou $\mathfrak{Y}$, jež mají vzdálenost $\mathrm{d}\,\mathfrak{z}$. Normálné síly vnitřní ve všech bodech takového prvku působící dají výslednici n v rovině $(X\,Z)$ vnějších sil; tangenciálné síly vnitřní ve všech bodech téhož prvku dají výslednici t v ose $\mathfrak{Z}$, tedy v téže rovině $(X\,Z)$. V každém podobném prvku průřezu působí takovéto síly n, t; všechny ty síly jsou v rovnováze s výslednicí R vnějších sil po levé straně průřezu, kterou nahradíme složkami N, T, M.

Jde o rovinnou soustavu sil, pro kterou platí tři výminky rovnováhy. Ve směru kolmém k průřezu působí složka N a vnitřní síly n; je-li N i n kladné (záporné), jsou obojí síly tahy (tlaky) a působí proti sobě. Rovnováha žádá pak, aby bylo vyhověno výmince

$$N = \Sigma\, n.$$

Ve směru osy $\mathfrak{Z}$ působí síla T a vnitřní síly t; obojí síly pokládejme za kladné (záporné), působí-li v kladném (záporném) směru osy $\mathfrak{Z}$. Výminka rovnováhy má tu tvar

$$T + \Sigma\, t = 0.$$

Uvažujme konečně momenty k bodu o, k němuž má výslednice R moment M a síla n moment $n\,\mathfrak{z}$; obojí momenty berme kladně, točí-li jako ručičky na hodinách. Kladná síla n, t. j. tah, na kladném rameni $\mathfrak{z}$ dá kladný moment, platí tedy výminka rovnováhy

$$M + \Sigma\, n\,\mathfrak{z} = 0.$$

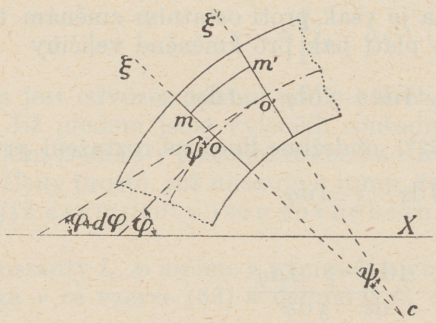
Z výminek rovnováhy nelze ovšem stanoviti síly vnitřní, dokud neznáme zákona, podle kterého se tyto síly rozdělují po průřezu; tento zákon odvodíme z přiměřených hypothes.

*β) **Napětí normálná*** jsou obsažena v prvé a třetí výmince rovnováhy. Vnitřní síla normálná n, působící na prvek obsahu $\mathrm{d}u$, dá napětí

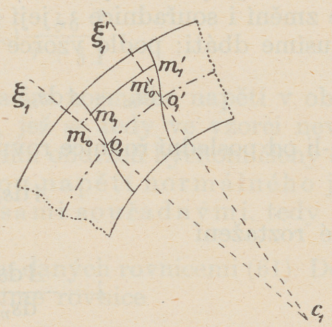
$$\nu = \frac{n}{\mathrm{d}u};$$

z toho plyne $n = \nu\,\mathrm{d}u$, což dosadíme do prvé a třetí výminky rovnováhy a dostaneme

$$N = \int \nu\,\mathrm{d}u, \quad M + \int \nu\,\mathfrak{z}\,\mathrm{d}u = 0. \tag{61}$$



Obr. 31.



Obr. 32.

Rozdělení napětí ν po průřezu odvodíme z hypothesy o přetvoření nosníku účinkem vnějších sil. Mysleme si na střednici dva body nekonečně blízké o, o' (obr. 31), jež omezují prvek střednice $\mathrm{d}s = \mathrm{arc}\; o\,o'$. Tečny střednice v bodech o, o' svírají s osou

X úhly φ, $\varphi + \mathrm{d}\varphi$, spolu pak úhel ψ; úhel φ je vnějším úhlem v trojúhelníku, jehož protilehlé úhly vnitřní jsou $\varphi + \mathrm{d}\varphi$, ψ, platí tedy

$$\varphi = \varphi + \mathrm{d}\varphi + \psi, \quad \text{z čehož} \quad \psi = -\mathrm{d}\varphi.$$

Roste-li oblouk s, ubývá úhlu φ u nosníků obloukových, jež obracejí vypuklou stranu vzhůru; pak je $\mathrm{d}\varphi$ záporný a úhel ψ kladný. Body o, o' jsou těžiště posloupných průřezů ξ, ξ', jejichž roviny jsou kolmé k tečnám střednice, svírají tedy spolu též úhel $\psi = -\mathrm{d}\varphi$. Roviny ξ, ξ' se sekou v ose křivosti střednice; její průsečík c s rovinou střednice je střed křivosti a $\overline{c\,o} = r$ je poloměr křivosti střednice v bodě o. Prvek střednice $o\,o'$ má pak délku

$$\mathrm{d}s = r \cdot \psi = -r\,\mathrm{d}\varphi. \tag{62^a}$$

Průřezy ξ, ξ' omezují nekonečně malý prvek nosníku, jejž si lze mysliti vytvořený otočením průřezu ξ kolem osy křivosti o úhel $\psi = -\mathrm{d}\varphi$. Tím vytvoří bod m vlákno

$$\text{arc}\; m\,m' = \mathrm{d}s_m = -(r + \zeta)\,\mathrm{d}\varphi,$$

má-li vlákno od těžiště vzdálenost $\overline{o\,m} = \zeta$. Užijeme-li rovnice (62^a), dostaneme

$$\mathrm{d}s_m = \mathrm{d}s - \zeta\,\mathrm{d}\varphi. \tag{62^b}$$

Vnější síly přetvořují nosník, střednice přetvořeného nosníku zůstává však v rovině vnějších sil. Body o, o', m, m' nabudou přetvořením nových poloh o_1, o_1', m_1, m_1' (obr. 32). Tu pak předpokládejme, že body, které byly původně v rovinách průřezových ξ, ξ' nekonečně blízkých, vytvoří po přetvoření plochy křivé, jež jsou vzájemně shodny a k rovinám ξ_1, ξ_1' kolmým k přetvořené střednici stejně položeny. Tato hypothesa[1]) je správnější než obvyklá hypothesa,[2]) podle níž body, které byly původně v rovinách průřezových, zůstanou i po přetvoření v rovinách kolmých k přetvořené střednici. Obě hypothesy vedou pak k témuž výsledku.

Roviny ξ_1, ξ_1', vedené body o_1, o_1' kolmo k přetvořené střednici, sekou se v ose křivosti c_1. Prvek přetvořené střednice $o_1\,o_1'$ lze pokládati za kruhový oblouček opsaný ze středu c_1, rovněž tak vlákno $m_1\,m_1'$, jež protne roviny ξ_1, ξ_1' v bodech m_0, m_0'. Podle předpokladu jest

$$\overline{m_0\,m_1} = \overline{m_0'\,m_1'} \quad \text{nebo} \quad \overline{m_0\,m_0'} = \overline{m_1\,m_1'}.$$

Původní délka vlákna $\overline{m\,m'} = \mathrm{d}s_m$ byla stanovena vzorcem (62^b). Přetvořením se změní na délku $\overline{m_1\,m_1'} = \overline{m_0\,m_0'} = \mathrm{d}s_m + \Delta\,\mathrm{d}s_m$; při tom se změní $\mathrm{d}s$ o $\Delta\,\mathrm{d}s$, r o Δr, $\mathrm{d}\varphi$ o $\Delta\,\mathrm{d}\varphi$. Obecně se změní i souřadnice ζ, její změna je však proti ostatním změnám tak malá, že jí nemusíme dbáti; podle vzorce (62^b) platí pak pro změněné veličiny

$$\mathrm{d}s_m + \Delta\,\mathrm{d}s_m = \mathrm{d}s + \Delta\,\mathrm{d}s - \zeta\,(\mathrm{d}\varphi + \Delta\,\mathrm{d}\varphi).$$

Odečteme-li od poslední rovnice rovnici (62^b), obdržíme lineárné roztažení prvku $\overline{m\,m'}$

$$\Delta\,\mathrm{d}s_m = \Delta\,\mathrm{d}s - \zeta \cdot \Delta\,\mathrm{d}\varphi$$

a poměrné roztažení

$$\lambda = \frac{\Delta\,\mathrm{d}s_m}{\mathrm{d}s_m} = \frac{\Delta\,\mathrm{d}s - \zeta \cdot \Delta\,\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s - \zeta\,\mathrm{d}\varphi}.$$

---

[1]) Vyslovil ji prvý *Barré de Saint-Venant* v poznámkách ke 3. vyd. *Navierova* spisu „Résumé des leçons données à l'École des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique" (Paříž 1864), str. 33.

[2]) Tuto hypothesu vyslovil již *Jacques Bernoulli* a užíval jí *Louis Navier*; viz spis citovaný v předchozí poznámce, str. CX a 33.

Dělme čitatele i jmenovatele délkou $\mathrm{d}s = -r\,\mathrm{d}\varphi$ a znamenejme

$$\frac{\Delta \mathrm{d}s}{\mathrm{d}s} = \lambda_0$$

jakožto poměrné roztažení střednice a

$$\frac{\Delta \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = \omega$$

jakožto poměrnou změnu úhlu $\mathrm{d}\varphi$. Pak vyjde

$$\lambda = \frac{\dfrac{\Delta \mathrm{d}s}{\mathrm{d}s} + \dfrac{\eta \cdot \Delta \mathrm{d}\varphi}{r\,\mathrm{d}\varphi}}{1 + \dfrac{\eta\,\mathrm{d}\varphi}{r\,\mathrm{d}\varphi}} = \frac{\lambda_0 + \dfrac{\eta}{r}\,\omega}{1 + \dfrac{\eta}{r}} = \lambda_0 + (\omega - \lambda_0)\,\frac{\dfrac{\eta}{r}}{1 + \dfrac{\eta}{r}}$$

anebo

$$\lambda = \lambda_0 + (\omega - \lambda_0)\,\frac{\eta}{r + \eta}\,.$$

Od roztažení přejdeme k napětí podle zákona Hookova

$$\nu = E\,\lambda\,.$$

Tento zákon platí v mezích pružnosti a není-li napětí normálných ve směrech kolmých k napětí ν; obě výminky budou v praktických případech naplněny, druhá aspoň přibližně. Nosníky obloukové jsou nejčastěji staticky neurčité, i má na ně vliv změna teploty; uvažujme tedy v roztažení také účinek změny teploty. Celkové roztažení poměrné bude $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, kde $\lambda_1 = \dfrac{\nu}{E}$ je podle zákona Hookova poměrné roztažení odpovídající napětí a $\lambda_2 = \delta\,\varepsilon$ poměrné roztažení plynoucí ze změny teploty, znamená-li δ počet stupňů, o nějž se teplota změní, a ε součinitele roztažnosti tepelné, t. j. délku, o niž se změní jednotka délková při změně teploty o 1^0. Je tedy

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\nu}{E} + \delta\,\varepsilon\,,$$

z čehož plyne

$$\nu = E\,(\lambda - \delta\,\varepsilon)\,.$$

Dosazením za λ dostaneme

$$\nu = E\left[\lambda_0 - \delta\,\varepsilon + (\omega - \lambda_0)\,\frac{\eta}{r + \eta}\right]. \tag{63}$$

Tím jest odvozen zákon, podle kterého se mění normálné napětí v obloukovém nosníku. Již předem jsme vyloučili souřadnici $\mathfrak{y}$, jež se tedy ve vzorci nevyskytuje. Odstraněním zlomku v poslední rovnici a rozvedením obdrželi bychom členy obsahující $\nu\,\eta$, ν, η a členy prosté, což ukazuje k tomu, že čarou napětí normálného je hyperbola, jejíž asymptoty jsou rovnoběžné s osami souřadnými, tedy hyperbola rovnoosá.

Konstanty λ_0, ω určíme z výminek rovnováhy daných rovnicemi (61). Dosadíme-li do nich za ν ze vzorce (63) a dělíme-li E, obdržíme rovnice

$$\left.\begin{aligned} \frac{N}{E} &= (\lambda_0 - \delta\,\varepsilon)\int \mathrm{d}u + (\omega - \lambda_0)\int \frac{\eta\,\mathrm{d}u}{r + \eta}\,, \\ -\frac{M}{E} &= (\lambda_0 - \delta\,\varepsilon)\int \eta\,\mathrm{d}u + (\omega - \lambda_0)\int \frac{\eta^2\,\mathrm{d}u}{r + \eta}\,. \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Ve vzorcích těch znamená $\int \mathrm{d}u = U$ obsah průřezový; dále jest $\int \mathfrak{z}\,\mathrm{d}u = 0$ jakožto statický moment celé plochy průřezové k ose $\mathfrak{Y}$ jdoucí těžištěm. Oba zbývající integrály mají jednoduchý vztah, neboť

$$\frac{\mathfrak{z}^2}{r+\mathfrak{z}} = \frac{\mathfrak{z}^2 + r\mathfrak{z} - r\mathfrak{z}}{r+\mathfrak{z}} = \mathfrak{z} - \frac{r\mathfrak{z}}{r+\mathfrak{z}},$$

tedy

$$\int \frac{\mathfrak{z}^2\,\mathrm{d}u}{r+\mathfrak{z}} = \int \mathfrak{z}\,\mathrm{d}u - r\int \frac{\mathfrak{z}\,\mathrm{d}u}{r+\mathfrak{z}} = -r\int \frac{\mathfrak{z}\,\mathrm{d}u}{r+\mathfrak{z}}.$$

Stačí pak určiti jediný z obou integrálů. Vyjděme od integrálu

$$\int \frac{\mathfrak{z}^2\,\mathrm{d}u}{r+\mathfrak{z}} = \frac{1}{r}\int \frac{\mathfrak{z}^2\,\mathrm{d}u}{1+\frac{\mathfrak{z}}{r}}$$

a poznamenejme

$$\int \frac{\mathfrak{z}^2\,\mathrm{d}u}{1+\frac{\mathfrak{z}}{r}} = K, \tag{65}$$

což je veličina obdobná momentu setrvačnosti J; přechází v tento moment pro $\lim r = \infty$, kdy jest

$$\lim K = \int \mathfrak{z}^2\,\mathrm{d}u = J.$$

Veličinu K bylo by lze určiti pro různé tvary průřezů, jak bude uvedeno dále pro průřez obdélníkový. Pokládáme-li ji za známou, dostaneme podle předchozích rovnic

$$\int \frac{\mathfrak{z}^2\,\mathrm{d}u}{r+\mathfrak{z}} = \frac{K}{r}, \quad \int \frac{\mathfrak{z}\,\mathrm{d}u}{r+\mathfrak{z}} = -\frac{K}{r^2}.$$

Dosaďme stanovené hodnoty integrálů do výminek rovnováhy (64); tyto výminky nabudou tvaru

$$\frac{N}{E} = (\lambda_0 - \delta\varepsilon)\,U - (\omega - \lambda_0)\frac{K}{r^2},$$

$$-\frac{M}{E} = (\omega - \lambda_0)\frac{K}{r}.$$

Z druhé rovnice plyne

$$\left.\begin{aligned} \omega - \lambda_0 &= -\frac{M r}{E K} \\ \text{a z prvé} \qquad \lambda_0 - \delta\varepsilon &= \frac{N}{E U} + (\omega - \lambda_0)\frac{K}{U r^2} = \frac{N - \frac{M}{r}}{E U}. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Stanovené konstanty dosadíme do vzorce (41) pro napětí ν a určíme konečně

$$\nu = \frac{N - \frac{M}{r}}{U} - \frac{M r}{K}\cdot\frac{\mathfrak{z}}{r+\mathfrak{z}}. \tag{67}$$

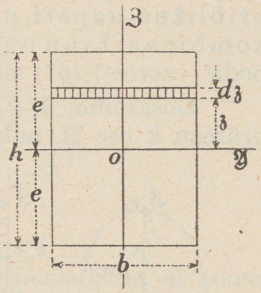
Z tohoto vzorce plyne vzorec pro přímý nosník dosazením $r = \infty$; pak jest $K = J$, $\frac{r}{r+\zeta} = 1$ a

$$\nu = \frac{N}{U} - \frac{M\zeta}{J}, \tag{67a}$$

což je známý vzorec pro kombinaci tahu neb tlaku $\left(\frac{N}{U}\right)$ s ohybem $\left(-\frac{M\zeta}{J}\right)$.

Porovnejme veličiny J, K u průřezu obdélníkového (obr. 33). Zvolme prvek průřezu o šířce $\mathrm{d}\zeta$ omezený dvěma rovnoběžkami s osou $\mathfrak{y}$ ve vzdálenosti ζ od této osy. Pak jest $\mathrm{d}u = b\,\mathrm{d}\zeta$ a

$$K = \int_{-e}^{e} \frac{\zeta^2\,\mathrm{d}u}{1+\frac{\zeta}{r}} = b\int_{-e}^{e} \frac{\zeta^2\,\mathrm{d}\zeta}{1+\frac{\zeta}{r}} = br\int_{-e}^{e} \frac{\zeta^2\,\mathrm{d}\zeta}{r+\zeta}.$$



Obr. 33.

Přetvoříme-li

$$\frac{\zeta^2}{r+\zeta} = \frac{\zeta^2 - r^2 + r^2}{r+\zeta} = \zeta - r + \frac{r^2}{r+\zeta},$$

dostaneme

$$\int_{-e}^{e} \frac{\zeta^2\,\mathrm{d}\zeta}{r+\zeta} = \int_{-e}^{e} (\zeta - r)\,\mathrm{d}\zeta + r\int_{-e}^{e} \frac{\mathrm{d}\zeta}{r+\zeta} = \left[\tfrac{1}{2}(\zeta - r)^2 + r^2 \cdot \lg(r+\zeta)\right]_{-e}^{e} =$$

$$= \tfrac{1}{2}[(e-r)^2 - (-e-r)^2] + r^2[\lg(r+e) - \lg(r-e)] = -2er + r^2 \cdot \lg\frac{r+e}{r-e}.$$

Pak jest

$$K = br\left(r^2 \cdot \lg\frac{r+e}{r-e} - 2er\right) = br^3\left(\lg\frac{r+e}{r-e} - 2\frac{e}{r}\right).$$

Rozviňme v řadu přirozený logaritmus

$$\lg\frac{r+e}{r-e} = \lg\frac{1+\frac{e}{r}}{1-\frac{e}{r}} = 2\left[\frac{e}{r} + \frac{1}{3}\left(\frac{e}{r}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{e}{r}\right)^7 + \ldots\right]$$

a dostaneme

$$K = 2br^3\left[\frac{1}{3}\left(\frac{e}{r}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{e}{r}\right)^7 + \ldots\right] =$$

$$= \frac{2}{3}be^3\left[1 + \frac{3}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{3}{7}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \ldots\right].$$

Jelikož jest $e = \frac{1}{2}h$, plyne

$$\tfrac{2}{3}be^3 = \tfrac{1}{12}bh^3 = J,$$

je tedy

$$\frac{K}{J} = 1 + \frac{3}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{3}{7}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \ldots$$

Pro poměry

$$\frac{e}{r} = \frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{6},\quad \frac{1}{8},\quad \frac{1}{10}$$

vyjde

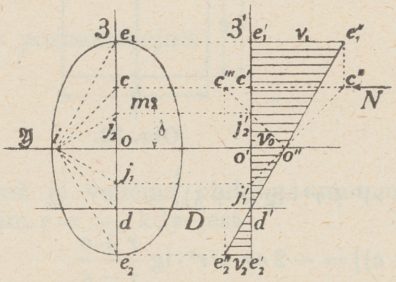
$$\frac{K}{J} = 1{,}183,\ 1{,}039,\ 1{,}017,\ 1{,}009,\ 1{,}006.$$

Poměr $\frac{e}{r} = \frac{1}{2}$ mohl by se vyskytnouti nejvýše u článků řetězu. U nosníků obloukových bývá poměr $\frac{e}{r}$ ještě menší než $\frac{1}{10}$, lze tu tedy nahraditi

$$K \doteq J;$$

chyba, které se tím dopouštíme, bude menší než $6^0/_{00}$. Také u jiných tvarů průřezu lze obdobně klásti přibližně moment setrvačnosti J místo veličiny K, t. j. řešiti, jako by poloměr r byl nekonečně veliký. Lze tedy u nosníků obloukových počítati přibližně napětí normálné ze vzorce (67^a) platného pro přímé pruty při kombinaci tahu neb tlaku s ohybem. Tím nahrazujeme přesnější zákon hyperboly podle vzorce[1]) (67) přibližným zákonem přímky.

Dosazením $M = -N\,c$ podle vzorce (59) a $J = U\,i^2$, je-li i poloměr setrvačnosti průřezu k ose $\mathfrak{y}$), nabude vzorec (67^a) tvaru[2])



Obr. 34.

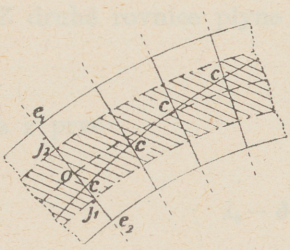
$$\nu = \frac{N}{U}\left(1 + \frac{c\,\mathfrak{z}}{i^2}\right). \qquad (67^b)$$

Podle tohoto vzorce je čarou napětí ν přímka (obr. 34), jež má v ose $\mathfrak{y}$) ($\mathfrak{z} = 0$) pořadnici $\nu_0 = \frac{N}{U} = \overline{o'\,o''}$ rovnou *napětí průměrnému*. Přímka napětí seče osu $\mathfrak{z}'$ ($\nu = 0$) v bodě d' ve vzdálenosti $\overline{o'\,d'} = d$, jež hoví rovnici

$$1 + \frac{c\,d}{i^2} = 0 \quad \text{nebo} \quad c\,d = -i^2;$$

vzdálenost d stanoví *neutrálnou osu* D, jejíž průsečík d s osou $\mathfrak{z}$ sestrojíme, přeneseme-li $\overline{o\,i} = i$ a vedeme-li $i\,d \perp c\,i$. Po obou stranách neutrálné osy má napětí ν protivná znaménka; na té straně, kde je těžiště, má napětí ν to znaménko jako síla N.

Napětí ν bude míti v celém průřezu totéž znaménko, vyjde-li neutrálná osa D mimo průřez. Krajní polohou osy D je v tomto případě tečna k průřezu kolmá k ose $\mathfrak{z}$, uvažujeme-li pouze polohy středu napětí c na ose $\mathfrak{z}$. Tečně v bodě e_1 jakožto ose neutrálné odpovídá střed napětí j_1 daný přímkou $i\,j_1 \perp e_1\,i$; obdobně k tečně v bodě e_2 jakožto ose neutrálné určíme střed napětí j_2 přímkou $i\,j_2 \perp e_2\,i$. Body j_1, j_2 zoveme *krajními body jádrovými* a úsek $\overline{j_1\,j_2}$ *jádrovým úsekem*. Napětí v celém průřezu je pak téhož znaménka, je-li střed napětí uvnitř jádrového úseku.



Obr. 35.

Krajní body jádrové ve všech průřezech spojují *krajní čáry jádrové* (obr. 35), jež omezují *jádrový pás*. Normálná síla N u nosníků obloukových je zpravidla tlakem. *Středy tlaku* c ve všech průřezech vytvořují pak *čáru tlakovou*. Všechny průřezy nosníku jsou výhradně tlačeny, je-li tlaková čára v jádrovém pásu.

V krajním bodě e_1 (obr. 34) dostaneme, dosadíme-li do vzorce (67^b) souřadnici $\mathfrak{z} = \overline{o\,e_1} = e_1$, napětí

$$\nu_1 = \frac{N}{U}\left(1 + \frac{c\,e_1}{i^2}\right);$$

[1]) Z tohoto vzorce vyšetřuje napětí počtem i graficky *Jos. Šolín* v „Theorii plnostěnných nosníků obloukových“, str. 12 a d.

[2]) Srovnej prvý díl tohoto spisu (4. vyd. 1946), str. 73 a d., kde je proveden rozbor zákona napětí ν podle vzorce (67^b).

v krajním bodě e_2 jest $\zeta = \overline{o\,e_2} = -e_2$ a napětí

$$\nu_2 = \frac{N}{U}\left(1 - \frac{c\,e_2}{i^2}\right).$$

Tyto vzorce zjednodušíme, použijeme-li vzdáleností krajních bodů jádrových od těžiště $\overline{o\,j_1} = j_1$, $\overline{o\,j_2} = j_2$, pro něž platí podle obrazce $\overline{o\,i}^2 = \overline{j_1\,o} \cdot \overline{o\,e_1} = \overline{j_2\,o} \cdot \overline{o\,e_2}$, tedy

$$j_1 = -\frac{i^2}{e_1}, \quad j_2 = \frac{i^2}{e_2}.$$

Pak jest

$$\nu_1 = \frac{N}{U}\left(1 - \frac{c}{j_1}\right) = \frac{N}{U} \cdot \frac{j_1 - c}{j_1} = \frac{N}{U} \cdot \frac{\overline{o\,j_1} - \overline{o\,c}}{\overline{o\,j_1}} = \frac{N}{U} \cdot \frac{\overline{j_1\,c}}{\overline{j_1\,o}}$$

a obdobně

$$\nu_2 = \frac{N}{U}\left(1 - \frac{c}{j_2}\right) = \frac{N}{U} \cdot \frac{\overline{j_2\,c}}{\overline{j_2\,o}}.$$

Napětí $\nu_1 = \overline{e_1'\,e_1''}$, $\nu_2 = \overline{e_2'\,e_2''}$ sestrojíme na přímce $c'''\,c'' \parallel \mathfrak{y}$, promítneme-li na ni konec o'' pořadnice $\nu_0 = \overline{o'\,o''}$ z bodu j_1'', j_2''; obdržíme tím

$$\overline{c'\,c''} = \overline{o'\,o''} \cdot \frac{\overline{j_1''\,c'}}{\overline{j_1''\,o'}} = \nu_1, \quad \overline{c'\,c'''} = \overline{o'\,o''} \cdot \frac{\overline{j_2''\,c'}}{\overline{j_2''\,o'}} = \nu_2.$$

Z posledních vzorců plyne též, že napětí ν_1 (ν_2) má totéž znaménko jako N, je-li střed napětí c po téže straně krajního jádrového bodu j_1 (j_2) jako těžiště o.

Znamenejme krátce $\overline{j_1\,c} = c_1$, $\overline{j_2\,c} = c_2$, berouce tyto úseky kladně, mají-li směr kladné polovice osy $\mathfrak{z}$; pak vyjde

$$\nu_1 = -\frac{N\,c_1}{U\,j_1}, \quad \nu_2 = -\frac{N\,c_2}{U\,j_2}.$$

Obdobně ke vzorci (59) jsou

$$M_1 = -N\,c_1, \quad M_2 = -N\,c_2 \tag{59a}$$

momenty síly N a tedy i výslednice R vnějších sil po jedné straně průřezu ke krajním bodům jádrovým. Zavedením těchto momentů a dosazením za j_1, j_2 plynou vzorce

$$\nu_1 = -\frac{M_1\,e_1}{U\,i^2} = -\frac{M_1\,e_1}{J}, \quad \nu_2 = \frac{M_2\,e_2}{U\,i^2} = \frac{M_2\,e_2}{J}, \tag{68}$$

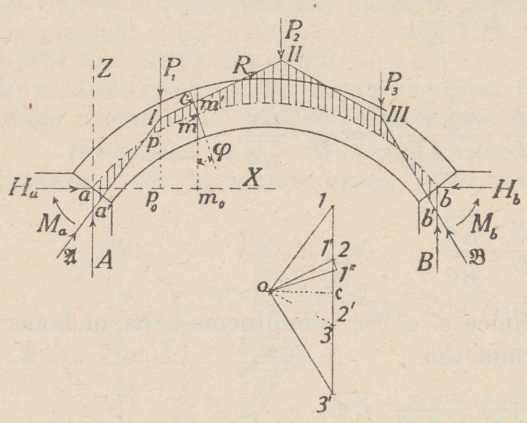
což jsou vzorce obdobné ke vzorcům pro krajní napětí v přímém nosníku[1]); jediný rozdíl je v tom, že ohybový moment M, vztažený k těžišti průřezovému, je zde nahrazen momenty M_1, M_2 ke krajním bodům jádrovým.

γ) ***Napětí tangenciálná.*** U nosníků obloukových bývá posouvající síla T malá proti normálné síle N; pak jsou i napětí tangenciálná τ malá proti napětím normálným ν. Z obojích napětí bylo by vyšetřiti ideálná napětí hlavní,[2]) podle nichž se posuzují přesně rozměry nosníků. Je-li však napětí τ malé proti ν, vyjdou největší ideálná napětí hlavní v krajních vláknech průřezu, kde je napětí $\tau = 0$. Posuzujeme-li průřez, nemusíme tedy hleděti k napětí τ, z něhož by se počítaly pouze rozměry částí spojovacích, je-li nosník složen z dílů.[2])

[1]) Viz *Jos. Šolín* „Základy technické nauky o pružnosti a pevnosti" (Praha 1904), str. 63. — [2]) V témže díle str. 174, 160 a d.

Můžeme-li při výpočtu napětí normálných užívati u nosníků obloukových přibližně vzorce platného pro přímé nosníky, můžeme tak tím spíše učiniti u napětí tangenciálných,[1]) jež jsou malá proti napětím normálným. K výpočtu tangenciálných napětí, vyvozených posouvající silou T, užijeme tedy u obloukových nosníků vzorců a způsobů platných pro pruty přímé.[2])

14. Síly vnější. *α) Zatížení libovolné.* Na nosník obloukový působí *vnější síly prvotné*, t. j. dané *zatížení* nosníku, a vnější síly *druhotné*, totiž *reakce opěrové*. Zatížení nosníku, jež bývá dáno, skládej se z osamělých břemen, o nichž předpokládejme zatím, že se přenášejí na obloukový nosník v jeho střednici. Nosník tlačí na své *opěry tlaky opěrovými*, jimž vzdorují opěry rovnými a protivnými reakcemi opěrovými, které bývá vyšetřiti.



Obr. 36.

Soustava osamělých břemen P_1, P_2, P_3 působící na obloukový nosník (obr. 36) vyvodí v jeho opěrách reakce $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, obecně šikmé, jež jsou s danými břemeny v rovnováze. Znajíce jednu reakci, na př. $\mathfrak{A}$, určíme snadno výslednici vnějších sil pro libovolný průřez m. Řešíme-li graficky, složíme reakci $\mathfrak{A} = \overline{o\,1}$ s břemenem $P_1 = \overline{1\,1'}$ ve výslednici $R = \overline{o\,1'}$, jejíž paprsek jde průsečíkem I paprsků složek $\mathfrak{A}$, P_1 a je rovnoběžný s úsekem $\overline{o\,1'}$. S touto výslednicí složíme břímě $P_2 = \overline{2\,2'}$ a $P_3 = \overline{3\,3'}$. Dostaneme tak v hlavním obrazci lomenou čáru výslednicovou $a'\,I\,II\,III\,b'$, jejíž strany jsou paprsky výslednic vnějších sil po levé straně působících. V průřezu m obdržíme tak výslednici $R = \overline{o\,1'}$, jež působí ve straně $I\,II$. Rozložíme ji na složku normálnou N a tangenciálnou T, vedeme-li v obrazci složkovém $1'\,1''$ rovnoběžně s průřezem a $o\,1''$ kolmo k němu; pak jest $N = \overline{o\,1''}$, $T = \overline{1''\,1'}$. K těžišti m průřezu má výslednice R podle vzorce (59) moment $M = -Nc$, je-li $c = \overline{m\,c}$ vzdálenost středu napětí c od těžiště m.

Výslednici R lze též rozložiti ve vodorovnou složku H a svislou složku V; jejich úseky obdržíme v obrazci složkovém, vedeme-li $o\,c$ vodorovně, $1'c$ svisle, načež jest $H = \overline{o\,c}$, $V = \overline{c\,1'}$. Jsou-li všechna břemena svislá, je vodorovná složka $H = \overline{o\,c}$ výslednice R táž pro všechny průřezy nosníku; nazývejme ji pak *vodorovnou silou oblouku*. Moment M výslednice R k bodu m určíme též, rozkládajíce výslednici R na složku vodorovnou H a svislou V v bodě m', ve kterém svislice bodu m seče paprsek R; moment M se rovná součtu momentů obou složek, z nichž V nedá žádného momentu, poněvadž její paprsek jde bodem m, tedy

$$M = H \cdot \overline{m\,m'}. \tag{69}$$

Ohybový moment libovolného průřezu rovná se podle toho součinu vodorovné síly a svislé pořadnice mezi střednicí a výslednicovou čarou $a'\,I\,II\,III\,\ldots$. Znaménko součinu $H \cdot \overline{m\,m'}$ souhlasí se znaménkem momentu M, pokládáme-li sílu H jakožto složku výslednice vnějších sil po levé straně průřezu za kladnou (zápornou), směřuje-li vpravo (vlevo), a pořadnici $\overline{m\,m'}$ za kladnou (zápornou),

[1]) Přesněji vyšetřuje tangenciálná napětí obloukových nosníků *Jos. Šolín* v „Theorii plnostěnných nosníků obloukových“, str. 20 a d.

[2]) Viz *Jos. Šolín* „Základy technické nauky o pružnosti a pevnosti“ (Praha 1904), str. 160 a d.

je-li výslednicová čára nad (pod) střednicí. Obrazec omezený střednicí a výslednicovou čarou $a'\ I\ II\ III\ \ldots$ je *momentovým obrazcem* nosníku obloukového. U prostého nosníku přímého byl by momentový obrazec při téže pólové vzdálenosti H omezen výslednicovou čarou $a'\ I\ II\ III\ \ldots$ a základní stranou ve spojnici $a'b'$. U nosníku obloukového jsou patrně momenty značně menší, i je po té stránce obloukový nosník výhodnější než nosník prostý.

Výslednice R je dána složkami N, T, M nebo složkami H, V, M; prvého rozkladu užijeme, jde-li o stanovení napětí, druhého pak, jde-li o řešení vnějších sil.

Na opěrový průřez a působí výslednice $R_a = \overline{o\,1}$, jež má vodorovnou složku $H_a = \overline{o\,c}$, svislou složku $V_a = \overline{c\,1}$ a moment $M_a = H \cdot \overline{a\,a'}$ podle vzorce (69). V opěrovém průřezu b obdržíme výslednici $R_b = \overline{o\,3'}$, jejíž vodorovná složka je $H_b = \overline{o\,c}$, svislá složka $V_b = \overline{c\,3'}$ a moment $M_b = H \cdot \overline{b\,b'}$. Výslednice R_a je totožná s levou reakcí $\mathfrak{A}$, jež má tedy vodorovnou složku H_a, svislou složku $V_a = A$ a moment M_a k bodu a. Výslednice R_b všech sil od levého konce nosníku musí se rušiti s reakcí $\mathfrak{B}$, poněvadž je rovnováha: je tedy reakce $\mathfrak{B}$ rovná a protivná výslednici R_b a má vodorovnou složku $-H_b$, svislou složku $-V_b = B$ a moment $-M_b$ k bodu b.

Graficky můžeme řešiti, známe-li na př. reakci $\mathfrak{A}$. Také pro počtářské řešení stačí, známe-li reakci $\mathfrak{A}$, kterou můžeme nahraditi v bodě a složkami H_a, A, M_a. Pro libovolný průřez, jehož těžiště m má k počátku a souřadnice $\overline{a\,m_0} = x$, $\overline{m_0\,m} = z$, obdržíme vodorovnou složku H výslednice R vnějších sil po levé straně, sčítáme-li algebraicky vodorovné složky všech těchto sil. Působí-li na nosník svislá břemena, vyjde

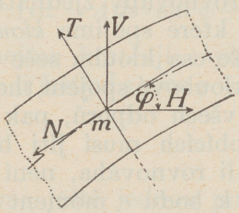
$$H = H_a, \tag{70a}$$

což ukazuje, že vodorovná složka H výslednice R je při svislých břemenech stálá, jak jsme již graficky dokázali. Svislá složka V výslednice R stanoví se obdobně algebraickým součtem svislých složek vnějších sil po levé straně průřezu. Znamenejme ji kladně (záporně), směřuje-li vzhůru (dolů); pak jest

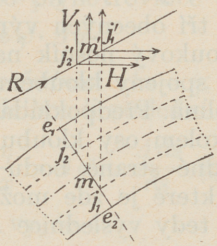
$$V = A - \sum_0^x P. \tag{70b}$$

Konečně ohybový moment M se rovná algebraickému součtu momentů k bodu m všech vnějších sil po levé straně průřezu; je kladný, točí-li jako ručičky na hodinách. Je-li obecně $\overline{a\,p_0} = p$ vzdálenost svislého paprsku P od bodu a, vyjde

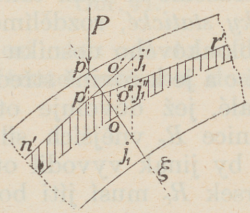
$$M = M_a + A\,x - H_a z - \sum_0^x P\,(x - p). \tag{70c}$$



Obr. 37.



Obr. 38.



Obr. 39.

Ze složek H, V určíme snadno složky N, T výslednice R. Podle předešlých pravidel je síla H kladná, působí-li vpravo, V kladná, směřuje-li vzhůru; síla N je kladná, je-li tahem, tedy působí-li vlevo, a T je kladná, směřuje-li tam, kam obrací oblouk stranu vypuklou (obr. 37). Síly H, V jsou složkami téže výslednice R jako síly N, T.

Pak se rovná síla N součtu složek sil H, V do tečny ke střednici a síla T se rovná součtu složek sil H, V do průřezu, tedy podle uvedených pravidel o znaménkách

$$N = -H\cos\varphi - V\sin\varphi, \quad T = -H\sin\varphi + V\cos\varphi. \tag{71}$$

Jde-li o napětí ν_1, ν_2 v krajních vláknech, není k tomu třeba normálné síly N; stačí podle vzorců (68) momenty M_1, M_2 ke krajním bodům jádrovým j_1, j_2. Tyto momenty určíme podobně jako moment M k těžišti m, rozložíme-li výslednici R ve složky H, V jednou v bodě j_1' ve svislici bodu j_1, po druhé v bodě j_2' ve svislici bodu j_2 (obr. 38). Pak jest

$$M_1 = H \cdot \overline{j_1 j_1'}, \quad M_2 = H \cdot \overline{j_2 j_2'}, \tag{69a}$$

což odpovídá úplně vzorci (69) pro moment M. Obrazec momentu M_1 (M_2) ke spodnímu (hornímu) bodu jádrovému je pak omezen spodní (horní) čarou jádrovou a výslednicovou čarou, jejíž strany dávají paprsky výslednic R.

Předpokládali jsme dosud, že se břemena přenášejí na obloukový nosník v jeho střednici. Obyčejně však působí břemena na obloukový nosník v jeho bodech rubových. Máme-li tu (obr. 39) narýsovánu výslednicovou čáru $n'p'r'$, v jejíchž stranách působí výslednice R, platí strana $n'p'$ vlevo od průřezu ξ vedeného bodem p, v němž se břímě P na nosník přenáší; strana $p'r'$ platí pak vpravo od průřezu ξ. K těžišti o náleží, jdeme-li s levé strany, moment $M = H \cdot \overline{oo'}$, stanovený svislou pořadnicí mezi střednicí a stranou $n'p'$. Jdeme-li s pravé strany, obdržíme v bodě o moment $M = H \cdot \overline{oo''}$; momentová pořadnice končí tu na straně $p'r'$ výslednicové čáry. Rozdíl obou momentů $H \cdot \overline{o'o''}$ znamená moment břemene P k těžišti o. Zrovna tak náleží k jádrovému bodu j_1, jdeme-li s levé strany, moment $H \cdot \overline{j_1 j_1'}$, a jdeme-li s pravé strany, moment $H \cdot \overline{j_1 j_1''}$; oba momenty se liší o moment $H \cdot \overline{j_1' j_1''}$, což je moment břemene P k bodu j_1. V průřezu, v jehož rubovém bodě se přenáší na obloukový nosník osamělé břímě, mění se tedy momenty k jednotlivým bodům průřezu náhle o moment břemene ke středu momentovému. Z obou hodnot momentu uvažujeme pak ovšem větší prostou hodnotu.

β) ***Statická určitost.*** Výslednici vnějších sil po jedné straně libovolného průřezu působících určíme snadno, známe-li jednu reakci obloukového nosníku. Obecně má každá reakce tři neznámé složky; u nosníku o dvou opěrách je tedy celkem šest neznámých složek opěrových reakcí. Opěrové reakce tvoří s danými břemeny rovnováhovou soustavu sil po různu v rovině působících, pro niž platí tři obecné výminky rovnováhy. Ke stanovení reakcí nedostává se pak tří výminek rovnováhy, i jsou obecně obloukové nosníky *trojnásob staticky neurčité*. Řešení jejich vyžaduje vedle tří obecných výminek rovnováhy ještě tří *výminek přetvárných*, jež plynou z přetvoření nosníku.

Můžeme si však také vedle tří obecných výminek rovnováhy zjednati *zvláštní výminky statické*, rozdělíme-li obloukový nosník na díly, které spojíme *klouby*. Dva díly obloukového nosníku buďtež spojeny kloubem tak, že osa kloubu seče střednici v bodě c a je k rovině střednice kolmá. Předpokládáme-li kloubové spojení theoreticky dokonalé, jež dovoluje otáčení kolem osy kloubu beze všech odporů, pak paprsek výslednice R_c vnějších sil po jedné straně bodu c působících musí jíti bodem c, neboť by jinak vyvodil otáčení, které je zde možné; je-li rovnováha, není otáčení, a paprsek R_c musí jíti bodem c, tedy výslednice R_c má k bodu c moment

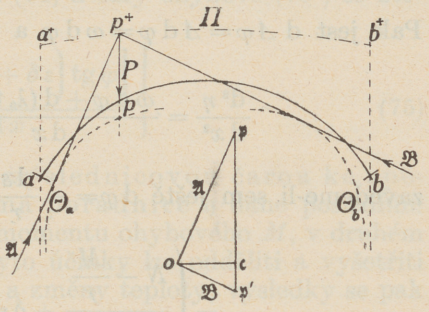
$$M_c = 0. \tag{72}$$

Takovouto zvláštní výminku rovnováhy dá každý kloub.

Obloukový nosník s jedním kloubem měl by vedle tří obecných jednu zvláštní výminku rovnováhy při šesti neznámých složkách reakcí; je tedy obloukový nosník s jedním kloubem dvojnásob staticky neurčitý. Obloukový nosník

se dvěma klouby má tři obecné a dvě zvláštní výminky rovnováhy i je pouze jednoduše neurčitý; jeho řešení žádá jediné výminky přetvárné. Obloukový nosník se třemi klouby má tři obecné a tři zvláštní výminky rovnováhy, tedy celkem tolik výminek, kolik je neznámých složek reakcí; je proto staticky určitý. V praktických případech vyskytují se *oblouky bez kloubů*, *oblouky o dvou kloubech* a *oblouky o třech kloubech*.

γ) ***Jediné osamělé břímě*** svislé P vyvodí opěrové reakce $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, jež jsou s břemenem P v rovnováze; proto se sekou paprsky reakcí na paprsku břemene v bodě p^+ (obr. 40). Pohybuje-li se břímě P po oblouku, mění bod p^+ svou polohu spojitě, opisuje tedy jistou čáru Π, kterou nazýváme *sečnicí* tlaků nebo reakcí opěrových. Mimo to se mění spojitě i paprsky $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ obou reakcí, obalují tedy jakési křivky Θ_a, Θ_b, jež nazveme *tečnicemi* tlaků nebo reakcí opěrových.[1])



Obr. 40.

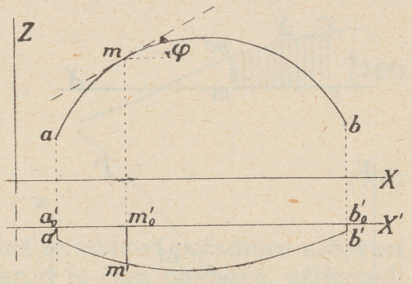
Sečnicí a oběma tečnicemi je dáno grafické řešení reakcí vyvozených jediným osamělým břemenem svislým. Paprsky reakcí jsou tečnami k tečnicím, vedenými průsečíkem p^+ paprsku břemene P se sečnicí. Úseky reakcí obdržíme pak v obrazci složkovém, přeneseme-li úsek břemene $P = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'}$ a vedeme-li $o\,\mathfrak{p} \parallel \mathfrak{A}$, $o\,\mathfrak{p}' \parallel \mathfrak{B}$; pak jest $\mathfrak{A} = \overline{o\,\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{p}'\,o}$. Vodorovnicí $o\,\mathfrak{c}$ určíme konečně i složky reakcí: svislé $A = \overline{\mathfrak{c}\,\mathfrak{p}}$, $B = \overline{\mathfrak{p}'\,\mathfrak{c}}$ a vodorovnou sílu $H = \overline{o\,\mathfrak{c}}$.

15. Ohybová čára nosníků obloukových. Z různých složek přetvořen nosníků obloukových půjde v praktických případech nejčastěji o svislá posunut jednotlivých bodů střednice. Přeneseme-li svislé posunutí Δz bodu m jakožto pořadnici $\overline{m'_0 m'}$ od osy X', naplní koncové body m' *ohybovou čáru* obloukového nosníku (obr. 41). K její rovnici dospějeme ze známého vztahu

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}s \cdot \sin\varphi .$$

Přetvořením se mění všechny členy v této rovnici o hodnoty velmi malé, s nimiž můžeme počítati přibližně jako s veličinami nekonečně malými. Základní rovnici pro změny obdržíme, diferencujeme-li poslední rovnici a nahradíme-li při tom znaménko d znaménkem Δ, jelikož změny jsou sice velmi malé, avšak konečné; takto plyne rovnice

$$\Delta\,\mathrm{d}z = \Delta\,\mathrm{d}s \cdot \sin\varphi + \mathrm{d}s \cdot \cos\varphi \cdot \Delta\varphi .$$



Obr. 41.

Znamenejme kratčeji *ohybovou pořadnici* $\Delta z = \eta$; pak jest $\Delta\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}\,\Delta z = \mathrm{d}\eta$. Nahradíme-li ještě $\mathrm{d}s \cdot \cos\varphi = \mathrm{d}x$ a dělíme-li poslední rovnici touto veličinou, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} = \Delta\varphi + \frac{\Delta\,\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{tg}\,\varphi .$$

Derivujme ještě jednou podle x; vyjde

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\,\Delta\varphi + \mathrm{d}\left(\dfrac{\Delta\,\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{tg}\,\varphi\right)}{\mathrm{d}x} .$$

[1]) Sečnice užil prvý *W. Fränkel* v pojednání „Berechnung eiserner Bogenbrückene (v časopise „Civilingenieur" r. 1867); sečnici i tečnice uvádí nejprve *E. Winkler* ve spise „Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit" (Praha 1867), str. 329.

Řešíce napětí ν poznamenali jsme $\frac{\Delta \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = \omega$, $\frac{\Delta \mathrm{d}s}{\mathrm{d}s} = \lambda_0$ a určili jsme rovnicemi (66)

$$\omega - \lambda_0 = -\frac{Mr}{EK}, \quad \lambda_0 - \delta\varepsilon = \frac{N - \frac{M}{r}}{EU}.$$

Pak jest $\mathrm{d}\,\Delta\varphi = \Delta\,\mathrm{d}\varphi = \omega\,\mathrm{d}\varphi$ a

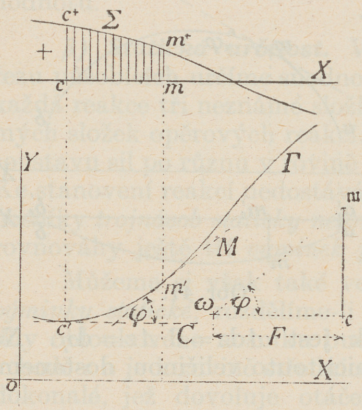
$$\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\omega\,\mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}(\lambda_0 \operatorname{tg}\varphi)}{\mathrm{d}x} = \frac{\lambda_0\,\mathrm{d}\varphi - \frac{Mr}{EK}\,\mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}(\lambda_0 \operatorname{tg}\varphi)}{\mathrm{d}x};$$

zavedeme-li sem ještě $\mathrm{d}\varphi = -\frac{\mathrm{d}s}{r}$ a dosadíme-li za λ_0, máme

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-\left(\frac{N - \frac{M}{r}}{EU} + \delta\varepsilon\right)\frac{\mathrm{d}s}{r} + \frac{M\,\mathrm{d}s}{EK} + \mathrm{d}\left[\left(\frac{N - \frac{M}{r}}{EU} + \delta\varepsilon\right)\operatorname{tg}\varphi\right]}{\mathrm{d}x}. \tag{73}$$

Poloměr zakřivení střednice bývá proti průřezovým rozměrům u obloukových nosníků tak velký, že lze přibližně klásti $r = \infty$, jak jsme poznali vyšetřujíce napětí ν. Pak lze vynechati přibližně všechny členy, jež mají r ve jmenovateli, a položiti J místo K, čímž vyjde

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M}{EJ\cos\varphi} + \frac{\mathrm{d}\left[\left(\frac{N}{EU} + \delta\varepsilon\right)\operatorname{tg}\varphi\right]}{\mathrm{d}x}. \tag{73a}$$



Obr. 42.

Každou čáru lze pokládati za výslednicovou čáru k soustavě sil, kterou lze odvoditi z tvaru čáry. Ohybová čára je spojitá křivka, bude tedy výslednicovou čarou ke spojité soustavě silové, kterou vyšetříme. Mějme obecnou spojitou soustavu silovou danou určovací plochou, která jest omezena osou X' a čarou Σ (obr. 42). Na délku $\overline{c\,m}$ připadne určovací plocha $\mathfrak{U} = \mathrm{pl.}\, c\, c^+ m^+ m$, jíž odpovídá zatížení

$$Q = \frac{\mathfrak{U}}{e},$$

znamená-li e danou půdici. Kladným (záporným) částem určovací plochy nechť odpovídají kladné (záporné) síly, jež směřují na př. vzhůru (dolů). Je-li pól ω vlevo od čáry složkové a skládáme-li od levé strany k pravé, obrací výslednicová čára Γ duté úhly tam, kam směřují síly, tedy u kladných sil vzhůru, u záporných dolů; průsečíku čáry Σ s osou X' odpovídá obratový bod čáry Γ. Tato čára měj v bodě c' vodorovnou tečnu C. V bodě m' je tečna M, jež svírá s osou X úhel φ; týž úhel svírají pólové paprsky $\omega\,\mathfrak{c} \parallel C$, $\omega\,\mathfrak{m} \parallel M$, jež omezují úsek zatížení $Q = \overline{\mathfrak{c}\,\mathfrak{m}}$. Pak jest, znamená-li $F = \overline{\omega\,\mathfrak{c}}$ vzdálenost pólovou,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{Q}{F} = \frac{\mathfrak{U}}{eF}.$$

Derivována podle x dá tato rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{eF} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathfrak{U}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathfrak{y}}{eF}, \tag{74}$$

neboť $\dfrac{\mathrm{d}\mathfrak{U}}{\mathrm{d}x} = \mathfrak{y} = \overline{m\,m^+}$ je poslední pořadnice určovací plochy.

Druhá diferenciální rovnice čáry výslednicové (74) a čáry ohybové (73^a) se ztotožní, je-li

$$\mathfrak{y} = eF\left\{\frac{M}{EJ\cos\varphi} + \frac{\mathrm{d}\left[\left(\dfrac{N}{EU} + \delta\varepsilon\right)\operatorname{tg}\varphi\right]}{\mathrm{d}x}\right\}. \tag{75}$$

Ohybová čára obloukového nosníku je pak výslednicovou čarou ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plocha má pořadnice $\mathfrak{y}$ dané posledním vzorcem. Na pravé straně je v prvém členu účinek momentu ohybového M, v druhém členu účinek normálné síly N a změny teploty. Tyto účinky lze odděliti a vyšetřiti zvláště účinek momentu ohybového i normálné síly a změny teploty; výsledky se pak sčítají.

Dbáme-li pouze účinku momentu ohybového, jest ohybová čára obloukového nosníku výslednicovou čarou ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plocha má pořadnice

$$\mathfrak{y}' = \frac{eFM}{EJ\cos\varphi}. \tag{75^a}$$

Řešíme-li graficky, vyjádříme moment ohybový součinem z pólové vzdálenosti f a momentové pořadnice m, tedy

$$M = fm.$$

Je-li průřez nosníku stálý, tedy také moment setrvačnosti průřezu J stálý, můžeme voliti

$$F = \frac{EJ}{ef} \tag{76^a}$$

a vyjde

$$\mathfrak{y}' = \frac{m}{\cos\varphi}. \tag{75^b}$$

Pořadnice momentové m je tedy třeba děliti $\cos\varphi$, čímž se stanoví pořadnice určovací plochy spojité soustavy silové, jejíž výslednicovou čarou je čára ohybová, užijeme-li půdice e a pólové vzdálenosti F. Tato vzdálenost bývá obyčejně příliš velká. Zvolíme-li místo ní libovolnou vzdálenost pólovou F_1, obdržíme místo správných pořadnic ohybových η pořadnice η_1; pak platí[1])

$$\eta = \eta_1 \frac{F_1}{F}.$$

Mění-li se průřez nosníku, můžeme zvoliti pólovou vzdálenost proměnnou podle vzorce (76^a); určovací plocha má tu zase pořadnice $\mathfrak{y}'$ dané vzorcem (75^b). Jinak lze voliti stálou vzdálenost pólovou

$$F = \frac{EJ_0}{ef}, \tag{76^b}$$

[1]) Srovnej druhý díl tohoto spisu, 3. vydání (1946), str. 65.

je-li J_0 volená (na př. střední) hodnota momentu setrvačnosti. Určovací plocha bude tu míti pořadnice

$$\mathfrak{y}' = \frac{m}{\cos\varphi} \cdot \frac{J_0}{J}, \tag{75^c}$$

jež se určí z momentových pořadnic m snadno graficky nebo počtem.

Pro přímý prut vodorovný dosadíme $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$, $\operatorname{tg}\varphi = 0$ a vyjde ze vzorce (75) pořadnice určovací plochy

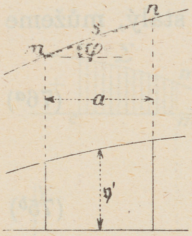
$$\mathfrak{y} = \frac{e F M}{E J} = \frac{e F f m}{E J}.$$

Volíme-li $F = \frac{E J}{e f}$, vyjde $\mathfrak{y} = m$, je tedy momentová plocha sama určovací plochou spojité soustavy silové, jejíž výslednicovou čarou při pólové vzdálenosti F je čára ohybová. Tím se potvrzuje výsledek známý z vyšetřování ohybové čáry přímého prutu.

Vzorec (75^a) dá pro $\varphi = 90^0$, tedy $\cos\varphi = 0$ pořadnici určovací plochy $\mathfrak{y}' = \infty$; nebylo by tedy řešení tímto způsobem možné, má-li střednice svislou tečnu. Tu si pomůžeme, dělíme-li určovací plochu na proužky obsahu u, jež nahradíme osamělými břemeny $\mathfrak{P} = \frac{u}{e}$ v tížnicích proužků působícími. Šířka proužku a budiž tak malá, že lze proužek pokládati za lichoběžník přímočarý; jeho obsah jest $u = a\,\mathfrak{y}'$, je-li $\mathfrak{y}'$ střední pořadnice proužku (obr. 43). Dosadíme-li za $\mathfrak{y}'$ ze vzorce (75^a), obdržíme

$$u = a\,\mathfrak{y}' = \frac{a e F M}{E J \cos\varphi}.$$

Jsou-li proužky dosti úzké, můžeme za M, J; φ dosazovati hodnoty příslušné středům proužků anebo můžeme též za φ bráti odchylku tětivy $m\,n$ střednice od vodorovné osy; nedbáme pak rozdílu mezi obloukem a tětivou. Jelikož je také



Obr. 43.

$$\frac{a}{\cos\varphi} = \overline{m\,n} = s,$$

vyjde

$$\mathfrak{P} = \frac{u}{e} = \frac{a F M}{E J \cos\varphi} = \frac{F M s}{E J}. \tag{77}$$

Ideálné břímě $\mathfrak{P}$ dané posledním vzorcem nezávisí na směru, ve kterém ohyb hledáme. Výslednicovou čarou k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$ stanoveným vzorcem (77) určíme tedy posunutí obloukového nosníku v každém směru. Dosadíme-li za moment $M = f m$ a zvolíme-li na př. F podle vzorce (76^b), obdržíme

$$\mathfrak{P} = \frac{m s}{e} \cdot \frac{J_0}{J}, \tag{77^a}$$

což bychom snadno určili počtem nebo graficky. Ohybovou čáru můžeme stanoviti jakožto výslednicovou čáru k břemenům $\mathfrak{P}$ graficky nebo počtem. Řešíce počtem, volili bychom $e = 1$.

Z ohybových momentů vyšetříme ohybové pořadnice η'. Normálné síly a změna teploty dají ohybové pořadnice η'', pro které platí podle vzorce (73^a), vynecháme-li člen s momentem M,

$$\frac{d^2\eta''}{dx^2} = \frac{d\left[\left(\frac{N}{E U} + \delta\varepsilon\right)\operatorname{tg}\varphi\right]}{dx}.$$

Integrací plyne

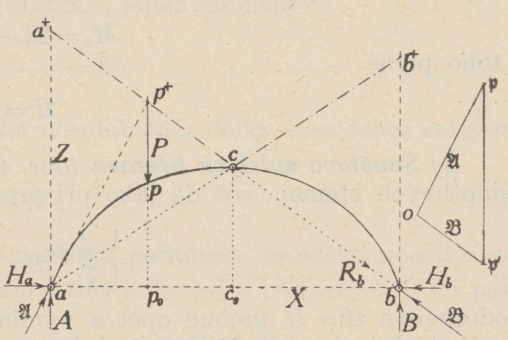
$$\frac{d\eta''}{dx} = \left(\frac{N}{EU} + \delta\varepsilon\right)\operatorname{tg}\varphi; \qquad (73^b)$$

integrační konstantu lze tu vynechati, neboť by se jevila v poloze základní strany, kterou určíme přímo. Z posledního vzorce bylo by lze vyšetřiti ohyb vyvozený pouze normálnou silou a změnou teploty. Kdybychom i zde chtěli řešiti čáru ohybovou jakožto čáru výslednicovou, určili bychom čáru, jež má pořadnice dané pravou stranou v posledním vzorci, a tuto čáru pokládali bychom za součtovou čáru (čáru síly posouvající) spojité soustavy silové, jejíž výslednicovou čarou je čára ohybová.

Základní strana ohybové čáry je vždy dána výminkami opěrovými, jež stanoví ohybové pořadnice $\overline{a_0 a'}$, $\overline{b_0 b'}$ v opěrových bodech a, b (obr. 41). V opěře pevné jest ovšem ohybová pořadnice $\eta = 0$; také v opěře posouvatelné po vodorovné bylo by $\eta = 0$ pro ohyb ve směru svislém.

II. Oblouk o třech kloubech.

16. Zatížení stálé. *α) Jediné osamělé břímě svislé.* Oblouk o třech kloubech mívá dva *klouby opěrové* a, b a *kloub střední* nebo *vrcholový* c (obr. 44). Je staticky určitý, proto nemá naň změna teploty účinku. Opěrové klouby a, b buďtež ve přímce vodorovné, vrcholový kloub c pak v libovolném bodě střednice. Oblouk vztahujme k vodorovné ose $a\,b \equiv X$ a svislé ose Z, jdoucí bodem a.



Obr. 44.

Jediné osamělé břímě P, jež působí v bodě p na části $a\,c$, vyvodí reakce $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, jež vyšetříme snadno graficky. Je-li v bodě a kloub, musí býti v tomto bodě ohybový moment $M_a = 0$, tedy paprsek reakce $\mathfrak{A}$ jakožto jediné vnější síly po levé straně musí jíti bodem a, nechť je břímě P kdekoli na nosníku. Obdobně je též moment $M_b = 0$, poněvadž je v bodě b kloub, a tedy i paprsek reakce $\mathfrak{B}$ jde vždy bodem b. Levá tečnice se tedy redukuje na bod a, pravá tečnice na bod b. Pro průřezy vpravo od břemene P je výslednice $R_b = -\mathfrak{B}$; kloub v bodě c dává výminku $M_c = 0$, i musí jíti paprsek výslednice R_b, totožný s paprskem $\mathfrak{B}$, bodem c. Paprsek $\mathfrak{B}$ spojuje tedy bod b s bodem c. Na paprsku břemene P se pak sekou v bodě p^+ paprsky $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, jelikož je rovnováha; tím je dán paprsek $\mathfrak{A} \equiv a\,p^+$. Známe-li paprsky reakcí, stanovíme snadno jejich úseky v čáře složkové, v níž jest $P = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'}$, $\mathfrak{A} \# \overline{o\,\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{B} \# \overline{\mathfrak{p}'\,o}$.

Pohybuje-li se břímě P po části oblouku $a\,c$, zůstává spojnice $b\,c$ paprskem reakce $\mathfrak{B}$ a bod p^+ pohybuje se po prodloužené spojnici $b\,c$. Působí-li břímě P na část $c\,b$, jest obdobně spojnice $a\,c$ paprskem reakce $\mathfrak{A}$ a bod p^+ je pak na prodloužené spojnici $a\,c$. Sečnice se tedy skládá z prodloužených spojnic $b\,c$, $a\,c$.

Řešíme-li počtem, nahradíme každou reakci třemi složkami: reakci $\mathfrak{A}$ složkami A, H_a, M_a a reakci $\mathfrak{B}$ složkami B, $-H_b$, $-M_b$. Poněvadž jsou však v bodech a, b klouby, jest $M_a = 0$, $M_b = 0$ a zbývají jen čtyři neznámé složky reakcí. Určíme je ze tří obecných výminek rovnováhy a ze zvláštní výminky, kterou dává kloub c ve tvaru $M_c = 0$. Znamenejme $\overline{a\,b} = l$, $\overline{a\,p_0} = p$, $\overline{p_0\,b} = p'$ a pišme při svislém břemeni obecné výminky rovnováhy pro síly vodorovné, svislé a momenty k bodu b ve tvaru

$$H_a - H_b = 0, \quad A + B - P = 0, \quad A\,l - P\,p' = 0.$$

Z poslední rovnice plyne

$$A = P\frac{p'}{l};$$

obdobně určíme z momentové výminky rovnováhy k bodu a nebo z druhé rovnice

$$B = P\frac{p}{l}.$$

Z toho plyne, že svislé složky reakcí jsou rovny reakcím prostého nosníku, jenž by měl délku $\overline{ab}$ a byl by zatížen týmž břemenem P jako oblouk.

Z prvé výminky rovnováhy vnějších sil plyne

$$H_a = H_b = H;$$

vodorovná složka obou reakcí je tedy táž. Tuto vodorovnou sílu oblouku určíme pak ze zvláštní výminky rovnováhy $M_c = 0$. Moment M_c znamená algebraický součet momentů vnějších sil po levé straně bodu c; poznačíme-li $\overline{a\,c_0} = c$, $\overline{c_0\,b} = c'$, $\overline{c_0\,c} = h$, jest

$$M_c = A\,c - P\,(c-p) - H\,h.$$

Svislé síly vnější A, P jsou tytéž jako u prostého nosníku a dají k bodu c moment

$$A\,c - P\,(c-p) = \mathfrak{M}_c,$$

rovný momentu prostého nosníku. Celkem jest

$$M_c = \mathfrak{M}_c - H\,h = 0;$$

z toho plyne

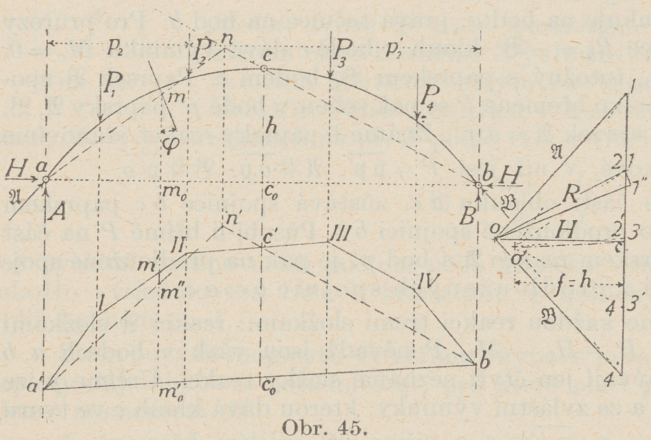
$$H = \frac{\mathfrak{M}_c}{h}. \tag{78}$$

*β) **Soustava svislých břemen*** (obr. 45) se může řešiti tak, že se sčítají účinky jednotlivých břemen, což dá jako při prostém nosníku svislé reakce

$$A = \frac{1}{l}\sum_0^l P\,p', \quad B = \frac{1}{l}\sum_0^l P\,p.$$

Vodorovnou sílu H určíme opět z výminky $M_c = 0$; moment M_c se rovná součtu momentů k bodu c sil A, H a všech břemen P na části $a\,c$ působících, tedy

$$M_c = A\,c - \sum_0^c P\,(c-p) - H\,h.$$



Obr. 45.

Svislé síly A, P jsou tytéž jako u prostého nosníku, i jest

$$A\,c - \sum_0^c P\,(c-p) = \mathfrak{M}_c$$

moment prostého nosníku ke svislici bodu c. Pak platí

$$M_c = \mathfrak{M}_c - H\,h = 0,$$

z čehož plyne vzorec (78) jako při jediném břemeni.

Snadno řešíme též graficky. Svislé složky reakcí A, B rovnají se reakcím prostého nosníku a určí se čarou složkovou a výslednicovou k daným břemenům. Výslednicovou čarou určíme též momenty prostého nosníku $\mathfrak{M} = f\,\eta$, je-li f vzdálenost pólová a η

pořadnice momentová. Vzorec (78) ukazuje, že je výhodné zvoliti pólovou vzdálenost $f = h$. Rýsujeme-li k daným břemenům $P_1 = \overline{1\,1'}$, $P_2 = \overline{2\,2'}$, $P_3 = \overline{3\,3'}$, $P_4 = \overline{4\,4'}$ z pólu o' ve vzdálenosti $f = h$ od čáry složkové zvoleného výslednicovou čáru $a'\,I\,II\,III\,IV\,b'$, stanoví paprsek pólový $o'\,c \parallel a'\,b'$ úseky svislých složek reakcí $A = \overline{c\,1}$, $B = \overline{4'\,c}$. Dále jest $\mathfrak{M}_c = f \cdot \overline{c_0'\,c'} = h \cdot \overline{c_0'\,c'}$ a tedy podle vzorce (78) vyjde $H = \frac{\mathfrak{M}_c}{h} = \overline{c_0'\,c'}$. Přeneseme-li do složkového obrazce na vodorovnici úsek $H = \overline{c_0'\,c'} = \overline{o\,c}$, obdržíme i úseky výsledných reakcí $\mathfrak{A} = \overline{o\,1}$, $\mathfrak{B} = \overline{4'\,o}$; paprsky reakcí $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou s jejich úseky rovnoběžné a jdou body a, b.

Známe-li reakce, určíme snadno výslednici R pro libovolný průřez i její složky. Jde-li na př. o průřez mezi břemeny P_1, P_2, má výslednice R sil $\mathfrak{A}$, P_1, jež působí po levé straně průřezu, úsek $R = \overline{o\,1'}$. Vedeme-li $o\,1''$ kolmo k průřezu a $1'\,1''$ rovnoběžně s průřezem, obdržíme úseky složky normálné $N = \overline{o\,1''}$ a tangenciálné $T = \overline{1''\,1'}$. Moment výslednice R k libovolnému bodu m průřezu (na př. ke krajnímu bodu jádrovému) rovná se algebraickému součtu momentů složek, t. j. vnějších sil po levé straně průřezu, tedy, je-li $\overline{a\,m_0} = x$, $\overline{m_0\,m} = z$,

$$M = A\,x - \sum_0^x P\,(x - p) - H\,z.$$

Svislé síly vnější jsou tytéž jako u prostého nosníku; jejich moment

$$A\,x - \sum_0^x P\,(x - p) = \mathfrak{M}$$

znamená moment ke svislici bodu m prostého nosníku téže délky a za téhož zatížení jako u oblouku. Pak jest

$$M = \mathfrak{M} - H\,z. \tag{79}$$

Graficky určíme $\mathfrak{M} = f\,\mathfrak{y}$, je-li $\mathfrak{y} = \overline{m_0'\,m'}$ momentová pořadnice prostého nosníku ve svislici bodu m. Obdobně jest $\mathfrak{M}_c = f\,\mathfrak{y}_c$, znamenáme-li $\mathfrak{y}_c = \overline{c_0'\,c'}$. Vzorec (78) dá pak obecně $H = \frac{f\,\mathfrak{y}_c}{h}$ a ze vzorce (79) obdržíme

$$M = f\,(\mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{y}_c}{h}\,z).$$

Přímky $b\,c$, $a\,m$ se protnou v bodě n, jehož svislice určí na přímce $b'\,c'$ bod n'; spojnice $a'\,n'$ seče pak svislici bodu m v bodě m''. Obrazce $a\,n\,b$, $a'\,n'\,b'$ jsou afinní; stejnolehlé úseky jejich mají týž poměr, tedy

$$\mathfrak{y}_c : h = \overline{m_0'\,m''} : z \quad \text{nebo} \quad \overline{m_0'\,m''} = \frac{\mathfrak{y}_c}{h}\,z.$$

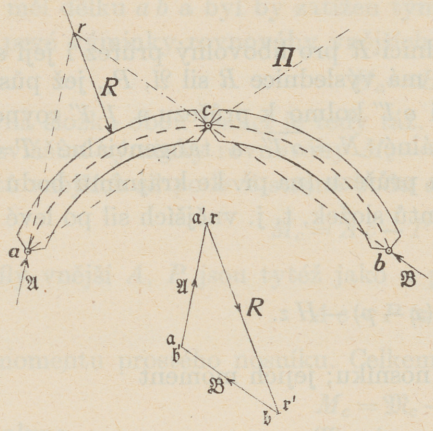
Pak vyjde

$$M = f \cdot (\overline{m_0'\,m'} - \overline{m_0'\,m''}) = f \cdot \overline{m''\,m'}.$$

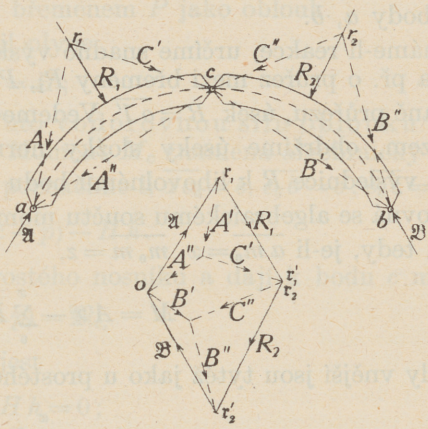
Pořadnice $\overline{m''\,m'}$ jest ovšem kladná (záporná), směřuje-li vzhůru (dolů). Hledáme-li moment M, nemusíme tedy rýsovati výslednicovou čáru, jež vychází z reakce $\mathfrak{A}$ jakožto prvé strany (podle obr. 36). Tato čára musila by zde ovšem procházeti klouby a, c, b.

γ) ***Břemena libovolného směru,*** jež působí pouze na část $a\,c$, můžeme nahraditi výslednicí R a řešiti pak jako při jediném osamělém břemeni (obr. 46). Paprsek reakce $\mathfrak{B}$ musí jíti kloubem b i kloubem c, poněvadž v části $b\,c$ není břemen a je tedy reakce $\mathfrak{B}$

výslednicí vnějších sil po pravé straně bodu b i c. Paprsek reakce $\mathfrak{A}$ jde bodem a a seče paprsek $\mathfrak{B}$ v bodě r na paprsku výslednice R, poněvadž je rovnováha. Tím jsou určeny paprsky reakcí; úseky jejich dá složkový obrazec, v němž jest úsek $R = \overline{\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}'}$, $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'}$, $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}'}$, tyto tři úseky rovnoběžné s určovacími paprsky tvoří pak uzavřený trojúhelník. Pro jakékoli zatížení části $a\,c$ zůstane bod r, v němž se sekou paprsky $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, R, na prodloužené spojnici $b\,c$, která je tedy sečnicí pro část $a\,c$ za libovolného zatížení, jež nahrazujeme výslednicí R. Pro část $b\,c$ je pak obdobně sečnicí Π prodloužená přímka $a\,c$.



Obr. 46.

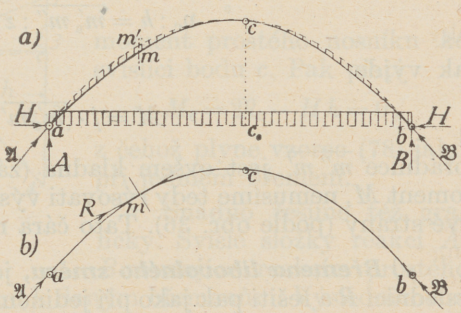


Obr. 47.

Působí-li na obě části oblouku o třech kloubech břemena libovolného směru, lze řešiti opěrové reakce zvláště pro zatížení části $a\,c$ i $c\,b$ (podle obr. 46) a výsledky složiti. Určíme však též snadno opěrové reakce najednou. Složíme nejprve břemena v části $a\,c$ ve výslednici R_1 a břemena v části $c\,b$ ve výslednici R_2. Rozložme pak výslednici $R_1 = \overline{\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}'_1}$ (obr. 47) na složky A', C', jejichž paprsky spojují libovolný bod r_1 paprsku R_1 s body a, c; podobně rozložme výslednici $R_2 = \overline{\mathfrak{r}_2\,\mathfrak{r}'_2}$ na složky C'', B'', jejichž paprsky spojují libovolný bod r_2 paprsku R_2 s klouby c, b. Dále si mysleme síly C', C'' nahrazeny výslednicí, kterou rozložíme do složek A'', B', působících v paprscích $a\,c$, $c\,b$. Tím jsme převedli veškeré zatížení do bodů a, b. Reakce $\mathfrak{A}$ se pak ruší se silami A', A'' a reakce $\mathfrak{B}$ je v rovnováze se silami B', B'', čímž jsou úseky obou reakcí určeny; paprsky jejich jdou body a, b rovnoběžně s úseky.

δ) ***Zatížení rovnoměrné*** po celém oblouku dává vlastní váha. Vlastní váha oblouku byla by přibližně rozdělena rovnoměrně po jeho střednici, váha ostatní konstrukce na oblouku spočívající (na př. při mostě) počítá se obyčejně jako rovnoměrně rozdělená po vodorovné; přibližně můžeme pak i vlastní váhu oblouku bráti za rovnoměrně rozdělenou po vodorovné. Plné zatížení rovnoměrné (vyznačené v obr. 48*a* určovacím obdélníkem při tětivě $a\,b$) vyvodí v opěrách a, b svislé reakce tytéž jako při prostém nosníku, jak bylo dokázáno při jediném břemeni i soustavě břemen; je-li q zatížení poměrné, mají svislé složky reakcí hodnotu

$$A = B = \tfrac{1}{2}\,q\,l\,.$$



Obr. 48.

Pro vodorovnou sílu H platí obecně vzorec (78), odvozený pro jediné břímě; neboť zatížení rovnoměrné lze vykládati jako soustavu břemen a stanoviti jeho účinek součtem účinků jednotlivých břemen, čímž se vzorec (78) nemění. Pro bod c obdržíme, je-li $\overline{a\,c_0} = c$, $\overline{c_0\,b} = c'$, moment prostého nosníku

$$\mathfrak{M}_c = \tfrac{1}{2} q\, c\, c',$$

vyjde tedy podle vzorce (78)

$$H = \frac{q\, c\, c'}{2\, h}. \tag{80}$$

Je-li kloub c uprostřed, tedy $c = c' = \tfrac{1}{2} l$, vyjde

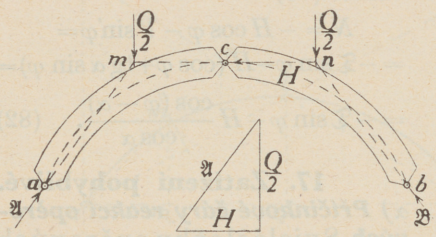
$$H = \frac{q\, l^2}{8\, h}. \tag{80a}$$

Výslednicovou čarou k zatížení rovnoměrnému je parabola. Rýsujeme-li ji začínajíce reakcí $\mathfrak{A}$ jakožto první stranou, musí výslednicová čára procházeti klouby c, b, poněvadž je $M_c = 0$, $M_b = 0$. Mezi střednicí a výslednicovou čarou takto určenou je plocha momentů ohybových; tyto momenty budou zde zpravidla malé. Je-li střednice sama parabolou se svislou osou, jež jest úplně určena třemi body a, c, b, pak čára výslednicová, jež je též parabolou a jde body a, c, b, ztotožní se se střednicí (obr. 48 b). Tu je v každém průřezu $M = 0$; výslednice R pro průřez m působí zde v tečně výslednicové čáry totožné se střednicí, i jest složka $T = 0$, $N = R$. Je tedy oblouk ve všech průřezech prostě tlačen, což je pro využití hmoty nejvýhodnější, neboť je pak v každém průřezu napětí ν ve všech bodech stejné.

Lze ovšem ke každému zatížení stanoviti střednici nebo ke každé střednici zatížení tak, aby se čára výslednicová sjednotila se střednicí a oblouk byl tedy ve všech průřezech prostě tlačen. Je-li dáno zatížení, třeba jen voliti jeho výslednicovou čáru za střednici oblouku.

ε) ***Zatížení souměrné*** libovolné na oblouku souměrném ke svislici vrcholového kloubu vyvodí v jeho opěrách a, b reakce rovněž souměrné (obr. 49). Jde-li o zatížení svislé a znamená-li Q výslednici všeho zatížení, plynou ze souměrnosti svislé složky reakcí

$$A = B = \tfrac{1}{2} Q.$$



Obr. 49.

Výslednice R_c pro bod c má pak složky $H_c = H$, $V_c = A - \tfrac{1}{2} Q = 0$, $M_c = 0$, i redukuje se na vodorovnou sílu H působící v bodě c, což by plynulo též ze souměrnosti oblouku i zatížení ke svislici bodu c. Odejmeme-li v bodě c pravou stranu, musíme působení její na stranu levou v bodě c nahraditi vodorovnou silou H, která je pak v rovnováze s výslednicí $\tfrac{1}{2} Q$ zatížení levé polovice oblouku a s reakcí $\mathfrak{A}$, jejíž paprsek jde bodem a. Paprsky všech tří sil musí procházeti jedním bodem m, čímž je dán paprsek $\mathfrak{A}$; obrazec složkový pro rovnováhovou soustavu sil $\mathfrak{A}$, H, $\tfrac{1}{2} Q$ dá pak úseky sil $\mathfrak{A}$, H.

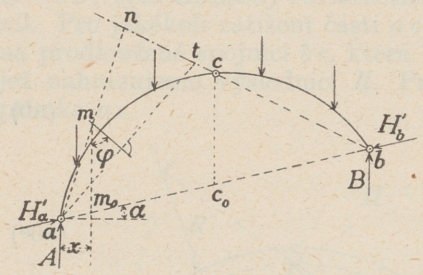
Všechny odvozené způsoby stanovení opěrových reakcí platí ovšem pro oblouk o třech kloubech jakéhokoli způsobu, plnostěnný i příhradový.

ζ) ***Opěrové klouby v různé výši.*** Při svislém zatížení rozložíme opěrové reakce na svislé složky A, B a šikmé složky H'_a, H'_b, působící v paprsku $a\,b$, odchýleném od vodorovné o úhel α (obr. 50). Složky H'_a, H'_b jsou zde jediné šikmé síly; má-li býti rovnováha, musí se rušiti, tedy musí být rovné a protivné. Mají společnou vodorovnou složku $H = H'_a \cos\alpha$. Svislé reakce A, B jsou v rovnováze se zatížením, tedy se rovnají reakcím prostého nosníku.

Vodorovná složka H plyne zase z výminky $M_c = 0$, dané vrcholovým kloubem c. Svislé vnější síly jsou jako u prostého nosníku a dají k bodu c moment $\mathfrak{M}_c$ prostého nosníku. Rozložíme-li pak šikmou složku reakce H'_a na vodorovnou H a svislou složku v bodě c_0, má k bodu c moment jedině vodorovná složka H, takže

$$M_c = \mathfrak{M}_c - H h = 0,$$

značíme-li $\overline{c_0 c} = h$. Vyjde tedy pro vodorovnou složku H vzorec (78) $H = \frac{\mathfrak{M}_c}{h}$.



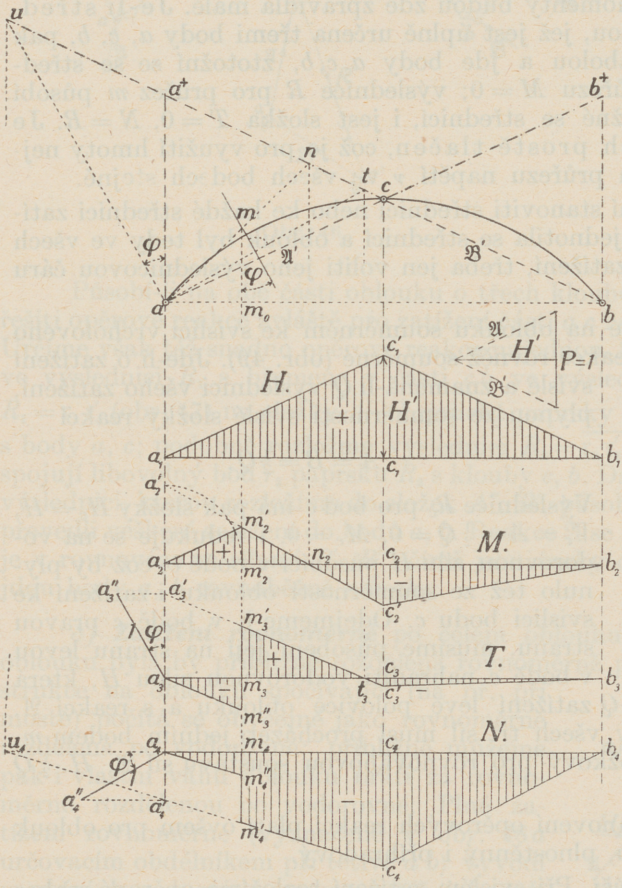
Obr. 50.

Pro moment M k bodu m obecně mimo střednici položenému platí vzorec (79), neboť svislé vnější síly jsou tytéž jako u prostého nosníku a šikmá složka H'_a dá k bodu m moment $-H'_a z \cos\alpha = -Hz$, je-li $\overline{m_0 m} = z$. Výslednice vnějších sil po levé straně průřezu m má svislou složku

$$V = A - \sum_0^x P + H \operatorname{tg}\alpha = \mathfrak{T} + H \operatorname{tg}\alpha,$$

je-li $\mathfrak{T}$ posouvající síla prostého nosníku vodorovného. Ze vzorce (71) plyne pak pro průřez m v odchylce φ od svislice posouvající síla

$$T = -H \sin\varphi + V \cos\varphi =$$
$$= \mathfrak{T}\cos\varphi + H(\operatorname{tg}\alpha \cos\varphi - \sin\varphi) =$$
$$= \mathfrak{T}\cos\varphi - H\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha}. \qquad (81)$$



Obr. 51.

Pro normálnou sílu platí podle vzorce (71)

$$N = -H\cos\varphi - V\sin\varphi =$$
$$= -\mathfrak{T}\sin\varphi - H(\cos\varphi + \operatorname{tg}\alpha \sin\varphi) =$$
$$= -\mathfrak{T}\sin\varphi - H\frac{\cos(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha}. \qquad (82)$$

17. Zatížení pohyblivé. *α) Příčinkové čáry reakcí opěrových.* Svislé složky opěrových reakcí A, B rovnají se za každého zatížení svislého reakcím prostého nosníku, mají tedy tytéž příčinkové čáry jako reakce prostého nosníku.

Vodorovná síla H je dána pro libovolné zatížení svislé vzorcem (78)

$$H = \frac{\mathfrak{M}_c}{h},$$

z něhož plyne též příčinkový obrazec. Pohybuje-li se jediné osamělé břímě svislé po oblouku, mění se síla H úměrně k momentu $\mathfrak{M}_c$; příčinkovým obrazcem $\mathfrak{M}_c$ je trojúhelník, jehož strany utínají na svislicích opěr a, b pořadnice c, c' a jehož vrchol ve svislici

bodu c má pořadnici $\frac{c \cdot c'}{l}$. Příčinkovým obrazcem síly H je pak také trojúhelník $a_1 c_1' b_1$ (obr. 51) a pořadnice jeho vrcholu jest

$$H' = \overline{c_1 c_1'} = 1 \cdot \frac{c\,c'}{h\,l}.$$

Tato pořadnice znamená vodorovnou sílu, kterou vyvodí břímě $P = 1$ v bodě c působící; pak působí opěrové reakce v paprscích $\mathfrak{A}' \equiv a\,c$, $\mathfrak{B}' \equiv b\,c$, čímž jsou určeny. Společná vodorovná složka obou reakcí je příčinková pořadnice H'. Je-li kloub c uprostřed, tedy $c = c' = \frac{1}{2} l$, vyjde

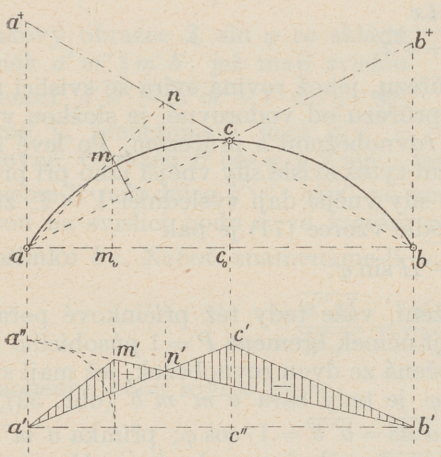
$$H' = 1 \cdot \frac{l}{4\,h};$$

grafické řešení zůstalo by stejné jako v obecném případě.

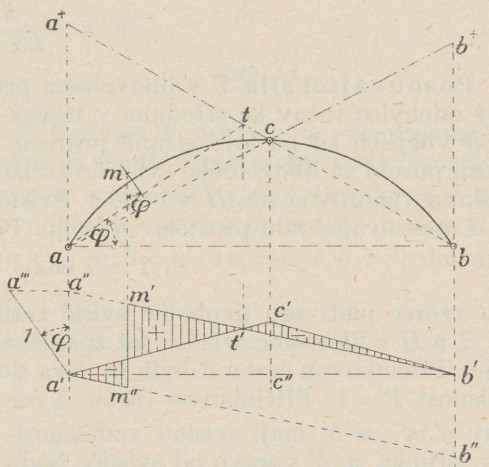
β) ***Příčinkové čáry momentu, síly posouvající a síly normálné.*** Moment k libovolnému bodu m, obecně mimo střednici položenému, je dán vzorcem (79)

$$M = \mathfrak{M} - H\,z,$$

v němž znamená $\mathfrak{M}$ ohybový moment prostého nosníku a $z = \overline{m_0\,m}$ je svislá pořadnice bodu m nad spojnicí $a\,b$. Tento vzorec platí při každém zatížení i platí pro každou polohu pohyblivého břemene $P = 1$, jehož účinek je dán příčinkovými čarami; vzorec ten platí tedy pro příčinkové pořadnice veličin M, $\mathfrak{M}$ a H v každé poloze břemene. Příčinkovým obrazcem momentu $\mathfrak{M}$ je trojúhelník $a'\,m'\,b'$, stanovený pořadnicí $\overline{a'\,a''} = x = \overline{a\,m_0}$ (obr. 52). Od tohoto obrazce máme odečísti příčinkový obrazec pro $H\,z$, jímž je trojúhelník $a'\,c'\,b'$, daný pořadnicí $\overline{c''\,c'} = H'\,z = \frac{c\,c'}{h\,l}\,z$ ve svislici bodu c.



Obr. 52.



Obr. 53.

Strana $a'\,c'$ seče stranu $m'\,b'$ v bodě n' na svislici *obojetné* (*neutrálné*) *polohy*, kterou lze sestrojiti přímo jakožto průsečík n přímky $b\,c$ s přímkou $a\,m$. Neboť osamělé břímě v bodě n působící vyvodí levou reakci v paprsku $a\,n$, který jde bodem m; tato levá reakce je jedinou vnější silou po levé straně bodu m a má k němu moment $M = 0$. Mezi čarami $a'\,c'\,b'$ a $a'\,m'\,b'$ jsou výslední příčinkové pořadnice momentu M; od čáry $a'\,c'\,b'$ jsou ve smyslu $a'\,a''$ pořadnice kladné, v protivném smyslu pořadnice záporné.

Příčinkový obrazec momentu M můžeme sestrojiti od přímé osy $a_2 b_2$, sestrojíme-li předem obojetnou polohu n (obr. 51). Přeneseme ve svislici levé podpory pořadnici $\overline{a_2 a_2'} = x = \overline{a_2 m_2}$ a určíme touto pořadnicí a nulovou pořadnicí ve svislici bodu n přímku $m_2' c_2'$, platnou staticky vpravo od svislice bodu m a vlevo od svislice bodu c. Vlevo od svislice bodu m je příčinkovou čarou přímka $a_2 m_2'$ a v pravo od svislice bodu c platí přímka $c_2' b_2$. Příčinkové pořadnice, jež mají od osy týž (protivný) smysl jako pořadnice $a_2 a_2'$, jsou kladné (záporné). Příčinkové pořadnice momentu znamenají délky a měří se na měřidle délek hlavního obrazce.

Svislici obojetné polohy lze určiti počtem ze vzorce pro moment M, myslíme-li si jediné břímě P vpravo od bodu m a vlevo od bodu c; paprsek P měj od svislice bodu a (b) vzdálenost p ($p' = l - p$). Pak je v bodě m, jenž má úsečku $\overline{a m_0} = x$, moment

$$\mathfrak{M} = A x = P \frac{p'}{l} x.$$

Podle vzorce (78) vyvodí břímě P vodorovnou sílu

$$H = \frac{\mathfrak{M}_c}{h} = \frac{B c'}{h} = \frac{P p}{l} \cdot \frac{c'}{h}.$$

Pak je podle vzorce (79) celkový moment

$$M = \mathfrak{M} - H z = \frac{P p'}{l} x - \frac{P p}{l} \cdot \frac{c'}{h} z.$$

V obojetné poloze n, jež má od svislice bodu a vzdálenost $p = n$ a od svislice bodu b vzdálenost $p' = n' = l - n$, vyjde moment $M = 0$, což dá

$$\frac{n'}{l} x - \frac{c' n}{h l} z = 0;$$

z toho vyjde

$$n = \frac{h l x}{h x + c' z}. \tag{83}$$

Posouvající síla T v libovolném průřezu, jehož rovina svírá se svislicí úhel φ rovný odchylce tečny ke střednici v těžišti průřezu od vodorovné, je složkou výslednice R vnějších sil po levé straně průřezu, rovnoběžnou s průřezem. Po levé straně průřezu působí za libovolného svislého zatížení tytéž svislé síly vnější jako při prostém nosníku a vodorovná síla H v bodě a. Svislé síly vnější dají výslednici $V = \mathfrak{T}$, znamená-li $\mathfrak{T}$ posouvající sílu prostého nosníku. Podle vzorce (71) je pak

$$T = \mathfrak{T} \cos \varphi - H \sin \varphi; \tag{84}$$

tento vzorec platí pro livobolné svislé zatížení, váže tedy též příčinkové pořadnice sil T, $\mathfrak{T}$ a H v libovolné svislici, jež znamenají účinek břemene $P = 1$ působícího v této svislici. Příčinkovou čarou $\mathfrak{T}$ byla by čára složená ze dvou rovnoběžek, jež mají svislou vzdálenost $P = 1$. Příčinkovou čarou $\mathfrak{T} \cos \varphi$ je tedy čára $a' m'' m' b'$ (obr. 53), jejíž strany $a' m'' \parallel m' b'$ mají svislou vzdálenost $\overline{a' a''} = \overline{b'' b'} = 1 \cdot \cos \varphi$; přímka $a' m''$ platí vlevo, přímka $m' b'$ vpravo od svislice bodu m, do něhož se v daném průřezu přenáší zatížení pohyblivé. Pořadnici $\overline{a' a''}$ sestrojíme, přeneseme-li do rovnoběžky s průřezem úsek $\overline{a' a'''} = 1$ a promítneme-li jej vodorovně. Příčinkovým obrazcem $H \sin \varphi$ je trojúhelník $a' c' b'$, jehož strana $a' c'$ protne přímku $m' b'$ v bodě t' na svislici obojetné polohy t. Obojetnou polohu t určuje na sečnici $a + c$ přímka $a t$ kolmá k průřezu. Neboť břímě působící v bodě t vyvodí levou reakci v paprsku $a t$ kolmém k průřezu; levá reakce je tu jedinou vnější silou po levé straně průřezu a má složku rovnoběžnou s průřezem $T = 0$. Na svislici bodu t je bod t', který určuje čáru $a' c' b'$; od této čáry k čáře $a' m'' m' b'$ sahají příčinkové pořadnice posouvající síly T, kladné ve smyslu $a' a''$.

Příčinkový obrazec posouvající síly T sestrojíme od přímé osy $a_3 b_3$ (obr. 51), určíme-li předem obojetnou polohu t a pořadnici $\overline{a_3 a_3'} = 1 \cdot \cos\varphi$ jakožto svislý průmět úseku $\overline{a_3 a_3''} = 1$, přeneseného na rovnoběžku s průřezem. Bod a_3' a bod t_3 na svislici obojetné polohy t spojuje přímka, jež je příčinkovou čarou vlevo od svislice bodu c a vpravo od svislice bodu m, do něhož se v daném průřezu přenáší pohyblivé zatížení. Vlevo od svislice bodu m je příčinkovou čarou přímka $a_3 m_3'' \parallel m_3' c_3'$ a v pravo od svislice bodu c platí přímka $c_3' b_3$. Kladné pořadnice mají od osy $a_3 b_3$ směr úseku $a_3 a_3'$. Příčinkové pořadnice síly T jsou pouhá čísla nepojmenovaná; měří se na měřidle, jehož jednotkou jest úsek $\overline{a_3 a_3''} = 1$. Vzdálenost t svislice obojetné polohy od svislice bodu a plyne ze vzorce (83), dosadí-li se $z = x \cdot \operatorname{tg}\varphi$, neboť přímka $a\,t$ má od vodorovné osy odchylku φ; pak jest

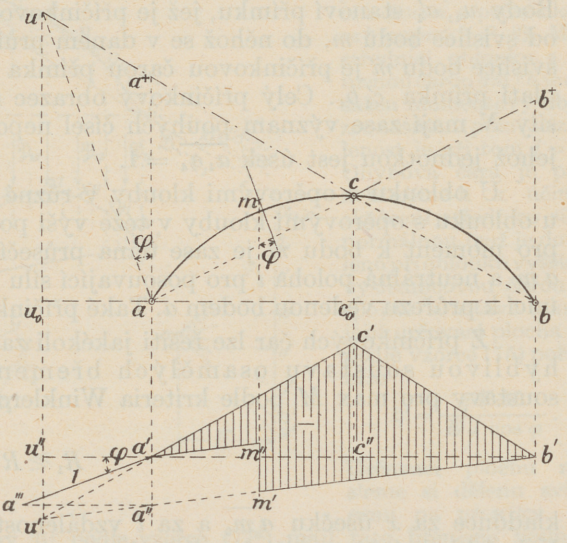
$$t = \frac{h\,l}{h + c' \operatorname{tg}\varphi}. \qquad (85)$$

Normálná síla N je dána vzorcem (71); jak již bylo ukázáno, je $V = \mathfrak{T}$ a vyjde tedy

$$N = -H\cos\varphi - \mathfrak{T}\sin\varphi. \qquad (86)$$

Příčinkový obrazec síly N sestrojíme, určíme-li příčinkový obrazec každého členu na pravé straně vzorce zvláště a sečteme-li je algebraicky podle vzorce. Příčinkovým obrazcem $H\cos\varphi$ je trojúhelník $a'\,c'\,b'$ (obr. 54), stanovený pořadnicí

$$\overline{c''\,c'} = H'\cos\varphi = \frac{c\,c'}{h\,l}\cos\varphi.$$



Obr. 54.

Příčinkový obrazec $\mathfrak{T}\sin\varphi$ se skládá z přímek $a'\,m'' \parallel m'\,b'$, jež mají svislou vzdálenost $\overline{a'\,a''} = \overline{m''\,m'} = 1 \cdot \sin\varphi$; sestrojíme ji, přeneseme-li úsek $\overline{a'\,a'''} = 1$ do kolmice k průřezu a promítneme-li jej vodorovně. Obrazec $H\cos\varphi$ a $\mathfrak{T}\sin\varphi$ budou se sčítati algebraicky podle vzorce (86), přeneseme-li pořadnice $\overline{c''\,c'}$, $\overline{a'\,a''}$ po různých stranách osy $a'\,b'$. Přímky $a'\,c'$ a $m'\,b'$ se sekou na svislici bodu u, ve kterém rovnoběžka s průřezem vedená bodem a protíná přímku $b\,c$. Neboť, znamenáme-li $\overline{u_0\,a} = u$, $\overline{u_0\,b} = u'$, $\overline{a\,c_0} = c$, $\overline{c_0\,b} = c'$, dostaneme

$$\frac{\overline{u''\,u'}}{\overline{a'\,a''}} = \frac{u'}{l}, \qquad \frac{\overline{c'\,c''}}{\overline{u''\,u'}} = \frac{c}{u}$$

a znásobením obou rovnic vyjde

$$\frac{\overline{c'\,c''}}{\overline{a'\,a''}} = \frac{c\,u'}{l\,u}.$$

Dosadíme-li za pořadnice $\overline{c'\,c''}$, $\overline{a'\,a''}$ prosté hodnoty, máme

$$\frac{u'}{u} = \frac{l}{c} \cdot \frac{c\,c'}{h\,l} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{c'}{h \operatorname{tg}\varphi}.$$

Z hlavního obrazce plyne

$$u = \overline{u_0\,a} = \overline{u_0\,u} \cdot \operatorname{tg}\varphi, \qquad \overline{u_0\,u} = \overline{c_0\,c} \cdot \frac{\overline{u_0\,b}}{\overline{c_0\,b}} = h\,\frac{u'}{c'},$$

z čehož plyne poměr $\frac{u'}{u}$ vypočtený z příčinkového obrazce. Z obrazce plyne $u' = l + u$; dosazením této hodnoty určíme z poměru $\frac{u'}{u}$ úsek

$$u = \frac{h\,l\,\mathrm{tg}\,\varphi}{c' - h\,\mathrm{tg}\,\varphi}. \tag{87}$$

Příčinkový obrazec normálné síly jest obsažen mezi lomenou čarou $a'\,c'\,b'$ a čarou $a'\,m''\,m'\,b'$; všechny jeho pořadnice jsou záporné. Tento obrazec lze rýsovati s přímou osou $a_4 b_4$ (obr. 51). Stanovíme tu pořadnici $\overline{a_4 a_4'} = 1 \cdot \sin\varphi$ jakožto svislý průmět úseku $\overline{a_4 a_4''} = 1$, přeneseného na kolmici k průřezu, a určíme na ose $a_4 b_4$ bod u_4 ve svislici bodu u, který dává na přímce $b\,c$ rovnoběžka s průřezem, vedená bodem a. Body u_4, a_4' stanoví přímku, jež je příčinkovou čarou vlevo od svislice bodu c a vpravo od svislice bodu m, do něhož se v daném průřezu přenáší zatížení pohyblivé. Vlevo od svislice bodu m je příčinkovou čarou přímka $a_4 m_4'' \parallel m_4' c_4'$ a vpravo od svislice bodu c platí přímka $c_4' b_4$. Celý příčinkový obrazec síly N je záporný. Příčinkové pořadnice síly N mají zase význam pouhých čísel nepojmenovaných a odměřují se na měřidle, jehož jednotkou jest úsek $\overline{a_4 a_4'} = 1$.

U oblouku s opěrovými klouby v různé výši určí se příčinkové čáry stejně jako u oblouku s opěrovými klouby v téže výši podle obr. 51. Neutrálná poloha n (obr. 50) pro moment k bodu m je zase dána průsečíkem prodloužené přímky $b\,c$ se spojnicí $a\,m$ a neutrálná poloha t pro posouvající sílu T je určena průsečíkem přímky $b\,c$ s kolmicí k průřezu vedenou bodem a. Také příčinková čára N by se sestrojila podle obr. 51.

Z příčinkových čar lze řešiti jakékoli zatížení stálé i pohyblivé. Kdyby šlo o pohyblivou soustavu osamělých břemen, stanovili bychom nejúčinnější polohu soustavy pro max M podle kriteria Winklerova[1])

$$R_1 \gtrless R\frac{x}{l},$$

kladouce za x úsečku $\overline{a m_0}$ a za l vzdálenost obojetné polohy n od svislice bodu a. Neboť kladná část příčinkového obrazce momentu M je téhož tvaru jako příčinkový obrazec momentu ke svislici bodu m prostého nosníku, jenž by měl podpory ve svislicích bodů a, n. Podobně se stanoví nejúčinnější poloha pro min M z téhož kriteria, bere-li se za x úsek $\overline{n_2 c_2}$, za l úsek $\overline{n_2 b_2}$ (obr. 51); R_1 znamenalo by tu výslednici břemen působících mezi body n, c. Známe-li polohu soustavy, stanovíme moment tou polohou vyvozený sčítáním účinků jednotlivých břemen podle vzorce

$$M = \Sigma P\,\eta.$$

Obdobně bychom postupovali, řešíce síly posouvající a síly normálné. K posouzení nejúčinnější polohy soustavy břemen v části nosníku, které odpovídá příčinkový obrazec tvaru trojúhelníka, můžeme vždy užíti kriteria Winklerova. Lze ovšem též nejúčinnější polohu soustavy břemen kontrolovati graficky.[1])

Při pohyblivém zatížení rovnoměrném žádá maximum kterékoli veličiny vždy plného zatížení části kladně přičiňující, minimum se vyvodí plným zatížením všech částí záporně přičiňujících. Pak jest na př.

$$\max M = q\,\mathfrak{U}_+, \quad \min M = q\,\mathfrak{U}_-,$$

znamená-li $\mathfrak{U}_+$ ($\mathfrak{U}_-$) obsah všech částí příčinkového obrazce, jež mají znaménko kladné (záporné). Tytéž vzorce platí v podstatě i při síle posouvající a při síle normálné.

18. Ohybová čára oblouku o třech kloubech. Jak bylo ukázáno v odstavci 15, určí se ohybová čára obloukového nosníku jakožto výslednicová čára ke spojité soustavě

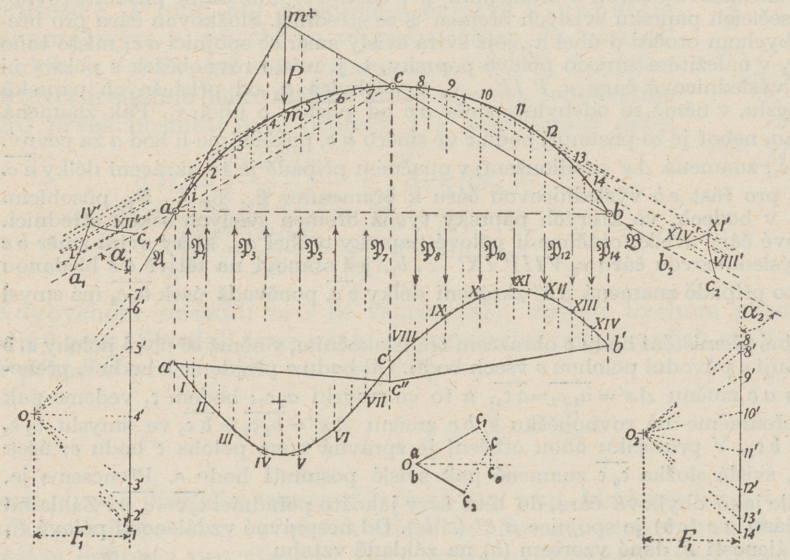
[1]) Viz druhý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1946), str. 12 a 140.

silové, jejíž určovací plocha se odvodí z obrazce momentového. U oblouku o třech kloubech a, c, b řešíme ohybovou čáru pro část ac i cb zvláště a určíme pak základní strany v obou částech podobně jako u příhradového oblouku o třech kloubech.[1])

Příklad 6. Jest určiti příčinkovou čáru průhybu bodu m v části ac oblouku o třech kloubech.

Podle věty Maxwellovy, která platí i pro nosníky plnostěnné (viz o tom dále v odst. 20), je příčinkovou čarou průhybu bodu m ohybová čára daného nosníku, působí-li naň v bodě m ve směru, v němž ohyb hledáme (zde svislém), břímě $P = 1$ (obr. 55). Toto břímě vyvodí reakci $\mathfrak{B}$ v paprsku bc, reakci $\mathfrak{A}$ pak v paprsku spojujícím bod a s průsečíkem m^+ paprsků P, $\mathfrak{B}$. Mezi střednicí oblouku a lomenou čarou am^+b je obsažen momentový obrazec nosníku; pólová vzdálenost je při tom $f = H$. Ohybová čára je pak, nehledíme-li k účinku zkrácení střednice silou normálnou (což je dovoleno při oblouku vyšším), výslednicovou čarou ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plocha má podle vzorce (75) pořadnice

$$\mathfrak{y}' = \frac{e F M}{E J \cos \varphi}.$$



Obr. 55.

Určovací plochu myslíme si dělenu svislicemi na proužky, jež nahradíme v tížnicích osamělými břemeny $\mathfrak{P}$; podle vzorce (77[a]) mají tato břemena hodnotu

$$\mathfrak{P} = \frac{m s}{e} \cdot \frac{J_0}{J}. \qquad (a)$$

Zde znamená m střední pořadnici proužku momentové plochy, s délku příslušného obloučku střednice, e zvolenou půdici, J moment setrvačnosti průřezu oblouku v uvažovaném proužku a J_0 stálý moment setrvačnosti, z něhož počítáme podle vzorce (76[b]) vzdálenost pólovou

$$F = \frac{E J_0}{e f}. \qquad (b)$$

Břemena $\mathfrak{P}$ určíme nejlépe, nanášíme-li na střednici malé rovné dílky s; břemena $\mathfrak{P}$ působí v tížnicích dílů momentové plochy příslušných obloučkům s. Úseky břemen $\mathfrak{P}$ vypočteme nebo sestrojíme podle vzorce (a). Zvolíme-li $e = \mu s$, kde znamená μ vhodné číslo celé, obdržíme

$$\mathfrak{P} = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{J_0}{J}. \qquad (c)$$

Krajní proužky odpovídají obecně obloučkům jiné délky s', i platí pro ně

$$\mathfrak{P} = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{s'}{s} \cdot \frac{J_0}{J}; \qquad (d)$$

jako u vnitřních proužků lichoběžníkových znamená m i u proužků trojúhelníkových střední pořadnici proužku, neměří se tu tedy v tížnici, jež nejde středem obloučku.

Ideálná břemena $\mathfrak{P}$, stanovená podle vzorců (c), (d), nezávisí na směru, v němž hledáme posunutí. V části ac, kde jsou momenty kladné, působí břemena $\mathfrak{P}$ vzhůru; v části cb jsou momenty záporné a břemena $\mathfrak{P}$ směřují tedy dolů. Sestrojíme nejprve výslednicové čáry ke svislým břemenům

[1]) Viz druhý díl toboto spisu, 3. vyd. (1946), str. 284.

$\mathfrak{P}$, a to pro část $a\,c$ čáru $a'\,I\,II\ldots c'$ z pólu o_1, zvoleného na př. v libovolné vzdálenosti F_1 od čáry složkové, a pro část $c\,b$ čáru $c'\,VIII\,IX\ldots b'$ z pólu o_2, jenž má od složkové čáry zase vzdálenost F_1. Do lomených čar výslednicových vepisujeme, je-li třeba, křivky, jež se dotýkají stran lomených čar na prodloužených svislých mezích proužkových.

Jsou-li body a, b pevné, rovnají se jejich posunutí nule; základní strana pro část $a\,c$ jde tedy bodem a' a pro část $c\,b$ bodem b'. V bodě c musí míti základní strany pro obě části touž pořadnici $\eta_c = \overline{c''\,c'}$, jež znamená svislé posunutí bodu c za daného zatížení. Toto posunutí stanovíme, určíme-li napřed změny vzdáleností $\overline{a\,c} = s'$, $\overline{c\,b} = s''$. Poněvadž břemena $\mathfrak{P}$ nezávisí na směru, v němž posunutí hledáme, lze z nich určiti i posunutí ve směrech $a\,c$ a $c\,b$.

Tak určíme $\Delta s'$ výslednicovou čarou k břemenům $\mathfrak{P}$ v části $a\,c$, jimž dáme působiti rovnoběžně s tětivou $a\,c$ v průsečících paprsků svislých břemen $\mathfrak{P}$ se střednicí. Složkovou čáru pro břemena $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_7$ měli bychom otočiti o úhel α_1, jejž svírá svislý směr se spojnicí $a\,c$; místo toho můžeme otáčeti o úhel α_1 v náležitém smyslu pólové paprsky, t. j. místo rovnoběžek s pólovými paprsky vedeme strany výslednicové čáry $a_1\,I'\,II'\ldots c_1$ v odchylce α_1 od příslušných paprsků pólových a to v tom smyslu, v němž se odchyluje směr $a\,c$ od svislice o úhel α_1. Pak znamená $\overline{a_1\,c_1} = \Delta s'$ hledanou změnu, neboť je to posunutí bodu c ve směru $a\,c$, pokládáme-li bod a za pevný. Souhlasí-li smysl $a\,c$ a $a_1\,c_1$, znamená $\Delta s'$ prodloužení; v opačném případě je to zkrácení délky $\overline{a\,c}$.

Podobně rýsujeme pro část $c\,b$ výslednicovou čáru k břemenům $\mathfrak{P}_8, \mathfrak{P}_9, \ldots \mathfrak{P}_{14}$ působícím rovnoběžně s tětivou $c\,b$ v bodech, ve kterých paprsky týchž břemen svislých sekou střednici. Můžeme zase užíti složkové čáry svislé, otáčíme-li pólové paprsky o úhel α_2, který svírá směr $b\,c$ se svislicí. Určíme tak výslednicovou čáru $c_2\,VIII'\,IX'\ldots b_2$, jež stanoví na tětivě $\overline{b\,c}$ hledanou změnu $\Delta s'' = \overline{b_2\,c_2}$; v tomto případě znamená $\Delta s''$ zkrácení délky $\overline{b\,c}$, poněvadž úsek $\overline{b_2\,c_2}$ má smysl protivný smyslu $b\,c$.

Nyní sestrojíme úplné přemístění bodu c obrazcem translokačním, v němž se nové polohy $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ pevných bodů a, b ztotožňují s původní polohou o všech bodů. Od bodu a přejdeme k bodu c, přeneseme-li na rovnoběžku s $a\,c$ změnu $\Delta s' = \overline{a_1\,c_1} = \overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}_1}$, a to ve smyslu $a_1\,c_1$; bodem $\mathfrak{c}_1$ vedeme pak otočení $\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c} \perp \mathfrak{a}\,\mathfrak{c}_1$. Dále přeneseme na rovnoběžku s $b\,c$ změnu $\Delta s'' = \overline{b_2\,c_2} = \overline{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}_2}$ ve smyslu $b_2\,c_2$ a rýsujeme otočení $\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c} \perp \mathfrak{b}\,\mathfrak{c}_2$. V průsečíku obou otočení je správná nová poloha $\mathfrak{c}$ bodu c; úsek $\overline{o\,\mathfrak{c}}$ jest úplné přemístění, svislá složka $\overline{\mathfrak{c}_0\,\mathfrak{c}}$ znamená pak svislé posunutí bodu c. Přeneseme je, poněvadž je v témž měřidle jako ohybová čára, do této čáry jakožto pořadnici $\overline{\mathfrak{c}_0\,\mathfrak{c}} = \overline{c\;\;c'}$. Základní stranou ohybové čáry v části $a\,c$ ($c\,b$) je spojnice $a'\,c''$ ($c''\,b'$). Od nesprávné vzdálenosti pólové F_1 přejdeme ke správné vzdálenosti F dané vzorcem (b) na základě vztahu

$$\eta = \eta_1 \frac{F_1}{F};$$

zde jest η správná pořadnice ohybová, η_1 pak pořadnice určená pólovou vzdáleností F_1. Pólové vzdálenosti měříme a dosazujeme jako u přímého nosníku.[1])

Křivá čára ohybová je příčinkovou čarou průhybu pro přímé zatížení. Působí-li zatížení nepřímo, je příčinkovou čarou lomená čára vepsaná do čáry pro přímé zatížení. Kdybychom tu kladli meze proužků do svislic styčných bodů, obdrželi bychom lomenými čarami výslednicovými ke svislým břemenům $\mathfrak{P}$ správné pořadnice příčinkové ve svislicích bodů styčných; jejich koncové body spojovali bychom pak přímkami. Řešíme-li počtem, můžeme určiti přímo správnou lomenou čáru příčinkovou: plochu momentovou dělili bychom na proužky svislicemi bodů styčných a stanovili bychom břemena $\mathfrak{P}$ ve styčných bodech jako za nepřímého zatížení nosníku přímého.[2])

III. Staticky neurčité nosníky obloukové.

a) Obecné výminky přetvárné a přetvoření.

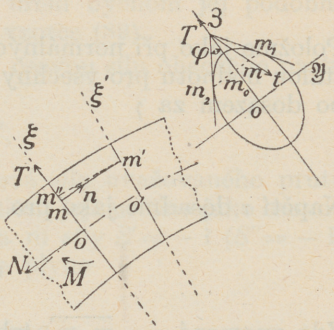
19. Věta o nejmenší práci přetvárné. Staticky neurčité soustavy prutové řešíme z přetvárných výminek, jež lze vysloviti větou o nejmenší práci přetvárné; dbáme-li též změny teploty a popuštění opěr, doplníme skutečnou práci přetvárnou podle vzorce (13) na početní hodnotu

$$\Pi' = \Sigma \frac{S^2 s}{2 E U} + \Sigma \delta \varepsilon S s + \Sigma A \cdot \Delta a.$$

[1]) Viz druhý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1946), str. 65.
[2]) Viz druhý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1946), str. 76.

Plnostěnný nosník lze pokládati za prutovou soustavu, jež se skládá z nekonečně mnoha nekonečně blízkých bodů styčných a má ovšem nekonečný počet prutů zbytných. Věta o nejmenší práci přetvárné platí pak i pro nosníky plnostěnné; hodnotu přetvárné práce odvodíme z přetvárné práce soustavy prutové.

Nosník plnostěnný lze si představiti jako soustavu prutovou, jejíž pruty mají tvar vláken spojujících stejnolehlé body m, m' dvou nekonečně blízkých průřezů ξ, ξ' (obr. 56). Hledíme-li nejprve k napětím normálným ν, působí ve vlákně průřezu du normálná síla $n = \nu\,du$, jež má význam osové síly S. Za délku prutu s dosadíme délku vlákna $\text{arc}\,m\,m' = ds_m$ a obdržíme pro prvek nosníku mezi průřezy ξ, ξ' přetvárnou práci



Obr. 56.

$$d\,\Pi_n' = \int_o^{o'} \frac{n^2\,ds_m}{2E\,du} + \int_o^{o'} \delta\varepsilon n\,ds_m =$$

$$= \int_o^{o'} \frac{\nu^2\,du\,ds_m}{2E} + \int_o^{o'} \delta\varepsilon\nu\,du\,ds_m.$$

Kdybychom dosadili za ν ze vzorce (67), dostali bychom přesnější hodnotu Π_n' pro křivý prut. Shledali jsme však, že u nosníků obloukových stačí počítati napětí ν jako u přímého prutu podle vzorce (67^a)

$$\nu = \frac{N}{U} - \frac{M\zeta}{J},$$

jenž plyne z přesného vzorce (67) pro křivý prut, klademe-li $r = \infty$; pak je také $ds_m = ds$, znamená-li $ds = \text{arc}\,o\,o'$ prvek střednice. Integrujeme v mezích průřezu, ds pak jako stálou hodnotu pro všechny body průřezu vytkneme před znaménka integrační; pro prvek nosníku mezi průřezy ξ, ξ' obdržíme

$$d\,\Pi_n' = ds \int \left(\frac{N}{U} - \frac{M\zeta}{J}\right)^2 \frac{du}{2E} + ds \int \delta\varepsilon \left(\frac{N}{U} - \frac{M\zeta}{J}\right) du = \frac{N^2\,ds}{2EU^2} \int du - \frac{MN\,ds}{EJU} \int \zeta\,du +$$

$$+ \frac{M^2\,ds}{2EJ^2} \int \zeta^2\,du + \delta\varepsilon \frac{N\,ds}{U} \int du - \delta\varepsilon \frac{M\,ds}{J} \int \zeta\,du.$$

Změnu teploty δ jsme tu pokládali za stálou a o nosníku předpokládáme, že je stejnorodý; pak jsou i δ, ε stálé hodnoty. Integrály v poslední rovnici mají hodnoty

$$\int du = U, \quad \int \zeta\,du = 0, \quad \int \zeta^2\,du = J.$$

Normálné síly vnitřní dávají tedy s připočtením účinku změny teploty pro prvek mezi průřezy ξ, ξ' hodnotu

$$d\,\Pi_n' = \frac{M^2\,ds}{2EJ} + \frac{N^2\,ds}{2EU} + \delta\varepsilon N\,ds.$$

Uvažujme obecně též napětí tangenciálná τ, jež dají v prvku průřezu du vnitřní sílu tangenciálnou $t = \tau\,du$. Těmito silami se posune bod m do polohy m'', myslíme-li si průřez ξ' pevný; poměrné posunutí jest

$$\gamma = \frac{\tau}{G},$$

znamená-li G modul pružnosti v posouvání, a lineárné posunutí má hodnotu

$\overline{m\,m'} = \gamma\,\mathrm{d}s_m$. Přetvárná práce síly t se rovná podle vzorce (9ᵉ) polovici součinu ze síly a z přetvoření ve směru síly, tedy pro prvek nosníku mezi průřezy ξ, ξ'

$$\mathrm{d}\,\Pi_t' = \Sigma\tfrac{1}{2}t\cdot\overline{m\,m'} = \tfrac{1}{2}\int_o^{o'}\tau\,\mathrm{d}u\cdot\gamma\,\mathrm{d}s_m.$$

Položme jako při normálných napětích $r=\infty$, tedy $\mathrm{d}s_m = \mathrm{d}s$ a vytkněme $\mathrm{d}s$ jakožto stálou hodnotu pro všechny body průřezu ξ před znaménko integrační; obdržíme tak po dosazení za γ

$$\mathrm{d}\,\Pi_t' = \frac{\mathrm{d}s}{2G}\int\tau^2\,\mathrm{d}u.$$

Napětí τ dosaďme jako pro nosník přímý; toto napětí má ve směrech os $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Y}$ složky[1])

$$\tau_z = \frac{T}{J}\cdot\frac{\mathfrak{M}_z}{2\eta}, \qquad \tau_y = \tau_z\cdot\frac{\mathfrak{y}\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\eta}.$$

Zde znamená $\eta = \overline{m_0\,m_1}$ (obr. 56) souřadnici obvodu průřezu, $\mathfrak{M}_z$ statický moment části průřezu nad přímkou $m_1\,m_2$ k ose $\mathfrak{Y}$ a φ odchylku tečny k obvodu průřezovému v bodě m_1 nebo m_2 od osy $\mathfrak{Z}$. Výslední napětí τ plyne ze vzorce

$$\tau^2 = \tau_y^2 + \tau_z^2,$$

i jest

$$\mathrm{d}\,\Pi_t' = \frac{\mathrm{d}s}{2G}\int(\tau_y^2+\tau_z^2)\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}s}{2G}\int\tau_z^2\left(\frac{\tau_y^2}{\tau_z^2}+1\right)\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{\mathrm{d}s}{2G}\cdot\frac{T^2}{J^2}\cdot\int\frac{\mathfrak{M}_z^2}{4\eta^2}\left(\frac{\mathfrak{y}^2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}{\eta^2}+1\right)\mathrm{d}u = \frac{T^2\,\mathrm{d}s}{8GJ^2}\int\frac{\mathfrak{M}_z^2}{\eta^4}(\mathfrak{y}^2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi+\eta^2)\,\mathrm{d}u.$$

Výsledek lze psáti ve tvaru

$$\mathrm{d}\,\Pi_t' = \beta\,\frac{T^2\,\mathrm{d}s}{2GU},$$

klademe-li

$$\beta = \frac{U}{4J^2}\int\frac{\mathfrak{M}_z^2}{\eta^4}(\mathfrak{y}^2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi+\eta^2)\,\mathrm{d}u. \tag{88}$$

Součinitel β závisí na tvaru průřezu a vyšetří se pro každý průřez zvláště; pro obdélník vyjde[2]) $\beta = \frac{6}{5}$, pro kruh $\beta = \frac{32}{27}$.

Přetvárná práce celého nosníku rovná se součtu prací $\mathrm{d}\,\Pi_n'$ i $\mathrm{d}\,\Pi_t'$ všech prvků; k tomu přistupuje ještě člen vztahující se k popuštění opěr ve tvaru $\Sigma A\cdot\Delta a$ pro celý nosník. Přetvárná práce doplněná členy, které se vztahují ke změně teploty a k popuštění opěr, má tedy pro nosník obloukový hodnotu

$$\Pi' = \int\frac{M^2\,\mathrm{d}s}{2EJ} + \int\frac{N^2\,\mathrm{d}s}{2EU} + \beta\int\frac{T^2\,\mathrm{d}s}{2GU} + \int\delta\varepsilon N\,\mathrm{d}s + \Sigma A\cdot\Delta a. \tag{89}$$

Skutečnou práci přetvárnou znamenají pouze prvé tři členy. Všechny integrály rozumějí se zde v mezích celého nosníku. Hodnota Π' platí pak obecně pro plnostěnné nosníky obloukové i přímé.

Účinek posouvající síly T bývá v praktických případech tak malý, že ho můžeme nedbati; budeme tedy dále vycházeti z hodnoty

$$\Pi' = \int\frac{M^2\,\mathrm{d}s}{2EJ} + \int\frac{N^2\,\mathrm{d}s}{2EU} + \int\delta\varepsilon N\,\mathrm{d}s + \Sigma A\cdot\Delta a. \tag{89ᵃ}$$

[1]) Viz *Jos. Šolín* „Základy technické nauky o pružnosti a pevnosti“ (Praha 1904), str. 162 a d.

[2]) Viz předchozí spis, str. 297.

Skutečná práce přetvárná, vyvozená momenty ohybovými a silami normálnými, jest

$$\Pi = \int \frac{M^2 ds}{2EJ} + \int \frac{N^2 ds}{2EU}. \tag{89b}$$

Kdybychom chtěli stanoviti také vliv posouvající síly, určili bychom jej podobně jako vliv momentu M a normálné síly N, vycházejíce ze vzorce (89).

U staticky neurčité soustavy prutové vyjádřili jsme osovou sílu obecného prutu vzorcem (29b)

$$S = \mathfrak{S} - \sigma' S' - \sigma'' S'' - \sigma''' S''',$$

v němž jsou S', S'', S''' osové síly zbytných prutů, $\mathfrak{S}$ osová síla uvažovaného prutu v základní soustavě za daného zatížení a σ' (σ'', σ''') součinitel, jejž určíme jako osovou sílu uvažovaného prutu v základní soustavě, působí-li na ni síly $S' = -1$ ($S'' = -1$, $S''' = -1$), nahrazující zbytný prut s' (s'', s'''). Ze vzorce plyne

$$\frac{\partial S}{\partial S'} = -\sigma', \quad \frac{\partial S}{\partial S''} = -\sigma'', \quad \frac{\partial S}{\partial S'''} = -\sigma''',$$

i lze psáti

$$S = \mathfrak{S} + \frac{\partial S}{\partial S'} \cdot S' + \frac{\partial S}{\partial S''} \cdot S'' + \frac{\partial S}{\partial S'''} \cdot S''';$$

tento vztah znamená obecný tvar lineární funkce proměnných S', S'', S'''. Lineární souvislost osové síly S se silami S', S'', S''' zbytných prutů plyne z výminek rovnováhy, jež jsou vzhledem k silám vesměs lineární.

U nosníku plnostěnného jsou M, N složky výslednice vnějších sil po jedné straně uvažovaného průřezu, i jsou M, N lineárními funkcemi všech vnějších sil po jedné straně průřezu; k těmto silám náleží i staticky neurčité veličiny (síly nebo momenty) X', X'', . . . , pokud působí po jedné straně průřezu. Opěrové reakce A jsou v rovnováze se všemi vnějšími silami, souvisí tedy s nimi opět lineárně; jsou proto i reakce A lineárními funkcemi staticky neurčitých veličin X', X'', ... Lineární funkce lze psáti podle poslední rovnice ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} M &= \mathfrak{M} + \frac{\partial M}{\partial X'} X' + \frac{\partial M}{\partial X''} X'' + \ldots, \\ N &= \mathfrak{N} + \frac{\partial N}{\partial X'} X' + \frac{\partial N}{\partial X''} X'' + \ldots, \\ A &= \mathfrak{A} + \frac{\partial A}{\partial X'} X' + \frac{\partial A}{\partial X''} X'' + \ldots. \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Odvoďme význam veličin v těchto rovnicích. Položíme-li $X' = 0$, $X'' = 0, \ldots$, tedy vynecháme-li staticky neurčité veličiny, obdržíme staticky určitý *nosník základní*, pro nějž plyne z posledních rovnic

$$M = \mathfrak{M}, \quad N = \mathfrak{N}, \quad A = \mathfrak{A}.$$

Znamenají pak $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$ hodnoty momentu ohybového, síly normálné a reakce opěrové, jež vyvodí v základním nosníku dané zatížení. Uvažujme dále zase základní nosník a vynechme zatížení, čímž vyjde $\mathfrak{M} = 0, \mathfrak{N} = 0, \mathfrak{A} = 0$; položme pak $X' = 1$, $X'' = X''' = \ldots = 0$ a obdržíme z rovnic (90)

$$M = \frac{\partial M}{\partial X'}, \quad N = \frac{\partial N}{\partial X'}, \quad A = \frac{\partial A}{\partial X'}.$$

Podle toho určíme $\frac{\partial M}{\partial X'}$, $\frac{\partial N}{\partial X'}$, $\frac{\partial A}{\partial X'}$ jako moment, normálnou sílu a reakci v základním nosníku, vynecháme-li veškeré zatížení a všechny staticky neurčité veličiny X, vyjma X', kterou položíme rovnu jedničce. Jinak lze řešiti $\frac{\partial M}{\partial X'}$, $\frac{\partial N}{\partial X'}$, $\frac{\partial A}{\partial X'}$ derivováním podle X', jsou-li M, N, A vyjádřeny jakožto funkce staticky neurčitých veličin X', X'', ...

Přetvárné výminky pro plnostěnný nosník staticky neurčitý vysloviti lze jako u staticky neurčité soustavy prutové větou o nejmenší práci přetvárné: Pokládáme-li staticky neurčité veličiny za proměnné, plynou jejich hodnoty z výminky, že činí přetvárnou práci celého nosníku minimem. Podle této věty lze stanoviti i účinek změny teploty a popuštění opěr, klademe-li za přetvárnou práci početní hodnotu Π' danou vzorcem (89^a). Je-li X obecná staticky neurčitá veličina, žádá min Π', aby bylo vyhověno výmince

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial X} = 0;$$

dosazením za Π' z rovnice (89^a) vyjde obecná výminka přetvárná

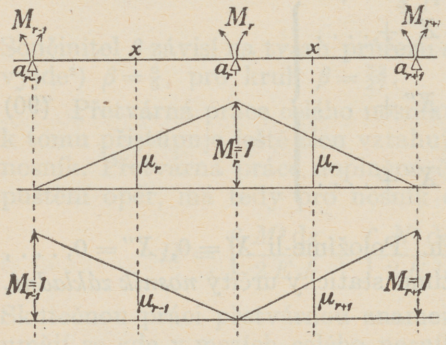
$$\int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} \mathrm{d}s + \int \left(\frac{N}{EU} + \delta\varepsilon \right) \frac{\partial N}{\partial X} \mathrm{d}s + \Sigma \frac{\partial A}{\partial X} \Delta a = 0. \tag{91}$$

Tato výminka přetvárná platí pro jakýkoli staticky neurčitý nosník plnostěnný, složený z prutů přímých nebo křivých. Za X položíme postupně všechny staticky neurčité veličiny a obdržíme tolik přetvárných výminek, kolikrát je daný nosník staticky neurčitý.

Příklad 7. Odvoďme obecnou výminku přetvárnou pro spojitý nosník stálého průřezu.

Nosník spojitý se stane staticky určitým, rozdělíme-li jej ve všech podporách vnitřních, tedy klademe-li podporové momenty ... $M_{r-1} = M_r = M_{r+1} = \ldots = 0$; základní nosník obsahuje pak v každém poli nosník prostý. Pokládejme podporové momenty ... M_{r-1}, M_r, M_{r+1}, ... za staticky neurčité veličiny a odvoďme obecnou výminku přetvárnou. Poněvadž jde o přímý nosník vodorovný, na nějž působí svislé síly vnější, je-li jedna podpora pevná a ostatní posouvatelné po vodorovné, jest $N = 0$ a také změna teploty nemá účinku. Přetvárná výminka (91) má zde tedy tvar

$$\int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} \mathrm{d}x + \Sigma \frac{\partial A}{\partial X} \Delta a = 0.$$



Obr. 57.

Jak bylo dovozeno, určíme $\frac{\partial M}{\partial X}$, $\frac{\partial A}{\partial X}$ jakožto hodnoty M, A v základním nosníku, působí-li naň pouze veličina $X = 1$; jinak lze též obecné výrazy pro M, A přímo derivovati. Dělíme-li spojitý nosník ve všech vnitřních podporách, čímž obdržíme řadu nosníků prostých jakožto nosník základní, a dáme-li v podpoře a_r působiti momentu $M_r = 1$ (obr. 57), působí tento moment pouze na obě pole sousední. V každém tom poli se mění moment M podle přímky, poněvadž není mezi podporami vnějších sil, a v sousedních podporách a_{r-1}, a_{r+1} bude moment rovný nule. Je-li tedy $M_r = 1$, vznikne v průřezu x pole $a_{r-1}\, a_r$ moment

$$\mu_r = 1 \cdot \frac{x}{l_r}$$

a v průřezu x pole $a_r\, a_{r+1}$ moment

$$\mu_r = 1 \cdot \frac{x'}{l_{r+1}},$$

znamenáme-li

$$\overline{a_{r-1}a_r} = l_r, \quad \overline{a_r a_{r+1}} = l_{r+1}, \quad \overline{a_{r-1}x} = x, \quad \overline{x a_{r+1}} = x'.$$

Obdobně dá moment $M_{r-1} = 1$ v průřezu x pole $a_{r-1}a_r$ moment

$$\mu_{r-1} = 1 \cdot \frac{x'}{l_r},$$

a z momentu $M_{r+1} = 1$, působícího na základní nosník, plyne v průřezu x pole $a_r a_{r+1}$ moment

$$\mu_{r+1} = 1 \cdot \frac{x}{l_{r+1}}.$$

V podporách a_{r-1}, a_r, a_{r+1} původního nosníku spojitého jsou momenty M_{r-1}, M_r, M_{r+1}; připojíme-li tyto momenty k základnímu nosníku, a to v protivných smyslech k části vlevo i vpravo od příslušné podpory vnitřní, nahradili jsme tím rozdělení nosníku ve vnitřních podporách a dostaneme pak v každém průřezu základního nosníku týž moment jako v původním nosníku spojitém. Na moment M v průřezu x pole $a_{r-1}a_r$ působí pak jednak dané zatížení, jež v průřezu x základního nosníku (prostého $a_{r-1}a_r$) vyvodí moment $\mathfrak{M}$, jednak též podporové momenty M_{r-1}, M_r. Dá-li moment $M_{r-1} = 1$ ($M_r = 1$) v průřezu x moment μ_{r-1} (μ_r), vznikne momentem M_{r-1} (M_r) v témž průřezu moment $\mu_{r-1}M_{r-1}$ ($\mu_r M_r$). Celkem je v průřezu x pole $a_{r-1}a_r$ moment

$$M = \mathfrak{M} + \mu_{r-1}M_{r-1} + \mu_r M_r = \mathfrak{M} + \frac{M_{r-1}x' + M_r x}{l_r}.$$

Obdobně platí pro průřez x v poli $a_r a_{r+1}$

$$M = \mathfrak{M} + \mu_r M_r + \mu_{r+1}M_{r+1} = \mathfrak{M} + \frac{M_r x' + M_{r+1}x}{l_{r+1}}.$$

Moment $M_r = 1$, působící na prostý nosník $a_{r-1}a_r$, vyvodí v podpoře a_{r-1} reakci $\alpha_{(r-1)r} = \frac{1}{l_r}$, v podpoře a_r pak $\alpha'_{rr} = -\frac{1}{l_r}$, neboť obě reakce musí dáti dvojici, jež se ruší s dvojicí danou momentem $M_r = 1$. Týž moment $M_r = 1$, působící na prostý nosník $a_r a_{r+1}$, dá v podporách a_r, a_{r+1} reakce, jež tvoří dvojici rovnou a protivnou dvojici o momentu $M_r = 1$; mají tedy tyto reakce hodnoty $\alpha''_{rr} = -\frac{1}{l_{r+1}}$, $\alpha_{(r+1)r} = \frac{1}{l_{r+1}}$. Kladný moment M_r nahrazující účinek levé strany, tedy vpravo od podpory a_r, točí jako ručičky na hodinách; účinek pravé strany nahrazujeme vlevo od podpory a_r momentem protivného smyslu. Za kladnou pokládáme reakci vzhůru směřující. Celkem vyvodí moment $M_r = 1$ v základním nosníku reakce

$$\alpha_{(r-1)r} = \frac{1}{l_r}, \quad \alpha_{rr} = \alpha'_{rr} + \alpha''_{rr} = -\frac{1}{l_r} - \frac{1}{l_{r+1}}, \quad \alpha_{(r+1)r} = \frac{1}{l_{r+1}}$$

v podporách a_{r-1}, a_r, a_{r+1}.

Berme za staticky neurčitou veličinu X moment M_r; pak jest

$$\frac{\partial M}{\partial M_r} = \mu_r, \quad \frac{\partial A}{\partial M_r} = \alpha_r$$

a výminka přetvárná má tvar

$$\int M \mu_r \, dx + EJ \Sigma \alpha_r \cdot \Delta a = 0,$$

je-li průřez nosníku stálý. Dosaďme za M, μ_r hodnoty, jež jsme určili v průřezu x pole l_r i l_{r+1}; za α_r dosadíme v podporách a_{r-1}, a_r, a_{r+1} hodnoty $\alpha_{(r-1)r}$, α_{rr}, $\alpha_{(r+1)r}$ a za Δa popuštění h_{r-1}, h_r, h_{r+1} podpor a_{r-1}, a_r, a_{r+1}, měřená kladně ve směru kladných tlaků podporových, t. j. dolů. Tím obdržíme z hořejší rovnice

$$\int_0^{l_r} \left(\mathfrak{M} + \frac{M_{r-1}x' + M_r x}{l_r}\right) \frac{x}{l_r} \, dx + \int_0^{l_{r+1}} \left(\mathfrak{M} + \frac{M_r x' + M_{r+1}x}{l_{r+1}}\right) \frac{x'}{l_{r+1}} \, dx +$$
$$+ EJ\left(\frac{h_{r-1}}{l_r} - \frac{h_r}{l_r} - \frac{h_r}{l_{r+1}} + \frac{h_{r+1}}{l_{r+1}}\right) = 0.$$

Rozvedením plyne rovnice

$$\frac{1}{l_r}\int_0^{l_r} \mathfrak{M} x \, dx + \frac{M_{r-1}}{l_r^2}\int_0^{l_r} x x' \, dx + \frac{M_r}{l_r^2}\int_0^{l_r} x^2 \, dx + \frac{1}{l_{r+1}}\int_0^{l_{r+1}} \mathfrak{M} x' \, dx +$$
$$+ \frac{M_r}{l_{r+1}^2}\int_0^{l_{r+1}} x'^2 \, dx + \frac{M_{r+1}}{l_{r+1}^2}\int_0^{l_{r+1}} x x' \, dx + EJ\left(\frac{h_{r+1} - h_r}{l_{r+1}} - \frac{h_r - h_{r-1}}{l_r}\right) = 0.$$

Vyčíslíme integrály

$$\int_0^l x^2\,dx = \int_0^l x'^2\,dx = \frac{l^3}{3}, \qquad \int_0^l x\,x'\,dx = \int_0^l x\,(l-x)\,dx = \frac{l^3}{6}$$

a poznačíme

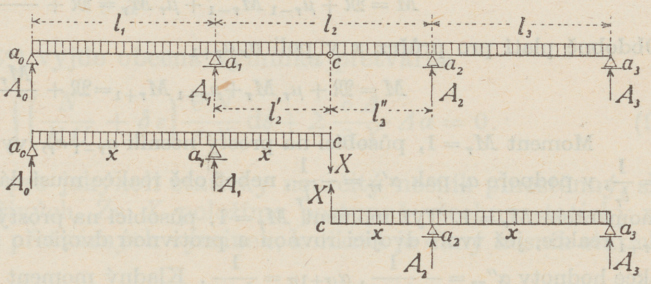
$$6\int_0^{l_r} \mathfrak{M}\,x\,dx = \mathfrak{N}_r, \qquad 6\int_0^{l_{r+1}} \mathfrak{M}\,x'\,dx = \mathfrak{N}'_{r+1}.$$

Tím dospíváme ke známé rovnici třímomentové

$$M_{r-1}\,l_r + 2\,M_r\,(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1}\,l_{r+1} + \frac{\mathfrak{N}_r}{l_r} + \frac{\mathfrak{N}'_{r+1}}{l_{r+1}} + 6\,E\,J\left(\frac{h_{r+1}-h_r}{l_{r+1}} - \frac{h_r - h_{r-1}}{l_r}\right) = 0.$$

Příklad 8. Spojitý nosník o třech podporách s kloubem v druhém poli je zatížen v celé délce rovnoměrně; určiti jest reakce podporové.

Délky polí buďtež obecně různé: $\overline{a_0 a_1} = l_1$, $\overline{a_1 a_2} = l_2$, $\overline{a_2 a_3} = l_3$ (obr. 58), kloub c v druhém poli měj vzdálenosti od podpor $\overline{a_1 c} = l'_2$, $\overline{c\,a_2} = l''_2$. Podpora a_0 je pevná, ostatní posouvatelné po vodorovné; pak jsou všechny podporové reakce svislé. V kloubu c je moment $M_c = 0$, zbývá v něm tedy jakožto výslednice vnějších sil po jedné straně pouze posouvající síla X, kterou lze nahraditi v bodě c účinek jedné strany nosníku; nahrazujeme-li stranu levou (pravou), tedy pro díl $c\,a_3$ ($a_0\,c$), připojíme kladnou sílu X vzhůru (dolů). Rozdělíme-li nosník v kloubu c, t. j. klademe-li $X = 0$, obdržíme dva díly, z nichž každý je nosníkem o dvou podporách s přečnívajícím koncem a je staticky určitý. Oba ty díly tvoří nosník základní.



Obr. 58.

Na díl $a_0\,c$ působí mimo plné rovnoměrné zatížení reakce A_0, A_1 a v bodě c svislá síla X dolů směřující; momentová výminka rovnováhy všech těchto sil k bodu a_1 jest

$$A_0\,l_1 - \tfrac{1}{2}\,q\,l_1^2 + \tfrac{1}{2}\,q\,l'^2_2 + X\,l'_2 = 0$$

a dá

$$A_0 = \tfrac{1}{2}\,q\,l_1 - (\tfrac{1}{2}\,q\,l'_2 + X)\,\frac{l'_2}{l_1}.$$

Z momentové výminky rovnováhy k bodu a_0

$$A_1\,l_1 - \tfrac{1}{2}\,q\,(l_1 + l'_2)^2 - X\,(l_1 + l'_2) = 0$$

plyne

$$A_1 = [\tfrac{1}{2}\,q\,(l_1 + l'_2) + X]\,\frac{l_1 + l'_2}{l_1}.$$

Součet vnějších sil jest

$$A_0 + A_1 - q\,(l_1 + l'_2) - X = 0;$$

této výminee stanovené hodnoty vyhovují. Reakci A_3 určíme jako A_0, A_2 jako A_1 z rovnováhy sil působících na díl $c\,a_3$; třeba jen vyměniti v předešlých vzorcích l_1 s l_3, l_2 s l''_2 a u X změniti znaménko, poněvadž pro díl $c\,a_3$ má X protivný směr než pro díl $a_0\,c$. Podle toho jest

$$A_3 = \tfrac{1}{2}\,q\,l_3 - (\tfrac{1}{2}\,q\,l''_2 - X)\,\frac{l''_2}{l_3},$$

$$A_2 = [\tfrac{1}{2}\,q\,(l''_2 + l_3) - X]\,\frac{l''_2 + l_3}{l_3}.$$

Všechny vnější síly jsou kolmé k ose nosníku, je tedy ve všech průřezech $N = 0$. Pak nemá též změna teploty účinku; popuštění opěr nedbejme. Přetvárná výminka (91) má zde tvar

$$\int \frac{M}{E\,J}\,\frac{\partial M}{\partial X}\,dx = 0.$$

Nosník měj stálý průřez a budiž celý z téže látky stejnorodé; pak je EJ stálé. Integraci musíme provésti zvláště v části $a_0 a_1$, $a_1 c$, $c a_2$, $a_2 a_3$, neboť v každé té části má ohybový moment M jinou hodnotu. Vzdálenost průřezu x od levého konce každé části znamenejme x, od pravého konce x'. Ve všech částech měli bychom postupovati od levé strany k pravé. Můžeme však též tam, kde se vyskytne x', psáti dx' místo dx a vziti meze podle x' od pravé strany k levé; výsledek je týž, jako kdybychom psali dx a brali meze podle x od levé strany k pravé.

V části $a_0 a_1$ jest

$$M = A_0 x - \tfrac{1}{2} q x^2, \quad \frac{\partial M}{\partial X} = \frac{\partial A_0}{\partial X} x = -\frac{l_2'}{l_1} x;$$

v části $a_1 c$ určíme, jdouce s pravé strany a obracejíce znaménko,

$$M = -X x' - \tfrac{1}{2} q x'^2, \quad \frac{\partial M}{\partial X} = -x';$$

pro část $c a_2$ platí

$$M = X x - \tfrac{1}{2} q x^2, \quad \frac{\partial M}{\partial X} = x;$$

pro část $a_2 a_3$ dostaneme

$$M = A_3 x' - \tfrac{1}{2} q x'^2, \quad \frac{\partial M}{\partial X} = \frac{\partial A_3}{\partial X} x' = \frac{l_2''}{l_3} x'.$$

Dosaďme za M a $\frac{\partial M}{\partial X}$ určené hodnoty do přetvárné výminky a násobme ji stálou hodnotou EJ; vyjde

$$-\frac{l_2'}{l_1}\int_0^{l_1}(A_0 x - \tfrac{1}{2} q x^2) x \, dx + \int_0^{l_2'}(X x' + \tfrac{1}{2} q x'^2) x' \, dx' + \int_0^{l_2''}(X x - \tfrac{1}{2} q x^2) x \, dx +$$

$$+ \frac{l_2''}{l_3}\int_0^{l_3}(A_3 x' - \tfrac{1}{2} q x'^2) x' \, dx' = 0.$$

Integrací plyne

$$-\tfrac{1}{3} A_0 l_1^2 l_2' + \tfrac{1}{8} q l_1^3 l_2' + \tfrac{1}{3} X l_2'^3 + \tfrac{1}{8} q l_2'^4 + \tfrac{1}{3} X l_2'^3 - \tfrac{1}{8} q l_2''^4 + \tfrac{1}{3} A_3 l_2'' l_3^2 - \tfrac{1}{8} q l_2'' l_3^3 = 0.$$

Dosadíme-li za A_0, A_3 hodnoty dříve stanovené, obdržíme rovnici, která obsahuje jedinou neznámou X; lze ji upraviti na tvar

$$\tfrac{1}{3} X (l_1 l_2'^2 + l_2'^3 + l_2'^3 + l_2''^2 l_3) = -\tfrac{1}{8} q (l_1^3 l_2' + l_2'^4 - l_2''^4 - l_2' l_3^3) + \tfrac{1}{6} q (l_1^3 l_2' - l_1^2 l_2'^2 - l_2'' l_3^3 + l_2''^2 l_3^2).$$

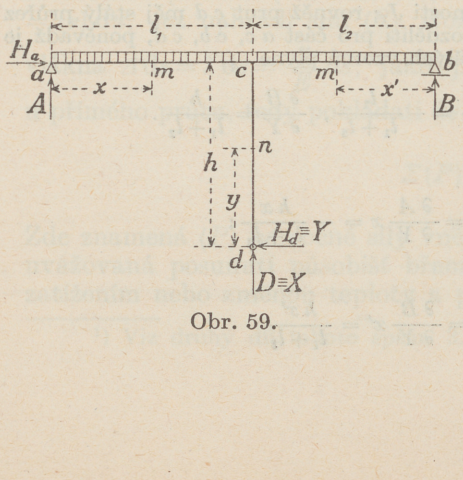
Z poslední rovnice plyne po úpravě

$$X = \frac{q}{8} \cdot \frac{l_2' (l_1^3 - 4 l_1^2 l_2' - 3 l_2'^3) + l_2'' (3 l_2'^3 + 4 l_2'' l_2^2 - l^3)}{l_2^2 (l_1 + l_2') + l_2'^2 (l_2'' + l_3)}.$$

Pro nosník souměrný bylo by $l_1 = l_3$, $l_2' = l_2''$ a $X = 0$. Pak jest

$$A_0 = \frac{q l_1}{2} - \frac{q l_2'^2}{2 l_1}, \quad A_1 = \frac{q (l_1 + l_2')^2}{2 l_1}, \quad A_2 = A_1, \quad A_3 = A_0,$$

i jsou v podporách tytéž reakce jako u nosníku základního, tedy jako by nebylo v bodě c spojení; to plyne též z toho, že obě části základního nosníku mají v bodě c týž průhyb, jenž je pak také průhybem daného nosníku neurčitého.



Obr. 59.

Příklad 9. Dán je nosník podepřený v bodě b posouvatelně po vodorovné a spojený v bodě c pevně s prutem cd, jenž je v bodě d spojen s podporou pevným kloubem d (obr. 59). Určiti jest reakce tohoto nosníku za plného zatížení rovnoměrného.

V bodě a působí obecně šikmá reakce, jež má svislou složku A, vodorovnou H_a; v bodě d působí rovněž šikmá reakce, jejíž svislá složka je D, vodorovná H_d, a v bodě b je svislá reakce B. Nosník se stane staticky určitým, vynecháme-li podporu d; tím obdržíme jakožto základní nosník prostý nosník podepřený v bodě a pevně, v bodě b posouvatelně po vodorovné. Obě složky reakce v bodě d jsou tedy staticky neurčité; znamenejme je $D \equiv X$, $H_d \equiv Y$.

AKADEMICKÁ KNIHOVNA SSM Jednota V PRAZE

Z rovnováhy vnějších sil plyne, předpokládáme-li směr v obrazci naznačený,

$$H_a = H_d = Y.$$

Dále platí pro svislé vnější síly

$$A + X + B = q\,(l_1 + l_2)$$

a momentová výminka rovnováhy k bodu b jest

$$A\,(l_1 + l_2) + X\,l_2 + Y\,h - \tfrac{1}{2}\,q\,(l_1 + l_2)^2 = 0.$$

Z poslední rovnice plyne

$$A = \tfrac{1}{2}\,q\,(l_1 + l_2) - \frac{X\,l_2 + Y\,h}{l_1 + l_2},$$

předešlá rovnice dá pak

$$B = q\,(l_1 + l_2) - A - X = \tfrac{1}{2}\,q\,(l_1 + l_2) - \frac{X\,l_1 - Y\,h}{l_1 + l_2}.$$

Nehleďme k účinku změny teploty a popuštění opěr; pro zjednodušení výpočtu nedbejme také normálné síly. Přetvárné výminky jsou pak

$$\int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X}\,ds = 0, \qquad \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial Y}\,ds = 0.$$

Ve vodorovném nosníku je v bodě m ($\overline{a\,m} = x$) části $a\,c$ moment ohybový

$$M = A\,x - \tfrac{1}{2}\,q\,x^2;$$

v bodě m ($\overline{m\,b} = x'$) části $c\,b$ platí

$$M = B\,x' - \tfrac{1}{2}\,q\,x'^2.$$

V bodě n ($\overline{d\,n} = y$) prutu $c\,d$ je pak, jdeme-li zdola a bereme-li znaménko, jako bychom šli s levé strany,

$$M = Y\,y.$$

Podle toho dostaneme v bodě c, čítáme-li jej k části $a\,c$ ($x = l_1$), moment

$$M_c = A\,l_1 - \tfrac{1}{2}\,q\,l_1^2,$$

a čítáme-li jej k části $c\,b$ ($x' = l_2$), moment

$$M_c' = B\,l_2 - \tfrac{1}{2}\,q\,l_2^2,$$

jehož znaménko bereme obráceně než při silách po levé straně. V části $d\,c$ obdržíme pro bod c ($y = h$) moment

$$M_c'' = Y\,h.$$

Rovnováha žádá, aby se součet momentů všech sil k bodu c rovnal nule, tedy

$$M_c - M_c' + M_c'' = 0.$$

Stanovené hodnoty vyhovují této rovnici; v tom je kontrola řešení.

Nosník $a\,b$ měj stálý průřez o momentu setrvačnosti J_1; rovněž prut $c\,d$ měj stálý průřez o momentu setrvačnosti J_2. Všechny integrály třeba rozděliti pro část $a\,c$, $c\,b$, $c\,d$, poněvadž je v každé části moment M dán jinou hodnotou. Z předešlých vzorců plyne

$$\frac{\partial A}{\partial X} = -\frac{l_2}{l_1 + l_2}, \quad \frac{\partial A}{\partial Y} = -\frac{h}{l_1 + l_2}; \quad \frac{\partial B}{\partial X} = -\frac{l_1}{l_1 + l_2}, \quad \frac{\partial B}{\partial Y} = \frac{h}{l_1 + l_2}.$$

Dále je v části $a\,c$

$$\frac{\partial M}{\partial X} = \frac{\partial A}{\partial X}\,x = -\frac{l_2\,x}{l_1 + l_2}, \quad \frac{\partial M}{\partial Y} = \frac{\partial A}{\partial Y}\,x = -\frac{h\,x}{l_1 + l_2};$$

v části $c\,b$ dostaneme

$$\frac{\partial M}{\partial X} = \frac{\partial B}{\partial X}\,x' = -\frac{l_1\,x'}{l_1 + l_2}, \quad \frac{\partial M}{\partial Y} = \frac{\partial B}{\partial Y}\,x' = \frac{h\,x'}{l_1 + l_2}$$

a v části cd plyne

$$\frac{\partial M}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial Y} = y.$$

Stanovené hodnoty dosadíme do výminek přetvárných, jež dají

$$\frac{1}{J_1}\left[-\frac{l_2}{l_1+l_2}\int_0^{l_1}\left(Ax - \frac{1}{2}qx^2\right)x\,dx - \frac{l_1}{l_1+l_2}\int_0^{l_2}\left(Bx' - \frac{1}{2}qx'^2\right)x'\,dx'\right] = 0,$$

$$\frac{1}{J_1}\left[-\frac{h}{l_1+l_2}\int_0^{l_1}\left(Ax - \frac{1}{2}qx^2\right)x\,dx + \frac{h}{l_1+l_2}\int_0^{l_2}\left(Bx' - \frac{1}{2}qx'^2\right)x'\,dx'\right] + \frac{Y}{J_2}\int_0^{h} y^2\,dy = 0.$$

Násobme obě rovnice J_1 a proveďme integrace; obdržíme rovnice

$$\frac{l_2}{l_1+l_2}\left(\frac{1}{3}Al_1^3 - \frac{1}{8}ql_1^4\right) + \frac{l_1}{l_1+l_2}\left(\frac{1}{3}Bl_2^3 - \frac{1}{8}ql_2^4\right) = 0,$$

$$\frac{h}{l_1+l_2}\left(\frac{1}{3}Al_1^3 - \frac{1}{8}ql_1^4 - \frac{1}{3}Bl_2^3 + \frac{1}{8}ql_2^4\right) - \frac{J_1}{J_2}Y\frac{h^3}{3} = 0.$$

Dosaďme za A, B a upravme; vyjde

$$l_1^2 l_2^2 X + h l_1 l_2 (l_1 - l_2) Y = \frac{q}{8} \cdot l_1 l_2 (l_1^3 + 4 l_1^2 l_2 + 4 l_1 l_2^2 + l_2^3),$$

$$\frac{h l_1 l_2 (l_1 - l_2)}{l_1 + l_2} X + h^2 \left(\frac{l_1^3 + l_2^3}{(l_1+l_2)^2} + h\frac{J_1}{J_2}\right) Y = \frac{q}{8} \cdot h (l_1^3 + 3 l_1^2 l_2 - 3 l_1 l_2^2 - l_2^3).$$

Řešením těchto rovnic určíme neznámé

$$X = \frac{q(l_1+l_2)}{8 l_1 l_2} \cdot \frac{5 l_1^2 l_2^2 + h \cdot \frac{J_1}{J_2}(l_1^3 + 4 l_1^2 l_2 + 4 l_1 l_2^2 + l_2^3)}{l_1 l_2 + h(l_1+l_2)\frac{J_1}{J_2}},$$

$$Y = \frac{q}{8h} \cdot \frac{l_1 l_2 (l_1+l_2)(l_1 - l_2)}{l_1 l_2 + h(l_1+l_2)\frac{J_1}{J_2}},$$

Reakce A, B, H_a stanovili bychom pak ze vzorců odvozených s počátku.

Pro stejná pole $l_1 = l_2 = l$ vyjde $Y = 0$, $X = \frac{10}{8} q l$; to souhlasí se spojitým nosníkem o dvou polích rovných, s nímž má daný nosník totožnou čáru ohybovou, poněvadž je při stejných polích souměrný a nedbáme účinku normálné síly, tedy zkrácení svislého prutu.

20. Přetvoření nosníků plnostěnných. *α) Věta o virtuálných pracích,* jíž lze řešiti přetvoření, má pro soustavy prutové tvar[1])

$$\Sigma(P)\,\Delta p = \Sigma(S)\,\Delta s.$$

Nosník plnostěnný mysleme si složený z vláken spojujících stejně položené body sousedních průřezů (viz obr. 56); ve vlákně průřezu du působí normálná síla $(n) = (\nu)\,du$, jež nahradí sílu (S). Roztažení Δs nahradíme pak lineárným roztažením vlákna $\Delta ds = \lambda\,ds = \frac{\nu}{E}ds$; jako při výpočtu napětí můžeme i zde počítati jako u přímého prutu, tedy pokládati ds za stálé. Sil tangenciálných nedbejme a obdržíme

$$\Sigma(P)\,\Delta p = \iint \frac{(\nu)\,\nu\,ds\,du}{E}.$$

Zde znamená (P) pomocné síly vnější a (ν) normálná napětí jimi vyvozená; Δp jsou uvažovaná posunutí působišť břemen (P) ve směrech břemen, vyvozená jakýmkoli zatížením nebo změnou teploty a p., a ν jsou příslušná napětí normálná.

[1]) Viz druhý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1946), str. 261.

U nosníků obloukových můžeme počítati napětí ν jako u přímého prutu podle vzorce (67^a)

$$\nu = \frac{N}{U} - \frac{M\,\eta}{J};$$

obdobně platí též

$$(\nu) = \frac{(N)}{U} - \frac{(M)\,\eta}{J},$$

je-li (N) normálná síla a (M) moment ohybový, vyvozený pomocnými vnějšími silami (P). Dosaďme za ν a (ν) do hořejší rovnice a integrujme nejprve v mezích prvku nosníku obsaženého mezi sousedními průřezy ξ, ξ', jejichž vzdálenost ds ve střednici je při tom stálá; pak teprve integrujeme v mezích celého nosníku. Obdržíme tak

$$\Sigma(P)\,\Delta p = \int \frac{ds}{E} \int \left(\frac{(N)}{U} - \frac{(M)\,\eta}{J} \right) \left(\frac{N}{U} - \frac{M\,\eta}{J} \right) du =$$

$$= \int \frac{ds}{E} \int \left[\frac{(N)\,N}{U^2} - \frac{(M)\,N}{J\,U}\,\eta - \frac{M\,(N)}{J\,U}\,\eta + \frac{(M)\,M}{J^2}\,\eta^2 \right] du.$$

Jelikož $\int du = U$, $\int \eta\, du = 0$ jakožto statický moment průřezu k centrálné ose $\mathfrak{Y}$ a $\int \eta^2\, du = J$, dá *věta o virtuálných pracích* pro nosník plnostěnný rovnici

$$\Sigma(P)\,\Delta p = \int \frac{(M)\,M\,ds}{E\,J} + \int \frac{(N)\,N\,ds}{E\,U}. \tag{92}$$

Tato rovnice platí pro jakýkoli nosník plnostěnný, staticky určitý nebo neurčitý.

U nosníku staticky neurčitého platí podle vzorců (90)

$$(M) = (\mathfrak{M}) + \frac{\partial M}{\partial X'} X' + \frac{\partial M}{\partial X''} X'' + \ldots,$$

$$(N) = (\mathfrak{N}) + \frac{\partial N}{\partial X'} X' + \frac{\partial N}{\partial X''} X'' + \ldots.$$

Obecně znamenají $\frac{\partial M}{\partial X}$, $\frac{\partial N}{\partial X}$ moment ohybový a sílu normálnou, jež vyvodí v základním nosníku pouhá veličina $X = 1$; jsou to tedy hodnoty nezávislé na zatížení nosníku. Z rovnice (68) pak plyne

$$\Sigma(P)\,\Delta p = \int \frac{(\mathfrak{M})\,M\,ds}{E\,J} + \int \frac{(\mathfrak{N})\,N\,ds}{E\,U} + \left(\int \frac{M}{E\,J} \frac{\partial M}{\partial X'}\,ds + \int \frac{N}{E\,U} \frac{\partial N}{\partial X'}\,ds \right) X' +$$

$$+ \left(\int \frac{M}{E\,J} \frac{\partial M}{\partial X''}\,ds + \int \frac{N}{E\,U} \frac{\partial N}{\partial X''}\,ds \right) X'' + \ldots$$

Omezíme-li se na pouhý účinek zatížení, mají přetvárné výminky podle rovnice (91) tvar

$$\int \frac{M}{E\,J} \frac{\partial M}{\partial X'}\,ds + \int \frac{N}{E\,U} \frac{\partial N}{\partial X'}\,ds = 0, \quad \int \frac{M}{E\,J} \frac{\partial M}{\partial X''}\,ds + \int \frac{N}{E\,U} \frac{\partial N}{\partial X''}\,ds = 0, \ldots.$$

Rovnici virtuálných prací pro nosník staticky neurčitý lze nyní psáti

$$\Sigma(P)\,\Delta p = \int \frac{(\mathfrak{M})\,M\,ds}{E\,J} + \int \frac{(\mathfrak{N})\,N\,ds}{E\,U}. \tag{93}$$

Zde jsou $(\mathfrak{M})$, $(\mathfrak{N})$ moment ohybový a síla normálná, j ž vyvodí v základním nosníku pomocné vnější síly (P); M, N jsou hodnoty platné za vyšetřovaného přetvoření

pro daný nosník neurčitý. Z toho plyne: Řešíme-li přetvoření nosníku staticky neurčitého, můžeme se omeziti na jakýkoli nosník základní (staticky určitý nebo neurčitý), jenž plyne z daného nosníku vynecháním všech nebo některých staticky neurčitých veličin. Pro tento nosník základní určíme hodnoty $(\mathfrak{M})$, $(\mathfrak{N})$, vyvozené zvolenými pomocnými silami vnějšími (P); za M, N musíme ovšem dosazovati skutečné hodnoty pro daný nosník neurčitý, příslušné k vyšetřovanému přetvoření.

β) Věta Castiglianova. Větou o virtuálných pracích lze řešiti libovolné přetvoření. Jde-li na př. o posunutí Δp_m působiště břemene P_m ve směru tohoto břemene, zvolíme za pomocnou vnější sílu (P) břímě $P_m = 1$ a stanovíme k tomuto břemeni moment (M) a normálnou sílu (N); pak platí podle rovnice (92)

$$1 \cdot \Delta p_m = \int \frac{(M)\, M\, \mathrm{d}s}{E J} + \int \frac{(N)\, N\, \mathrm{d}s}{E U}.$$

Skutečné zatížení nosníku budiž složeno z libovolných sil vnějších a z břemene P_m, jež dá patrně moment $(M)\, P_m$ a normálnou sílu $(N)\, P_m$; dají-li všechny ostatní vnější síly moment $\mathfrak{M}$ a normálnou sílu $\mathfrak{N}$, je celkem

$$M = \mathfrak{M} + (M)\, P_m, \quad N = \mathfrak{N} + (N)\, P_m.$$

Pak lze psáti

$$(M) = \frac{\partial M}{\partial P_m}, \quad (N) = \frac{\partial N}{\partial P_m}$$

a

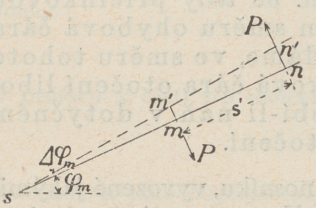
$$\Delta p_m = \int \frac{M}{E J} \frac{\partial M}{\partial P_m} \mathrm{d}s + \int \frac{N}{E U} \frac{\partial N}{\partial P_m} \mathrm{d}s.$$

Jak plyne z odvození, určí se $\frac{\partial M}{\partial P_m}$, $\frac{\partial N}{\partial P_m}$ jakožto hodnoty M, N, jež vyvodí zatížení břemenem $P_m = 1$; poněvadž je to pomocná síla vnější, stačí uvažovati, řešíme-li takto $\frac{\partial M}{\partial P_m}$, $\frac{\partial N}{\partial P_m}$, jakýkoli nosník základní, jak bylo dovozeno u věty o virtuálných pracích. Srovnáme-li výsledek se skutečnou prací přetvárnou (85[b])

$$\Pi = \int \frac{M^2\, \mathrm{d}s}{2 E J} + \int \frac{N^2\, \mathrm{d}s}{2 E U},$$

vidíme, že platí

$$\Delta p_m = \frac{\partial \Pi}{\partial P_m}. \qquad (94^a)$$



Obr. 60.

Obdobně lze počítati i jiná přetvoření, na př. otočení $\Delta \varphi_m$ tečny ke střednici v libovolném bodě m. Mysleme si, že v bodech m, n této tečny, pevně spojené s nosníkem, působí dvojice sil, jež má moment $M_m = 1$ (obr. 60); je-li $\overline{m\,n} = s'$, skládá se dvojice ze sil $P = \frac{1}{s'}$, jež jsou rovné a protivné, působí pak kolmo ke spojnici $m\,n$. Přetvořením nabude přímka $m\,n$ polohy $m'\,n'$; úhel φ_m přímky $m\,n$ s vodorovnicí se změní o $\Delta \varphi_m$. Součet virtuálných prací obou sil dvojice je za označení podle obrazce

$$P \cdot \overline{n\,n'} - P \cdot \overline{m\,m'} = P \cdot \overline{s\,n} \cdot \Delta \varphi_m - P \cdot \overline{s\,m} \cdot \Delta \varphi_m = P s' \cdot \Delta \varphi_m = M_m \Delta \varphi_m,$$

znamenáme-li $M_m = P s' = 1$ moment zvolené dvojice. Virtuálná práce momentu je tedy dána součinem momentu a otočení ve smyslu momentu. Vyvodí-li pak moment $M_m = 1$ v daném nosníku hodnoty $(M), (N)$, platí podle rovnice (92)

$$1 \cdot \Delta \varphi_m = \int \frac{(M)\, M\, \mathrm{d}s}{EJ} + \int \frac{(N)\, N\, \mathrm{d}s}{EU}.$$

Jako prve jest i zde

$$(M) = \frac{\partial M}{\partial M_m}, \quad (N) = \frac{\partial N}{\partial M_m};$$

jsou to hodnoty M, N pro zatížení nosníku momentem $M_m = 1$ ve smyslu hledaného otočení, pro něž stačí uvažovati jakýkoli nosník základní. Pak jest

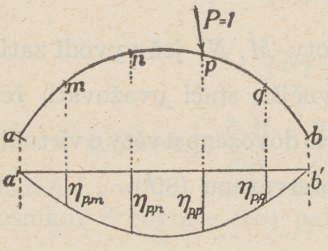
$$\Delta \varphi_m = \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial M_m} \mathrm{d}s + \int \frac{N}{EU} \frac{\partial N}{\partial M_m} \mathrm{d}s$$

nebo též

$$\Delta \varphi_m = \frac{\partial \Pi}{\partial M_m}. \tag{94^b}$$

Vzorci (94^a), (94^b) je dána *věta Castiglianova*[1]) *o derivaci přetvárné práce*: Libovolné přetvoření nosníku rovná se derivaci přetvárné práce podle vnější síly, jež působí v bodě, o jehož přetvoření jde, ve smyslu hledaného přetvoření. Věta tato platí také pro účinek změny teploty a popuštění opěr, doplníme-li skutečnou práci přetvárnou Π příslušnými členy na hodnotu Π' danou vzorcem (89^a).

*γ) **Věta o vzájemnosti posunutí (Maxwellova)*** platí pro nosníky, plnostěnné v témž tvaru jako pro soustavy prutové;[2]) je dána rovnicí



Obr. 61.

$$\eta_{m,n} = \eta_{n,m}, \tag{95}$$

v níž znamená prvá přípona u posunutí η bod, o jehož posunutí jde, i směr posunutí, druhá přípona se vztahuje na působiště i směr břemene $P = 1$, jež posunutí vvvozuje. Věta platí nejen pro posunutí, nýbrž i pro otočení libovolné tečny, bereme-li pak místo břemene moment $M = 1$ v dotyčném bodě tečny a ve smyslu hledaného otočení působící.

Podle věty Maxwellovy lze určiti příčinkovou čáru posunutí libovolnéhobodu p nosníku. Tato příčinková čára (obr. 61) má v bodech $m, n, q, \ldots$ pořadnice

$$\eta_{p,m} = \eta_{m,p}, \quad \eta_{p,n} = \eta_{n,p}, \quad \eta_{p,q} = \eta_{q,p}, \quad \ldots,$$

jež se určí jakožto ohybové pořadnice v bodech $m, n, q, \ldots$ při zatížení nosníku břemenem $P = 1$, v bodě p ve směru hledaného posunutí působícím. Je tedy příčinkovou čarou posunutí libovolného bodu nosníku v daném směru ohybová čára nosníku, působí-li naň v bodě, jehož posunutí hledáme, ve směru tohoto posunutí břímě $P = 1$. Docela obdobně se určí příčinková čára otočení libovolné tečny jakožto ohybová čára nosníku, působí-li naň v dotyčném bodě tečny moment $M = 1$ ve smyslu hledaného otočení.

*δ) **Věta Clapeyronova.*** Uvažujme skutečné přetvoření nosníku, vyvozené jakýmikoli silami vnějšími P, jež dají momenty M, normálné síly N a posunutí Δp v působištích břemen P a v jejich směrech. Za pomocné síly vnější (P) zvolme samotná

[1]) Po prvé odvodil tuto větu *A. Castigliano* v „Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques" (Turin 1879), str. 26.

[2]) Viz druhý díl tohoto spisu, 3. vydání (1946), str. 286.

břemena P; pak jest $(M) = M$, $(N) = N$. Z věty o virtuálných pracích (92) plyne pak

$$\Sigma P \cdot \Delta p = \int \frac{M^2 \, ds}{EJ} + \int \frac{N^2 \, ds}{EU} .$$

Srovnáme-li to se skutečnou prací přetvárnou, danou vzorcem (89^b), vidíme, že platí tu jako u soustav prutových rovnice (9^e)

$$\Pi = \tfrac{1}{2} \Sigma P \cdot \Delta p .$$

Přetvárná práce předpokládá spojitý vzrůst vnějších sil od nuly do konečných hodnot P; proti tomu by byla $\Sigma P \cdot \Delta p$ skutečná práce vnějších sil, kdyby působily od počátku stálou hodnotou P. Popuštění opěr a změny teploty jsme tu nedbali, myslíme si tedy opěry pevné a teplotu stálou. Tím vychází *věta Clapeyronova*:[1]) Působí-li na nosník s pevnými opěrami při stálé teplotě vnější síly rostoucí spojitě od nuly do konečných hodnot P, koná se přetvořením nosníku práce rovná polovici oné práce, kterou by vykonaly za téhož přetvoření stálé síly vnější rovné konečným hodnotám P. Výslední práce nezávisí nijak na způsobu, jak vnější síly rostou.

ε) Příklady. **Příklad 10.** Stanovme ohybovou pořadnici v libovolném bodě p spojitého nosníku stálého průřezu o dvou polích rovných, zatíženého v celé délce rovnoměrně (obr. 62).

V obecném průřezu x prvého pole $a\,b$ daného nosníku spojitého vzniká moment

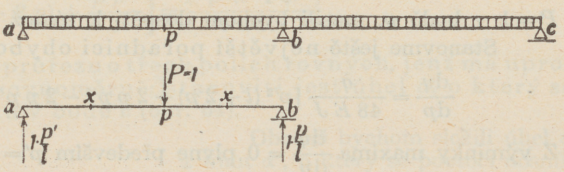
$$M = \mathfrak{M} + M', \text{ kde } \mathfrak{M} = \frac{1}{2} q x (l - x), \; M' = \frac{M_a x' + M_b x}{l} .$$

Dále jest

$$M_a = 0, \quad M_b = -\frac{1}{8} q l^2, \quad M' = -\frac{1}{8} q l x,$$

tedy

$$M = \frac{1}{2} q x (l - x) - \frac{1}{8} q l x = \frac{1}{8} q x (3l - 4x) .$$



Obr. 62.

Všechny vnější síly jsou zde kolmé k ose nosníku, pročež je ve všech průřezech $N = 0$.
Hledaná pořadnice ohybová plyne podle věty Castiglianovy z rovnice

$$y = \frac{\partial \Pi}{\partial P} = \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial P} \, dx .$$

Určíme nyní $\frac{\partial M}{\partial P}$ jakožto momenty vyvozené v průřezech nosníku svislým břemenem $P = 1$, jež působí v bodě p; stačí při tom uvažovati jakýkoli nosník základní. Daný nosník převedeme na nosník staticky určitý na př. rozdělením v podpoře b, tedy vynecháním momentu M_b, jenž je staticky neurčitý. Základní nosník se pak skládá ze dvou prostých nosníků $a\,b$, $b\,c$. Břímě $P = 1$ v bodě p působící vyvodí momenty pouze v prostém nosníku $a\,b$, a to v průřezu x části $a\,p$ moment

$$\frac{\partial M}{\partial P} = 1 \cdot \frac{p'}{l} x$$

a v průřezu x části $p\,b$ moment

$$\frac{\partial M}{\partial P} = 1 \cdot \frac{p}{l} x',$$

znamenáme-li jako obyčejně $\overline{a\,p} = p$, $\overline{p\,b} = p'$, $\overline{a\,x} = x$, $\overline{x\,b} = x'$, $\overline{a\,b} = l$. Je tedy

$$y = \frac{q}{8EJ} \left[\frac{p'}{l} \int_0^p (3l - 4x) x^2 \, dx + \frac{p}{l} \int_p^l (3l - 4x) x x' \, dx \right] .$$

[1]) Viz *B. P. E. Clapeyron* „Sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes" Paříž 1833)

Vyčíslíme integrály

$$\int_0^p (3l - 4x)\, x^2\, dx = 3l \cdot \frac{p^3}{3} - 4 \cdot \frac{p^4}{4} = p^3 (l - p) = p^3 p',$$

$$\int_p (3l - 4x)\, x\, x'\, dx = \int_0^{p'} (4x' - l)(l - x')\, x'\, dx' =$$

$$= 4l \cdot \frac{p'^3}{3} - l^2 \cdot \frac{p'^2}{2} - 4 \cdot \frac{p'^4}{4} + l \cdot \frac{p'^3}{3} = \frac{p'^2}{6}(10\, l\, p' - 3\, l^2 - 6\, p'^2);$$

v druhém integrálu jsme vyjádřili $x = l - x'$, $dx = -dx'$ a zavedli jsme meze podle nové proměnné x', výměnou mezí jsme pak změnili znaménko integrálu. Dosazením integrálů dostaneme

$$y = \frac{q}{8\, E\, J\, l}\left[p^3 p'^2 + \frac{p\, p'^2}{6}(10\, l\, p' - 3\, l^2 - 6\, p'^2)\right] = \frac{q}{48\, E\, J\, l}\, p\, p'^2 (6\, p^2 + 10\, l\, p' - 3\, l^2 - 6\, p'^2),$$

což lze upraviti na tvar

$$y = \frac{q}{48\, E\, J}\, p\, p'^2 (l + 2\, p).$$

Tím jsme stanovili rovnici ohybové čáry v prvém poli; v druhém poli je čára ohybová souměrná s čarou v prvém poli, osou souměrnosti je pak svislice střední podpory. Uprostřed prvého pole je $p = p' = \frac{1}{2}\, l$ a vyjde tu

$$y_d = \frac{q\, l^4}{192\, E\, J}.$$

Touž rovnici ohybové čáry bychom ovšem dostali, kdybychom zvolili za základní nosník na př. prostý nosník $a\, c$, jenž vznikne z daného nosníku spojitého, vynechá-li se střední podpora. Také kdybychom určili $\frac{\partial M}{\partial P}$ jakožto momenty, jež vznikají v daném nosníku neurčitém zatížením $P = 1$ v bodě p, musili bychom dospěti k témuž výsledku.

Stanovme ještě největší pořadnici ohybovou. K tomu potřebujeme

$$\frac{dy}{dp} = \frac{q}{48\, E\, J}\left[p'^2 (l + 2\, p) + 2\, p\, p'^2 - 2\, p\, p'\, (l + 2\, p)\right] = \frac{q}{48\, E\, J}\, p'\, (l^2 + l\, p - 8\, p^2).$$

Z výminky maxima $\frac{dy}{dp} = 0$ plyne především $p' = 0$; je tedy v bodě b tečna ohybové čáry vodorovná, což plyne také ze souměrnosti nosníku i zatížení ke svislici podpory b. Dále vyhovuje výminee maxima též rovnice

$$8\, p_0^2 - l\, p_0 - l^2 = 0,$$

dávající úsečku

$$p_0 = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 32\, l^2}}{16} = \frac{l}{16}(1 \pm \sqrt{33}).$$

Statickou platnost má pouze kladný kořen

$$p_0 = \frac{l}{16}(1 + \sqrt{33}) = 0{,}4215\, l.$$

V bodě daném touto úsečkou určíme z obecné rovnice ohybové čáry pořadnici

$$\max y = \frac{q}{48\, E\, J}\, p_0\, p_0'^2\, (l + 2\, p_0) = \frac{q\, l^4}{184{,}634\, E\, J}.$$

Příklad 11. Určiti jest odchylku α tečny v bodě a k ohybové čáře prostého nosníku $a\, b$ stálého průřezu, zatíženého břemenem P v bodě p (obr. 63).

Břímě P vyvodí v podporách a, b reakce

$$A = P\frac{p'}{l},\quad B = P\frac{p}{l},$$

znamenáme-li $\overline{a\, p} = p$, $\overline{p\, b} = p'$, $\overline{a\, b} = l$. V průřezu x ($\overline{a\, x} = x$) části $a\, p$ je moment

$$M = P\frac{p'}{l}\, x,$$

v průřezu x ($x\,b = x'$) části $p\,b$ pak

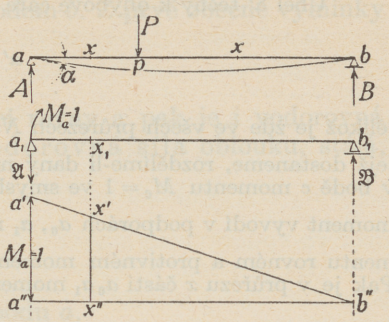
$$M = P\,\frac{p}{l}\,x'.$$

V bodě a dáme působiti momentu $M_a = 1$ ve smyslu úhlu α, tedy ve smyslu točení ručiček hodinových; v podporách a, b vzniknou reakce

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{l},\quad \mathfrak{B} = \frac{1}{l},$$

jež tvoří dvojici silovou o momentu rovném a protivném momentu M_a, jelikož jsou obě reakce s momentem M_a v rovnováze. V obecném průřezu x nosníku $a\,b$ je pak moment

$$\frac{\partial M}{\partial M_a} = \mathfrak{B}\,x' = \frac{1}{l}\,x'.$$



Obr. 63.

V daném případě je $N = 0$ a podle rovnice (94^b) vyjde

$$\alpha = \frac{\partial \Pi}{\partial M_a} = \int \frac{M}{EJ}\,\frac{\partial M}{\partial M_a}\,dx = \frac{1}{EJ}\left(\frac{P\,p'}{l^2}\int_0^p x\,x'\,dx + \frac{P\,p}{l^2}\int_p^l x'^2\,dx\right).$$

Vyčíslíme integrály

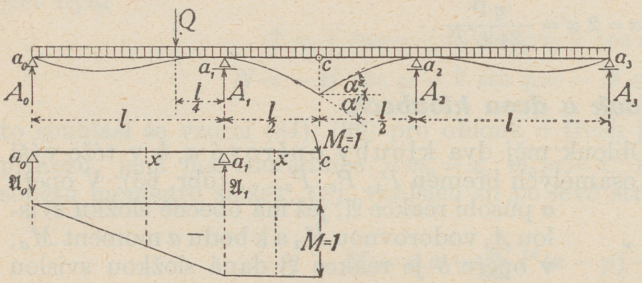
$$\int_0^p x\,x'\,dx = \int_0^p x\,(l-x)\,dx = \frac{p^2}{6}\,(3\,l - 2\,p),$$

$$\int_p^l x'^2\,dx = \int_0^{p'} x'^2\,dx' = \frac{p'^3}{3}$$

a dosazením jich určíme [1])

$$\alpha = \frac{P}{E\,J\,l^2}\left[\frac{p'\,p^2}{6}\,(3\,l - 2\,p) + \frac{p\,p'^3}{3}\right] = \frac{P\,p'\,(l^2 - p'^2)}{6\,E\,J\,l}.$$

Příklad 12. Spojitý nosník stálého průřezu o třech polích rovných, jenž má uprostřed kloub c, je zatížen v celé délce rovnoměrně; stanoviti jest úhel α, o který se vzájemně pootočí obě polovice nosníku v bodě c (obr. 64).



Obr. 64.

Obecně bychom složili úhel α z úhlu α', o který se pootočí nosník vlevo od bodu c, a z úhlu α'', jejž svírá s vodorovnou tečna k ohybové čáře vpravo od bodu c. Oba úhly mají zde smysly protivné a dají v celku úhel

$$\alpha = \alpha' - \alpha''.$$

Poněvadž je tu úplná souměrnost, vyjde $\alpha'' = -\alpha'$ a $\alpha = 2\,\alpha'$.

V tomto případě působí navzájem obě polovice nosniku v bodě c svislou silou $X = 0$, jak bylo dokázáno v příkladě 6. Každá polovice nosníku má se pak jako nosník s přečnívajícím koncem, na nějž působí celkové zatížení $Q = \frac{3}{2}\,q\,l$. U nosníku $a_0\,c$, podepřeného v bodech a_0, a_1, vzniknou v podporách reakce

$$A_0 = \frac{1}{4}\,Q = \frac{3}{8}\,q\,l,\quad A_1 = \frac{3}{4}\,Q = \frac{9}{8}\,q\,l.$$

V části $a_0\,a_1$ je v průřezu x ($\overline{a_0\,x} = x$) moment

$$M = \frac{3\,q\,l\,x}{8} - \frac{q\,x^2}{8} = \frac{q\,x}{8}\,(3\,l - 4\,x)$$

a v části $a_1\,c$ obdržíme v průřezu x ($\overline{a_1\,x} = x$) moment

$$M = -\tfrac{1}{2}\,q\,(\tfrac{1}{2}\,l - x)^2.$$

[1]) Srovnej *Jos. Šolin*, „Základy technické nauky o pružnosti a pevnosti“ (Praha 1904), str. 112.

Úhel α' tečny k ohybové čáře vlevo od bodu c určíme z rovnice (94^b)

$$\alpha' = \frac{\partial \Pi}{\partial M_c} = \int \frac{M}{E J} \frac{\partial M}{\partial M_c} \, dx,$$

jelikož je zde ve všech průřezech $N = 0$. Určujeme-li $\frac{\partial M}{\partial M_c}$, stačí, uvažujeme-li základní nosník, jejž dostaneme, rozdělíme-li daný nosník v bodě c na dva díly. Na levý díl $a_0 c$ dáme působiti v bodě c momentu $M_c = 1$ ve smyslu úhlu α', tedy ve smyslu točení ručiček hodinových. Tento moment vyvodí v podporách a_0, a_1 reakce $\mathfrak{A}_0 = -\frac{1}{l}$, $\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{l}$, jež tvoří dvojici silovou o momentu rovném a protivném momentu $M_c = 1$, poněvadž jsou s tímto momentem v rovnováze. Pak je v průřezu x části $a_0 a_1$ moment

$$\frac{\partial M}{\partial M_c} = -\frac{1}{l} \cdot x,$$

v části $a_1 c$ moment

$$\frac{\partial M}{\partial M_c} = -M_c = -1,$$

jehož hodnota plyne nejkratčeji, jdeme-li s pravé strany. Stanovenými hodnotami vyjde

$$\alpha' = \frac{1}{E J} \int M \frac{\partial M}{\partial M_c} \, dx = -\frac{q}{8 E J l} \int_0^l x^2 (3l - 4x) \, dx + \frac{q}{2 E J} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 dx.$$

Vypočteme integrály

$$\int_0^l x^2 (3l - 4x) \, dx = 3l \cdot \frac{l^3}{3} - 4 \cdot \frac{l^4}{4} = 0,$$

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 dx = \left[\frac{l^2}{4} \cdot x - l \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{l^3}{24};$$

dosazením jich dostaneme

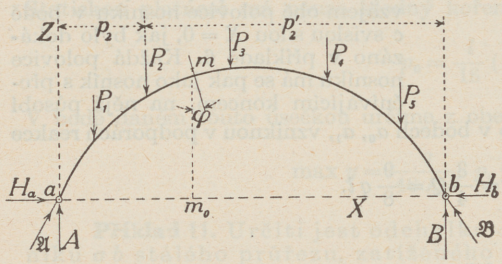
$$\alpha' = \frac{q l^3}{48 E J}.$$

Pak jest

$$\alpha = 2 \alpha' = \frac{q l^3}{24 E J}.$$

b) Oblouk o dvou kloubech.

21. Výminka přetvárná. Oblouk měj dva klouby opěrové a, b v téže výši a budiž zatížen soustavou svislých osamělých břemen P_1, P_2, P_3, ... (obr. 65). V opěře a působí reakce $\mathfrak{A}$, jež má obecně složku svislou A, vodorovnou H_a a k bodu a moment M_a; v opěře b je reakce $\mathfrak{B}$ daná složkou svislou B, vodorovnou — H_b a momentem — M_b k bodu b. Obě reakce jsou v rovnováze s daným zatížením; obecné výminky rovnováhy, vztahující se k silám vodorovným, svislým a k momentům k bodu b, jsou



Obr. 65.

$$H_a - H_b = 0, \quad A + B - \sum_0^l P = 0,$$

$$M_a + A l - \sum_0^l P p' - M_b = 0,$$

znamenáme-li $\overline{a\,b} = l$ a písmenem p' vzdálenost paprsku P od bodu b. Mimo to dávají klouby a, b zvláštní výminky rovnováhy ve tvaru rovnic

$$M_a = 0, \quad M_b = 0,$$

z nichž plyne, že paprsek $\mathfrak{A}$ jde bodem a a paprsek $\mathfrak{B}$ bodem b. Z prvé obecné výminky rovnováhy plyne

$$H_a = H_b;$$

za svislého zatížení jsou tedy vodorovné složky reakcí rovny a pak je i vodorovná složka H výslednice R pro libovolný průřez, t. j. vodorovná síla oblouku, stálá, neboť $H = H_a$. Třetí obecná výminka rovnováhy dá

$$A = \frac{1}{l} \sum_0^l P p';$$

obdobně jest, znamená-li p vzdálenost paprsku P od bodu a,

$$B = \frac{1}{l} \sum_0^l P p.$$

Svislé složky A, B opěrových reakcí jsou tedy staticky určité a rovnají se reakcím prostého nosníku, jenž by měl délku $\overline{a\,b} = l$ a totéž zatížení jako daný nosník obloukový.

Vodorovná síla H je staticky neurčitá a stanoví se z výminky přetvárné, jejíž obecný tvar dává rovnice (91); do ní dosadíme $X = H$. Poměry $\frac{\partial M}{\partial H}$, $\frac{\partial N}{\partial H}$, $\frac{\partial A}{\partial H}$ určíme, vyjádříme-li veličiny M, N, A obecně a derivujeme-li pak podle H.

Pro libovolný průřez, jehož rovina svírá se svislicí úhel φ, má výslednice R vnějších sil po levé straně průřezu vodorovnou složku H a svislou složku

$$V = A - \sum_0^x P = \mathfrak{T},$$

je-li $\mathfrak{T}$ posouvající síla prostého nosníku a znamenáme-li $\overline{a\,m_0} = x$. Podle vzorců (71) jest nyní

$$T = V \cos\varphi - H \sin\varphi = \mathfrak{T} \cos\varphi - H \sin\varphi,$$
$$N = -H \cos\varphi - V \sin\varphi = -H \cos\varphi - \mathfrak{T} \sin\varphi;$$

to souhlasí se vzorci (84), (86) pro oblouk o třech kloubech. K libovolnému bodu m průřezu, jenž má souřadnice $\overline{a\,m_0} = x$, $\overline{m_0\,m} = z$, má výslednice R moment rovný součtu momentů složek, t. j. vnějších sil po levé straně průřezu, tedy

$$M = A\,x - \sum_0^x P\,(x - p) - H\,z.$$

Svislé síly vnější jsou tytéž jako u prostého nosníku délky $\overline{a\,b}$ a téhož zatížení jako daný nosník obloukový; pak lze označiti

$$A\,x - \sum_0^x P\,(x - p) = \mathfrak{M}$$

jakožto ohybový moment prostého nosníku. Obdržíme tím jako při oblouku o třech kloubech vzorec (79)

$$M = \mathfrak{M} - H\,z.$$

Ve výmince přetvárné jsou ovšem ohybové momenty, vztažené k těžištím průřezů; bude v ní tedy znamenati z pořadnici střednice.

Z odvozených obecných rovnic plyne

$$\frac{\partial M}{\partial H} = -z, \quad \frac{\partial N}{\partial H} = -\cos\varphi.$$

Na svislé složky reakcí nemá vodorovná síla H vlivu. Vodorovné složky reakcí jsou $H_a = H_b = H$; pokládáme-li bod a za pevný, nastoupí $\frac{\partial H_b}{\partial H} = 1$ místo $\frac{\partial A}{\partial H}$. Popuštění opěr ve vodorovném směru ab znamenejme Δl a berme je za kladné, zvětší-li se rozpětí; pak připadá, je-li bod a pevný, celé popuštění Δl do bodu b a nahradí tu obecné označení Δa. Z obecné přetvárné výminky (91) obdržíme pro oblouk o dvou kloubech rovnici

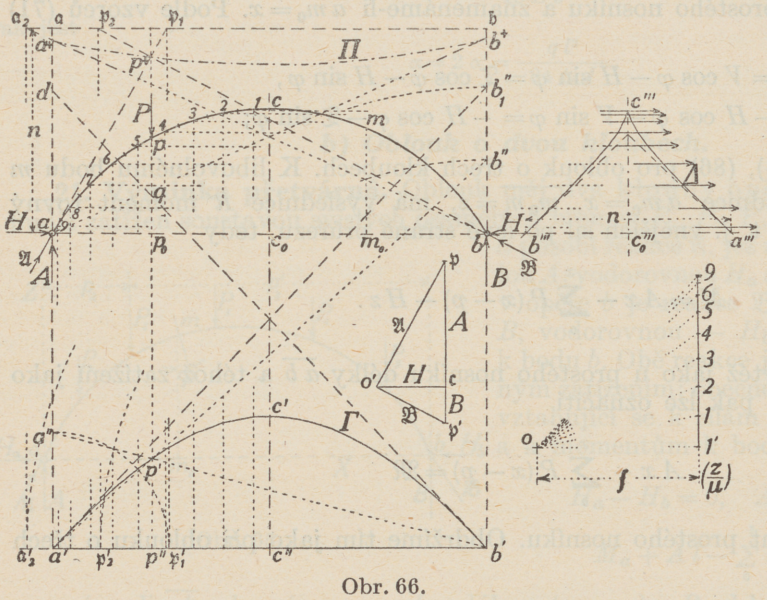
$$-\int_0^l \frac{M}{EJ} z\,ds - \int_0^l \left(\frac{N}{EU} + \delta\varepsilon\right) ds\cos\varphi + 1 \cdot \Delta l = 0;$$

jelikož je $ds\cos\varphi = dx$, vyjde konečně přetvárná výminka pro oblouk o dvou kloubech ve tvaru

$$\int_0^l \frac{M z\,ds}{EJ} + \int_0^l \left(\frac{N}{EU} + \delta\varepsilon\right) dx = \Delta l. \tag{96}$$

Na oblouk o dvou kloubech má tedy mimo zatížení účinek změna teploty a popuštění Δl opěr ve směru vodorovném; toto popuštění buď odhadneme nebo vyšetříme z přetvoření opěr, u provedené konstrukce je přímo změříme. Odvozená výminka přetvárná platí obecně pro nosník plnostěnný jakéhokoli tvaru, podepřený pevně v koncových bodech a, b.[1])

22. Vyšší oblouk stálého průřezu za svislého zatížení. *α) Vodorovná síla.* Vyšší oblouk o dvou opěrových kloubech a, b v rovné výši budiž zatížen svislým osamělým břemenem P v bodě p (obr. 66). Ve výminke přetvárné (96) jsou vedle změny teploty a popuštění opěr Δl členy, jež obsahují moment ohybový M a normálnou sílu N. Na přetvoření oblouku má podstatný vliv hlavně moment ohybový, jenž mění zakřivení střednice. Normálná síla vyvozuje zkrácení střednice a má patrnější účinek jen při oblouku poměrně nízkém, kde má N velké hodnoty. U oblouků vyšších lze zanedbati zkrácení střednice proti změně její křivosti, lze tedy vynechati proti ostatním členům



Obr. 66.

[1]) Přesněji řeší obloukové nosníky, dbaje také účinku zakřivení střednice na napětí, *Jos. Šolín* v „Theorii plnostěnných nosníků obloukových" a *Jar. Gröger* v pojednání „Grafické vyšetřování tlakových čar u oblouků a kleneb na rubu volných" (Technický obzor r. 1910, str. 81 a d.).

$\frac{N}{EU}$, ježto je tu účinek normálné síly nepatrný. Předpokládejme dále, že má oblouk stálý průřez a že je z látky stejnorodé; také změnu teploty δ berme stejnou ve všech průřezech. Pak lze vytknouti veličiny $E, J, \delta, \varepsilon$ jakožto stálé ze znamének integračních a násobením EJ vyjde z rovnice (96)

$$\int_0^l M z \, ds + EJ \, \delta \varepsilon \int_0^l dx = EJ \, \Delta l$$

nebo, poněvadž $\int_0^l dx = l$,

$$\int_0^l M z \, ds = EJ \, (\Delta l - \delta \varepsilon l) . \tag{97}$$

Tím jest odvozena přetvárná výminka pro vyšší oblouk o dvou kloubech jakéhokoli tvaru.

V libovolném bodě střednice m vpravo od břemene, jenž má k počátku a souřadnice $\overline{a m_0} = x$, $\overline{m_0 m} = z$, vychází součtem momentů sil A, H, P nalevo působících

$$M = A x - H z - P (x - p) ,$$

je-li $\overline{a p_0} = p$; poslední člen platí jen vpravo od břemene P, vlevo od břemene zůstanou v platnosti jen prvé dva členy na pravé straně vzorce. Dosazením za M do výminky přetvárné vyjde

$$A \int_0^l x z \, ds - H \int_0^l z^2 \, ds - P \int_p^l (x - p) z \, ds = EJ \, (\Delta l - \delta \varepsilon l) .$$

Jako u prostého nosníku jest $A = P \frac{p'}{l}$, znamenáme-li $\overline{p_0 b} = p'$; z poslední rovnice vypočteme

$$H = \frac{P \left[\frac{p'}{l} \int_0^l x z \, ds - \int_p^l (x - p) z \, ds \right] + EJ \, (\delta \varepsilon l - \Delta l)}{\int_0^l z^2 \, ds} . \tag{98a}$$

Počtem nemůžeme řešiti dále, neznáme-li tvaru střednice, daného rovnicí $z = f(x)$. Graficky lze však při libovolném tvaru střednice řešiti až do konce. Tu nahradíme prvek střednice ds obloučkem σ velmi malým, avšak konečným; místo integrálů píšeme pak součty. Je-li délka obloučku σ stálá, lze ji ze znamének součtových vytknouti a vyjde dělením čitatele i jmenovatele délkou σ

$$H = \frac{P \left[\frac{p'}{l} \sum_0^l x z - \sum_p^l (x - p) z \right] + \frac{EJ}{\sigma} (\delta \varepsilon l - \Delta l)}{\sum_0^l z^2} . \tag{98b}$$

Součty v tomto vzorci snadno sestrojíme. Přenášejme na střednici oblouku, jež budiž souměrná ke svislici středu c, od tohoto bodu dílky tak malé, abychom je mohli pokládati za polovici délky obloučků, na něž střednici dělíme; v bodech lichých jsou těžiště obloučků, v bodech sudých jejich meze. U bodu a dostaneme pravidlem menší dílek σ', jehož těžiště zvlášť určíme rozpůlením. V těžištích obloučků stálé délky σ dejme pak působiti svislým silám, jež mají určovací úseky z/μ, znamená-li z pořadnici těžiště obloučku a μ příhodné číslo celé; dělení pořadnic z číslem μ provedlo by se snadno redukčním úhlem. V těžišti posledního obloučku délky σ' myslíme si sílu, jejíž určovací

úsek vyšetříme. Prvý integrál v čitateli vzorce (98ª) nahradíme, omezíme-li se na polovici oblouku, součtem

$$\sum_0^c x\,z\,\sigma = x_1 z_1 \sigma + x_2 z_2 \sigma + x_3 z_3 \sigma + \ldots + x_n z_n \sigma' =$$
$$= \mu\,\sigma\left(x_1\frac{z_1}{\mu} + x_2\frac{z_2}{\mu} + x_3\frac{z_3}{\mu} + \ldots + x_n\frac{z_n}{\mu}\frac{\sigma'}{\sigma}\right);$$

podle toho zvolíme u posledního obloučku místo $\frac{z}{\mu}$ za určovací úsek $\frac{z_n}{\mu}\cdot\frac{\sigma'}{\sigma}$. Svislé síly $\frac{z}{\mu}$ nechť směřují dolů, aby měly k bodu a kladné momenty. Součiny $x_1\cdot\frac{z_1}{\mu}$, $x_2\cdot\frac{z_2}{\mu}$, ... znamenají statické momenty svislých sil z/μ ke svislici bodu a; určí se výslednicovou čarou, kterou rýsujeme z pólu o, zvoleného v libovolné vzdálenosti f od čáry složkové na vodorovnici středu I' složkové čáry pro celý oblouk. Výslednicová čára Γ je pak pro celý oblouk souměrná ke svislici středu oblouku c. Její krajní strany omezí na svislici bodu a úsek $\overline{a'd}$, jenž jest určovacím úsekem součtu statických momentů sil z/μ pro celý oblouk ke svislici bodu a, tedy

$$\sum_0^l x\frac{z}{\mu} = f\cdot\overline{a'd} \quad \text{a} \quad \sum_0^l x\,z = \mu\cdot\sum_0^l x\frac{z}{\mu} = \mu f\cdot\overline{a'd}.$$

Je jasné, že je výhodnější nanášeti stejné dílky σ od bodu c k a než naopak. Neboť jednak je u bodu a malá pořadnice z a tedy možná chyba v určovacím úseku síly $\frac{z}{\mu}\cdot\frac{\sigma'}{\sigma}$ je nepatrná, jednak také tato chyba jen nepatrně mění prvou stranu výslednicové čáry; chyba u bodu c měla by však značný účinek, neboť by posunula pól o do nesprávné polohy a tím by změnila celou čáru výslednicovou. Kdyby byl oblouk nesouměrný, nanášeli bychom dílky σ na celý oblouk od bodu a až k bodu b, kde bychom dostali obecně jiný dílek σ'; jinak by byl postup v podstatě týž jako u oblouku souměrného.

Dále máme určiti

$$\sum_p^l (x-p)\,z = \mu\sum_p^l (x-p)\frac{z}{\mu};$$

výraz $\sum_p^l (x-p)\frac{z}{\mu}$ znamená součet statických momentů k paprsku P sil z/μ, jež jsou vpravo od P. Na paprsku P omezí výslednicová čára Γ a její prodloužená poslední strana určovací úsek $\overline{p'q}$ tohoto součtu, jenž má pak hodnotu

$$\sum_p^l (x-p)\frac{z}{\mu} = f\cdot\overline{p'q}, \quad \text{i jest} \quad \sum_p^l (x-p)\,z = \mu f\cdot\overline{p'q}.$$

Do výslednicové čáry Γ měli bychom vlastně vepisovati křivku, která se dotýká stran rýsované lomené čáry na svislicích mezí obloučků; jsou-li však obloučky σ dosti malé, není toho třeba, poněvadž se pak lomená čára od vepsané křivky téměř neliší.

Spojnice $a'b'$ a poslední strana $b'd$ čáry Γ omezí v paprsku P pořadnici, pro niž plyne z podobnosti

$$\overline{p'q} = \overline{a'd}\cdot\frac{\overline{p''b'}}{\overline{a'b'}} = \overline{a'd}\cdot\frac{p'}{l}.$$

Pak jest

$$\frac{p'}{l}\sum_0^l x\,z - \sum_p^l (x-p)\,z = \mu f\left(\overline{a'd}\cdot\frac{p'}{l} - \overline{p'q}\right) = \mu f\left(\overline{p'q} - \overline{p'q}\right) = \mu f m,$$

poznamenáme-li pořadnici $\overline{p' p'} = m$.

Konečně určíme

$$\sum_0^l z^2 = \mu \sum_0^l z \frac{z}{\mu}.$$

Síly z/μ, jež působí v těžištích obloučků vodorovně, mají od spojnice $a\,b$ vzdálenosti z; je tedy $\sum_0^l z \frac{z}{\mu}$ součet statických momentů všech těchto sil vodorovných k ose $a\,b$. Tento součet určíme zase výslednicovou čarou k vodorovným silám z/μ, působícím v těžištích obloučků. K rýsování této čáry Δ můžeme užíti složkové čáry svislé, vedeme-li strany čáry Δ místo rovnoběžně s pólovými paprsky kolmo k nim. Volíme-li týž pól o jako pro čáru Γ, je při souměrném oblouku čára $\Delta \equiv a''' c''' b'''$ souměrná ke svislici bodu c'''; její krajní strany omezí na ose $a\,b$ úsek $\overline{a''' v'''} = n$, jejž berme prostě. Tím jsme určili

$$\sum_0^l z \frac{z}{\mu} = f n \quad \text{a} \quad \sum_0^l z^2 = \mu f n.$$

Dosazením všech stanovených hodnot do vzorce (98^b) vyjde

$$H = \frac{P \cdot \mu f m + \frac{EJ}{\sigma}(\delta \varepsilon l - \Delta l)}{\mu f n} = P \frac{m}{n} + \frac{EJ}{\mu f n \sigma}(\delta \varepsilon l - \Delta l). \tag{99}$$

Úseky f, n znamenají délky; odměřovali bychom je v měřidle hlavního obrazce.

V posledním vzorci máme jednak účinek břemene P, jež by samo dalo vodorovnou sílu

$$H = P \frac{m}{n}, \tag{99^a}$$

jednak účinek změny teploty

$$H_t = \frac{EJ\,\delta \varepsilon l}{\mu f n \sigma} \tag{99^b}$$

a účinek vodorovného popuštění opěr

$$H_{(a)} = -\frac{EJ \cdot \Delta l}{\mu f n \sigma}. \tag{99^c}$$

Každý z těchto účinků lze řešiti zvláště a výsledky pak sčítati. Rozdíl teplot bereme u konstrukcí ocelových a dřevěných jako u soustav prutových $\delta = \pm 35^0$ C. U konstrukcí zděných (kamenných, cihelných a betonových) nedostupuje tento rozdíl pro špatnou vodivost tepelnou a velkou hmotu takových hodnot; postačí tu bráti $\delta = \pm 15^0$ C. Účinek změny teploty a popuštění opěr pokládejme tím za vyřízeny.

Samotné břímě P vyvodí sílu H danou vzorcem (99^a). Pohybuje-li se břímě P po nosníku, mění se pouze pořadnice m čáry Γ vztažené k tětivě $a'\,b'$ a úměrně k pořadnici m se mění síla H. Je tedy čára Γ příčinkovou čarou vodorovné síly.

β) ***Sečnice.*** Svislé složky reakcí A, B se určí jako pro nosník prostý, vodorovná síla H je pak dána příčinkovou čarou podle vzorce (99^a). Složkami svislými i vodorovnými jsou dány výslední reakce $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, jejichž paprsky jdou body a, b a sekou se na paprsku břemene P v bodě p^+, jelikož je rovnováha; měřickým místem bodu p^+ je sečnice Π. Kdybychom znali paprsky reakcí $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, sestrojili bychom jejich úseky v obrazci složkovém, jenž obsahuje úsek $P = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'}$ a úseky $\mathfrak{A} \# \overline{o'\,\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{B} \# \overline{\mathfrak{p}'\,o'}$; vodo-

rovnice $o'c$ určí úseky složek $H = \overline{o'c}$, $A = \overline{c\mathfrak{p}}$, $B = \overline{\mathfrak{p}'c}$. Trojúhelníky $o'c\mathfrak{p}$, $a\,p_0\,p^+$ mají strany rovnoběžné i jsou podobny; pak jest

$$\eta = \overline{p_0\,p^+} = \overline{a\,p_0} \cdot \frac{\overline{c\mathfrak{p}}}{\overline{o'c}} = \frac{A\,p}{H}.$$

Dosazením $A = P\frac{p'}{l}$ vyjde obecná rovnice sečnice pro oblouk o dvou kloubech

$$\eta = \frac{P\,p\,p'}{H\,l}. \tag{100}$$

Graficky jsme určili pro vodorovnou sílu podle vzorce (99^a) hodnotu $H = P\frac{m}{n}$. Dosadíme-li ji do vzorce (100), dostaneme

$$\eta = \frac{n\,p\,p'}{l\,m}. \tag{100^a}$$

Tuto pořadnici sestrojíme (obr. 66), vedeme-li spojnici $b'p'$, jež stanoví pořadnici

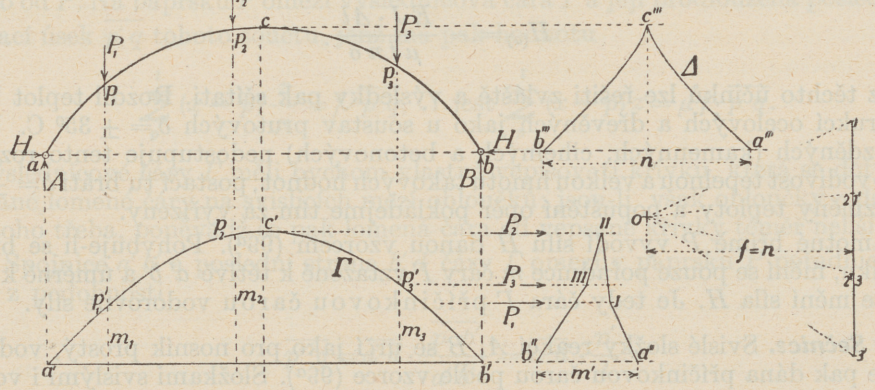
$$\overline{a'a''} = \overline{p''p'} \cdot \frac{\overline{a'b'}}{\overline{p''b'}} = m\frac{l}{p'}.$$

Přeneseme dále $\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}} = \overline{\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}} = n$, $\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}_1} = \overline{a'\mathfrak{p}'_1} = \overline{a'a''}$ a spojíme bod $\mathfrak{p}_1$ s bodem a, čímž určíme bod p^+. Neboť jest $\triangle\, a\,p_0\,p^+ \sim \triangle\, \mathfrak{p}_1\,\mathfrak{a}\,a$, tedy

$$\overline{p_0\,p^+} = \overline{a\,p_0} \cdot \frac{\overline{a\,\mathfrak{a}}}{\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}_1}} = p \cdot \frac{n}{\overline{a'a''}} = \frac{n\,p\,p'}{l\,m} = \eta;$$

pak znamená spojnice $a\,\mathfrak{p}_1$ paprsek $\mathfrak{A}$.

Bod p^+ stanovíme též, vyměníme-li v obrazci levou a pravou stranu. Spojnice $a'p'$ určuje úsek $\overline{b'b''} = \overline{\mathfrak{p}'_2\,b'} = \overline{\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{b}}$ a $\mathfrak{p}_2 b$ je paprsek $\mathfrak{B}$, jenž jde též bodem p^+. Tak určíme jednotlivé body sečnice II. Také bod a^+ sestrojíme podobně. Tu spojíme bod a' s nekonečně blízkým bodem čáry Γ, t. j. prodloužíme první stranu čáry Γ (tečnu v bodě a') a přeneseme úsek $\overline{b'b'_1} = \overline{\mathfrak{a}'_2\,b'} = \overline{\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}}$; přímka $\mathfrak{a}_2 b$ určuje bod a^+. Přímka $\mathfrak{a}_2 b$ platí i pro nekonečně blízký bod sečnice, neboť přímka $a'b''_1$ obsahuje též k bodu a' nekonečně blízký bod čáry Γ; je tedy přímka $\mathfrak{a}_2 b$ tečnou sečnice II v bodě a^+. Je-li oblouk souměrný ke svislici bodu c, je k ní souměrná i sečnice II; tečna sečnice v bodě b^+ jde ovšem bodem a.



Obr. 67.

*γ) **Stanovení reakcí pro různá zatížení.*** Svislé složky reakcí určíme za jakéhokoli zatížení jako reakce prostého nosníku. Vodorovnou sílu stanovíme vždy z příčin-

kové čáry Γ, kterou sestrojíme, jak bylo odvozeno; potřebujeme ovšem vždy také úsek n, jejž stanoví čára Δ.

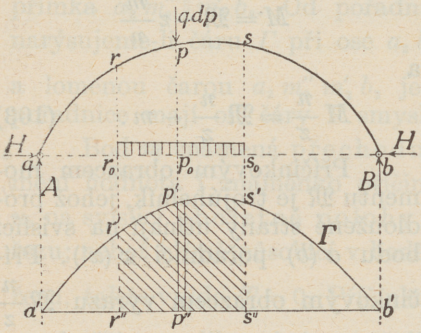
Působí-li na oblouk o dvou kloubech soustava svislých břemen osamělých (obr. 67), určíme vodorovnou sílu pro jednotlivá břemena a výsledky sečteme. Podle vzorce (99^a) dá břímě P_1 sílu $H_1 = P_1 \frac{m_1}{n}$, břímě P_2 sílu $H_2 = P_2 \frac{m_2}{n}$, břímě P_3 sílu $H_3 = P_3 \frac{m_3}{n}$, ..., jsou-li m_1, m_2, m_3 pořadnice čáry Γ v paprscích břemen. Všechna břemena dohromady vyvodí tedy vodorovnou sílu

$$H = \frac{1}{n}(P_1 m_1 + P_2 m_2 + P_3 m_3) = \frac{1}{n} \Sigma P m . \qquad (101^a)$$

Výraz $\Sigma P m$ určíme graficky jako součet statických momentů sil P na ramenech m čarou výslednicovou. Silám P_1, P_2, P_3 dáme působiti vodorovně v koncových bodech p'_1, p'_2, p'_3 pořadnic m_1, m_2, m_3; k vodorovné ose $a'b'$ mají síly P ramena m, i jde o součet statických momentů těchto vodorovných sil P k ose $a'b'$. K těmto silám sestrojíme pólovou vzdáleností f výslednicovou čáru $a''\ I\ II\ III\ b''$, jejíž krajní strany omezí na ose $a'b'$ úsek $\overline{a''b''} = m'$; je-li složková čára svislá, vedeme ovšem strany výslednicové čáry kolmo k příslušným paprskům pólovým. Pak jest

$$\Sigma P m = f m' \quad \text{a} \quad H = f \frac{m'}{n} ;$$

úsek síly H bychom sestrojili podle toho snadno. Zvolíme-li $f = n$, vyjde přímo $H = m'$.



Obr. 68.

Částečné zatížení rovnoměrné, jež je rozděleno po vodorovné délce $\overline{r_0 s_0}$ (obr. 68), lze pokládati za soustavu osamělých břemen nekonečně malých a nekonečně blízkých. Úsečce $\mathrm{d}p$ u bodu p_0 odpovídá elementární břímě $q\,\mathrm{d}p$, jež vyvodí podle vzorce (99^a) vodorovnou sílu

$$\mathrm{d}H = q\,\mathrm{d}p \cdot \frac{m}{n} ;$$

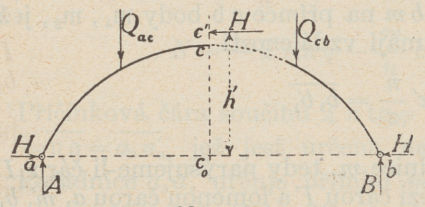
uvedené zatížení rovnoměrné dá pak sílu

$$H = \frac{q}{n} \int_r^s m\,\mathrm{d}p = \frac{a}{n}\,\mathfrak{U}_{rs}, \qquad (101^b)$$

kde

$$\mathfrak{U}_{rs} = \int_r^s m\,\mathrm{d}p = \text{pl. } r''\,r'\,s'\,s''$$

znamená obsah obrazce omezeného čarou Γ, osou $a'b'$ a svislicemi mezí zatížení r, s.



Obr. 69.

Libovolné zatížení souměrné dá na každou polovici oblouku stejnou výslednici $Q_{ac} = Q_{cb}$ (obr. 69) a vyvodí v opěrách a, b svislé reakce $A = B = Q_{ac}$. Ve vrcholovém průřezu c dostaneme výslednici R_c, jež má vodorovnou složku $H_c = H$ a svislou složku $V_c = A - Q_{ac} = 0$. Působí tedy ve vrcholu na př. pravá polovice oblouku v levou pouze vodorovnou silou H ve výši h' nad spojnicí $a\,b$. Tato síla je v rovnováze se zatížením Q_{ac} levé polovice a oběma složkami A, H levé reakce. Momentová výminka rovnováhy k bodu a jest

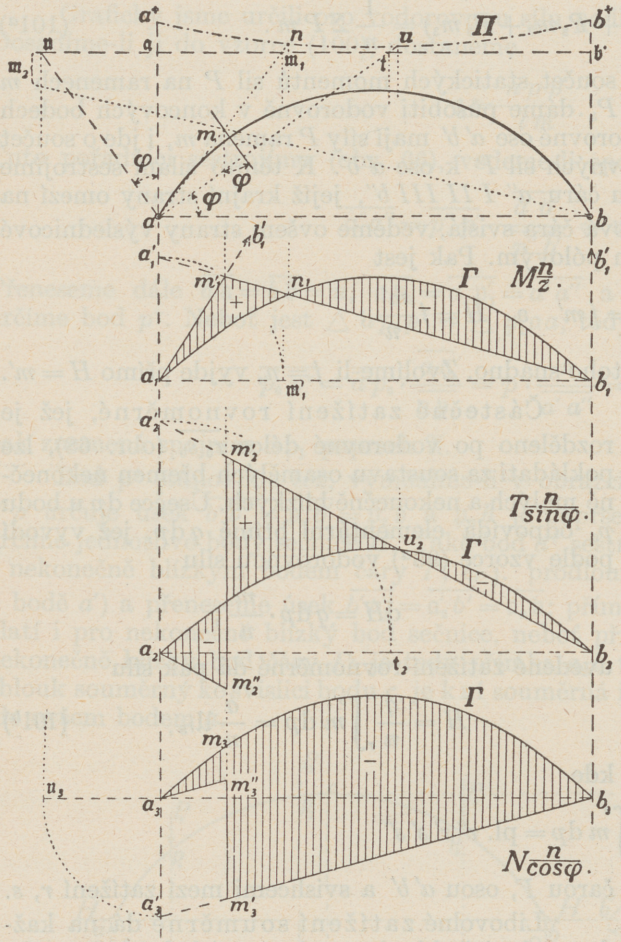
$$(Q_{ac})_a - H\,h' = 0 ,$$

znamená-li $(Q_{ac})_a$ statický moment zatížení Q_{ac} k bodu a; z toho vychází

$$h' = \frac{(Q_{ac})_a}{H}, \tag{102}$$

což určíme snadno počtem nebo graficky.

δ) ***Příčinkové čáry momentu, síly posouvající a síly normálné.*** Moment vnějších sil po jedné straně určitého průřezu vzhledem k libovolnému bodu m toho průřezu je dán vzorcem (79)



Obr. 70.

$$M = \mathfrak{M} - Hz,$$

platným pro libovolné zatížení, tedy pro jakoukoli polohu pohyblivého břemene P; podle tohoto vzorce souvisí tedy příčinkové pořadnice veličin M, $\mathfrak{M}$ a H. Příčinkové čáry určujeme pro pohyblivé břímě $P = 1$; toto břímě působící v libovolné poloze vyvodí podle vzorce $(9\mathfrak{L}^a)$ vodorovnou sílu

$$H = 1 \cdot \frac{m}{n};$$

pak jest

$$M = \mathfrak{M} - z\frac{m}{n}$$

a

$$M\frac{n}{z} = \mathfrak{M}\frac{n}{z} - m. \tag{103}$$

Příčinkovým obrazcem momentu $\mathfrak{M}$ je trojúhelník, jehož prodloužené strany utínají na svislici bodu a (b) pořadnici x (x'). Příčinkovým obrazcem výrazu $\mathfrak{M}\frac{n}{z}$ je tedy také trojúhelník $a_1 m'_1 b_1$ (obr. 70), jehož prodloužené strany dají na svislici bodu a (b) pořadnici $x\frac{n}{z}$ $\left(x'\frac{n}{z}\right)$. Přeneseme-li $\overline{\mathfrak{a}\,a} = \overline{\mathfrak{b}\,b} = n$, stanoví spojnice $a\,m$, $b\,m$ na přímce $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ body $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, jež mají vzdálenosti

$$\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{m}_1} = x\frac{n}{z} = \overline{a_1 a'_1}, \quad \overline{\mathfrak{m}_2\,\mathfrak{b}} = x'\frac{n}{z} = \overline{b_1 b'_1}.$$

Odečteme-li od pořadnic trojúhelníka $a_1 m'_1 b_1$ pořadnice m, tedy narýsujeme-li čáru Γ při ose $a_1 b_1$ na touž stranu jako čáru $a_1 m'_1 b_1$, je mezi čarou Γ a lomenou čarou $a_1 m'_1 b_1$ příčinkový obrazec součinu $M\frac{n}{z}$; kladné pořadnice směřují od čáry Γ ve smyslu $a_1 a'_1$. Stálého činitele n/z odstraníme, násobíme-li výsledky, odvozené z příčinkového obrazce $M\frac{n}{z}$, poměrem z/n. Příčinkové pořadnice v obrazci $M\frac{n}{z}$ znamenají délky;

měřili bychom je jako pořadnice m na témž měřidle jako úsek n; jinak může býti toto měřidlo libovolné.

Čára Γ seče čáru $a_1 m'_1 b_1$ v bodě n_1 na svislici obojetné polohy břemene n. V dílu $a\,n$ mají pak příčinkové pořadnice momentu znaménko kladné, v dílu $n\,b$ znaménko záporné. Obojetnou polohu n dává přímo na sečnici Π spojnice $a\,m$, což může býti kontrolou. Neboť břímě působící v bodě n vyvodí levou reakci v paprsku $a\,n$ jdoucím bodem m; poněvadž je tu levá reakce jedinou vnější silou po levé straně bodu m, je k tomuto bodu moment $M = 0$.

Posouvající síla T průřezu, jehož rovina svírá se svislicí úhel φ, je dána jako u oblouku o třech kloubech vzorcem (84)

$$T = \mathfrak{T} \cos\varphi - H \sin\varphi.$$

Při jediném břemeni $P = 1$ dosadíme $H = 1 \cdot \frac{m}{n}$ a dostaneme

$$T = \mathfrak{T} \cos\varphi - \frac{m}{n} \sin\varphi \quad \text{nebo} \quad T \frac{n}{\sin\varphi} = \mathfrak{T} \frac{n}{\operatorname{tg}\varphi} - m. \tag{104}$$

Příčinková čára $\mathfrak{T}$ se skládá ze dvou rovnoběžek o svislé vzdálenosti $P = 1$. Příčinkovou čarou $\mathfrak{T} \frac{n}{\operatorname{tg}\varphi}$ je podobně (obr. 70) vpravo od svislice bodu m, ve kterém se přenáší zatížení do průřezu, přímka $m'_2 b_2$ stanovená pořadnicí $\overline{a_2 a'_2} = \frac{n}{\operatorname{tg}\varphi} = \overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{t}}$, je-li přímka $a\,t$ kolmá k průřezu; vlevo od svislice bodu m je příčinkovou čarou téhož výrazu přímka $a_2 m''_2 \parallel m'_2 b_2$. Od pořadnic lomené čáry $a_2 m''_2 m'_2 b_2$ odečteme pořadnice m, narýsujeme-li čáru Γ při ose $a_2 b_2$ ve směru $a_2 a'_2$ kladných pořadnic. Mezi čarou Γ a lomenou čarou $a_2 m''_2 m'_2 b_2$ je pak příčinkový obrazec výrazu $T \frac{n}{\sin\varphi}$; kladné pořadnice mají od čáry Γ smysl $a_2 a'_2$.

Bod m znamená přechodnou polohu břemene, jelikož se v jeho svislici náhle mění hodnota i znaménko příčinkové pořadnice. Čára Γ seče přímku $m'_2 b_2$ v bodě u_2 na svislici obojetné polohy u, kterou stanoví na sečnici přímka $a\,t$ kolmá k průřezu; neboť břímě působící v bodě u vyvodí levou reakci v paprsku $a\,u$ kolmém k průřezu, takže vyjde $T = 0$. Příčinkové pořadnice výrazu $T \frac{n}{\sin\varphi}$ znamenají zase délky a odměří se v libovolném měřidle, v němž se měří též úsek n.

Normálná síla N průřezu, jehož rovina se odchyluje od svislice o úhel φ, plyne ze vzorce (86)

$$N = -H \cos\varphi - \mathfrak{T} \sin\varphi.$$

Dosazením $H = 1 \cdot \frac{m}{n}$ pro břímě $P = 1$ plyne

$$N = -\mathfrak{T} \sin\varphi - \frac{m}{n} \cos\varphi \quad \text{nebo} \quad N \frac{n}{\cos\varphi} = -\mathfrak{T}\, n \operatorname{tg}\varphi - m. \tag{105}$$

Příčinková čára součinu $\mathfrak{T}\, n \operatorname{tg}\varphi$ má týž tvar jako čára $\mathfrak{T}$; je dána pořadnicí $n \operatorname{tg}\varphi = \overline{\mathfrak{u}\,\mathfrak{a}} = \overline{a_3 a'_3}$, jež jest určena na přímce $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ přímkou $a\,u$ rovnoběžnou s průřezem. Pořadnice $\overline{a_3 a'_3}$ určuje přímku $m'_3 b_3$, jež platí vpravo od svislice bodu m, do kterého se v průřezu přenáší zatížení; vlevo od svislice bodu m je příčinkovou čarou přímka $a_3 m''_3 \parallel m'_3 b_3$. Pořadnice m přeneseme, abychom vyhověli vzorci (105), ve smyslu protivném smyslu $a_3 a'_3$; čáru Γ narýsujeme tedy na protivné straně osy $a_3 b_3$ než úsek $a_3 a'_3$. Mezi čarou Γ a lomenou čarou $a_3 m''_3 m'_3 b_3$ je pak příčinkový obrazec $N \frac{n}{\cos\varphi}$,

jehož pořadnice jsou ve smyslu $a_3 a'_3$ od čáry Γ záporné. Příčinkové pořadnice $N \frac{n}{\cos\varphi}$ znamenají délky; lze je měřiti v libovolném měřidle, v němž se však měří pak i úsek n.

Znamenáme-li η_m, η_t, η_n pořadnice stanovených příčinkových obrazců výrazů $M\frac{n}{z}$, $T\frac{n}{\sin\varphi}$, $N\frac{n}{\cos\varphi}$, vyjde při soustavě osamělých břemen svislých

$$M\frac{n}{z} = \Sigma P\,\eta_m,\quad T\frac{n}{\sin\varphi} = \Sigma P\,\eta_t,\quad N\frac{n}{\cos\varphi} = \Sigma P\,\eta_n,$$

tedy

$$M = \frac{z}{n}\Sigma P\,\eta_m,\quad T = \frac{\sin\varphi}{n}\Sigma P\,\eta_t,\quad N = \frac{\cos\varphi}{n}\Sigma P\,\eta_n. \tag{106}$$

Obdobně dá částečné zatížení rovnoměrné

$$M = \frac{z}{n} q\,\mathfrak{U}_m,\quad T = \frac{\sin\varphi}{n} q\,\mathfrak{U}_t,\quad N = \frac{\cos\varphi}{n} q\,\mathfrak{U}_n, \tag{107}$$

znamená-li $\mathfrak{U}_m$ ($\mathfrak{U}_t$, $\mathfrak{U}_n$) obsah příčinkového obrazce $M\frac{n}{z}\left(T\frac{n}{\sin\varphi},\ N\frac{n}{\cos\varphi}\right)$ v mezích zatížení. Jde-li o zatížení pohyblivé, stanovíme z příčinkových obrazců známým způsobem nejúčinnější zatížení a vypočteme pak maximum nebo minimum veličiny M (T, N) podle vzorců (106), jde-li o pohyblivou soustavu břemen, nebo podle vzorců (107), jde-li o pohyblivé zatížení rovnoměrné.

23. Vyšší oblouk proměnného průřezu. Z obecné přetvárné výminky (96) pro oblouk o dvou kloubech obdržíme, vynecháme-li účinek normálné síly, rovnici

$$\int_0^l \frac{M z\,\mathrm{d}s}{E J} + \delta\varepsilon l = \Delta l.$$

Násobme tuto rovnici $E J_0$, znamená-li J_0 zvolenou (na př. střední) hodnotu momentu setrvačnosti; vyjde

$$\int_0^l M z \frac{J_0}{J}\,\mathrm{d}s = E J_0 (\Delta l - \delta\varepsilon l).$$

U oblouku stálého průřezu nanášeli jsme na střednici stejné obloučky σ. Zde bychom mohli řešiti stejně, můžeme však také výhodně nanášeti stejné dílky na vodorovnici; nahraďme proto $\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}x}{\cos\varphi}$ a poznamenejme

$$\frac{z}{\cos\varphi}\frac{J_0}{J} = z'. \tag{108}$$

Výminka přetvárná nabude tvaru

$$\int_0^l M z'\,\mathrm{d}x = E J_0 (\Delta l - \delta\varepsilon l). \tag{109}$$

Uvažujme nyní jediné svislé břímě P v bodě p (podle obr. 66), jež dá jako při oblouku stálého průřezu v bodě m moment

$$M = A x - H z - P(x - p);$$

poslední člen platí pouze vpravo od břemene. Dosazením tohoto výrazu do rovnice (109) určíme vzorec obdobný vzorci (98^a); zde píšeme z' místo z (ve jmenovateli zůstane jedno z, jež pochází z M), $\mathrm{d}x$ místo $\mathrm{d}s$ a J_0 místo J i dostaneme

$$H = \frac{P\left[\frac{p'}{l}\int_0^l x z'\,dx - \int_p^l (x-p) z'\,dx\right] + E J_0 (\delta \varepsilon l - \Delta l)}{\int_0^l z z'\,dx}. \qquad (110^a)$$

Přibližně nahradíme dx stálým malým dílkem a a dospějeme ke vzorci

$$H = \frac{P\left[\frac{p'}{l}\sum_0^l x z' - \sum_p^l (x-p) z'\right] + \frac{E J_0}{a}(\delta \varepsilon l - \Delta l)}{\sum_0^l z z'}. \qquad (110^b)$$

Graficky řešíme H podle tohoto vzorce v podstatě jako při oblouku stálého průřezu (viz obr. 66). Přenášíme na vodorovnici $a\,b$ stejné dílky a a v těžištích obloučků, jež odpovídají těmto dílkům, dáme působiti svislým silám, jimž přisoudíme určovací úseky z'/μ; z' určíme podle vzorce (108) počtem nebo graficky. Ke svislým silám z'/μ sestrojíme pólovou vzdáleností f výslednicovou čáru Γ, kterou vztahujeme k tětivě spojují průsečíky a', b' čáry Γ se svislicemi bodů a, b; na paprsku P omezí strana $a'\,b'$ a čára Γ úsek m, jímž určíme

$$\frac{p'}{l}\sum_0^l x z' - \sum_p^l (x-p) z' = \mu f m.$$

K týmž silám z'/μ působícím vodorovně v těžištích obloučků (tedy ve vzdálenostech z od osy $a\,b$) narýsujeme opět pólovou vzdáleností f výslednicovou čáru Δ; její krajní strany omezí na ose $a\,b$ úsek n a pak

$$\sum_0^l z z' = \mu f n.$$

Dosazením stanovených hodnot do vzorce (110^b) dostaneme

$$H = P\frac{m}{n} + \frac{E J_0}{\mu a f n}(\delta \varepsilon l - \Delta l). \qquad (111)$$

Omezíme-li se na účinek samotného břemene P daný prvým členem na pravé straně, vidíme, že čára Γ je zase příčinkovou čarou vodorovné síly H.

Přibližně můžeme též postupovati tak, že dáme na mezích dílků působiti silám z'/μ, odpovídá-li z' příslušné mezi, v jejíž svislici měříme tedy z. Výslednicová čára k těmto silám svislým je pak přibližně vepsána do příčinkové čáry H. Tak lze zvláště výhodně řešiti počtem, jak ukáže příklad.

Podle věty odvozené v odst. 5 *δ*) pro soustavu prutovou jednoduše neurčitou a platné ovšem i pro nosník plnostěnný je příčinkovou čarou staticky neurčité veličiny X ohybová čára základního nosníku, působí-li naň pouze staticky neurčitá veličina $X = -1$. Tato věta dá řešení souhlasné s řešením, které jsme si již odvodili. Neboť, nebáme-li normálné síly, jest ohybová čára výslednicovou čarou ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plocha má podle vzorce (75^a), klademe-li $e = F = 1$, pořadnice

$$\eta' = \frac{M}{E J \cos \varphi}.$$

Vynecháme-li zatížení a položíme-li staticky neurčitou veličinu $H = -1$, dostaneme podle vzorce (79) moment $M = z$, tedy

$$\eta' = \frac{z}{E J \cos \varphi}.$$

Násobme stálým činitelem EJ_0 a obdržíme

$$\mathfrak{y}' = \frac{z}{\cos\varphi}\frac{J_0}{J} = z'.$$

Z toho plyne odvozené řešení, v němž znamená čára Γ ohybovou čáru základního nosníku (prostě podepřeného v bodech a, b) pro zatížení $H = -1$; čára Δ určuje pak úsekem n změnu vzdálenosti bodů a, b za téhož zatížení a touto změnou musíme děliti podle vzorce (18^a) pořadnice čáry Γ, abychom dostali účinek břemene $P = 1$.

Příklad 13. Železniční most o jedné koleji má dva hlavní nosníky obloukové, položené souměrně k přímé ose koleje. Obloukové nosníky mají rozpětí $l = 34{,}20$ m, výšku $h = 5{,}95$ m (obr. 71, tab. 3); střednice je kruhová, průřez oblouků se mění. Oba hlavní nosníky jsou zatíženy nepřímo stálým zatížením $2q_0 = 1700$ kg/m a pohyblivým zatížením vlakem podle normy I. mostního řádu z r. 1904; stálá délka oddílu jest $a = 2{,}85$ m. Vyšetřiti jest průřez oblouku ve čtvrtině a v polovině rozpětí jakož i přetvoření oblouku.

Z rozpětí l a výšky h vypočteme poloměr střednice r. Polovice $\overline{a\,c_0} = \frac{1}{2}l = c$ tětivy ab je kolmicí ke svislému průměru kružnice a stanoví na něm úseky h a $(2r - h)$; pak jest

$$c^2 = h(2r - h), \text{ tedy } r = \frac{1}{2h}(c^2 + h^2) = \frac{1}{2.5{,}95}(17{,}1^2 + 5{,}95^2) = 27{,}547 \text{ m}.$$

Stanovíme dále pořadnice z styčných bodů střednice. Vodorovnice vedená bodem střednice má k ose souměrnosti délku $(c - x)$ a rozděluje svislý průměr prodloužené kruhové střednice na úseky $(h - z)$ a $(2r - h + z)$; z toho plyne

$$(c - x)^2 = (h - z)(2r - h + z) \quad \text{nebo} \quad (h - z)^2 - 2r(h - z) + (c - x)^2 = 0.$$

Řešením dostaneme

$$h - z = r - \sqrt{r^2 - (c - x)^2} \quad \text{a} \quad z = h - r + \sqrt{r^2 - (c - x)^2}; \tag{a}$$

před odmocninou platí v prvé rovnici znaménko záporné, neboť znaménko kladné by dalo hodnotu $h - z > r$, jež odpovídá spodnímu průsečíku prodloužené střednice se svislicí bodu, o který jde. Podle vzorce (a) vypočtou se pořadnice z uvedené dále v číselné tabulce I. Pro výpočet potřebujeme dále $\cos\varphi$, pro nějž platí

$$r\cos\varphi = r - h + z = \sqrt{r^2 - (c - x)^2}; \tag{b}$$

hodnoty $r\cos\varphi$ jsou uvedeny také v tabulce I.

Vypočteme dále podle vzorce (84) redukované pořadnice

$$z' = \frac{z}{\cos\varphi}\cdot\frac{J_0}{J} = \frac{rz}{r\cos\varphi}\cdot\frac{J_0}{J}; \tag{c}$$

v tabulce I. jsou uvedeny odhadnuté poměry $\frac{J}{J_0}$, za J_0 zvolen pak moment setrvačnosti prostředního průřezu. Pořadnice z' pro body styčné pokládáme přibližně za určovací úseky břemen, k nimž vypočteme momenty $\mathfrak{M}$ jako pro nosník prostě podepřený ve svislicích bodů a, b. Břemena z' působí ve styčných bodech, jež mají stálou vzdálenost a; nosník je souměrný a uprostřed je styčný bod, i vyjde v oddílu nalevo od středu posouvající síla $\mathfrak{T}_6 = \frac{z'_6}{2}$, v předchozích oddílech pak

$$\mathfrak{T}_5 = \mathfrak{T}_6 + z'_5,\ \mathfrak{T}_4 = \mathfrak{T}_5 + z'_4,\ \mathfrak{T}_3 = \mathfrak{T}_4 + z'_3, \ldots$$

Sčítáním posouvajících sil od levého konce určíme, jelikož $\mathfrak{M}_0 = 0$, poměry

$$\frac{\mathfrak{M}_1}{a} = \mathfrak{T}_1,\ \frac{\mathfrak{M}_2}{a} = \frac{\mathfrak{M}_1}{a} + \mathfrak{T}_2,\ \frac{\mathfrak{M}_3}{a} = \frac{\mathfrak{M}_2}{a} + \mathfrak{T}_3, \ldots$$

Příčinkové pořadnice η vodorovné síly plynou pak z momentů $\mathfrak{M}$, dělíme-li je součtem statických momentů vodorovných sil z' na ramenech z. K tomu určíme ve všech bodech styčných součin zz' a tyto součiny, uvedené v tab. I., sečteme; obdržíme

$$\sum_1^n z_m z'_m = 2\sum_1^5 z_m z'_m + z_6 z'_6 = 2 \cdot 97{,}42 + 35{,}40 = 230{,}24.$$

Z poměrů $\frac{\mathfrak{M}_m}{a}$ plynou pak příčinkové pořadnice podle vzorce

$$\eta_m = \frac{\mathfrak{M}_m}{\Sigma z_m z'_m} = \frac{\mathfrak{M}_m}{a} \cdot \frac{a}{\Sigma z_m z'_m} = \frac{2{,}85}{230{,}24} \cdot \frac{\mathfrak{M}_m}{a}. \qquad (d)$$

Celý výpočet je pro levou polovici nosníku sestaven přehledně v tab. I., v níž jsou dosazeny všechny délky v metrech. Příčinková čára H je narýsována podle výpočtu v obr. 71 (tab. 3).

Tabulka I.

Bod m	z_m	$\frac{J_m}{J_0}$	$r\cos\varphi_m$	z'_m	$\mathfrak{T}_m$	$\frac{\mathfrak{M}_m}{a}$	$z_m z'_m$	η_m
1	1,978	1,30	23,575	1,78	23,265	23,265	3,52	0,288
2	3,480	1,40	25,077	2,73	21,485	44,750	9,51	0,554
3	4,590	1,25	26,187	3,86	18,755	63,505	17,73	0,786
4	5,355	0,98	26,952	5,58	14,895	78,400	29,88	0,970
5	5,802	0,92	27,399	6,34	9,315	87,715	36,78	1,086
6	5,950	1,00	27,547	5,95	2,975	90,690	35,40	1,123

Známe-li příčinkovou čáru vodorovné síly, určíme snadno na př. příčinkové čáry momentů ke krajním bodům jádrovým, z nichž vyšetříme krajní hodnoty těchto momentů a z nich krajní hodnoty napětí v krajních vláknech. Stanovme tyto čáry pro průřezy *3* a *6*. Při prvém výpočtu zvolili bychom, jde-li o ocelový nosník nýtovaný, výšku střední stěny na př. $h_0 = 0{,}9\ \text{m} \doteq \frac{l}{40}$ a určili bychom přibližně krajní jádrové body průřezu ve vzdálenosti os nýtů spojujících střední stěnu a úhelníky,[1]) tedy zde asi ve vzdálenosti

$$j = \frac{h_0}{2} - 0{,}05 = 0{,}40\ \text{m}$$

od střednice; předpokládáme tu pasové úhelníky $\frac{90 \cdot 90}{10}$ mm. Stanovme jádrové body ve svislicích styčných bodů *3* a *6*.

Ve svislici bodu *3* položený spodní jádrový bod *3'* má pořadnici

$$z'_3 = z_3 - \frac{j}{\cos\varphi_3} = 4{,}590 - \frac{0{,}4 \cdot 27{,}547}{26{,}187} = 4{,}17\ \text{m};$$

horní jádrový bod *3''* v téže svislici má pořadnici

$$z''_3 = z_3 + \frac{j}{\cos\varphi_3} = 4{,}590 + \frac{0{,}4 \cdot 27{,}547}{26{,}187} = 5{,}01\ \text{m}.$$

Příčinkové pořadnice momentu k jádrovému bodu vypočteme podle vzorce

$$M = \mathfrak{M} - H z, \qquad (e)$$

jenž platí pro příčinkové pořadnice veličin M, $\mathfrak{M}$ a H v každém bodě. Příčinkovým obrazcem momentu $\mathfrak{M}$ je trojúhelník, jenž má ve svislici bodu, o jehož moment jde, pořadnici $\frac{x\,x'}{l}$, tedy ve svislici bodu *3* pro moment k tomuto bodu pořadnici

$$\frac{x_3 x'_3}{l} = \frac{3 \cdot 9}{12^2}\, l = 6{,}503\ \text{m};$$

v ostatních bodech styčných určíme příčinkové pořadnice momentu $\mathfrak{M}_3$ podle zákona přímky, dané ve svislici bodu *3* pořadnicí právě vypočtenou.

Ve svislici *6* dostaneme, poněvadž jest $\cos\varphi_6 = 1$, pořadnici spodního jádrového bodu

$$z'_6 = z_6 - j = 5{,}95 - 0{,}40 = 5{,}55\ \text{m}$$

[1]) Podle *Jos. Šolína*; viz „Theorii plnostěnných nosníků obloukových", str. 171.

a pořadnici horního jádrového bodu

$$z_6'' = z_6 + j = 5{,}95 + 0{,}40 = 6{,}35 \text{ m}.$$

Příčinková čára momentu $\mathfrak{M}_6$ je dána ve svislici bodu 6 pořadnicí

$$\frac{x_6 x_6'}{l} = \frac{l}{4} = 8{,}550 \text{ m}$$

a je vlevo i vpravo od této svislice přímka, mající v opěrové svislici pořadnici nulovou; z toho plynou ostatní pořadnice.

Podle uvedených vzorců a zásad jsou vypočteny pořadnice uvedené v číselné tabulce II. Příčinkové čáry pro jádrové body 6′, 6″ jsou souměrné ke svislici středu, stačí tedy pořadnice pro levou polovici oblouku. Vypočtené čáry příčinkové jsou narýsovány v obr. 71 (tab. 3).

Tabulka II.

Bod	$\mathfrak{M}_3$	Hz_3'	M_3'	Hz_3''	M_3''	$\mathfrak{M}_6$	Hz_6'	M_6'	Hz_6''	M_6''
1	2,168	1,201	+ 0,967	1,443	+ 0,725	1,425	1,598	− 0,173	1,829	− 0,404
2	4,336	2,310	+ 2,026	2,776	+ 1,560	2,850	3,075	− 0,225	3,518	− 0,668
3	6,503	3,278	+ 3,225	3,938	+ 2,565	4,275	4,362	− 0,087	4,991	− 0,716
4	5,781	4,045	+ 1,736	4,860	+ 0,921	5,700	5,384	+ 0,316	6,160	− 0,460
5	5,058	4,529	+ 0,529	5,441	− 0,383	7,125	6,027	+ 1,098	6,896	+ 0,229
6	4,335	4,683	− 0,348	5,626	− 1,291	8,550	6,233	+ 2,317	7,131	+ 1,419
7	3,613	4,529	− 0,916	5,441	− 1,828					
8	2,890	4,045	− 1,155	4,860	− 1,970					
9	2,168	3,278	− 1,110	3,938	− 1,770					
10	1,445	2,310	− 0,865	2,776	− 1,331					
11	0,723	1,201	− 0,478	1,443	− 0,720					

Z příčinkových čar stanovíme momenty vyvozené stálým zatížením podle vzorce

$$M = q_0 \mathfrak{U}, \tag{f}$$

v němž znamená $\mathfrak{U}$ obsah celého obrazce příčinkového; znamená-li η příčinkové pořadnice ve styčných bodech, jest

$$\mathfrak{U} = a \Sigma \eta. \tag{g}$$

Podle toho vypočteme, dosazujíce $q_0 = 0{,}850$ t/m,

$$\mathfrak{U}_3' = a \cdot (8{,}483 - 4{,}872) = 10{,}291 \text{ m}^2, \quad M_3' = 0{,}850 \cdot 10{,}291 = 8{,}747 \text{ mt};$$
$$\mathfrak{U}_3'' = a \cdot (5{,}771 - 9{,}293) = -10{,}038 \text{ m}^2, \quad M_3'' = -0{,}850 \cdot 10{,}038 = -8{,}532 \text{ mt};'$$
$$\mathfrak{U}_6' = a \cdot (5{,}145 - 0{,}970) = 11{,}899 \text{ m}^2, \quad M_6' = 0{,}850 \cdot 11{,}899 = 10{,}114 \text{ mt};$$
$$\mathfrak{U}_6'' = a \cdot (1{,}877 - 4{,}496) = -7{,}464 \text{ m}^2, \quad M_6'' = -0{,}850 \cdot 7{,}464 = -6{,}344 \text{ mt}.$$

Z pohyblivého zatížení vlakem připadá na každý hlavní nosník polovice. Z příčinkových obrazců vyšetříme graficky[1]) nejúčinnější polohy soustavy břemen a stanovíme pak krajní hodnoty momentů k bodům jádrovým podle vzorce

$$M = \Sigma P \eta, \tag{h}$$

v němž znamenají η příčinkové pořadnice v paprscích břemen. Podle obr. 71 vypočteme

$$\max M_3' = 8 \cdot (1{,}23 + 1{,}77 + 2{,}50 + 3{,}23 + 2{,}72) + 6{,}5 \cdot (1{,}08 + 0{,}46 + 0{,}05) = 101{,}74 \text{ mt},$$
$$\min M_3' = -8 \cdot (0{,}92 + 1{,}04 + 1{,}16 + 1{,}14 + 1{,}11) - 6{,}5 \cdot (0{,}73 + 0{,}52 + 0{,}28) = -52{,}92 \text{ mt};$$
$$\max M_3'' = 8 \cdot (0{,}95 + 1{,}76 + 2{,}57 + 2{,}07 + 1{,}58) + 6{,}5 \cdot (0{,}45 + 0{,}06) = 74{,}76 \text{ mt},$$
$$\min M_3'' = -8 \cdot (0{,}20 + 0{,}56 + 1{,}56 + 1{,}77 + 1{,}87 + 1{,}97 + 1{,}90) - 6{,}5 \cdot (1{,}35 + 0{,}91 + 0{,}43) = -96{,}13 \text{ mt};$$
$$\max M_6' = 8 \cdot (0{,}73 + 1{,}12 + 1{,}72 + 2{,}32 + 1{,}72) + 6{,}5 \cdot (0{,}40 + 0{,}15 - 0{,}07) = 64{,}00 \text{ mt},$$
$$\min M_6' = -2 \cdot 8 \cdot (0{,}09 + 0{,}17 + 0{,}20 + 0{,}23 + 0{,}16) = -13{,}60 \text{ mt};$$
$$\max M_6'' = 8 \cdot (0{,}25 + 0{,}84 + 1{,}42 + 0{,}84 + 0{,}25) = 28{,}80 \text{ mt},$$
$$\min M_6'' = -2 \cdot 8 \cdot (0{,}46 + 0{,}59 + 0{,}72 + 0{,}70 + 0{,}67) - 2 \cdot 6{,}5 \cdot (0{,}25 + 0{,}04) = -54{,}02 \text{ mt}.$$

[1]) Viz druhý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1946), str. 140, obr. 119.

Pro větši bezpečnost je počítáno při $\min M'_6$ a $\min M''_6$ současné zatížení obou částí záporně přičiňujících, a to souměrně ke svislici středu nosníku.

Zatížení stálé i pohyblivé dá celkem

$$\max M'_3 = 8{,}75 + 101{,}74 = 110{,}49 \text{ mt}, \quad \min M'_3 = 8{,}75 - 52{,}92 = -44{,}17 \text{ mt};$$
$$\max M''_3 = -8{,}53 + 74{,}76 = 66{,}23 \text{ mt}, \quad \min M''_3 = -8{,}53 - 96{,}13 = -104{,}66 \text{ mt};$$
$$\max M'_6 = 10{,}11 + 64{,}00 = 74{,}11 \text{ mt}, \quad \min M'_6 = 10{,}11 - 13{,}60 = -3{,}49 \text{ mt};$$
$$\max M''_6 = -6{,}34 + 28{,}80 = 22{,}46 \text{ mt}, \quad \min M''_6 = -6{,}34 - 54{,}02 = -60{,}36 \text{ mt}.$$

Z výsledních momentů stanovíme průřezy. Poněvadž se krajní hodnoty momentů k hornímu a spodnímu bodu jádrovému v témž průřezu liší, jsou zde výhodny průřezy nesouměrné k vodorovné ose centrálné. V bodě *3* zvolme průřez naznačený v obr. 71, jenž se skládá ze střední stěny $\frac{900}{10}$, čtyř úhelníků $\frac{90 \cdot 90}{10}$, čtyř horních desk pasových $\frac{240}{13}$, čtyř spodních desk pasových $\frac{210}{13}$ a je oslaben nýty průměru 20 mm. Pro tento průřez vychází, počítáme-li s oslabením nýty v pasových deskách a vodorovných ramenech úhelníků, obsah průřezový $U = 342{,}40$ cm², moment setrvačnosti k vodorovné ose centrálné $J = 602\,329$ cm⁴, vzdálenost těžiště od středu střední stěny $z_0 = 2{,}17$ cm, vzdálenosti krajních vláken $e_1 = 48{,}03$ cm, $e_2 = 52{,}37$ cm. Pak vyjdou v krajních vláknech průřezů vedených jádrovými body *3'*, *3''* největší napětí

$$\nu_1 = -\frac{\max M'_3 \cdot e_1}{J} = -\frac{11\,049\,000 \cdot 48{,}03}{602\,329} = -881 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\nu_2 = \frac{\min M''_3 \cdot e_2}{J} = -\frac{10\,466\,000 \cdot 52{,}37}{602\,329} = -910 \text{ kg/cm}^2.$$

Momenty jest dosazovati v kgcm. Krajní body jádrové mají tu od těžiště vzdálenosti

$$j_1 = -\frac{i^2}{e_1} = -\frac{J}{U e_1} = -36{,}6 \text{ cm}, \quad j_2 = \frac{i^2}{e_2} = \frac{J}{U e_2} = 33{,}6 \text{ cm}.$$

Předpokládali jsme přibližně vzdálenost $j = \pm 40$ cm. Skutečné jádrové body *3'*, *3''* nesouhlasí tedy s předpokládanými, i bylo by výpočet momentů ke krajním bodům jádrovým opraviti. Nový výpočet by se provedl stejně jako výpočet předchozí.

Průřez vrcholový *6* zvolíme ve tvaru naznačeném v obr. 71; skládá se ze střední stěny $\frac{900}{10}$, čtyř úhelníků $\frac{90 \cdot 90}{10}$, tří horních desk pasových $\frac{240}{13}$, dvou spodních desk pasových $\frac{210}{13}$ a je oslaben nýty průměru 20 mm. Počítáme-li oslabení v pasech (jako v průřezu *3*), vyjde v průřezu *6* za téhož označení jako v průřezu *3*: $U = 272{,}20$ cm², $J = 427863$ cm⁴, $z_0 = 5{,}93$ cm, $e_1 = 42{,}97$ cm, $e_2 = 53{,}53$ cm. V krajních vláknech průřezu jsou pak největší napětí

$$\nu_1 = -\frac{\max M' \cdot e_1}{J} = -\frac{7\,411\,000 \cdot 42{,}97}{427\,863} = -744 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\nu_2 = \frac{\min M''_6 \cdot e_2}{J} = -\frac{6\,036\,000 \cdot 53{,}53}{427\,863} = -755 \text{ kg/cm}^2;$$

momenty dosazujeme zase v kgcm.

Vzdálenosti krajních bodů jádrových od těžiště jsou

$$j_1 = -\frac{J}{U e_1} = -36{,}6 \text{ cm}, \quad j_2 = \frac{J}{U e_2} = 29{,}4 \text{ cm}.$$

Skutečné vzdálenosti krajních bodů jádrových se liší zase od předpokládaných vzdáleností $j = \pm 40$ cm; šlo-li by o přesný výpočet, musili bychom ze správných vzdáleností j_1, j_2 vypočísti správné pořadnice z'_6, z''_6 a stejně jako dříve vypočísti správné příčinkové čáry momentů M'_6, M''_6, z nichž bychom stanovili jako dříve krajní hodnoty těchto momentů i krajní napětí.

Stejně jako v bodech *3* a *6* určili bychom průřezy oblouku ve všech bodech styčných. Máme-li je, můžeme znovu počítati přesnější příčinkovou čáru H. Položíme-li do původní kruhové střednice těžiště všech průřezů, nemění se pořadnice z_m; také $r \cos \varphi_m$ zůstává nezměněno. Nové, správné hodnoty poměru $\frac{J_m}{J_0}$ uvedeny jsou v číselné tabulce III., v níž je proveden týmž postupem jako v tab. I. výpočet příčinkových pořadnic η_m.

Tabulka III.

Bod m	z_m	$\frac{J_m}{J_0}$	$r \cos \varphi_m$	z'_m	$\mathfrak{T}_m$	$\frac{\mathfrak{M}_m}{a}$	$z_m z'_m$	η_m
1	1,978	1,41	23,575	1,64	22,545	22,545	3,24	0,284
2	3,480	1,69	25,077	2,26	20,905	43,450	7,87	0,547
3	4,590	1,41	26,187	3,42	18,645	62,095	15,71	0,782
4	5,355	1,00	26,952	5,47	15,225	77,320	29,29	0,974
5	5,802	0,86	27,399	6,78	9,755	87,075	39,33	1,097
6	5,950	1,00	27,547	5,95	2,975	90,050	35,40	1,134

Z hodnot v tabulce vychází

$$\sum_1^n z_m z'_m = 2 \cdot \sum_1^5 z_m z'_m + z_6 z'_6 = 2 \cdot 95{,}44 + 35{,}40 = 226{,}28.$$

Příčinkové pořadnice η_m vypočteme podle vzorce (d), tedy zde

$$\eta_m = \frac{\mathfrak{M}_m}{a} \cdot \frac{a}{\Sigma z_m z'_m} = \frac{2{,}85}{226{,}28} \cdot \frac{\mathfrak{M}_m}{a}.$$

Proti přibližnému řešení v tab. I. vycházejí přesnějším řešením v tab. III. tak malé rozdíly, že by nebylo třeba další řešení opravovati, kdyby se jádrové body správné od přibližných značněji nelišily. Výpočet správných příčinkových čar momentů ke krajním bodům jádrovým by se provedl stejně jako předchozí výpočet přibližný. Ovšem jest i poslední řešení příčinkové čáry H v tab. III. přibližné, neboť jsme počítali ve styčných bodech s ideálními břemeny z'_m, jejichž hodnoty by byly správné pro dělení vodorovné tětivy na dílky nekonečně malé. Chceme-li přesněji určiti ideálná břemena ve styčných bodech, postupujeme, jako by šlo o břemena $\mathfrak{P}$, jejichž výslednicovou čarou je čára ohybová.[1])

Vyšetříme také účinky vedlejší. Změna teploty vyvodí podle vzorce (110) vodorovnou sílu

$$H_t = \frac{E J_0 \delta \varepsilon l}{a \Sigma z z'}. \qquad (i)$$

Dosadíme zde pro ocel[2])

$$E = 2\,150\,000 \text{ kg/cm}^2 = 21\,500\,000 \text{ t/m}^2, \quad \varepsilon = 0{,}000\,011;$$

dále jest

$$J_0 = 427\,863 \text{ cm}^4 = 0{,}004\,28 \text{ m}^4, \quad l = 34{,}2 \text{ m}, \quad a = 2{,}85 \text{ m}, \quad \Sigma z z' = 226{,}28$$

podle přesnějšího řešení v tab. III. a budeme uvažovati změnu teploty $\delta = \pm 35^0$ C. Tu vyjde

$$H_t = \pm \frac{21\,500\,000 \cdot 0{,}004\,28 \cdot 35 \cdot 0{,}000\,011 \cdot 34{,}2}{2{,}85 \cdot 226{,}28} = \pm 1{,}88 \text{ t}.$$

Pouhá změna teploty vyvodí ke krajním bodům jádrovým momenty

$$M = - H z, \qquad (k)$$

znamená-li z pořadnici krajního bodu jádrového. Tyto momenty bychom připočetli ke krajním hodnotám momentů k bodům jádrovým, a to k max M hodnotu kladnou, k min M hodnotu zápornou.

Pro účinek popuštění opěr máme podle (86^b) vzorec

$$H_{(a)} = - \frac{E J_0 \Delta l}{a \cdot \Sigma z z'}. \qquad (l)$$

Z popuštění na př. $\Delta l = 5$ mm $= 0{,}005$ m vyšla by vodorovná síla

$$H_{(a)} = - \frac{21\,500\,000 \cdot 0{,}004\,28 \cdot 0{,}005}{2{,}85 \cdot 226{,}28} = - 0{,}712 \text{ t};$$

momenty by se počítaly zase podle vzorce (k).

[1]) Srovnej druhý díl tohoto spisu, 3. vydání (1946), str. 77, vzorec (57).

[2]) Výpočet je zde proveden podle předpisů platných v r. 1920; podle nového mostního řádu (ČSN 1230-1937) bylo by dosaditi $E = 2\,100\,000$ kg/cm^2, $\varepsilon = 0{,}000\,012$.

Vyšetřme ještě přetvoření nosníku, a to nejprve průhyb středu nosníku z jeho příčinkové čáry, kterou stanovíme jakožto ohybovou čáru nosníku zatíženého břemenem $P = 1$ uprostřed nosníku působícím. Řešme zase přibližně jako při vodorovné síle H. Řešíme-li přetvoření, měli bychom uvažovati obsahy a momenty setrvačnosti neoslabených průřezů; neboť průřezy nosníku jsou zde vesměs tlačeny a v tlaku nýty neoslabují průřezů, vyplňují-li dokonale otcovy nýtové. Počítáme-li jako při napětích i přetvoření s oslabenými průřezy, dostaneme hodnoty větší, než by skutečně odpovídaly předpokladům výpočtu.

Břímě $P_c = 1$ vyvodí podle přesnějšího výpočtu (tab. III.) vodorovnou sílu $H = 1{,}134$; svislé složky reakcí jsou tu $A = B = \frac{1}{2}$. V libovolném bodě střednice vlevo od středu je pak moment ohybový

$$M = A\,x - H\,z = \tfrac{1}{2}\,x - 1{,}134\,z\,. \qquad (m)$$

Momenty M určíme podle tohoto vzorce v bodech styčných; výpočet je dále v číselné tabulce IV. Nedbajíce účinku normálné síly a změny teploty stanovíme pak určovací plochu spojité soustavy silové, jejíž výslednicovou čarou je čára ohybová, pořadnicemi $\mathfrak{y}'$ podle vzorce (75^a), klademe-li pro početní řešení $e = F = 1$; i jest

$$\mathfrak{y}' = \frac{M}{E\,J\,\cos\varphi}\,.$$

Znásobme stálým činitelem $E\,J_0 = 21\,500\,000 \cdot 0{,}004\,28 = 92\,020$ m² t, jímž musíme pak výsledky děliti. Vypočteme tedy v tab. IV. hodnoty

$$\mathfrak{y}'' = E\,J_0\,\mathfrak{y}' = M\,\frac{J_0}{J\,\cos\varphi} \qquad (n)$$

pro styčné body. Jinak je postup řešení týž jako u příčinkové čáry síly H (tab. I. a III.).

Ve styčných bodech měli bychom bráti přibližně ideálná břemena

$$\mathfrak{P} = a \cdot \mathfrak{y}''.$$

Vynecháme stálébo činitele a, jímž musíme pak výsledky násobiti, a počítáme pouze s břemeny $\mathfrak{y}''$, k nimž určíme nejprve posouvající síly $\mathfrak{T}''$ a pak podíly $\frac{\mathfrak{M}''}{a}$. Momenty $\mathfrak{M}''$ máme násobiti $\frac{a}{E\,J_0}$, abychom dostali příčinkové pořadnice průhybu η; je tedy

$$\eta = \frac{\mathfrak{M}''}{a} \cdot \frac{a^2}{E\,J_0}\,. \qquad (o)$$

Počítáme-li v t a m, dosadíme $a = 2{,}85$ m a vyjde η v m/t. Pořadnice z_m jsou v tab. I., poměry $\frac{J_m}{J_0}$ dosadíme podle tab. III., t. j. podle správných průřezů. Pořadnice η i průhyby y_c jsou kladné (záporné), směřující-li dolů (vzhůru).

Tabulka IV.

Bod m	$\frac{1}{2}\,x_m$	$H\,z_m$	M_m	$\frac{J_m}{J_0}$	$r\cos\varphi_m$	$\mathfrak{y}''_m$	$\mathfrak{T}''_m$	$\frac{\mathfrak{M}''_m}{a}$	$10^4\,\eta_m$
1	1,425	2,243	− 0,818	1,41	23,575	− 0,678	− 0,927	− 0,927	− 0,818
2	2,850	3,946	− 1,096	1,69	25,077	− 0,713	− 0,249	− 1,176	− 1,038
3	4,275	5,205	− 0,930	1,41	26,187	− 0,694	+ 0,464	− 0,712	− 0,628
4	5,700	6,073	− 0,373	1,00	26,952	− 0,381	+ 1,158	+ 0,446	+ 0,394
5	7,125	6,579	+ 0,546	0,86	27,399	+ 0,638	+ 1,539	+ 1,985	+ 1,752
6	8,550	6,747	+ 1,803	1,00	27,547	+ 1,803	+ 0,901	+ 2,886	+ 2,547

Stanovený příčinkový obrazec má obsah

$$\mathfrak{U} = a \cdot \Sigma\,\eta\,,$$

kde jest

$$\sum_1^n \eta = 2 \cdot \sum_1^5 \eta + \eta_6 = \frac{2}{10^4}\,(-2{,}484 + 2{,}146) + \frac{2{,}547}{10^4} = 0{,}000\,187\,1\,\frac{\text{m}}{\text{t}}\,;$$

tím vychází

$$\mathfrak{U} = a \cdot \Sigma\eta = 2{,}85 \cdot 0{,}000\,187\,1 = 0{,}000\,533\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{t}}\,.$$

Stálé zatížení $q_0 = 850$ kg/m $= 0{,}85$ t/m vyvodí pak průbyb středu oblouku

$$y_{c,\,o} = q_0\,\mathfrak{U} = 0{,}85 \cdot 0{,}000\,533 = 0{,}000\,45\ \mathrm{m} = 0{,}45\ \mathrm{mm}.$$

Pro pohyblivé zatížení vlakem stanovíme z příčinkové čáry nejúčinnější polohy (viz obr. 71) a vypočteme krajní hodnoty průhybu y_c jimi vyvozené

$$\max y_c' = \Sigma P\eta = \frac{8}{10^4}(1{,}11 + 1{,}76 + 2{,}20 + 2{,}55 + 2{,}20) + \frac{6{,}5}{10^4}(0{,}53 - 0{,}04 - 0{,}58) =$$
$$= 0{,}00780\ \mathrm{m} = 7{,}80\ \mathrm{mm},$$

$$\min y_c' = \Sigma P\eta = -\frac{8}{10^4}(0{,}82 + 0{,}93 + 1{,}04 + 0{,}85 + 0{,}64) = -0{,}00342\ \mathrm{m} = -3{,}42\ \mathrm{mm}\,.$$

Stanovme též přetvoření změnou teploty, jež vyvodí v opěrách pouze vodorovnou sílu $H = \pm 1{,}88$ t, uvažujeme-li změnu $\delta = \pm 35^0$ C. Ve všech bodech oblouku vznikne pak moment

$$M = -Hz = \mp 1{,}88\,z\,. \qquad (p)$$

Ohybová čára obloukového nosníku je výslednicovou čarou ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plocha má podle vzorce (75), klademe-li $e = F = 1$, pořadnice

$$\mathfrak{y} = \frac{M}{EJ\cos\varphi} + \frac{\mathrm{d}\left[\left(\frac{N}{EU} + \delta\varepsilon\right)\operatorname{tg}\varphi\right]}{\mathrm{d}x}\,.$$

Normálné síly můžeme nedbati, neboť zde jest

$$N = -H\cos\varphi,\ \frac{H}{EU_0} = \pm\frac{1{,}88}{21\,500\,000 \cdot 0{,}0272} = \pm 0{,}000\,0032\,,$$

proti tomu však je $\delta\varepsilon = \pm 35 \cdot 0{,}000\,011 = \pm 0{,}000\,385$; je tedy $\frac{N}{EU}$ proti δ nepatrné. Dosadíme-li ještě $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, můžeme psáti

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}' + \mathfrak{y}'',\ \mathfrak{y}' = \frac{M}{EJ\cos\varphi},\ \mathfrak{y}'' = \delta\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\,. \qquad (q)$$

Z rovnice střednice (a) určíme

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (c - x)\left[r^2 - (c - x)^2\right]^{-\frac{1}{2}},\ \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{r\cos^3\varphi}\,.$$

Určovací plochu rozdělíme na plochu o pořadnicích $\mathfrak{y}'$ a plochu o pořadnicích $\mathfrak{y}''$, stanovíme ke každé zvláště výslednicovou čáru a výsledky sečteme. Určili jsme

$$\mathfrak{y}' = \frac{M}{EJ\cos\varphi} = -\frac{Hz}{EJ\cos\varphi} = -\frac{H}{EJ_0}z';$$

pořadnice z' jsou dány vzorcem (c). Ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plocha má pořadnice $\mathfrak{y}'$, stanovíme přibližně výslednicovou čáru, nahradíme-li soustavu ve styčných bodech ideálnými břemeny

$$a\,\mathfrak{y}' = -\frac{Ha}{EJ_0}z'\,.$$

Příčinková čára H je výslednicovou čarou k břemenům z'; pořadnice této výslednicové čáry dělí se $\Sigma z z'$. Obdržíme tedy onu část ohybové čáry vyvozené změnou teploty, jež plyne z momentů ohybových, násobíme-li příčinkové pořadnice síly H hodnotou

$$-\frac{Ha}{EJ_0} \cdot \Sigma z z' = \mp\frac{1{,}88 \cdot 2{,}85}{92\,020} \cdot 226{,}28 = \mp 0{,}0132\,.$$

Tím dostaneme z pořadnic η_m (tab. III.) pořadnice $\eta_t' = \mp 0{,}0132\,\eta_m$, uvedené v číselné tabulce V.

Dále vypočteme

$$\mathfrak{y}'' = \delta\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\delta\varepsilon}{r\cos^3\varphi}\,. \qquad (r)$$

Z pořadnic $\mathfrak{y}''$ určovací plochy mohli bychom stanoviti pořadnice η_t'' ohybové čáry obecně počtem (integrací), jak bude ukázáno dále v odst. 26γ); můžeme však řešiti též přímo z určovací plochy. Spojitou soustavu silovou o pořadnicích $\mathfrak{y}''$ určovací plochy mohli bychom tu přibližně nahraditi břemeny $a \cdot \mathfrak{y}''$ ve styčných bodech. Vezmeme-li za ideálná břemena kratčeji pouze pořadnice $\mathfrak{y}''$, musíme výsledky násobiti a. K břemenům $\mathfrak{y}''$ určíme v tab. V. jako v tab. I. síly posouvající $\mathfrak{T}''$ a poměry $\frac{\mathfrak{M}''}{a}$, z nichž plynou ohybové pořadnice

$$\eta_t'' = \mathfrak{M}'' \cdot a = \frac{\mathfrak{M}''}{a} \cdot a^2. \qquad (s)$$

Celkem vyvodí změna teploty ohybové pořadnice

$$\eta_t = \eta_t' + \eta_t''. \qquad (t)$$

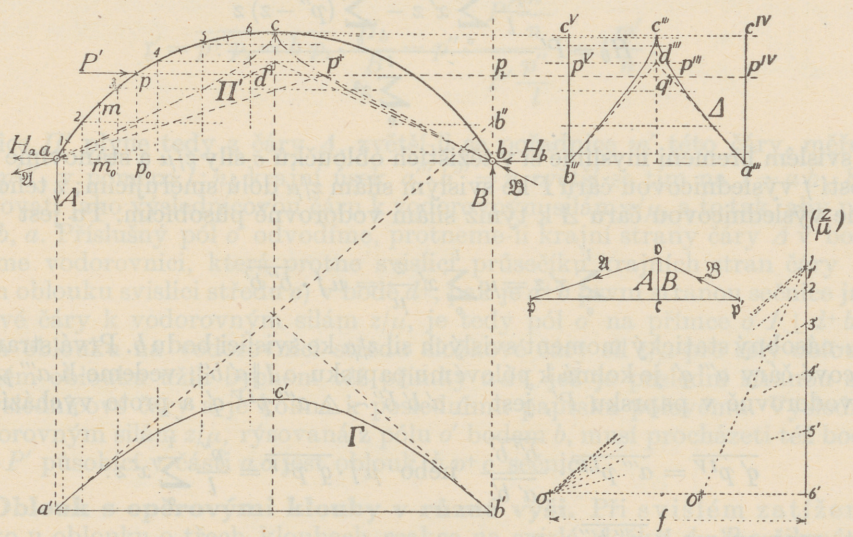
Proti pořadnicím η_t' jsou pořadnice η'' poměrně malé; mají tedy na ohybovou čáru hlavní vliv momenty ohybové. Pořadnice η_t', η_t'' i η_t v tab. V. jsou v metrech a jsou kladné (záporné) ve směru dolů (vzhůru).

Tabulka V.

Bod m	η_m	η_t'	$r \cos \varphi_m$	$10^4 \cdot \mathfrak{y}_m''$	$10^4 \cdot \mathfrak{T}_m''$	$10^4 \cdot \frac{\mathfrak{M}_m''}{a}$	η_t''	η_t
		+		+	+	+	+	+
1	0,284	0,003 74	23,575	0,223	0,932	0,932	0,000 76	0,004 50
2	0,547	0,007 22	25,077	0,185	0,709	1,641	0,001 34	0,008 56
3	0,782	0,010 32	26,187	0,163	0,524	2,165	0,001 76	0,012 08
4	0,974	0,012 86	26,952	0,149	0,361	2,526	0,002 06	0,014 92
5	1,097	0,014 48	27,399	0,142	0,212	2,738	0,002 23	0,016 71
6	1,134	0,014 97	27,547	0,140	0,070	2,808	0,002 28	0,017 25

24. Vyšší oblouk stálého průřezu s vodorovným břemenem. Nedbáme-li vedlejších účinků, jež jsme již vyřídili, obdržíme podle rovnice (97) pro vyšší oblouk o dvou kloubech výminku přetvárnou

$$\int_0^l M z \, ds = 0. \qquad (97^a)$$



Obr. 72.

Vodorovné břímě P', jež působí ve výšce $\overline{p_0 p} = p''$ nad vodorovnou spojnicí $a\,b$ (obr. 72), vyvodí šikmé reakce $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, jejichž paprsky procházejí opěrovými klouby a, b;

rozložme je na složky svislé A, B vzhůru kladné a složky vodorovné H_a, H_b dovnitř kladné. Reakce jsou v rovnováze s břemenem P'; výminky rovnováhy pro složky svislé, vodorovné a momenty k bodu b mají tvar

$$A+B=0,\ H_a+P'-H_b=0,\ A\,l+P'\,p''=0.$$

Z poslední a první rovnice plyne

$$A=-P'\frac{p''}{l}=-B, \tag{112}$$

z druhé dostaneme

$$H_a=H_b-P'. \tag{113}$$

Z obou vodorovných složek reakcí je jedna staticky neurčitá; volme za ni na př. H_b.

K bodu m ve výši $\overline{m_0\,m}=z$ určíme, uvažujíce síly po pravé straně, moment

$$M=B\,x'-H_b\,z-P'\,(p''-z)=P'\frac{p''}{l}\,x'-H_b\,z-P'\,(p''-z);$$

poslední člen platí pouze v části $a\,p$ vlevo od břemene P'. Dosadíme-li za moment do výminky přetvárné, obdržíme rovnici

$$P'\frac{p''}{l}\int_0^l x'\,z\,ds-H_b\int_0^l z^2\,ds-P'\int_0^p (p''-z)\,z\,ds=0,$$

z níž plyne

$$H_b=P'\frac{\dfrac{p''}{l}\displaystyle\int_0^l x'\,z\,ds-\int_0^p (p''-z)\,z\,ds}{\displaystyle\int_0^l z^2\,ds}. \tag{114^a}$$

Řešíme-li graficky, nahradíme prvek střednice ds konečným dílkem σ, jejž si mysleme stálý; pak vyjde

$$H_b=P'\frac{\dfrac{p''}{l}\displaystyle\sum_0^l x'\,z-\sum_0^p (p''-z)\,z}{\displaystyle\sum_0^l z^2}. \tag{114^b}$$

Jako při svislém břemeni myslíme si v těžištích obloučků σ síly z/μ a stanovíme pólovou vzdáleností f výslednicovou čáru Γ ke svislým silám z/μ dolů směřujícím; z téhož pólu o sestrojíme výslednicovou čáru Δ k týmž silám vodorovně působícím. Tu jest

$$\sum_0^l x'\,z=\mu\sum_0^l x'\frac{z}{\mu}=\mu f\cdot\overline{b''\,b'}$$

jakožto μ-násobný statický moment svislých sil z/μ ke svislici bodu b. Prvá strana druhé výslednicové čáry $a'''\,q'$ je kolmá k pólovému paprsku $o\,1\parallel a'\,b''$; vedeme-li $a'''\,p^{IV}\perp a'\,b'$ a $p^{IV}\,q'$ vodorovně v paprsku P', jest $\triangle\,a'\,b'\,b''\sim\triangle\,a'''\,p^{IV}\,q'$ a proto vychází

$$\overline{q'\,p^{IV}}=\overline{a'''\,p^{IV}}\cdot\frac{\overline{b''\,b'}}{\overline{a'\,b'}}\quad\text{nebo}\quad\mu f\cdot\overline{q'\,p^{IV}}=\frac{p''}{l}\sum_0^l x'\,z.$$

Dále jest, znamenáme-li $\overline{a'''\,b'''}=n$,

$$\sum_0^l z^2=\mu f n.$$

Z čáry Δ určíme též

$$\sum_0^p (p'' - z)\, z = \mu \sum_0^p (p'' - z) \frac{z}{\mu} = \mu f \cdot \overline{q' p'''}$$

jakožto μ-násobný součet statických momentů k paprsku P' vodorovných sil z/μ mezi body a, p působících. Pak jest

$$\frac{p''}{l} \sum_0^l x' z - \sum_0^p (p'' - z)\, z = \mu f (\overline{q' p^{IV}} - \overline{q' p'''}) = \mu f m',$$

je-li $\overline{p''' p^{IV}} = m'$. Dosazením výsledků do vzorce (114^b) obdržíme

$$H_b = P' \frac{m'}{n}. \tag{115^a}$$

Příčinkovou čarou síly H_b je čára Δ vztažená k přímce $a''' p^{IV} \perp a' b'$. Z rovnice (113) plyne pak

$$H_a = H_b - P' = P' \frac{m'}{n} - P' = - P' \frac{m''}{n}, \tag{115^b}$$

znamenáme-li $m'' = n - m' = \overline{p^V p^{IV}} - \overline{p''' p^{IV}} = \overline{p^V p'''}$. Je tedy čára Δ zároveň příčinkovou čarou síly H_a, vztahujeme-li ji k základní straně $b''' p^V \perp a' b'$. Úseky m', m'' směřují v obr. 72 vpravo a jsou kladné. Síla H_a je záporná, t. j. směřuje vlevo

Paprsky $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ výsledních reakcí se sekou na paprsku P' v bodě p^+, jehož měřickým místem je sečnice. Přeneseme-li do složkového obrazce úsek $P' = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'}$ a vedeme-li jeho koncovými body rovnoběžky s paprsky reakcí $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, obdržíme úseky $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{p}'\,\mathfrak{o}}$, $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{o}\,\mathfrak{p}}$. Svislicí $\mathfrak{o}\,\mathfrak{c}$ stanovíme pak úseky svislých i vodorovných složek reakcí. Tu jest $\triangle\, b\, p^+ p_1 \sim \triangle\, \mathfrak{o}\,\mathfrak{p}'\,\mathfrak{c}$; z toho plyne

$$\xi' = \overline{p^+ p_1} = \overline{b\, p_1} \cdot \frac{H_b}{B} = p'' \cdot \frac{P' \dfrac{m'}{n}}{P' \dfrac{p''}{l}} = l \frac{m'}{n}. \tag{116}$$

Sečnice Π' plyne tedy z čáry Δ, zvětší-li se pořadnice m' této čáry, měřené od strany $a''' p^{IV}$, v poměru $l : n$; krajní úsek $\overline{a''' b'''} = n$ zvětší se tím na $l = \overline{a\, b}$. Sečnici lze pak rýsovati jako výslednicovou čáru k vodorovným silám z/μ, a to tak, aby procházela body b, a. Příslušný pól o' odvodíme, protneme-li krajní strany čáry Δ v bodě d''', jímž vedeme vodorovnici, která protne svislici průsečíku krajních stran čáry Γ (při souměrném oblouku svislici středu c) v bodě d^+; pak je $d^+ b$ první stranou sečnice jakožto výslednicové čáry k vodorovným silám z/μ, je tedy pól o' na přímce $o'\, 1 \perp d^+ b$ a při souměrném oblouku na vodorovnici středu složkové čáry sil z/μ pro celý oblouk. Při nesouměrném oblouku užili bychom též přímky $a\, d^+$, jež je poslední stranou sečnice jakožto výslednicové čáry a je kolmá k poslednímu paprsku pólovému. Výslednicová čára k vodorovným silám z/μ, rýsovaná z pólu o' bodem b, musí procházeti též bodem a. Pro břímě P' působící v části $a\, c$ jest oblouk $b\, p^+ c$ sečnicí.

25. Oblouk s opěrovými klouby v různé výši. Při svislém zatížení rozložíme jako u oblouku o třech kloubech reakce na svislé složky A, B a šikmé složky H'_a, H'_b, působící ve spojnici $a\, b$, jež svírá s vodorovnou úhel α (obr. 73). Z rovnováhy vnějších sil plyne $H'_a = H'_b$ a svislé složky reakcí jsou v rovnováze se zatížením, tedy jsou tytéž jako u prostého nosníku. Obě reakce mají stejnou a protivnou vodorov-

nou složku $H = H'_a \cos\alpha$. K obecnému bodu m libovolného průřezu dají vnější síly po levé straně moment, pro nějž platí vzorec (79)

$$M = \mathfrak{M} - H z,$$

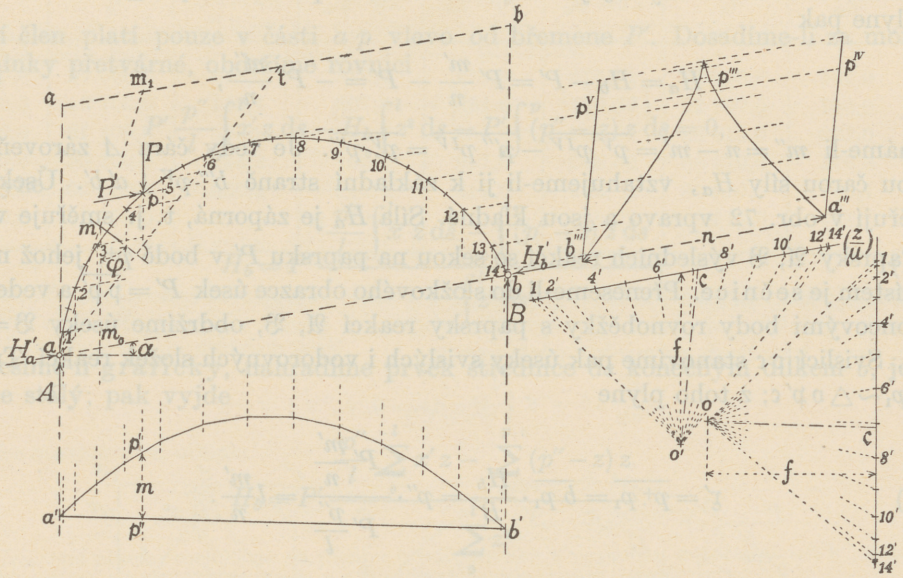
je-li $z = \overline{m_0 m}$ svislá pořadnice měřená od tětivy $a\,b$ a $\mathfrak{M}$ moment prostého nosníku. Pro posouvající sílu v průřezu odchýleném o úhel φ od svislice odvodí se stejně jako u oblouku o třech kloubech vzorec (81)

$$T = \mathfrak{T} \cos\varphi - H \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha}$$

a pro normálnou sílu vzorec (82)

$$N = -\mathfrak{T} \sin\varphi - H \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha};$$

$\mathfrak{T}$ znamená posouvající sílu prostého nosníku vodorovného.



Obr. 73.

Pokládáme-li opět sílu H za neurčitou, vyjde

$$\frac{\partial M}{\partial H} = -z, \quad \frac{\partial N}{\partial H} = -\frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha}.$$

Mění-li se popuštěním opěr vodorovná vzdálenost l bodů a, b o Δl, je ve směru reakce H'_b popuštění $\frac{\Delta l}{\cos\alpha}$ a $\frac{\partial H'_b}{\partial H} = \frac{1}{\cos\alpha}$. Z přetvárné výminky (91) dostaneme obecný tvar

$$\int \frac{Mz\,ds}{EJ} + \int \left(\frac{N}{EU} + \delta\varepsilon\right) \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha}\,ds = \frac{\Delta l}{\cos^2\alpha}. \tag{117}$$

Zanedbáme-li při vyšším oblouku $\frac{N}{EU}$, vyjde přetvárná výminka

$$\int \frac{Mz\,ds}{EJ} = \frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{\Delta l}{\cos\alpha} - \delta\varepsilon \int \cos(\varphi - \alpha)\,ds\right). \tag{118}$$

Úsečky x měříme vodorovně a pořadnice z svisle od tětivy ab; tu jest

$$ds\cos\varphi = dx, \quad ds\sin\varphi = dz + dx\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$ds\cos(\varphi-\alpha) = ds(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi) = dx\cos\alpha + (dz + dx\,\mathrm{tg}\,\alpha)\sin\alpha =$$

$$= dx\left(\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right) + dz\sin\alpha = \frac{dx}{\cos\alpha} + dz\sin\alpha.$$

Tak vyjde

$$\int ds\cos(\varphi-\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha}\int dx + \sin\alpha\int dz = \frac{l}{\cos\alpha},$$

jelikož v mezích oblouku, jak jsou zde integrály míněny, je $\int dx = l$, $\int dz = 0$. Přetvárná výminka pro vyšší oblouk proměnného průřezu má tedy tvar

$$\int\frac{Mz\,ds}{EJ} = \frac{\Delta l - \delta\varepsilon l}{\cos^2\alpha}. \tag{118}$$

Je-li průřez stálý, dostaneme výminku

$$\int Mz\,ds = \frac{EJ}{\cos^2\alpha}(\Delta l - \delta\varepsilon l). \tag{118^a}$$

Od rovnice (97) liší se tato přetvárná výminka pouze tím, že místo EJ máme nyní $EJ/\cos^2\alpha$. Nahradíme-li ve vzorcích (98^a), (98^b) EJ hodnotou $EJ/\cos^2\alpha$, dostaneme vzorce pro oblouk s opěrami v různé výši.

Příčinkovou čáru H pro svislé zatížení sestrojíme, jde-li o oblouk stálého průřezu, jako výslednicovou čáru $a'p'b'$ ke svislým silám z/μ, působícím ve středech obloučků stejné délky; v paprsku svislého břemene P dá tato čára pořadnici m. Dále stanovíme Σz^2 výslednicovou čarou $a'''p'''b'''$ k silám z/μ rovnoběžným s tětivou ab, jestliže volíme pól o' ve svislé vzdálenosti f od složkové čáry rovnoběžné s ab[1]); neboť pak kolmé vzdálenosti sil od osy ab jsou $z\cos\alpha$, kolmá vzdálenost pólová je $f\cos\alpha$, a vychází jako součet statických momentů

$$\Sigma\frac{z}{\mu}z\cos\alpha = f\cos\alpha\cdot n \quad \text{neboli} \quad \Sigma z^2 = \mu f n.$$

Je tedy třeba měřiti pólovou vzdálenost f od složkové čáry pro síly rovnoběžné s ab ve směru, ve kterém měříme pořadnice z. Pro svislé břímě je pak podle vzorce (99^a)

$$H = P\frac{m}{n}.$$

Pro břemena P' rovnoběžná s tětivou ab je druhá výslednicová čára $a'''p'''b'''$ jako při opěrách v téže výši příčinkovou čarou vodorovné složky reakce H_b (H_a); základní strana je $a'''p^{IV}$ ($b'''p^V$) $\| o'c$, je-li c bod určený paprskem $oc \| a'b'$ ve svislé čáře složkové a přenesený i do šikmé složkové čáry. Pro H_b (H_a) je příčinková pořadnice $\overline{p'''p^{IV}} = m'$ ($\overline{p^V p'''} = m''$) a podle vzorců (115^a), (115^b) vyjde

$$H_b = P'\frac{m'}{n}, \quad H_a = -P'\frac{m''}{n};$$

úseky m', m'' můžeme bráti prostě.

[1]) Jiné řešení, s jedinou čarou složkovou, je v obr. 85.

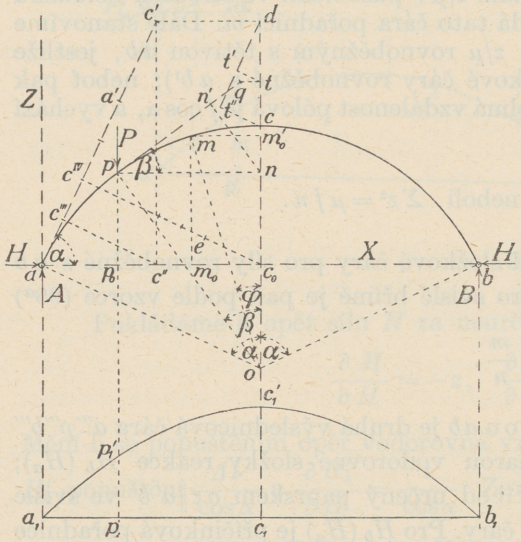
Příčinkový obrazec $M\frac{n}{z}$ sestrojíme stejně jako u oblouku s opěrami v téže výši (podle obr. 70); spojnice am určuje bod $\mathfrak{m}_1$ na přímce $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \parallel ab$ ve výši $\overline{a\mathfrak{a}} = \overline{b\mathfrak{b}} = n$ a vodorovná úsečka bodu $\mathfrak{m}_1$ rovná se zase pořadnici $\overline{a_1 a'_1}$. Příčinkový obrazec $T\frac{n\cos\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}$ sestrojíme jako v obr. 70 obrazec $T\frac{n}{\sin\varphi}$; kolmice k průřezu vedená bodem a určí na přímce $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ bod $\mathfrak{t}$, jehož vodorovná úsečka se rovná pořadnici $\overline{a_2 a'_2}$. Také příčinkový obrazec $N\frac{n\cos\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)}$ určíme stejně jako v obr. 70 obrazec $N\frac{n}{\cos\varphi}$; rovnoběžka s průřezem vedená bodem a určí na přímce $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ bod $\mathfrak{u}$, jehož vodorovná úsečka se rovná pořadnici $\overline{a_3 a'_3}$.

26. Kruhový oblouk stálého průřezu. *α) Břímě svislé.* Předpokládejme vyšší oblouk kruhový stálého průřezu, zatížený svislým břemenem P v bodě p (obr. 74). Pro vodorovnou sílu H tohoto oblouku platí vzorec (98ª), jejž jsme odvodili pro obecný oblouk vyšší[1]) ve tvaru

$$H = \frac{P\left[\frac{p'}{l}\int_0^l x z\,ds - \int_p^l (x-p) z\,ds\right] + EJ(\delta\varepsilon l - \Delta l)}{\int_0^l z^2\,ds}.$$

Oblouk kruhový řešíme nejlépe souřadnicemi polárnými. Znamenejme poloměr oblouku $\overline{o\,a} = \overline{o\,b} = \overline{o\,c} = r$ a poloviční úhel středový α; pak jest

$$l = \overline{a\,b} = 2r\sin\alpha.$$



Obr. 74.

Průvodič op budiž od osy oc odchýlen o úhel β, obecný průvodič om o úhel φ, jenž budiž kladný, je-li bod m vlevo od bodu c. Z obr. 74 vychází

$$x = \overline{a\,m_0} = \overline{a\,c_0} - \overline{m_0\,c_0} = r(\sin\alpha - \sin\varphi),$$

$$p = \overline{a\,p_0} = r(\sin\alpha - \sin\beta),$$

$$p' = \overline{p_0\,b} = \overline{p_0\,c_0} + \overline{c_0\,b} = r(\sin\alpha + \sin\beta),$$

$$z = \overline{m_0\,m} = \overline{o\,m'_0} - \overline{o\,c_0} = r(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Zvětšuje-li se oblouk s, který měříme od bodu a, zmenšuje se úhel φ, platí tedy

$$ds = -r\,d\varphi.$$

Dosadíme všechny stanovené hodnoty do integrálů, do jejichž mezí zavedeme novou nezávisle proměnnou φ: úsečce $x = 0$ odpovídá úhel α, úsečce $x = p$ úhel β, úsečce $x = l$ úhel $-\alpha$. Dostaneme pak

[1]) Přesněji řeší tento oblouk *Jos. Šolín* v „Theorii plnostěnných nosníků obloukových", str. 57 a d.; dbá též účinku normálné síly a vlivu zakřivení střednice na napětí.

$$\int_0^l z^2\,ds = -r^3\int_\alpha^{-\alpha}(\cos\varphi-\cos\alpha)^2\,d\varphi = r^3\left(\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos^2\varphi\,d\varphi - 2\cos\alpha\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi\,d\varphi + \cos^2\alpha\int_{-\alpha}^{\alpha}d\varphi\right),$$

$$\int_0^l x\,z\,ds = -r^3\int_\alpha^{-\alpha}(\sin\alpha-\sin\varphi)(\cos\varphi-\cos\alpha)\,d\varphi =$$

$$= r^3\left(\sin\alpha\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi\,d\varphi - \int_{-\alpha}^{\alpha}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi - \sin\alpha\cos\alpha\int_{-\alpha}^{\alpha}d\varphi + \cos\alpha\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin\varphi\,d\varphi\right),$$

$$\int_p^l (x-p)\,z\,ds = -r^3\int_\beta^{-\alpha}(\sin\beta-\sin\varphi)(\cos\varphi-\cos\alpha)\,d\varphi =$$

$$= r^3\left(\sin\beta\int_{-\alpha}^{\beta}\cos\varphi\,d\varphi - \int_{-\alpha}^{\beta}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi - \sin\beta\cos\alpha\int_{-\alpha}^{\beta}d\varphi + \cos\alpha\int_{-\alpha}^{\beta}\sin\varphi\,d\varphi\right).$$

Vypočteme dále integrály

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}d\varphi = 2\alpha,\quad \int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi\,d\varphi = \Big[\sin\varphi\Big]_{-\alpha}^{\alpha} = 2\sin\alpha,$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin\varphi\,d\varphi = \Big[-\cos\varphi\Big]_{-\alpha}^{\alpha} = 0,\quad \int_{-\alpha}^{\alpha}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \Big[\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\Big]_{-\alpha}^{\alpha} = 0,$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos^2\varphi\,d\varphi = \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\Big[\varphi+\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\Big]_{-\alpha}^{\alpha} = \alpha+\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\int_{-\alpha}^{\beta}d\varphi = \alpha+\beta,\quad \int_{-\alpha}^{\beta}\cos\varphi\,d\varphi = \Big[\sin\varphi\Big]_{-\alpha}^{\beta} = \sin\alpha+\sin\beta,$$

$$\int_{-\alpha}^{\beta}\sin\varphi\,d\varphi = \Big[-\cos\varphi\Big]_{-\alpha}^{\beta} = \cos\alpha-\cos\beta,$$

$$\int_{-\alpha}^{\beta}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \Big[\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\Big]_{-\alpha}^{\beta} = \tfrac{1}{2}(\sin^2\beta-\sin^2\alpha).$$

Dosazením hodnot integrálů a jednoduchou úpravou plyne

$$\int_0^l z^2\,ds = r^3(\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha+2\alpha\cos^2\alpha),\qquad \int_0^l x\,z\,ds = 2r^3\sin\alpha(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha),$$

$$\int_p^l (x-p)\,z\,ds = r^3\left[\tfrac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)^2-(\alpha+\beta)\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha(\cos\alpha-\cos\beta)\right].$$

Pak jest po dosazení hodnot a úpravě

$$\frac{p'}{l}\int_0^l x\,z\,ds - \int_p^l (x-p)\,z\,ds = r^3(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha) -$$

$$-r^3\left[\tfrac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)^2-(\alpha+\beta)\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha(\cos\alpha-\cos\beta)\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2}r^3\left[\sin^2\alpha-\sin^2\beta-2\cos\alpha(\alpha\sin\alpha-\beta\sin\beta)+2\cos\alpha(\cos\beta-\cos\alpha)\right].$$

Obecný vzorec pro vodorovnou sílu dá nyní[1])

$$H = P\frac{m}{n} + \frac{2EJ}{nr}\left(2\delta\varepsilon\sin\alpha - \frac{\Delta l}{r}\right), \tag{119}$$

[1]) Účinek změny teploty v tomto vzorci se liší od hodnoty, kterou uvádí *Jos. Šolín* v „Theorii plnostěnných nosníků obloukových", str. 59; příčina odchylky je v tom, že Šolín dbá též účinku zakřivení střednice na napětí.

znamená-li

$$m = r\,[\sin^2\alpha - \sin^2\beta - 2\cos\alpha\,(\alpha\sin\alpha - \beta\sin\beta) + 2\cos\alpha\,(\cos\beta - \cos\alpha)], \qquad (120^a)$$

$$n = 2r\,(\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha + 2\alpha\cos^2\alpha) = 2r\,[\alpha\sin^2\alpha - 3\cos\alpha\,(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)]. \qquad (120^b)$$

Vypočteme-li nebo sestrojíme-li úseky m, n, můžeme řešiti dále, jak bylo ukázáno u obecného oblouku vyššího. Ovšem bylo by lze řešiti graficky též m, n jako u obecného oblouku vyššího. Lze však úseky m, n sestrojiti podle vzorců (120^a), (120^b). Veďme v bodě a tečnu ke střednici $a\,c' \perp o\,a$ a rektifikujme na ni arc $a\,c = r\,\alpha = \overline{a\,c'}$. Přímka $c'\,c'' \perp a\,b$ určí pak

$$\overline{a\,c''} = \overline{a\,c'}\cdot\cos\alpha = r\,\alpha\cos\alpha, \quad \overline{c''\,c_0} = \overline{a\,c_0} - \overline{a\,c''} = r\,(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha).$$

Vedeme-li dále $c''\,c''' \parallel c_0\,c^{IV} \perp a\,c'$, obdržíme

$$\overline{c'''\,c^{IV}} = \overline{c''\,c_0}\cdot\cos\alpha = r\cos\alpha\,(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha).$$

Z obr. 74 plyne

$$\overline{c''\,c'} = \overline{a\,c'}\cdot\sin\alpha = r\,\alpha\sin\alpha, \quad \overline{c'''\,c'} = \overline{c''\,c'}\cdot\sin\alpha = r\,\alpha\sin^2\alpha,$$

i jest, přeneseme-li ještě $3\cdot\overline{c'''\,c^{IV}} = \overline{c'''\,a'}$,

$$n = 2\,(\overline{c'''\,c'} - 3\,\overline{c'''\,c^{IV}}) = 2\cdot\overline{a'\,c'}.$$

Na tečnu ke střednici v bodě p přeneseme arc $p\,c = r\,\beta = \overline{p\,q}$; přímka $c'\,d \parallel a\,b$ určí úsek

$$\overline{c_0\,d} = \overline{c''\,c'} = r\,\alpha\sin\alpha,$$

a poněvadž $\overline{o\,c_0} = r\cos\alpha$, vyjde

$$\overline{o\,d} = \overline{o\,c_0} + \overline{c_0\,d} = r\,(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha).$$

Podobně dá přímka $q\,t \parallel a\,b$ úsek

$$\overline{o\,t} = r\,(\cos\beta + \beta\sin\beta).$$

Pak jest

$$\overline{t\,d} = \overline{o\,d} - \overline{o\,t} = r\,(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha - \cos\beta - \beta\sin\beta).$$

Přímka $t\,t' \perp d\,t'$, je-li $d\,t' \parallel a\,c'$, určí úsek

$$\overline{t\,t'} = \overline{t\,d}\cdot\cos\alpha = r\cos\alpha\,(\cos\alpha - \cos\beta + \alpha\sin\alpha - \beta\sin\beta);$$

máme již

$$\overline{c^{IV}\,c_0} = \overline{a\,c_0}\cdot\sin\alpha = r\sin^2\alpha.$$

Vedeme-li $p\,n \parallel a\,b$, $n\,n' \perp p\,q$, obdržíme

$$\overline{n\,n'} = \overline{p\,n}\cdot\sin\beta = r\sin^2\beta,$$

i jest konečně

$$m = \overline{c^{IV}\,c_0} - \overline{n\,n'} - 2\,\overline{t\,t'} = \overline{e\,c_0}, \quad \text{kde } \overline{c^{IV}\,e} = \overline{n\,n'} + 2\,\overline{t\,t'}.$$

Pořadnici $m = \overline{e\,c_0} = \overline{p_1\,p_1'}$ přeneseme od osy $a_1\,b_1$ a obdržíme tím obecný bod p_1' příčinkové čáry síly H. Mění-li se poloha p břemene P, mění se v odvozeném sestrojení pouze tečna $p\,q$ a přímky $p\,n$, $n\,n'$, $q\,t$ a $t\,t'$; úseky $\overline{a'\,c'}$ a $\overline{c^{IV}\,c_0}$ zůstávají stálými. Pro polohu břemene v bodě c dosadíme $\beta = 0$ a vyjde ze vzorce (120^a)

$$m_c = r\,[\sin^2\alpha + 2\cos\alpha\,(1 - \cos\alpha - \alpha\sin\alpha)]. \qquad (120^c)$$

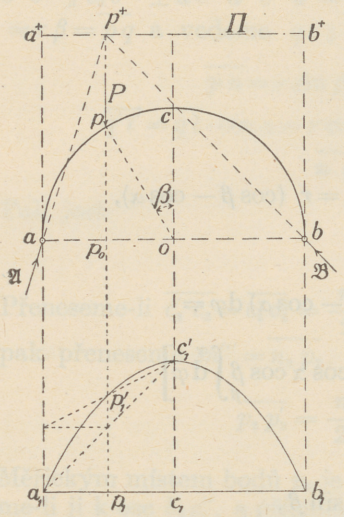
V sestrojení splynou pro polohu břemene v bodě c body p, q, t, n, n' s bodem c a vyjde

$$m_c = \overline{c^{IV} c_0} - 2\,\overline{c\,t''} = \overline{c_1 c_1'},$$

je-li $c\,t'' \perp d\,t'$.[1])

Je-li sestrojena příčinková čára síly H a úsek n, určíme dále sečnici a příčinkové čáry momentu, síly posouvající a síly normálné jako u obecného oblouku vyššího (viz obr. 66 a 70).

U oblouku polokruhového (obr. 75) jest $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, tedy $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$; tím vyjde ze vzorců (120[a]), (120[b])



Obr. 75.

$$m = r\,(1 - \sin^2\beta) = r\cos^2\beta, \quad n = \pi r$$

a ze vzorce (119)

$$H = P\frac{\cos^2\beta}{\pi} + \frac{2EJ}{\pi r^2}\left(2\,\delta\varepsilon - \frac{\Delta l}{r}\right). \qquad (121)$$

Dbáme-li pouze břemene, jest

$$H = P\frac{\cos^2\beta}{\pi}. \qquad (121^a)$$

Pro $\beta = 0$ vyjde z toho $H_c = \dfrac{P}{\pi}$ a

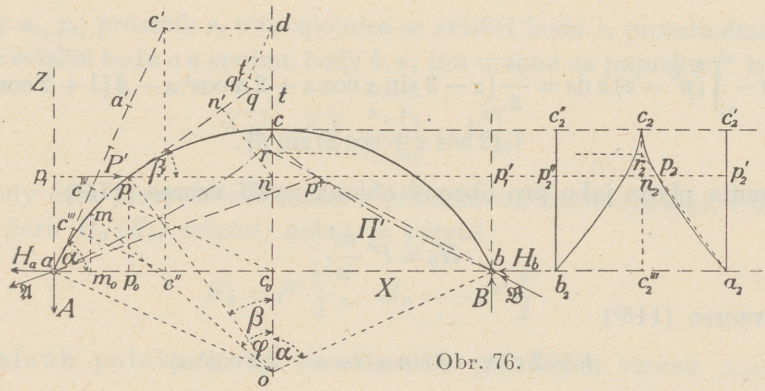
$$H_c - H = P\frac{\sin^2\beta}{\pi} = P\frac{(r-p)^2}{\pi r^2}.$$

Podle tohoto vzorce, jenž vyjadřuje rovnici příčinkové čáry H vztažené k tečně v bodě c_1', je příčinkovou čarou H obyčejná parabola, jejíž osou je svislice bodu c. Pro bod c dostaneme $m_c = r = \overline{c_1 c_1'}$, čímž je parabola $a_1 p_1' c_1' b_1$ určena. Sečnice má podle vzorce (100[a]) pořadnici

$$\zeta = \frac{n\,p\,p'}{l\,m} = \frac{\pi r^3\,(1-\sin\beta)\,(1+\sin\beta)}{2\,r^2\cos^2\beta} = \frac{\pi r}{2};$$

je tedy sečnicí vodorovná přímka $a^+ b^+$ ve výši $\overline{a\,a^+} = \overline{b\,b^+} = \frac{1}{2}\pi r = \text{arc}\,a\,c$.

β) ***Břímě vodorovné P',*** jež působí ve výši $\overline{p_0\,p} = p''$ nad vodorovnou tětivou $a\,b$ (obr. 76), dá jako při vyšším oblouku stálého průřezu podle vzorce (114[a]) reakci



Obr. 76.

[1]) Bylo by lze sestrojiti přímo též tečnu k příčinkové čáře H v obecném bodě a sečnici; viz *Jos. Šolín* „Theorie plnostěnných nosníků obloukových“, str. 65.

$$H_b = P' \frac{\frac{p''}{l_0}\int_0^l x' z \, ds - \int_0^p (p'' - z) z \, ds}{\int_0^l z^2 \, ds}.$$

Odvodili jsme již při svislém břemeni

$$\int_0^l z^2 \, ds = r^3 (\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \alpha \cos^2 \alpha), \qquad \int_0^l x z \, ds = 2 r^3 \sin \alpha (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha);$$

pro souměrný oblouk platí

$$\int_0^l x z \, ds = \int_0^l x' z \, ds.$$

Dále jest

$$z = \overline{m_0 m} = r (\cos \varphi - \cos \alpha), \quad p'' = \overline{p_0 p} = \overline{o n} - \overline{o c_0} = r \ (\cos \beta - \cos \alpha),$$

i vyjde

$$\int_0^p (p'' - z) z \, ds = -r^3 \int_\alpha^\beta (\cos \beta - \cos \varphi) (\cos \varphi - \cos \alpha) \, d\varphi =$$

$$= r^3 \left[(\cos \alpha + \cos \beta) \int_\beta^\alpha \cos \varphi \, d\varphi - \int_\beta^\alpha \cos^2 \varphi \, d\varphi - \cos \alpha \cos \beta \int_\beta^\alpha d\varphi \right].$$

Integrály mají hodnoty

$$\int_\beta^\alpha d\varphi = \alpha - \beta, \quad \int_\beta^\alpha \cos \varphi \, d\varphi = \sin \alpha - \sin \beta,$$

$$\int_\beta^\alpha \cos^2 \varphi \, d\varphi = \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta + \sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta).$$

Dosazením jich a úpravou výsledku stanovíme

$$\int_0^p (p'' - z) z \, ds = r^3 \left[(\cos \alpha + \cos \beta) (\sin \alpha - \sin \beta) - \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) (1 + 2 \cos \alpha \cos \beta) - \right.$$

$$\left. - \tfrac{1}{2} (\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta) \right].$$

Pak určíme

$$\frac{p''}{l_0}\int_0^l x' z \, ds - \int_0^p (p'' - z) z \, ds = \frac{r^3}{2} [\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \alpha \cos^2 \alpha - \beta (1 + 2 \cos \alpha \cos \beta) +$$

$$+ (2 \cos \alpha + \cos \beta) \sin \beta].$$

Dosazením plyne jako pro obecný oblouk vyšší vzorec (115^a)

$$H_b = P' \frac{m'}{n},$$

je-li podle vzorce (115^b)

$$n = 2 r (\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \alpha \cos^2 \alpha)$$

a

$$m' = \frac{n}{2} - m''', \; m''' = r [\beta - \sin \beta \cos \beta - 2 \cos \alpha (\sin \beta - \beta \cos \beta)]. \qquad (122^a)$$

Vzorec (113) dá opět vzorec (115^b)

$$H_a = H_b - P' = -P' \frac{m''}{n},$$

kde jest

$$m'' = \frac{n}{2} + m'''. \tag{122^b}$$

Při svislém břemeni jsme již určili $n = 2 \cdot \overline{a' c'}$, je-li $\overline{a c'} = \text{arc}\ a c$, dále $c' c'' \perp a c_0$, $c'' c''' \parallel c_0 c^{IV} \perp a c'$ a $\overline{c''' a'} = 3 \cdot \overline{c''' c^{IV}}$. Na tečnu v bodě p přeneseme zase arc $p c = r\beta = \overline{p q}$ a vedeme $q t \parallel c' d \parallel a b$, $d t' \parallel a c'$, $q q' \parallel t t' \perp d t'$, $n n' \perp p q$; tím určíme

$$\overline{p n} = r \sin\beta,\ \overline{q t} = \overline{p n} - \overline{p q} \cdot \cos\beta = r(\sin\beta - \beta\cos\beta),$$
$$\overline{q' t'} = \overline{q t} \cdot \cos\alpha = r\cos\alpha(\sin\beta - \beta\cos\beta),\ \overline{p n'} = \overline{p n} \cdot \cos\beta = r\sin\beta\cos\beta,$$
$$\overline{n' q} = \overline{p q} - \overline{p n'} = r(\beta - \sin\beta\cos\beta).$$

Pak jest

$$m''' = \overline{n' q} - 2\overline{q' t'}.$$

Přeneseme-li $\overline{c_2'' c_2} = \overline{c_2 c_2'} = \frac{n}{2} = \overline{a' c'}$ a vedeme-li body c_2, c_2', c_2'' svislice, od prostřední pak přeneseme $m''' = \overline{n_2 p_2}$, obdržíme

$$\overline{p_2 p_2'} = \frac{n}{2} - m''' = m',\quad \overline{p_2'' p_2} = \frac{n}{2} + m''' = m''.$$

Měřickým místem bodů p_2 je křivka $a_2 p_2 c_2 b_2$, která je příčinkovou čarou H_a, vztahujeme-li ji k ose $b_2 c_2''$, a příčinkovou čarou H_b, měříme-li vodorovné pořadnice od osy $a_2 c_2'$.

Sečnice II' plyne jako u obecného oblouku vyššího ze vzorce (116), jenž zde dá

$$\mathfrak{x}' = \overline{p^+ p_1'} = l\frac{m'}{n} = \frac{l}{2} - l\frac{m'''}{n}; \tag{123^a}$$

bod p^+ má pak od svislice bodu a vzdálenost

$$\mathfrak{x} = \overline{p_1 p^+} = l - \mathfrak{x}' = \frac{l}{2} + l\frac{m'''}{n}. \tag{123^b}$$

Spojme body a_2, p_2, průsečík r_2 této spojnice se svislicí bodu c_2 promítněme vodorovně do bodu r na svislici bodu c a spojme body b, r; tím určíme na paprsku P' bod p^+, neboť

$$\overline{n p^+} = \overline{c_0 b} \cdot \frac{\overline{n_2 p_2}}{\overline{c_2''' a_2}} = l\frac{m'''}{n}.$$

Sečnice je tedy čára perspektivně afinní s příčinkovou čarou H_a (H_b), i lze nahraditi příčinkovou čáru H_a (H_b) sečnicí; neboť je patrně

$$H_b = P'\frac{\mathfrak{x}'}{l},\quad H_a = -P'\frac{\mathfrak{x}}{l}. \tag{124}$$

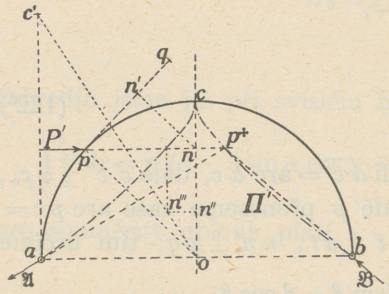
Pro oblouk polokruhový dosadíme do předešlých vzorců $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $l = 2r$ a vyjde

$$n = \pi r,\quad m''' = r(\beta - \sin\beta\cos\beta),\quad l\frac{m'''}{n} = \frac{2r}{\pi}(\beta - \sin\beta\cos\beta). \tag{125}$$

Na tečnu v bodě a (obr. 77) přeneseme arc $a\,c = \frac{1}{2}\pi r = \overline{a\,c'}$, na tečnu v bodě p přeneseme arc $p\,c = r\,\beta = \overline{p\,q}$ a vedeme $n\,n' \perp p\,q$. Podle obecného oblouku jest

$$\overline{n'\,q} = r\,(\beta - \sin\beta\cos\beta) = m''';$$

příčinková čára H_a (H_b) sestrojila by se pak jako v obr. 76, neboť známe též $n = 2 \cdot \overline{a\,c'}$.



Obr. 77.

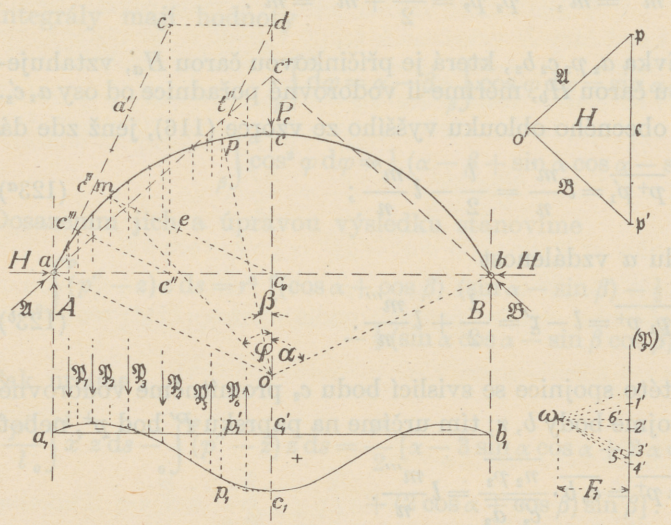
Sečnici Π' určíme přímo, přeneseme-li $\overline{n'\,q} = \overline{o\,n''}$; na vodorovnici v bodě n'' omezí spojnice $o\,c'$ úsek

$$\overline{n'''\,n''} = \overline{o\,n''} \cdot \frac{\overline{a\,o}}{\overline{a\,c'}} = \frac{2r}{\pi}(\beta - \sin\beta\cos\beta) = l\frac{m'''}{n}.$$

Podle vzorců (123) stačí přenésti nyní $\overline{n'''\,n''} = \overline{n\,p^+}$ a tím jest určen bod p^+ sečnice. Sečnicí můžeme pak nahraditi příčinkovou čáru H_a (H_b) a řešiti vodorovné složky reakcí podle vzorců (124).

*γ) **Přetvoření.*** Stanovme nejprve příčinkovou čáru průhybu středu oblouku c, z níž lze řešiti pak průhyb středu c vyvozený libovolným zatížením stálým nebo pohyblivým. Hledaná příčinková čára jest ohybovou čarou nosníku zatíženého v bodě c břemenem $P_c = 1$ (obr. 78). Toto břímě vyvodí v opěrách a, b svislé reakce $A = B = \frac{1}{2}P_c = \frac{1}{2}$ a podle vzorce (119) vodorovnou sílu $H = P\frac{m_c}{n}$; pořadnice m_c byla již určena vzorcem (120^c). K bodu m na levé polovici střednice dostaneme pak moment

$$M = A\,x - H\,z = \tfrac{1}{2}x - H\,z.$$



Obr. 78.

Ohybová čára je výslednicovou čarou ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plocha má pořadnice

$$\mathfrak{y}' = \frac{e\,F\,M}{E\,J\cos\varphi},$$

nedbáme-li účinku normálné síly a změny teploty; tento budeme řešiti zvláště. Řešme nejprve počtem; zvolíme $e = F = 1$, dosadíme za moment M a obdržíme

$$\mathfrak{y}' = \frac{\frac{1}{2}x - H\,z}{E\,J\cos\varphi}.$$

Zaveďme souřadnice polárné, v nichž vyjádříme

$$z = r\,(\cos\varphi - \cos\alpha),$$
$$x = r\,(\sin\alpha - \sin\varphi);$$

pak vyjde

$$\mathfrak{y}' = \frac{r}{2} \cdot \frac{\sin\alpha - \sin\varphi - 2\,H\,(\cos\varphi - \cos\alpha)}{E\,J\cos\varphi}.$$

Určovací plocha daná pořadnicemi $\mathfrak{y}'$ je souměrná ke svislici středu c. Spojitá soustava daná touto plochou určovací vyvodí, působí-li na prostý nosník délky $\overline{a\,b} = l$, v jeho podporách reakce

$$\mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{B}'_0 = \int_0^c \mathfrak{y}'\,dx$$

a ve svislici bodu p moment

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{A}_0\, p - \int_0^p \mathfrak{y}'\,(p-x)\,\mathrm{d}x,$$

který znamená hledanou příčinkovou pořadnici průhybu η_c. V souřadnicích polárných jest

$$p = r\,(\sin\alpha - \sin\beta),\quad p - x = r\,(\sin\varphi - \sin\beta),\quad \mathrm{d}x = -r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi,$$

takže vyjde

$$\mathfrak{A}_0' = -\frac{r^2}{2EJ}\int_\alpha^0 [\sin\alpha - \sin\varphi - 2H\,(\cos\varphi - \cos\alpha)]\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{r^2}{2EJ}\left[\sin\alpha\int_0^\alpha \mathrm{d}\varphi - \int_0^\alpha \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi - 2H\left(\int_0^\alpha \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi - \cos\alpha\int_0^\alpha \mathrm{d}\varphi\right)\right] =$$

$$= \frac{r^2}{2EJ}\,[\alpha\sin\alpha + \cos\alpha - 1 - 2H\,(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)],$$

$$\int_0^p \mathfrak{y}'\,(p-x)\,\mathrm{d}x = -\frac{r^3}{2EJ}\int_\alpha^\beta [\sin\alpha - \sin\varphi - 2H\,(\cos\varphi - \cos\alpha)]\,(\sin\varphi - \sin\beta)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{r^3}{2EJ}\int_\beta^\alpha [\sin\alpha\sin\varphi - \sin\alpha\sin\beta - \sin^2\varphi + \sin\beta\sin\varphi - 2H\,(\sin\varphi\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi -$$

$$- \sin\beta\cos\varphi + \cos\alpha\sin\beta)]\,\mathrm{d}\varphi = \frac{r^3}{2EJ}\left\{\sin\alpha\,(\cos\beta - \cos\alpha) - (\alpha-\beta)\sin\alpha\sin\beta -\right.$$

$$- \tfrac{1}{2}\,(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha - \beta + \sin\beta\cos\beta) + \sin\beta\,(\cos\beta - \cos\alpha) - 2H\,\left[\tfrac{1}{2}\,(\sin^2\alpha - \sin^2\beta) -\right.$$

$$\left.\left. - \cos\alpha\,(\cos\beta - \cos\alpha) - \sin\beta\,(\sin\alpha - \sin\beta) + (\alpha-\beta)\cos\alpha\sin\beta\right]\right\}.$$

Dosazením stanovených hodnot do vzorce pro $\mathfrak{M} = \eta_c$ dostaneme po zjednodušení a úpravě

$$\eta_c = \frac{r^3}{4EJ}\left[2\sin\alpha\,(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha - \beta\sin\beta - \cos\beta) + \alpha + \sin\alpha\cos\alpha - \beta - \sin\beta\cos\beta -\right.$$

$$\left. - 2\,(\sin\alpha - \sin\beta) - 2H\frac{m}{r}\right], \qquad (126)$$

znamená-li m příčinkovou pořadnici vodorovné síly pro svislé zatížení, danou vzorcem (12c^a). Vzorcem (126) jest určena pořadnice příčinkové čáry průhybu bodu c ve svislici bodu p daného úhlem β.

Řešíce příčinkovou čáru průhybu bodu c graficky (obr. 78), stanovíme nejprve momentový obrazec. K břemeni P_c určíme vodorovnou sílu $H = P_c\frac{m_c}{n}$, kde jest podle dřívějšího řešení (obr. 74) $n = 2\cdot\overline{a'c'}$, $m_c = \overline{c^{IV}c_0} - 2\cdot\overline{ct''}$. Zvolíme-li úsek břemene $P_c = \overline{\mathfrak{p}\mathfrak{p}'} = n$, jest úsek vodorovné síly $H_c = \overline{o'\mathfrak{c}} = m_c$; výslední reakce mají úseky $\mathfrak{A} = \overline{o'\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{p}'o'}$ a paprsky jejich, rovnoběžné s úseky a procházející body a, b, sekou se na paprsku břemene v bodě c^+. Střednice oblouku a lomená čára ac^+b omezují plochu momentů M; pólovou vzdáleností je tu síla H_c. Znamenáme-li momentovou pořadnici v libovolném místě y, jest $M = H_c y$.

Ohybová čára je pak výslednicovou čarou ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plocha má, nedbáme-li normálné síly, pořadnice

$$\mathfrak{y}' = \frac{eFM}{EJ\cos\varphi} = \frac{eFH_c y}{EJ\cos\varphi}.$$

Proužek určovací plochy, dané pořadnicemi $\mathfrak{y}'$, nahradili bychom břemenem

$$\mathrm{d}\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{y}'\,\mathrm{d}x}{e} = \frac{FH_c y}{EJ}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos\varphi} = \frac{FH_c}{EJ}\,y\,\mathrm{d}s.$$

Zvolíme-li

$$F = \frac{EJ}{e H_c}, \tag{127}$$

obdržíme elementární břímě

$$\mathrm{d}\mathfrak{P} = \frac{y}{e}\,\mathrm{d}s.$$

Při skutečném řešení nahradíme prvek $\mathrm{d}s$ konečným obloučkem σ; na střednici přenášíme (na př. od bodu c) dílky σ, svislicemi mezí jejich rozdělíme momentovou plochu na proužky a v tížnicích proužků dáme působiti svislým ideálním břemenům

$$\mathfrak{P} = \frac{y\sigma}{e}.$$

Zvolíme-li $\frac{\sigma}{e} = \frac{1}{\mu}$, vyjde prostě pro stálou délku obloučku σ břímě $\mathfrak{P} = \frac{y}{\mu}$, znamená-li y střední svislou pořadnici každého (i trojúhelníkového) proužku plochy momentové. U obloučku délky σ' dostali bychom $\mathfrak{P} = \frac{y}{\mu} \cdot \frac{\sigma'}{\sigma}$. Momentům kladným (záporným) odpovídají síly, jež působí vzhůru (dolů). Poněvadž by vzdálenost F podle vzorce (127) byla v praktických případech příliš velká, zvolíme příhodně pól ω na vodorovnici středu složkové čáry pro celý nosník na př. v libovolné vzdálenosti F_1. Z pólu ω rýsujeme k břemenům $\mathfrak{P}$ výslednicovou čáru $a_1 p_1 c_1 b_1$, do níž vepíšeme křivku, dotýkající se stran lomené čáry výslednicové na prodloužených svislých mezích proužkových. Výslednicová čára $a_1 p_1 c_1 b_1$ je souměrná ke svislici bodu c, stačí tedy omeziti řešení na polovici nosníku a na druhé polovici užíti této souměrnosti. Základní strana ohybové čáry je stanovena výminkami opěrovými; poněvadž jsou body a, b pevné, jsou v nich ohybové pořadnice rovny nule a základní strana spojuje průsečíky a_1, b_1 ohybové čáry se svislicemi bodů a, b. Vzdálenosti pólové F_1 odpovídá ve svislici libovolného bodu p pořadnice $\overline{p' p_1} = \eta_1$; správná pořadnice příčinková, jež by plynula z pólové vzdálenosti F, je dána vzorcem

$$\eta = \eta_1 \frac{F_1}{F}.$$

Ohybové pořadnice pod (nad) osou $a_1 b_1$ znamenají průhyby kladné (záporné), t. j. ve smyslu dolů (vzhůru).

Vyšetřme též ohybovou čáru nosníku, kterou vyvodí změna teploty. Její účinek se jeví podle vzorce (119) v opěrách vodorovnou silou

$$H_t = \frac{4 E J \delta \varepsilon \sin \alpha}{n r}. \tag{119a}$$

Ohybová čára vyvozená pouhou změnou teploty plyne z předchozího řešení příčinkové čáry průhybu jakožto ohybové čáry nosníku, uvažujeme-li pouze vodorovnou sílu H a vynecháme-li všechny členy, jež neobsahují H; v nich se jeví účinek sil svislých. Tím obdržíme onu část ohybové čáry, jež plyne pouze z momentů ohybových, podle vzorce (126) dánu rovnicí

$$\eta_t' = -\frac{H_t m r^2}{2 E J} = -2 \delta \varepsilon \frac{m}{n} r \sin \alpha. \tag{128a}$$

Tato část ohybové čáry má týž tvar jako příčinková čára H, z jejíchž pořadnic m vypočteme ohybové pořadnice η_t', násobíme-li m stálým činitelem $-2 \delta \varepsilon \frac{r}{n} \sin \alpha$.

Mimo moment ohybový má na ohybovou čáru vliv také normálná síla a změna teploty, jež dají podle vzorce (75), klademe-li $e = F = 1$, pořadnici určovací plochy

$$\mathfrak{y}'' = \frac{\mathrm{d}\left[\left(\frac{N}{E\,U} + \delta\,\varepsilon\right)\operatorname{tg}\varphi\right]}{\mathrm{d}\,x}.$$

Jde-li o vyšší oblouk, lze tu vynechati $N/E\,U$ proti $\delta\,\varepsilon$, jak plyne z příkladu 13; pak jest

$$\mathfrak{y}'' = \delta\,\varepsilon\,\frac{\mathrm{d}\operatorname{tg}\varphi}{\mathrm{d}\,x}. \tag{129a}$$

U kruhového oblouku jest

$$x = r\,(\sin\alpha - \sin\varphi),\ \mathrm{d}x = -\,r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi,\ \mathrm{d}\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi}$$

i vyjde

$$\mathfrak{y}'' = -\,\frac{\delta\,\varepsilon}{r\cos^3\varphi}, \tag{129b}$$

jak bylo odvozeno již v příkladě 13.

Spojitá soustava silová, jejíž určovací plocha má pořadnice $\mathfrak{y}''$, je souměrná ke svislici středu oblouku a vyvodí v podporách prostého nosníku svislé reakce

$$\mathfrak{A}_0'' = \mathfrak{B}_0'' = \int_0^c \mathfrak{y}''\,\mathrm{d}x = \delta\,\varepsilon \int_\alpha^0 \frac{\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\cos^3\varphi} = -\,\delta\,\varepsilon \int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi} = -\,\delta\,\varepsilon\operatorname{tg}\alpha.$$

Pořadnici η_i'' ohybové čáry ve svislici bodu p, jenž má vzdálenost p od svislice bodu a, určíme jako moment prostého nosníku

$$\eta_i'' = \mathfrak{M}'' = \mathfrak{A}_0''\,p - \int_0^p \mathfrak{y}''\,(p - x)\,\mathrm{d}x.$$

Dosadíme mimo hodnoty již určené

$$p = r\,(\sin\alpha - \sin\beta),\ \ p - x = r\,(\sin\varphi - \sin\beta)$$

a dostaneme

$$\int_0^p \mathfrak{y}''\,(p - x)\,\mathrm{d}x = \delta\,\varepsilon\,r \int_\alpha^\beta \frac{1}{\cos^2\varphi}\,(\sin\varphi - \sin\beta)\,\mathrm{d}\varphi = -\,\delta\,\varepsilon\,r \int_\beta^\alpha \left(\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{\sin\beta}{\cos^2\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi.$$

Vyčíslíme integrály

$$\int_\beta^\alpha \frac{\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi} = -\int_\beta^\alpha \frac{\mathrm{d}\cos\varphi}{\cos^2\varphi} = \left[\frac{1}{\cos\varphi}\right]_\beta^\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\beta},$$

$$\int_\beta^\alpha \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi} = \Big[\operatorname{tg}\varphi\Big]_\beta^\alpha = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta.$$

Dosazením plyne

$$\int_0^p \mathfrak{y}''\,(p - x)\,\mathrm{d}x = -\,\delta\,\varepsilon\,r\left[\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\beta} - \sin\beta\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)\right],$$

$$\eta_i'' = -\,\delta\,\varepsilon\,r\operatorname{tg}\alpha\,(\sin\alpha - \sin\beta) + \delta\,\varepsilon\,r\left[\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\beta} - \sin\beta\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)\right];$$

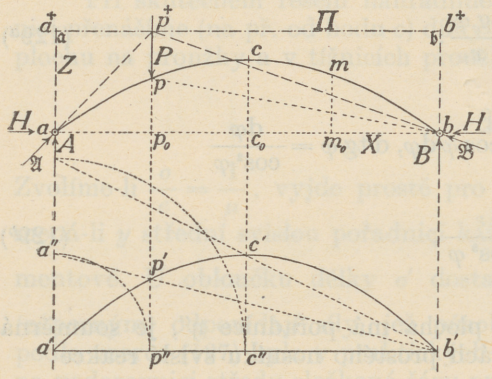
jednoduchou úpravou vyjde

$$\eta_i'' = -\,\delta\,\varepsilon\,r\,(\cos\beta - \cos\alpha). \tag{128b}$$

Celkem tedy vyvodí změna teploty ohybové pořadnice

$$\eta_t = \eta_t' + \eta_t'' = -\delta\varepsilon r\left(\frac{2m}{n}\sin\alpha + \cos\beta - \cos\alpha\right), \tag{128c}$$

27. Nízký oblouk parabolický. *α) Břímě svislé.* Poměr výšky $\overline{c_0 c} = h$ a rozpětí $\overline{a b} = l$ oblouku budiž malý, střednicí oblouku pak budiž parabola. Na oblouk nechť působí svislé břímě P v bodě p (obr. 79). Jsou-li opěrové body a, b na vodorovnici, určí se svislé složky A, B opěrových reakcí jako reakce prostého nosníku. Vodorovnou sílu H řešíme pak z výminky přetvárné, jež má pro jakýkoli oblouk o dvou kloubech obecný tvar rovnice (96). U nízkých oblouků může býti normálná síla značná; proto musíme její vliv uvažovati.



Obr. 79.

Řešení nízkého oblouku zjednodušíme, nahradíme-li

$$\frac{ds}{J} = \frac{dx}{J\cos\varphi} = \frac{dx}{J_0}$$

a pokládáme-li $J_0 = J\cos\varphi$ a obsah průřezu U za stálé. Má-li oblouk stálý průřez, lze tak učiniti dosti přibližně, poněvadž se u nízkého oblouku úhel φ málo mění; mění-li se průřez oblouku, klademe přibližně za J_0 a U střední hodnoty. Násobme přetvárnou výminku (96) po této úpravě EJ_0 a položme $\frac{J_0}{U} = i_0^2$; dostaneme přetvárnou výminku pro jakýkoli nízký oblouk ve tvaru rovnice

$$\int_0^l M z\,dx + \int_0^l (N i_0^2 + EJ_0\delta\varepsilon)\,dx = EJ_0\Delta l. \tag{130a}$$

Účinku normálné síly dbejme jen přibližně. Při svislém břemeni je vodorovná síla H stálá, úhel φ se pak u nízkého oblouku nepatrně mění; položme $\cos\varphi \doteq 1$, $\sin\varphi \doteq 0$ a dostaneme

$$N = -H\cos\varphi - V\sin\varphi \doteq -H.$$

Dosazením této hodnoty do výminky přetvárné plyne, je-li změna teploty stálá, rovnice

$$\int_0^l M z\,dx - H i_0^2 l = EJ_0(\Delta l - \delta\varepsilon l), \tag{130b}$$

jež znamená přetvárnou výminku pro jakýkoli nízký oblouk za svislých břemen.

Jediné svislé břímě P, jež působí na oblouk v bodě p ($\overline{a p_0} = p$), vyvodí v bodě m o souřadnicích $\overline{a m_0} = x$, $\overline{m_0 m} = z$ moment

$$M = Ax - Hz - P(x - p);$$

poslední člen v tomto vzorci platí pouze vpravo od břemene P. Z přetvárné výminky vychází dosazením za moment rovnice

$$A\int_0^l x z\,dx - H\int_0^l z^2\,dx - P\int_p^l (x - p) z\,dx - H i_0^2 l = EJ_0(\Delta l - \delta\varepsilon l).$$

Prvé dva integrály v této rovnici odvodíme výhodně z jejich statického významu. Tak znamená $\int_0^l x z \, dx$ statický moment plochy acb, omezené střednicí a tětivou ab, vzhledem k ose Z; poněvadž pak je pl. $acb = \frac{2}{3} h l$ a těžiště její je na svislici středu c, vyjde

$$\int_0^l x z \, dx = \tfrac{2}{3} h l \cdot \tfrac{1}{2} l = \tfrac{1}{3} h l^2.$$

Dále jest $\int_0^l z^2 \, dx$ dvojnásobný statický moment plochy acb k ose X, neboť prvek $z \, dx$ této plochy měl by k ose X statický moment $\frac{1}{2} z^2 \, dx$; těžiště plochy acb má od osy X vzdálenost $\frac{2}{5} h$ i jest

$$\int_0^l z^2 \, dx = 2 \cdot \tfrac{2}{3} h l \cdot \tfrac{2}{5} h = \tfrac{8}{15} h^2 l.$$

Také $\int_p^l (x - p) z \, dx$ bylo by lze určiti podobně; znamená statický moment plochy $pcbp_0$ k paprsku P a stanovil by se rozkladem této plochy na trojúhelník $p b p_0$ a parabolickou úseč $p c b$. Jinak řešíme počtem, vyjádříme-li z jakožto funkci x z rovnice paraboly; odvoďme ji staticky. Parabola je výslednicovou čarou pro zatížení rovnoměrné; parabolická úseč $a c b$ je pak momentovou plochou prostého nosníku pro zatížení rovnoměrné. Znamená-li f příslušnou vzdálenost pólovou a q zatížení poměrné, vyjde v bodě m

$$f z = \mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} q x (l - x)$$

a v bodě c

$$f h = \mathfrak{M}_c = \tfrac{1}{8} q l^2.$$

Dělením obou rovnic dostaneme rovnici střednice

$$\frac{z}{h} = \frac{4 x (l - x)}{l^2} \text{ nebo } z = \frac{4 h}{l^2} x (l - x). \tag{131}$$

Pak plyne

$$\int_p^l (x - p) z \, dx = \frac{4 h}{l^2} \int_p^l (x - p) x (l - x) \, dx.$$

Zaveďme sem vzdálenosti od svislice bodu b, jež znamenejme $x' = l - x$, $p' = l - p$; tu vyjde

$$x - p = l - x' - (l - p') = p' - x', \quad dx = -dx'$$

a spodní mez integrálu podle nové proměnné x' jest p', horní mez pak 0. Tím určíme po úpravě

$$\int_p^l (x - p) z \, dx = -\frac{4h}{l^2} \int_{p'}^0 (p' - x') x' (l - x') \, dx' = \frac{4 h}{l^2} \int_0^{p'} (p' - x') x' (l - x') \, dx' = \frac{h}{3 l^2} p'^2 (l^2 - p^2).$$

Stanovené hodnoty integrálů dosaďme do výminky přetvárné zároveň s hodnotou $A = P \frac{p'}{l}$; dostaneme rovnici

$$P \frac{p'}{l} \cdot \frac{1}{3} h l^2 - H \cdot \frac{8}{15} h^2 l - P \frac{h}{3 l^2} p'^2 (l^2 - p^2) - H i_0^2 l = E J_0 (\Delta l - \delta \varepsilon l).$$

Z toho plyne řešením a úpravou vzorec

$$H = \frac{5 P p p' (l^2 + p p')}{8 \alpha h l^3} + \frac{15 E J_0}{8 \alpha h^2} \left(\delta \varepsilon - \frac{\Delta l}{l} \right), \tag{132}$$

v němž znamená

$$\alpha = 1 + \frac{15}{8}\frac{i_0^2}{h^2} \tag{133}$$

součinitele, v jehož druhém členu se jeví účinek zkrácení střednice silou normálnou.

V prvém členu vzorce (132) jest účinek břemene

$$H = \frac{5 P p p' (l^2 + p p')}{8 \alpha h l^3}, \tag{132a}$$

v druhém se jeví účinek změny teploty

$$H_t = \frac{15 E J_0 \delta \varepsilon}{8 \alpha h^2} \tag{132b}$$

a účinek popuštění opěr

$$H_{(a)} = -\frac{15 E J_0 \cdot \Delta l}{8 \alpha h^2 l}. \tag{132c}$$

Oba poslední účinky vedlejší můžeme řešiti zvláště a hodnoty jimi vyvozené připočísti k hodnotám, jež plynou ze zatížení.

Břímě P samo vyvodí vodorovnou sílu H danou vzorcem (132a). Pohybuje-li se břímě P po nosníku, mění se úsečky p a $p' = l - p$; síla H se pak mění podle paraboly čtvrtého stupně. Poněvadž jest odvození vzorce (132a) jen přibližné, zjednodušme jej tak, aby byla příčinkovou čarou H obyčejná parabola. Položme

$$l^2 = + p p' = l \eta \quad \text{nebo} \quad \eta = l + \frac{p p'}{l};$$

úsek η by se měnil jako pořadnice obyčejné paraboly se svislou osou, jež by měla ve svislici bodů a ($p = 0$) a b ($p' = 0$) pořadnici l, uprostřed ($p = p' = \frac{1}{2} l$) pořadnici $r_c = \frac{5}{4} l$. Nahraďme přibližně proměnný úsek η stálým úsekem η_0, jejž určíme tak, aby pro plné zatížení rovnoměrné vyšla stejná hodnota H, užíváme-li proměnné hodnoty η, tedy vzorce (132a), nebo místo $l^2 + p p'$ stálé hodnoty $l \eta_0$, jež dá vzorec

$$H = \frac{5 P p p'}{8 \alpha h l^3} \cdot l \eta_0.$$

Při rovnoměrném zatížení připadne na prvek $\mathrm{d}p$ úsečky břímě $q\,\mathrm{d}p$, jímž nahradíme v předešlých vzorcích břímě P; dostaneme tak $\mathrm{d}H$ a integrací vypočteme H. Ze vzorce (132a) vyjde pro plné zatížení rovnoměrné

$$H = \frac{5 q}{8 \alpha h l^3} \int_0^l p p' (l^2 + p p') \, \mathrm{d}p;$$

nahradíme-li $l^2 + p p'$ stálou hodnotou $l \eta_0$, obdržíme

$$H = \frac{5 q}{8 \alpha h l^3} l \eta_0 \int_0^l p p' \, \mathrm{d}p.$$

Oba výsledky budou stejné, vyhoví-li η_0 rovnici

$$\int_0^l p p' (l^2 + p p') \, \mathrm{d}p = l \eta_0 \int_0^l p p' \, \mathrm{d}p.$$

Vyčíslíme

$$\int_0^l p p' \, \mathrm{d}p = \int_0^l p (l - p) \, \mathrm{d}p = \tfrac{1}{6} l^3,$$

$$\int_0^l p p' (l^2 + p p') \, \mathrm{d}p = l^2 \int_0^l p p' \, \mathrm{d}p + \int_0^l p^2 p'^2 \, \mathrm{d}p = \tfrac{1}{6} l^5 + \tfrac{1}{30} l^5 = \tfrac{1}{5} l^5$$

a dospějeme dosazením k výmince

$$\tfrac{1}{5} l^5 = \tfrac{1}{6} l^4 \eta_0 \quad \text{nebo} \quad \eta_0 = \tfrac{6}{5} l.$$

Nahradíme-li ve vzorci (132^a) proměnného činitele $l^2 + p\,p'$ stálým $l\,\eta_0 = \frac{6}{5} l^2$, obdržíme přibližný vzorec

$$H = \frac{3\,P\,p\,p'}{4\,\alpha\,h\,l}, \tag{134}$$

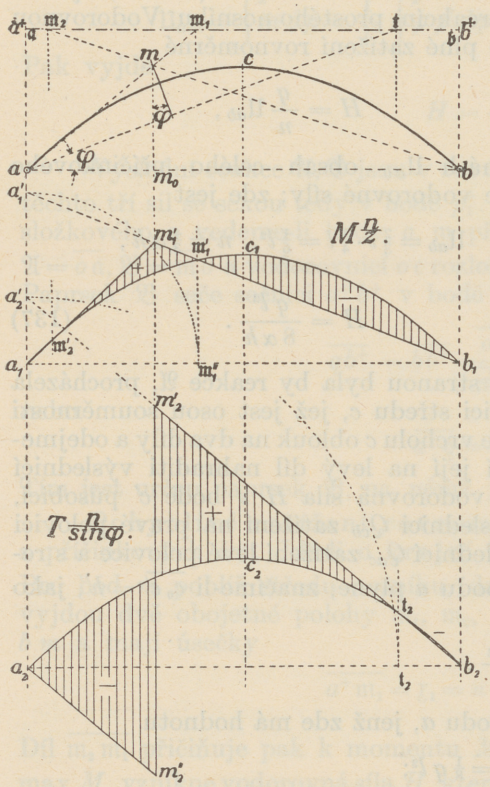
jehož budeme užívati pro nízký oblouk parabolický. Poslední vzorec můžeme psáti jako při vyšším oblouku ve tvaru vzorce (99^a)

$$H = P\frac{m}{n},$$

klademe-li na př.

$$m = \frac{p\,p'}{l}, \quad n = \frac{4}{3}\alpha\,h. \tag{135}$$

Pořadnici m příčinkové čáry H sestrojíme, přeneseme-li (obr. 79) $\overline{a'\,a''} = \overline{a'\,p''} = \overline{a\,p_0} = p$ a spojíme-li body a'', b'; pak jest



Obr. 80.

$$\overline{p''\,p'} = \overline{a'\,a''} \cdot \frac{\overline{p''\,b'}}{\overline{a'\,b'}} = \frac{p\,p'}{l} = m.$$

V bodě c ($p = p' = \frac{1}{2} l$) vyjde pořadnice

$$m_c = \overline{c''\,c'} = \tfrac{1}{4} l,$$

jež stanoví vrchol c' obyčejné paraboly $a'\,c'\,b'$, která je příčinkovou čarou H.

Stanovíme také sečnici, pro niž platí jako při obecném oblouku vyšším rovnice (100)

$$\zeta = \frac{P\,p\,p'}{H\,l}.$$

Dosadíme-li za H ze vzorce (134), dostaneme

$$\zeta = n = \frac{4}{3}\alpha\,h. \tag{136}$$

Výsledek nezávisí na úsečce p břemene P; je tedy sečnicí Π přímka $a^+ b^+ \parallel a\,b$, jež má stálou výšku $\overline{a\,a^+} = \overline{b\,b^+} = n$. Tato přímka splývá pak s pomocnou přímkou $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ (viz obr. 66). Tečnicemi jsou zase body a, b. Břímě P, jež působí v bodě p, vyvodí v opěrách reakce $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, jejichž paprsky spojují body a, b s průsečíkem p^+ paprsku P se sečnicí.

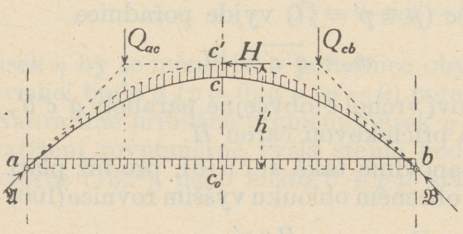
Příčinkové čáry momentů a sil posouvajících sestrojíme jako u obecného oblouku vyššího. Jde-li o moment M k libovolnému bodu m, určí spojnice $a\,m$ na přímce $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ (obr. 80) bod $\mathfrak{m}_1$, jehož úsečka stanoví pořadnici $\overline{a_1\,a'_1} = \overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{m}_1}$; touto pořadnicí jest určena příčinková přímka $m'_1 b_1$, přímka $a_1 m'_1$ seče ji pak ve svislici bodu m. Od osy $a_1 b_1$ ve smyslu $a_1 a'_1$ narýsujeme ještě příčinkovou čáru H a od ní k lomené

čáře $a_1 m'_1 b_1$ měříme příčinkové pořadnice výrazu $M \cdot \frac{n}{z}$. Kladné příčinkové pořadnice směřují od čáry H ve smyslu $a_1 a'_1$. Poněvadž se přímka $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ztotožňuje se sečnicí $a^+ b^+$, znamená bod $\mathfrak{m}_1$ obojetnou polohu břemene pro moment k bodu m; na svislici bodu $\mathfrak{m}_1$ seče pak přímka $m'_1 b_1$ příčinkovou čáru H, jak plyne již z jejího sestrojení. Také spojnice $b\,m$ určí na sečnici $a^+ b^+$ obojetnou polohu $\mathfrak{m}_2$; na svislici bodu $\mathfrak{m}_2$ seče přímka $a_1 m'_1$ příčinkovou čáru H. Obojetná poloha $\mathfrak{m}_1$ i $\mathfrak{m}_2$ má statický význam jen tehdy, je-li mezi svislicemi bodů a, b.

Příčinkový obrazec posouvající síly T libovolného průřezu sestrojíme, vedeme-li bodem a kolmici k průřezu, jež protne přímku $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ v bodě $\mathfrak{t}$; přenesme pak $\overline{a_2 a'_2} = \overline{\mathfrak{a}\mathfrak{t}}$ a přímka $a'_2 b_2$ platí staticky jakožto příčinková čára vpravo od svislice bodu m, v němž se do průřezu zatížení přenáší. Vlevo od svislice bodu m platí přímka $a_2 m''_2 \parallel m'_2 b_2$. U osy $a_2 b_2$ sestrojíme ve smyslu $a_2 a'_2$ příčinkovou čáru H a od ní k čáře $a_2 m''_2 m'_2 b_2$ měříme příčinkové pořadnice výrazu $T \frac{n}{\sin \varphi}$, kladné od čáry H ve smyslu $a_2 a'_2$. Bod $\mathfrak{t}$ znamená zde též obojetnou polohu břemene, na jeho svislici seče tedy přímka $m'_2 b_2$ příčinkovou čáru H.

Příčinkový obrazec normálné síly určili bychom jako u obecného oblouku vyššího (viz obr. 70).

*β) **Svislé zatížení rovnoměrné.*** Plné zatížení rovnoměrné (obr. 81) vyvodí v opěrách a, b svislé reakce $A = B = \frac{1}{2} q l$ rovné reakcím prostého nosníku. Vodorovnou sílu H určíme podle vzorce (101^b), jenž dá pro plné zatížení rovnoměrné



Obr. 81.

$$H = \frac{q}{n} \mathfrak{U}_{ab},$$

znamená-li $\mathfrak{U}_{ab}$ obsah celého příčinkového obrazce vodorovné síly; zde jest

$$\mathfrak{U}_{ab} = \tfrac{2}{3} l \cdot \tfrac{1}{4} l = \tfrac{1}{6} l^2, \quad n = \tfrac{4}{3} \alpha h,$$

což dá

$$H = \frac{q\, l^2}{8 \alpha h}. \tag{137}$$

Výslednicová čára k zatížení, jejíž krajní stranou byla by reakce $\mathfrak{A}$, procházela by body a, b. Tato čára je souměrná ke svislici středu c, jež jest osou souměrnosti oblouku i zatížení. Rozdělíme-li svislým řezem ve vrcholu c oblouk na dva díly a odejmeme-li na př. pravou stranu, musíme působení její na levý díl nahraditi výslednicí vnějších sil po pravé straně, jíž bude patrně vodorovná síla H v bodě c' působící, neboť svislá reakce B je rovna a protivna výslednici Q_{cb} zatížení na pravé polovici oblouku. Síla H v bodě c' je v rovnováze s výslednicí Q_{ac} zatížení levé polovice a s reakcí $\mathfrak{A}$. Z momentové výminky rovnováhy k bodu a plyne, značíme-li $\overline{c_0 c'} = h'$, jako u vyššího oblouku vzorec (102)

$$h' = \frac{(Q_{ac})_a}{H}.$$

Stanovíme statický moment výslednice Q_{ac} k bodu a, jenž zde má hodnotu

$$(Q_{ac})_a = \tfrac{1}{2} q l \cdot \tfrac{1}{4} l = \tfrac{1}{8} q l^2;$$

dosadíme-li též za H ze vzorce (137), dostaneme

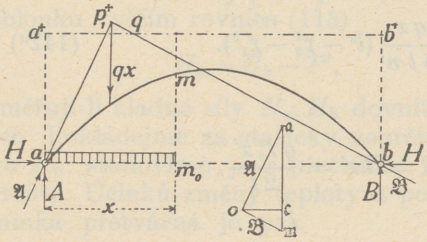
$$h' = \alpha h. \tag{138}$$

Výslednicová čára $a\,c'\,b$ k danému zatížení je parabola, jež jest úplně určena body a, c', b. Mezi střednicí a výslednicovou čarou $a\,c'\,b$ je plocha momentová. V činiteli α

daném vzorcem (133) jeví se v druhém členu účinek normálné síly; kdybychom tohoto účinku nedbali, což je přibližně dovoleno u vyššího oblouku, vyšlo by $\alpha = 1$ a $h' = h$. Pak by se ztotožnila jako při parabolickém oblouku o třech kloubech výslednicová čára se střednicí oblouku a oblouk by byl ve všech průřezech prostě tlačen. U nízkých oblouků jest účinek normálné síly tím větší, čím jest oblouk nižší. Budou tedy v tomto případě u nízkých oblouků parabolických ve všech průřezech momenty ohybové, ovšem malé.

Částečné zatížení rovnoměrné od svislice bodu a po svislici bodu m rozložené (obr. 82) vyvodí v opěrách a, b svislé reakce, jež se určí jako při prostém nosníku, tedy

$$A = \frac{q\,x\,(2\,l - x)}{2\,l}, \quad B = \frac{q\,x^2}{2\,l},$$



Obr. 82.

je-li $\overline{a\,m_0} = x$. Vodorovnou sílu H určíme za tohoto zatížení podle vzorce (101^b), tedy zde

$$H = \frac{q}{n}\,\mathfrak{U}_{am},$$

kdež jest, hledíc ke vzorci (135),

$$\mathfrak{U}_{am} = \int_0^x m\,dp = \frac{1}{l}\int_0^x p\,p'\,dp = \frac{1}{l}\int_0^x p\,(l-p)\,dp = \frac{x^2}{6\,l}\,(3\,l - 2\,x).$$

Pak vyjde

$$H = \frac{q\,x^2}{6\,l\,n}\,(3\,l - 2\,x). \tag{139}$$

Výslední reakce $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou v rovnováze s výslednicí $q\,x$ daného zatížení; paprsky těchto tří sil se sekou tedy v bodě p_1^+. Přeneseme-li úsek zatížení $q\,x = \overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{m}}$ do obrazce složkového a vedeme-li body $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}$ přímky $o\,\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{A}$, $o\,\mathfrak{m} \parallel \mathfrak{B}$, stanovíme úseky reakcí $\mathfrak{A} = \overline{o\,\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{m}\,o}$ a vodorovnicí $o\,\mathfrak{c}$ rozložíme je na úseky složek $H = \overline{o\,\mathfrak{c}}$, $A = \overline{\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}}$, $B = \overline{\mathfrak{m}\,\mathfrak{c}}$. Paprsek $\mathfrak{B}$ seče sečnici $a^+ b^+$ v bodě q; pak jest $\triangle\, q\,b^+\,b \sim \triangle\, o\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{m}$; z toho plyne

$$\overline{q\,b^+} = \overline{b\,b^+} \cdot \frac{\overline{o\,\mathfrak{c}}}{\overline{\mathfrak{m}\,\mathfrak{c}}} = n \cdot \frac{H}{B} = l - \frac{2}{3}\,x$$

nebo

$$\overline{a^+\,q} = \overline{a\,b} - \overline{q\,b^+} = \tfrac{2}{3}\,x. \tag{140}$$

Tím jest určen paprsek $\mathfrak{B}$, na němž je bod p_1^+; spojnice $a\,p_1^+$ dává pak paprsek $\mathfrak{A}$.

Pohyblivé zatížení rovnoměrné řešíme jako každé jiné zatížení snadno z příčinkových čar. Jde-li o krajní hodnoty momentů, lze je řešiti též přímo.[1]) Pro bod m poblíž středu nosníku, daný souřadnicemi $\overline{a\,m_0} = x$, $\overline{m_0\,m} = z$ (obr. 80), vyjdou dvě obojetné polohy $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, jež jsou stanoveny na sečnici spojnicemi $a\,m$, $b\,m$ a mají úsečky

$$\overline{a^+\,\mathfrak{m}_1} = \mathfrak{x}_1 = n\,\frac{x}{z}, \quad \overline{\mathfrak{m}_2\,b^+} = \mathfrak{x}_2' = n\,\frac{x'}{z}. \tag{141}$$

Díl $\overline{\mathfrak{m}_2\,\mathfrak{m}_1}$ přičiňuje pak k momentu M kladně. Zatížíme-li jej plně, abychom dostali $\max M$, vznikne vodorovná síla H, kterou lze určiti rozdílem sil pro zatížení dílu $\overline{a^+\,\mathfrak{m}_1} = \mathfrak{x}_1$ a dílu $\overline{a^+\,\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{x}_2$, tedy podle vzorce (139)

$$H = \frac{q}{6\,l\,n}\,[\mathfrak{x}_1^2\,(3\,l - 2\,\mathfrak{x}_1) - \mathfrak{x}_2^2\,(3\,l - 2\,\mathfrak{x}_2)].$$

[1]) Srovnej *Jos. Šolín* „Theorie plnostěnných nosníků obloukových“, str. 152 a d.

Jako u prostého nosníku určíme svislou reakci

$$A = q\,(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)\cdot\frac{\mathfrak{x}'_1 + \mathfrak{x}'_2}{2\,l}$$

a k bodu m moment

$$\mathfrak{M} = A\,x - \frac{1}{2}\,q\,(x-\mathfrak{x}_2)^2 = \frac{q}{2\,l}\,(\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_2)\,(\mathfrak{x}'_1+\mathfrak{x}'_2)\,x - \frac{q}{2}\,(x-\mathfrak{x}_2)^2.$$

Pak určíme, užívajíce rovnic (141), po úpravě

$$\max M = \mathfrak{M} - H\,z = \frac{1}{2}\,q\,x\,x' - \frac{q\,z}{6\,l\,n}\,(l^3 - \mathfrak{x}_2^3 - \mathfrak{x}_1'^3). \tag{142^a}$$

Zatížení samotné délky $\overline{a^+\,\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{x}_2$ dá

$$H = \frac{q\,\mathfrak{r}_2^2\,(3\,l - 2\,\mathfrak{r}_2)}{6\,l\,n}\,,\quad B = \frac{q\,\mathfrak{r}_2^2}{2\,l}\,,\quad \mathfrak{M} = B\,x' = \frac{q\,\mathfrak{r}_2^2\,x'}{2\,l}\,,$$

moment k bodu m má zde hodnotu

$$M_2 = \mathfrak{M} - H\,z = -\frac{q\,\mathfrak{r}_2^3\,z}{6\,l\,n}\,.$$

Obdobně vyvodí zatížení délky $\overline{\mathfrak{m}_1\,b^+} = \mathfrak{x}'_1$ moment M_1, který plyne z M_2, vyměníme-li úsek $\mathfrak{x}_2$ za $\mathfrak{x}'_1$, tedy

$$M_1 = -\frac{q\,\mathfrak{r}_1'^3\,z}{6\,l\,n}\,.$$

Obojí zatížení dohromady dá

$$\min M = M_1 + M_2 = -\frac{q\,z}{6\,l\,n}\,(\mathfrak{x}_1'^3 + \mathfrak{x}_2^3). \tag{143^a}$$

Zatížení, jež vyvodí max M, doplňuje se se zatížením dávajícím min M na plné zatížení nosníku, jímž vzniká k bodu m moment

$$M_0 = \mathfrak{M}_0 - H\,z = \frac{1}{2}\,q\,x\,x' - \frac{q\,l^2\,z}{6\,n}\,. \tag{144}$$

Kontrolou řešení je pak rovnice

$$\max M + \min M = M_0\,, \tag{145}$$

již stanovené hodnoty vyhovují.

Pro bod m blíže levé opěry a může vyjíti bod $\mathfrak{m}_2$ mimo svislice bodů a, b a nemá pak statické platnosti obojetné polohy. Tu přičiňuje díl $\overline{a^+\,\mathfrak{m}_1} = \mathfrak{x}_1$ kladně, díl $\overline{\mathfrak{m}_1\,b^+} = \mathfrak{x}'_1$ záporně k momentu M. Zatížením dílu $\overline{\mathfrak{m}_1\,b^+}$ vyjde podle předchozího vyšetření moment

$$\min M = M_1 = -\frac{q\,\mathfrak{r}_1'^3\,z}{6\,l\,n}\,. \tag{143^b}$$

Zatížení pro max M a min M doplňuje se zase na plné zatížení nosníku. Pak dá podle vzorce (145) zatížení dílu $\overline{a^+\,\mathfrak{m}_1}$ moment

$$\max M = M_0 - \min M\,.$$

Dosadíme-li hodnoty ze vzorců (143^b), (144), dostaneme po dosazení $\frac{z}{n} = \frac{x}{\mathfrak{x}_1}$ a úpravě

$$\max M = \frac{q\,x}{2}\left[\frac{\mathfrak{r}_1\,(3\,l - \mathfrak{r}_1)}{3\,l} - x\right]. \tag{142^b}$$

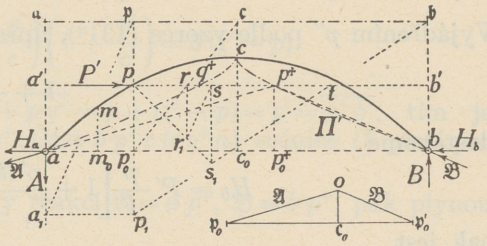
*γ) **Břímě vodorovné*** P' ve výši $\overline{p_0 p} = p''$ nad vodorovnou spojnicí $a\,b$ (obr. 83) vyvodí v opěrách a, b svislé reakce A, B a vodorovné H_a, H_b. Z rovnováhy všech složek reakcí s břemenem P' plynou momentovými výminkami k bodům a, b svislé složky dané vzorci (112)

$$B = -A = P' \frac{p''}{l};$$

pro vodorovné složky platí jako při obecném oblouku vyšším rovnice (113)

$$H_a = H_b - P',$$

směřují-li kladné síly H_a, H_b dovnitř oblouku. Pokládejme za staticky neurčitou složku H_b; stanovíme ji z přetvárné výminky, jež je dána pro nízký oblouk rovnicí (130^a). Účinků změny teploty a popuštění opěr, jež jsme již vyřídili, nedbejme; výminka přetvárná je pak



Obr. 83.

$$\int_0^l M z \, dx + i_0^2 \int_0^l N \, dx = 0.$$

K libovolnému bodu m střednice určíme, znamenajíce $\overline{a\,m_0} = x$, $\overline{m_0\,b} = x' = l - x$, $\overline{m_0\,m} = z$, s pravé strany moment

$$M = B\,x' - H_b z - P'(p'' - z) = P' \frac{p''}{l} x' - H_b z - P'(p'' - z);$$

poslední člen platí tu jen pro body vlevo od působiště p břemene P'. Jako při svislém břemeni berme $N \doteq -H$, tedy vlevo od břemene

$$N \doteq -H_a = -H_b + P',$$

vpravo od břemene

$$N \doteq -H_b.$$

Dosazením za M a N do výminky přetvárné vychází

$$P' \frac{p''}{l} \int_0^l x' z \, dx - H_b \int_0^l z^2 \, dx - P' \int_0^p (p'' - z) z \, dx + i_0^2 \left(- H_b \int_0^l dx + P' \int_0^p dx \right) = 0.$$

Vyčíslíme integrály

$$\int_0^l dx = l, \quad \int_0^p dx = p;$$

určili jsme již při svislém břemeni

$$\int_0^l x z \, dx = \int x' z \, dx = \frac{1}{3} h l^2, \quad \int_0^l z^2 \, dx = \frac{8}{15} h^2 l, \quad z = \frac{4h}{l^2} x x'.$$

Z poslední rovnice střednice plyne též

$$p'' = \frac{4h}{l^2} p\,p' \tag{131^a}$$

a vyjde pak

$$\int_0^p (p'' - z) z \, dx = \frac{16 h^2}{l^4} \int_0^p (p\,p' - x x') x x' \, dx = \frac{8}{15} \frac{h^2}{l^4} p^3 (5 l^2 - 10 l p + 4 p^2).$$

Přetvárná výminka dá nyní

$$H_b\left(\frac{8}{15}h^2+i_0^2\right)l=P'\left[\frac{p''}{l}\cdot\frac{hl^2}{3}-\frac{8}{15}\frac{h^2}{l^4}p^3(5l^2-10lp+4p^2)+i_0^2p\right].$$

Vyjádřením p'' podle vzorce (131^a), úpravou a dosazením ze vzorce (133)

$$1+\frac{15}{8}\frac{i_0^2}{h^2}=\alpha$$

dostaneme

$$H_b=P'\frac{p}{l}\left[1+\frac{p'(l-2p)(l+2p)(l+2p')}{2\alpha l^4}\right]; \qquad (146^a)$$

pak jest

$$H_a=H_b-P'=-P'\frac{p'}{l}\left[1-\frac{p(l-2p)(l+2p)(l+2p')}{2\alpha l^4}\right]. \qquad (146^b)$$

Svislé i vodorovné složky reakcí dají, geometricky sečteny, výslední reakce $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, jejichž paprsky se sekou na paprsku břemene P' v bodě p^+; geometrickým místem tohoto bodu je sečnice Π'. V obrazci složkovém jsou úseky $P'=\overline{\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_0'}$, $\mathfrak{A}=\overline{o\,\mathfrak{p}_0}$, $\mathfrak{B}=\overline{\mathfrak{p}_0'o}$ a svislice $o\,\mathfrak{c}_0$ určuje $H_a=\overline{\mathfrak{c}_0\mathfrak{p}_0}$, $H_b=\overline{\mathfrak{p}_0'\mathfrak{c}_0}$, $A=-B=\overline{o\,\mathfrak{c}_0}$. Jelikož je $\triangle p_0^+p^+b\sim\triangle\mathfrak{c}_0o\mathfrak{p}_0'$, plyne

$$\xi'=\overline{p_0^+b}=p''\cdot\frac{H_b}{B}=p\left[1+\frac{p'(l-2p)(l+2p)(l+2p')}{2\alpha l^4}\right]. \qquad (147^a)$$

Obdobně plyne

$$\xi=\overline{a\,p_0^+}=p''\cdot\frac{H_a}{A}=p'\left[1-\frac{p(l-2p)(l+2p)(l+2p')}{2\alpha l^4}\right]; \qquad (147^b)$$

platí ovšem $\xi+\xi'=l$, této kontrole pak stanovené hodnoty vyhovují. Z obou posledních vzorců plyne

$$\xi'-p=p'-\xi=\frac{pp'(l-2p)}{2\alpha l^4}\frac{(l+2p)(l+2p')}{2\alpha l^4}.$$

Dosaďme sem z rovnice (131^a)

$$\frac{pp'}{l^2}=\frac{p''}{4h}$$

a dostaneme

$$\xi'-p=p'-\xi=\frac{p''}{8\alpha hl^2}(l-2p)(l+2p)(l+2p').$$

Znamenejme $\overline{a\,c_0}=c=\frac{1}{2}l$ a užijme podle vzorce (135) hodnoty $n=\frac{4}{3}\alpha h$; pak vyjde

$$\xi'-p=p'-\xi=\frac{p''}{3c^2n}(c-p)(c+p)(c+p'). \qquad (147^c)$$

Z tohoto vzorce můžeme nejlépe počítati nebo sestrojovati. Tu přeneseme (obr. 83) $\overline{a\,\mathfrak{a}}=\overline{b\,\mathfrak{b}}=n$ a spojíme bod p_0 s bodem $\mathfrak{c}$; tím určíme na paprsku P' úsek

$$\overline{p\,r}=\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{c}}\cdot\frac{\overline{p_0\,p}}{\overline{p_0\,\mathfrak{p}}}=(c-p)\frac{p''}{n}.$$

Dále přeneseme $\overline{\mathfrak{a}\,a_1}=\overline{\mathfrak{p}\,p_1}=\overline{a\,c_0}=c$, $\overline{p\,r}=\overline{r\,r_1}$ a vedeme $r_1s\parallel a_1\mathfrak{p}$; tu jest

$$\overline{r\,s}=\overline{r\,r_1}\cdot\frac{\overline{a\,\mathfrak{p}}}{\overline{\mathfrak{a}\,a_1}}=(c-p)\frac{p''}{n}\cdot\frac{p}{c},\quad \overline{p\,s}=\overline{p\,r}+\overline{r\,s}=(c-p)\frac{p''}{n}\left(1+\frac{p}{c}\right).$$

Konečně učiníme $\overline{s s_1} = \overline{p s}$ a vedeme $s_1 t \parallel p_1 \mathfrak{b}$; tak plyne

$$\overline{s t} = \overline{s s_1} \cdot \frac{\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{b}}}{\overline{\mathfrak{p}\,p_1}} = (c - p)\frac{p''}{n}\left(1 + \frac{p}{c}\right)\frac{p'}{c},$$

$$\overline{p t} = \overline{p s} + \overline{s t} = (c - p)\frac{p''}{n}\left(1 + \frac{p}{c}\right)\left(1 + \frac{p'}{c}\right) = 3\,(\mathfrak{x}' - p).$$

Je-li $\overline{p q^+} = \frac{1}{3}\overline{p t} = \mathfrak{x}' - p$, vyjde $\overline{a' q^+} = \overline{a' p} + \overline{p q^+} = p + (\mathfrak{x}' - p) = \mathfrak{x}' = \overline{p^+ b'}$; tím je dán bod p^+ sečnice a zároveň souměrný bod q^+. Část $b\,p^+\,c\,(c\,q^+\,a)$ sečnice Π' platí pro břemena P', jež působí v dílu $a\,c$ $(c\,b)$ střednice.

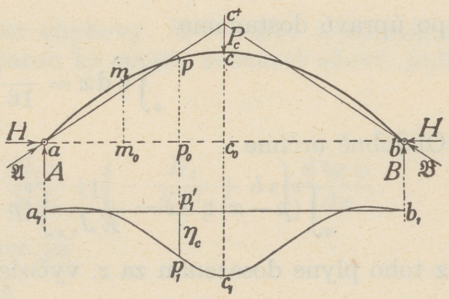
Sečnicí jest určen bod p^+ a tím paprsky reakcí $\mathfrak{A} \equiv a\,p^+$, $\mathfrak{B} \equiv b\,p^+$; pak plynou jako u kruhového oblouku rovnice (114)

$$H_b = P' \cdot \frac{\overline{p_3^+ b}}{\overline{a\,b}} = P'\frac{\mathfrak{x}'}{l}, \quad H_a = -P' \cdot \frac{\overline{a\,p_3^+}}{\overline{a\,b}} = -P'\frac{\mathfrak{x}}{l}.$$

Je tedy sečnice Π', vztažená ke svislici bodu b (a), příčinkovou čarou síly H_b (H_a).

δ) ***Přetvoření.*** Šlo by nejprve o průhyb středu c oblouku $a\,b$, pro nějž vyšetříme příčinkovou čáru jakožto ohybovou čáru nosníku, působí-li naň v bodě c svislé břímě $P_c = 1$ (obr. 84). Toto břímě vyvodí v opěrách svislé reakce $A = B = \frac{1}{2}$ a vodorovnou sílu H, kterou určíme podle přesnějšího vzorce (132ᵃ); dosadíme $p = p' = \frac{1}{2}l$ a dostaneme pro břímě $P = 1$

$$H = \frac{25}{128} \cdot \frac{l}{\alpha h}.$$



Obr. 84.

Ohybová čára je výslednicovou čarou ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plocha má pořadnice dané vzorcem (75)

$$\eta = e F \left\{ \frac{M}{E J \cos\varphi} + \frac{\mathrm{d}\left[\left(\frac{N}{E U} + \delta\varepsilon\right)\mathrm{tg}\,\varphi\right]}{\mathrm{d}x} \right\}.$$

Řešíce počtem zvolíme $e = F = 1$. Nedbejme změny teploty a berme jako dosud $J\cos\varphi = J_0$ a U za stálé hodnoty; pak jest

$$\eta = \frac{M}{E J_0} + \frac{\mathrm{d}\left(\frac{N}{E U}\mathrm{tg}\,\varphi\right)}{\mathrm{d}x}.$$

Dbejme normálné síly zase jen přibližně, kladouce $N \doteq -H$; tu vyjde

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{N}{E U}\mathrm{tg}\,\varphi\right)}{\mathrm{d}x} = -\frac{H}{E U} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\mathrm{d}x}.$$

Dále jest

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}, \quad z = \frac{4h}{l^2}x\,(l - x),$$

tedy

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{4h}{l^2}(l - 2x), \quad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{8h}{l^2}.$$

Na levé polovici oblouku je v bodě m ($\overline{a\,m_0} = x$, $\overline{m_0\,m} = z$) moment

$$M = A\,x - H\,z = \tfrac{1}{2}x - H\,z$$

i vyjde

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}x - H\,z}{E\,J_0} + \frac{H}{E\,U}\cdot\frac{8\,h}{l^2}.$$

Určovací plocha daná pořadnicemi η je souměrná ke svislici středu c; čára výslednicová k příslušné spojité soustavě silové stanoví se jako momentová čára prostého nosníku. Ze souměrnosti zatížení plynou v podporách nosníku reakce

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 = \int_0^c \eta\,\mathrm{d}x,$$

neboť k úsečce $\mathrm{d}x$ náleží elementární břímě $\eta\,\mathrm{d}x$. Ve svislici bodu p ($\overline{a\,p_0} = p$, $\overline{p_0\,b} = p'$) je pak moment rovný hledané příčinkové pořadnici

$$\eta_c = \mathfrak{M} = \mathfrak{A}_0\,p - \int_0^p (p - x)\,\eta\,\mathrm{d}x = p\int_0^c \eta\,\mathrm{d}x - \int_0^p (p - x)\,\eta\,\mathrm{d}x.$$

Vypočteme oba integrály, do nichž dosadíme za η stanovenou hodnotu a za z z rovnice paraboly dané vzorcem (131). Vyjde tu

$$\int_0^c \eta\,\mathrm{d}x = \frac{1}{E\,J_0}\int_0^c (\tfrac{1}{2}x - H\,z)\,\mathrm{d}x + \frac{8\,H\,h}{E\,U\,l^2}\int_0^c \mathrm{d}x = \frac{1}{E\,J_0}\left(\frac{c^2}{4} - \frac{4\,H\,h}{l^2}\int_0^c x\,x'\,\mathrm{d}x\right) + \frac{4\,H\,h}{E\,U\,l};$$

po úpravě dostaneme

$$\int_0^c \eta\,\mathrm{d}x = \frac{l^2}{16\,E\,J_0} - \frac{H\,h\,l}{3\,E\,J_0}\left(1 - 12\,\frac{i_0^2}{l^2}\right).$$

Obdobně určíme

$$\int_0^p (p - x)\,\eta\,\mathrm{d}x = \frac{1}{E\,J_0}\int_0^p (p - x)\,(\tfrac{1}{2}x - H\,z)\,\mathrm{d}x + \frac{8\,H\,h}{E\,U\,l^2}\int_0^p (p - x)\,\mathrm{d}x;$$

z toho plyne dosazením za z, vyčíslením integrálů a úpravou

$$\int_0^p (p - x)\,\eta\,\mathrm{d}x = \frac{p^3}{12\,E\,J_0} - \frac{H\,h\,p^2}{3\,E\,J_0\,l^2}\,[p\,(2\,l - p) - 12\,i_0^2].$$

Dosazením obou integrálů dostaneme vzorec

$$\eta_c = \frac{l^2\,p}{16\,E\,J_0} - \frac{H\,h\,l\,p}{3\,E\,J_0}\left(1 - 12\,\frac{i_0^2}{l^2}\right) - \frac{p^3}{12\,E\,J_0} + \frac{H\,h\,p^2}{3\,E\,J_0\,l^2}\,[p\,(2\,l - p) - 12\,i_0^2],$$

z něhož určíme úpravou a označením

$$\beta = 1 - 12\,\frac{i_0^2}{l^2} \tag{148}$$

rovnici

$$\eta_c = \frac{p}{48\,E\,J_0}\,[3\,l^2 - 4\,p^2 - 16\,\frac{H\,h}{l^2}\,p'\,(\beta\,l^2 + p\,p')]. \tag{149a}$$

Dosadíme-li sem $H = \frac{25}{128}\cdot\frac{l}{\alpha\,h}$, vyjde

$$\eta_c = \frac{p}{48\,E\,J_0}\,[3\,l^2 - 4\,p^2 - \frac{25\,p'}{8\,\alpha\,l}\,(\beta\,l^2 + p\,p')]. \tag{149b}$$

Tato rovnice platí na levé polovici oblouku; na pravé polovici je příčinková čára průhybu bodu c souměrná. Břímě P, jež působí v bodě p, vyvodí v bodě c průhyb[1])

$$y_c = P\,\eta_c,$$

je-li η_c dáno vzorcem (149^b).

Plné zatížení rovnoměrné vyvodí v bodě c průhyb

$$y_c = 2\,q\int_0^c \eta_c\,dp = \frac{q}{24\,E\,J_0}\int_0^c p\left[3\,l^2 - 4\,p^2 - \frac{25\,p'}{8\,\alpha\,l}(\beta\,l^2 + p\,p')\right]dp.$$

Vyčíslením integrálů a úpravou vyjde

$$y_c = \frac{5\,q\,l^4}{384\,E\,J_0}\left(1 - \frac{5\,\beta + 1}{6\,\alpha}\right). \tag{150}$$

Součinitel β se liší málo od jedničky; položíme-li $\beta \doteq 1$, obdržíme

$$y_c \doteq \frac{5\,q\,l^4}{384\,E\,J_0}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right). \tag{150^a}$$

Stanovíme dále ohybovou čáru nosníku vyvozenou změnou teploty, jíž vznikají v opěrách pouze vodorovné reakce, dané vzorcem (132^b)

$$H_t = \frac{15\,E\,J_0\,\delta\,\varepsilon}{8\,\alpha\,h^2}.$$

V libovolném průřezu m oblouku je pak moment ohybový $M = -H_t z$ a normálná síla $N \doteq -H_t$. Ohybová čára je výslednicovou čarou ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plocha má pořadnice

$$\mathfrak{y} = \frac{M}{E\,J\cos\varphi} + \frac{\mathrm{d}\left[\left(\frac{N}{E\,U} + \delta\,\varepsilon\right)\mathrm{tg}\,\varphi\right]}{\mathrm{d}x} = -\frac{H_t z}{E\,J_0} + \left(-\frac{H_t}{E\,U} + \delta\,\varepsilon\right)\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\mathrm{d}x},$$

klademe-li pro početní řešení $e = F = 1$. Určili jsme již

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\mathrm{d}x} = -\frac{8\,h}{l^2};$$

tím vyjde

$$\mathfrak{y} = -\frac{H_t z}{E\,J_0} + \left(\frac{H_t}{E\,U} - \delta\,\varepsilon\right)\frac{8\,h}{l^2} = -\frac{H_t}{E\,J_0}\left(z - 8\,h\,\frac{i_0^2}{l^2}\right) - \delta\,\varepsilon\,\frac{8\,h}{l^2}.$$

Prvý člen se vyskytl již v pořadnici $\mathfrak{y}$, když šlo o příčinkovou čáru průhybu středu c; dá sám o sobě v bodě p ohybovou pořadnici η_t', která plyne ze vzorce (149^a), vynecháme-li členy, jež neobsahují H, a dosadíme-li $H = H_t$. Tak určíme

$$\eta_t' = -\frac{H_t\,h\,p\,p'}{3\,E\,J_0\,l^2}(\beta\,l^2 + p\,p').$$

K tomu přistupuje ještě účinek spojité soustavy silové, jejíž určovací plocha by měla pořadnice

$$\mathfrak{y}'' = -\delta\,\varepsilon\,\frac{8\,h}{l^2};$$

[1]) *Jos. Šolín* odvozuje v „Theorii plnostěnných nosníků obloukových“ na str. 183 vzorec přesnější, který se od posledního vzorce jen nepatrně liší.

tato soustava silová je souměrná ke svislici bodu c a vyvodí, působí-li na prostý nosník $a\,b$, v levé podpoře reakci

$$\mathfrak{A}_0'' = \int_0^c \mathfrak{y}''\,dx = -\frac{4\,\delta\,\varepsilon\,h}{l}$$

a v bodě p moment rovný hledané ohybové pořadnici

$$\eta_t'' = \mathfrak{M}'' = \mathfrak{A}_0''\,p - \int_0^p (p-x)\,\mathfrak{y}''\,dx.$$

Vypočteme

$$\int_0^p (p-x)\,\mathfrak{y}''\,dx = -\delta\,\varepsilon\,\frac{8\,h}{l^2}\int_0^p (p-x)\,dx = -\frac{4\,\delta\,\varepsilon\,h\,p^2}{l^2}$$

a obdržíme

$$\eta_t'' = -\frac{4\,\delta\,\varepsilon\,h\,p}{l} + \frac{4\,\delta\,\varepsilon\,h\,p^2}{l^2} = -\frac{4\,\delta\,\varepsilon\,h\,p\,p'}{l^2}.$$

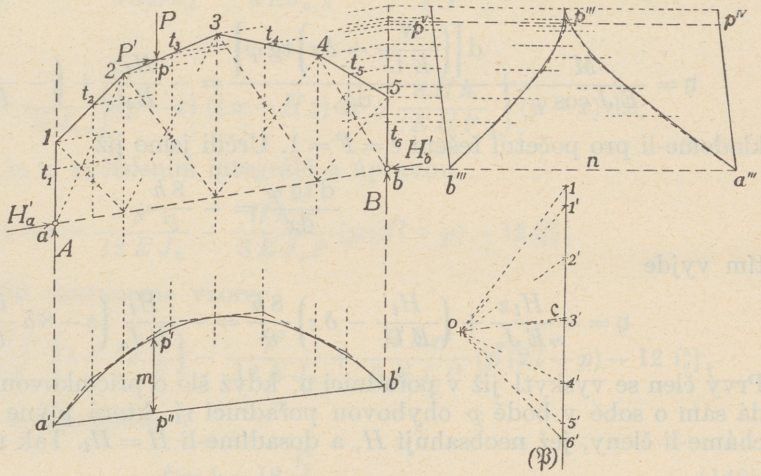
Celková pořadnice ohybová vyvozená změnou teploty jest

$$\eta_t = \eta_t' + \eta_s'' = -\frac{h\,p\,p'}{l^2}\left[\frac{H_t}{3\,E\,J_0}(\beta\,l^2 + p\,p') + 4\,\delta\,\varepsilon\right].$$

Dosazením hodnoty za H_t a úpravou vyjde v bodě p ohybová pořadnice

$$\eta_t = -\frac{\delta\,\varepsilon}{l^2}\,p\,p'\left[4\,h + \frac{5\,(\beta\,l^2 + p\,p')}{8\,\alpha\,h}\right]. \tag{151}$$

28. Nosník lomený má za střednici čáru lomenou. Je-li na koncích spojen s opěrami klouby a, b, řeší se jako oblouk o dvou kloubech, a to jako oblouk vyšší, je-li výška nosníku poměrně značná, nebo jako nízký oblouk při malém poměru výšky k rozpětí.



Obr. 85.

*α) **Nosník obecného tvaru*** (obr. 85) řešme jako vyšší oblouk proměnného průřezu, pro nějž platí přetvárná výminka (118)

$$\int \frac{M\,z\,ds}{E\,J} = \frac{\Delta l - \delta\,\varepsilon\,l}{\cos^2\alpha} \qquad \text{neboli} \qquad \int M\,z\,\frac{J_0}{J}\,ds = \frac{E\,J_0\,(\Delta l - \delta\,\varepsilon\,l)}{\cos^2\alpha},$$

je-li J_0 zvolená stálá hodnota momentu setrvačnosti; integrály bez připojených mezí rozumějí se zde i dále v mezích celého nosníku. Dosazením $M = \mathfrak{M} - Hz$ dostaneme

$$\int \mathfrak{M}\,z\,\frac{J_0}{J}\,ds - H\int z^2\,\frac{J_0}{J}\,ds = \frac{E\,J_0\,(\Delta l - \delta\,\varepsilon\,l)}{\cos^2\alpha}$$

a z toho

$$H = \frac{\int \mathfrak{M} z \frac{J_0}{J} \mathrm{d}s + \frac{E J_0}{\cos^2 \alpha} (\delta \varepsilon l - \Delta l)}{\int z^2 \frac{J_0}{J} \mathrm{d}s}. \tag{152}$$

Příčinková čára H plynula obecně jako výslednicová čára ke spojité soustavě sil, jejíž určovací plocha měla pořadnice

$$z' = \frac{z}{\cos \varphi} \frac{J_0}{J};$$

na délku $\mathrm{d}x$ připadne tedy síla

$$\mathrm{d}\mathfrak{P} = \frac{z}{\cos \varphi} \frac{J_0}{J} \mathrm{d}x = z \frac{J_0}{J} \mathrm{d}s.$$

Je-li v přímém dílu nosníku $\overline{(m-1)\,m} = s_m$ stálý průřez o momentu setrvačnosti J_m, připadne na tento díl břímě

$$\mathfrak{P}_m = \int_{(s_m)} \mathrm{d}\mathfrak{P} = \frac{J_0}{J_m} \int_{(s_m)} z \, \mathrm{d}s;$$

$\int_{(s_m)} z \, \mathrm{d}s$ je plocha obrazce, jenž by měl základnu s_m a v kolmicích nanesené pořadnice z, tedy plocha lichoběžníka:

$$\int_{(s_m)} z \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2} (z_{m-1} + z_m) \, s_m,$$

takže vyjde

$$\mathfrak{P}_m = \frac{J_0}{J_m} \cdot \frac{z_{m-1} + z_m}{2} s_m. \tag{153}$$

Přisuzujeme-li síly $\mathrm{d}\mathfrak{P}$ jednotlivým bodům přímého dílu s_m a myslíme-li si síly rovnoběžné libovolného zaměření, působí výslednice $\mathfrak{P}_m$ ve statickém středu bodové soustavy takto určené, tedy ve svislém směru v tížnici lichoběžníka o svislých krajních stranách z_{m-1}, z_m, v jiných směrech v průsečíku t_m této tížnice se střednicí lomeného nosníku. Výslednicová čára k silám $\mathfrak{P}_m$ takto určeným je opsána spojité křivce, jež má dotyčné body na rovnoběžkách se směrem sil $\mathfrak{P}$, vedených vrcholy lomené střednice jakožto dělicími body. Každé šikmé straně lomené střednice odpovídá výslednicová čára ve tvaru kubické paraboly. Má-li lomený nosník na krajích svislé části, odpovídá statický střed t_1 (t_6) těžišti trojúhelníka, jenž by měl v a (b) pořadnici nulovou, v 1 (5) pořadnici z_1 (z_5); je tedy $\overline{at_1} = \frac{2}{3} \overline{a\,1}$ ($\overline{bt_6} = \frac{2}{3} \overline{b\,5}$). Křivka vepsaná do výslednicové čáry k svislým silám $\mathfrak{P}$ dá v paprsku svislého břemene P pořadnici m

Jmenovatele $\int z^2 \frac{J_0}{J} \mathrm{d}s$ určíme výslednicovou čarou k silám $\mathfrak{P}$ na ramenech z působícím, tedy jako u oblouku s opěrami v různé výši (obr. 73) nebo tak, že rovnoběžky s $a\,b$, vedené body t_1, t_2, t_3, protneme se svislicí bodu b a průsečíky rýsujeme vodorovné paprsky sil $\mathfrak{P}$, k nimž sestrojíme výslednicovou čáru kolmicemi k paprskům spojujícím pól o s vrcholy svislé čáry složkové. Spojitá křivka dotýká se stran lomené čáry výslednicové v bodech, jež odpovídají vrcholům lomené střednice; těmito vrcholy vedeme rovnoběžky s $a\,b$, protneme je se svislicí bodu b, a průsečíky procházejí vodorovnice, jež určují na stranách lomené čáry výslednicové dotyčné body spojité výslednicové křivky. Vedeme-li $o\,c \parallel a'\,b'$ a $a'''\,p^{IV} \parallel b'''\,p^{V} \perp o\,c$, jsou tím určeny základní strany příčinkových čar H_b, H_a jako u oblouku o dvou kloubech. Druhá výsled-

nicová čára dá úseky $\overline{a'''\,b'''} = n$, $\overline{p^{IV}\,p'''} = m'$, $\overline{p'''\,p^{V}} = m''$, vlevo kladné. Potom je při svislém břemeni $H = P\dfrac{m}{n}$, při břemeni P' rovnoběžném s $a\,b$

$$H_b = P'\frac{m'}{n},\quad H_a = -P'\frac{m''}{n}.$$

β) Zvláštní případy. Uvažujme lomený nosník stálého průřezu, pro nějž se vzorec pro vodorovnou sílu vyvozenou zatížením zjednoduší na tvar

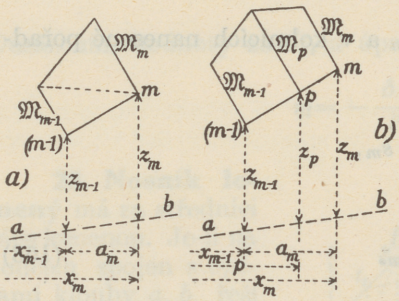
$$H = \frac{\int \mathfrak{M}\, z\, \mathrm{d}s}{\int z^2\, \mathrm{d}s}. \tag{154}$$

Čitatele i jmenovatele můžeme určiti sčítáním hodnot pro jednotlivé přímé části nosníku. Pro přímou část $\overline{(m-1)\,m} = s_m$ (obr. 86) vyjde

$$\int_{(s_m)} z^2\, \mathrm{d}s = \frac{s_m}{z_m - z_{m-1}} \int_{z_{m-1}}^{z_m} z^2\, \mathrm{d}z = \frac{s_m}{z_m - z_{m-1}} \cdot \frac{z_m^3 - z_{m-1}^3}{3} = \frac{s_m}{3}\,(z_{m-1}^2 + z_{m-1}\,z_m + z_m^2),$$

tedy pro celý nosník

$$\int z^2\, \mathrm{d}s = \Sigma \frac{s_m}{3}\,(z_{m-1}^2 + z_{m-1}\,z_m + z_m^2). \tag{155}$$



Obr. 86.

Výraz $\int_{(s_m)} \mathfrak{M}\, z\, \mathrm{d}s$ můžeme vykládati jako statický moment k ose $a\,b$ plochy $\int_{(s_m)} \mathfrak{M}\, \mathrm{d}s$, tedy momentové plochy sestrojené při straně s_m. Není-li v dílu s_m břemen, mění se tu $\mathfrak{M}$ podle přímky, tedy momentový obrazec je lichoběžník (obr. 86*a*). Rozdělíme na dva trojúhelníky a sčítáním dostaneme statický moment

$$\int_{(s_m)} \mathfrak{M}\, z\, \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\,\mathfrak{M}_{m-1}\,s_m \cdot \frac{2\,z_{m-1} + z_m}{3} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{M}_m\,s_m \cdot \frac{z_{m-1} + 2\,z_m}{3} =$$

$$= \frac{s_m}{6}\,[\mathfrak{M}_{m-1}\,(2\,z_{m-1} + z_m) + \mathfrak{M}_m\,(z_{m-1} + 2\,z_m)]. \tag{156a}$$

Je-li v bodě p mezi $(m-1), m$ břímě P jakéhokoli směru, je momentový obrazec po obou stranách břemene lichoběžník (obr. 86*b*) a podle předchozího vzorce určíme sčítáním pro oba lichoběžníky

$$\int_{(s_m)} \mathfrak{M}\, z\, \mathrm{d}s = \frac{(p - x_{m-1})\,s_m}{6\,a_m}\,[\mathfrak{M}_{m-1}\,(2\,z_{m-1} + z_p) + \mathfrak{M}_p\,(z_{m-1} + 2\,z_p)] +$$

$$+ \frac{(x_m - p)\,s_m}{6\,a_m}\,[\mathfrak{M}_p\,(2\,z_p + z_m) + \mathfrak{M}_m\,(z_p + 2\,z_m)]. \tag{156b}$$

1. Souměrný nosník se čtyřmi šikmými stranami (obr. 87), u něhož $s_3 = s_2$, $s_4 = s_1$, $a_3 = a_2$, $a_4 = a_1$, bude míti podle vzorce (155)

$$\int z^2\, \mathrm{d}s = 2 \cdot \frac{s_1}{3}\,h_1^2 + 2 \cdot \frac{s_2}{3}\,(h_1^2 + h_1\,h_2 + h_2^2) = \frac{2}{3}\,[h_1^2\,s_1 + (h_1^2 + h_1\,h_2 + h_2^2)\,s_2].$$

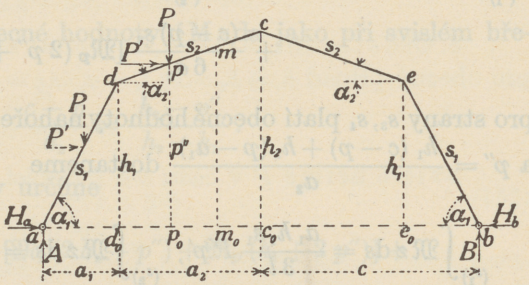
Položme $\int z^2\,ds = \frac{\Delta}{6}$; tu jest

$$\Delta = 4\,[h_1^2 s_1 + (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)\,s_2]\,. \tag{157}$$

a) Svislé břímě P kdekoli působící dá

$$A = P\frac{p'}{l}\,,\quad B = P\frac{p}{l}\,,$$

znamenáme-li jako vždy $\overline{a\,p_0} = p$, $\overline{p_0\,b} = p'$, $\overline{a\,b} = l$. V základním nosníku bude $H_a = H_b = 0$.



Obr. 87.

Pro břímě P v bodě p mezi a, d jest v bodě p a ve vrcholech d, c, e

$$\mathfrak{M}_p = P\frac{p\,p'}{l}\,,\quad \mathfrak{M}_1 = P\frac{p}{l}(l - a_1),\quad \mathfrak{M}_2 = P\frac{p}{l}\cdot\frac{l}{2}\,,\quad \mathfrak{M}_3 = P\frac{p}{l}\,a_1;$$

v bodech a, b jest ovšem $\mathfrak{M} = 0$. Pro jednotlivé přímé strany střednice určíme podle vzorců (156^a), (156^b)

$$(s_1)\int \mathfrak{M}\,z\,ds = \frac{p\,s_1}{6\,a_1}\,\mathfrak{M}_p\cdot 2\,p'' + \frac{(a_1 - p)\,s_1}{6\,a_1}\,[\mathfrak{M}_p\,(2\,p'' + h_1) + \mathfrak{M}_1\,(p'' + 2\,h_1)]\,,$$

$$(s_2)\int \mathfrak{M}\,z\,ds = \frac{s_2}{6}\,[\mathfrak{M}_1\,(2\,h_1 + h_2) + \mathfrak{M}_2\,(h_1 + 2\,h_2)]$$

$$(s_3)\int \mathfrak{M}\,z\,ds = \frac{s_2}{6}\,[\mathfrak{M}_2\,(2\,h_2 + h_1) + \mathfrak{M}_3\,(h_2 + 2\,h_1)],\quad (s_4)\int \mathfrak{M}\,z\,ds = \frac{s_1}{6}\,\mathfrak{M}_3\cdot 2\,h_1\,.$$

Dosazením za momenty $\mathfrak{M}$ a $p'' = z_p = \overline{p_0\,p} = \frac{h_1}{a_1}\,p$ dostaneme po úpravě

$$(s_1)\int \mathfrak{M}\,z\,ds = \frac{h_1 s_1}{6\,a_1^2\,l}\,P\,p\,\{2\,p^2\,p' + (a_1 - p)\,[(a_1 + p)\,(3\,l - 2\,a_1) - 2\,p^2]\}\,,$$

$$(s_2)\int \mathfrak{M}\,z\,ds = \frac{s_2}{6l}\,P\,p\left[\frac{h_1}{2}\,(5\,l - 2\,a_1) + l_2\,(2\,l - a_1)\right],$$

$$(s_3)\int \mathfrak{M}\,z\,ds = \frac{s_2}{6\,l}\,P\,p\left[h_2\,(l + a_1) + h_1\left(\frac{l}{2} + 2\,a_1\right)\right],\quad (s_4)\int \mathfrak{M}\,z\,ds = \frac{a_1 h_1 s_1}{3\,l}\,P\,p\,.$$

Sečtením všech čtyř hodnot vyjde pro celý nosník

$$\int \mathfrak{M}\,z\,ds = \frac{P\,p}{6}\left[\frac{h_1 s_1}{a_1^2}\,(3\,a_1^2 - p^2) + 3\,(h_1 + h_2)\,s_2\right]$$

a tedy vodorovná síla

$$H = \frac{6\int \mathfrak{M}\,z\,ds}{\Delta} = \frac{P\,p}{\Delta}\,[h_1 s_1\,(3\,a_1^2 - p^2) + 3\,(h_1 + h_2)\,s_2]\,. \tag{158}$$

Je-li svislé břímě P mezi body d, c, tu platí

$$\mathfrak{M}_1 = P\frac{p'}{l}\,a_1\,,\quad \mathfrak{M}_p = P\frac{p\,p'}{l}\,,\quad \mathfrak{M}_2 = P\frac{p}{l}\cdot\frac{l}{2}\,,\quad \mathfrak{M}_3 = P\frac{p}{l}\,a_1\,.$$

V tomto případě jest

$$\int_{(s_1)} \mathfrak{M}\, z\, ds = \frac{s_1}{6}\, \mathfrak{M}_1 \cdot 2 h_1, \quad \int_{(s_2)} \mathfrak{M}\, z\, ds = \frac{(p-a_1)\, s_2}{6\, a_2} [\mathfrak{M}_1 (2 h_1 + p'') + \mathfrak{M}_p (h_1 + 2 p'')] +$$

$$+ \frac{(c-p)\, s_2}{6\, a_2} [\mathfrak{M}_p (2 p'' + h_2) + \mathfrak{M}_2 (p'' + 2 h_2)];$$

pro strany s_3, s_4 platí obecné hodnoty nahoře napsané. Dosazením hodnot za momenty $\mathfrak{M}$ a $p'' = \dfrac{h_1 (c-p) + h_2 (p-a_1)}{a_2}$ dostaneme

$$\int_{(s_1)} \mathfrak{M}\, z\, ds = \frac{a_1 h_1 s_1}{3 l} P p', \quad \int_{(s_2)} \mathfrak{M}\, z\, ds = \frac{P s_2}{6} \left[3 c (h_1 + h_2) \frac{p'}{l} - \frac{a_2 p}{l} (2 h_1 + h_2)\right],$$

$$\int_{(s_3)} \mathfrak{M}\, z\, ds = \frac{s_2}{6 l} P p \left[h_2 (l + a_1) + h_1 \left(\frac{l}{2} + 2 a_1\right)\right], \quad \int_{(s_4)} \mathfrak{M}\, z\, ds = \frac{a_1 h_1 s_1}{3 l} P p.$$

Po sečtení a úpravě vyjde

$$\int \mathfrak{M}\, z\, ds = \frac{P}{6} \Big\{ 2 a_1 h_1 s_1 + [a_1 (2 h_1 + h_2) + c (h_1 + 2 h_2)] s_2 - \frac{(c-p)^2}{a_2^2} [3 a_2 h_2 - (c-p)(h_2 - h_1)] s_2 \Big\},$$

$$H = \frac{6 \int \mathfrak{M}\, z\, ds}{\Delta} = \frac{P}{\Delta} \Big\{ 2 a_1 h_1 s_1 + [a_1 (2 h_1 + h_2) + c (h_1 + 2 h_2)] s_2 -$$

$$- \frac{(c-p)^2}{a_2^2} [3 a_2 h_2 - (c-p)(h_2 - h_1)] s_2 \Big\}. \qquad (159)$$

Pro polohy břemene na pravé polovici nosníku má síla H tytéž hodnoty jako pro souměrné polohy na levé polovici.

b) Vodorovné břímě P' kdekoli ve výšce $\overline{p_0 p} = p''$ působící dá reakce základního nosníku

$$A = -B = -P' \frac{p''}{l}, \quad H_a = -P', \quad H_b = 0.$$

Je-li břímě P' mezi body a, d dostaneme

$$\mathfrak{M}_p = P' \frac{p''}{l} \left(l - a_1 \frac{p''}{h_1}\right), \quad \mathfrak{M}_1 = P' \frac{p''}{l} (l - a_1), \quad \mathfrak{M}_2 = P' \frac{p''}{l} \cdot \frac{l}{2}, \quad \mathfrak{M}_3 = P' \frac{p''}{l} a_1.$$

Pro jednotlivé strany nosníku má $\int \mathfrak{M}\, z\, ds$ obecné hodnoty prve uvedené při svislém břemeni; prvá se dá též psáti

$$\int_{(s_1)} \mathfrak{M}\, z\, ds = \frac{p'' s_1}{6 h_1} \mathfrak{M}_p \cdot 2 p'' + \frac{(h_1 - p'') s_1}{6 h_1} [\mathfrak{M}_p (2 p'' + h_1) + \mathfrak{M}_1 (p'' + 2 h_1)].$$

Sečtením hodnot pro všechny čtyři strany dostaneme

$$\int \mathfrak{M}\, z\, ds = \frac{s_1}{6 h_1} [\mathfrak{M}_p (h_1 + p'') h_1 + \mathfrak{M}_1 (h_1 - p'')(p'' + 2 h_1) + \mathfrak{M}_3 \cdot 2 h_1^2] + \frac{s_2}{6} [\mathfrak{M}_1 (2 h_1 + h_2) +$$

$$+ \mathfrak{M}_2 (2 h_1 + 4 h_2) + \mathfrak{M}_3 (2 h_1 + h_2)] = \frac{P' p''}{6} \left[(3 h_1^2 - p''^2) \frac{s_1}{h_1} + 3 (h_1 + h_2) s_2\right].$$

Z toho plyne

$$H_b = \frac{6 \int \mathfrak{M}\, z\, ds}{\Delta} = \frac{P' p''}{h_1 \Delta} [(3 h_1^2 - p''^2) s_1 + 3 h_1 (h_1 + h_2) s_2]. \qquad (160)$$

Pro vodorovné břímě P' mezi body d, c vyjde

$$\mathfrak{M}_1 = P'\left(h_1 - \frac{p''}{l}a_1\right),\quad \mathfrak{M}_p = P'\frac{p''}{l}\left(l - a_1 - \frac{p''-h_1}{h_2-h_1}a_2\right),\quad \mathfrak{M}_2 = P'\frac{p''}{l}\cdot\frac{l}{2},\quad \mathfrak{M}_3 = P'\frac{p''}{l}a_1.$$

Pro jednotlivé strany dostaneme tytéž obecné hodnoty $\int \mathfrak{M} z\,ds$ jako při svislém břemeni P mezi d, c; přitom lze nahraditi

$$\frac{p-a_1}{a_2} = \frac{p''-h_1}{h_2-h_1},\quad \frac{c-p}{a_2} = \frac{h_2-p''}{h_2-h_1}.$$

Sečtením hodnot pro všechny čtyři strany určíme

$$\int \mathfrak{M} z\,ds = \frac{s_1}{3}\mathfrak{M}_1 h_1 + \frac{(p''-h_1)s_2}{6(h_2-h_1)}[\mathfrak{M}_1(2h_1+p'') + \mathfrak{M}_p(h_1+2p'')] +$$

$$+\frac{(h_2-p'')s_2}{6(h_2-h_1)}[\mathfrak{M}_p(2p''+h_2)+\mathfrak{M}_2(p''+2h_2)] + \frac{s_2}{6}[\mathfrak{M}_2(2h_2+h_1)+\mathfrak{M}_3(h_2+2h_1)] + \frac{s_1}{3}\mathfrak{M}_3 h_1.$$

Dosazením hodnot za momenty $\mathfrak{M}$ a úpravou vyjde

$$\int \mathfrak{M} z\,ds = \frac{h_1^2 s_1}{3} - \frac{(2h_1^3 - 3h_2^2 p'' + p''^3)s_2}{6(h_2-h_1)}$$

a z toho plyne konečně

$$H_b = \frac{6\int \mathfrak{M} z\,ds}{\Delta} = \frac{P'}{(h_2-h_1)\Delta}[2h_1^2(h_2-h_1)s_1 - (2h_1^3 - 3h_2^2 p'' + p''^3)s_2]. \qquad (161)$$

Pro bod d, v němž je $p''=h_1$, musí dáti vzorec (160) i (161) týž výsledek, což je kontrolou řešení; zde vyjde z obou vzorců

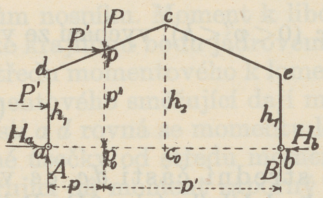
$$H_b = \frac{P'}{\Delta}[2h_1^2 s_1 + 3h_1(h_1+h_2)s_2].$$

2. Jsou-li krajní části $a\,d$, $e\,b$ svislé (obr. 88), dosadíme do předešlých vzorců $a_1=0$, $a_2=c$, $s_1=h_1$ a vyjde

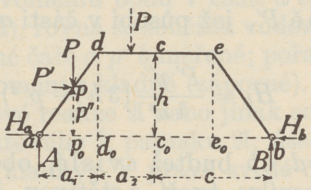
$$\Delta = 4[h_1^3 + (h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2)s_2]. \qquad (157^a)$$

Při svislém břemeni P, jež působí na část $d\,c$ $(0<p<c)$, obdržíme ze vzorce (159) jednoduchou úpravou

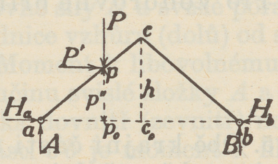
$$H = \frac{P\,p\,s_2}{l^2\Delta}\{(p'-p)[2h_1p' + h_2(l+2p)] + (h_1+2h_2)l^2\}. \qquad (159^a)$$



Obr. 88.



Obr. 89.



Obr. 90.

Pro vodorovné břímě P', jež působí na část $a\,d$ $(0<p''<h_1)$, plyne

$$H_b = \frac{P'p''}{\Delta}[3h_1^2 - p''^2 + 3(h_1+h_2)s_2]. \qquad (160^a)$$

AKADEMICKÁ KNIHOVNA SSM Jednota V PRAZE

Působí-li vodorovné břímě P' na část $d\,c$ $(h_1<p''<h_2)$, dostaneme

$$H_b=\frac{P'}{(h_2-h_1)\,\Delta}\,[2\,h_1^3\,(h_2-h_1-s_2)+(3\,h_2^2-p''^2)\,p''\,s_2]. \qquad (161^a)$$

3. Obě střední části $d\,c$, $c\,e$ buďtež vodorovné (obr. 89); tu dosadíme do vzorců pro obecný případ $h_1=h_2=h$, $s_2=a_2=c-a_1$ a určíme

$$\Delta=4\,h^2\,(3\,a_2+s_1). \qquad (157^b)$$

Svislé břímě P v části $a\,d$ působící $(0<p<a_1)$ dá

$$H=P\,p\cdot\frac{2\,a_1^2\,(3\,a_2+s_1)+(a_1^2-p^2)\,s_1}{4\,a_1^2\,h\,(3\,a_2+s_1)}. \qquad (158)$$

Působí-li svislé břímě P v části $d\,e$, vyjde ze vzorce (159) dosazením uvedených hodnot a úpravou

$$H=P\cdot\frac{2\,a_1\,a_2\,(3\,a_2+s_1)+3\,a_2\,[a_2^2-(c-p)^2]}{4\,a_2\,h\,(3\,a_2+s_1)}; \qquad (159^b)$$

poněvadž je část $d\,e$ přímá, platí poslední vzorec také pro část $c\,e$, tedy v mezích $a_1<p<l-a_1$.

Pro vodorovné břímě P', jež působí v části $a\,d$ $(0<p''<h)$, plyne

$$H_b=P'\,p''\cdot\frac{2\,h^2\,(3\,a_2+s_1)+(h^2-p''^2)\,s_1}{4\,h^3\,(3\,a_2+s_1)} \qquad (160^b)$$

Břímě P' v bodě d $(p''=h)$ působící dá

$$H_b=\frac{P'}{2}.$$

4. Odpadnou-li části $a\,d$, $e\,b$ (obr. 90), třeba dosaditi do obecných vzorců $a_1=0$, $a_2=c$, $s_1=0$, $h_1=0$, $h_2=h$; tím plyne

$$\Delta=4\,h^2\,s_2. \qquad (157^c)$$

Svislé břímě P na části $a\,c$ působící $(0<p<c)$ dá vodorovnou sílu, jež plyne uvedeným dosazením ze vzorce (159); vyjde tu

$$H=\frac{P\,p}{4\,h\,l^2}\,(3\,l^2-4\,p^2). \qquad (159^c)$$

Pro vodorovné břímě P', jež působí v části $a\,c$ $(0<p''<h)$, vychází ze vzorce (161)

$$H_b=\frac{P'\,p''}{4\,h^3}\,(3\,h^2-p''^2). \qquad (161^c)$$

5. Obě krajní části $a\,d$, $e\,b$ buďtež svislé, obě střední části $d\,c$, $c\,e$ vodorovné[1]), takže střednice nosníku tvoří s tětivou $a\,b$ obdélník (obr. 91). Pak jest $a_1=0$, $a_2=s_2=c$, $s_1=h_1=h_2=h$ a tedy

$$\Delta=4\,h^2\,(h+3\,c). \qquad (157^d)$$

[1]) Podrobněji řeší tento příklad spisovatelovo pojednání „Nosník lomený“ (Technický obzor 1916, str. 107 a d.); v něm jest uvažována také změna průřezu, různé druhy zatížení svislého i vodorovného a řešen i průhyb středu nosníku a přetvoření změnou teploty.

Svislé břímě P, jež působí na vodorovné části $d\,e$ $(0<p<l)$, vyvodí vodorovnou sílu, jež plyne ze vzorce (159); vyjde tu

$$H=\frac{3\,P\,p\,p'}{2\,h\,(2\,h+3\,l)}\,. \qquad (159^d)$$

Výsledek lze psáti též ve tvaru vzorce (99^a)

$$H=P\,\frac{m}{n}\,,$$

klademe-li

$$m=\frac{p\,p'}{l}\,,\quad n=\frac{2\,h}{3\,l}\,(2\,h+3\,l)\,. \qquad (162)$$

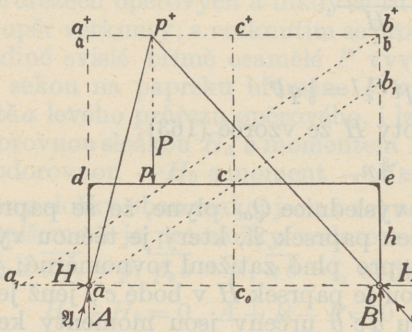
Příčinkovou čarou vodorovné síly je tedy táž parabola jako při nízkém oblouku parabolickém (viz obr. 79). Úsek n sestrojíme, přeneseme-li $\overline{a_1\,a}=\frac{2}{3}h$, $\overline{e\,b_1}=h$ a vedeme-li $a_1\,\mathfrak{b}\parallel a\,b_1$; pak jest

$$\overline{b\,\mathfrak{b}}=\overline{a_1\,b}\cdot\frac{\overline{b\,b_1}}{\overline{a\,b}}=\frac{2\,h}{l}\left(\frac{2}{3}\,h+l\right)=n.$$

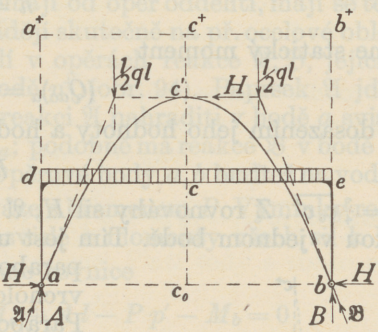
Obecný bod sečnice má podle vzorce (100^a) pořadnici

$$\mathfrak{z}=\frac{n\,p\,p'}{l\,m}=n\,,$$

je tedy sečnicí a^+b^+ přímka $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\parallel a\,b$. Seče-li paprsek P sečnici v bodě p^+, jest $a\,p^+$ paprsek reakce $\mathfrak{A}$ a $b\,p^+$ paprsek reakce $\mathfrak{B}$. Tím jsou určeny též momenty ke všem



Obr. 91.



Obr. 92.

bodům nosníku. Moment k libovolnému bodu v části $d\,e$, i k bodu mimo střednici (na př. ke krajnímu bodu jádrovému), rovná se součinu vodorovné síly H a svislé pořadnice od středu momentového k lomené čáře $a\,p^+\,b$ měřené; pořadnice vzhůru (dolů) od středu momentového směřující dají momenty kladné (záporné). Moment k libovolnému bodu v části $a\,d$ rovná se momentu levé reakce $\mathfrak{A}$ nebo jinak součinu svislé složky A a vodorovné úsečky od středu momentového k paprsku $\mathfrak{A}$; úsečka dovnitř (zevnitř) nosníku směřující dá moment záporný (kladný). V pravé svislé části $e\,b$ je moment k libovolnému bodu dán součinem svislé složky B pravé reakce a vodorovné úsečky od středu momentového k paprsku $\mathfrak{B}$, úsečka směřující dovnitř (zevnitř) nosníku dá moment záporný (kladný).

Příčinkové čáry momentů se určí jako u nízkého oblouku parabolického (viz obr. 80). Také částečné zatížení rovnoměrné i krajní hodnoty momentů při pohyblivém zatížení rovnoměrném by se řešily jako u nízkého oblouku parabolického.

Ve svislých částech $a\,d$, $b\,e$ jest $\varphi = 90^0$ i vyjde podle vzorců (84), (86), které platí také zde,

$$T = -H,\quad N = -\mathfrak{T}.$$

Pro vodorovnou část $d\,e$ dosadíme $\varphi = 0$ a obdržíme z týchž vzorců

$$T = \mathfrak{T},\quad N = -H.$$

Síly posouvající i normálné jsou tím vyřízeny.

Plné zatížení rovnoměrné (obr. 92) vyvodí vodorovnou sílu H, kterou určíme ze vzorce (159^d), nahradíme-li P elementárným břemenem $q\,dp$ a integrujeme-li v mezích celého nosníku. Tak vyjde

$$H = \frac{3q}{2h(2h+3l)} \int_0^l p\,p'\,dp;$$

vypočteme-li

$$\int_0^l p\,p'\,dp = \int_0^l p(l-p)\,dp = \tfrac{1}{6} l^3,$$

určíme

$$H = \frac{q l^3}{4h(2h+3l)}. \tag{163}$$

Svislice bodu c jest osou souměrnosti nosníku i zatížení; působí proto v průřezu c obě polovice nosníku navzájem vodorovnou silou H na rameni $\overline{c_0 c'} = h'$. Odejmeme-li v bodě c pravou stranu, musíme ji nahraditi silou H, jež působí v bodě c' vlevo a je v rovnováze s reakcí $\mathfrak{A}$ a s výslednicí $Q_{ac} = \frac{1}{2} q l$ zatížení na levé polovici nosníku. Z toho plyne podle vzorce (102), odvozeného již při obecném oblouku vyšším, pořadnice

$$h' = \frac{(Q_{ac})_a}{H}.$$

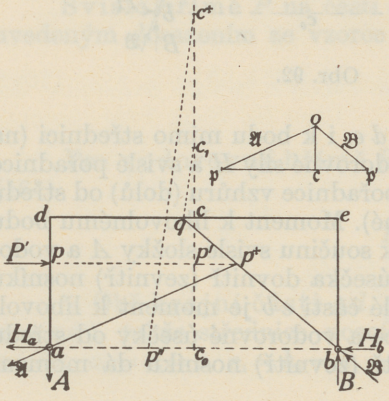
Vypočteme statický moment

$$(Q_{ac})_a = \tfrac{1}{2} q l \cdot \tfrac{1}{4} l = \tfrac{1}{8} q l^2$$

a určíme dosazením jeho hodnoty a hodnoty H ze vzorce (163)

$$h' = \tfrac{3}{4} n, \tag{164}$$

tedy $\overline{c_0 c'} = \frac{3}{4} \overline{c_0 c^+}$. Z rovnováhy sil H, $\mathfrak{A}$ a výslednice Q_{ac} plyne, že se paprsky těchto tří sil sekou v jednom bodě. Tím jest určen paprsek $\mathfrak{A}$, který je tečnou výslednicové paraboly pro plné zatížení rovnoměrné; její tečnou vrcholovou je paprsek H v bodě c', jenž je vrcholem. Parabolou $a\,c'\,b$ určeny jsou momenty ke všem bodům vodorovné části $d\,e$ jako při jediném břemeni svislém. Ve svislé části $a\,d$ ($b\,e$) je moment k libovolnému bodu roven momentu reakce $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$).



Obr. 93.

Vodorovné břímě P', jež působí ve výši $\overline{ap} = p''$ (obr. 93), dá podle vzorce (160)

$$H_b = \frac{P' p''}{2h}\left[1 + \frac{h^2 - p''^2}{h(2h+3l)}\right]. \tag{160^d}$$

Ostatní složky reakcí mají hodnoty

$$B = -A = P'\frac{p''}{l},\quad H_a = H_b - P'.$$

Složkami jsou určeny i výslední reakce $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, jejichž paprsky jdou body a, b a sekou se na paprsku P' v bodě p^+. Naznačme k tomu též obrazec složkový, jenž

obsahuje úseky $P' = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'}$, $\mathfrak{A} = \overline{o\,\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{p}'\,o}$. Paprsek $\mathfrak{B}$ seče osu $d\,e$ v bodě q; poněvadž je $\triangle b\,e\,q \sim \triangle o\,c\,\mathfrak{p}'$, plyne

$$\overline{q\,e} = h \cdot \frac{H_b}{B} = \frac{l}{2} + \frac{h^2 - p''^2}{3\,n}.$$

Přeneseme-li $\overline{c_0\,p''} = \overline{p'\,c} = h - p''$, $\overline{c\,c_1} = \dfrac{h + p''}{3}$, $\overline{c_0\,c^+} = n$ a vedeme-li $c_1\,q \parallel c^+\,p''$, vyjde

$$\overline{q\,c} = \overline{c\,c_1} \cdot \frac{\overline{p''\,c_0}}{\overline{c_0\,c^+}} = \frac{h + p''}{3} \cdot \frac{h - p''}{n} = \overline{q\,e} - \frac{l}{2};$$

tím je bod q správně sestrojen. Spojnice $b\,q$ je paprskem $\mathfrak{B}$, na němž je bod p^+; $a\,p^+$ je pak paprsek $\mathfrak{A}$.

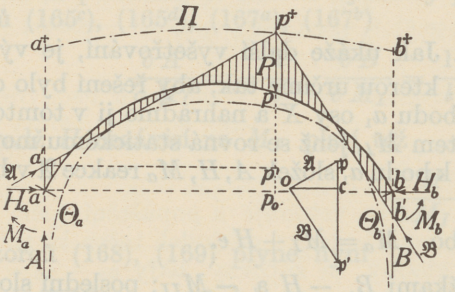
Moment k libovolnému bodu části $a\,d$ je stanoven součinem složky A, zde záporné, a vodorovné úsečky od středu momentového k lomené čáře $a\,p^+\,q$; tato úsečka je kladná (záporná), směřuje-li od středu momentového zevnitř (dovnitř) nosníku. Moment k libovolnému bodu části $b\,e$ se určí součinem reakce B, zde kladné, a vodorovné úsečky od středu momentového k paprsku $\mathfrak{B}$, zevnitř (dovnitř) nosníku kladné (záporné). V části $d\,e$ se stanoví moment k libovolnému bodu jakožto moment reakce $\mathfrak{B}$ součinem vodorovné složky H_b a svislé pořadnice od momentového středu k paprsku $\mathfrak{B}$, vzhůru (dolů) kladné (záporné). Momenty ke všem bodům nosníku vlevo od bodu q jsou zde kladné, momenty ke všem bodům vpravo od q jsou záporné.

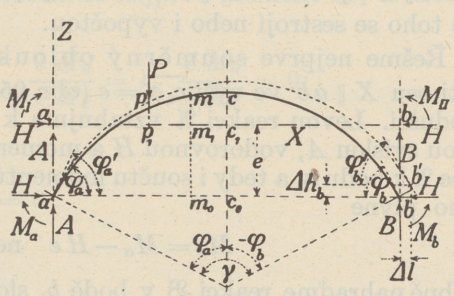
c) Oblouk bez kloubů.

29. Obecné řešení pro svislé zatížení. *α) Opěrové reakce.* Nosníky obloukové se vyskytují prakticky nejčastěji ve způsobu kleneb, jež se stýkají s opěrami v plných průřezech opěrových a nikdy se tu nemají od opěr odděliti, mají se tedy, jako by byly do opěr vetknuty; s vetknutím se provádějí skutečně na př. ocelové oblouky bez kloubů. Jediné svislé břímě osamělé P vyvodí v opěrách reakce $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, jejichž šikmé paprsky se sekou na paprsku břemene P v bodě p^+ (obr. 94). Paprsek $\mathfrak{A}$ jde obecně mimo těžiště a levého průřezu opěrového, i lze reakci $\mathfrak{A}$ nahraditi v bodě a svislou složkou A, vodorovnou složkou H_a a momentem M_a; podobně má reakce $\mathfrak{B}$ v bodě b svislou složku B, vodorovnou $-H_b$ a moment $-M_b$. Opěrové body a, b buďtež na vodorovnici.

Všechny složky obou reakcí jsou v rovnováze s břemenem P. Výminky rovnováhy jsou tři; napíšeme-li je pro složky vodorovné, svislé a momenty všech sil k bodu b a znamenáme-li $\overline{a\,p_0} = p$, $\overline{p_0\,b} = p'$, $\overline{a\,b} = l$, obdržíme rovnice

$$H_a - H_b = 0, \quad A + B - P = 0, \quad M_a + A\,l - P\,p' - M_b = 0.$$





Z prvé výminky rovnováhy vychází

$$H_a = H_b = H;$$

za svislého zatížení jsou vodorovné složky opěrových reakcí rovné a protivné, dávajíce stálou vodorovnou sílu H obloukového nosníku. Z třetí výminky rovnováhy plyne

$$A = P\frac{p'}{l} + \frac{M_b - M_a}{l}; \tag{165a}$$

obdobně by vyšlo z momentové výminky rovnováhy k bodu a

$$B = P\frac{p}{l} - \frac{M_b - M_a}{l}, \tag{165b}$$

jak by plynulo také dosazením za A do druhé výminky rovnováhy.

Ze statických výminek rovnováhy nelze přímo určiti žádnou složku reakcí opěrových. Pro šest neznámých složek máme jen tři výminky rovnováhy; oblouk bez kloubů je trojnásobně staticky neurčitý. I kdyby šlo o zatížení libovolného směru, vázala by prvá výminka rovnováhy vodorovné složky H_a, H_b obou reakcí jakožto jediné neznámé, druhá výminka obsahovala by pak z neznámých jedině svislé složky A, B. Lze tedy voliti z obou vodorovných složek H_a, H_b v obecném případě jen jedinou jakožto staticky neurčitou sílu; také ze svislých složek A, B může býti jen jedna staticky neurčitá. Momenty M_a, M_b mohou však býti oba staticky neurčité. Za staticky neurčité veličiny lze proto voliti na př. složky A, H_a, M_a nebo H_a, M_a, M_b.

Pro grafické řešení reakcí bylo by třeba znáti sečnici Π a obě tečnice Θ_a, Θ_b. K rovnici sečnice dospějeme, sestrojíme-li ve složkovém obrazci k úseku břemene $P = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'}$ úseky reakcí $\mathfrak{A} = \overline{o\,\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{p}'\,o}$, jež rozložíme vodorovnou přímkou $o\,\mathfrak{c}$ na složky $H = \overline{o\,\mathfrak{c}}$, $A = \overline{\mathfrak{c}\,\mathfrak{p}}$, $B = \overline{\mathfrak{p}'\,\mathfrak{c}}$; v hlavním obrazci vedeme pak vodorovnici $a'\,p'$ a dostaneme $\triangle\, a'\,p'\,p^+ \sim \triangle\, o\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{p}$, tedy

$$\overline{p'\,p^+} = \overline{a'\,p'} \cdot \frac{\overline{\mathfrak{c}\,\mathfrak{p}}}{\overline{o\,\mathfrak{c}}} = \frac{A\,p}{H}.$$

Dále jest podle vzorce (69)

$$M_a = H \cdot \overline{a\,a'} \text{ nebo } \overline{a\,a'} = \overline{p_0\,p'} = \frac{M_a}{H}.$$

Znamenáme-li $\overline{p_0\,p^+} = \overline{p_0\,p'} + \overline{p'\,p^+} = \mathfrak{z}$, platí

$$\mathfrak{z} = \frac{M_a + A\,p}{H}. \tag{166}$$

Tečnice jsou pak obalovými čarami paprsků reakcí pro jednotlivé polohy břemene; podle toho se sestrojí nebo i vypočtou.

Řešme nejprve souměrný oblouk. Jak ukáže další vyšetřování, je výhodno zvoliti osu $X \parallel a\,b$ ve výši $\overline{c_0\,c_1} = e$ (obr. 95), kterou určíme tak, aby řešení bylo co nejjednodušší. Levou reakci $\mathfrak{A}$ vztahujme k bodu a_1 osy X a nahraďme ji v tomto bodě složkou svislou A, vodorovnou H a momentem M_I, jenž se rovná statickému momentu reakce $\mathfrak{A}$ k bodu a_1 a tedy i součtu momentů k bodu a_1 složek A, H, M_a reakce $\mathfrak{A}$ v bodě a; z toho plyne

$$M_I = M_a - H\,e \quad \text{nebo} \quad M_a = M_I + H\,e. \tag{167a}$$

Podobně nahraďme reakci $\mathfrak{B}$ v bodě b_1 složkami B, $-H$ a $-M_{II}$; poslední složka se rovná statickému momentu reakce $\mathfrak{B}$ k bodu b_1, obrátíme-li znaménko, a určí se, nahradíme-li reakci $\mathfrak{B}$ v bodě b složkami B, $-H$, $-M_b$, rovnicí

$$-M_{II} = -M_b + H\,e \text{ nebo } M_b = M_{II} + H\,e. \tag{167b}$$

Za staticky neurčité veličiny zvolíme nyní H, M_I, M_{II}. Vyjádříme jimi ještě svislé složky A, B obou reakcí. Obě reakce jsou v rovnováze s břemenem P, jež měj libovolné působiště p na oblouku. Nahradíme-li reakce složkami A, H, M_I v bodě a_1 a $B, -H, -M_{II}$ v bodě b_1, je všech těchto šest složek v rovnováze s břemenem P. Momentová výminka rovnováhy k bodu b_1 jest

$$M_I + A\,l - P\,p' - M_{II} = 0$$

a dá

$$A = P\frac{p'}{l} + \frac{M_{II} - M_I}{l}. \tag{165^c}$$

Obdobně plyne z momentové výminky rovnováhy k bodu a_1

$$B = P\frac{p}{l} - \frac{M_{II} - M_I}{l}. \tag{165^d}$$

Kontrolou je výminka rovnováhy pro svislé složky $A + B - P = 0$; stanovené hodnoty A, B tomu vyhovují.

β) ***Přetvárné výminky*** jsou dány obecnou rovnicí (91)

$$\int \frac{M}{EJ}\frac{\partial M}{\partial X}\,ds + \int\left(\frac{N}{EU} + \delta\varepsilon\right)\frac{\partial N}{\partial X}\,ds + \Sigma\frac{\partial A}{\partial X}\,\Delta a = 0.$$

Dosadíme-li za X postupně zvolené staticky neurčité veličiny M_I, M_{II} a H, dostaneme tři výminky přetvárné pro oblouk bez kloubů, jehož řešení z nich odvodíme.

Vyjádřili jsme již veličinami M_I, M_{II}, H složky A, B, M_a, M_b opěrových reakcí v bodech a, b. Zbývá ještě vyjádřiti jimi ohybový moment M a normálnou sílu N pro obecný průřez, jehož těžiště m vztahujeme k osám X, Z souřadnicemi $\overline{a_1 m_1} = x$, $\overline{m_1 m} = z$. Součtem momentů vnějších sil po levé straně bodu m určíme

$$M = M_I + A\,x - H\,z - P\,(x - p); \tag{168}$$

poslední člen platí pouze pro body m, jež jsou vpravo od břemene P. Normálná síla N je dána vzorcem (71)

$$N = -H\cos\varphi - V\sin\varphi;$$

svislá složka výslednice vnějších sil po levé straně průřezu jest $V = A - P$, břímě P odčítáme ovšem jen v průřezech napravo od břemene. Platí tedy s tímto omezením

$$N = -H\cos\varphi - (A - P)\sin\varphi. \tag{169}$$

Za X položíme do obecné výminky přetvárné nejprve moment M_I a určíme ze vzorců (165^c), (165^d), (167^a), (167^b)

$$\frac{\partial A}{\partial M_I} = -\frac{1}{l},\quad \frac{\partial B}{\partial M_I} = \frac{1}{l},\quad \frac{\partial M_a}{\partial M_I} = 1,\quad \frac{\partial M_b}{\partial M_I} = 0;$$

poněvadž H nezávisí na M_I, platí též

$$\frac{\partial H}{\partial M_I} = 0.$$

Ze vzorců (168), (169) plyne nyní

$$\frac{\partial M}{\partial M_I} = 1 + \frac{\partial A}{\partial M_I}x = 1 - \frac{x}{l} = \frac{x'}{l},\quad \frac{\partial N}{\partial M_I} = -\frac{\partial A}{\partial M_I}\sin\varphi = \frac{\sin\varphi}{l}.$$

Uvažme též popuštění opěr. Mysleme si přetvořený oblouk s popuštěnými opěrami přiveden do té polohy $a\,b'$ (obr. 95), že bod a zůstane na svém místě. Bod b_a přijde

tu do polohy b', jež má k bodu b vodorovnou souřadnici Δl a svislou Δh_b. Pak je Δl popuštění opěr ve směru vodorovném; značíme-li je kladně, znamená-li zvětšení rozpětí $\overline{a\,b} = l$, směřuje kladné popuštění Δl proti kladné reakci H, dosadíme je tedy kladně: $\Delta a = \Delta l$. Změnu výšky Δh_b berme kladně od původní polohy b vzhůru, tedy ve smyslu kladné reakce B; pak je příslušné popuštění $\Delta a = -\Delta h_b$. Popuštěním opěr změní se též odchylka φ_a tečny ke střednici v bodě a o $\Delta\varphi_a$ na úhel $\varphi'_a = \varphi_a + \Delta\varphi_a$ a odchylka φ_b tečny ke střednici v bodě b o $\Delta\varphi_b$ na úhel $\varphi'_b = \varphi_b + \Delta\varphi_b$. Odchylky φ pokládáme za kladné ve smyslu nejkratšího točení od kladné osy X do kladné osy Z; v témž smyslu, t. j. proti točení ručiček hodinových, berme za kladná i popuštění $\Delta\varphi_a$, $\Delta\varphi_b$. Pak smysl kladného popuštění $\Delta\varphi_a$ nesouhlasí se smyslem kladného momentu M_a i dosadíme $\Delta a = \Delta\varphi_a$; smysl kladného popuštění $\Delta\varphi_b$ souhlasí však se smyslem momentu $-M_b$, jenž je složkou pravé reakce opěrové, pročež je pro toto popuštění $\Delta a = -\Delta\varphi_b$. Jednotlivá popuštění opěr násobíme vždy derivací složky reakce, jež má směr popuštění, podle staticky neurčité veličiny a výsledky sčítáme.

Z obecné výminky přetvárné vychází pro $X \equiv M_I$ dosazením $ds \sin\varphi = dz$ a násobením l rovnice

$$\int_0^l \frac{M x'\,ds}{EJ} + \int_0^l \left(\frac{N}{EU} + \delta\varepsilon\right) dz - \Delta h_b + l\cdot\Delta\varphi_a = 0. \qquad (170^a)$$

Dále položíme do obecné výminky přetvárné za X moment M_{II} a odvodíme z týchž rovnic jako prve

$$\frac{\partial A}{\partial M_{II}} = \frac{1}{l},\quad \frac{\partial B}{\partial M_{II}} = -\frac{1}{l},\quad \frac{\partial M_a}{\partial M_{II}} = 0,\quad \frac{\partial M_b}{\partial M_{II}} = 1,$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_{II}} = \frac{\partial A}{\partial M_{II}} x = \frac{x}{l},\quad \frac{\partial N}{\partial M_{II}} = -\frac{\partial A}{\partial M_{II}} \sin\varphi = -\frac{\sin\varphi}{l};$$

mimo to platí zase

$$\frac{\partial H}{\partial M_{II}} = 0.$$

Obecná výminka přetvárná dá nyní, dosadíme-li $ds \sin\varphi = dz$ a násobíme-li l, rovnici

$$\int_0^l \frac{M x\,ds}{EJ} - \int_0^l \left(\frac{N}{EU} + \delta\varepsilon\right) dz + \Delta h_b - l\cdot\Delta\varphi_b = 0. \qquad (170^b)$$

Konečně nahradíme v obecné výmince přetvárné staticky neurčitou veličinu X vodorovnou silou H a určíme

$$\frac{\partial A}{\partial H} = 0,\ \frac{\partial B}{\partial H} = 0,\ \frac{\partial M_a}{\partial H} = e,\ \frac{\partial M_b}{\partial H} = e,\ \frac{\partial M}{\partial H} = -z,\ \frac{\partial N}{\partial H} = -\cos\varphi;$$

síla H je také složkou reakcí opěrových a

$$\frac{\partial H}{\partial H} = 1.$$

Z obecné výminky přetvárné dá nyní člen, jenž se vztahuje k popuštění opěr, výraz $e\,(\Delta\varphi_a - \Delta\varphi_b) + 1\cdot\Delta l$. Jsou-li φ_a, φ_b algebraické hodnoty odchylek tečen ke střednici v bodech a, b od vodorovnice, je φ_a úhel kladný, φ_b záporný, tedy $\varphi_a - \varphi_b = \gamma$ znamená součet prostých hodnot odchylek φ_a, φ_b, t. j. úhel γ průřezů opěrových, neboť φ_a, $-\varphi_b$ jsou též prosté úhly průřezů opěrových se svislicí. Tento úhel se mění popuštěním opěr o hodnotu

$$\Delta\gamma = \Delta(\varphi_a - \varphi_b) = \Delta\varphi_a - \Delta\varphi_b.$$

Dosadíme též $\mathrm{d}s \cos\varphi = \mathrm{d}x$ a změníme znaménko, čímž dospějeme z obecné výminky přetvárné k rovnici

$$\int_0^l \frac{M z \,\mathrm{d}s}{EJ} + \int_0^l \left(\frac{N}{EU} + \delta\varepsilon\right) \mathrm{d}x - e \cdot \Delta\gamma - \Delta l = 0. \qquad (170^c)$$

Rovnice ($170^{a,\,b,\,c}$), jsou výminkami přetvárnými pro jakýkoli oblouk bez kloubů.

30. Obecný oblouk vyšší za svislého zatížení. *α) Vzorce pro složky reakcí.* U vyšších oblouků můžeme nedbati účinku normálné síly N, jenž se jeví zkrácením střednice; bude nepatrný proti účinku momentu ohybového, jenž vyvozuje změnu křivosti střednice, poněvadž jest u vyšších oblouků normálná síla poměrně malá. Vynecháme tedy v rovnicích (170) členy, jež obsahují N. Budeme dále uvažovati stálou změnu teploty δ a předpokládati celý nosník z téže látky stejnorodé; pak jest i E a ε stálé. Druhé členy v rovnicích (170) redukují se za těchto předpokladů na $\delta\varepsilon\int \mathrm{d}z$, $-\delta\varepsilon\int \mathrm{d}z$ a $\delta\varepsilon\int \mathrm{d}x$; integrály rozumějí se tu v mezích celého nosníku. Zavedeme-li do mezí proměnnou z, dostaneme

$$\int_{-e}^{-e} \mathrm{d}z = 0;$$

dále jest v mezích nosníku

$$\int_0^l \mathrm{d}x = l.$$

Oblouk bez kloubů mění pravidlem průřez, jenž se od vrcholu k patkám obyčejně zvětšuje. Vyšetřujme přibližně, pokládajíce $J\cos\varphi = J_0$ za hodnotu stálou; tento předpoklad vyhovuje uvedené pravidelné změně průřezu, hodí se však jen pro oblouky segmentové, pro něž je $\varphi < 90^0$. U plných oblouků, kde dostupuje φ hodnoty 90^0, znamenal by v patce průřez nekonečně veliký. Za uvedeného předpokladu jest

$$\frac{\mathrm{d}s}{J} = \frac{\mathrm{d}x}{J\cos\varphi} = \frac{\mathrm{d}x}{J_0}.$$

Zavedeme-li všechny odvozené hodnoty do rovnic (170) a násobíme-li je EJ_0, obdržíme pro vyšší oblouk výminky přetvárné

$$\left.\begin{aligned} \int_0^l M x' \,\mathrm{d}x &= EJ_0 (\Delta h_b - l \cdot \Delta\varphi_a), \\ \int_0^l M x \,\mathrm{d}x &= EJ_0 (l \cdot \Delta\varphi_b - \Delta h_b), \\ \int_0^l M z \,\mathrm{d}x &= EJ_0 (\Delta l + e \cdot \Delta\gamma - \delta\varepsilon l). \end{aligned}\right\} \qquad (171)$$

Ohybový moment M je dán vzorcem (168), do něhož dosadíme za reakci A ze vzorce (165^c); určíme tak

$$M = M_I + P\frac{p'}{l}x + \frac{M_{II} - M_I}{l}x - Hz - P(x-p) =$$

$$= P\frac{p'}{l}x - P(x-p) + \frac{M_I(l-x) + M_{II}x}{l} - Hz.$$

Člen $-P(x-p)$ platí pouze vpravo od břemene; pak znamená

$$P\frac{p'}{l}x - P(x-p) = \mathfrak{M}$$

moment prostého nosníku, i jest

$$M = \mathfrak{M} + \frac{M_I x' + M_{II} x}{l} - H z. \tag{172}$$

Poslední vzorec platí obecně pro jakékoli zatížení svislé, jež lze vždy složiti z osamělých břemen. Dosadíme-li hodnotu M z tohoto vzorce do přetvárných výminek (171), dostaneme rovnice

$$\int_0^l \mathfrak{M} x' \,dx + \frac{M_I}{l}\int_0^l x'^2 \,dx + \frac{M_{II}}{l}\int_0^l x x' \,dx - H\int_0^l x' z \,dx = E J_0 (\Delta h_b - l \cdot \Delta \varphi_a),$$

$$\int_0^l \mathfrak{M} x \,dx + \frac{M_I}{l}\int_0^l x x' \,dx + \frac{M_{II}}{l}\int_0^l x^2 \,dx - H\int_0^l x z \,dx = E J_0 (l \cdot \Delta \varphi_b - \Delta h_b),$$

$$\int_0^l \mathfrak{M} z \,dx + \frac{M_I}{l}\int_0^l x' z \,dx + \frac{M_{II}}{l}\int_0^l x z \,dx - H\int_0^l z^2 \,dx = E J_0 (\Delta l + e \cdot \Delta \gamma - \delta \varepsilon l).$$

Volme nyní polohu osy $X \equiv a_1 b_1$ tak, aby hověla rovnici

$$\int_0^l z \,dx = 0. \tag{173}$$

Z toho určíme pořadnici $e = \overline{c_0 c_1}$; poznamenáme-li $\overline{m_0 m} = e + z = z'$ (obr. 95), pak jest $z = z' - e$ a tedy

$$\int_0^l (z' - e) \,dx = 0 \quad \text{nebo} \quad \int_0^l z' \,dx = e\int_0^l dx = e\,l.$$

Poslední rovnici lze dosazením $\int_0^l z' \,dx =$ ús. $a\,p\,c\,b$, $e \cdot l =$ obd. $a\,a_1\,b_1\,b$ psáti

$$\text{ús. } a\,p\,c\,b = \text{obd. } a\,a_1\,b_1\,b; \tag{173a}$$

plyne z ní

$$e = \frac{1}{l}\int_0^l z' \,dx. \tag{174}$$

Dále plyne z rovnice (173)

$$\int_0^l x z \,dx + \int_0^l x' z \,dx = \int_0^l (x + x') z \,dx = l\int_0^l z \,dx = 0.$$

Předpokládáme oblouk souměrný; v souměrných bodech je totéž z, úsečky x a x' se pak vymění, i jest se zřením k poslední rovnici

$$\int_0^l x z \,dx = \int_0^l x' z \,dx = 0. \tag{173b}$$

Vyčíslíme dále integrály

$$\int_0^l x^2 \,dx = \tfrac{1}{3} l^3 = \int_0^l x'^2 \,dx, \quad \int_0^l x x' \,dx = \int_0^l x (l - x) \,dx = \tfrac{1}{6} l^3$$

a poznamenáme jako při spojitém nosníku stálého průřezu[1])

$$6\int_0^l \mathfrak{M} x \,dx = \mathfrak{N}, \quad 6\int_0^l \mathfrak{M} x' \,dx = \mathfrak{N}'. \tag{175}$$

[1]) Viz druhý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1946), str. 83 a d.; tam byly uvedeny hodnoty $\mathfrak{N}$ a $\mathfrak{N}'$ pro různá zatížení. Viz též „Technický průvodce", seš. 3. (3. vyd. 1944), str. 70 a 71.

Dosazením stanovených hodnot do výminek přetvárných a násobením prvých dvou výminek $\frac{6}{l}$ dospíváme k rovnicím

$$\left.\begin{aligned} 2\,M_I\,l + M_{II}\,l + \frac{\mathfrak{N}'}{l} &= 6\,E J_0 \left(\frac{\Delta h_b}{l} - \Delta\varphi_a\right), \\ M_I\,l + 2\,M_{II}\,l + \frac{\mathfrak{N}}{l} &= 6\,E J_0 \left(\Delta\varphi_b - \frac{\Delta h_b}{l}\right), \\ \int_0^l \mathfrak{M}\,z\,\mathrm{d}x - H\int_0^l z^2\,\mathrm{d}x &= E J_0\,(\Delta l + e\cdot\Delta\gamma - \delta\,\varepsilon\,l)\,. \end{aligned}\right\} \tag{176}$$

Vhodnou volbou osy X dosáhli jsme toho, že prvé dvě rovnice obsahují pouze neznámé M_I, M_{II} a v třetí rovnici jest jediná neznámá H. Z prvých dvou rovnic můžeme řešiti neznámé M_I, M_{II}, z třetí vypočteme přímo H; výsledky řešení jsou

$$\left.\begin{aligned} M_I &= -\frac{2\,\mathfrak{N}' - \mathfrak{N}}{3\,l^2} + 6\,E J_0 \frac{\Delta h_b}{l^2} - 2\,E J_0 \frac{2\,\Delta\varphi_a + \Delta\varphi_b}{l}, \\ M_{II} &= -\frac{2\,\mathfrak{N} - \mathfrak{N}'}{3\,l^2} - 6\,E J_0 \frac{\Delta h_b}{l^2} + 2\,E J_0 \frac{\Delta\varphi_a + 2\,\Delta\varphi_b}{l}, \end{aligned}\right\} \tag{177}$$

$$H = \frac{\int_0^l \mathfrak{M}\,z\,\mathrm{d}x - E J_0\,(\Delta l + e\cdot\Delta\gamma - \delta\,\varepsilon\,l)}{\int_0^l z^2\,\mathrm{d}x}\,. \tag{178}$$

Tyto tři rovnice platí obecně pro jakékoli zatížení svislé; obsahují mimo účinek zatížení též účinky všech složek popuštění opěr i účinek změny teploty. Vynecháme-li zatížení, tedy veličiny $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$, a změnu teploty, obdržíme pouhý účinek popuštění opěr ve vzorcích

$$\left.\begin{aligned} M_I &= 6\,E J_0 \frac{\Delta h_b}{l^2} - 2\,E J_0 \frac{2\,\Delta\varphi_a + \Delta\varphi_b}{l}, \\ M_{II} &= -6\,E J_0 \frac{\Delta h_b}{l^2} + 2\,E J_0 \frac{\Delta\varphi_a + 2\,\Delta\varphi_b}{l}, \end{aligned}\right\} \tag{177a}$$

$$H = -\frac{E J_0\,(\Delta l + e\cdot\Delta\gamma)}{\int_0^l z^2\,\mathrm{d}x}\,. \tag{178a}$$

Dále plyne, vynecháme-li zatížení, ze vzorců (165c), (165d)

$$A = -B = \frac{M_{II} - M_I}{l} = -12\,E J_0 \frac{\Delta h_b}{l^3} + 6\,E J_0 \frac{\Delta\varphi_a + \Delta\varphi_b}{l^2}\,.$$

U souměrného oblouku jest $\varphi_a = -\varphi_b$, tedy $\varphi_a + \varphi_b = 0$. Popuštěním opěr přestane však souměrnost a

$$\Delta\varphi_a + \Delta\varphi_b = \Delta\gamma'$$

znamená změnu souměrnosti oblouku, plynoucí z popuštění opěr. Pak vyjde

$$A = -B = -12\,E J_0 \frac{\Delta h_b}{l^3} + 6\,E J_0 \frac{\Delta\gamma'}{l^2}\,. \tag{179}$$

Z odvozených rovnic plyne, že z různých složek popuštění má na momenty M_I, M_{II} vliv pouze změna výšky bodu b a změny sklonů φ_a, φ_b opěrových průřezů;

vodorovnou sílu H vyvodí pouze změna rozpětí a změna úhlu γ opěrových průřezů, svislé složky A, B pak vzniknou jen změnou výšky bodu b a změnou souměrnosti oblouku. Ze známých hodnot H, M_I, M_{II} určily by se též momenty M_a, M_b k opěrovým bodům podle vzorců (167^a), (167^b).

Změna teploty samotná vyvodí vodorovnou sílu

$$H_t = \frac{E J_0 \delta \varepsilon l}{\int_0^l z^2 \, dx}. \tag{178^b}$$

Z rovnic (177) plyne $M_I = M_{II} = 0$; pak je též $A = B = 0$. Podle toho vzniká stálou změnou teploty pouze vodorovná síla H_t, jež působí v ose $a_1 b_1$.

Dbáme-li dále jen zatížení, vynechávajíce účinek popuštění opěr a změny teploty, obdržíme staticky neurčité veličiny

$$M_I = -\frac{2\mathfrak{N}' - \mathfrak{N}}{3l^2}, \quad M_{II} = -\frac{2\mathfrak{N} - \mathfrak{N}'}{3l^2}, \tag{177^c}$$

$$H = \frac{\int_0^l \mathfrak{M} z \, dx}{\int_0^l z^2 \, dx}. \tag{178^c}$$

Vynecháme-li popuštění opěr, nabudou prvé dvě přetvárné výminky (176), z nichž plynou vzorce (177^c) pro momenty M_I, M_{II}, téhož tvaru jako přetvárné výminky (třímomentové rovnice) pro přímý nosník stálého průřezu, na obou koncích vetknutý. Určí se tedy momenty M_I, M_{II}, jak ukazují též vzorce (177^c), za libovolného svislého zatížení jako podporové momenty přímého nosníku stálého průřezu, který jest na obou koncích vetknut a má totéž zatížení jako daný nosník obloukový. Tím je dáno grafické i početní řešení momentů M_I, M_{II} pro jakékoli svislé zatížení.

Z momentů M_I, M_{II} plynou svislé reakce A, B podle vzorců (165^c), (165^d). Dosaďme do nich

$$P\frac{p'}{l} = \mathfrak{A}_0, \quad P\frac{p}{l} = \mathfrak{B}_0$$

jakožto reakce prostého nosníku a za momenty M_I, M_{II} ze vzorců (177^c); obdržíme tím

$$\left.\begin{aligned} A &= \mathfrak{A}_0 + \frac{M_{II} - M_I}{l} = \mathfrak{A}_0 + \frac{\mathfrak{N}' - \mathfrak{N}}{l^3}, \\ B &= \mathfrak{B}_0 - \frac{M_{II} - M_I}{l} = \mathfrak{B}_0 - \frac{\mathfrak{N}' - \mathfrak{N}}{l^3}. \end{aligned}\right\} \tag{180}$$

Podle toho jsou svislé složky reakcí A, B rovny reakcím přímého nosníku stálého průřezu jenž je na obou koncích vetknut.

Znamenejme dále ve vzorci (172) pro moment M kratčeji

$$M_0 = \mathfrak{M} + \frac{M_I x' + M_{II} x}{l}; \tag{181}$$

pak znamená M_0 moment ke svislici bodu m uvedeného přímého vetknutého nosníku. Pro moment M u nosníku obloukového k bodu m, který může býti obecně i mimo střednici, platí podle vzorce (172)

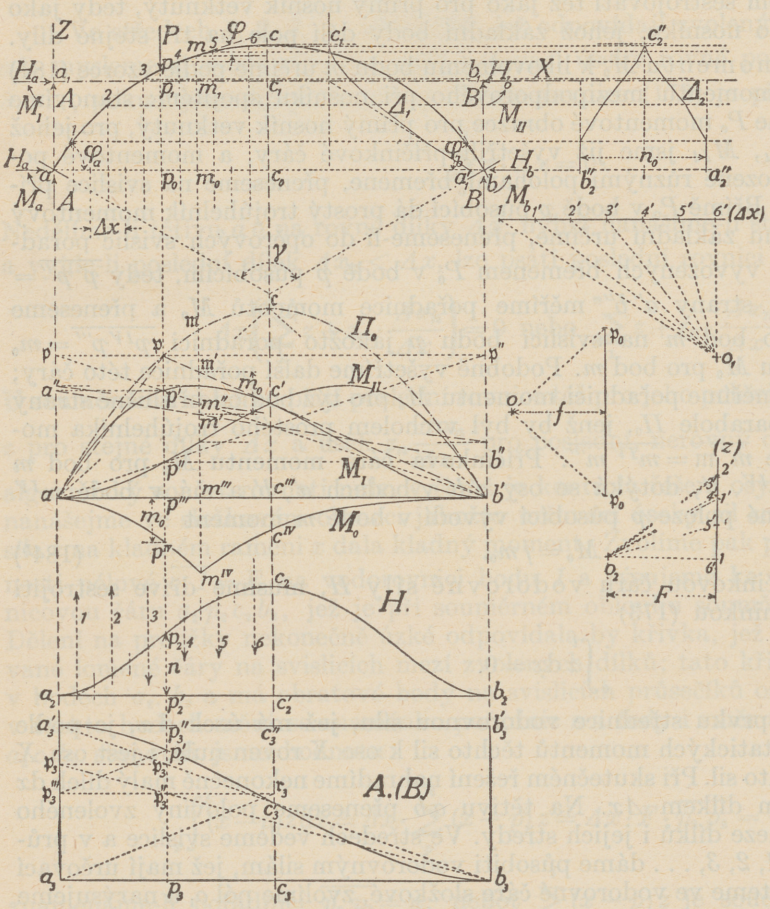
$$M = M_0 - Hz. \tag{182}$$

β) ***Příčinkové čáry*** odvodíme, uvažujeme-li zatížení jediným břemenem P v libovolném bodě p (obr. 96). Tu jest

$$\mathfrak{M} = P\,p\,p'\,(l+p),\quad \mathfrak{M}' = P\,p\,p'\,(l+p')$$

a vzorce (177^c) dají

$$M_I = -\frac{P\,p\,p'^2}{l^2},\quad M_{II} = -\frac{P\,p^2\,p'}{l^2}. \tag{183}$$



Obr. 96.

Příčinkové čáry momentů M_I, M_{II} určíme pro břímě $P_0 = \overline{\mathfrak{p}_0\,\mathfrak{p}'_0}$, užívajíce pólové vzdálenosti f. Položme

$$\frac{P_0\,p\,p'}{l} = f\,\mathfrak{y};$$

pak znamená $\mathfrak{y}$ největší pořadnici prostého trojúhelníka momentového $a'\,\mathfrak{p}\,b'$ pro břímě P_0. Pořadnice $\mathfrak{y}$ se mění podle paraboly $\Pi_0 \equiv a'\,\mathfrak{p}\,c\,b'$, jež má vrchol ve svislici bodu c a tuto svislici za osu. Zvolíme-li pól o na vodorovnici středu úseku $\overline{\mathfrak{p}_0\,\mathfrak{p}'_0}$, je $a'c \parallel o\,\mathfrak{p}_0$, $c\,b' \parallel o\,\mathfrak{p}'_0$ a $a'\,c\,b'$ je prostý trojúhelník momentový pro břímě P_0, jež působí v bodě c. Vrcholem c a bodem a' je parabola Π_0 úplně určena a stanoví ve svislici bodu p pořadnici $\overline{p'''\,\mathfrak{p}} = \mathfrak{y}$. Břímě P_0 vyvodí pak podle vzorců (183) momenty

$$M_I = -f\,\mathfrak{y}\,\frac{p'}{l},\quad M_{II} = -f\,\mathfrak{y}\,\frac{p}{l}.$$

Vedeme-li $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}' \parallel a'\,b'$ a spojíme-li body b', $\mathfrak{p}'$, obdržíme ve svislici bodu p pořadnici

$$m_I = \overline{p'''\,p'} = \overline{a'\,\mathfrak{p}'} \cdot \frac{\overline{p'''\,b'}}{\overline{a'\,b'}} = \mathfrak{y}\,\frac{p'}{l}.$$

Podobně veďme $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'' \parallel a'\,b'$ a spojme body a', $\mathfrak{p}''$; určíme tím pořadnici

$$m_{II} = \overline{p'''\,p''} = \overline{b'\,\mathfrak{p}''} \cdot \frac{\overline{a'\,p'''}}{\overline{a'\,b'}} = \mathfrak{y}\,\frac{p}{l}.$$

Nyní jest

$$M_I = -f m_I, \quad M_{II} = -f m_{II}. \tag{184a}$$

Měřické místo bodů p' je příčinkovou čarou momentu M_I; body p'' vyplňují pak příčinkovou čáru momentu M_{II}. Podle rovnic (183) jsou příčinkové čáry M_I, M_{II} třetího stupně; podle obr. 96 odvodí se tyto čáry z paraboly Π_0 stejně, jak se z paraboly $\max M$ odvozují čáry $M_{(m)}$, $M_{(n)}$ při prostém nosníku, na nějž působí pohyblivé zatížení rovnoměrné.[1]) Vrchové a obratové body čar M_I, M_{II} mají pak známé sestrojení. Mohli bychom ovšem sestrojovati též jako pro přímý nosník vetknutý, tedy jako v jediném poli spojitého nosníku, jehož základní body dělí pole na tři stejné díly.

Příčinkovou čáru momentu M_0 k libovolnému bodu m určíme podle vzorce (181) jako příčinkovou čáru momentu mezipodporového při nosníku spojitém: stanovíme pro různé polohy břemene P_0 momentové obrazce pro přímý nosník vetknutý, pro jehož podporové momenty M_I, M_{II} jsme již vyšetřili příčinkové čáry, a momentové pořadnice pro bod m, vyvozené různými polohami břemene, přeneseme na svislice příslušných poloh břemene. Břímě P_0 v bodě p působící dá prostý trojúhelník momentový $a' \mathfrak{p} b'$; přemístěnou stranu základní určíme, přeneseme-li do opěrových svislic pořadnice momentů M_I, M_{II} vyvozených břemenem P_0 v bodě p působícím, tedy $\overline{p' p'''} = \overline{a'' a'}$, $\overline{p'' p'''} = \overline{b'' b'}$. Od strany $a'' b''$ měříme pořadnice momentů M_0 a přeneseme pořadnici $m_0 = \overline{m' \mathfrak{m}'}$ pro bod m na svislici bodu p jakožto pořadnici $\overline{p^{IV} p'''} = m_0$ příčinkové čáry momentu M_0 pro bod m. Podobně vyšetříme další pořadnice této čáry; je-li břímě P_0 v bodě m, měříme pořadnici momentu M_0 pro týž bod od příslušné strany základní k bodu $\mathfrak{m}$ na parabole Π_0, jenž by byl vrcholem prostého trojúhelníka momentového, a přeneseme $\overline{m'' \mathfrak{m}} = \overline{m^{IV} m'''}$. Příčinková čára momentu M_0 pro bod m spojuje body a', p^{IV}, m^{IV}, b', dotýká se osy $a' b'$ v bodech a', b' a má v bodě m^{IV} vrchol. Břímě P_0 v obecné poloze p působící vyvodí v bodě m moment

$$M_0 = f m_0. \tag{184b}$$

Máme-li určiti příčinkovou čáru vodorovné síly H, musíme dříve sestrojiti osu X, jež je dána výminkou (173)

$$\int_0^l z \, dx = 0.$$

Myslíme-li si v každém prvku střednice vodorovnou sílu, jež má úsek $d\,x$, je podle poslední rovnice součet statických momentů těchto sil k ose X roven nule, i jest osa X paprskem výslednice těchto sil. Při skutečném řešení nahradíme nekonečně malý dílek dx konečným, co nejmenším dílkem Δx. Na tětivu $a\,b$ přeneseme poloviny zvoleného dílku Δx a určíme tím meze dílků i jejich středy. Ve středech vedeme svislice a v průsečících jich se střednicí *1*, *2*, *3*, . . . dáme působiti vodorovným silám, jež mají určovací úseky Δx; tyto úseky sečteme ve vodorovné čáře složkové, zvolíme pól o_1 a narýsujeme výslednicovou čáru $\Delta_1 \equiv a_1' c_1'$, jejíž krajní strany se sekou na ose X. U souměrného oblouku (obr. 96) stačí rýsovati jen pro polovici oblouku. Podle rovnice (173a) vyrovnává osa X obsah úseče $a\,p\,c\,b$ do obdélníka $a\,a_1\,b_1\,b$.

Do vzorce (178c) dosaďme při jediném osamělém břemeni P v poloze p moment

$$\mathfrak{M} = P \frac{p'}{l} x - P\,(x - p);$$

druhý člen na pravé straně vzorce platí jen vpravo od břemene. Pak jest

$$H = \frac{P \frac{p'}{l} \int_0^l x\,z\,dx - P \int_p^l (x - p)\,z\,dx}{\int_0^l z^2\,dx};$$

[1]) Viz druhý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1946), str. 33, obr. 35.

poněvadž je však $\int_0^l x z \, dx = 0$ podle rovnice (175^b), vyjde

$$H = - P \frac{\int_p^l (x - p) z \, dx}{\int_0^l z^2 \, dx}. \qquad (185)$$

Ve středech *1*, *2*, *3*, ... obloučků, jež odpovídají zvoleným dílkům Δx na tětivě $a b$, mysleme si svislé síly, jež mají určovací úseky rovné pořadnicím z středů *1*, *2*, *3*, ..., pokud jsou dílky Δx rovny. Podle rovnice (173) je přibližně

$$\sum_0^l z \cdot \Delta x = 0.$$

Nedělíme-li tětivu $a b$ na rovné dílky Δx, nýbrž nanášíme-li stálý dílek Δx od bodu a a vyjde-li poslední dílek $\Delta x_n < \Delta x$, lze psáti poslední rovnici ve tvaru

$$\Delta x \left(\sum_1^{n-1} z + z_n \cdot \frac{\Delta x_n}{\Delta x} \right) = 0 \text{ nebo } \sum_1^{n-1} z + z_n \cdot \frac{\Delta x_n}{\Delta x} = 0.$$

U souměrného oblouku platí poslední rovnice též pro jeho polovici. Sčítáme-li pak úseky z pro stejné dílky Δx a úsek $z_n \frac{\Delta x_n}{\Delta x}$ pro poslední, nerovný dílek Δx_n, musí se jejich algebraický součet rovnati nule, v čemž je kontrola řešení osy X. Kladné pořadnice z nanášejme ve složkovém obrazci jakožto určovací úseky sil směrem dolů, aby kladná síla z na kladném rameni x dala kladný moment. Zvolíme pak pól o_2 v libovolné vzdálenosti pólové $\overline{o_2 1} = F$ na vodorovnici bodu *1* a rýsujeme ke svislým silám z výslednicovou čáru $a_2 p_2 c_2 b_2$, jež je při souměrném oblouku souměrná ke svislici středu c. Dělení na proužky nekonečně úzké odpovídala by křivka, jež se dotýká stran narýsované lomené čáry na svislicích mezí zvolených dílků; tato křivka se dotýká osy $a_2 b_2$ v bodech a_2, b_2 a má obratové body na svislicích průsečíků osy X se střednicí, neboť v těchto bodech mění se znaménko pořadnic z a tedy i směr sil. Výslednicovou čarou $a_2 c_2 b_2$ stanovili jsme hodnotu

$$\int_p^l (x - p) z \, dx \doteq \Delta x \cdot \sum_p^l (x - p) z = \Delta x \cdot F \cdot \overline{p_2' p_2'} = - \Delta x \cdot F n,$$

znamenáme-li pořadnici $\overline{p_2' p_2} = n$; neboť $\sum_p^l (x - p) z$ je součet statických momentů sil z napravo od paprsku P působících vzhledem k tomuto paprsku.

V týchž bodech *1*, *2*, *3*, ... dáme dále působiti týmž silám z vodorovně a sestrojíme k nim výslednicovou čáru Δ_2; můžeme užíti svislé čáry složkové a pólu o_2, musíme však rýsovati strany čáry Δ_2 jakožto kolmice k příslušným paprskům pólovým. Kdybychom i zde vepisovali křivku, jež by se dotýkala stran lomené čáry výslednicové na vodorovnicích mezí obloučků, na něž je střednice dělena, měla by tato křivka obratové body v ose X; křivky však není třeba. Krajní strany čáry Δ_2 určí na ose X nebo na libovolné vodorovnici úsek n_0, jejž berme prostě, a je pak

$$\int_0^l z^2 \, dx \doteq \Delta x \cdot \sum_0^l z^2 = \Delta x \cdot F n_0,$$

poněvadž $\sum_0^l z^2$ lze vykládati jakožto součet statických momentů všech vodorovných

sil z k ose X. Vzorec (185) dá nyní

$$H = P\frac{n}{n_0}; \tag{186}$$

je tedy čára $a_2 c_2 b_2$ příčinkovou čarou vodorovné síly H. Znaménka všech pořadnic n jsou kladná.

Známe-li příčinkové čáry staticky neurčitých veličin, určíme snadno příčinkové čáry ostatních veličin. Pro svislé reakce A, B platí vzorce (165^c), (165^d); dosadíme-li do nich za momenty M_I, M_{II} ze vzorců (183), dostaneme

$$A = P\frac{p'}{l} + \frac{P\,p\,p'}{l^3}(p'-p), \quad B = P\frac{p}{l} - \frac{P\,p\,p'}{l^3}(p'-p),$$

což lze upraviti na tvar

$$A = \frac{P\,p'^2}{l^3}(l+2p), \quad B = \frac{P\,p^2}{l^3}(l+2p'). \tag{187}$$

Příčinkové čáry svislých reakcí A, B sestrojíme přímo podle posledních vzorců. Přeneseme tu $\overline{a_3 a'_3} = \overline{b_3 b'_3} = P$, spojíme body a'_3, b_3 a určíme tím na svislici bodu p pořadnici

$$\overline{p_3 \mathfrak{p}_3} = \overline{a_3 a'_3} \cdot \frac{\overline{p_3 b_3}}{\overline{a_3 b_3}} = P\frac{p'}{l}.$$

Dále vedeme $\mathfrak{p}_3 \mathfrak{p}'_3 \parallel a_3 b_3$ a spojíme body $\mathfrak{p}'_3$, b_3, čímž sestrojíme

$$\overline{p_3 \mathfrak{p}''_3} = \overline{a_3 \mathfrak{p}'_3} \cdot \frac{\overline{p_3 b_3}}{\overline{a_3 b_3}} = P\frac{p'^2}{l^2}.$$

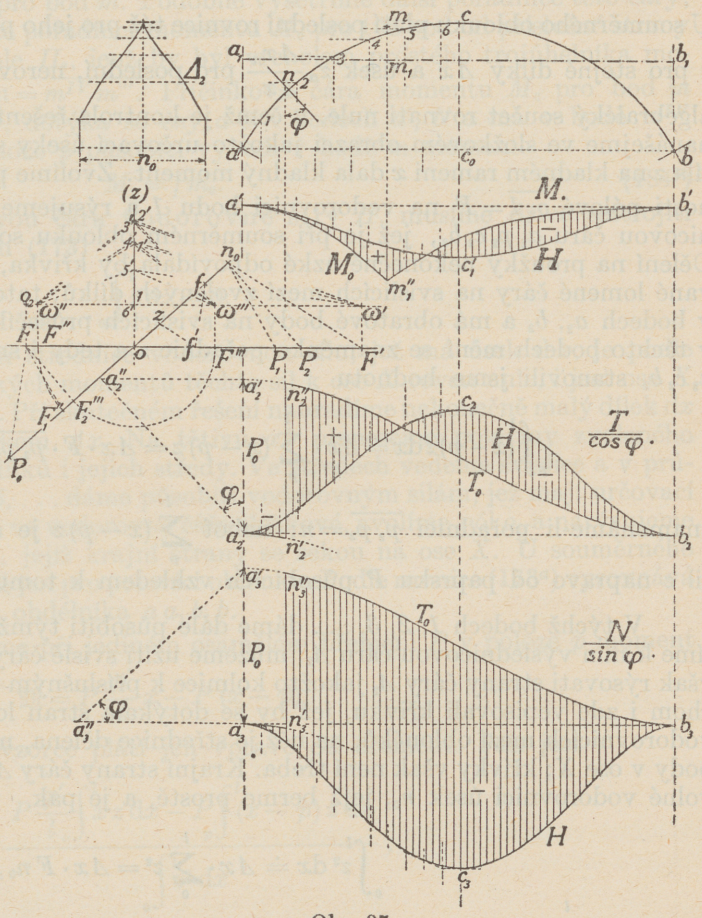
Konečně rýsujeme bodem $\mathfrak{p}''_3$ přímku $\mathfrak{p}'''_3 \mathfrak{r}_3 \parallel a_3 b_3$ a vedeme $\mathfrak{p}'''_3 p'_3 \parallel a_3 \mathfrak{r}_3$; pak jest

$$\overline{\mathfrak{p}''_3 p'_3} = \overline{a_3 p_3} \cdot \frac{\overline{c_3 \mathfrak{r}_3}}{\overline{a_3 c_3}} = P\frac{p'^2}{l^2} \cdot \frac{2p}{l},$$

$$\overline{p_3 p'_3} = \overline{p_3 \mathfrak{p}'_3} + \overline{\mathfrak{p}''_3 p'_3} = P\frac{p'^2}{l^3}(l+2p) = A.$$

Příčinkovou čarou reakce A je parabola třetího stupně $a'_3 p'_3 c'_3 b_3$, jež má v bodě c'_3 bod obratový a v bodech a'_3, b_3 vodorovné tečny. Z rovnováhy vnějších sil plyne pro svislé složky výminka $A + B - P = 0$, jež dá

$$B = P - A,$$



Obr. 97.

tedy pro polohu p břemene P jest

$$B = \overline{a_3 a'_3} - \overline{p_3 p'_3} = \overline{p'_3 p''_3}.$$

Křivka $a'_3 p'_3 b_3$, vztažená k ose $a'_3 b'_3 \parallel a_3 b_3$, je pak příčinkovou čarou reakce B.

Bylo by lze ovšem určiti příčinkové čáry reakcí A, B jako příčinkové čáry posouvajících sil při podporách přímého nosníku vetknutého z příčinkových čar momentů M_I, M_{II}.

Příčinkovou čáru momentu M k bodu m, obecně mimo střednici položenému (obr. 97), odvodíme ze vzorce (182). Příčinkový obrazec momentu M_0 sestrojili jsme pro břímě P_0, jež dá podle vzorce (184^b) moment

$$M_0 = f m_0.$$

Totéž břímě P_0 vyvodí podle vzorce (186) vodorovnou sílu

$$H = P_0 \frac{n}{n_0}.$$

Pak jest

$$M = M_0 - H z = f m_0 - P_0 \frac{n}{n_0} z = f\left(m_0 - n \frac{P_0}{f} \frac{z}{n_0}\right);$$

znamenáme-li

$$m_0 - n \frac{P_0}{f} \frac{z}{n_0} = \eta_m, \tag{188}$$

vyjde pro břímě P_0 moment

$$M = f \eta_m. \tag{184^c}$$

Příčinkové pořadnice η_m určíme, odečteme-li od pořadnic m_0 příčinkového obrazce M_0 pořadnice

$$n \frac{P_0}{f} \frac{z}{n_0} = n'. \tag{189^a}$$

Pořadnice n' bychom mohli určiti z pořadnic n graficky redukcí podle posledního vzorce; můžeme však též řešiti najednou výslednicovou čarou. Pořadnice n jsou dány výslednicovou čarou k svislým břemenům, jež mají určovací úseky z, užíváme-li pólové vzdálenosti $F = \overline{o_2 I}$ (obr. 96, 97). Pak jsou n' pořadnicemi výslednicové čáry k týmž břemenům z, rýsované pólovou vzdáleností

$$F' = F \frac{n}{n'} = F \cdot \frac{f n_0}{P_0 z}. \tag{190^a}$$

Vzdálenost F' buď vypočteme nebo sestrojíme; tu přeneseme na vodorovnici $\overline{o F} = F$ a na libovolnou šikmou přímku $\overline{o f} = f$, $\overline{o z} = z$, $\overline{o n_0} = n_0$, $\overline{o P_0} = P_0$ (obr. 97); vedeme-li nyní $f f' \parallel P_0 F$, obdržíme úsek

$$\overline{o f'} = f' = f \frac{F}{P_0}$$

a pak určí přímka $n_0 F' \parallel z f'$ úsek

$$\overline{o F'} = f' \frac{n_0}{z} = f \frac{F}{P_0} \cdot \frac{n_0}{z} = F'.$$

Ve vzdálenosti $F' = \overline{1\,\omega'}$ zvolíme pól ω' vpravo od čáry složkové, je-li z kladné, a rýsujeme z tohoto pólu k svislým silám z výslednicovou čáru $a'_1 c'_1 b'_1$, jež má pořadnice n'. Při téže ose $a'_1 b'_1$ narýsujeme příčinkovou čáru $a'_1 m''_1 b'_1$ momentu M_0 tak, aby kladné pořadnice směřovaly dolů. Pak se odčítají algebraicky podle rovnice (188) pořadnice n' od pořadnic m_0 a mezi čarami $a'_1 c'_1 b'_1$ (H) a $a'_1 m''_1 b'_1$ (M_0) je příčinkový obrazec momentu M; kladné pořadnice směřují od čáry H dolů. Pokládáme-li f za sílu, znamenají příčinkové pořadnice η_m délky; odměřovali bychom tedy f na měřidle sil a η_m na měřidle délek.

Kdyby šlo o momenty k bodům, k nimž náleží záporná pořadnice z, bylo by rýsovati čáru H po opačné straně osy než při kladném z. Pak bychom přenesli, sestrojujíce F', úsek z v opačném smyslu a obdrželi bychom pól ω' po levé straně složkové čáry sil z. Výslednicová čára k silám z vyšla by tu nad osu, kladné příčinkové pořadnice momentu M_0 nanášeli bychom zase pod osu a dostali bychom mezi výslednicovou čarou k silám z a příčinkovou čarou M_0 příčinkový obrazec momentu M.

Síla posouvající v libovolném průřezu, jehož rovina svírá se svislicí úhel φ, je dána rovnicí (71)

$$T = V \cos\varphi - H \sin\varphi .$$

Svislé síly vnější po levé straně průřezu se skládají ve výslednici $V = T_0$ rovnou posouvající síle přímého nosníku stálého průřezu, na obou koncích vetknutého; neboť svislá složka levé reakce A se rovná reakci tohoto přímého nosníku vetknutého. Pak jest

$$T = T_0 \cos\varphi - H \sin\varphi . \qquad (191^a)$$

Dosadíme-li za H ze vzorce (186) pro břímě P_0 a dělíme-li $\cos\varphi$, obdržíme vzorec

$$\frac{T}{\cos\varphi} = T_0 - n\frac{P_0 \operatorname{tg}\varphi}{n_0} . \qquad (191^b)$$

Znamenejme

$$n\frac{P_0 \operatorname{tg}\varphi}{n_0} = n'' ; \qquad (189^b)$$

úseky n'' sestrojíme zase redukcí pořadnic n příčinkové čáry H podle posledního vzorce anebo jedním rázem jakožto pořadnice výslednicové čáry k svislým silám z, rýsované pólovou vzdáleností

$$F'' = F\frac{n}{n''} = F\frac{n_0}{P_0 \operatorname{tg}\varphi} ; \qquad (190^b)$$

plyne to podobně jako u pořadnic n'. Přeneseme $P_0 = \overline{a'_2 a_2}$ a promítneme tento úsek vodorovně na rovnoběžku s průřezem; tím sestrojíme úsek $P_1 = \overline{a_2 a'_2} = P_0 \operatorname{tg}\varphi$. Pak přeneseme $P_1 = \overline{o P_1}$ na vodorovnici v bodě o a vedeme přímku $F F''_1 \parallel n_0 P_1$; tu jest úsek

$$\overline{o F''_1} = F\frac{n_0}{P_1} = F'' .$$

Ve vzdálenosti $\overline{o F''_1} = \overline{o F'} = \overline{1\,\omega'}$ zvolíme pól ω'' vlevo od čáry složkové a rýsujeme z tohoto pólu k svislým silám z výslednicovou čáru $a_2 c_2 b_2$, do níž vepíšeme, je-li třeba, křivku. U osy $a_2 b_2$ sestrojíme též příčinkovou čáru T_0 tak, aby její kladné pořadnice byly nad osou $a_2 b_2$. Tuto čáru odvodíme pro břímě P_0 z příčinkové čáry reakce A; neboť pro břemena vpravo od průřezu je $T_0 = A$, pro břemena vlevo od průřezu je $T_0 = A - P_0$. Je tedy příčinkovou čarou síly T_0 vpravo od svislice bodu n, v němž se do daného průřezu přenáší zatížení pohyblivé, příčinková čára A; vlevo od svislice bodu n platí čára shodná s čarou A a posunutá dolů o úsek břemene $P_0 = \overline{a'_2 a_2} = \overline{n''_2 n'_2}$.

Mezi křivkou $a_2 c_2 b_2$ a příčinkovou čarou T_0 je příčinkový obrazec podílu $\frac{T}{\cos\varphi}$; kladné pořadnice příčinkové směřují od čáry $a_2 c_2 b_2$ vzhůru. Znamenáme-li r_t pořadnice mezi čarou $a_2 c_2 b_2$ a čarou T_0, vyvodí břímě P_0 v poloze pořadnice r_t působící podíl

$$\frac{T}{\cos\varphi} = r_t, \quad \text{tedy } T = \cos\varphi \cdot r_t. \tag{192a}$$

Pořadnice r_t znamenají zde síly a měří se na měřidle, na němž měříme břímě P_0.

Pro normálnou sílu N platí vzorec (71)

$$N = -H\cos\varphi - V\sin\varphi,$$

v němž znamená zase φ úhel průřezu se svislicí. Jak jsme již ukázali, je $V = T_0$, tedy

$$N = -H\cos\varphi - T_0\sin\varphi. \tag{193a}$$

Dosaďme za H ze vzorce (186) pro břímě P_0 a dělme $\sin\varphi$; dospějeme ke vzorci

$$\frac{N}{\sin\varphi} = -T_0 - n\frac{P_0\operatorname{cotg}\varphi}{n_0}. \tag{193b}$$

Sestrojme příčinkovou čáru T_0 při ose $a_3 b_3$; je to čára $a_3 n_3' n_3'' b_3$, jež je shodná s čarou A vpravo od svislice bodu n, ve kterém se do daného průřezu přenáší z tížení pohyblivé, vlevo od svislice bodu n je to pak čára A posunutá o úsek $\overline{a_3' a_3} = P_0$. Od téže osy $a_3 b_3$ přeneseme pak pořadnice

$$n\frac{P_0\operatorname{cotg}\varphi}{n_0} = n''', \tag{189c}$$

jež sestrojíme buď redukcí jednotlivých pořadnic n nebo jedním rázem výslednicovou čarou k svislým silám z, rýsovanou pólovou vzdáleností

$$F''' = F\frac{n}{n'''} = F\frac{n_0}{P_0\operatorname{cotg}\varphi}. \tag{190c}$$

K tomu přeneseme $\overline{a_3' a_3} = P_0$, vedeme bodem a_3' kolmici k průřezu a obdržíme $\overline{a_3'' a_3} = P_2 = P_0\operatorname{cotg}\varphi$. Je-li dále $\overline{o P_2} = P_2$ a $F F_2''' \parallel n_0 P_2$, je tím sestrojeno

$$o F_2''' = F\frac{n_0}{P_2} = F'''.$$

Ve vzdálenosti $\overline{o F_2'''} = \overline{o F'''} = \overline{1\,\omega'''}$ vpravo od čáry složkové zvolíme pól ω''', z něhož rýsujeme výslednicovou čáru $a_3 c_3 b_3$; tím jsme sestrojili příčinkovou čáru H, redukovanou podle vzorce (189c). Čára ta vyjde pod osou $a_3 b_3$ a její pořadnice se sčítají algebraicky s příčinkovými pořadnicemi T_0. Mezi čarou H a čarou T_0 jsou pak příčinkové pořadnice η_n podílu $\frac{N}{\sin\varphi}$; jsou zde vesměs záporné. Břímě P_0, působící v poloze pořadnice η_n, dá

$$\frac{N}{\sin\varphi} = \eta_n, \text{ tedy } N = \sin\varphi \cdot \eta_n. \tag{192b}$$

Pořadnice η_n mají zde zase význam sil; odměřují se na témž měřidle jako síla P_0.

Ze sestrojených příčinkových čar můžeme řešiti jakékoli zatížení stálé i pohyblivé. Osamělé břímě P_0 vyvodí, rýsujeme-li pólovou vzdáleností f, v bodě m moment M daný vzorcem (184c) a ve zvoleném průřezu posouvající sílu T a normálnou sílu N, pro něž platí vzorce (192a) a (192b). Libovolné břímě P dá pak

$$M = \frac{f}{P_0} P\eta_m, \quad T = \frac{\cos\varphi}{P_0} P r_t, \quad N = \frac{\sin\varphi}{P_0} P\eta_n; \tag{194a}$$

z toho plyne snadno účinek libovolného zatížení. Ze soustavy osamělých břemen vyjde

$$M = \frac{f}{P_0} \Sigma P \eta_m, \quad T = \frac{\cos\varphi}{P_0} \Sigma P \eta_t, \quad N = \frac{\sin\varphi}{P_0} \Sigma P \eta_n. \tag{194^b}$$

Za částečného zatížení rovnoměrného jest

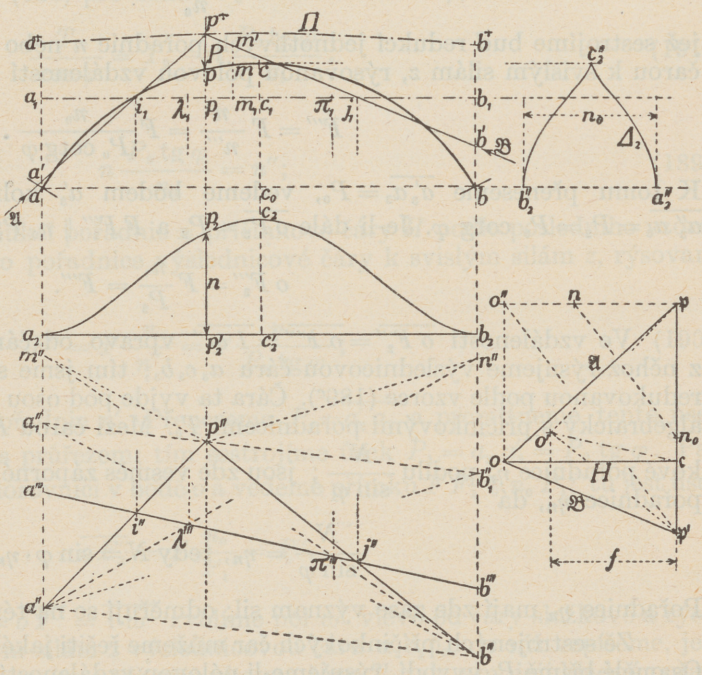
$$M = \frac{f}{P_0} q\, \mathfrak{U}_m, \quad T = \frac{\cos\varphi}{P_0} q\, \mathfrak{U}_t; \quad N = \frac{\sin\varphi}{P_0} q\, \mathfrak{U}_n; \tag{195}$$

$\mathfrak{U}_m$ ($\mathfrak{U}_t$, $\mathfrak{U}_n$) znamená tu obsah příčinkového obrazce $M\left(\frac{T}{\cos\varphi}, \frac{N}{\sin\varphi}\right)$ v mezích zatížení. Libovolné zatížení spojité nahradili bychom soustavou osamělých břemen; rozdělili bychom totiž určovací plochu zatížení na proužky, jež bychom nahradili osamělými břemeny v tížnicích proužků, a řešili bychom pak podle rovnic (194^a). Pro pohyblivé zatížení vyšetříme známým způsobem z příčinkových obrazců nejúčinnější zatížení a určíme pak příslušnou krajní hodnotu veličiny M (T, N) podle vzorců (194^b), řešíme-li účinek pohyblivé soustavy břemen, a podle vzorců (195) za pohyblivého zatížení rovnoměrného.

Vodorovná síla H by se vyšetřila za libovolného zatížení z příčinkové čáry jako u oblouku o dvou kloubech.

γ) Grafické řešení reakcí. Svislé složky reakcí určíme za libovolného zatížení svislého jako pro přímý nosník na obou koncích vetknutý; vodorovnou sílu vyšetříme z příčinkové čáry. Svislými složkami a vodorovnou silou jsou dány úsečky výsledných reakcí, jejichž paprsky jsou s úseky rovnoběžné; pro paprsek každé reakce třeba pak určiti jediný bod.

K osamělému břemeni $P = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'}$, jež působí v libovolném bodě p (obr. 98), sestrojíme z pólu o', zvoleného v libovolné vzdálenosti f od čáry složkové, výslednicovou čáru $a''p''b''$ a určíme k ní přemístěnou stranu základní $a'''b'''$, jako by šlo o přímý nosník stálého průřezu, na obou koncích vetknutý. Pro tento nosník dělí základní body rozpětí nosníku na tři stejné díly: $\overline{a_1\lambda_1} = \overline{\lambda_1\pi_1} = \overline{\pi_1 b_1}$. Prostý trojúhelník momentový $a''p''b''$ doplníme pak do rovnoběžníka $a''a_1''b_1''b''$, vedeme $p''m'' \parallel b''a_1''$, $p''n'' \parallel a''b_1''$ a protneme spojnice $a''n''$, $b''m''$ se svislicemi základních bodů λ_1, π_1 v bodech λ''', π''', jež spojuje přemístěná základní strana $a'''b'''$. Pólový paprsek $o'\mathfrak{c} \parallel a'''b'''$ stanoví úseky svislých reakcí $A = \overline{\mathfrak{c}\,\mathfrak{p}}$, $B = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{c}}$.



Obr. 98.

Určovací úsek vodorovné síly H sestrojíme podle vzorce (186), přeneseme-li $\overline{\mathfrak{p}\,n_0} = n_0$ a na vodorovnici v bodě $\mathfrak{p}$ úsek $\overline{n\,\mathfrak{p}} = n = \overline{p_2'p_2}$, stanovený v paprsku P

příčinkovou čarou $a_2 c_2 b_2$ vodorovné síly H; přímka $o'' \mathfrak{p}' \parallel n n_0$ dá

$$\overline{o'' \mathfrak{p}} = \overline{\mathfrak{p} \mathfrak{p}'} \cdot \frac{\overline{n \mathfrak{p}}}{\overline{\mathfrak{p} n_0}} = P \frac{n}{n_0} = H.$$

Přenesením úseku $H = \overline{o'' \mathfrak{p}} = \overline{o c}$ na vodorovnici v bodě c obdržíme úseky výsledních reakcí $\mathfrak{A} = \overline{o \mathfrak{p}}$, $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{p}' o}$.

V libovolném bodě m oblouku je podle vzorce (182) moment

$$M = M_0 - H z;$$

M_0 je moment přímého nosníku na obou koncích vetknutého, jejž jsme již sestrojili, užívajíce pólové vzdálenosti f, v obrazci omezeném lomenou čarou $a'' p'' b''$ a přemístěnou základní stranou $a''' b'''$. Pořadnici $z = \overline{m_1 m}$ měříme od osy $a_1 b_1$. Obrazec ohybových momentů M je za pólové vzdálenosti H dán čarou $a' p^+ b'$, vztaženou ke střednici; stranami čáry $a' p^+ b'$ jsou hledané paprsky výsledních reakcí. Pak jest

$$M = H \cdot \overline{m m'} = M_0 - H \cdot \overline{m_1 m},$$

tedy

$$M_0 = H (\overline{m m'} + \overline{m_1 m}) = H \cdot \overline{m_1 m'}.$$

Podle toho je mezi osou $a_1 b_1$ a lomenou čarou $a' p^+ b'$ obrazec momentů M_0, a to za pólové vzdálenosti H. Týž obrazec jsme již stanovili lomenou čarou $a'' p'' b''$, vztaženou ke straně $a''' b'''$; příslušná vzdálenost pólová jest f. Oba uvedené obrazce momentů M_0 jsou patrně afinní. Paprsky reakcí $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ protínají tedy osu $a_1 b_1$ v bodech i_1, j_1 na svislicích průsečíků i'', j'' základní strany $a''' b'''$ s lomenou čarou $a'' p'' b''$; v obou těchto bodech je moment $M_0 = 0$. Paprsky výsledních reakcí jsou rovnoběžné s úseky; i jest $a' p^+ \parallel o \mathfrak{p}$, $b' p^+ \parallel o \mathfrak{p}'$. Kontrolou řešení jest, že se paprsky $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sekou na paprsku P v bodě p^+.

Opakováním odvozené konstrukce pro dostatečný počet poloh břemene obdrželi bychom sečnici Π jakožto měřické místo bodů p^+ a obě tečnice jakožto obalové čáry paprsků $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$.

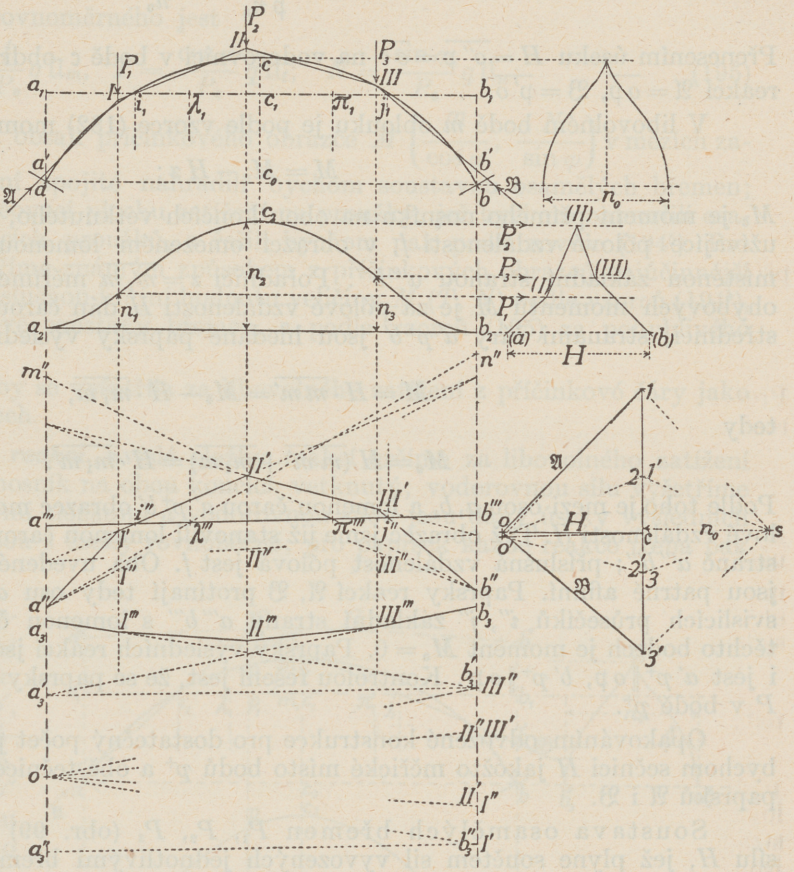
Soustava osamělých břemen P_1, P_2, P_3 (obr. 99) vyvozuje vodorovnou sílu H, jež plyne součtem sil vyvozených jednotlivými břemeny. Pro každé břímě platí vzorec (186); je tedy celkem

$$H = \frac{1}{n_0} (P_1 n_1 + P_2 n_2 + P_3 n_3) = \frac{1}{n_0} \Sigma P n,$$

znamenají-li n_1, n_2, n_3 pořadnice příčinkové čáry $a_2 c_2 b_2$ vodorovné síly H v paprscích břemen P_1, P_2, P_3. Vodorovnou sílu H určíme podle posledního vzorce, rýsujeme-li k silám $P_1 = \overline{1 1'}$, $P_2 = \overline{2 2'}$, $P_3 = \overline{3 3'}$, jež působí vodorovně v koncových bodech příčinkových pořadnic n_1, n_2, n_3, výslednicovou čáru (a) (I) (II) (III) (b). Zvolíme-li k tomu pól s ve vzdálenosti n_0 od složkové čáry, určí krajní strany této čáry výslednicové na ose $\overline{a_2 b_2}$ úsek $\overline{(a) (b)} = H$.

Svislé složky reakcí určíme zase jako reakce přímého nosníku na obou koncích vetknutého. K tomu sestrojíme výslednicovou čáru $a'' I' II' III' b''$ k svislým břemenům P_1, P_2, P_3 nejlépe z pólu o', jenž má od složkové čáry vzdálenost H. K této čáře určíme přemístěnou stranu základní $a''' b'''$ jako v poli spojitého nosníku, v němž rozdělují základní body délku pole na tři stejné díly: $\overline{a_1 \lambda_1} = \overline{\lambda_1 \pi_1} = \overline{\pi_1 b_1}$. Tu stanovíme největší pořadnici $\overline{I' I''}$ ($\overline{II' II''}$, $\overline{III' III''}$) prostého trojúhelníka momentového, jenž náleží k samotnému břemeni P_1 (P_2, P_3), sečteme pořadnice $\overline{I' I''}$, $\overline{II' II''}$, $\overline{III' III''}$ ve svislici bodu b, zvolíme pól o'' ve svislici bodu a a rýsujeme výslednicovou čáru

a_3 I''' II''' III''' b_3 k břemenům, jež mají určovací úseky $\overline{I'\,I''}$, $\overline{II'\,II''}$, $\overline{III'\,III''}$ a působí ve svislých paprscích P_1, P_2, P_3. Prvou stranu této čáry vedeme bodem $b'_3 \equiv III''$; je-li $I' \equiv b'_3$, stanoví úsek $\overline{b''_3\,b_3} = \overline{b'\,n''}$ bod n'', jehož spojnice s bodem a'' seče svislici bodu λ_1 v bodě λ''' přemístěné strany základní. Prodloužená strana $III'''b_3$ určuje na svislici bodu a bod a'_3 a přímka $a''_3\,b''_3 \parallel a'_3\,b'_3$ dá úsek $\overline{a''_3\,a_3} = \overline{a''\,m''}$, jenž stanoví bod m''; spojnice $b''\,m''$ seče pak svislici bodu π_1 v bodě π''' přemístěné základní strany $a'''\,b'''$. Pólový paprsek $o'\mathfrak{c} \parallel a'''\,b'''$ určí konečně úseky svislých reakcí $A = \overline{\mathfrak{c}\,1}$, $B = \overline{3'\,\mathfrak{c}}$.



Obr. 99.

Přeneseme-li na vodorovnici bodu $\mathfrak{c}$ úsek $H = \overline{o\,\mathfrak{c}}$, obdržíme úseky výsledních reakcí $\mathfrak{A} = \overline{o\,1}$, $\mathfrak{B} = \overline{3'\,o}$. Paprsky reakcí sestrojíme jako při jediném břemeni, sestrojíme-li obrazec momentů M_0 pólovou vzdáleností H tak, aby byla jeho základní stranou přímka $a_1\,b_1$. Obrazec momentů M_0 sestrojili jsme však již pólovou vzdáleností H ve způsobu výslednicové čáry $a''\,I'\,II'\,III'\,b''$, vztažené k základní straně $a'''\,b'''$. Tento obrazec souvisí pak s obrazcem, omezeným výslednicovou čarou $a'\,I\,II\,III\,b'$ a osou $a_1\,b_1$, po zákonu afinity rovnosti, neboť oba obrazce jsou rýsovány touž vzdáleností pólovou H. Pak jsou pořadnice obou obrazců v téže svislici rovny. Přeneseme-li $\overline{a'''\,a'} = \overline{a_1\,a'}$, $\overline{b'''\,b'} = \overline{b_1\,b'}$ a podobně pořadnice v paprscích P_1, P_2, P_3, určíme tím výslednicovou čáru $a'\,I\,II\,III\,b'$, jejíž krajní strany jsou paprsky reakcí $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Tato čára seče osu $a_1\,b_1$ v bodech i_1, j_1 na svislicích průsečíků i''', j''' čáry $a''\,I'\,II'\,III'\,b''$ se základní stranou $a'''\,b'''$. Body i_1, j_1 a pól o určují též úplně čáru $a'\,I\,II\,III\,b'$, která je výslednicovou čarou k břemenům P_1, P_2, P_3, rýsovanou z pólu o. Takto bychom postupovali též, kdyby výslednicová čára $a''\,I'\,II'\,III'\,b''$ nebyla sestrojena pólovou vzdáleností H.

Obdobně jako při soustavě osamělých břemen řešili bychom, kdyby šlo o jakékoli jiné zatížení.

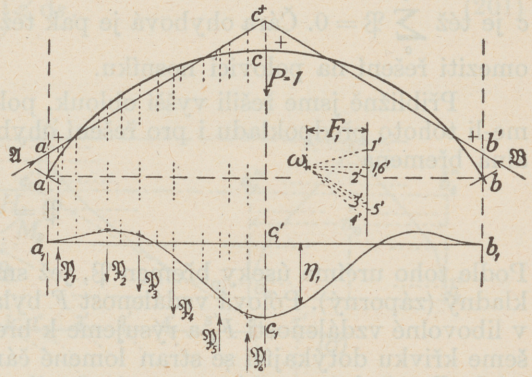
δ) ***Chybová čára*** obloukového nosníku za libovolného zatížení se sestrojí jako výslednicová čára ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plocha má pořadnice η dané vzorcem (75). U vyššího oblouku můžeme přibližně nedbati normálné síly; pak

má určovací plocha, jde-li o účinek samotného zatížení, pořadnice

$$\mathfrak{y}' = \frac{e F M}{E J \cos \varphi}.$$

Pro pohyblivé zatížení půjde o krajní hodnoty průhybu určitého bodu nosníku. Vyšetříme je z příčinkové čáry průhybu daného bodu, jež plyne podle věty o vzájemnosti posunutí (Maxwellovy) jako ohybová čára obloukového nosníku, zatíženého břemenem $P = 1$ v bodě, jehož průhyb hledáme. Jde-li na př. o průhyb η_c středu nosníku c, myslíme si v tomto bodě svislé břímě $P = 1$ (obr. 100), k němuž určíme podle obr. 98 paprsky reakcí $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Paprsky reakcí se sekou v bodě c^+ na paprsku P a omezují se střednicí jakožto základní čarou obrazec momentů ohybových; pólovou vzdáleností je tu vodorovná síla H. Znamenejme m svislou pořadnici mezi střednicí a lomenou čarou $a' c^+ b'$; pak je v tom místě ohybový moment

$$M = H m.$$



Obr. 100.

Výslednicovou čáru ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plocha má pořadnice $\mathfrak{y}'$, rýsujme pólovou vzdáleností

$$F = \frac{E J_0}{e H}; \tag{196}$$

J_0 je vhodná stálá hodnota momentu setrvačnosti. Dosazením plyne

$$\mathfrak{y}' = \frac{e F H m}{E J \cos \varphi} = \frac{m}{\cos \varphi} \cdot \frac{J_0}{J}.$$

Momentový obrazec rozdělme svislicemi na úzké proužky; šířku proužku znamenejme a, jeho střední pořadnici m. Proužku $a \cdot m$ plochy momentové odpovídá proužek $u = a \cdot \mathfrak{y}'$ určovací plochy; uvedením jeho na půdici e obdržíme určovací úsek ideálného břemene

$$\mathfrak{P} = \frac{u}{e} = \frac{a}{e} \cdot \frac{m}{\cos \varphi} \cdot \frac{J_0}{J}, \tag{197a}$$

souhlasný s úsekem daným vzorcem (77a).

Pro složkový obrazec k ideálným břemenům $\mathfrak{P}$ odvodíme kontrolu z výminek přetvárných. Nedbáme-li normálné síly a účinků vedlejších, platí podle rovnic (170a), (170b) výminky

$$\int_0^l \frac{M x' \, ds}{E J} = 0, \quad \int_0^l \frac{M x \, ds}{E J} = 0;$$

sečtením jich a dosazením $x + x' = l$ plyne

$$\int_0^l \frac{M (x + x') \, ds}{E J} = l \int_0^l \frac{M \, ds}{E J} = 0 \text{ nebo } \int_0^l \frac{M \, ds}{E J} = 0.$$

Nahrazením $M = H m$ dostaneme, vynecháme-li stálé hodnoty H, E, rovnici

$$\int_0^l \frac{m \, ds}{J} = \int_0^l \frac{m \, dx}{J \cos \varphi} = 0.$$

Řešíme-li graficky, rozdělujeme momentový obrazec na proužky o šířce a; pak je přibližně

$$\sum_0^l \frac{a\,m}{J\cos\varphi} = 0 \text{ nebo } \sum_0^l \mathfrak{P} = 0; \tag{198}$$

tato výminka platí obecně pro jakékoli zatížení. Pro zatížení souměrné ke svislici středu c je též $\sum_0^c \mathfrak{P} = 0$. Čára ohybová je pak též souměrná ke svislici středu nosníku, i stačí omeziti řešení na polovici nosníku.

Přibližně jsme řešili vyšší oblouk, pokládajíce $J\cos\varphi$ za hodnotu stálou. Užíváme-li tohoto předpokladu i pro řešení ohybu a zvolíme-li $J_0 = J\cos\varphi$, dostaneme ideální břemena

$$\mathfrak{P} = \frac{a}{e} m. \tag{197b}$$

Podle toho určíme úseky břemen $\mathfrak{P}$, jež směřují vzhůru (dolů), je-li moment ohybový kladný (záporný). Pólová vzdálenost F byla by příliš veliká. Zvolíme tedy na př. pól ω v libovolné vzdálenosti F_1 a rýsujeme k břemenům $\mathfrak{P}$ výslednicovou čáru, do níž vepíšeme křivku dotýkající se stran lomené čáry výslednicové na svislicích mezí proužkových. Z pořadnice η_1 čáry sestrojené pólovou vzdáleností F_1 vypočteme správnou pořadnici příčinkovou podle vzorce

$$\eta = \eta_1 \frac{F_1}{F}.$$

Vzdálenost F podle vzorce (196) znamená délku. Z hodnot F_1 a η_1 znamená jedna délku, druhá sílu, jež se měří na měřidle sil $\mathfrak{P}$.

ε) Oblouk stálého průřezu. U oblouků, jež mají v krajním bodě tečnu svislou nebo blízkou svislici, nemůžeme užíti předpokladu $J\cos\varphi = \text{konst.}$, jenž se hodí k přibližnému řešení segmentového oblouku, i když je jeho průřez stálý. Tu užijeme řešení pro stálý průřez oblouku a dostaneme výsledky přesně, je-li průřez skutečně stálý, nebo aspoň přibližné, nemění-li se průřez příliš. V přetvárných výminkách musíme ponechati ds/J a místo rovnic (171) dostaneme výminky

$$\left.\begin{aligned} \int M x'\,ds &= EJ\,(\Delta h_b - l\cdot\Delta\varphi_a), \quad \int M x\,ds = EJ\,(l\cdot\Delta\varphi_b - \Delta h_b), \\ \int M z\,ds &= EJ\,(\Delta l + e\cdot\Delta\gamma - \delta\varepsilon l). \end{aligned}\right\} \tag{199}$$

Integrály v těchto i v dalších rovnicích, pokud nejsou připsány meze, rozumějí se v mezích celého oblouku. Pro moment M platí i zde vzorec (172)

$$M = \mathfrak{M} + \frac{M_I x' + M_{II} x}{l} - Hz,$$

vztahujeme-li za svislého zatížení jako prve levou opěrovou reakci k bodu a_1 složkami A, H, M_I a pravou reakci k bodu b_1 složkami $B, -H, -M_{II}$ (obr. 101). Dosazením vyjdou přetvárné výminky

$$\left.\begin{aligned} \int \mathfrak{M} x'\,ds + \frac{M_I}{l}\int x'^2\,ds + \frac{M_{II}}{l}\int x x'\,ds - H\int x' z\,ds &= EJ\,(\Delta h_b - l\cdot\Delta\varphi_a), \\ \int \mathfrak{M} x\,ds + \frac{M_I}{l}\int x x'\,ds + \frac{M_{II}}{l}\int x^2\,ds - H\int x z\,ds &= EJ\,(l\cdot\Delta\varphi_b - \Delta h_b), \\ \int \mathfrak{M} z\,ds + \frac{M_I}{l}\int x' z\,ds + \frac{M_{II}}{l}\int x z\,ds - H\int z^2\,ds &= EJ\,(\Delta l + e\cdot\Delta\gamma - \delta\varepsilon l). \end{aligned}\right\} \tag{199a}$$

Polohu osy $X \equiv a_1 b_1$ volme tak, aby bylo

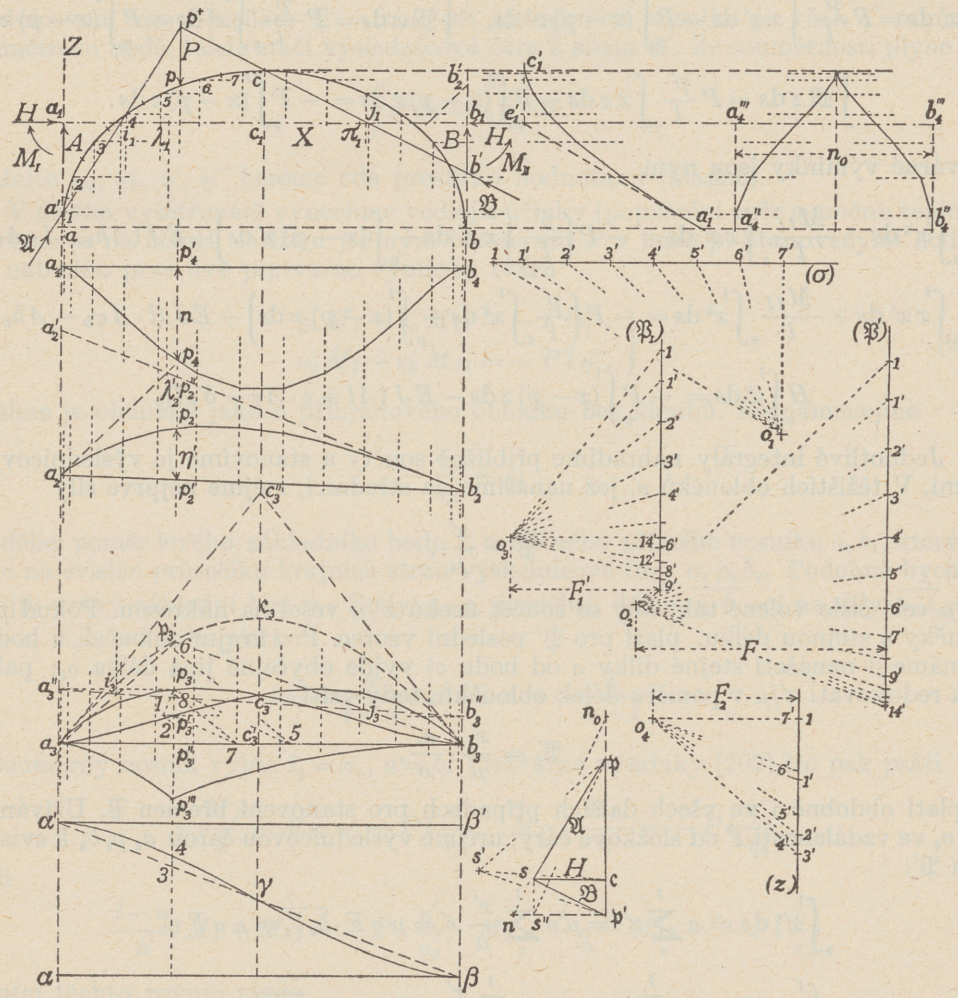
$$\int z \, ds = 0 . \tag{200}$$

Pro její výpočet nahradíme $z = z' - e$, je-li z' pořadnice měřená od tětivy ab, a dostaneme

$$\int z' \, ds - e \int ds = 0 .$$

Poznamenejme v mezích celého oblouku $\int ds = \text{arc}\, acb = S$; tím vyjde

$$e = \frac{1}{S} \int z' \, ds . \tag{201}$$



Obr. 101.

Graficky stanovíme přibližně osu X, nahradíme-li ds malým obloučkem σ; podmínka $\Sigma z \sigma = 0$ dá se vyložiti jako součet statických momentů sil σ, jež působí na ramenech z, a platí při souměrném oblouku i pro jeho polovici. Na střednici přenášíme nejlépe od bodu c stejné dílky $\frac{1}{2}\sigma$, abychom měli hned středy obloučků, v nichž si myslíme síly σ; výslednicová čára $a_1' c_1'$ k vodorovným silám σ ve středech obloučků určí průsečíkem krajních stran polohu osy X jakožto paprsek výslednice sil σ. Potom jest

$$\int x z \, ds + \int x' z \, ds = \int (x + x') z \, ds = l \int z \, ds = 0 .$$

Při souměrném oblouku je v souměrných bodech stejné σ, z a x, x' se vymění, pročež

$$\int x z \, ds = \int x' z \, ds = 0 . \qquad (200^a)$$

Pro jediné osamělé břímě jest

$$\mathfrak{M} = P \frac{p'}{l} x - P (x - p),$$

kde druhý člen platí pouze napravo od břemene. Z toho plyne

$$\int \mathfrak{M} x' \, ds = P \frac{p'}{l} \int_0^l x x' \, ds - P \int_p^l (x - p) x' \, ds, \quad \int \mathfrak{M} x \, ds = P \frac{p'}{l} \int_0^l x^2 \, ds - P \int_p^l (x - p) x \, ds,$$

$$\int \mathfrak{M} z \, ds = P \frac{p'}{l} \int_0^l x z \, ds - P \int_p^l (x - p) z \, ds = - P \int_p^l (x - p) z \, ds.$$

Přetvárné výminky jsou nyní

$$\frac{M_I}{l} \int_0^l x'^2 \, ds + \frac{M_{II}}{l} \int_0^l x x' \, ds = - P \left(\frac{p'}{l} \int_0^l x x' \, ds - \int_p^l (x - p) x' \, ds \right) + EJ (\Delta h_b - l \cdot \Delta \varphi_a),$$

$$\frac{M_I}{l} \int_0^l x x' \, ds + \frac{M_{II}}{l} \int_0^l x^2 \, ds = - P \left(\frac{p'}{l} \int_0^l x^2 \, ds - \int_p^l (x - p) x \, ds \right) + EJ (l \cdot \Delta \varphi_b - \Delta h_b),$$

$$H \int_0^l z^2 \, ds = - P \int_p^l (x - p) z \, ds - EJ (\Delta l + e \cdot \Delta \gamma - \delta \varepsilon l).$$

Jednotlivé integrály nahradíme přibližně součty a stanovíme je výslednicovými čarami. V těžištích obloučků σ, jež nanášíme na střednici, mějme nejprve síly

$$\mathfrak{P}' = \frac{x'}{\mu},$$

je-li μ celé číslo volené tak, aby se součet úseků x'/μ vešel na nákresnu. Pokud mají obloučky σ stejnou délku, platí pro $\mathfrak{P}'$ poslední vzorec. Pro krajní oblouček u bodu a (začínáme-li nanášeti stejné dílky σ od bodu c) vyjde obyčejně jiná délka σ_1; pak je třeba redukovati x'/μ v poměru délek obloučků, tedy vzíti

$$\mathfrak{P}'_1 = \frac{x'_1}{\mu} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma},$$

což platí obdobně i ve všech dalších případech pro stanovení břemen $\mathfrak{P}$. Užíváme-li pólu o_2 ve vzdálenosti F od složkové čáry, určíme výslednicovou čarou $a_2 p_2 b_2$ k svislým silám $\mathfrak{P}'$:

$$\int_0^l x'^2 \, ds \doteq \sigma \sum_0^l x'^2 = \mu \sigma \sum_0^l \frac{x'}{\mu} x' = \mu \sigma F \cdot \overline{b_2 b'_2} = \mu \sigma F \eta'_b,$$

$$\int_0^l x x' \, ds \doteq \sigma \sum_0^l x x' = \mu \sigma \sum_0^l \frac{x'}{\mu} x = \mu \sigma F \cdot \overline{a_2 a'_2} = \mu \sigma F \eta'_a,$$

neboť $\Sigma \frac{x'}{\mu} x' \left(\Sigma \frac{x'}{\mu} x \right)$ jakožto součet statických momentů svislých sil x'/μ ke svislici bodu b (a) jest určen součinem pólové vzdálenosti F a úseku $\overline{b_2 b'_2} = \eta'_b$ ($\overline{a_2 a'_2} = \eta'_a$), stanoveného krajními stranami výslednicové čáry $a_2 p_2 b_2$ na svislici bodu b (a). Dále jest

$$\int_p^l (x - p) x' \, ds \doteq \mu \sigma \sum_p^l \frac{x'}{\mu} (x - p) = \mu \sigma F \cdot \overline{p_2 p''_2},$$

takže

$$\frac{p'}{l}\int_0^l x\,x'\,\mathrm{d}s - \int_p^l (x-p)\,x'\,\mathrm{d}s = \mu\,\sigma\,F\left(\overline{a_2\,a_2'}\cdot\frac{p'}{l} - \overline{p_2\,p_2''}\right) =$$
$$= \mu\,\sigma\,F\,(\overline{p_2'\,p_2''} - \overline{p_2\,p_2'}) = \mu\,\sigma\,F\cdot\overline{p_2'\,p_2} = \mu\,\sigma\,F\,\eta'.$$

Podobně bychom určili

$$\frac{p'}{l}\int_0^l x^2\,\mathrm{d}s - \int_p^l (x-p)\,x\,\mathrm{d}s = \mu\,\sigma\,F\eta''$$

výslednicovou čarou k silám $\mathfrak{P}'' = x/\mu$; při souměrném nosníku je však η'' rovno η' v souměrném bodě, takže stačí výslednicová čára k silám $\mathfrak{P}'$. Ze souměrnosti plyne též

$$\int x^2\,\mathrm{d}s = \int x'^2\,\mathrm{d}s.$$

Pořadnice η_a', η_b', η', η'' bereme zde prostými hodnotami (kladně).

V dalším vyšetřování vynechme vedlejší účinky (popuštění opěr a změnu teploty) a omezme se na účinek zatížení jediným břemenem P v bodě p. Stanovenými hodnotami nabudou prvé dvě přetvárné výminky tvaru

$$\left.\begin{aligned} \eta_b'\,M_I + \eta_a'\,M_{II} &= -P\,l\,\eta', \\ \eta_a'\,M_I + \eta_b'\,M_{II} &= -P\,l\,\eta''. \end{aligned}\right\} \qquad (202)$$

Vyřešíme je obdobně jako u příhradového oblouku bez kloubů. Poznamenejme

$$-\frac{\eta_a'}{\eta_b'} = \lambda;$$

je to dělicí poměr levého základního bodu λ_1 myšleného přímého nosníku $a_1\,b_1$, kterýžto bod je na svislici průsečíku krajních stran výslednicové čáry $a_2\,p_2\,b_2$. Podobně bychom sestrojili pravý základní bod π_1. Body λ_1, π_1 rozdělují délku $\overline{a_1\,b_1} = l$ na díly $\overline{a_1\,\lambda_1} = a$, $\overline{\lambda_1\,\pi_1} = c$, $\overline{\pi_1\,b_1} = b$ a tu platí

$$\lambda = -\frac{a}{l-a} \text{ neboli } a = -\frac{\lambda}{1-\lambda}\,l.$$

Pro souměrný nosník vyjde $\lambda_1 = \pi_1$, $a = b$. Přetvárné výminky (202) lze pak psáti

$$-\frac{M_I}{\lambda} + M_{II} = -P\,l\,\frac{\eta'}{\eta_a'}, \quad M_I - \frac{M_{II}}{\pi} = -P\,l\,\frac{\eta''}{\eta_a'}$$

neboli

$$\frac{l-a}{a}\,M_I + M_{II} = -P\,l\,\frac{\eta'}{\eta_a'}, \quad M_I + \frac{l-b}{b}\,M_{II} = -P\,l\,\frac{\eta''}{\eta_a'}.$$

Řešením těchto rovnic vyjde

$$M_I = -\frac{a}{c\,\eta_a'}\,P\,[(l-b)\,\eta' - b\,\eta''], \quad M_{II} = -\frac{b}{c\,\eta_a'}\,P\,[-a\,\eta' + (l-a)\,\eta'']. \qquad (203)$$

Z pořadnic η' a souměrných hodnot η'' mohli bychom podle těchto vzorců určiti příčinkové pořadnice M_I, M_{II}. Lze však také určiti příčinkovou čáru M_I přímo jako výslednicovou čáru k břemenům

$$\mathfrak{P}_I = -\frac{a}{c\,\eta_a'}\,[(l-b)\,\mathfrak{P}' - b\,\mathfrak{P}''] = -\frac{a}{\mu\,c\,\eta_a'}\,[(l-b)\,x' - b\,x] = -\frac{a\,l}{\mu\,c\,\eta_a'}\,(x'-b), \qquad (204)$$

užijeme-li pólové vzdálenosti $F_1 = 1$. Volíme-li prostě

$$\mathfrak{P}_I = \frac{x' - b}{\mu}, \tag{204a}$$

je třeba rýsovati pólovou vzdáleností

$$F_1 = \frac{c\,\eta'_a}{a\,l} F,$$

je-li F pólová vzdálenost pro čáru $a_2 p_2 b_2$. Z podobnosti trojúhelníka $a_2 a'_2 \lambda'_2$ s trojúhelníkem daným pólem o_2 a krajními body složkové čáry pro síly $\mathfrak{P}'$ plyne

$$F\frac{\eta'_a}{a} = \Sigma\mathfrak{P}' = \Sigma\frac{x'}{\mu}, \text{ tedy } F_1 = \frac{c}{l}\Sigma\frac{x'}{\mu}.$$

Pro každé dva souměrné body m, n jest

$$x'_m + x'_n = l, \quad x'_m - b + (x'_n - b) = c$$

a tedy

$$\frac{c}{l}\frac{x'_m + x'_n}{\mu} = \frac{x'_m - b + (x'_n - b)}{\mu};$$

pro celý oblouk vyjde

$$F_1 = \frac{c}{l}\Sigma\frac{x'}{\mu} = \Sigma\frac{x' - b}{\mu} = \Sigma\mathfrak{P}_I. \tag{205}$$

Volíme-li takto pólovou vzdálenost, vyjdou výslednicovou čarou k silám $\mathfrak{P}_I$ příčinkové pořadnice $\overline{p''_3 p_3} = m_I$ momentu M_I v měřidle délek, takže $M_I = -Pm_I$. Užijeme-li však jiné pólové vzdálenosti F'_1, jest

$$M_I = -\frac{F'_1}{F_1} P m_I, \tag{206a}$$

je-li m_I pořadnice stanovená výslednicovou čarou, rýsovanou vzdáleností F'_1. Dále plyne

$$\Sigma\mathfrak{P}_I x = \Sigma\frac{x}{\mu}(x' - b) = 0,$$

jelikož síly x/μ, působící ve středech obloučků svisle, daly by výslednici, jejíž paprsek jde bodem π_1. Prochází tedy poslední strana výslednicové čáry $a_3 p_3 b_3$ k silám $\mathfrak{P}_I$ bodem a_3, čímž dává základní stranu příčinkové čáry M_I. Chceme-li míti tuto stranu vodorovnou, stačí voliti pól o_3 na vodorovnici koncového bodu *14'* složkové čáry pro síly $\mathfrak{P}_I$.

Předpokládali jsme, že při stanovení sil $\mathfrak{P}_I$ užijeme téhož čísla μ jako při silách $\mathfrak{P}'$; výsledek $F_1 = \Sigma\mathfrak{P}_I$ platí však obecně, i kdybychom při určení sil $\mathfrak{P}_I$ užili jiného čísla μ.

Příčinková čára M_{II} je souměrná s čarou M_I ke svislici středu souměrného oblouku. Z čar M_I, M_{II} stanovíme příčinkové čáry momentů

$$M_0 = \mathfrak{M} + \frac{M_I x' + M_{II} x}{l}$$

jako u spojitého nosníku[1]) a stejně určíme i příčinkové čáry posouvajících sil

$$T_0 = \mathfrak{T} + \frac{M_{II} - M_I}{l}.$$

[1]) Viz druhý díl tohoto spisu (3. vyd. 1946), obr. 115.

K tomu je nejprve třeba určiti parabolu $a_3 \mathfrak{c}_3 b_3$, obsahující vrcholy příčinkových trojúhelníků $\mathfrak{M}$; tato parabola má vrchol ve výši $\overline{c_3' \mathfrak{c}_3} = \frac{1}{4} l = \frac{1}{2} \overline{c_3' c_3''}$, znamená-li $a_3 c_3''$ první stranu výslednicové čáry k břemenům $\mathfrak{P}_I$, jež při pólové vzdálenosti F_1 a základní straně $a_3 b_3$ vodorovné svírá s vodorovnicí úhel 45° a utíná tedy na svislici středu oblouku úsek $\overline{c_3 c_3'} = \frac{1}{2} l$. Užijeme-li pólové vzdálenosti F_1' místo F_1, vyjdou pořadnice příčinkového obrazce zvětšené v poměru F_1 / F_1'; v tomto měřítku je pořadnice paraboly zase $\overline{c_3' \mathfrak{c}_3} = \frac{1}{2} \overline{c_3' c_3''}$, je-li $a_3 c_3'' \parallel o_3 1$ první strana výslednicové čáry k břemenům $\mathfrak{P}_I$. Na parabole takto určené je vrchol $\mathfrak{p}_3$ momentového trojúhelníka $a_3 \mathfrak{p}_3 b_3$ pro moment $\mathfrak{M}$, k němuž určíme základní stranu $a_3'' b_3''$ vodorovným promítnutím bodu p_3 na svislici a a bodu p_3' na svislici b. Od této základní strany k bodu $\mathfrak{p}_3$ měříme příčinkovou pořadnici M_0 ve svislici bodu p, kterou přeneseme, jelikož je kladná, od základní strany $a_3 b_3$ směrem dolů. Snadno bychom určili jako u spojitého nosníku i další body příčinkové čáry M_0.

Příčinkové čáry sil T_0 pro všechny průřezy sestrojili bychom jako u spojitého nosníku. Jinak lze určiti příčinkovou čáru reakce

$$A = \mathfrak{A}_0 + \frac{M_{II} - M_I}{l} = P_0 \left(\frac{p'}{l} + \frac{F_1'}{F_1} \cdot \frac{m_I - m_{II}}{l} \right).$$

Přeneseme-li $\overline{\alpha \alpha'} = \overline{\beta \beta'} = P_0$, je přímka $\alpha' \beta$ vztažená k ose $\alpha \beta$ příčinkovou čarou reakce prostého nosníku $\mathfrak{A}_0 = P_0 \frac{p'}{l}$. K tomu připočteme $P_0 \cdot \frac{F_1'}{F_1} \cdot \frac{m_I - m_{II}}{l} = P_0 \frac{F_1'}{F_1} \cdot \frac{\overline{p_3 p_0}}{\overline{a_1 o_1}} =$ $= \overline{p_3 2} = \overline{3 4}$; vedeme $p_3 1 \perp \alpha' \beta$, $p_3' 1$ vodorovně, $1 2 \perp o_3 1$ a přeneseme $\overline{p_3' 2} = \overline{3 4}$. Body α', 4, γ, β spojuje příčinková čára reakce A; základní stranou je $\alpha \beta$.

Pro vodorovnou sílu máme jako účinek zatížení hodnotu

$$H = - \frac{P \int_p^l (x - p) z \, ds}{\int_0^l z^2 \, ds}. \qquad (207)$$

Abychom stanovili příčinkovou čáru H, dáme v těžištích obloučků působiti břemenům $\mathfrak{P}''' = z$, pro něž máme kontrolu $\Sigma \mathfrak{P}''' = 0$, jelikož osa X vyhovuje výmince $\Sigma z \sigma = \sigma \Sigma z = 0$, což platí při souměrném oblouku i pro polovinu. Výslednicová čára ke svislým silám $\mathfrak{P}'''$ dá při pólové vzdálenosti F_2 v paprsku břemene pořadnici $\overline{p_4' p_4} = n$ a tu

$$\int_p^l (x - p) z \, ds \doteq \sigma \sum_p^l (x - p) z = \sigma F_2 \cdot \overline{p_4 p_4'} = - \sigma F_2 n.$$

Výslednicová čára k vodorovným silám $\mathfrak{P}'''$ určí v ose X úsek $\overline{a_4'' b_4''} = n_0$, jenž přísluší součtu statických momentů všech vodorovných sil $\mathfrak{P}'''$ k ose X, tedy

$$\sum_0^l \mathfrak{P}''' z = \sum_0^l z^2 = F_2 n_0 \qquad \text{a} \qquad \int_0^l z^2 \, ds \doteq \sigma \sum_0^l z^2 = \sigma F_2 n_0.$$

Dosazením do rovnice (207) vyjde vzorec (186)

$$H = P \frac{n}{n_0},$$

je tedy výslednicová čára $a_4 p_4 b_4$ příčinkovou čarou H.

Ze známých čar M_0, T_0, H určíme příčinkové čáry M, T, N jako v obr. 97.

K břemeni P v libovolné poloze p můžeme sestrojiti paprsky výsledních reakcí $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Obrazec momentů M_0 je dán prostým obrazcem momentovým $a_3 \mathfrak{p}_3 b_3$, k němuž

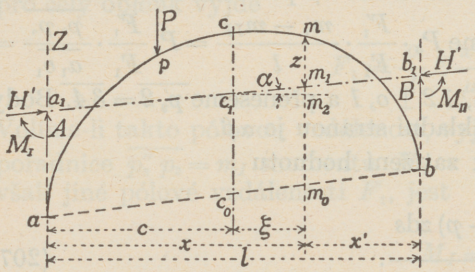
přistupuje doplňovací lichoběžník omezený přemístěnou základní stranou $a_3'' b_3''$, stanovenou pořadnicemi momentů M_I, M_{II}, tedy přímkami $p_3 a_3'' \parallel p_3' b_3'' \parallel a_3 b_3$. Strana $a_3'' b_3''$ seče momentové přímky $a_3 \mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_3 b_3$ v bodech i_3, j_3, na jejichž svislicích v bodech i_1, j_1 sekou paprsky reakcí $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ osu X. K břemeni $P = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'}$ určíme svislé reakce $A = \overline{\mathfrak{c}\,\mathfrak{p}}$, $B = \overline{\mathfrak{p}'\,\mathfrak{c}}$, stanovíme-li pól s' paprsky $s'\,\mathfrak{p} \parallel a_3 \mathfrak{p}_3$, $s'\,\mathfrak{p}' \parallel \mathfrak{p}_3 b_3$ a základní bod $\mathfrak{c}$ paprskem $s'\,\mathfrak{c} \parallel a_3'' b_3''$. Vodorovnou sílu $H = P \frac{n}{n_0}$ určíme graficky, přeneseme-li $\overline{\mathfrak{p}'\,n} = n$, $\overline{\mathfrak{p}'\,n_0} = n_0$ a vedeme-li $\mathfrak{p}\,s'' \parallel n_0 n$; tu jest $H = \overline{s''\,\mathfrak{p}'}$. Složky A, H (B, H) určí úseky výsledních reakcí $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$); paprsky reakcí procházejí body i_1, j_1 a jsou rovnoběžné s úseky. Kontrolovati můžeme sestrojení z momentu

$$M_I = H \cdot \overline{a_1 a'} = -P m_I \cdot \frac{F_1'}{\Sigma \mathfrak{P}_I};$$

z toho plyne

$$\overline{a_1 a'} = -\frac{P}{H} m_I \cdot \frac{F_1'}{\Sigma \mathfrak{P}_I},$$

což sestrojíme, vedeme-li $p_3 5 \perp s''\,\mathfrak{p}$, $5\,6 \perp o_3 1$; tím jest určeno $\overline{a_1 a'} = -\overline{p_3'' 6}$. Obdobně stanovíme $\overline{b_1 b'} = -\overline{p_3'' 8}$, je-li $p_3' 7 \perp s''\,\mathfrak{p}$, $7\,8 \perp o_3 1$.



Obr. 102.

ζ) **Oblouk nesouměrný** libovolného tvaru měj stálý průřez a svislé zatížení. Levou reakci rozkládejme na složky A, H', M_I v bodě a_1, pravou reakci na složky B, $-H'$, $-M_{II}$ v bodě b_1 (obr. 102). Síly H', působící v šikmé spojnici $a_1 b_1$, jsou při svislém zatížení v obou opěrách rovné a protivné; mají společnou vodorovnou složku $H = H' \cos \alpha$. Z rovnováhy vnějších sil plyne jako u souměrného oblouku podle vzorců ($167^{a,b}$)

$$M_a = M_I + He_1, \quad M_b = M_{II} + He_2, \tag{208}$$

je-li $\overline{a\,a_1} = e_1$, $\overline{b\,b_1} = e_2$. Vzorce ($165^{c,d}$) pro reakce A, B zůstávají beze změny. Pořadnice $z = \overline{m_1\,m}$ měřme od osy $a_1 b_1$. Rozložíme-li sílu H' v bodě m_1 na vodorovnou složku $H = H' \cos \alpha$ a svislou složku $H' \sin \alpha = H \operatorname{tg} \alpha$, vyjde pro moment k bodu m rovnice (172)

$$M = \mathfrak{M} + \frac{M_I x' + M_{II} x}{l} - Hz.$$

Výslednice vnějších sil vlevo od bodu m má vodorovnou složku H a svislou složku

$$V = A - \sum_0^x P + H \operatorname{tg} \alpha = \mathfrak{T} + \frac{M_{II} - M_I}{l} + H \operatorname{tg} \alpha.$$

Potom je normálná síla

$$N = -H \cos \varphi - V \sin \varphi = -H (\cos \varphi + \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi) - \left(\mathfrak{T} + \frac{M_{II} - M_I}{l} \right) \sin \varphi =$$

$$= -H \frac{\cos (\varphi - \alpha)}{\cos \alpha} - \left(\mathfrak{T} + \frac{M_{II} - M_I}{l} \right) \sin \varphi \tag{209}$$

a posouvající síla

$$T = -H \sin \varphi + V \cos \varphi = \left(\mathfrak{T} + \frac{M_{II} - M_I}{l} \right) \cos \varphi - H (\sin \varphi - \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi) =$$

$$= \left(\mathfrak{T} + \frac{M_{II} - M_I}{l} \right) \cos \varphi - H \frac{\sin (\varphi - \alpha)}{\cos \alpha}. \tag{210}$$

Derivace M, N a složek reakcí podle M_I, M_{II} mají stejné hodnoty jako při souměrném oblouku. Prvé dvě přetvárné výminky ($170^{a,b}$) zůstávají beze změny, jedině je třeba dz nahraditi hodnotou $ds \sin\varphi$, jež se zde liší od dz, poněvadž z měříme nyní od šikmé osy $a_1 b_1$. Jsou tedy prvé dvě přetvárné výminky obecně

$$\int \frac{M x' ds}{EJ} + \int \left(\frac{N}{EU} + \delta\varepsilon\right) \sin\varphi \cdot ds - \Delta h_b + l \cdot \Delta\varphi_a = 0, \tag{211a}$$

$$\int \frac{M x\, ds}{EJ} - \int \left(\frac{N}{EU} + \delta\varepsilon\right) \sin\varphi \cdot ds + \Delta h_b - l \cdot \Delta\varphi_b = 0. \tag{211b}$$

Dále plyne z předchozích vzorců

$$\frac{\partial M}{\partial H} = -z, \quad \frac{\partial N}{\partial H} = -\frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha}, \quad \frac{\partial A}{\partial H} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial H} = 0,$$

$$\frac{\partial M_a}{\partial H} = e_1, \quad \frac{\partial M_b}{\partial H} = e_2, \quad \frac{\partial H'}{\partial H} = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Popuštění Δl ve směru vodorovném znamená v šikmém směru H' hodnotu $\Delta l/\cos\alpha$, i vyjde třetí výminka přetvárná

$$\int \frac{M z\, ds}{EJ} + \int \left(\frac{N}{EU} + \delta\varepsilon\right) \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha} ds - e_1 \cdot \Delta\varphi_a + e_2 \cdot \Delta\varphi_b - \frac{\Delta l}{\cos^2\alpha} = 0. \tag{211c}$$

Tím jsou odvozeny přetvárné výminky pro jakýkoli oblouk a libovolné zatížení.

Při vyšším oblouku nedbáme účinku normálné síly. Jako u oblouku o dvou kloubech s opěrami v různé výši jest i zde $ds \cdot \sin\varphi = dz + dx \cdot \operatorname{tg}\alpha$ a integrace v mezích oblouku dá

$$\int ds \sin\varphi = \int dz + \operatorname{tg}\alpha \int dx = e_2 - e_1 + l \operatorname{tg}\alpha,$$

$$\int \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha} ds = \int (\cos\varphi + \operatorname{tg}\alpha \sin\varphi)\, ds = \int [dx + \operatorname{tg}\alpha\,(dz + dx \operatorname{tg}\alpha)] =$$

$$= (1 + \operatorname{tg}^2\alpha) \int dx + \operatorname{tg}\alpha \int dz = \frac{l}{\cos^2\alpha} + (e_2 - e_1) \operatorname{tg}\alpha.$$

Pro vyšší oblouk stálého průřezu vyjdou tím přetvárné výminky

$$\left.\begin{aligned} \int M x'\, ds &= EJ\,[\delta\varepsilon\,(e_1 - e_2 - l \operatorname{tg}\alpha) + \Delta h_b - l \cdot \Delta\varphi_a], \\ \int M x\, ds &= EJ\,[\delta\varepsilon\,(e_2 - e_1 + l \operatorname{tg}\alpha) - \Delta h_b + l \cdot \Delta\varphi_b], \\ \int M z\, ds &= EJ \left[\delta\varepsilon \left(e_1 - e_2 - \frac{l}{\cos^2\alpha}\right) + e_1 \cdot \Delta\varphi_a - e_2 \cdot \Delta\varphi_b + \frac{\Delta l}{\cos^2\alpha}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{212}$$

Zvolíme nyní polohu bodů a_1, b_1 tak, aby se řešení co nejvíce zjednodušilo. V bodech střednice mysleme si síly ds a stanovme bod c, jako statický střed bodové soustavy takto určené, tedy jako působiště výslednice $\int ds$ při libovolném zaměření sil ds. Působí-li síly nejprve svisle, plyne z momentů k bodu a

$$\int x\, ds = c \int ds, \quad c = \frac{\int x\, ds}{\int ds} = \frac{\int x\, ds}{S}, \tag{213}$$

je-li $\int ds = S$ délka celého oblouku. Působí-li síly ds rovnoběžně s tětivou ab a značíme-li $\overline{m_0 m} = z'$, $\overline{c_0 c_1} = e$, lze momentovou výminku k ose $a_1 b_1$ psáti ve tvaru

$$\int z' \, ds = e \int ds ;$$

z toho plyne vzorec (201)

$$e = \frac{\int z' \, ds}{\int ds} = \frac{\int z' \, ds}{S} .$$

Osu $a_1 b_1$ stanovíme tak, aby byla v bodě c_1 sdružena s osou $c_1 c$; tu je deviační moment sil ds, působících v bodech střednice, k osám $a_1 b_1, c_1 c$ roven nule čili při označení $x - c = \xi$

$$\int \xi z \, ds = 0 .$$

Je-li $z'' = \overline{m_2 m}$ pořadnice bodu m nad vodorovnou vedenou bodem c_1, tu je

$$z = \overline{m_2 m} - \overline{m_2 m_1} = z'' - \xi \operatorname{tg} \alpha , \quad \int \xi z \, ds = \int \xi \, (z'' - \xi \operatorname{tg} \alpha) \, ds = 0$$

a tedy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\int \xi z'' \, ds}{\int \xi^2 \, ds} . \tag{214}$$

Tím je určena poloha osy $a_1 b_1$. Poněvadž je tato osa centrálnou osou, jsou s ní v bodech a_1, b_1 sdruženy osy rovnoběžné se sdruženou osou v bodě c_1, tedy svislé; potom jsou i deviační momenty k ose $a_1 b_1$ a k ose $a_1 a$ i $b_1 b$ rovny nule čili platí vzorec (200^a) jako při souměrném oblouku

$$\int x z \, ds = \int x' z \, ds = 0 .$$

Dosadíme-li do přetvárných výminek (212) za M hodnotu (172), dostaneme rovnice

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{M_I}{l} \int x'^2 \, ds + \frac{M_{II}}{l} \int x x' \, ds = - \int \mathfrak{M} x' \, ds + EJ \, [\delta \varepsilon \, (e_1 - e_2 - l \operatorname{tg} \alpha) + \Delta h_b - l \cdot \Delta \varphi_a], \\
&\frac{M_I}{l} \int x x' \, ds + \frac{M_{II}}{l} \int x^2 \, ds = - \int \mathfrak{M} x \, ds - EJ \, [\delta \varepsilon \, (e_1 - e_2 - l \operatorname{tg} \alpha) + \Delta h_b - l \cdot \Delta \varphi_b], \\
&H \int z^2 \, ds = - \int \mathfrak{M} z \, ds + EJ \left[\delta \varepsilon \left(e_1 - e_2 - \frac{l}{\cos^2 \alpha} \right) + e_1 \cdot \Delta \varphi_a - e_2 \cdot \Delta \varphi_b + \frac{\Delta l}{\cos^2 \alpha} \right] .
\end{aligned}\right\} \tag{215}$$

Z těchto rovnic lze řešiti účinek zatížení i účinky vedlejší. Pokud jde o zatížení samo, jsou přetvárné výminky pro ně shodné s výminkami u oblouku souměrného. Rozdíl je jen v tom, že u oblouku nesouměrného měříme z od šikmé osy $a_1 b_1$. Jinak se celé řešení nemění, tedy také příčinkové čáry všech veličin se určí jako pro oblouk souměrný. Jedině se bude lišiti řešení příčinkových čar N, T, jež bychom sestrojili podle rovnic (209), (210). Dosadíme-li $H = P_0 \frac{n}{n_0}$ jako u oblouku souměrného, dostaneme

$$\frac{N}{\sin \varphi} = - T_0 - n \frac{P_0 \cos (\varphi - \alpha)}{n_0 \cos \alpha \sin \varphi} , \quad \frac{T}{\cos \varphi} = T_0 - n \frac{P_0 \sin (\varphi - \alpha)}{n_0 \cos \alpha \cos \varphi} . \tag{216}$$

Podle těchto rovnic sestrojíme příčinkové čáry N, T v podstatě jako u souměrného oblouku.

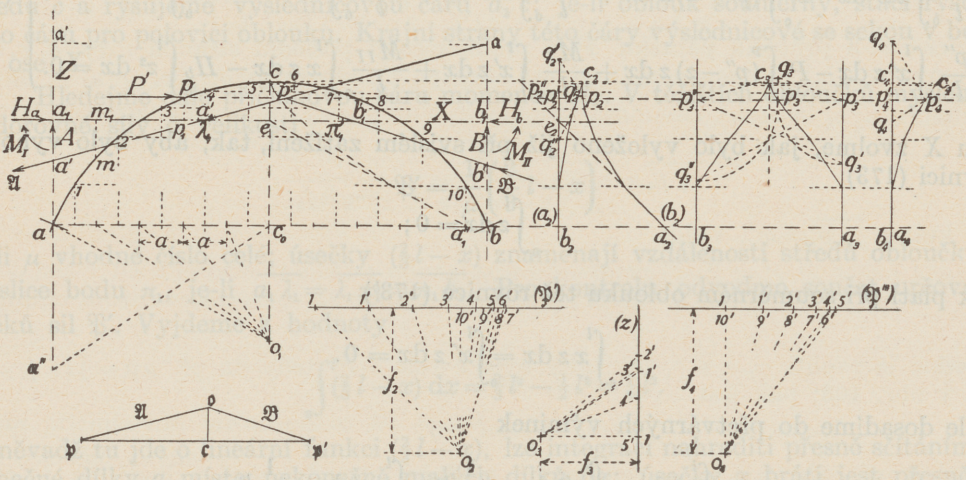
31. Vyšší oblouk s vodorovným břemenem. *α) Počtářské řešení.* Volíme-li při zatížení libovolného směru za staticky neurčité momenty M_I, M_{II} a vodorovnou složku H_l pravé reakce, platí beze změny jakožto přetvárné výminky rovnice ($170^{a,b,c}$), jež jsme odvodili pro oblouk bez kloubů se zatížením svislým. Prvé dvě výminky od-

vodili jsme z obecné výminky přetvárné, kladouce za staticky neurčitou veličinu X moment M_I a moment M_{II}, výslední rovnice pak nezávisí na směru břemen na oblouk působících. Třetí výminka plynula dosazením vodorovné síly H za staticky neurčitou veličinu X. Položíme-li místo H při zatížení libovolného směru složku H_b, zůstane třetí výminka přetvárná rovněž beze změny, poněvadž derivace momentu M, normálné síly N a složek reakcí podle H_b jsou tytéž jako derivace týchž veličin podle H, za nčž lze ostatně i při svislém zatížení klásti H_b.

U vyššího oblouku nedbali jsme účinku normálné síly a pokládali jsme přibližně $J \cos \varphi = J_0$ za stálé; tak vyšly přetvárné výminky (171). Vynechme vedlejší účinky, jež jsme již vyřídili, a obdržíme rovnice

$$\int_0^l M x' \, dx = 0, \quad \int_0^l M x \, dx = 0, \quad \int_0^l M z \, dx = 0. \tag{217}$$

Vodorovné břímě P', jež působí ve výši $\overline{p_1 p} = p''$ nad osou $a_1 b_1 \equiv X$ (obr. 103), vyvodí v opěrách šikmé reakce $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; reakci $\mathfrak{A}$ rozložíme v bodě a_1 na složky A, H_a, M_I a reakci $\mathfrak{B}$ v bodě b_1 na složky B, $-H_b$, $-M_{II}$. Kladné svislé reakce působí vzhůru, kladná vodorovná složka vpravo a kladný moment točí jako ručičky na hodinách.



Obr. 103.

Reakce jsou v rovnováze s břemenem P'; výminky rovnováhy pro složky vodorovné, svislé a momenty k bodu b_1 jsou

$$H_a - H_b + P' = 0, \quad A + B = 0, \quad M_I + A\,l + P'\,p'' - M_{II} = 0. \tag{218}$$

Z první výminky plyne jako při oblouku o dvou kloubech rovnice (113)

$$H_a = H_b - P',$$

druhá a třetí výminka dá pak

$$A = -B = -P' \frac{p''}{l} + \frac{M_{II} - M_I}{l}. \tag{219}$$

Moment M k bodu m, jenž má k ose X pořadnici $\overline{m_1 m} = z$ nad osou X kladnou, určíme jdouce s pravé strany hodnotou

$$M = M_{II} + B\,x' - H_b\,z - P'(p'' - z);$$

uvažujíce síly po pravé straně, beremo za kladný moment, jenž točí proti ručičkám hodinovým. Poslední člen na pravé straně vzorce pro M platí pouze pro body m, jež jsou vlevo od břemene P'. Dosadíme-li za reakci B ze vzorce (219), dostaneme vzorec

$$M = M_{II} + P' \frac{p''}{l} x' - \frac{M_{II} - M_I}{l} x' - H_b z - P'(p'' - z),$$

jejž lze upraviti na tvar

$$M = P' \frac{p''}{l} x' - P'(p'' - z) + \frac{M_I x' + M_{II} x}{l} - H_b z; \tag{220}$$

člen $-P'(p'' - z)$ platí jen vlevo od břemene.

Moment M ze vzorce (220) dosadíme do přetvárných výminek (217); dospějeme tak k rovnicím

$$\left.\begin{aligned}
P' \frac{p''}{l} \int_0^l x'^2 \,dx - P' \int_0^p (p'' - z) x' dx + \frac{M_I}{l} \int_0^l x'^2 \,dx + \frac{M_{II}}{l} \int_0^l x x' dx - H_b \int_0^l x' z \,dx = 0, \\
P' \frac{p''}{l} \int_0^l x x' \,dx - P' \int_0^p (p'' - z) x \,dx + \frac{M_I}{l} \int_0^l x x' dx + \frac{M_{II}}{l} \int_0^l z^2 \,dx - H_b \int_0^l x z \,dx = 0, \\
P' \frac{p''}{l} \int_0^l x' z \,dx - P' \int_0^p (p'' - z) z \,dx + \frac{M_I}{l} \int_0^l x' z \,dx + \frac{M_{II}}{l} \int_0^l x z \,dx - H_b \int_0^l z^2 \,dx = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{217a}$$

Osu X zvolme, jak bylo vyloženo již při svislém zatížení, tak, aby bylo vyhověno rovnici (173)

$$\int_0^l z \,dx = 0;$$

pak platí při souměrném oblouku též rovnice (173b)

$$\int_0^l x z \,dx = \int_0^l x' z \,dx = 0.$$

Dále dosadíme do přetvárných výminek

$$\int_0^l x^2 \,dx = \int_0^l x'^2 \,dx = \frac{1}{3} l^3, \quad \int_0^l x x' \,dx = \frac{1}{6} l^3.$$

Obdržíme tím po jednoduché úpravě rovnice

$$2 M_I l + M_{II} l = -2 P' l p'' + \frac{6}{l} P' \int_0^p (p'' - z) x' \,dx,$$

$$M_I l + 2 M_{II} l = -P' l p'' + \frac{6}{l} P' \int_0^p (p'' - z) x \,dx,$$

$$H_b \int_0^l z^2 \,dx = -P' \int_0^p (p'' - z) z \,dx.$$

Z prvých dvou rovnic vypočteme řešením neznámé

$$M_I = -P' p'' + \frac{2 P'}{l^2} \int_0^p (p'' - z)(2x' - x) \,dx = -P' p'' + \frac{6 P'}{l^2} \int_0^p (p'' - z)\left(\tfrac{2}{3} l - x\right) dx, \tag{221a}$$

$$M_{II} = \frac{2 P'}{l^2} \int_0^p (p'' - z)(2x - x') \,dx = -\frac{6 P'}{l^2} \int_0^p (p'' - z)\left(\tfrac{1}{3} l - x\right) dx. \tag{221b}$$

Třetí výminka přetvárná dá přímo

$$H_b = -P' \frac{\int_0^p (p'' - z)\, z\, dx}{\int_0^l z^2\, dx}. \tag{222}$$

Ze vzorce (219) určíme pak

$$A = -B = -\frac{6P'}{l^2}\int_0^p (p'' - z)(l - 2x)\, dx = -\frac{12P'}{l^3}\int_0^p (p'' - z)(c - x)\, dx, \tag{223}$$

znamená-li $c = \frac{1}{2}l$.

β) **Grafické řešení** provádíme tak, že nekonečně malou úsečku dx nahradíme konečným dílkem a tětivy $a\,b$ a znaménka integrační nahradíme znaménky součtovými; součty upravíme tak, abychom je mohli vykládati jako součty statických momentů, a stanovíme je pak výslednicovými čarami.

Nejprve určíme osu X jako při svislém zatížení jakožto paprsek výslednice vodorovných sil, jež mají určovací úseky a a působí v těžištích obloučků příslušných dílkům a. Dělení tětivy $a\,b$ lze pokládati již za složkovou čáru. Zvolíme k ní pól o_1 na svislici středu c a rýsujeme výslednicovou čáru $a_1'' c$; je-li oblouk souměrný, stačí rýsovati tuto čáru pro polovici oblouku. Krajní strany této čáry výslednicové se sekou v bodě e na ose X.

Hledejme dále příčinkovou čáru momentu M_I. V těžištích obloučků mysleme si vodorovné síly o velikosti

$$\mathfrak{P}' = \frac{1}{\mu}\left(\frac{2}{3}l - x\right)$$

je-li μ vhodné číslo celé; úsečky $(\frac{2}{3}l - x)$ znamenají vzdálenosti středů obloučků od svislice bodu π_1, je-li $\overline{a_1 \lambda_1} = \overline{\lambda_1 \pi_1} = \overline{\pi_1 b_1}$. Pro kontrolu odvoďme součet určovacích úseků sil $\mathfrak{P}'$. Vyjdeme z hodnoty

$$\int_0^l (\tfrac{2}{3}l - x)\, dx = \tfrac{2}{3}l^2 - \tfrac{1}{2}l^2 = \tfrac{1}{6}l^2.$$

Poněvadž tu jde o lineární funkci $(\frac{2}{3}l - x)$, lze integraci nahraditi přesně sčítáním pro konečné dílky a místo nekonečně malých dílků dx; úsečky x bráti jest přesně pro středy dílků a pak jest

$$\int_0^l \left(\frac{2}{3}l - x\right) dx = a \sum_0^l \left(\frac{2}{3}l - x\right) = \frac{1}{6}l^2$$

nebo

$$\sum_0^l \frac{1}{\mu}\left(\frac{2}{3}l - x\right) = \sum_0^l \mathfrak{P}' = \frac{l^2}{6\,a\,\mu}.$$

Volíme-li na př. $\mu a = \frac{1}{2}l$ jako v obr. 103, kde jest $a = \frac{1}{10}l$, $\mu = 5$, vyjde $\sum_0^l \mathfrak{P}' = \overline{1\,10'} = \frac{1}{3}l$.

Na svislici koncového bodu $10'$ složkové síly čáry pro síly $\mathfrak{P}'$ zvolme nyní pól o_2 ve vzdálenosti f_2 od čáry složkové a rýsujme výslednicovou čáru $a_2\, p_2\, c_2\, b_2$. Krajní strany této čáry se sekou na ose X v bodě e_2; toho lze užíti ke kontrole nebo přímo k sestrojení osy X. Neboť platí

$$\int_0^l (\tfrac{2}{3}l - x)\, z\, dx = \tfrac{2}{3}l \int_0^l z\, dx - \int_0^l x\, z\, dx = 0,$$

jak plyne z rovnic (173) a (173^b); pak jest

$$\int_0^l (\tfrac{2}{3}l - x)\, z\, \mathrm{d}x \doteq \mu a \sum_0^l \mathfrak{P}' z = 0,$$

znamená tedy osa X paprsek výslednice vodorovných sil $\mathfrak{P}'$. Výslednicovou čarou $a_2 p_2 c_2 b_2$ určíme

$$\sum_0^p \mathfrak{P}' (p'' - z) = f_2 \cdot \overline{p_2'' p_2}$$

jakožto součet statických momentů vodorovných sil $\mathfrak{P}'$ vlevo od bodu p působících vzhledem k paprsku P'; úsek $\overline{p_2'' p_2}$ jest omezen na paprsku P' první stranou výslednicové čáry $a_2 p_2 c_2 b_2$ a větví $a_2 c_2$ této čáry. Pak jest

$$\int_0^l (p'' - z)(\tfrac{2}{3}l - x)\, \mathrm{d}x \doteq a \sum_0^l (p'' - z)(\tfrac{2}{3}l - x) = \mu a \sum_0^p \mathfrak{P}' (p'' - z) = \mu a f_2 \cdot \overline{p_2'' p_2}.$$

Ze vzorce (221^a) dostaneme nyní

$$M_I = -P' p'' + \frac{6P'}{l^2} \mu a f_2 \cdot \overline{p_2'' p_2} = \frac{6 \mu a f_2}{l^2} P' \left(\overline{p_2'' p_2} - \frac{l^2 p''}{6 \mu a f_2} \right).$$

Znamenáme-li průsečík paprsku P' s prodlouženou poslední stranou čáry $a_2 p_2 c_2 b_2$ (tečnou v bodě b_2) písmenem p_2', určíme z obr. 103 z podobnosti $\triangle p_2' e_2 p_2''$ a $\triangle 10' o_2 1$ úsek

$$\overline{p_2 p_2'} = \overline{e_2 p_2'} \cdot \frac{\sum_0^l \mathfrak{P}'}{f_2} = p'' \frac{l^2}{6 \mu a f_2}.$$

Je-li krátce $\overline{p_2' p_2} = m_I'$, vyjde

$$M_I = \frac{6 \mu a f_2}{l^2} P' m_I'. \qquad (224^a)$$

Výhodné je zvoliti μ, a a f_2 tak, aby bylo $6 \mu a f_2 = l^2$, tedy na př. $\mu a = \frac{1}{2} l$, $f_2 = \frac{1}{3} l$ jako v obr. 103; pak jest

$$M_I = P' m_I'. \qquad (224^b)$$

Výslednicová čára $a_2 p_2 c_2 b_2$, vztažená k poslední straně (tečně v bodě b_2), je tedy příčinkovou čarou momentu M_I pro vodorovná břemena. Kladné příčinkové pořadnice m_I', jež odpovídají kladnému momentu M_I, směřují vpravo, jestliže jsme zvolili pól o_2 pod složkovou čarou a brali kladné síly $\mathfrak{P}'$ vpravo.

Příčinkovou čáru momentu M_{II} určili bychom obdobně jako výslednicovou čáru k vodorovným silám velikosti

$$\mathfrak{P}'' = \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{3} l - x \right).$$

jež by působily ve středech obloučků. Úsečky $(\frac{1}{3}l - x)$ rovnají se vzdálenostem středů obloučků od svislice bodu λ_1; tyto vzdálenosti se rovnají vzdálenostem souměrných bodů od svislice bodu π_1. Složková čára pro síly $\mathfrak{P}'$, vzatá v obráceném pořadu, je tedy složkovou čarou pro síly $\mathfrak{P}''$; výslednicová čára k těmto silám je pak totožná s čarou $a_2 p_2 c_2 b_2$ opačně vzatou. Označíme proto $a_2 \equiv (b_2)$, $b_2 \equiv (a_2)$ a přisoudíme působišti p břemene P' druhý průsečík q_2 této výslednicové čáry s paprskem P'. Tak určíme

$$\int_0^p (p'' - z)(\tfrac{1}{3}l - x)\, \mathrm{d}x \doteq \mu a \cdot \sum_0^p \frac{1}{\mu} (\tfrac{1}{3}l - x)(p'' - z) = \mu a \cdot \sum_0^p \mathfrak{P}'' (p'' - z) = \mu a f_2 \cdot \overline{p_2' q_2};$$

znamenáme-li $\overline{p'_2 q_2} = m'_{II}$, vyjde z rovnice (221^b) moment

$$M_{II} = -\frac{6\,\mu\,a\,f_2}{l^2} P'\,m'_{II}. \qquad (225^a)$$

Zvolíme-li $6\,\mu\,a\,f_2 = l^2$ jako v obr. 103, platí

$$M_{II} = -P'\,m'_{II}. \qquad (225^b)$$

Příčinkovou čarou momentu M_{II} je čára $(a_2)\,c_2\,(b_2)$ vztažená k tečně v bodě (a_2). Příčinkové pořadnice m'_{II} jsou vesměs kladné, dávají však záporné momenty M_{II} jakožto momenty výslednice všech vnějších sil vlevo od bodu b působících vzhledem k bodu b_1; pravá reakce $\mathfrak{B}$ má k bodu b_1 moment $-M_{II}$, jenž je pak vždy kladný, tedy točí jako ručičky na hodinách. To předpokládá jako vše ostatní v tomto odstavci, že břímě P' směřuje vpravo.

Příčinkovou čáru vodorovné složky H_b pravé reakce určíme jakožto výslednicovou čáru $a_3\,c_3\,b_3$ k vodorovným silám z, jež působí ve středech obloučků; rýsujeme z pólu o_3, jenž má od složkové čáry vzdálenost f_3. Neboť, znamenáme-li (viz obr. 103) $\overline{p'_3\,p_3} = n'$, $\overline{a_3\,b_3} = n_0$, jest

$$\int_0^p (p'' - z)\,z\,\mathrm{d}x \doteq a \cdot \sum_0^p (p'' - z)\,z = -a\,f_3\,n'.$$

Kladná, t. j. vpravo směřující síla z na kladném rameni $(p'' - z)$ dá záporný moment; proto je předloženo na pravé straně rovnice záporné znaménko, úsek n' je pak kladný, směřuje-li vlevo. Dále jest

$$\int_0^l z^2\,\mathrm{d}x \doteq a \sum_0^l z^2 = a\,f_3\,n_0;$$

kladná síla z na kladném rameni z dává kladný moment, je-li tedy n_0 vlevo kladné, není třeba měniti znaménko. Ze vzorce (222) plyne nyní

$$H_b = P'\frac{n'}{n_0}; \qquad (226^a)$$

je tedy příčinkovou čarou reakce H_b čára $a_3\,c_3\,b_3$ vztažená k prvé straně $a_3\,p'_3$.

Konečně určíme

$$H_a = H_b - P' = P'\frac{n'}{n_0} - P' = P'\frac{n' - n_0}{n_0};$$

poznačíme-li $n_0 - n' = \overline{p_3\,p''_3} = n''$, dostaneme

$$H_a = -P'\frac{n''}{n_0}. \qquad (226^b)$$

Příčinkové pořadnice reakce H_a jsou omezeny čarou $a_3\,c_3\,b_3$ a její poslední stranou $b_3\,p''_3$. Úseky n'', n_0 mají týž směr, tedy totéž znaménko; reakce H_a je pak podle poslední rovnice vždy záporná, t. j. působí vlevo.

Příčinkovou čáru reakce A sestrojíme, dáme-li ve středech obloučků působiti vodorovným silám

$$\mathfrak{P}''' = \frac{c - x}{\mu_1}$$

a sestrojíme-li k nim z pólu o_4, ve vzdálenosti f_4 od složkové čáry zvoleného, výslednicovou čáru $a_4\,p_4\,c_4$; μ_1 znamená příhodné číslo celé. Tím určíme

$$\int_0^v (p'' - z)\,(c - x)\,\mathrm{d}x \doteq a \sum_0^v (p'' - z)\,(c - x) = \mu_1 a \sum_0^v \mathfrak{P}'''\,(p'' - z) = \mu_1 a f_4 v;$$

$v = \overline{p_4' p_4}$ jest úsek omezený na paprsku P' prodlouženou první stranou výslednicové čáry $a_4 p_4 c_4$ a čarou samou. Výsledek je kladný, lze tedy bráti úseky v prostě; mají veskrze týž směr. Úsek $(c - x)$ v libovolném bodě na levé polovici a v souměrném bodě na pravé polovici mají touž velikost a protivná znaménka; břemena $\mathfrak{P}'''$ pro takové dva souměrné body jsou pak rovna a protivna, pročež se složkové čáry pro síly $\mathfrak{P}'''$ na levé a pravé polovici oblouku kryjí, a také výslednicové čáry $a_4 c_4$ a $c_4 b_4$ pro obě polovice jsou totožné. Rovnice (223) dá nyní

$$A = -\frac{12\,P'}{l^3}\,\mu_1 a f_4 v; \tag{227a}$$

zvolíme-li $6\,\mu_1 a f_4 = l^3$, tedy na př. $\mu_1 a = \frac{1}{2} l$, $f_4 = \frac{1}{3} l$ jako v obr. 103, vyjde

$$A = -P' \frac{2\,v}{l} = -P' \frac{v}{c}. \tag{227b}$$

Pro kontrolu složkové čáry sil $\mathfrak{P}'''$ vypočtěme

$$\int_0^c (c - x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} c^2.$$

Poněvadž je $(c - x)$ lineární funkce úsečky x, lze integraci nahraditi přesně sčítáním, bereme-li místo $\mathrm{d}x$ konečné dílky a a přisoudíme-li každému dílku úsečku x jeho středu; pak jest $a \sum_0^c (c - x) = \frac{1}{2} c^2$ a

$$\sum_0^c \mathfrak{P}''' = \frac{1}{\mu_1} \sum_0^c (c - x) = \frac{c^2}{2\,\mu_1 a}.$$

Volíme-li $\mu_1 a = c = \frac{1}{2} l$ jako v obr. 103, kde jest $\mu_1 = 5$ a úsek $\overline{a c_0}$ je dělen na pět stejných dílů, dostaneme

$$\sum_0^c \mathfrak{P}''' = \tfrac{1}{2} c.$$

Odvozeného způsobu sestrojení příčinkových čar M_I, M_{II}, H_b, A bylo by lze použíti i pro svislé zatížení. Příčinková čára momentu M_I byla by i tu výslednicovou čarou k svislým břemenům $\mathfrak{P}'$, příčinkovou čáru momentu M_{II} stanovili bychom pak jakožto výslednicovou čáru k svislým břemenům $\mathfrak{P}''$; pro svislé zatížení se obě čáry liší, jsou však vzájemně souměrné ke svislici středu oblouku. Příčinkovou čáru H jsme již stanovili pro svislé zatížení jako pro vodorovné jakožto výslednicovou čáru k břemenům z, a příčinková čára A pro svislé zatížení určila by se jakožto výslednicová čára k svislým břemenům $\mathfrak{P}'''$.

Určili jsme již všechny složky obou reakcí $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$; můžeme nyní vyšetřiti i paprsky reakcí. Moment M_I znamená moment levé reakce $\mathfrak{A}$ k bodu a_1; seče-li paprsek $\mathfrak{A}$ svislici bodu a v bodě a', platí tedy

$$M_I = H_a \cdot \overline{a_1 a'}.$$

Z toho plyne dosazením ze vzorců (224a) a (226b) úsek

$$\overline{a_1 a'} = \frac{M_I}{H_a} = -\frac{6\,\mu a f_2}{l^2} \cdot \frac{m' n_0}{n''}. \tag{228a}$$

Je li $6\mu a f_2 = l^2$ jako v obr. 103, vyjde

$$\overline{a_1 a'} = -m_I' \frac{n_0}{n''}.$$

Podle toho sestrojíme úsek $\overline{a_1 a'}$, přeneseme-li na svislici $n'' = \overline{p_3'' p_3} = \overline{p_3'' q_3''}$ a vedeme-li $p_2 q_2' \perp p_3' q_3''$; tu jest

$$\overline{p_2' q_2'} = \overline{p_2' p_2} \cdot \frac{\overline{p_3' p_3''}}{\overline{p_3'' q_3''}} = m_I' \frac{n_0}{n''} = \overline{a' a_1}.$$

Obdobně jest $-M_{II}$ moment reakce $\mathfrak{B}$ k bodu b_1, tedy

$$-M_{II} = -H_b \cdot \overline{b_1 b'};$$

dosazením ze vzorců (225^a) a (226^a) plyne

$$\overline{b_1 b'} = \frac{M_{II}}{H_b} = -\frac{6\mu a f_2}{l^2} \cdot \frac{m_{II}' n_0}{n'}. \qquad (228^b)$$

V obr. 103 jsme zvolili $6\mu a f_2 = l^2$; pak platí

$$\overline{b_1 b'} = -m_{II}' \frac{n_0}{n'}.$$

Přeneseme-li $n' = \overline{p_3' p_3} = \overline{p_3' q_3'}$ a vedeme-li $q_2' q_2'' \perp p_3'' q_3'$, vyjde

$$\overline{q_2'' p_2'} = \overline{p_2' q_2} \cdot \frac{\overline{p_3' p_3''}}{\overline{p_3' q_3'}} = m_{II}' \frac{n_0}{n'} = \overline{b' b_1}.$$

Body a', b' procházejí paprsky reakcí rovnoběžné s jejich úseky. Složkový obrazec sestrojíme snadno, zvolíme-li úsek $P' = n_0 = \overline{p_3'' p_3'}$; vzorce (226^a, ^{b}) a (227^b) dají pak

$$H_b = n' = \overline{p_3' p_3}, \quad H_a = -n'' = \overline{p_3 p_3''}, \quad A = -n_0 \frac{v}{c}.$$

Přenesme $\overline{a a''} = \overline{a_3 b_3} = n_0$ a veďme $p_4 q_4 \parallel a'' c_0$; tím určíme

$$\overline{p_4' q_4} = \overline{p_4' p_4} \cdot \frac{\overline{a a''}}{\overline{a c_0}} = -v \frac{n_0}{c} = A.$$

Úsekem $\overline{p_3 q_3} = \overline{q_4 p_4'} = -A = B$ doplníme složkový obrazec, v němž je pak $\overline{q_3 p_3''}$ úsekem reakce $\mathfrak{A}$ a $\overline{p_3' q_3}$ úsekem reakce $\mathfrak{B}$; paprsky reakcí jsou s těmito úseky rovnoběžné, jdou body a', b' a sekou se na paprsku P' v bodě p^+. Pro libovolné břímě $P' = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'}$ sestrojíme úseky reakcí, vedeme-li $\mathfrak{p}\,\mathfrak{o} \parallel p_3'' q_3$, $\mathfrak{p}'\,\mathfrak{o} \parallel p_3' q_3$; pak jest $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{o}\,\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{p}'\,\mathfrak{o}}$.

Místo bodů a', b' mohli bychom sestrojiti průsečíky a_1', b_1' paprsků $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ s osou $\overrightarrow{X}$. Platí totiž

$$M_I = -A \cdot \overline{a_1 a_1'}, \quad -M_{II} = -B \cdot \overline{b_1 b_1'},$$

pokládáme-li úseky $\overline{a_1 a_1'}$, $\overline{b_1 b_1'}$ vpravo za kladné. Z toho plyne, je-li $f_2 = f_4$,

$$\overline{a_1 a_1'} = -\frac{M_I}{A} = m_I' \frac{c}{v}, \quad \overline{b_1 b_1'} = \frac{M_{II}}{B} = -m_{II}' \frac{c}{v}; \qquad (229)$$

podle těchto rovnic sestrojíme body a_1', b_1' snadno.

Paprsek $\mathfrak{A}$ lze též kontrolovati průsečíkem $\mathfrak{a}$ se svislicí bodu b; vedeme-li vodorovnici $\mathfrak{a}\,a'$, jest $\triangle a' a' \mathfrak{a} \sim \triangle \mathfrak{o}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{p}$, pročež platí

$$\overline{a' a'} = \overline{a' \mathfrak{a}} \cdot \frac{\overline{\mathfrak{o}\,\mathfrak{c}}}{\overline{\mathfrak{c}\,\mathfrak{p}}} = l \frac{A}{H_a} = 2v \frac{n_0}{n''}, \qquad (230)$$

volíme-li μ_1, a, f_4 jako v obr. 103. Přímka $p_4 q_4' \perp p_3' q_3''$ stanoví úsek

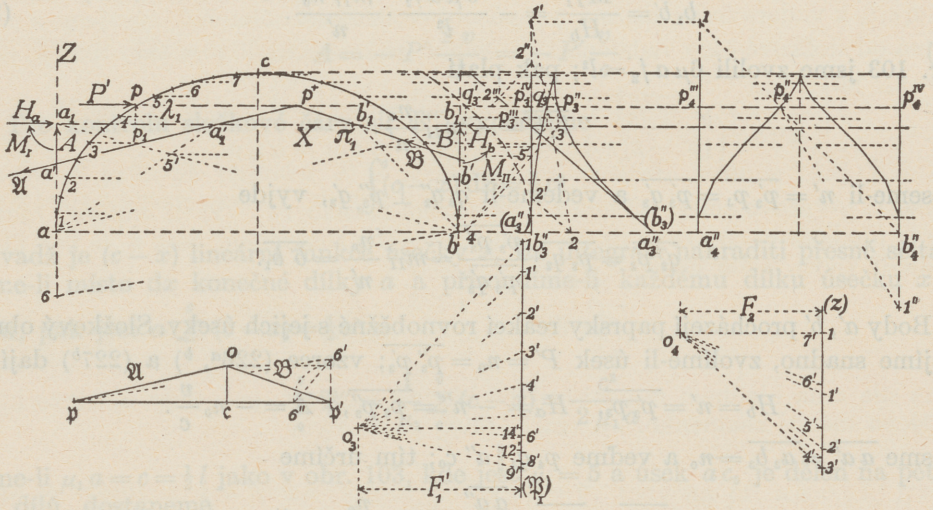
$$\overline{p_4 q_4'} = \overline{p_4' p_4} \cdot \frac{\overline{p_3' p_3''}}{\overline{p_3'' q_3''}} = v \frac{n_0}{n''} = \frac{1}{2} \overline{a' a'}.$$

γ) Oblouk stálého průřezu. Nedbáme-li vedlejších účinků, mají přetvárné výminky podle rovnic (199) tvar

$$\int M x' \, ds = 0, \quad \int M x \, ds = 0, \quad \int M z \, ds = 0. \tag{199a}$$

Levou reakci $\mathfrak{A}$ nahradíme složkami A, H_a, M_I v bodě a_1 a pravou reakci $\mathfrak{B}$ složkami B, $-H_b$, $-M_{II}$ v bodě b_1 (obr. 104). Osu $X \equiv a_1 b_1$ stanovíme podle obr. 101. Vodorovné břímě P' ve výši $\overline{p_1 p} = p''$ nad osou X je se složkami reakcí vázáno výminkami rovnováhy (218), z nichž určíme

$$H_a = H_b - P'$$



Obr. 104.

a svislé složky reakcí dané vzorcem (219). Moment k obecnému bodu je dán vzorcem (220). Dosazením do přetvárných výminek vyjdou rovnice tvaru (217a) na str. 214, v nichž je třeba jedině dx nahraditi ds. Osu X volíme jako při svislém zatížení tak, aby bylo $\int z \, ds = 0$, tedy při souměrném oblouku též $\int x z \, ds = \int x' z \, ds = 0$. Přetvárné výminky jsou pak

$$\left.\begin{aligned} \frac{M_I}{l}\int_0^l x'^2 \, ds + \frac{M_{II}}{l}\int_0^l x x' ds &= -P' \frac{p''}{l}\int_0^l x'^2 \, ds + P'\int_0^p (p'' - z)\, x' ds, \\ \frac{M_I}{l}\int_0^l x x' \, ds + \frac{M_{II}}{l}\int_0^l x^2 \, ds &= -P'\frac{p''}{l}\int_0^l x x' \, ds + P'\int_0^p (p'' - z)\, x \, ds, \\ H_b \int_0^l z^2 \, ds &= -P'\int_0^p (p'' - z)\, z \, ds. \end{aligned}\right\} \tag{231}$$

Při grafickém řešení nanášíme na střednici stejné obloučky σ a jako při svislém zatížení (obr. 101) určíme, je-li oblouk souměrný:

$$\int_0^l x'^2 \, ds = \int_0^l x^2 \, ds \doteq \sigma \sum_0^l x'^2 = \mu \sigma F \eta_b', \quad \int_0^l x x' \, ds \doteq \sigma \sum_0^l x x' \doteq \mu \sigma F \eta_a', \quad \int_0^l z^2 \, ds \doteq \sigma \sum_0^l z^2 = \sigma F n_0;$$

dále jest

$$\int_0^p (p''-z)\,x'\,ds \doteq \sigma \sum_0^p (p''-z)\,x', \quad \int_0^p (p''-z)\,x\,ds \doteq \sigma \sum_0^p (p''-z)\,x,$$

$$\int_0^p (p''-z)\,z\,ds \doteq \sigma \sum_0^p (p''-z)\,z.$$

Dosazením do rovnic (231) dostaneme

$$\left.\begin{aligned} \eta_b' M_I + \eta_a' M_{II} &= -\eta_b' P' p'' + \frac{P'}{\mu F'} \sum_0^p (p''-z)\,x', \\ \eta_a' M_I + \eta_b' M_{II} &= -\eta_a' P' p'' + \frac{P'}{\mu F'} \sum_0^p (p''-z)\,x, \\ H_b &= -\frac{P'}{F'^2 n_0} \sum_0^p (p''-z)\,z. \end{aligned}\right\} \tag{231a}$$

Prvé dvě rovnice vyřešíme, zavedeme-li základní body rovnicemi

$$-\frac{r_a'}{\eta_b'} = \lambda = \pi = -\frac{a}{l-a} = -\frac{b}{l-b}, \quad c = l-a-b = l-2a;$$

tu lze prvé dvě rovnice přetvárné psáti

$$\frac{l-a}{a} M_I + M_{II} = -\frac{l-a}{a} P' p'' + \frac{P'}{\mu F' r_a'} \sum_0^p (p''-z)\,x',$$

$$M_I + \frac{l-b}{b} M_{II} = -P' p'' + \frac{P'}{\mu F' r_a'} \sum_0^p (p''-z)\,x.$$

Řešením těchto rovnic vyjde

$$M_I = -P' p'' + \frac{P'}{\mu F' r_a'} \cdot \frac{a}{c\,l} \left[(l-a) \sum_0^p (p''-z)\,x' - a \sum_0^p (p''-z)\,x \right],$$

což lze upraviti na tvar

$$M_I = -P' p'' + \frac{P'\,a}{\mu F'\,c\,r_a'} \sum_0^p (p''-z)(x'-b). \tag{232a}$$

Obdobně určíme

$$M_{II} = \frac{P'\,a}{\mu F'\,c\,\eta_a'} \sum_0^p (p''-z)\,(x-a). \tag{232b}$$

Základní body λ_1, π_1 určíme jako při svislém zatížení (obr. 101). Vezmeme-li jako při svislém zatížení $\mathfrak{P}_1 = \dfrac{x'-b}{\mu}$ za úseky vodorovných břemen působících ve středech obloučků σ, stanovila by výslednicová čára $a_3'' p_3'' b_3''$ k těmto břemenům, rýsovaná pólovou vzdáleností podle vzorce (205)

$$F_1 = F \frac{c\,r_a'}{a\,l} = \Sigma \mathfrak{P}_I,$$

moment

$$\sum_0^p \frac{x'-b}{\mu} (p''-z) = \sum_0^p \mathfrak{P}_I (p''-z) = F_1 \cdot \overline{p_3''' p_3''},$$

takže by vyšlo

$$\frac{a}{\mu F' c \eta'_a} \sum_0^p (p'' - z)(x' - b) = \overline{p'''_3 p''_3}.$$

Prvá strana $a''_3 p'''_3$ svírala by se svislicí úhel 45°, bylo by tedy $\overline{p'''_3 p^{IV}_3} = p''$, $\overline{p'''_3 p''_3} - \overline{p'''_3 p^{IV}_3} = \overline{p^{IV}_3 p''_3} = m'_I$ a

$$M_I = P' m'_I. \tag{233a}$$

Je tedy čára $a''_3 p''_3 b''_3$, vztažená k poslední straně $b''_3 p^{IV}_3$, příčinkovou čarou M_I; pořadnice vpravo směřující jsou kladné, moment M_I vyjde tedy pro všechny polohy břemene kladný. Volíme-li místo pólové vzdálenosti F_1 libovolnou vzdálenost F'_1, je třeba výsledek násobiti poměrem F'_1/F_1, tedy platí

$$M_I = \frac{F'_1}{F_1} P' m'_I. \tag{233b}$$

Kdybychom zvolili $\frac{x-a}{\mu} = \mathfrak{P}_{II}$ za břemena, dostali bychom u souměrného oblouku v jednotlivých bodech břemena rovná břemenům $\mathfrak{P}_I$ v souměrných bodech oblouku, a výslednicová čára k břemenům $\mathfrak{P}_{II}$ byla by, obrátíme-li znaménko, totožná s čarou $a''_3 p''_3 b''_3$ opačně vzatou, tedy $(a''_3)\, p''_3\, (b''_3)$; působišti p břemene P' přisoudíme druhý průsečík q_3 s výslednicovou čarou, a tu vyjde při pólové vzdálenosti F_1

$$\sum_0^p (p'' - z) \frac{x-a}{\mu} = -F_1 \cdot \overline{p^{IV}_3 q_3}$$

a tedy

$$M_{II} = -P' m'_{II}, \tag{234a}$$

je-li $\overline{p^{IV}_3 q_3} = m'_{II}$. Za pólové vzdálenosti F'_1 jest

$$M_{II} = -\frac{F'_1}{F_1} P' m'_{II}. \tag{234b}$$

Veškeré momenty M_{II} vycházejí zde záporné.

Pro břemena $\mathfrak{P}_I$ platí

$$\Sigma \mathfrak{P}_I z = \frac{1}{\mu} \Sigma (x' - b) z = \frac{1}{\mu} (\Sigma x' z - b \Sigma z) = 0,$$

musí se tedy krajní strany čáry $a''_3 p''_3 b''_3$ protínati na ose X.

Výslednicová čára $a''_4 p''_4 b''_4$ k vodorovným silám z omezí krajními stranami úsek $\overline{a''_4 b''_4} = n_0$; táž čára určí též

$$\sum_0^p (p'' - z) z = -F_2 \cdot \overline{p''_4 p'_4} = -F_2 n',$$

je-li $n' = \overline{p'''_4 p'_4}$ pořadnice čáry vztažené k prvé tečně. Silám $z_1, z_2, \ldots$, které jsou záporné, přísluší záporné součiny $(p'' - z) z$, je tedy třeba předložiti na pravé straně rovnice záporné znaménko, bereme-li úsečky $\overline{p'''_4 p'_4} = n'$ vpravo za kladné. Vyjde pak vzorec (226a)

$$H_b = P' \frac{n'}{n_0}.$$

Z rovnováhy vodorovných sil plyne

$$H_a = H_b - P' = P' \frac{n' - n_0}{n_0} = -P' \frac{n''}{n_0}$$

jako ve vzorci (226^b), je-li $n'' = n_0 - n' = \overline{p_4' p_4^{IV}}$ pořadnice výslednicové čáry $a_4'' p_4'' b_4''$, měřená od čáry k poslední straně a vpravo kladná. Pro všechny polohy břemene P' je H_a záporné.

Pro svislé reakce platí

$$A = -B = -P' \frac{p''}{l} + \frac{M_{II} - M_I}{l} = -P' \frac{p''}{l} - \frac{F_1'}{F_1} \cdot P' \frac{m_I' + m_{II}'}{l} = -\frac{F_1'}{F_1} \cdot \frac{P'}{l} v, \quad (235)$$

je-li

$$v = p'' \frac{F_1}{F_1'} + m_I' + m_{II}' = \overline{p_3''' p_3^{IV}} + \overline{p_3^{IV} p_3''} + \overline{p_3^{IV} q_3} = \overline{q_3' p_3^{IV}}.$$

Takto můžeme sestrojiti z jednotlivých bodů příčinkovou čáru A, jíž je čára $b_3'' q_3'$; její pořadnice v měříme od čáry k tečně v bodě b_3'' a bereme je vpravo za kladné.

K břemeni P' v poloze p můžeme určiti graficky paprsky výsledních reakcí $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$. Průsečíky těchto paprsků se svislicemi opěr plynou ze vztahů

$$M_I = H_a \cdot \overline{a_1 a'}, \quad M_{II} = H_b \cdot \overline{b_1 b'}.$$

Dosazením za M_I, M_{II} ze vzorců (233^b), (234^b) a za H_a, H_b ze vzorců (226^{b,a}) dostaneme

$$\overline{a_1 a_1'} = \frac{M_I}{H_a} = -\frac{F_1'}{F_1} \cdot \frac{n_0}{n''} m_I', \quad \overline{b_1 b'} = \frac{M_{II}}{H_b} = -\frac{F_1'}{F_1} \cdot \frac{n_0}{n'} m_{II}'. \quad (236^a)$$

Podle posledního vzorce sestrojíme $\overline{b_1 b'}$, spojíme-li $b_4'' p_4''$, průsečík 1 se svislicí $a_4'' p_4'''$ promítneme vodorovně do $1'$ na straně $b_3'' p_3^{IV}$, spojíme $1' q_3$ a bodem 2 na přímce ab vedeme $2\,2' \perp o_3\,1$, čímž dostaneme $-\overline{b_3'' 2'} = \overline{b_1 b'}$. Jinak určíme $\overline{a_1 a'}$, přeneseme-li $\overline{p_4^{IV} 1''} = n_0$ a vedeme $p_3'' 2'' \parallel 1'' p_4''$, $2'' 2''' \parallel o_3\,1$; tu jest $\overline{a_1 a'} = -\overline{p_3^{IV} 2'''}$.

Můžeme však též sestrojiti průsečíky a_1', b_1' paprsků reakcí s osou X. Tu platí $M_I = -A \cdot \overline{a_1 a_1'}$, z čehož plyne

$$\overline{a_1 a_1'} = -\frac{M_I}{A} = m_I' \frac{l}{v} \text{ a obdobně } \overline{b_1 b_1'} = \frac{M_{II}}{B} = -m_{II}' \frac{l}{v}. \quad (236^b)$$

Prvý úsek určíme, vedeme-li $p_3'' 3 \parallel q_3' 4$ svisle, spojíme body 4, 3 a průsečík 5 se svislicí $b_3'' p_3^{IV}$ promítneme vodorovně do bodu $5'$ na přímce $a_1 b$; spojnice $a\,5'$ dá již bod a_1'. Obdobně určíme i bod b_1'. Paprsky reakcí $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ jsou tím určeny každý dvěma body, a kontrolou je, že se musí protínati v bodě p^+ na paprsku P'.

Můžeme sestrojiti i složkový obrazec. Přeneseme $P' = \overline{\mathfrak{p}\mathfrak{p}'}$ a rozdělíme tento úsek bodem $\mathfrak{c}$ v poměru $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{c}} : \overline{\mathfrak{c}\mathfrak{p}'} = -H_a : H_b = n'' : n'$, což se snadno provede. Dále jest $A = -B = -\frac{F_1'}{F_1} \cdot \frac{P'}{l} v$; přeneseme-li $\overline{a\,6} = v = \overline{q_3' p_3^{IV}}$ a vedeme-li $\mathfrak{p}\,6' \parallel 6\,b$, $6'\,6'' \parallel o_3\,1$, jest $\overline{6''\mathfrak{p}'} = -A = \overline{\mathfrak{c}\mathfrak{o}}$. Nyní je $o\mathfrak{p}$ úsek levé reakce $\mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{p}'o}$ úsek pravé reakce $\mathfrak{B}$; paprsky reakcí jsou s úseky rovnoběžné, čímž je dána další kontrola řešení.

32. Kruhový oblouk stálého průřezu. *α) Břímě svislé.* Bereme-li M_I, M_{II} a H za staticky neurčité veličiny, jsou přetvárné výminky dány rovnicemi (170^{a,b,c}). Předpokládejme dále, že jde o oblouk vyšší, u kterého lze nedbati účinku normálné síly; tu vynecháme proti ostatním člen $\frac{N}{EU}$. Změna teploty δ budiž stálá, součinitel ε,

modul pružnosti E a moment setrvačnosti J rovněž. Dosadíme-li ještě pro celý oblouk

$$\int_{-e}^{-e} dz = 0, \quad \int_0^l dx = l$$

a násobíme-li EJ, dospějeme k výminkám přetvárným

$$\left.\begin{aligned} \int_0^l M x' \, ds &= EJ\,(\Delta h_b - l \cdot \Delta \varphi_a), \\ \int_0^l M x \, ds &= EJ\,(l \cdot \Delta \varphi_b - \Delta h_b), \\ \int_0^l M z \, ds &= EJ\,(\Delta l + e \cdot \Delta \gamma - \delta \varepsilon l). \end{aligned}\right\} \qquad (237)$$

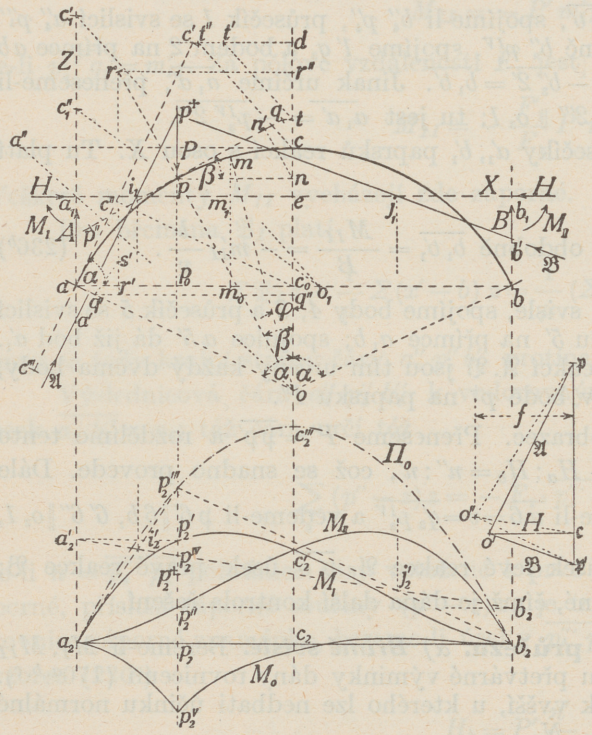
Tyto výminky jsou shodné s výminkami (159) pro vyšší oblouk stálého průřezu.

Za moment ohybový dosadíme jako u obecného oblouku vyššího ze vzorce (172)

$$M = \mathfrak{M} + \frac{M_I x' + M_{II} x}{l} - H z;$$

výminky přetvárné nabudou tím tvaru

$$\begin{aligned} \int_0^l \mathfrak{M} x' \, ds + \frac{M_I}{l} \int_0^l x'^2 \, ds + \frac{M_{II}}{l} \int_0^l x x' \, ds - H \int_0^l x' z \, ds &= EJ\,(\Delta h_b - l \cdot \Delta \varphi_a), \\ \int_0^l \mathfrak{M} x \, ds + \frac{M_I}{l} \int_0^l x x' \, ds + \frac{M_{II}}{l} \int_0^l x^2 \, ds - H \int_0^l x z \, ds &= EJ\,(l \cdot \Delta \varphi_b - \Delta h_b), \\ \int_0^l \mathfrak{M} z \, ds + \frac{M_I}{l} \int_0^l x' z \, ds + \frac{M_{II}}{l} \int_0^l x z \, ds - H \int_0^l z^2 \, ds &= EJ\,(\Delta l + e \cdot \Delta \gamma - \delta \varepsilon l), \end{aligned}$$



Obr. 105.

Osu X (obr. 105) zvolme tak, aby platilo

$$\int_0^l z \, ds = 0, \qquad (238^a)$$

t. j. aby byla osa X vodorovnou tížnicí střednice. Znamenáme-li $\overline{c_0 e} = \overline{a a_1} = \overline{b b_1} = e$, $\overline{m_0 m} = z'$, platí $z = \overline{m_1 m} = \overline{m_0 m} - \overline{m_0 m_1} = z' - e$ a

$$\int_0^l z \, ds = \int_0^l z' \, ds - e \int_0^l ds = 0;$$

z toho vychází

$$e = \frac{\int_0^l z' \, ds}{\int_0^l ds}, \qquad (239^a)$$

Z rovnice (238^a) plyne jako u obecného oblouku vyššího pro souměrný oblouk

$$\int_0^l x z \, ds = \int_0^l x' z \, ds = 0. \qquad (238^b)$$

Přetvárné výminky se tím zjednoduší na rovnice

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^l \mathfrak{M}\, x'\, ds + \frac{M_I}{l}\int_0^l x'^2\, ds + \frac{M_{II}}{l}\int_0^l x\, x'\, ds = EJ\,(\Delta h_b - l\cdot\Delta\varphi_a),\\
&\int_0^l \mathfrak{M}\, x\, ds + \frac{M_I}{l}\int_0^l x x'\, ds + \frac{M_{II}}{l}\int_0^l x^2\, ds = EJ\,(l\cdot\Delta\varphi_b - \Delta h_b),\\
&\int_0^l \mathfrak{M}\, z\, ds - H\int_0^l z^2\, ds = EJ\,(\Delta l + e\cdot\Delta\gamma - \delta\varepsilon l).
\end{aligned}\right\} \qquad (240)$$

Všechny integrace provedeme u kruhového oblouku nejvýhodněji v souřadnicích polárných. Znamenáme-li $\overline{oa} = r$ poloměr střednice, platí podle obr. 105

$$x = \overline{a\,m_0} = r\,(\sin\alpha - \sin\varphi), \quad x' = \overline{m_0\,b} = r\,(\sin\alpha + \sin\varphi),$$
$$z' = \overline{m_0\,m} = r\,(\cos\varphi - \cos\alpha),\ ds = -r\,d\varphi;$$

oblouk s měříme od bodu a, úhel φ od svislice bodu c kladně proti smyslu točení ručiček hodinových. Vypočteme nejprve

$$\int_0^l ds = -r\int_\alpha^{-\alpha} d\varphi = 2r\alpha,$$

$$\int_0^l z'\, ds = -r^2\int_\alpha^{-\alpha}(\cos\varphi - \cos\alpha)\, d\varphi = 2r^2\,(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha);$$

rovnice (239^a) dá

$$e = r\,\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha}, \qquad (239^b)$$

i je pak

$$z = \overline{m_1\,m} = z' - e = r\left(\cos\varphi - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right).$$

Nyní můžeme stanoviti

$$\int_0^l x^2\, ds = -r^3\int_\alpha^{-\alpha}(\sin\alpha - \sin\varphi)^2\, d\varphi = r^3\int_{-\alpha}^{\alpha}(\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\varphi + \sin^2\varphi)\, d\varphi,$$

$$\int_0^l x\, x'\, ds = -r^3\int_\alpha^{-\alpha}(\sin\alpha - \sin\varphi)\,(\sin\alpha + \sin\varphi)\, d\varphi = r^3\int_{-\alpha}^{\alpha}(\sin^2\alpha - \sin^2\varphi)\, d\varphi,$$

$$\int_0^l z^2\, ds = -r^3\int_\alpha^{-\alpha}\left(\cos\varphi - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 d\varphi = r^3\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\cos^2\varphi - 2\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\varphi + \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\right) d\varphi.$$

Hodnotami integrálů

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi = 2\alpha, \quad \int_{-\alpha}^{\alpha}\sin\varphi\, d\varphi = 0, \quad \int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi\, d\varphi = 2\sin\alpha,$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin^2\varphi\, d\varphi = \alpha - \sin\alpha\cos\alpha, \quad \int_{-\alpha}^{\alpha}\cos^2\varphi\, d\varphi = \alpha + \sin\alpha\cos\alpha$$

určíme

$$\int_0^l x^2\, ds = r^3\,(2\alpha\sin^2\alpha + \alpha - \sin\alpha\cos\alpha), \quad \int_0^l x\, x'\, ds = r^3\,(2\alpha\sin^2\alpha - \alpha + \sin\alpha\cos\alpha),$$

$$\int_0^l z^2\, ds = \frac{r^3}{\alpha}\,[\alpha\,(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - 2\sin^2\alpha];$$

ze souměrnosti oblouku plyne pak

$$\int_0^l x^2\,\mathrm{d}s = \int_0^l x'^2\,\mathrm{d}s\,.$$

Uvažujme dále zatížení jediným osamělým břemenem P v bodě p (obr. 105) o úsečkách

$$p = \overline{a\,p_0} = r\,(\sin\alpha - \sin\beta),\quad p' = \overline{p_0\,b} = r\,(\sin\alpha + \sin\beta)\,.$$

Toto zatížení vyvodí moment

$$\mathfrak{M} = P\,\frac{p'}{l}\,x - P\,(x-p);$$

poslední člen platí pouze vpravo od břemene. Stanovenou hodnotou momentu $\mathfrak{M}$ vychází

$$\int_0^l \mathfrak{M}\,x'\,\mathrm{d}s = P\,\frac{p'}{l}\int_0^l x\,x'\,\mathrm{d}s - P\int_p^l (x-p)\,x'\,\mathrm{d}s,\quad \int_0^l \mathfrak{M}\,x\,\mathrm{d}s = P\,\frac{p'}{l}\int_0^l x^2\,\mathrm{d}s - P\int_p^l (x-p)\,x\,\mathrm{d}s,$$

$$\int_0^l \mathfrak{M}\,z\,\mathrm{d}s = P\,\frac{p'}{l}\int_0^l x\,z\,\mathrm{d}s - P\int_p^l (x-p)\,z\,\mathrm{d}s = -P\int_p^l (x-p)\,z\,\mathrm{d}s\,.$$

Zavedením souřadnic polárních určíme

$$\int_p^l (x-p)\,x'\,\mathrm{d}s = -r^3\int_\beta^{-\alpha} (\sin\beta - \sin\varphi)\,(\sin\alpha + \sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= r^3\int_{-\alpha}^{\beta} (\sin\alpha\sin\beta - \sin\alpha\sin\varphi + \sin\beta\sin\varphi - \sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

$$\int_p^l (x-p)\,x\,\mathrm{d}s = -r^3\int_\beta^{-\alpha} (\sin\beta - \sin\varphi)\,(\sin\alpha - \sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= r^3\int_{-\alpha}^{\beta} (\sin\alpha\sin\beta - \sin\alpha\sin\varphi - \sin\beta\sin\varphi + \sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

$$\int_p^l (x-p)\,z\,\mathrm{d}s = -r^3\int_\beta^{-\alpha} (\sin\beta - \sin\varphi)\left(\cos\varphi - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= r^3\int_{-\alpha}^{\beta} \left(\sin\beta\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\alpha}\sin\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\,.$$

Stanovíme hodnoty integrálů

$$\int_{-\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\varphi = \alpha + \beta,\quad \int_{-\alpha}^{\beta} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \cos\alpha - \cos\beta,\quad \int_{-\alpha}^{\beta} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \sin\alpha + \sin\beta\,,$$

$$\int_{-\alpha}^{\beta} \sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \tfrac{1}{2}\,(\sin^2\beta - \sin^2\alpha)\,,\quad \int_{-\alpha}^{\beta} \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \tfrac{1}{2}\,(\alpha + \beta - \sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta)$$

a dostaneme dosazením jich a úpravou

$$\int_p^l (x-p)\,x'\,\mathrm{d}s = r^3\,[(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta + \sin(\alpha+\beta) - \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) - \tfrac{1}{2}(\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta)]\,,$$

$$\int_p^l (x-p)\,x\,\mathrm{d}s = r^3\,[(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta + \sin(\alpha-\beta) + \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}(\sin\beta\cos\beta - 3\sin\alpha\cos\alpha)]\,,$$

$$\int_p^l (x-p)\,z\,\mathrm{d}s = \frac{r^3}{2\alpha}\,[2\sin\alpha\,(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha - \beta\sin\beta - \cos\beta) - \alpha\,(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)]\,.$$

Vypočtené hodnoty dosadíme do třetí z rovnic (240) a vypočteme z ní

$$H=\frac{\int_0^l \mathfrak{M}z\,ds - EJ(\Delta l+e\cdot\Delta\gamma-\delta\varepsilon l)}{\int_0^l z^2\,ds}=P\frac{n}{n_0}+\frac{2EJ\alpha}{n_0 r^2}(2\delta\varepsilon r\sin\alpha-\Delta l-e\cdot\Delta\gamma), \quad (241)$$

znamenáme-li

$$n=r\,[\alpha(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)-2\sin\alpha\,(\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-\sin\beta-\cos\beta)], \quad (242^a)$$

$$n_0=2r\,[\alpha(\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)-2\sin^2\alpha]. \quad (242^b)$$

Úseky n, n_0 mohli bychom sestrojiti, vyšly by však proti r malé; lépe jest počítati pro jednotlivé polohy břemene P úseky n, n_0 a přenášeti pak v příslušných polohách břemene podíly $\frac{n}{n_0}=\eta$ jakožto příčinkové pořadnice vodorovné síly H podle libovolného měřidla. Jinak sestrojili bychom příčinkovou čáru H podobně jako u obecného oblouku vyššího stálého průřezu (viz odst. 30ε). Příčinková čára H má podle toho obratové body na svislicích průsečíků osy $a_1 b_1$ se střednicí.

Z prvých dvou rovnic (240) určíme momenty M_I, M_{II}. Dosadíme-li do nich stanovené hodnoty a znásobíme-li $\frac{2\sin\alpha}{r^2}$, obdržíme po jednoduché úpravě

$$M_I(2\alpha\sin^2\alpha+\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)+M_{II}(2\alpha\sin^2\alpha-\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)=$$
$$=-Pr[2\sin^2\alpha(\alpha\sin\alpha-\beta\sin\beta+\cos\alpha-\cos\beta)-\alpha\sin\beta+\beta\sin\alpha-$$
$$-\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha-\cos\beta)]+\frac{2EJ\sin\alpha}{r^2}(\Delta h_b-l\cdot\Delta\varphi_a),$$

$$M_I(2\alpha\sin^2\alpha-\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)+M_{II}(2\alpha\sin^2\alpha+\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)=$$
$$=-Pr[2\sin^2\alpha(\alpha\sin\alpha-\beta\sin\beta+\cos\alpha-\cos\beta)+\alpha\sin\beta-\beta\sin\alpha+$$
$$+\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha-\cos\beta)]+\frac{2EJ\sin\alpha}{r^2}(l\cdot\Delta\varphi_b-\Delta h_b).$$

Z obou posledních rovnic vypočteme neznámé momenty M_I, M_{II}; dosadíme-li $\Delta\varphi_a-\Delta\varphi_b=\Delta\gamma$ jakožto změnu úhlu $\gamma=2\alpha$ průřezů opěrových a $\Delta\varphi_a+\Delta\varphi_b=\Delta\gamma'$ jakožto změnu souměrnosti opěrových průřezů popuštěním opěr, dojdeme po úpravě ke vzorcům

$$M_I=-\frac{Pr}{2}\left[\frac{\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-\beta\sin\beta-\cos\beta}{\alpha}+\frac{\sin\alpha(\beta+\sin\beta\cos\beta)-\sin\beta(\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}\right]+$$
$$+\frac{EJ}{r^2}\left[\frac{\Delta h_b\cdot\sin\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}-r\left(\frac{\Delta\gamma'\cdot\sin^2\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{\Delta\gamma}{2\alpha}\right)\right], \quad (243)$$

$$M_{II}=-\frac{Pr}{2}\left[\frac{\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-\beta\sin\beta-\cos\beta}{\alpha}-\frac{\sin\alpha(\beta+\sin\beta\cos\beta)-\sin\beta(\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}\right]-$$
$$-\frac{EJ}{r^2}\left[\frac{\Delta h_b\cdot\sin\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}-r\left(\frac{\Delta\gamma'\cdot\sin^2\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}-\frac{\Delta\gamma}{2\alpha}\right)\right]. \quad (244)$$

Moment M_{II} musíme dostati z momentu M_I, vyměníme-li veličiny, jež se vztahují k levé a k pravé straně, tedy píšeme-li $-\beta$ za β, $-\Delta h_b$ za Δh_b a $-\Delta\gamma'$ za $\Delta\gamma'$; α a $\Delta\gamma$ se při tom nemění. Vzorec pro M_{II} hoví této kontrole.

Samotná změna teploty vyvodí pouze vodorovnou sílu

$$H_t=\frac{4EJ\delta\varepsilon}{n_0 r}\alpha\sin\alpha, \quad (241^a)$$

jež působí v bodech a_1, b_1, poněvadž jest $M_I=0$, $M_{II}=0$.

Vedlejších účinků dále nedbejme a uvažujme pouze osamělé břímě P, jež dá

$$M_I = -\frac{Pr}{2}\left[\frac{\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-\beta\sin\beta-\cos\beta}{\alpha}+\frac{\sin\alpha(\beta+\sin\beta\cos\beta)-\sin\beta(\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}\right], \tag{243a}$$

$$M_{II} = -\frac{Pr}{2}\left[\frac{\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-\beta\sin\beta-\cos\beta}{\alpha}-\frac{\sin\alpha(\beta+\sin\beta\cos\beta)-\sin\beta(\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}\right]. \tag{244a}$$

Příčinkové čáry momentů M_I, M_{II} sestrojíme podle posledních vzorců.

Určíme nejprve osu X jakožto vodorovnou tížnici střednice, přeneseme-li $\overline{a''c} = \text{arc}\,ac = r\alpha$; spojnice oa'' dá pak bod a_1 osy X. Přeneseme dále na tečnu v bodě a úsek $\overline{ac'} = \text{arc}\,ac = r\alpha$ a na tečnu v bodě p úsek $\overline{pq} = \text{arc}\,pc = r\beta$. Přímky $c'd \parallel qt \parallel pn \parallel ab$ stanoví úseky

$$\overline{od} = \overline{oc_0} + \overline{c_0 d} = r(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha),$$
$$\overline{ot} = \overline{on} + \overline{nt} = r(\cos\beta + \beta\sin\beta),$$

z nichž plyne

$$\overline{td} = \overline{od} - \overline{ot} = r(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha - \cos\beta - \beta\sin\beta).$$

Přeneseme-li nyní na svislici v bodě a úsek $\overline{ac_1'} = \overline{ac'} = r\alpha$, na vodorovnici poloměr $\overline{ao} = \overline{ao_1} = r$ a vedeme-li $tt' \parallel o_1 c_1'$, dostaneme $\triangle\, td t' \sim \triangle\, c_1' a o_1$ a tedy

$$\overline{t'd} = \overline{td}\cdot\frac{\overline{ao_1}}{\overline{ac_1'}} = r\,\frac{\cos\alpha+\alpha\sin\alpha-\cos\beta-\beta\sin\beta}{\alpha}.$$

Přímka $c_0 c'' \perp ac'$ určí úseky

$$\overline{ac''} = \overline{ac_0}\cdot\cos\alpha = r\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \overline{c''c'} = \overline{ac'} - \overline{ac''} = r(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$$

a přenesením $\overline{ac''} = \overline{c'''a}$ dostaneme

$$\overline{c'''c'} = \overline{c'''a} + \overline{ac'} = r(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha).$$

Obdobně sestrojíme přímkou $nn' \perp pq$ a přenesením $\overline{pn'} = \overline{p''p}$ úsek

$$\overline{p''q} = \overline{p''p} + \overline{pq} = r(\beta + \sin\beta\cos\beta).$$

Učiňme ještě $\overline{p''q} = \overline{oq'}$ a veďme vodorovnici

$$\overline{q'q''} = \overline{oq'}\cdot\sin\alpha = \overline{p''q}\cdot\sin\alpha;$$

podobně přenesme $\overline{c'''c'} = \overline{or}$ a stanovme vodorovný úsek

$$\overline{rr''} = \overline{or}\cdot\sin\beta = \overline{c'''c'}\cdot\sin\beta.$$

Konečně přeneseme $\overline{ac_1''} = \overline{c''c'}$ a vedeme rr' svisle a $q's' \perp o_1 c_1''$; tak sestrojíme

$$\overline{r's'} = \overline{q'r'}\cdot\frac{\overline{ao_1}}{\overline{ac_1''}} = (\overline{q'q''} - \overline{rr''})\,\frac{\overline{ao}}{\overline{c''c'}} = r\,\frac{\sin\alpha(\beta+\sin\beta\cos\beta)-\sin\beta(\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Vzorce (243a), (244a) lze nyní psáti

$$M_I = -\frac{P}{2}(\overline{t'd} + \overline{r's'}), \qquad M_{II} = -\frac{P}{2}(\overline{t'd} - \overline{r's'}).$$

Přeneseme-li $\overline{t'd} = \overline{p_2 p_2^+}$, $\overline{r's'} = \overline{p_2'' p_2^+} = \overline{p_2^+ p_2'}$ a poznamenáme-li $\overline{p_2 p_2'} = m_I$, $\overline{p_2 p_2''} = m_{II}$, vyjde

$$M_I = -\tfrac{1}{2} P m_I, \quad M_{II} = -\tfrac{1}{2} P m_{II}. \tag{245}$$

Opakujeme-li toto sestrojení pro několik poloh břemene, sestrojíme příčinkové čáry M_I, M_{II}. Pro břímě v bodě c působící dosadíme $\beta = 0$; z rovnic (243^a), (244^a) plyne tím

$$M_I = M_{II} = -\frac{Pr}{2} \cdot \frac{\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1}{\alpha}.$$

Příčinkovou pořadnici $\overline{c_2 c_2'}$ obou momentů v bodě c sestrojíme, vedeme-li $ct'' \parallel o_1 c_1'$; tu jest $\overline{t''d} = \overline{c_2 c_2'}$.

Z příčinkových čar M_I, M_{II} odvodíme dále příčinkové čáry momentů

$$M_0 = \mathfrak{M} + \frac{M_I x' + M_{II} x}{l},$$

jako by šlo o přímý nosník na obou koncích vetknutý. Momenty M_I M_{II} jsme uvedli na základního činitele $f = \frac{1}{2} P$, na nějž je třeba uvésti též momenty $\mathfrak{M}$. Obrazci momentů $\mathfrak{M}$ jsou trojúhelníky, jejichž vrcholy jsou na parabole Π_0 s osou ve svislici středu c; vrchol c_2''' má pořadnici

$$\frac{\mathfrak{M}_c}{f} = \frac{Pl}{4f}.$$

Pro $f = \frac{1}{2} P$ vyjde

$$\frac{\mathfrak{M}_c}{f} = \frac{l}{2} = \overline{c_2 c_2'''};$$

parabola Π_0 je tím určena. Působí-li břímě P v bodě p, jest obrazcem momentů $\mathfrak{M}$ trojúhelník $a_2 p_2''' b_2$, jehož vrchol je na parabole Π_0; obrazcem doplňku momentového

$$M' = \frac{M_I x' + M_{II} x}{l}$$

jest jako u spojitého nosníku lichoběžník $a_2' a_2 b_2 b_2'$, stanovený pořadnicemi $\overline{a_2 a_2'} = \overline{p_2 p_2'}$, $\overline{b_2 b_2'} = \overline{p_2 p_2''}$. Od základní strany $a_2' b_2'$ k čáře $a_2 p_2''' b_2$ měříme pořadnice momentů M_0 ve všech průřezech a máme tak příčinkové pořadnice těchto momentů v bodě p; tyto pořadnice nanášíme do příčinkových obrazců ve svislici bodu p. Jde-li o příčinkovou čáru momentu M_0 pro bod p, přeneseme pořadnici momentu M_0, měřenou ve svislici bodu p od základní strany $a_2' b_2'$ k bodu p_2''', od osy $a_2 b_2$ jakožto příčinkovou pořadnici $\overline{p_2^V p_2} = \overline{p_2^{IV} p_2'''}$; bod p_2^V je pak vrcholem příčinkové čáry momentu M_0 pro bod p. Další pořadnice této čáry určili bychom jako u nosníku spojitého.[1])

Pro svislou reakci A platí vzorec (165^c)

$$A = P \frac{p'}{l} + \frac{M_{II} - M_I}{l};$$

dosadíme-li za p', l, M_I a M_{II} hodnoty již určené, dospějeme po úpravě ke vzorci

$$A = \frac{P}{2}\left[1 + \frac{\beta - \sin \beta\,(2 \cos \alpha - \cos \beta)}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}\right] - \frac{EJ\left(\dfrac{\Delta h_b}{r} - \Delta \gamma' \sin \alpha\right)}{r^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}. \tag{246^a}$$

[1]) Srovnej druhý díl tohoto spisu, 3. vyd. (1916), str. 128.

Obdobně plyne ze vzorce (165^d)

$$= P\frac{p}{l} - \frac{M_{II} - M_I}{l}$$

nebo ze vzorce (246^a) záměnou veličin, jež se vztahují k levé a k pravé straně, tedy obrácením znaménka u β, Δh_b, $\Delta\gamma'$ reakce

$$B = \frac{P}{2}\left[1 - \frac{\beta - \sin\beta\,(2\cos\alpha - \cos\beta)}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}\right] + \frac{EJ\left(\frac{\Delta h_b}{r} - \Delta\gamma'\sin\alpha\right)}{r^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)}. \qquad (246^b)$$

Reakce A, B vyvozené samotným břemenem P mohli bychom sestrojiti podle posledních vzorců.[1]) Jinak určíme reakce A, B graficky jako u obecného oblouku vyššího, sestrojíme-li k momentovému obrazci pro břímě P obrazec složkový. Tu přeneseme $P = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'}$, vedeme $o''\,\mathfrak{p} \parallel a_2 p_2'''$, $o''\,\mathfrak{p}' \parallel b_2 p_2'''$ a $o''\,\mathfrak{c} \parallel a_2' b_2'$; pól o'' musí míti od složkové čáry vzdálenost $f = \frac{1}{2}P$ a bod $\mathfrak{c}$ stanoví úseky $A = \overline{\mathfrak{c}\,\mathfrak{p}}$, $B = \overline{\mathfrak{p}'\,\mathfrak{c}}$, jež vyhovují patrně jako u obecného oblouku vyššího vzorcům ($165^{c,d}$). K tomu bychom určili vodorovnou sílu

$$H = P\frac{n}{n_0}$$

počtem podle vzorců ($242^{a,b}$) nebo graficky z příčinkové čáry jako u obecného oblouku vyššího. Přeneseme-li pak v měřidle složkového obrazce na vodorovnici úsek $H = \overline{o'\,\mathfrak{c}}$, dostaneme úseky výsledních reakcí $\mathfrak{A} = \overline{o'\,\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{p}'\,o'}$. Paprsky $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ rovnoběžné s úseky jdou jako u vyššího oblouku body i_1, j_1 v ose X na svislicích průsečíků i_2', j_2' základní strany $a_2' b_2'$ s momentovou čarou $a_2 p_2''' b_2$. Jinak bychom mohli stanoviti průsečíky a', b' paprsků $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ se svislicemi bodů a, b ze vztahů

$$M_I = H \cdot \overline{a_1 a'}, \quad M_{II} = H \cdot \overline{b_1 b'},$$

jež dají

$$\overline{a_1 a'} = \frac{M_I}{H}, \quad \overline{b_1 b'} = \frac{M_{II}}{H};$$

podle toho bychom řešili na př. počtem.

Příčinkové čáry momentu M, normálné síly N a posouvající síly T by se sestrojily jako u obecného oblouku vyššího (viz obr. 97). Počítáme-li vodorovnou sílu H a přenášíme-li příčinkové pořadnice $\eta = \frac{n}{n_0}$ podle zvoleného měřidla, rovná se úsek n_0 jednotce tohoto měřidla.

Pro oblouk polokruhový dosadíme $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, tedy $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$; ze vzorců (241) až (244) vyjde tím po úpravě

$$H = \frac{P}{\pi^2 - 8}\left[4\,(\beta\sin\beta + \cos\beta) - \pi\,(1 + \sin^2\beta)\right] + \frac{2EJ}{r^3} \cdot \frac{2\delta\varepsilon\pi r - \pi \cdot \Delta l - 2r \cdot \Delta\gamma}{\pi^2 - 8}, \qquad (247)$$

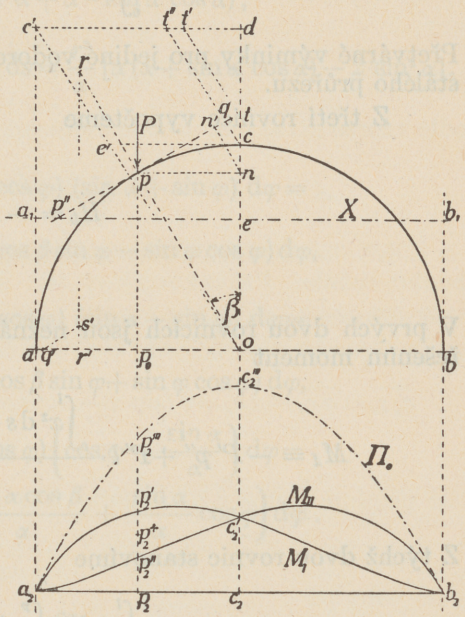
$$M_I = -\frac{Pr}{2\pi}\,(1 - \sin\beta)\,(\pi + 2\beta - 2\cos\beta) + \frac{2EJ}{\pi r^2}\left[\Delta h_b - r\left(\Delta\gamma' + \frac{\Delta\gamma}{2}\right)\right], \qquad (248)$$

$$M_{II} = -\frac{Pr}{2\pi}\,(1 + \sin\beta)\,(\pi - 2\beta - 2\cos\beta) - \frac{2EJ}{\pi r^2}\left[\Delta h_b - r\left(\Delta\gamma' - \frac{\Delta\gamma}{2}\right)\right]. \qquad (249)$$

[1]) Viz *Jos. Šolín* „Theorie plnostěnných nosníků obloukových", str. 103.

Sestrojení příčinkových čar M_I, M_{II} (obr. 106) plyne z obecného případu (viz obr. 105) dosazením $\alpha = \frac{1}{2}\pi$. Přeneseme $\overline{a\,c'} = \text{arc}\,a\,c$, $\overline{p\,q} = \text{arc}\,p\,c$ a vedeme $c'd \parallel qt \parallel pn \parallel ab$, $nn' \perp pq$. Body c'', c''' obecného případu splynou s bodem a, bod o_1 s bodem o a body c_1', c_1'' s bodem c'. Vedeme tedy $tt' \parallel ct'' \parallel oc'$, přeneseme $\overline{pn'} = \overline{p''p}$, $\overline{p''q} = \overline{q'o}$, $\overline{ac'} = \overline{or}$ a rýsujeme rr' svisle, $q's' \perp oc'$; pak jest pro břímě P v bodě p jako v obecném případě

$$M_I = -\tfrac{1}{2}P(\overline{t'd} + \overline{r's'}), \quad M_{II} = -\tfrac{1}{2}P(\overline{t'd} - \overline{r's'}).$$



Obr. 106.

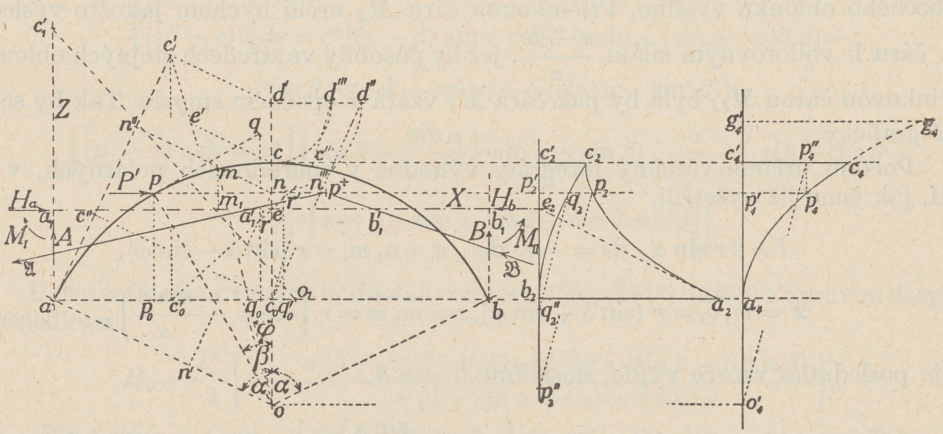
Do příčinkového obrazce přeneseme $\overline{p_2\,p_2^+} = \overline{t'd}$, $\overline{p_2''\,p_2^+} = \overline{p_2^+\,p_2'} = \overline{r's'}$ a určíme tak body p_2', p_2'' příčinkových čar M_I, M_{II}. Pro břímě v bodě c působící vyjde příčinková pořadnice $\overline{c_2\,c_2'} = \overline{t''d}$. Parabola Π_0 je zase dána body a_2, b_2 a vrcholem c_2''', jenž má pořadnici $\overline{c_2\,c_2'''} = \frac{1}{2}l = \overline{a_2\,c_2}$.

Těžiště polokruhové střednice sestrojíme, protneme-li spojnici oc' s vodorovnicí bodu c v bodě e' a přeneseme-li $\overline{ce'} = \overline{oe}$. Všechno ostatní by zůstalo v podstatě jako u obecného (segmentového) oblouku kruhového v obr. 105.

β) Břímě vodorovné. Jako při svislém břemeni budeme předpokládati, že je průřez oblouku stálý a že jde o vyšší oblouk, u něhož lze nedbati účinku normálné síly. Přetvárné výminky vyjdou pak ve tvaru rovnic (199ᵃ) jako u vyššího oblouku stálého průřezu. Vzorec (220) pro moment

$$M = P'\frac{p''}{l}x' - P'(p'' - z) + \frac{M_I x' + M_{II} x}{l} - H_b z$$

platí i zde, je-li $\overline{e\,n} = p''$ výška paprsku P' vodorovného břemene nad osou X (obr. 107);



Obr. 107.

člen $-P'(p'' - z)$ platí jen vlevo od bodu p. Za staticky neurčité veličiny zvolme zase M_I, M_{II}, H_b a volme osu X ve vodorovné tížnici střednice; pak platí jako při svislém

břemeni rovnice (238^{a,b}), t. j.

$$\int_0^l z\,ds = 0\,,\quad \int_0^l x\,z\,ds = \int_0^l x'\,z\,ds = 0\,.$$

Přetvárné výminky pro jediné vodorovné břímě P' mají tvar rovnic (231) pro oblouk stálého průřezu.

Z třetí rovnice vypočteme

$$H_b = -P'\frac{\int_0^p (p''-z)\,z\,ds}{\int_0^l z^2\,ds}\,. \tag{250}$$

V prvých dvou rovnicích jsou neznámé M_I, M_{II}; jelikož jest $\int_0^l x^2\,ds = \int_0^l x'^2\,ds$, plyne řešením moment

$$M_I = -P'p'' + P'l\cdot\frac{\int_0^l x^2\,ds\cdot\int_0^p (p''-z)\,x'\,ds - \int_0^l x\,x'\,ds\cdot\int_0^p (p''-z)\,x\,ds}{\left(\int_0^l x^2\,ds\right)^2 - \left(\int_0^l x\,x'\,ds\right)^2}\,. \tag{251^a}$$

Z týchž dvou rovnic stanovíme

$$M_{II} = P'l\cdot\frac{\int_0^l x^2\,ds\cdot\int_0^p (p''-z)\,x\,ds - \int_0^l x\,x'\,ds\cdot\int_0^p (p''-z)\,x'\,ds}{\left(\int_0^l x^2\,ds\right)^2 - \left(\int_0^l x\,x'\,ds\right)^2}\,. \tag{252^a}$$

Jako u obecného oblouku vyššího určili bychom příčinkovou čáru H_b jakožto výslednicovou čáru k vodorovným silám z, jež působí v těžištích stejných obloučků σ přenášených na střednici.

Také příčinkové čáry momentů M_I, M_{II} mohli bychom stanoviti podobně jako u obecného oblouku vyššího. Příčinkovou čáru M_I určili bychom jakožto výslednicovou čáru k vodorovným silám $\frac{x'-b}{\mu}$, jež by působily ve středech stejných obloučků σ; příčinkovou čarou M_{II} byla by pak čára M_I vzatá v opačném smyslu. Tak by se řešilo čistě graficky.

Počtem určíme všechny integrály výhodně v souřadnicích polárných, v nichž platí, jak jsme již vyšetřili,

$$l = 2r\sin\alpha,\quad ds = -r\cdot d\varphi,\quad x = \overline{a_1 m_1} = r\,(\sin\alpha - \sin\varphi),$$

$$x' = \overline{m_1 b_1} = r\,(\sin\alpha + \sin\varphi), z = \overline{m_1 m} = r\left(\cos\varphi - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right);$$

podle posledního vzorce vyjde, dosadíme-li $\varphi = \beta$,

$$p'' = r\left(\cos\beta - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right),$$

a tedy

$$p'' - z = r\,(\cos\beta - \cos\varphi)\,.$$

Již při svislém břemeni jsme odvodili

$$\int_0^l x^2\,ds = \int_0^l x'^2\,ds = r^3\,(2\alpha\sin^2\alpha + \alpha - \sin\alpha\cos\alpha),$$

$$\int_0^l x\,x'\,ds = r^3\,(2\alpha\sin^2\alpha - \alpha + \sin\alpha\cos\alpha),\quad \int_0^l z^2\,ds = \frac{r^3}{\alpha}\,[\alpha\,(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - 2\sin^2\alpha].$$

Nyní vypočteme

$$\int_0^p (p'' - z)\,x'\,ds = -r^3\int_\alpha^\beta (\cos\beta - \cos\varphi)\,(\sin\alpha + \sin\varphi)\,d\varphi =$$

$$= r^3\int_\beta^\alpha (\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\varphi + \cos\beta\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\,d\varphi,$$

$$\int_0^p (p'' - z)\,x\,ds = -r^3\int_\alpha^\beta (\cos\beta - \cos\varphi)\,(\sin\alpha - \sin\varphi)\,d\varphi =$$

$$= r^3\int_\beta^\alpha (\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\varphi - \cos\beta\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\,d\varphi,$$

$$\int_0^p (p'' - z)\,z\,ds = -r^3\int_\alpha^\beta (\cos\beta - \cos\varphi)\left(\cos\varphi - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)d\varphi =$$

$$= r^3\int_\beta^\alpha \left(\cos\beta\cos\varphi - \cos^2\varphi - \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\varphi\right)d\varphi.$$

Určíme integrály

$$\int_\beta^\alpha d\varphi = \alpha - \beta,\quad \int_\beta^\alpha \sin\varphi\,d\varphi = \cos\beta - \cos\alpha,\quad \int_\beta^\alpha \cos\varphi\,d\varphi = \sin\alpha - \sin\beta,$$

$$\int_\beta^\alpha \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\,(\sin^2\alpha - \sin^2\beta),\qquad \int_\beta^\alpha \cos^2\varphi\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\,(\alpha - \beta + \sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta),$$

dosadíme je do předešlých vzorců a dostaneme

$$\int_0^p (p'' - z)\,x'\,ds = r^3\,[(\alpha - \beta)\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\,(\sin\alpha - \sin\beta) + \cos\beta\,(\cos\beta - \cos\alpha) -$$
$$- \tfrac{1}{2}\,(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)],$$

$$\int_0^p (p'' - z)\,x\,ds = r^3\,[(\alpha - \beta)\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\,(\sin\alpha - \sin\beta) -$$
$$- \cos\beta\,(\cos\beta - \cos\alpha) + \tfrac{1}{2}\,(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)],$$

$$\int_0^p (p'' - z)\,z\,ds = r^3\left[\left(\cos\beta + \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)(\sin\alpha - \sin\beta) - \frac{\alpha - \beta}{\alpha}\sin\alpha\cos\beta -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left(\alpha - \beta + \sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta\right)\right].$$

Dosazením stanovených hodnot do vzorců (250), (251^a), (252^a) a úpravou dospějeme k výsledkům

$$H_b = \frac{P'}{2}\left[1 - \frac{\alpha\,(\beta - \sin\beta\cos\beta) - 2\sin\alpha\,(\sin\beta - \beta\cos\beta)}{\alpha\,(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - 2\sin^2\alpha}\right], \tag{253^a}$$

$$M_I = \frac{P'r}{2}\left[\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha + \sin\beta - \beta\cos\beta}{\alpha} - \frac{(\cos\beta - \cos\alpha)\,(\alpha - \sin\alpha\cos\beta)}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}\right], \tag{254^a}$$

$$M_{II} = -\frac{P'r}{2}\left[\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \sin\beta + \beta\cos\beta}{\alpha} - \frac{(\cos\beta - \cos\alpha)\,(\alpha - \sin\alpha\cos\beta)}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}\right]. \tag{254^b}$$

Moment M_{II} plyne z momentu M_I, píšeme-li $-\beta$ místo β a obrátíme-li v celém vzorci znamení; neboť moment M_{II} rovná se momentu M_I pro břímě P', jež by působilo v bodě souměrném k bodu p protivným směrem. Dále jest

$$H_a = H_b - P' = -\frac{P'}{2}\left[1 + \frac{\alpha(\beta - \sin\beta\cos\beta) - 2\sin\alpha(\sin\beta - \beta\cos\beta)}{\alpha(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - 2\sin^2\alpha}\right], \quad 253^b)$$

podle vzorce (219) pak určíme dosazením hodnot a úpravou

$$A = -B = -P'\frac{p''}{l} + \frac{M_{II} - M_I}{l} = -\frac{P'}{2}\cdot\frac{(\cos\beta - \cos\alpha)^2}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}. \quad (255)$$

Příčinkovou čáru H_b sestrojíme, jak již bylo vyloženo, podobně jako u obecného obouku vyššího. Příčinkové čáry M_I, M_{II}, A lze však sestrojiti též podle vzorců (254), (255). Přenesme na tečnu v bodě a délku $\overline{a\,c'} = \text{arc}\,a\,c = r\alpha$, na tečnu v bodě p délku $\overline{p\,q} = \text{arc}\,p\,c = r\beta$. Svislicemi $c'\,c_0'$, $q\,q_0$ určíme

$$\overline{c_0'\,c_0} = \overline{a\,c_0} - \overline{a\,c_0'} = r(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha), \quad \overline{q_0\,c_0} = \overline{p_0\,c_0} - \overline{p_0\,q_0} = r(\sin\beta - \beta\cos\beta),$$

$$\overline{c_0'\,q_0} = \overline{c_0'\,c_0} - \overline{q_0\,c_0} = r(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \sin\beta + \beta\cos\beta).$$

Dále učiníme $\overline{q_0\,c_0} = \overline{c_0\,q_0'}$ a stanovíme tím

$$\overline{c_0'\,q_0'} = \overline{c_0'\,c_0} + \overline{q_0\,c_0} = r(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha + \sin\beta - \beta\cos\beta).$$

Určili jsme již

$$\overline{c_0\,n} = r(\cos\beta - \cos\alpha), \quad \overline{o\,n} = r\cos\beta;$$

přímkou $n\,n' \perp a\,o$ a $n\,n'' \parallel a\,o$ stanovíme úseky

$$\overline{n'\,n} = \overline{o\,n}\cdot\sin\alpha = r\sin\alpha\cos\beta, \quad \overline{n''\,c'} = \overline{a\,c'} - \overline{a\,n''} = \overline{a\,c'} - \overline{n'\,n} = r(\alpha - \sin\alpha\cos\beta).$$

Konečně veďme $c_0\,c'' \perp a\,c'$ a dostaneme

$$\overline{a\,c''} = \overline{a\,c_0}\cdot\cos\alpha = r\sin\alpha\cos\alpha, \quad \overline{c''\,c'} = \overline{a\,c'} - \overline{a\,c''} = r(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha).$$

Vzorce ($254^{a,b}$) dají nyní

$$M_I = \frac{P'}{2}\left(r\cdot\frac{\overline{c_0'\,q_0'}}{\overline{a\,c'}} - \overline{c_0\,n}\cdot\frac{\overline{n''\,c'}}{\overline{c''\,c'}}\right), \quad M_{II} = -\frac{P'}{2}\left(r\cdot\frac{\overline{c_0'\,q_0}}{\overline{a\,c'}} - \overline{c_0\,n}\cdot\frac{\overline{n''\,c'}}{\overline{c''\,c'}}\right).$$

Veďme $c'\,d' \parallel n''\,n \parallel c''\,c_0 \parallel a\,o$; pak jest

$$\frac{\overline{n''\,c'}}{\overline{c''\,c'}} = \frac{\overline{n\,d'}}{\overline{c_0\,d'}}.$$

Přenesme dále na vodorovnici v bodě d' úsek $\overline{d'\,d''} = \overline{n\,d'}$; spojnice $c_0\,d''$ určí na paprsku P' délku

$$\overline{n\,n'''} = \overline{d'\,d''}\cdot\frac{\overline{c_0\,n}}{\overline{c_0\,d'}} = \overline{c_0\,n}\cdot\frac{\overline{n\,d'}}{\overline{c_0\,d'}} = \overline{c_0\,n}\cdot\frac{\overline{n''\,c'}}{\overline{c''\,c'}}.$$

Přeneseme-li ještě $\overline{a\,o} = \overline{a\,o_1}$ na vodorovnici, $\overline{a\,c'} = \overline{a\,c_1'}$ na svislici a vedeme-li $c_0'\,r' \perp c_1'\,o_1$, obdržíme na svislicích bodů q_0, q_0' pořadnice

$$\overline{q_0\,r} = \overline{c_0'\,q_0}\cdot\frac{\overline{a\,o_1}}{\overline{a\,c_1'}} = r\cdot\frac{\overline{c_0'\,q_0}}{\overline{a\,c'}}, \quad \overline{q_0'\,r'} = \overline{c_0'\,q_0'}\cdot\frac{\overline{a\,o_1}}{\overline{a\,c_1'}} = r\cdot\frac{\overline{c_0'\,q_0'}}{\overline{a\,c'}}.$$

Tak vychází

$$M_I = \tfrac{1}{2} P' m_I', \qquad M_{II} = -\tfrac{1}{2} P' m_{II}', \tag{256a}$$

je-li

$$m_I' = \overline{q_0' r'} - \overline{n n'''} = \overline{p_2' p_2}, \quad m_{II}' = \overline{q_0 r} - \overline{n n'''} = \overline{p_2 q_2}. \tag{256b}$$

Přijde-li břímě P' do bodu a, změní se sestrojení potud, že body n, n''' splynou s bodem c_0 a délka $\overline{n n'''}$ vymizí; dále splyne bod q s c' a q_0 s c_0', tedy vyjde

$$M_{II} = 0, \quad M_I = \frac{1}{2} P' \cdot 2r \frac{\overline{c_0 c_0}}{\overline{a c'}} = \frac{1}{2} P' \cdot 2 \overline{c_0 e},$$

neboť bod e je na přímce $c_0' r' \perp o_1 c_1'$, jak lze snadno dokázati. Přeneseme-li $\overline{b_2 a_2} = 2 \cdot \overline{c_0 e}$, sestrojíme bod a_2 příčinkové čáry M_I.

Je-li břímě P' v bodě c, splyne bod q s bodem c, tedy též bod q_0 s bodem c_0 a n s c. Tu přeneseme $\overline{c d'} = \overline{d d''}$ a spojnicí $c_0 d'''$ určíme úsek $\overline{c c'''}$. Podle obecné polohy břemene jest nyní

$$m_I' = m_{II}' = \overline{c_0 e} - \overline{c c'''} = \overline{c_2' c_2}$$

a pro momenty M_I, M_{II} platí zase vzorce (256a).

Křivka $a_2 p_2 c_2 q_2 b_2$, vztažená ke straně $b_2 c_2'$, je příčinkovou čarou M_I; vodorovné úseky této čáry v paprscích břemen třeba násobiti hodnotou $f = \frac{1}{r} P'$, abychom dostali momenty M_I vyvozené břemenem P'. Podle obdoby vyššího oblouku obecného tvaru sekou se krajní tečny této křivky (osa $b_2 c_2'$ a tečna v bodě a_2) v bodě e_2 na ose X, kterou určíme přímo, protneme-li spojnici $o c'$ přímkou $c e' \parallel o a$ a přeneseme-li $\overline{c e'} = \overline{c_0 e}$. Táž křivka $a_2 c_2 b_2$ je též příčinkovou čarou momentu M_{II}; působišti p břemene P' mezi body a, c odpovídá tu však bod q_2 na větvi $b_2 c_2$ a pořadnici $m_{II}' = \overline{p_2' q_2}$ musíme násobiti podle vzorce (256a) hodnotou $-f = -\frac{1}{r} P'$.

Pro svislé reakce plyne ze vzorce (255) dosazením hodnot již určených

$$B = -A = \frac{P'}{2r} \cdot \frac{\overline{c_0 n}^2}{\overline{c'' c'}}.$$

Svislé reakce mění úměrně ke čtverci úseku $\overline{c_0 n}$, tedy po zákonu obyčejné paraboly, jež má vodorovnou osu v prodloužené spojnici $a b$. Pokládejme za příčinkovou pořadnici

$$\frac{\overline{c_0 n}^2}{\overline{c'' c'}} = v = \overline{p_4' p_4}; \tag{257a}$$

pro $\overline{c_0 n} = \overline{c'' c'}$ vyjde $v = \overline{c' c'}$, patří tedy k úsečce $\overline{a_1 g_4'} = \overline{c'' c'}$ pořadnice $\overline{g_4' g_1} = \overline{c'' c'}$. Vrchol a_1, vodorovná osa a bod g_1 určují úplně příčinkovou parabolu $a_1 p_1 c_1$, jež platí staticky v mezích oblouku. Z pořadnice $v = \overline{p_4' p_4}$ splynou svislé reakce podle vzorce

$$B = -A = \frac{P'}{2} \cdot \frac{v}{r}. \tag{257b}$$

Kdybychom měli též příčinkové čáry reakcí H_a, H_b, jež bychom vyšetřili počtem ze vzorců (253a, b) anebo graficky podobně jako u obecného oblouku vyššího s tím rozdílem, že bychom místo na tětivu $a b$ přenášeli stejné dílky σ na střednici, mohli bychom vyšetřiti paprsky výsledních reakcí $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jako u obecného oblouku vyššího (viz obr. 103). Z příčinkových čar M_I, M_{II}, $A = -B$ sestrojíme průsečíky a_1', b_1' paprsků $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ s osou X; jako u vyššího oblouku plyne zde

$$\overline{a_1 a_1'} = -\frac{M_I}{A} = m_I' \frac{r}{v}, \quad \overline{b_1 b_1'} = \frac{M_{II}}{B} = -m_{II}' \frac{r}{v}.$$

Přenesme $\overline{c_4' o_4'} = r = \overline{c o}$ a veďme $p_4 p_4'' \parallel a_4 c_4'$, $q_2 q_2'' \parallel p_2 p_2'' \parallel o_4' p_4''$; pak jest $\overline{a_1 a_1'} = \overline{p_2' p_2''}$, $\overline{b_1 b_1'} = -\overline{p_2' q_2''}$. Paprsky $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jdou body a_1', b_1' rovnoběžně s jejich úseky, jež bychom stanovili jako u obecného oblouku vyššího. Paprsky $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ se též sekou v bodě p^+ na paprsku P'.

Pro oblouk polokruhový (obr. 108) určíme dosazením $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, tedy $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$ do předešlých vzorců

$$A = -B = -\frac{P'}{\pi}\cos^2\beta, \tag{258}$$

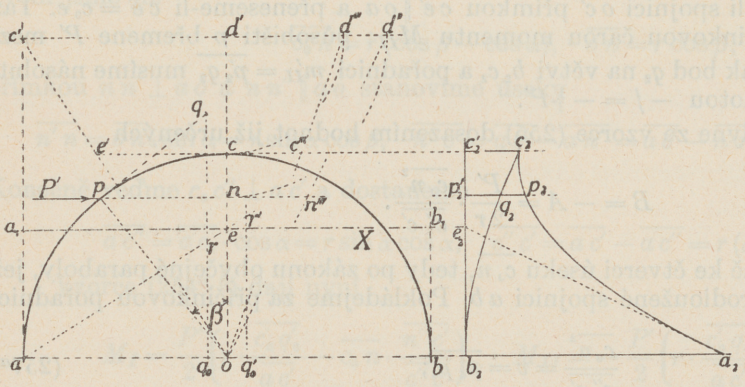
$$H_a = -P'\left[\frac{1}{2} + \frac{\pi(\beta - \sin\beta\cos\beta) - 4(\sin\beta - \beta\cos\beta)}{\pi^2 - 8}\right], \tag{259a}$$

$$H_b = P'\left[\frac{1}{2} - \frac{\pi(\beta - \sin\beta\cos\beta) - 4(\sin\beta - \beta\cos\beta)}{\pi^2 - 8}\right], \tag{259b}$$

$$M_I = \frac{P'r}{\pi}\left[1 + \sin\beta - \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)\cos\beta\right], \tag{260a}$$

$$M_{II} = -\frac{P'r}{\pi}\left[1 - \sin\beta - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\cos\beta\right]. \tag{260b}$$

Příčinkovou čáru $H_a(H_b)$ sestrojovali bychom graficky podobně jako u obecného oblouku vyššího se změnou uvedenou u obecného (segmentového) oblouku kruhového.



Obr. 108.

Příčinkovou čáru A (B) určíme graficky v podstatě jako v obr. 107. Sestrojení příčinkové čáry $M_I(M_{II})$ odvodíme z obr. 107, položíme-li $\alpha = \frac{1}{2}\pi$. Pak splyne bod c_0' i bod c'' s bodem a. Je třeba jen přenésti $\overline{a c'} = \text{arc}\, a c$ na tečnu v bodě a, $\overline{p q} = \text{arc}\, p c$ na tečnu v bodě p, vésti $q q_0$ svisle, $c'd' \parallel ab$ a přenésti $\overline{q_0 o} = \overline{o q_0'}$, $\overline{d' d''} = \overline{n d'}$, $\overline{d' d'''} = \overline{c d'}$. Spojnice $o d''$ stanoví na paprsku P' bod n''', spojnice $o d'''$ na vodorovnici bodu c bod c'''. Vodorovnice bodu c seče spojnici $o c'$ v bodě e'; úsek $\overline{c e'} = \overline{o e}$ stanoví těžiště e střednice i osu X. Přímka $a r' \perp o c'$ musí procházeti bodem e a stanoví na svislicích bodů q_0, q_0' úseky $\overline{q_0 r}$, $\overline{q_0' r'}$. Pak jest

$$m_I' = \overline{q_0' r'} - \overline{n n'''} = \overline{p_2' p_2}, \quad m_{II}' = \overline{q_0 r} - \overline{n n'''} = \overline{p_2' q_2}$$

a pro momenty M_I, M_{II} platí rovnice (256a). Pro bod c platí $\overline{c_2' c_2} = \overline{o e} - \overline{c c'''}$ a pro bod a určíme $\overline{b_2 a_2} = 2 \cdot \overline{o e}$. Body a_2, p_2, c_2, q_2, b_2 určují příčinkovou čáru momentu M_I, jež je zároveň příčinkovou čarou momentu M_{II}; tečna této čáry v bodě a_2 jde průsečíkem e_2 osy X s osou $b_2 c_2'$. Dále bychom řešili jako u obecného oblouku kruhového (viz obr. 107).

*γ) **Přetvoření.*** Určité přetvoření v daném bodě oblouku řešíme počtem z věty o virtuálných pracích. Ohybovou čáru oblouku při daném zatížení stanovíme počtem nebo graficky jakožto výslednicovou čáru ke spojité soustavě silové, jejíž určovací

plocha má pořadnice η dané vzorcem (75). Krajní hodnoty posunutí daného bodu v daném směru za pohyblivého zatížení vyšetříme z příčinkové čáry tohoto posunutí, jež se určí jakožto ohybová čára oblouku, působí-li naň v daném bodě ve směru hledaného posunutí břímě $P = 1$.

Pravidlem půjde o **průhyb vrcholu** c oblouku, pro nějž vypočteme **příčinkovou čáru** jakožto ohybovou čáru oblouku, je-li zatížen svislým břemenem $P = 1$ v bodě c. Tato poloha břemene vyvodí podle vzorců (241), (242), do nichž dosadíme $\beta = 0$, vodorovnou sílu

$$H = \frac{P \sin\alpha\,(2 - 2\cos\alpha - \alpha\sin\alpha)}{2\,[\alpha\,(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - 2\sin^2\alpha]};$$

ze vzorců (243^a), (244^a) vyjdou momenty

$$M_I = M_{II} = -\frac{Pr}{2} \cdot \frac{\alpha\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{\alpha}.$$

V obecném bodě střednice jest ohybový moment

$$M = \mathfrak{M} + \frac{M_I\,x' + M_{II}\,x}{l} - Hz.$$

Do tohoto vzorce dosadíme

$$x = r\,(\sin\alpha - \sin\varphi),\quad z = r\left(\cos\varphi - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$$

a pro bod na levé polovici střednice

$$\mathfrak{M} = \frac{x}{2} = \frac{r}{2}\,(\sin\alpha - \sin\varphi).$$

Poněvadž jest $M_I = M_{II}$, vyjde

$$M = \mathfrak{M} + M_I - Hz = \frac{r}{2}\,(\sin\alpha - \sin\varphi) + M_I - Hr\left(\cos\varphi - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right).$$

Nedbejme účinku normálné síly předpokládajíce, že jde o oblouk vyšší; pak jest ohybová čára výslednicovou čarou ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plocha má podle vzorce (75^a), klademe-li pro početní řešení $e = F = 1$, pořadnice

$$\eta' = \frac{M}{EJ\cos\varphi} = \frac{1}{EJ\cos\varphi}\left[\frac{r}{2}\,(\sin\alpha - \sin\varphi) + M_I - Hr\left(\cos\varphi - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\right] =$$

$$= \frac{r}{2\,EJ\,\alpha\cos\varphi}\,[1 - \cos\alpha - \alpha\sin\varphi - 2H\,(\alpha\cos\varphi - \sin\alpha)].$$

V podporách prostého nosníku vyvodí tato spojitá soustava silová, jež je souměrná ke svislici středu c, svislé reakce

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 = \int_0^c \eta'\,dx;$$

v obecném bodě p je pořadnice momentová rovna ohybové pořadnici

$$\eta_c = \mathfrak{A}_0\,p - \int_0^p \eta'\,(p - x)\,dx.$$

V souřadnicích polárných vyjádříme

$$p = r\,(\sin\alpha - \sin\beta),\quad \mathrm{d}x = -r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi,\quad p - x = r\,(\sin\varphi - \sin\beta)$$

a vypočteme pak

$$\mathfrak{A}_0 = \int_0^c \mathfrak{y}'\,\mathrm{d}x = \frac{r^2}{2EJ\alpha}\,[(1 - \cos\alpha + 2H\sin\alpha)\int_0^x \mathrm{d}\varphi - \alpha\int_0^x \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi - 2H\alpha\int_0^x \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi] = 0,$$

$$\eta_c = \mathfrak{A}_0\,p - \int_0^p \mathfrak{y}'\,(p - x)\,\mathrm{d}x = -\frac{r^3}{2EJ\alpha}\,[(1 - \cos\alpha + 2H\sin\alpha)\int_\beta^x (\sin\varphi - \sin\beta)\,\mathrm{d}\varphi -$$

$$- \alpha\int_\beta^x (\sin\varphi - \sin\beta)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi - 2H\alpha\int_\beta^x (\sin\varphi - \sin\beta)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi];$$

zde se vyskytnou integrály

$$\int_\beta^x \mathrm{d}\varphi = \alpha - \beta,\quad \int_\beta^x \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \cos\beta - \cos\alpha,\quad \int_\beta^\alpha \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \sin\alpha - \sin\beta,$$

$$\int_\beta^x \sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \tfrac{1}{2}(\sin^2\alpha - \sin^2\beta),\quad \int_\beta^x \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \tfrac{1}{2}\,(\alpha - \beta - \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta),$$

jejichž dosazením a úpravou určíme

$$\eta_c = \frac{r^3}{4EJ\alpha}\Big[\alpha\,(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - \beta - \sin\beta\cos\beta) + 2\,(1 - \cos\alpha)\,(\alpha\sin\alpha +$$

$$+ \cos\alpha - \beta\sin\beta - \cos\beta) - 2\alpha\,(\sin\alpha - \sin\beta) - 2H\frac{n}{r}\Big], \qquad (261)$$

je-li n dáno vzorcem (242^a). Tím jsme stanovili počtem příčinkovou pořadnici η_c v bodě p daném úhlem β (viz obr. 105) na levé polovici oblouku; v bodě souměrném k bodu p na pravé polovici oblouku dostaneme touž pořadnici η_c.

Graficky bychom řešili, jak bylo vyloženo u obecného oblouku vyššího. Ohybová čára oblouku by byla výslednicovou čarou ke spojité soustavě silové, kterou nahrazujeme břemeny $\mathfrak{P}$ danými vzorcem (197^a). Postup řešení by byl v podstatě týž jako u obecného oblouku vyššího, místo $J\cos\varphi$ bylo by však J stálé, kdyby šlo o oblouk stálého průřezu.

Vyšetřme ještě přetvoření změnou teploty, jež vyvodí pouze vodorovnou sílu podle vzorce (241^a)

$$H = \frac{4EJ\delta\varepsilon}{n_0 r}\,\alpha\sin\alpha.$$

Síla H působí v ose X a vyvodí v obecném bodě střednice ohybový moment

$$M = -Hz.$$

Při vyšším oblouku nemusíme dbáti normálné síly. Hledíme-li zatím jen k ohybovému momentu, jest ohybová čára výslednicovou čarou ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plocha má pořadnice

$$\mathfrak{y}' = \frac{M}{EJ\cos\varphi}.$$

Poněvadž je moment M vyvozen pouze vodorovnou silou H, plyne účinek jeho na ohybovou čáru z rovnice (261), vynecháme-li členy, jež neobsahují H; vyjde tedy

$$\eta_t' = -\frac{Hnr^2}{2EJ\alpha} = -2\delta\varepsilon\frac{n}{n_0}r\sin\alpha.$$

Změna teploty má ještě přímý vliv na určovací plochu, přičiňujíc k její pořadnici hodnotou

$$\mathfrak{y}'' = \delta\varepsilon \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\mathrm{d}x}.$$

Dosadíme-li

$$x = r\,(\sin\alpha - \sin\varphi),\quad \mathrm{d}x = -r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi,\quad \mathrm{d}\,\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi},$$

obdržíme

$$\mathfrak{y}'' = -\frac{\delta\varepsilon}{r\cos^3\varphi}$$

jako při kruhovém oblouku o dvou kloubech. Výslednicová čára ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plocha je dána pořadnicemi $\mathfrak{y}''$, má v obecném bodě p daném úhlem β pořadnici

$$\eta_t'' = -\delta\varepsilon r\,(\cos\beta - \cos\alpha),$$

jak jsme již vyšetřili u kruhového oblouku o dvou kloubech rovnicí (128^b).

Celkem plyne ze změny teploty v obecném bodě p oblouku ohybová pořadnice

$$\eta_t = \eta_t' + \eta_t'' = -\delta\varepsilon r\left(2\frac{n}{n_0}\sin\alpha + \cos\beta - \cos\alpha\right). \tag{262}$$

Číselný příklad řešení kruhového oblouku je dále u kleneb (příklad 14, str. 309).

33. Nízký oblouk parabolický. *α) Břímě svislé.* U nízkého oblouku třeba dbáti aspoň přibližně účinku normálné síly. Řešení založíme na přetvárných výminkách (170^{a,b,c}), jež jsme si odvodili pro oblouk bez kloubů jakéhokoli tvaru.

Budeme pokládati $J\cos\varphi = J_0$ za stálé. Pak lze nahraditi $\frac{\mathrm{d}s}{J} = \frac{\mathrm{d}x}{J_0}$ a násobiti ve všech rovnicích stálou hodnotou EJ_0; dospějeme tak k rovnicím

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^l M x'\,\mathrm{d}x + \int_0^l (N i_0^2 + EJ_0\delta\varepsilon)\,\mathrm{d}z = EJ_0\,(\Delta h_b - l\cdot\Delta\varphi_a),\\
&\int_0^l M x\,\mathrm{d}x - \int_0^l (N i_0^2 + EJ_0\delta\varepsilon)\,\mathrm{d}z = EJ_0\,(l\cdot\Delta\varphi_b - \Delta h_b),\\
&\int_0^l M z\,\mathrm{d}x + \int_0^l (N i_0^2 + EJ_0\delta\varepsilon)\,\mathrm{d}x = EJ_0\,(\Delta l + e\cdot\Delta\gamma),
\end{aligned}\right\} \tag{263^a}$$

v nichž znamená $i_0^2 = \frac{J_0}{U}$. Dosadíme-li jako u nízkého oblouku o dvou kloubech

$$N = -H\cos\varphi - V\sin\varphi \doteq -H,$$

dostaneme rovnice

$$\begin{aligned}
&\int_0^l M x'\,\mathrm{d}x + (-H i_0^2 + EJ_0\delta\varepsilon)\int_{-e}^{-e}\mathrm{d}z = EJ_0\,(\Delta h_b - l\cdot\Delta\varphi_a),\\
&\int_0^l M x\,\mathrm{d}x - (-H i_0^2 + EJ_0\delta\varepsilon)\int_{-e}^{-e}\mathrm{d}z = EJ_0\,(l\cdot\Delta\varphi_b - \Delta h_b),\\
&\int_0^l M z\,\mathrm{d}x + (-H i_0^2 + EJ_0\delta\varepsilon)\int_0^l\mathrm{d}x = EJ_0\,(\Delta l + e\cdot\Delta\gamma).
\end{aligned}$$

V mezích celého oblouku vyjde

$$\int_{-e}^{-e} dz = 0, \quad \int_0^l dx = l,$$

i plynou z předchozích výminek přetvárných rovnice

$$\left.\begin{aligned} \int_0^l M x' \, dx &= EJ_0 (\Delta h_b - l \cdot \Delta \varphi_a), \\ \int_0^l M x \, dx &= EJ_0 (l \cdot \Delta \varphi_b - \Delta h_b), \\ \int_0^l M z \, dx - H i_0^2 l &= EJ_0 (\Delta l + e \cdot \Delta \gamma - \delta \varepsilon l). \end{aligned}\right\} \qquad (263^b)$$

Pro jakékoli zatížení svislé je moment dán jako u obecného oblouku vyššího vzorcem (172)

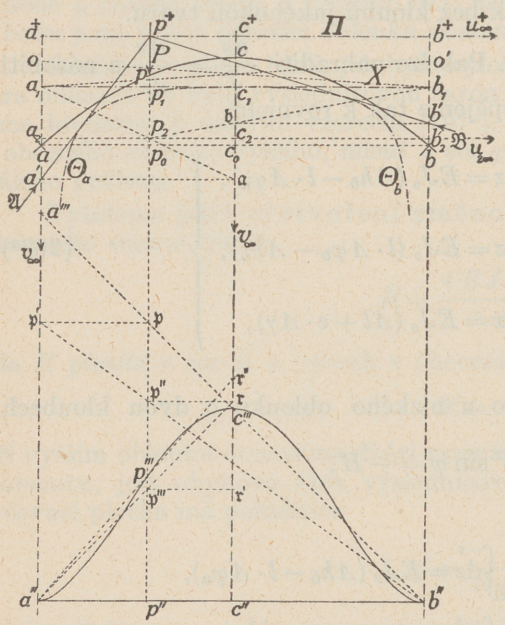
$$M = \mathfrak{M} + \frac{M_I x' + M_{II} x}{l} - H z;$$

dosazením této hodnoty do přetvárných výminek (263^b) obdržíme rovnice

$$\int_0^l \mathfrak{M} x' \, dx + \frac{M_I}{l} \int_0^l x'^2 \, dx + \frac{M_{II}}{l} \int_0^l x x' \, dx - H \int_0^l x' z \, dx = EJ_0 (\Delta h_b - l \cdot \Delta \varphi_a),$$

$$\int_0^l \mathfrak{M} x \, dx + \frac{M_I}{l} \int_0^l x x' \, dx + \frac{M_{II}}{l} \int_0^l x^2 \, dx - H \int_0^l x z \, dx = EJ_0 (l \cdot \Delta \varphi_b - \Delta h_b),$$

$$\int_0^l \mathfrak{M} z \, dx + \frac{M_I}{l} \int_0^l x' z \, dx + \frac{M_{II}}{l} \int_0^l x z \, dx - H \left(\int_0^l z^2 \, dx + i_0^2 l \right) = EJ_0 (\Delta l + e \cdot \Delta \gamma - \delta \varepsilon l).$$



Obr. 109.

Zvolíme osu X jako u obecného oblouku vyššího v odst. 33 α) tak, aby bylo vyhověno výmince (173)

$$\int_0^l z \, dx = 0,$$

již lze psáti též ve způsobě rovnice (173^a)

$$\text{ús. } a\,p\,c\,b = \text{obd. } a\,a_1\,b_1\,b\,.$$

Je-li střednice parabolická (obr. 109), plyne z toho patrně výška

$$\overline{a\,a_1} = \overline{b\,b_1} = e = \tfrac{2}{3} h\,, \qquad (264)$$

znamená-li $h = \overline{c_0\,c}$ výšku oblouku; osa X je tím stanovena. Za této polohy osy X je také podle rovnice (173^b)

$$\int_0^l x z \, dx = \int_0^l x' z \, dx = 0\,,$$

Pak mají prvé dvě výminky přetvárné týž tvar jako u obecného oblouku vyššího v odst. 33 α) prvé dvě z rovnic (176) a dají řešením hodnoty určené již vzorci (177).

Hledíme-li pouze k zatížení, vychází pro libovolné zatížení svislé jako u obecného oblouku vyššího, že se určí momenty M_I, M_{II} jako podporové momenty pří-

meho nosníku stálého průřezu, jenž je na obou koncích vetknut a má totéž zatížení jako oblouk. Také svislé reakce A, B se stanoví jako reakce tohoto přímého nosníku vetknutého a momenty

$$M_0 = \mathfrak{M} + \frac{M_I x' + M_{II} x}{l}$$

se rovnají mezipodporovým momentům téhož přímého nosníku vetknutého. Podle toho sestrojíme příčinkové čáry momentů M_I, M_{II}, M_0 a reakcí A, B jako u obecného oblouku vyššího (viz obr. 96).

V třetí výminci přetvárné vypočteme $\int_0^l z^2 \, \mathrm{d}x$ jakožto dvojnásobný statický moment k ose X obrazce omezeného střednicí, osou X a svislicemi bodů a, b. Tento obrazec se rovná rozdílu parabolické úseče $a\,p\,c\,b$, jež má těžiště ve vzdálenosti $\frac{2}{5}h$ od bodu c_0, a obdélníka $a\,a_1\,b_1\,b$, jehož těžiště jest uprostřed výšky $\overline{c_0\,c_1} = \frac{2}{3}h$. Parabolická úseč i obdélník $a\,a_1\,b_1\,b$ mají týž obsah $\frac{2}{3}h\,l$, i jest

$$\int_0^l z^2 \, \mathrm{d}x = 2 \cdot \tfrac{2}{3} h\,l \left[\tfrac{1}{3}h - (\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{5})\,h\right] = \tfrac{4}{45} h^2 l.$$

Třetí výminku přetvárnou lze tedy psáti

$$II\,(\tfrac{4}{45} h^2 l + i_0^2 l) = \int_0^l \mathfrak{M}\, z \, \mathrm{d}x - E J_0 (\Delta l + e \cdot \Delta\gamma - \delta\varepsilon l). \tag{265}$$

Jediné osamělé břímě svislé P v poloze p ($\overline{a\,p_0} = p$, $\overline{p_0\,b} = p'$) působící vyvodí moment

$$\mathfrak{M} = P\frac{p'}{l}x - P(x - p);$$

druhý člen platí jen pro průřezy vpravo od břemene. Pak jest

$$\int_0^l \mathfrak{M}\, z \, \mathrm{d}x = P\frac{p'}{l}\int_0^l x\, z \, \mathrm{d}x - P\int_p^l (x-p)\, z \, \mathrm{d}x = -P\int_p^l (x-p)\, z \, \mathrm{d}x,$$

jelikož jest $\int_0^l x\, z \, \mathrm{d}x = 0$. Nahradíme-li

$$z = z' - e,$$

kde z' je pořadnice parabolické střednice od tětivy $a\,b$ měřená, vyjde

$$\int_p^l (x-p)\, z \, \mathrm{d}x = \int_p^l (x-p)\, z' \, \mathrm{d}x - e\int_p^l (x-p)\, \mathrm{d}x.$$

Člen $\int_p^l (x-p)\, z' \, \mathrm{d}x$ vyčíslili jsme z rovnice paraboly u nízkého parabolického oblouku o dvou kloubech, kde vyšlo

$$\int_p^l (x-p)\, z' \, \mathrm{d}x = \frac{h}{3\,l^2}\, p'^2 (l^2 - p^2).$$

Dále vypočteme

$$\int_p^l (x-p) \, \mathrm{d}x = -\int_{p'}^0 (p' - x') \, \mathrm{d}x' = \int_0^{p'} (p' - x') \, \mathrm{d}x' = \tfrac{1}{2} p'^2$$

a dosadíme $e = \frac{2}{3}h$. Celkem tedy jest

$$\int_0^l \mathfrak{M}\, z \, \mathrm{d}x = -\frac{P\,h}{3\,l^2}\, p'^2 (l^2 - p^2) + \frac{P\,h}{3}\, p'^2 = \frac{P\,h\,p^2\,p'^2}{3\,l^2}.$$

AKADEMICKÁ KNIHOVNA SSM dáruota V PRAZE

Dosazením do rovnice (265) dostaneme rovnici

$$H \cdot \frac{4}{45} h^2 l \left(1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{i_0^2}{h^2}\right) = \frac{P h p^2 p'^2}{3 l^2} - E J_0 (\Delta l + e \cdot \Delta \gamma - \delta \varepsilon l).$$

Položme

$$1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{i_0^2}{h^2} = \alpha \tag{266}$$

a dosaďme $e = \frac{2}{3} h$; z poslední rovnice pak vypočteme vodorovnou sílu

$$H = \frac{15}{4} \cdot \frac{P p^2 p'^2}{\alpha h l^3} + \frac{45}{4} \cdot \frac{E J_0 \delta \varepsilon}{\alpha h^2} - \frac{15}{4} \cdot \frac{E J_0}{\alpha h l} \left(3 \frac{\Delta l}{h} + 2 \Delta \gamma\right). \tag{267}$$

Změna teploty samotná vyvodí pouze vodorovnou sílu

$$H = \frac{45}{4} \cdot \frac{E J_0 \delta \varepsilon}{\alpha h^2}, \tag{267a}$$

jež působí v ose X.

Samotné břímě P dá vodorovnou sílu

$$H = \frac{15}{4} \cdot \frac{P p^2 p'^2}{\alpha h l^3}. \tag{267b}$$

Poslední vzorec lze psáti jako u obecného oblouku vyššího ve způsobu vzorce (186)

$$H = P \frac{n}{n_0},$$

klademe-li na př.

$$n = 8 \frac{p^2 p'^2}{l^3}, \quad n_0 = \frac{32}{15} \alpha h. \tag{268}$$

Pořadnice n určují příčinkovou čáru H. Sestrojíme ji, přeneseme-li (obr. 109) $\overline{a'' a'''} = l$, určíme spojnicí $a''' b''$ v paprsku P pořadnici $\overline{p'' \mathfrak{p}} = p'$, vedeme $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}' \parallel a'' b''$ a stanovíme spojnicí $\mathfrak{p}' b''$ v paprsku P pořadnici

$$\overline{p'' \mathfrak{p}''} = \overline{a'' \mathfrak{p}'} \cdot \frac{\overline{p'' b''}}{\overline{a'' b''}} = \frac{p'^2}{l}.$$

Dále vedeme $\mathfrak{p}'' \mathfrak{r} \parallel a'' b''$ a spojíme bod a'' s bodem $\mathfrak{r}$; na paprsku P obdržíme pořadnici

$$\overline{p'' \mathfrak{p}'''} = \overline{c'' \mathfrak{r}} \cdot \frac{\overline{a'' p''}}{\overline{a'' c''}} = \frac{p'^2}{l} \cdot \frac{2p}{l},$$

kterou přeneseme přímkou $\mathfrak{p}''' \mathfrak{r}' \parallel a'' b''$ na svislici bodu c, sestrojíme $\overline{c'' \mathfrak{r}'} = \overline{\mathfrak{r}' \mathfrak{r}''}$ a spojnice $a'' \mathfrak{r}''$ dá konečně pořadnici

$$\overline{p'' p'''} = \overline{c'' \mathfrak{r}''} \cdot \frac{\overline{a'' p''}}{\overline{a'' c''}} = 2 \frac{p'^2}{l} \cdot \frac{4 p^2}{l^2} = n.$$

Takto sestrojíme z jednotlivých bodů příčinkovou čáru H, jež je parabolou čtvrtého stupně; dotýká se v bodech a'', b'' osy, jde bodem c''', v němž má tečnu vodorovnou, a je souměrná ke svislici bodu c. Má dva body obratové, jež jsou na svislicích průsečíků osy X se střednicí jako u obecného oblouku vyššího; příčinkovou čáru H mohli bychom sestrojiti též podobně jako u oblouku vyššího.

Příčinkové čáry momentů, sil posouvajících i sil normálných sestrojíme jako u obecného oblouku vyššího. Pro moment k libovolnému bodu m platí, jde-li o zatížení břemenem P_0, vzorec (184c)

$$M = f \eta_m,$$

kde je podle vzorce (188)

$$\eta_m = m_0 - n\frac{P_0}{f}\frac{z}{n_0}.$$

Pořadnice

$$n' = n\frac{P_0}{f}\frac{z}{n_0}$$

určíme redukcí pořadnic n v témž poměru. Tu lze na př. sestrojiti

$$f\frac{n_0}{P_0} = f'$$

a redukci podle vzorce

$$n' = n\frac{z}{f'}$$

provésti graficky na př. redukčním úhlem. Podobně bychom redukovali pořadnice n na pořadnice

$$n'' = n\frac{P_0 \operatorname{tg}\varphi}{n_0},$$

jde-li o příčinkovou čáru síly posouvající, i na pořadnice

$$n''' = n\frac{P_0 \operatorname{cotg}\varphi}{n_0},$$

jež se vyskytují v příčinkovém obrazci síly normálné.

V tomto případě lze snadno sestrojiti sečnici i obě tečnice. Sečnice má obecnou rovnici (166)

$$\eta = \frac{M_a + A\,p}{H},$$

měříme-li pořadnici η od přímky $a\,b$. Podle vzorce (167^a) jest

$$M_a = M_1 + H\,e.$$

Pro jediné svislé břímě P je podle vzorce (183), který platí i pro tento případ,

$$M_1 = -\frac{P\,p\,p'^2}{l^2};$$

podle vzorce (187) jest

$$A = \frac{P\,p'^2}{l^3}(l + 2p)$$

a podle vzorce (267^b)

$$H = \frac{15}{4}\cdot\frac{P\,p^2\,p'^2}{\alpha\,h\,l^3}.$$

Mimo to jest $e = \frac{2}{3}h$ i vyjde

$$M_a = M_1 + H\,e = -P\,p\,p'^2\frac{2\,\alpha\,l - 5\,p}{2\,\alpha\,l^3}; \tag{269}$$

dosazením stanovených hodnot určíme

$$\eta = \tfrac{2}{15}(4\,\alpha + 5)\,h. \tag{270}$$

Pořadnice η je stálá, je tedy sečnicí přímka $a^+\,b^+ \parallel a\,b$; její vzdálenost od přímky $a_1\,b_1 \equiv X$ jest

$$\overline{a_1\,a^+} = \overline{b_1\,b^+} = \eta - \tfrac{2}{3}h = \tfrac{8}{15}\alpha\,h.$$

Paprsky reakcí $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jdou průsečíkem p^+ sečnice s paprskem P, i stačí pro každý paprsek ještě jeden bod. Levá reakce má k bodu a_1 moment

$$M_I = H \cdot \overline{a_1 a'},$$

z něhož plyne dosazením stanovených hodnot

$$\overline{a_1 a'} = \frac{M_I}{H} = -\frac{4\alpha}{15} \cdot \frac{hl}{p} = -\frac{8}{15} \alpha h \cdot \frac{c}{p}, \qquad (271^a)$$

znamenáme-li $\frac{1}{2} l = c$. Přenesme $\overline{a_1 a_2} = \overline{b_1 b_2} = -\frac{8}{15} \alpha h$ a promítněme bod p z bodu a_1 na střední svislici do bodu $\mathfrak{a}$; pak jest

$$\overline{c_1 \mathfrak{a}} = \overline{p_1 p_2} \cdot \frac{\overline{a_1 c_1}}{\overline{a_1 p_1}} = -\frac{8}{15} \alpha h \cdot \frac{c}{p} = \overline{a_1 a'}.$$

Obdobně platí

$$\overline{b_1 b'} = -\frac{8}{15} \alpha h \cdot \frac{c}{p'}; \qquad (271^b)$$

bod b' sestrojíme, promítneme-li bod p_2 z bodu b_1 na střední svislici do bodu $\mathfrak{b}$ a vedeme-li $\mathfrak{b} b' \parallel a b$. Tak určíme ke každé poloze břemene P paprsky reakcí $\mathfrak{A} \equiv a' p^+$, $\mathfrak{B} \equiv b' p^+$.

Bodová řada $(a^+ p^+ c^+ b^+ u_\infty^+)$ je shodná s řadou $(a_2 p_2 c_2 b_2 u_{2\infty})$. Poslední řadu promítáme z bodu a_1 na svislici bodu c a dostáváme řadu $(v_\infty \mathfrak{a} c_2 \ldots)$, jejímž vodorovným promítnutím na svislici bodu a vyjde řada $(v_\infty a' a_2 \ldots)$; obě tyto řady jsou projektivní s předchozími řadami, tedy také $(a^+ p^+ c^+ \ldots) \barwedge (v_\infty a' a_2 \ldots)$. Spojnice sdružených bodů $a^+ v_\infty$, $p^+ a'$, $c^+ a_2 \ldots$ dvou projektivních řad na různoběžkách jsou tečnami kuželosečky. Bodu u_∞^+ odpovídá bod $u_{2\infty}$, tomu pak v řadě $(v_\infty \mathfrak{a} c_2 \ldots)$ bod c_1 a na levé opěrové svislici bod a_1; je tedy $a_1 u_\infty \equiv a_1 b_1$ tečnou k levé tečnici. Tečnice Θ_a se musí dotýkati os obou řad $(a^+ p^+ c^+ \ldots)$, $(v_\infty a' a_2 \ldots)$, tedy svislice $a^+ a'$ a vodorovnice $a^+ b^+$ jsou také tečnami k levé tečnici. Dotyčný bod na svislici $a^+ a'$ je bod sdružený v řadě $(a' a_2 \ldots)$ k bodu a^+, tedy je to bod v_∞, čili levá opěrová svislice je asymptotou levé tečnice, která je proto hyperbolou. Dotyčný bod na vodorovnici $a^+ b^+$ je bod d^+ řady $(a^+ p^+ c^+ \ldots)$ příslušný bodu a^+, čítáme-li a^+ ke svislé řadě $(a' a_2 \ldots)$; bod d^+ bychom dostali, kdybychom promítli a^+ vodorovně do c^+, bod c^+ z bodu a_1 na vodorovnici $a_2 b_2$ a průsečík svisle na $a^+ b^+$. Vyšel by tak bod ve vzdálenosti $\overline{d^\top a^+} = \overline{a^\top c^+}$. Poněvadž jsou tečny $a^+ b^+$ a $a_1 b_1$ rovnoběžné, je na asymptotě $a_1 a'$ střed hyperboly o uprostřed mezi nimi: $\overline{a_1 o} = \overline{o a^\top}$. Dotyčný bod na tečně $a_1 b_1$ je pak bod c_1, poněvadž dotyčné body d^+, c_1 na rovnoběžných tečnách musí býti na přímce jdoucí středem hyperboly o. Jelikož $\overline{a_1 c_1} = \overline{c_1 b_1}$ a bod a_1 je na asymptotě, musí být i bod b_1 na asymptotě, tedy druhá asymptota levé tečnice Θ_a je $o b_1$. Pravá tečnice Θ_b má obdobně střed v bodě o' půlícím úsek $\overline{b_1 b^\top}$ a asymptoty $o' b_1$, $o' a_1$. K sestrojení obou tečnic stačí asymptoty a bod c_1, společný oběma tečnicím.

V součiniteli α daném vzorcem (266) pochází druhý člen z účinku normálné síly. Předpokládáme-li, že je v praktických případech[1]) $\frac{i_0^2}{l^2} \leqq 0{,}0003$, vyjde pro

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{15}$$

hodnota

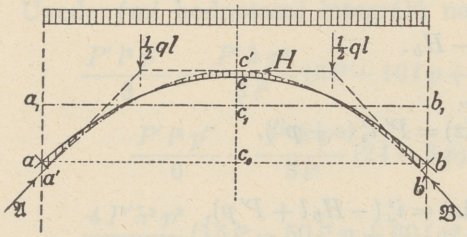
$$\alpha - 1 \leqq 0{,}066, \quad 0{,}098, \quad 0{,}136, \quad 0{,}232, \quad 0{,}354, \quad 0{,}777.$$

[1]) Viz *Jos. Šolín* „Theorie plnostěnných nosníků obloukových“, str. 121.

Čím jest oblouk nižší, tím větší účinek má síla normálná, u nízkého oblouku je tedy třeba hleděti k účinku síly normálné.

*β) **Svislé zatížení rovnoměrné*** po celém oblouku souměrném (obr. 110) vyvodí souměrné reakce opěrové, jež mají svislé složky

$$A = B = \tfrac{1}{2} q l.$$



Obr. 110.

Vodorovnou sílu určíme ze vzorce (267^b), nahradíme-li břímě P elementárním břemenem $q\,dp$ a integrujeme-li v mezích oblouku; vypočteme tak

$$H = \frac{15q}{4\alpha h l^3}\int_0^l p^2 p'^2\,dp = \frac{q l^2}{8\alpha h}. \qquad (272)$$

Stejně určíme ze vzorce (183) moment

$$M_I = -\frac{q}{l^2}\int_0^l p\,p'^2\,dp = -\frac{q l^2}{12}; \qquad (273)$$

touž hodnotu má moment v podpoře nosníku na obou koncích vetknutého. Jelikož znamená M_I moment levé reakce k bodu a_1, platí

$$M_I = H \cdot \overline{a_1 a'};$$

z toho plyne

$$\overline{a_1 a'} = \frac{M_I}{H} = -\frac{2}{3}\alpha h. \qquad (274^a)$$

Ze souměrnosti plyne $\overline{a_1 a'} = \overline{b_1 b'}$.

Vnější síly po levé straně vrcholového průřezu c skládají se ve výslednici R_c, jež má vodorovnou složku $H_c = H$ a svislou složku $V_c = A - \frac{1}{2} q l = 0$; je tedy výslednicí vnějších sil po jedné straně průřezu c pouhá vodorovná síla, jež působí v bodě c'. Nahradíme-li silou H v bodě c' odňatou pravou stranu, je tato síla v rovnováze s výslednicí $\frac{1}{2} q l$ zatížení levé polovice oblouku a s reakcí $\mathfrak{A}$, jejíž paprsek jde bodem a'. Momentová výminka rovnováhy k bodu a_1, k němuž má reakce $\mathfrak{A}$ moment M_I, jest

$$M_I + \frac{q l}{2}\cdot\frac{l}{4} - H \cdot \overline{c_1 c'} = 0;$$

plyne z ní

$$\overline{c_1 c'} = \frac{M_I + \frac{1}{8} q l^2}{H} = \left(\frac{1}{8} q l^2 - \frac{1}{12} q l^2\right)\frac{8\alpha h}{q l^2} = \frac{1}{3}\alpha h. \qquad (274^b)$$

Body a', c', b' je dána výslednicová parabola k zatížení rovnoměrnému, jejímiž krajními tečnami jsou paprsky reakcí $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; mezi střednicí a parabolou $a'\,c'\,b'$ jest obrazec momentů ohybových. Kdybychom nedbali účinku normálné síly, jenž se jeví zkrácením střednice, bylo by $\alpha \doteq 1$ a $\overline{a_1 a'} = \overline{b_1 b'} \doteq -\frac{2}{3} h$, $\overline{c_1 c'} \doteq \frac{1}{3} h$; body a', c', b' ztotožnily by se pak s body a, c, b a parabola výslednicová by splynula se střednicí. Pak by byl oblouk ve všech průřezech prostě tlačen. Ovšem lze nedbati normálné síly pouze u oblouku vyššího; čím jest oblouk nižší, tím jest α větší a tím více se tedy odchyluje výslednicová čára od střednice.

*γ) **Břímě vodorovné*** P' řešíme z přetvárných výminek (263^a), v nichž vynecháme popuštění opěr i změnu teploty, jež jsme již vyřídili; vyjdou tak rovnice

$$\int_0^l M x'\,dx + i_0^2\int_0^l N\,dz = 0, \qquad \int_0^l M x\,dx - i_0^2\int_0^l N\,dz = 0, \qquad \int_0^l M z\,dx + i_0^2\int_0^l N\,dx = 0.$$

K hodnotám, jež jsme měli u obecného oblouku vyššího, zatíženého vodorovným břemenem P', přistupuje zde účinek síly normálné, jejž vyšetříme přibližně zvláště. Jako při svislém břemeni nahradíme normálnou sílu N přibližně vodorovnou složkou se záporným znaménkem; dosadíme tedy vpravo od břemene

$$N \doteq -H_b$$

a vlevo od břemene

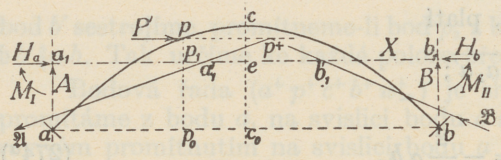
$$N \doteq -H_a = P' - H_b .$$

Tak určíme

$$i_0^2 \int_0^l N\,dz \doteq i_0^2 \left(-H_b \int_{-e}^{-e} dz + P' \int_{-e}^{p''} dz \right) = P'\, i_0^2 (e + p''),$$

$$i_0^2 \int_0^l N\,dx \doteq i_0^2 \left(-H_b \int_0^l dx + P' \int_0^p dx \right) = i_0^2 (-H_b\, l + P'\, p),$$

znamenáme-li $\overline{a\,p_0} = p$, $\overline{p_0\,b} = p'$, $\overline{p_1\,p} = p''$ (obr. 111). K hodnotám na levé straně rovnic (217^a), jež jsme dostali u vyššího oblouku s vodorovným břemenem, připočteme účinek normálné síly podle posledních vzorců; předpokládáme-li osu X ve výši $e = \frac{2}{3} h$, jest



Obr. 111.

$$\int_0^l x\,z\,dx = \int_0^l x'\,z\,dx = 0$$

a přetvárné výminky nabudou tvaru

$$P' \frac{p''}{l} \int_0^l x'^2\,dx - P' \int_0^p (p'' - z)\,x'\,dx + \frac{M_I}{l} \int_0^l x'^2\,dx + \frac{M_{II}}{l} \int_0^l x\,x'\,dx + P'\, i_0^2 (e + p'') = 0,$$

$$P' \frac{p''}{l} \int_0^l x\,x'\,dx - P' \int_0^p (p'' - z)\,x\,dx + \frac{M_I}{l} \int_0^l x\,x'\,dx + \frac{M_{II}}{l} \int_0^l x^2\,dx - P'\, i_0^2 (e + p'') = 0,$$

$$-P' \int_0^p (p'' - z)\,z\,dx - H_b \int_0^l z^2\,dx + i_0^2 (-H_b\, l + P'\, p) = 0.$$

Určili jsme již

$$\int_0^l x^2\,dx = \int_0^l x'^2\,dx = \tfrac{1}{3} l^3, \qquad \int_0^l x\,x'\,dx = \tfrac{1}{6} l^3, \qquad \int_0^l z^2\,dx = \tfrac{4}{45} h^2\, l.$$

Dále jest

$$e + z = \frac{4h}{l^2}\, x\,x' \tag{275}$$

jakožto pořadnice paraboly $a\,c\,b$ nad tětivou $a\,b$, jak jsme určili rovnicí (131) u nízkého oblouku parabolického o dvou kloubech; obdobně jest

$$e + p'' = \frac{4h}{l^2}\, p\,p',$$

tedy

$$p'' - z = \frac{4h}{l^2} (p\,p' - x\,x').$$

Dosazením těchto hodnot vyčíslíme integrály

$$\int_0^p (p'' - z)\,x'\,dx = \frac{4h}{l^2} \int_0^p (p\,p' - x\,x')\,x'\,dx = \frac{h\,p^2}{3\,l^2} (6\,l^2 - 10\,l\,p + 3\,p^2),$$

$$\int_0^p (p''-z)\,x\,dx = \frac{4h}{l^2}\int_0^p (p\,p'-x\,x')\,x\,dx = \frac{h\,p^3}{3\,l^2}(2\,l-3\,p),$$

$$\int_0^p (p''-z)\,z\,dx = \frac{4h}{l^2}\int_0^p (p\,p'-x\,x')\left(\frac{4h}{l^2}\,x\,x'-e\right)dx = -\frac{4\,h^2\,p^3}{45\,l^4}(15\,l^3-50\,l^2\,p+60\,l\,p^2-24\,p^3).$$

Uvedenými hodnotami integrálů nabýváme přetvárných výminek

$$\frac{P'\,l^2\,p''}{3}-\frac{P'\,h\,p^2}{3\,l^2}(6\,l^2-10\,l\,p+3\,p^2)+\frac{M_I\,l^2}{3}+\frac{M_{II}\,l^2}{6}+P'\,i_0^2\left(\frac{2\,h}{3}+p''\right)=0,$$

$$\frac{P'\,l^2\,p''}{6}-\frac{P'\,h\,p^3}{3\,l^2}(2\,l-3\,p)+\frac{M_I\,l^2}{6}+\frac{M_{II}\,l^2}{3}-P'\,i_0^2\left(\frac{2\,h}{3}+p''\right)=0,$$

$$\frac{4\,P'\,h^2\,p^2}{45\,l^4}(15\,l^3-50\,l^2\,p+60\,l\,p^2-24\,p^3)-\frac{4}{45}H_b\,h^2\,l+i_0^2(-H_b\,l+P'\,p)=0.$$

Prvé dvě rovnice obsahují zase jen neznámé M_I, M_{II}; řešením jich dostaneme po úpravě

$$M_I=\frac{2\,P'\,h\,p'^2}{3\,l^4}(l^2-4\,l\,p+9\,p^2)-\frac{2\,P'\,i_0^2}{l^2}(2h+3\,p''), \tag{276}$$

$$M_{II}=-\frac{2\,P'\,h\,p^2}{3\,l^4}(l^2-4\,l\,p'+9\,p'^2)+\frac{2\,P'\,i_0^2}{l^2}(2h+3\,p''). \tag{277}$$

Z třetí rovnice vypočteme přímo sílu H_b. Znamenáme-li jako při svislém zatížení podle vzorce (266)

$$\alpha=1+\frac{45}{4}\frac{i_0^2}{h^2},$$

můžeme upraviti vzorec pro sílu H_b na tvar

$$H_b=P'\frac{p}{l}\left[1-\frac{p'(p'-p)(l^2-12\,p\,p')}{\alpha\,l^4}\right]. \tag{278^a}$$

Z rovnováhy vnějších sil určíme

$$H_a=H_b-P'=-P'\frac{p'}{l}\left[1+\frac{p(p'-p)(l^2-12\,p\,p')}{\alpha\,l^4}\right]. \tag{278^b}$$

Pro svislé reakce platí jako u vyššího oblouku vzorec (219), jenž dá

$$A=-B=-P'\frac{p''}{l}+\frac{M_{II}-M_I}{l}=-\frac{12\,P'\,h\,p^2\,p'^2}{l^5}+\frac{4\,P'\,i_0^2}{l^3}(2\,h+3\,p''). \tag{279}$$

Ve vzorcích pro momenty M_I, M_{II} a svislé reakce A, B můžeme nedbati členů, jež obsahují i_0, poněvadž jsou proti ostatním nepatrné; pak je přibližně

$$M_I=\frac{2\,P'\,h\,p'^2}{3\,l^4}(l^2-4\,l\,p+9\,p^2), \tag{276^a}$$

$$M_{II}=-\frac{2\,P'\,h\,p^2}{3\,l^4}(l^2-4\,l\,p'+9\,p'^2), \tag{277^a}$$

$$A=-B=-\frac{12\,P'\,h\,p^2\,p'^2}{l^5}. \tag{279^a}$$

Podle posledních vzorců bychom stanovili příčinkové čáry.

Paprsky výsledních reakcí $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou rovnoběžné s jejich úseky, jež bychom určili, kdybychom na př. vypočetli určovací úseky složek svislých podle vzorce (279^a) a složek vodorovných podle vzorců (278). Pak stačí pro paprsek $\mathfrak{A}$ na př. bod a'_1, pro paprsek $\mathfrak{B}$ bod b'_1. Z prvého vzorce (229), jejž jsme odvodili u oblouku vyššího, určíme

$$\overline{a_1 a'_1} = -\frac{M_I}{A} = \frac{l}{18} \cdot \frac{l^2 - 4\,l\,p + 9\,p^2}{p^2}$$

nebo též

$$\overline{a'_1 e} = \frac{l}{2} - \overline{a_1 a'_1} = \frac{l^2}{18} \cdot \frac{4\,p - l}{p^2}. \qquad (280^a)$$

Z druhého vzorce (229) plyne

$$\overline{b_1 b'_1} = \frac{M_{II}}{B} = -\frac{l}{18} \cdot \frac{l^2 - 4\,l\,p' + 9\,p'^2}{p'^2}$$

a z toho vypočteme

$$\overline{e\,b'_1} = \frac{l}{2} + \overline{b_1 b'_1} = \frac{l^2}{18} \cdot \frac{4\,p' - l}{p'^2}. \qquad (280^b)$$

Body a'_1, b'_1 bychom podle posledních vzorců vypočetli nebo sestrojili a vedli bychom jimi paprsky $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ rovnoběžně s úseky reakcí; paprsky $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ musí se pak protínati na paprsku P' v bodě p^+.

δ) ***Přetvoření.*** Vyšetříme příčinkovou čáru průhybu středu oblouku c jakožto ohybovou čáru oblouku, je-li zatížen svislým břemenem $P = 1$ v bodě c. Toto břímě vyvodí svislé reakce $A = B = \frac{1}{2} P$ a v libovolném bodě na levé polovici oblouku moment

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} P\,x.$$

Dosazením $p = p' = \frac{1}{2} l$ určíme ze vzorce (183) a (267^b)

$$M_I = M_{II} = -\frac{Pl}{8}, \quad H = \frac{15\,P\,l}{64\,\alpha\,h}.$$

V obecném bodě na levé polovici střednice, jenž má k osám X, Z jdoucím bodem a_1 souřadnice x, z, je moment ohybový

$$M = \mathfrak{M} + \frac{M_I\,x' + M_{II}\,x}{l} - H\,z = P\left(\frac{x}{2} - \frac{l}{8}\right) - H\,z.$$

Normálnou sílu uvažujme přibližně, kladouce $N \doteq -H$; pak je podíl

$$\frac{N}{E\,U} \doteq -\frac{H}{E\,U}$$

stálý. Nedbáme-li změny teploty, kterou vyšetříme zvláště, určíme ohybovou čáru jakožto výslednicovou čáru ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plocha má podle vzorce (75) pořadnice

$$\eta = \frac{M}{E\,J_0} - \frac{H}{E\,U} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2};$$

zde dosazujeme

$$J \cos\varphi = J_0, \quad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}.$$

pokládáme J_0, U za stálé a řešíce počtem. klademe $e = F = 1$. Z rovnice střednice odvodili bychom jako u nízkého oblouku parabolického o dvou kloubech

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{8h}{l^2}.$$

Dosadíme-li za moment, obdržíme

$$\eta = \frac{P}{8EJ_0}(4x - l) - H\left(\frac{z}{EJ_0} - \frac{8h}{EUl^2}\right).$$

Určovací plocha, daná pořadnicemi η, je souměrná ke svislici středu c, jehož úsečku znamenejme $\frac{1}{2}l = c$. Příslušná spojitá soustava silová vyvodí v podporách prostého nosníku délky l reakce

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 = \int_0^c \eta\, dx = \frac{P}{8EJ_0}\int_0^c (4x - l)\, dx - H\left(\frac{1}{EJ_0}\int_0^c z\, dx - \frac{8h}{EUl^2}\int_0^c dx\right) = \frac{4Hh}{EUl}.$$

Příčinková pořadnice η_c průhybu bodu c ve svislici bodu p se určí jako momentová pořadnice prostého nosníku v téže svislici podle vzorce

$$\eta_c = \mathfrak{A}_0 p - \int_0^p \eta\,(p - x)\, dx.$$

Určíme nejprve dosazením za η

$$\int_0^p \eta\,(p-x)\,dx = \frac{P}{8EJ_0}\int_0^p (4x-l)\,(p-x)\,dx - H\left[\frac{1}{EJ_0}\int_0^p z\,(p-x)\,dx - \frac{8h}{EUl^2}\int_0^p (p-x)\,dx\right]$$

Z rovnice střednice (275) vyjádříme

$$z = \frac{4h}{l^2}x\,(l-x) - \frac{2}{3}h$$

a provedeme integraci; dostaneme tím

$$\int_0^p \eta\,(p-x)\,dx = \frac{P}{8EJ_0}\cdot\frac{p^2}{6}(4p - 3l) - H\left[\frac{hp^2}{3EJ_0 l^2}(2lp - p^2 - l^2) - \frac{4hp^2}{EUl^2}\right].$$

Touto hodnotou a stanovenou již hodnotou reakce $\mathfrak{A}_0$ určíme

$$\eta_c = \frac{4Hh}{EUl}p - \frac{Pp^2}{48EJ_0}(4p - 3l) + \frac{H}{3EJ_0 l^2}[hp^2(2lp - p^2 - l^2) - 12hi_0^2 p^2];$$

po úpravě vyjde

$$\eta_c = \frac{Hhpp'}{3EJ_0 l^2}(12i_0^2 - pp') - \frac{Pp^2(4p - 3l)}{48EJ_0}. \qquad (281^a)$$

Hodnotou H, kterou jsme určili svrchu, nabude tento vzorec po úpravě tvaru

$$\eta_c = \frac{P}{48EJ_0}\left[p^2(3p' - p) - \frac{15pp'}{4\alpha l}(pp' - 12i_0^2)\right]; \qquad (281^b)$$

tím jest určen průhyb bodu c, vyvozený břemenem P v bodě p působícím (obr. 112). V posledním vzorci můžeme přibližně vynechati $12i_0^2$ proti pp' a dostaneme hodnotu [1])

$$\eta_c \doteq \frac{Pp^3}{48EJ_0 l}\left[l(3p' - p) - \frac{15}{4\alpha}p'^2\right]. \qquad (281^c)$$

[1]) Srovnej *Jos. Šolín* „Theorie plnostěnných nosníků obloukových", str. 178 a pojednání *V. Janáka* „O výpočtu změny výšky vrcholu nízkých kleneb segmentových" v Technickém obzoru r. 1910, str. 51 a 144.

Kdybychom nedbali účinku normálné síly, bylo by $\alpha \doteq 1$ a vyšlo by z posledního vzorce

$$\eta'_c = \frac{P p^2}{48 E J_0 l}\left[l\,(3p' - p) - \frac{15}{4} p'^2\right]. \qquad (282^a)$$

Účinek normálné síly je pak dán hodnotou

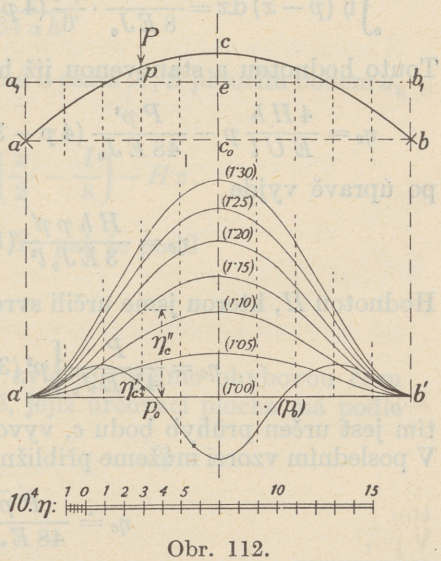
$$\eta''_c = \eta_c - \eta'_c = \frac{15 P p^2 p'^2}{192 E J_0 l} \cdot \frac{\alpha - 1}{\alpha}. \qquad (282^b)$$

Vypočteme-li pro různé hodnoty poměru $\frac{p}{l}$ pořadnice η'_c, η''_c násobené stálou hodnotou $\frac{E J_0}{P l^3}$, obdržíme výsledky sestavené v tabulce. Všechny vzorce pro η_c platí jen v mezích levé polovice oblouku, kde jsme břímě P předpokládali. Čáry pro celý nosník jsou souměrné ke svislici bodu c.

Tabulka pořadnic η'_c, η''_c.

$\frac{p}{l}$		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$10^4 \frac{E J_0}{P l^3} \eta'_c$		− 0,9115	− 1,6667	− 0,7031	+ 1,6667	+ 3,2552
$10^4 \frac{E J_0}{P l^3} \eta''_c$	$\alpha =$ 1,05	0,3013	0,9524	1,6406	2,1429	2,3251
	1,10	0,5753	1,8182	3,1321	4,0909	4,4389
	1,15	0,8254	2,6087	4,4939	5,8696	6,3689
	1,20	1,0547	3,3333	5,7422	7,5000	8,1380
	1,25	1,2656	4,0000	6,8906	9,0000	9,7656
	1,30	1,4603	4,6154	7,9507	10,3846	11,2680

Přeneseme-li pořadnice η'_c, η''_c po opačných stranách osy $a'b'$ tak, aby se hodnoty jejich s týmž znaménkem sčítaly, dostaneme mezi čarou η'_c a η''_c celkové pořadnice příčinkové $\eta_c = \eta'_c + \eta''_c$. Tak jsou vyznačeny pořadnice η'_c, η''_c v obr. 112 podle početních výsledků uvedených v tabulce; čáry η''_c sestrojeny jsou pro $\alpha = 1$ (v ose $a'b'$), 1,05, 1,10, 1,15, 1,20, 1,25, 1,30.



Obr. 112.

Příčinková čára průhybu středu má dvě obojetné polohy, jež plynou dosazením $\eta_c = 0$ a $p = p_0$ do vzorce (281^c); vychází tak rovnice

$$l\,(3p'_0 - p_0) - \frac{15}{4\alpha} p'^2_0 = 0$$

nebo

$$15\left(\frac{p'_0}{l}\right)^2 - 16\,\alpha \frac{p'_0}{l} + 4\,\alpha = 0.$$

Staticky platný kořen této rovnice musí být obsažen v mezích levé polovice oblouku. tedy v mezích $1/2 < p'_0/l < 1$, neboť rovnice (281^c) platí jen v těchto mezích. Určíme pak z poslední rovnice kořen

$$\frac{p_0'}{l} = \frac{8\alpha + \sqrt{4\alpha(16\alpha - 15)}}{15}. \tag{283}$$

Pro

$$\alpha = 1{,}00,\ 1{,}05,\ 1{,}10,\ 1{,}15,\ 1{,}20,\ 1{,}25$$

vyjde

$$\frac{p_0'}{l} = \frac{2}{3},\ 0{,}743,\ 0{,}812,\ 0{,}877,\ 0{,}939,\ 1{,}000.$$

Druhá obojetná poloha je s polohou p_0 souměrná ke svislici bodu c.

Je-li $1 < \alpha < 1{,}25$, vyjdou dvě obojetné polohy mezi body a, b. Největší průhyb se pak vyvodí plným zatížením mezi oběma obojetnými polohami a největší zvýšení zatížením částí vně obojetných poloh, jde-li o pohyblivé zatížení rovnoměrné. Skutečnou hodnotu průhybu stanovili bychom z příčinkového obrazce nebo integrací ze vzorce pro jediné břímě osamělé.

Vyjde-li však $\alpha > 1{,}25$ není mezi body a, b obojetné polohy; pak se vyvodí největší průhyb plným rovnoměrným zatížením nosníku. Hodnotu jeho určíme, nahradíme-li ve vzorci (281^c) břímě P elementárním břemenem $q\,\mathrm{d}p$, integrujeme-li v mezích levé polovice oblouku, v nichž platí jedině vzorec (281^c), a násobíme-li výsledek dvěma, neboť příčinková čára η_c je souměrná ke svislici bodu c. Obdržíme tak pro plné zatížení rovnoměrné

$$\eta_c = 2\frac{q}{48 E J_0 l_0}\int_0^c p^2\left[l(3p' - p) - \frac{15}{4\alpha}p'^2\right]\mathrm{d}p;$$

provedením integrace a úpravou určíme průhyb

$$\eta_c = \frac{q l^4}{384 E J_0}\cdot\frac{\alpha - 1}{\alpha}. \tag{284}$$

Ohybovou čáru, jež vzniká změnou teploty, řešíme podobně. Samotná změna teploty vyvodí podle vzorce (267^a) vodorovnou sílu

$$H = \frac{45}{4}\cdot\frac{E J_0 \delta\varepsilon}{\alpha h^2},$$

jež působí v ose X. Pak je v libovolném bodě střednice

$$M = -Hz,\ N = -H.$$

Ohybová čára, vyvozená změnou teploty, je výslednicovou čarou ke spojité soustavě silové, jejíž určovací plocha má pořadnice

$$\mathfrak{y} = \frac{M}{E J_0} + \left(\frac{N}{E U} + \delta\varepsilon\right)\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2},$$

jak plyne ze vzorce (75) týmž postupem jako u příčinkové čáry průhybu bodu c. Dosazením hodnot za M, N a $\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{8h}{l^2}$ určíme

$$\mathfrak{y} = -H\left(\frac{z}{E J_0} - \frac{8h}{E U l^2}\right) - \frac{8\delta\varepsilon h}{l^2}.$$

Člen s vodorovnou silou H je zde týž jako u příčinkové čáry průhybu bodu c; plyne z něho ohybová pořadnice, jež je dána ve vzorci (281^a) členem, obsahujícím H, tedy

$$\eta_t' = -\frac{H h p p'}{3 E J_0 l^2}(12 i_0^2 - p p').$$

K tomu přistupuje přímý účinek změny teploty jevící se v pořadnici určovací plochy

$$\mathfrak{y}'' = -\frac{8\,\delta\varepsilon h}{l^2};$$

tato pořadnice je stálá a má význam poměrného zatížení.[1]) Ohybovou pořadnici η_t'' určíme jako momentovou pořadnici prostého nosníku zatíženého v celé délce rovnoměrně, má-li poměrné zatížení hodnotu $\mathfrak{y}''$; je tedy v bodě p

$$\eta_t'' = \frac{1}{2}\mathfrak{y}''\,p\,p' = -\frac{4\,\delta\varepsilon h}{l^2}\,p\,p'.$$

Součtem pořadnic η_t', η_t'' stanovíme celkem

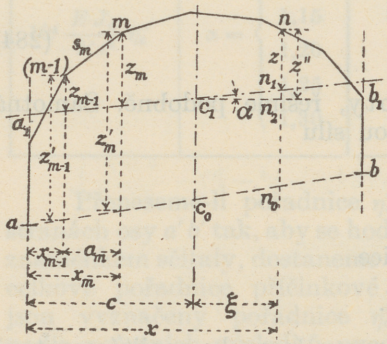
$$\eta_t = \eta_t' + \eta_t'' = -\frac{H h\,p\,p'}{3 E J_0 l^2}(12\,i_0^2 - p\,p') - \frac{4\,\delta\varepsilon h}{l^2}\,p\,p'.$$

Vynecháme-li $12\,i_0^2$ proti $p\,p'$ a dosadíme-li za H vodorovnou sílu vyvozenou změnou teploty, vyjde

$$\eta_t = -\frac{\delta\varepsilon}{l^2}\,p\,p'\left(4h + \frac{15}{4\alpha h}\,p\,p'\right). \tag{285}$$

Tato rovnice dává ohybové pořadnice ve všech bodech oblouku, jde-li o přetvoření změnou teploty.

34. Nosník lomený. *α) Obecný nosník* stálého průřezu měj za střednici lomenou čáru libovolného tvaru (obr. 113). Platí proň rovnice, které jsme odvodili pro oblouk vyšší. Jednotlivé integrály určíme nejprve pro přímý díl $\overline{(m-1)\,m} = s_m$, pro nějž platí $\mathrm{d}s = \frac{s_m}{a_m}\,\mathrm{d}x$; potom jest



Obr. 113.

$$\int_{(s_m)} x\,\mathrm{d}s = \frac{s_m}{a_m}\int_{x_{m-1}}^{x_m} x\,\mathrm{d}x = \frac{(x_m^2 - x_{m-1}^2)\,s_m}{2\,(x_m - x_{m-1})} = \frac{s_m}{2}(x_{m-1} + x_m).$$

Kratčeji určíme na př. $\int z'\,\mathrm{d}s$ jako součet statických momentů sil $\mathrm{d}s$ na ramenech z':

$$\int_{(s_m)} z'\,\mathrm{d}s = \frac{s_m}{2}(z'_{m-1} + z'_m);$$

sečtením pro celý nosník vyjde podle vzorce (201)

$$e = \frac{\int z'\,\mathrm{d}s}{\int \mathrm{d}s} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Sigma\, s_m\,(z'_{m-1} + z_m)}{\Sigma\, s_m}. \tag{286}$$

Dále je za označení podle obr. 113

$$z'' = \frac{(\xi_m - \xi)\,z''_{m-1} + (\xi - \xi_{m-1})\,z''_m}{a_m} = \frac{(z''_m - z''_{m-1})\,\xi + z''_{m-1}\,\xi_m - z''_m\,\xi_{m-1}}{a_m},$$

$$\int_{(s_m)} \xi z''\,\mathrm{d}s = \int_{\xi_{m-1}}^{\xi_m} \frac{(z''_m - z''_{m-1})\,\xi + z''_{m-1}\,\xi_m - z''_m\,\xi_{m-1}}{a_m}\cdot\frac{s_m}{a_m}\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{s_m}{a_m^2}\left[\frac{\xi_m^3 - \xi_{m-1}^3}{3}(z''_m - z''_{m-1}) + \frac{\xi_m^2 - \xi_{m-1}^2}{2}\left(z''_{m-1}\,\xi_m - z''_m\,\xi_{m-1}\right)\right] =$$

$$= \frac{s_m}{6\,a_m}\left[2\,(\xi_{m-1}^2 + \xi_{m-1}\,\xi_m + \xi_m^2)(z''_m - z''_{m-1}) + 3\,(\xi_{m-1} + \xi_m)(z''_{m-1}\,\xi_m - z''_m\,\xi_{m-1})\right],$$

$$\int_{(s_m)} \xi^2\,\mathrm{d}s = \frac{s_m}{a_m}\int_{\xi_{m-1}}^{\xi_m} \xi^2\,\mathrm{d}\xi = \frac{s_m}{\xi_m - \xi_{m-1}}\cdot\frac{\xi_m^3 - \xi_{m-1}^3}{3} = \frac{s_m}{3}(\xi_{m-1}^2 + \xi_{m-1}\,\xi_m + \xi_m^2).$$

[1]) Viz prvý díl tohoto spisu (4. vyd. 1946), str. 98.

Podle vzorce (214) vyjde

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\int \xi z''\,ds}{\int \xi^2\,ds} =$$

$$= \frac{\sum \frac{s_m}{a_m}\left[2(\xi_{m-1}^2 + \xi_{m-1}\xi_m + \xi_m^2)(z''_m - z''_{m-1}) + 3(\xi_{m-1} + \xi_m)(z''_{m-1}\xi_m - z''_m\xi_{m-1})\right]}{2\sum s_m(\xi_{m-1}^2 + \xi_{m-1}\xi_m + \xi_m^2)}. \quad (287)$$

Pro stranu s_m určíme ještě

$$\int_{(s_m)} x^2\,ds = \frac{s_m}{a_m}\int_{x_{m-1}}^{x_m} x^2\,dx = \frac{s_m}{x_m - x_{m-1}}\cdot\frac{x_m^3 - x_{m-1}^3}{3} = \frac{s_m}{3}(x_{m-1}^2 + x_{m-1}x_m + x_m^2), \quad (288^a)$$

$$\int_{(s_m)} x'^2\,ds = \frac{s_m}{a_m}\int_{x'_m}^{x'_{m-1}} x'^2\,dx' = \frac{s_m}{x'_{m-1} - x'_m}\cdot\frac{x'^3_{m-1} - x'^3_m}{3} = \frac{s_m}{3}(x'^2_{m-1} + x'_{m-1}x'_m + x'^2_m), \quad (288^b)$$

$$\int_{(s_m)} x\,x'\,ds = \frac{s_m}{a_m}\int_{x_{m-1}}^{x_m} x(l-x)\,dx = \frac{s_m}{x_m - x_{m-1}}\left[\frac{l}{2}(x_m^2 - x_{m-1}^2) - \frac{x_m^3 - x_{m-1}^3}{3}\right] =$$

$$= \frac{s_m}{6}[3l(x_{m-1} + x_m) - 2(x_{m-1}^2 + x_{m-1}x_m + x_m^2)]. \quad (288^c)$$

Pořadnice z měříme od šikmé osy $a_1 b_1$; tu jest

$$ds = \frac{s_m}{z_m - z_{m-1}}\,dz,$$

$$\int_{(s_m)} z^2\,ds = \frac{s_m}{z_m - z_{m-1}}\int_{z_{m-1}}^{z_m} z^2\,dz = \frac{s_m}{z_m - z_{m-1}}\cdot\frac{z_m^3 - z_{m-1}^3}{3} = \frac{s_m}{3}(z_{m-1}^2 + z_{m-1}z_m + z_m^2). \quad (288^d)$$

Jako u lomeného nosníku o dvou kloubech je pro nezatíženou stranu s_m podle vzorce (156^a)

$$\left.\begin{aligned} \int_{(s_m)} \mathfrak{M}\,z\,ds &= \frac{s_m}{6}[\mathfrak{M}_{m-1}(2z_{m-1} + z_m) + \mathfrak{M}_m(z_{m-1} + 2z_m)]. \\ \text{Obdobně vyjde } \int_{(s_m)} \mathfrak{M}\,x\,ds &= \frac{s_m}{6}[\mathfrak{M}_{m-1}(2x_{m-1} + x_m) + \mathfrak{M}_m(x_{m-1} + 2x_m)], \\ \int_{(s_m)} \mathfrak{M}\,x'\,ds &= \frac{s_m}{6}[\mathfrak{M}_{m-1}(2x'_{m-1} + x'_m) + \mathfrak{M}_m(x'_{m-1} + 2x'_m)]. \end{aligned}\right\} \quad (289)$$

Je-li strana s_m zatížena osamělým břemenem, je obrazec momentů $\mathfrak{M}$ složen ze dvou lichoběžníků a hodnoty předchozích integrálů určíme pak pro každý lichoběžník podle vzorců (289). Hodnoty pro celý nosník dostaneme, sčítáme-li hodnoty pro jednotlivé strany.

Jsou-li průřezy jednotlivých přímých částí různé, je třeba jen děliti každou hodnotu pro stranu s_m stálým momentem setrvačnosti J_m průřezu příslušné části. Na základě toho odvodíme řešení pro nosník,[1]) jehož střednice tvoří se spojnicí $a\,b$ obdélník (obr. 114). Svislé části $a\,d$, $e\,b$ nechť mají stálé průřezy o momentu setrvačnosti J_1, vodorovná část $d\,e$ měj rovněž stálý průřez o momentu setrvačnosti J_0. Jelikož je nosník souměrný, vyjde $\alpha = 0$, $c = \frac{1}{2}l$ a

$$e = \frac{\int \frac{z'\,ds}{J}}{\int \frac{ds}{J}} = \frac{\sum \frac{s_m}{J_m}(z'_{m-1} + z'_m)}{\sum \frac{s_m}{J_m}} = \frac{2\cdot\frac{h}{J_1}\cdot h + \frac{l}{J_0}\cdot 2h}{2\left(2\frac{h}{J_1} + \frac{l}{J_0}\right)} = \frac{h(h_0 + l)}{2h_0 + l}, \quad [(290^a)$$

[1]) Přesnější řešení je ve spisovatelově pojednání „Nosník lomený“ (Technický obzor 1916, str. 107 a d.); v něm je uvažován též účinek normálné síly a je řešeno i přetvoření.

znamenáme-li $h\frac{J_0}{J_1}=h_0$; z toho vychází

$$h-e=\frac{h\,h_0}{2\,h_0+l}. \tag{290b}$$

Přetvárné výminky jsou zde podle rovnic (199a), připojíme-li J ve jmenovateli ve všech integrálech a vynecháme-li popuštění opěr:

$$\left.\begin{aligned}\frac{M_I}{l}\int\frac{x'^2\,ds}{J}+\frac{M_{II}}{l}\int\frac{x\,x'\,ds}{J}+\int\frac{\mathfrak{M}\,x'\,ds}{J}&=0,\\ \frac{M_I}{l}\int\frac{x\,x'\,ds}{J}+\frac{M_{II}}{l}\int\frac{x^2\,ds}{J}+\int\frac{\mathfrak{M}\,x\,ds}{J}&=0,\\ H\int\frac{z^2\,ds}{J}=\int\frac{\mathfrak{M}\,z\,ds}{J}&+E\,\delta\,\varepsilon\,l.\end{aligned}\right\} \tag{291}$$

*β) **Vzorce pro svislé zatížení.*** Působí-li jediné svislé břímě P v bodě p na vodorovné části $d\,e$, je pro všechny body této části $z=h-e$ a

$$\int\frac{\mathfrak{M}\,x'\,ds}{J}=\frac{1}{J_0}\int_0^l\mathfrak{M}\,x'\,dx=$$

$$=\frac{\mathfrak{N}'}{6\,J_0},\quad \int\frac{\mathfrak{M}\,x\,ds}{J}=$$

$$=\frac{1}{J_0}\int_0^l\mathfrak{M}\,x\,dx=\frac{\mathfrak{N}}{6\,J_0},$$

$$\int\frac{\mathfrak{M}\,z\,ds}{J}=\frac{h-e}{J_0}\int_0^l\mathfrak{M}\,dx=$$

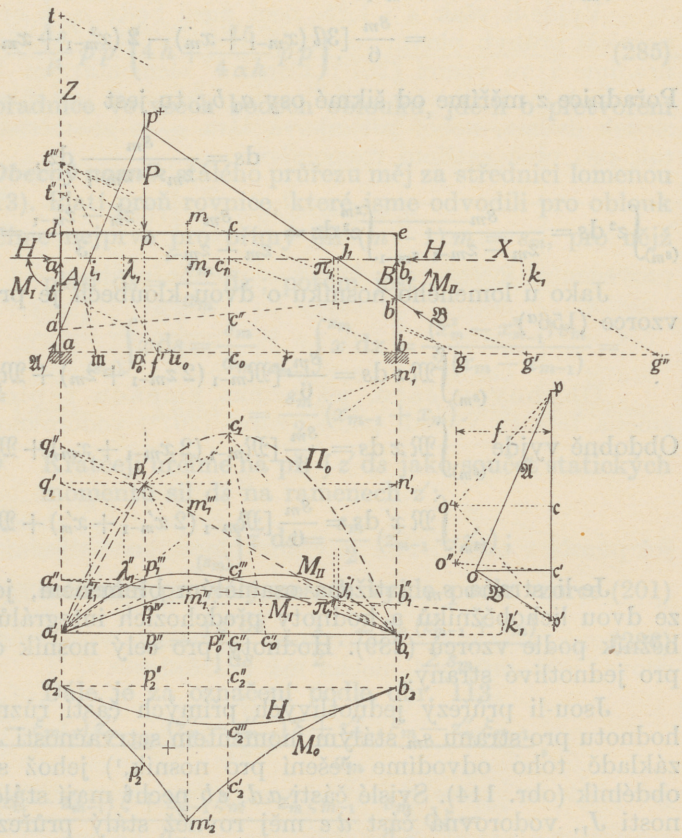
$$=\frac{h-e}{J_0\,l}\int_0^l\mathfrak{M}\,(x+x')\,dx=$$

$$=\frac{(h-e)\,(\mathfrak{N}+\mathfrak{N}')}{6\,J_0};$$

znamenáme tu jako u spojitého nosníku

$$\mathfrak{N}=6\int_0^l\mathfrak{M}\,x\,dx,$$

$$\mathfrak{N}'=6\int_0^l\mathfrak{M}\,x'\,dx.$$



Obr. 114.

Pro stranu $a\,d$ jest

$$s_m=h,\ x_{m-1}=x_m=0,\ x'_{m-1}=x'_m=l,\ z_{m-1}=-e,\ z_m=h-e,$$

pro stranu $d\,e$

$$s_m=l,\ x_{m-1}=0,\ x'_{m-1}=l,\ x_m=l,\ x'_m=0,\ z_{m-1}=z_m=h-e$$

a pro stranu $e\,b$

$$s_m=h,\ x_{m-1}=x_m=l,\ x'_{m-1}=x'_m=0,\ z_{m-1}=h-e,\ z_m=-e.$$

Tím vyjde podle vzorců (288)

$$\int\frac{x^2\,ds}{J}=\int\frac{x'^2\,ds}{J}=\frac{1}{3J_0}\,l\cdot l^2+\frac{1}{3J_1}\,l\cdot 3h^2=\frac{l^2}{3J_0}(l+3h_0),$$

$$\int\frac{x\,x'\,ds}{J}=\frac{1}{J_0}\cdot\frac{l}{6}\cdot l^2=\frac{l^3}{6J_0},$$

$$\int\frac{z^2\,ds}{J}=\frac{2}{3J_1}h\,[(h-e)^2+(h-e)\,e+e^2]+\frac{l}{3J_0}\cdot 3\,(h-e)^2=\frac{h_0h^2}{3J_0}\cdot\frac{h_0+2l}{2h_0+l}.$$

Dosazením stanovených hodnot integrálů a násobením $6J_0$ nabudou přetvárné výminky (291) tvaru

$$\mathfrak{N}'+2M_I\,l\,(3h_0+l)+M_{II}\,l^2=0,\qquad \mathfrak{N}+M_I\,l^2+2M_{II}\,l\,(3h_0+l)=0,$$

$$\frac{h-e}{l}\,(\mathfrak{N}+\mathfrak{N}')-2H\cdot\frac{h_0h^2\,(h_0+2l)}{2h_0+l}+6EJ_0\,\delta\varepsilon\,l=0.$$

Z prvých dvou rovnic určíme řešením momenty

$$M_I=\frac{l\,\mathfrak{N}-2\,(3h_0+l)\,\mathfrak{N}'}{3l\,(2h_0+l)\,(6h_0+l)},\qquad M_{II}=\frac{l\,\mathfrak{N}'-2\,(3h_0+l)\,\mathfrak{N}}{3l\,(2h_0+l)\,(6h_0+l)}.\tag{292}$$

Z třetí rovnice vypočteme, dosadíme-li za $h-e$ ze vzorce (290^b), vodorovnou sílu

$$H=\frac{\mathfrak{N}+\mathfrak{N}'}{2h\,l\,(h_0+2l)}+\frac{3EJ_0\,\delta\varepsilon\,l\,(2h_0+l)}{h_0h^2\,(h_0+2l)}.\tag{293}$$

Pouhá změna teploty vyvodí momenty $M_I=M_{II}=0$ a vodorovnou sílu

$$H=\frac{3EJ_0\,\delta\varepsilon\,l\,(2h_0+l)}{h_0h^2\,(h_0+2l)};\tag{293^a}$$

tato síla působí v bodech a_1, b_1 směry protivnými.

Momenty M_I, M_{II} vyvozené svislým zatížením jsou dány vzorci (292); souhlasí úplně se vzorci pro podporové momenty M_a, M_b v poli ab spojitého nosníku, jež by bylo samo zatíženo a mělo by základní body λ, π rozdělující pole ab na díly $\overline{a\lambda}=a$, $\overline{\pi b}=b$, $\overline{\lambda\pi}=l-a-b=c$, jež mají hodnoty

$$a=b=\frac{l^2}{3\,(2h_0+l)},\qquad c=\frac{l\,(6h_0+l)}{3\,(2h_0+l)}.\tag{294}$$

O tom se přesvědčíme, dosadíme-li za a, b, c ze vzorců (294) do obecných vzorců, jež platí pro momenty M_a, M_b v případě, že je zatíženo jediné pole ab.[1]) Podle posledních vzorců určíme základní body, přeneseme-li $\overline{at}=\overline{ab}=l$, $\overline{bg''}=2h_0$, $\overline{au_0}=\frac{1}{3}\overline{ab}$ a vedeme-li $u_0t'\parallel g''t$; pak jest

$$\overline{at'}=\overline{au_0}\cdot\frac{\overline{at}}{\overline{ag''}}=\frac{l}{3}\cdot\frac{l}{2h_0+l}=a=\overline{a_1\lambda_1}=\overline{\pi_1b_1}.$$

Momenty M_I, M_{II} se určí nyní jako podporové momenty v poli a_1b_1 spojitého nosníku stálého průřezu, jehož základními body jsou body λ_1, π_1.

Svislé složky A, B reakcí opěrových stanovíme ze vzorců (165^c), (165^d), jež lze psáti obecně

$$A=\mathfrak{A}_0+\frac{M_{II}-M_I}{l},\qquad B=\mathfrak{B}_0-\frac{M_{II}-M_I}{l}\tag{295}$$

[1]) Viz druhý díl tohoto spisu, 3. vydání (1946), str. 99.

a vztahovati na libovolné zatížení svislé, znamenají-li $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ reakce prostého nosníku. Podle toho rovnají se reakce A, B posouvajícím silám při podporách v poli $a_1 b_1$ spojitého nosníku, jež má základní body λ_1, π_1. Konečně se stanoví i momenty M_0 podle vzorce (181), t. j.

$$M_0 = \mathfrak{M} + \frac{M_I x' + M_{II} x}{l},$$

jako mezipodporové momenty v poli $a_1 b_1$ spojitého nosníku.

Působí-li na nosník jediné osamělé břímě P v bodě p, jest

$$\mathfrak{M} = P p p' (l + p), \qquad \mathfrak{M}' = P p p' (l + p').$$

Dosazením těchto hodnot do vzorců (292) vyjde po úpravě

$$M_I = -\frac{P p p'}{6 h_0 + l}\left(\frac{p'}{l} + \frac{2 h_0}{2 h_0 + l}\right), \qquad M_{II} = -\frac{P p p'}{6 h_0 + l}\left(\frac{p}{l} + \frac{2 h_0}{2 h_0 + l}\right). \tag{296}$$

Samotné zatížení svislé vyvodí vodorovnou sílu

$$H = \frac{\mathfrak{M} + \mathfrak{M}'}{2 h l (h_0 + 2 l)}; \tag{293^b}$$

pro jediné břímě P vyjde z toho dosazením hodnot pro $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ síla

$$H = \frac{3 P p p'}{2 h (h_0 + 2 l)}. \tag{297}$$

γ) ***Příčinkové čáry*** momentů M_I, M_{II}. M_0 určíme jako příčinkové čáry momentů v týchž průřezech v poli $a_1 b_1$ spojitého nosníku stálého průřezu, jež by mělo základní body λ_1, π_1. Pro břímě $P = \overline{\mathfrak{p}\mathfrak{p}'}$ určíme nejprve parabolu Π_0, na níž jsou vrcholy prostých trojúhelníků momentových pro všechny polohy břemene P v poli $a_1 b_1$. Vrchol c_1' této paraboly určíme, myslíme-li si břímě P ve středu nosníku c, zvolíme-li pól o' v libovolné vzdálenosti f na vodorovnici středu $\mathfrak{c}$ složkové čáry $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{p}'}$ a vedeme-li $a_1' c_1' \parallel o' \mathfrak{p}$. V paprsku P dá parabola Π_0 vrchol p_1' prostého trojúhelníka momentového $a_1' p_1' b_1'$, k němuž stanovíme přemístěnou stranu základní. K tomu doplníme trojúhelník $a_1' p_1' b_1'$ do obdélníka přímkou $q_1' n_1' \parallel a_1' b_1'$ a vedeme $p_1' q_1'' \parallel b_1' q_1'$, $p_1' n_1'' \parallel a_1' n_1'$; spojnice $a_1' n_1''$ $(b_1' q_1'')$ stanoví na svislici základního bodu λ_1 (π_1) bod λ_1'' (π_1'') přemístěné základní strany $a_1'' b_1''$. Přenesením $\overline{a_1' a_1''} = \overline{p_1'' p_1'''}$, $\overline{b_1' b_1''} = \overline{p_1'' p_1^{IV}}$ určíme body p_1''', p_1^{IV} příčinkových čar M_I, M_{II}, jež by bylo lze sestrojiti též přímo z čáry Π_0.[1])

Pro příčinkovou čáru momentu M_0 k bodu m odvodíme příčinkovou pořadnici ve svislici bodu p, odměříme-li pořadnici $\eta_0 = \overline{m_1''' m_1'}$, omezenou přemístěnou základní stranou $a_1'' b_1''$ a momentovou přímkou $p_1' b_1'$, a přeneseme-li ji do svislice bodu p: $\overline{m_1''' m_1'} = \overline{p_2' p_2''}$. Opakujeme-li toto sestrojení pro dostatečný počet poloh břemene, sestrojíme příčinkové čáry M_I, M_{II}, M_0.

Příčinkovou čarou vodorovné síly H je podle vzorce (297) parabola druhého stupně, na př. parabola Π_0. Tato parabola určuje na paprsku P pořadnici $\overline{p_1'' p_1'} = \mathfrak{y}$, pro niž platí

$$f \mathfrak{y} = \frac{P p p'}{l}.$$

Vzorec (297) lze nyní psáti

$$H = \frac{3 f l \mathfrak{y}}{2 h (h_0 + 2 l)}. \tag{297^a}$$

[1]) Viz druhý díl tohoto spisu, 3. vydání (1946), str. 127, obr. 114.

Položíme-li

$$n = \mathfrak{y}, \quad n_0 = \frac{2Ph(h_0 + 2l)}{3fl}, \tag{298}$$

platí pro vodorovnou sílu vzorec (186)

$$H = P\frac{n}{n_0}.$$

Úsek n_0 buď vypočteme nebo sestrojíme. Tu přeneseme $\overline{at'''} = \frac{4}{3}h$, $\overline{bg} = \frac{1}{2}h_0$ a vedeme $gt''' \parallel bt'''$; tím určíme

$$\overline{at'''} = \overline{at'}\frac{\overline{ag}}{\overline{ab}} = \frac{4}{3}h \cdot \frac{\frac{1}{2}h_0 + l}{l} = \frac{2h(h_0 + 2l)}{3l}.$$

Dále vedeme $t'''r \perp a_1'c_1' \parallel o'\mathfrak{p}$; pak je $\triangle art''' \sim \triangle \mathfrak{c}\mathfrak{p}o'$ a vychází

$$\overline{ar} = \overline{at'''} \cdot \frac{\overline{\mathfrak{c}\mathfrak{p}}}{\overline{o'\mathfrak{c}}} = \frac{2h(h_0 + 2l)}{3l} \cdot \frac{P}{2f} = \frac{n_0}{2}.$$

Moment k libovolnému bodu m, položenému obecně mimo střednici, je dán vzorcem (182)

$$M = M_0 - Hz.$$

Pro břímě P jsme určili

$$M_0 = f\eta_0, \quad H = P\frac{n}{n_0};$$

pro totéž břímě je tedy

$$M = f\left(\eta_0 - n\frac{P}{f}\frac{z}{n_0}\right) = f\eta_m$$

jako u obecného oblouku vyššího. Od pořadnic η_0 příčinkové čáry M_0 jest odčítati pořadnice

$$n' = n\frac{P}{f}\frac{z}{n_0} = n \cdot \frac{3lz}{2h(h_0 + 2l)} = n \cdot \frac{z}{\overline{at'''}}.$$

Pořadnice n' se mění podle paraboly, jež má podle poslední rovnice největší pořadnici

$$\overline{c_2''c_2'''} = \overline{c_1''c_1'} \cdot \frac{\overline{m_1m}}{\overline{at'''}};$$

sestrojíme ji, přeneseme-li $\overline{a\mathfrak{m}} = \overline{m_1m} = z$ a vedeme-li $c_1'c_0'' \parallel t'''\mathfrak{m}$. Tím jsme určili $\overline{c_1''c_0''} = \overline{c_2''c_2'''}$; vrcholem c_2''' a body a_2', b_2' jest určena parabola, od níž k čáře M_0 sestrojené v témž směru u osy $a_2'b_2'$ měříme příčinkové pořadnice η_m momentu M.

Posouvající síla daného lomeného nosníku má ve svislých částech ad, be hodnotu

$$T = -H;$$

ve vodorovné části de je síla T svislá a rovná se patrně posouvající síle T_0 v poli a_1b_1 spojitého nosníku, t. j.

$$T = T_0 = \mathfrak{T} + \frac{M_{II} - M_I}{l} \tag{299}$$

Příčinková čára síly T_0 se vyšetří jako u spojitého nosníku. Totéž platí o svislých reakcích A, B, jež se určí z posouvajících sil při podporách v poli $a_1 b_1$ spojitého nosníku se základními body λ_1, π_1.

V části $a\,d$ je za libovolného zatížení svislého normálná síla

$$N = -A,$$

v části $b\,e$ síla

$$N = -B$$

a ve vodorovné části $d\,e$ platí

$$N = -H.$$

*δ) **Grafické řešení reakcí*** provedeme v podstatě jako u obecného oblouku vyššího. Jakékoli zatížení svislé vyvodí šikmé reakce v paprscích $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, jež protínají svislice $a\,d$, $b\,e$ v bodech a', b'; pak platí

$$M_I = H \cdot \overline{a_1 a'}, \quad M_{II} = H \cdot \overline{b_1 b'}.$$

Spojnice $a'\,b'$ seče svislici bodu c v bodě c'', jenž má pořadnici

$$\overline{c_1 c''} = \frac{\overline{a_1 a'} + \overline{b_1 b'}}{2} = \frac{M_I + M_{II}}{2\,H}.$$

Dosaďme za H, M_I, M_{II} ze vzorců (293^b), (292) platných pro libovolné svislé zatížení; obdržíme tím

$$\overline{c_1 c''} = -\frac{h}{3} \cdot \frac{h_0 + 2\,l}{2\,h_0 + l}$$

a

$$\overline{c_0 c''} = \overline{c_0 c_1} + \overline{c_1 c''} = h\,\frac{h_0 + l}{2\,h_0 + l} - \frac{h}{3} \cdot \frac{h_0 + 2\,l}{2\,h_0 + l} = \frac{h}{3}. \tag{300}$$

Podle tohoto výsledku má bod c'' pro jakékoli svislé zatížení stálou polohu.

Při jediném břemeni P (obr. 114) určíme svislé složky reakcí A, B z posouvajících sil při podporách v poli $a_1 b_1$ spojitého nosníku stálého průřezu, jenž má základní body λ_1, π_1. K břemeni P náleží výslednicová čára $a_1' p_1' b_1'$ a přemístěná základní strana $a_1'' b_1''$, kterou jsme již určili; příslušný pól v obrazci složkovém je stanoven paprsky $o'' \mathfrak{p} \parallel a_1' p_1'$, $o'' \mathfrak{p}' \parallel p_1' b_1'$. Paprsek $o'' \mathfrak{c}' \parallel a_1'' b_1''$ určí základní bod $\mathfrak{c}'$ složkového obrazce, jenž omezuje úseky svislých reakcí $A = \overline{\mathfrak{c}' \mathfrak{p}}$, $B = \overline{\mathfrak{p}' \mathfrak{c}'}$. Vodorovná síla má podle vzorce (297^a) hodnotu

$$H = \frac{3\,f\,l\,\eta}{2\,h\,(h_0 + 2\,l)};$$

sestrojili jsme již

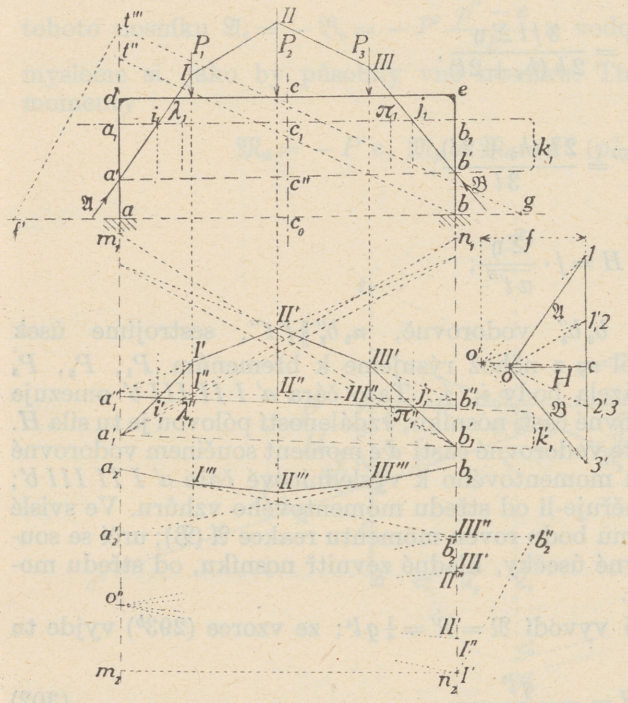
$$\frac{2\,h\,(h_0 + 2\,l)}{3\,l} = \overline{a\,t'''}$$

i jest

$$H = \eta \cdot \frac{f}{\overline{a\,t'''}}.$$

Přeneseme-li $\overline{a\,f'} = f$ a vedeme-li $p_1' p_0'' \parallel t''' f'$, dostaneme na vodorovné základní straně úsek $\overline{p_1'' p_0''} = \overline{p_1'' p_1'} \cdot \frac{\overline{a\,f'}}{\overline{a\,t'''}} = H$, jejž přeneseme na vodorovnici v bodě $\mathfrak{c}'$: $H = \overline{p_1'' p_0''} = \overline{o\,\mathfrak{c}'}$; výslední reakce mají pak úseky $\mathfrak{A} = \overline{o\,\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{p}'\,o}$.

Paprsky reakcí $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou rovnoběžné s úseky a omezují jako u obecného oblouku vyššího s osou X obrazec momentů M_0, jenž je též dán čarou $a'_1 p'_1 b'_1$ vztaženou ke straně $a''_1 b''_1$. Průsečíky i'_1, j'_1 čáry $a'_1 p'_1 b'_1$ se stranou $a''_1 b''_1$ jsou pak na svislicích bodů i_1, j_1, v nichž sekou paprsky $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ osu X; mimo to se protínají paprsky reakcí na paprsku P v bodě p^+. Spojnice $a' b'$ musí pak procházeti, jak jsme dokázali, stálým bodem c'' a seče osu X v bodě k_1 na svislici průsečíku k'_1 stran $a'_1 b'_1$ a $a''_1 b''_1$.



Obr. 115.

Také při soustavě osamělých břemen postupujeme v podstatě stejně. Z pólu o', zvoleného v libovolné vzdálenosti f od složkové čáry k břemenům $P_1 = \overline{1\,1'}$, $P_2 = \overline{2\,2'}$, $P_3 = \overline{3\,3'}$ (obr. 115), narýsujeme výslednicovou čáru $a'_1 I' II' III' b'_1$ a určíme jako u spojitého nosníku přemístěnou základní stranu $a''_1 b''_1$. K tomu stanovíme největší pořadnice prostých obrazců momentových $\eta_1 = \overline{I'\,I''}$, $\eta_2 = \overline{II'\,II''}$, $\eta_3 = \overline{III'\,III''}$ pod osamělými břemeny P_1, P_2, P_3, předpokládajíce vždy, že působí pouze příslušné břímě samotné, sečteme tyto pořadnice ve svislici podpory b, zvolíme pól o'' na svislici bodu a a rýsujeme výslednicovou čáru $a_2 I''' II''' III''' b_2$ k silám, jež působí v paprscích P_1, P_2, P_3 a mají úseky η_1, η_2, η_3. Čáru tu rýsujeme tak, aby prodloužená první strana šla bodem $III'' \equiv b'_2$; znamenejme (ve svislici b) $I' \equiv n_2$ a přenesme úsek $\overline{n_2 b_2} = \overline{b'_1 n_1}$. Spojnice $a'_1 n_1$ určí na svislici bodu λ_1 bod λ''_1 přemístěné strany základní. Dále prodloužíme poslední stranu $III''' b_2$ do bodu a'_2, vedeme $m_2 n_2 \parallel a'_2 b'_2$ a přeneseme $\overline{m_2 a_2} = \overline{a'_1 m_1}$; přímka $b'_1 m_1$ dá na svislici bodu π_1 bod π''_1 přemístěné strany základní $a''_1 b''_1$. Paprsek $o'\,\mathfrak{c} \parallel a''_1 b''_1$ stanoví úseky svislých reakcí $A = \overline{\mathfrak{c}\,1}$, $B = \overline{3'\,\mathfrak{c}}$.

Obrazec omezený výslednicovou čarou $a'_1 I' II' III' b'_1$ a základní stranou $a''_1 b''_1$ jest nyní přetvořiti jako u oblouku vyššího po zákonu afinity tak, aby osa $a_1 b_1$ nahrazovala základní stranu $a''_1 b''_1$. Průsečíkům i'_1, j'_1 výslednicové čáry se základní stranou $a''_1 b''_1$ odpovídají ve svislicích na ose $a_1 b_1$ sdružené body i_1, j_1, jimiž prochází výslednicová čára $a'\,I\,II\,III\,b'$, omezující se střednicí momentovou plochu nosníku; poněvadž pak spojnice $a' b'$ má procházeti pevným bodem c'', je tím čára určena. Průsečíku k'_1 stran $a''_1 b''_1$, $a'_1 b'_1$ odpovídá ve svislici na ose $a_1 b_1$ bod k_1, jehož spojnice s bodem c'' dá body a', b'. Body a', b', i_1, j_1 a afinitou je čára $a'\,I\,II\,III\,b'$ dostatečně stanovena; v krajních stranách této čáry působí reakce $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$.

Náhradou za bod k_1 nebo pro kontrolu můžeme určiti vodorovnou sílu H, jež má pro soustavu břemen podle vzorce (297) pro jediné břímě osamělé hodnotu

$$H = \frac{3 \Sigma P p p'}{2h(h_0 + 2l)}. \qquad (301)$$

Určili jsme již

$$f\eta_1 = \frac{P_1 p_1 p_1'}{l}, \quad f\eta_2 = \frac{P_2 p_2 p_2'}{l}, \quad f\eta_3 = \frac{P_3 p_3 p_3'}{l}$$

a tedy

$$f\Sigma\eta = \frac{\Sigma P p p'}{l};$$

pak jest

$$H = \frac{3 f l \Sigma\eta}{2h(h_0 + 2l)}.$$

Užijeme-li stanoveného již úseku

$$\overline{a t'''} = \frac{2h(h_0 + 2l)}{3l},$$

vyjde

$$H = f \cdot \frac{\Sigma\eta}{\overline{a t'''}};$$

přeneseme-li $\overline{f' a} = f$ a vedeme-li $b_2' b_2''$ vodorovně, $n_2 b_2'' \parallel f' t'''$, sestrojíme úsek $H = \overline{b_2' b_2''} = \overline{o c}$. Tím je stanoven pól o, z něhož rýsujeme k břemenům P_1, P_2, P_3 výslednicovou čáru tak, aby procházela body i_1, j_1. Tato čára $a'\, I\, II\, III\, b'$ omezuje s osou $d\,e$ momentový obrazec vodorovné části nosníku; vzdáleností pólovou je tu síla H. Také k bodu mimo střednici určíme ve vodorovné části $d\,e$ moment součinem vodorovné síly H a svislé pořadnice od středu momentového k výslednicové čáře $a'\, I\, II\, III\, b'$; momentová pořadnice je kladná, směřuje-li od středu momentového vzhůru. Ve svislé části $a\,d$ ($b\,e$) je moment k libovolnému bodu roven momentu reakce $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$); určí se součinem svislé reakce A (B) a vodorovné úsečky, kladné zevnitř nosníku, od středu momentového k paprsku reakce $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$).

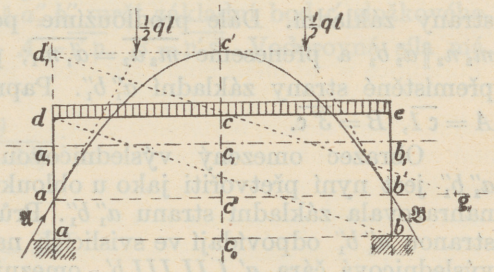
Plné zatížení rovnoměrné vyvodí $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}' = \frac{1}{4} q l^4$; ze vzorce (293^b) vyjde tu vodorovná síla

$$H = \frac{q l^3}{4h(h_0 + 2l)}. \tag{302}$$

Svislice bodu c je zde osou souměrnosti nosníku i zatížení a tedy i výslednicové čáry $a' c' b'$ (obr. 116); spojnice $a' b'$ je pak vodorovná a jest úplně určena bodem c'', jímž musí procházeti. Výslednicová parabola $a' c' b'$, jejímiž krajními tečnami jsou paprsky reakcí $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, má výšku $\overline{c'' c'}$ plynoucí ze vztahu

$$H \cdot \overline{c'' c'} = \tfrac{1}{8} q l^3,$$

neboť $\overline{c'' c'}$ znamená za pólové vzdálenosti H největší momentovou pořadnici prostého nosníku s plným zatížením rovnoměrným. Pak jest



Obr. 116.

$$\overline{c'' c'} = \frac{q l^3}{8H} = \frac{h(h_0 + 2l)}{2l};$$

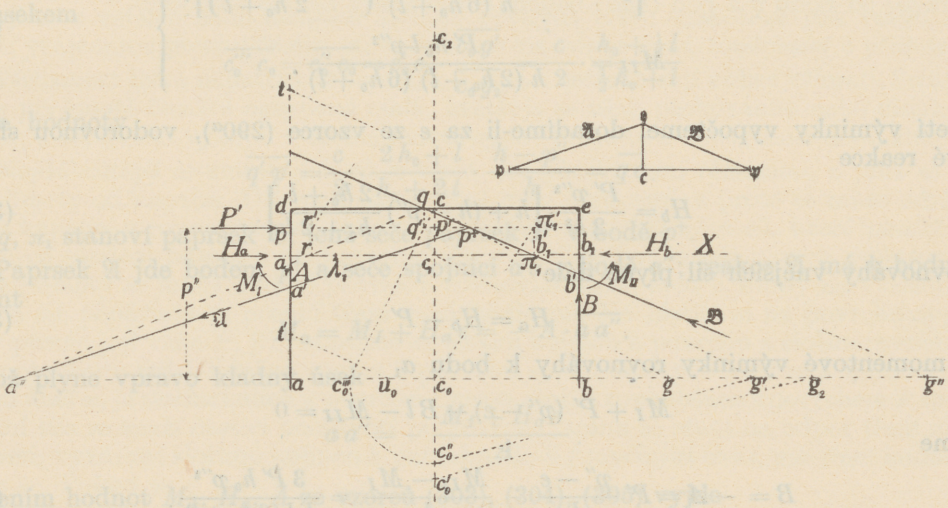
přeneseme-li $\overline{b' g_1} = \frac{1}{2} h_0$ a vedeme-li $g_1 d_1' \parallel b\,d$, sestrojíme úsek

$$\overline{a' d_1'} = \overline{a\,d} \cdot \frac{\overline{a' g_1}}{\overline{a\,b}} = h \cdot \frac{\frac{1}{2} h_0 + l}{l} = \overline{c'' c'}.$$

Vrcholem c' a body a', b' je výslednicová parabola určena. Paprsky reakcí $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ jsou jejími krajními tečnami, prochází tedy paprsek $\mathfrak{A}$ středem úseku $\overline{d_1' c'}$. Momenty ve všech částech nosníku se určí jako při soustavě osamělých břemen.

ε) Vodorovné břímě P' v bodě p působící (obr. 117) lze řešiti z obecných výminek přetvárných (291), klademe-li za $\mathfrak{M}$ momenty základního nosníku, t. j. nosníku podepřeného v bodě a_1 pevně, v bodě b_1 posouvatelně po vodorovné; svislé reakce tohoto nosníku $\mathfrak{A}_0 = -\mathfrak{B}_0 = -P' \dfrac{p'' - e}{l}$ a vodorovnou reakci $\mathfrak{H}_a = -P'$ v bodě a_1 mysleme si, jako by působily vně nosníku. Tím vyjdou v jednotlivých vrcholech momenty

$$\mathfrak{M}_a = -P'e, \quad \mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}_d = P'(p'' - e), \quad \mathfrak{M}_e = \mathfrak{M}_b = 0.$$



Obr. 117.

Podle vzorců (289) určíme

$$\int \frac{\mathfrak{M}\, x'\, ds}{J} = \frac{p''}{6 J_1}(\mathfrak{M}_a \cdot 3l + \mathfrak{M}_p \cdot 3l) + \frac{h - p''}{6 J_1}(\mathfrak{M}_p \cdot 3l + \mathfrak{M}_d \cdot 3l) + \frac{l}{6 J_0}\mathfrak{M}_d \cdot 2l =$$

$$= \frac{P' p''}{2 J_1} l(-e + p'' - e) + \frac{P'(h - p'')}{J_1} l(p'' - e) + \frac{l^2}{3 J_0} P'(p''' - e) =$$

$$= P'\left[\frac{(p'' - e)\, l\,(l + 3h_0)}{3 J_0} - \frac{l\, p''^2}{2 J_1}\right], \quad \int \frac{\mathfrak{M}\, x\, ds}{J} = \frac{l}{6 J_0}\mathfrak{M}_d\, l = \frac{l^2}{6 J_0} P'(p'' - e),$$

$$\int \frac{\mathfrak{M}\, z\, ds}{J} = \frac{p''}{6 J_1}[\mathfrak{M}_a(-2e + p'' - e) + \mathfrak{M}_p(-e + 2p'' - 2e)] +$$

$$+ \frac{h - p''}{6 J_1}[\mathfrak{M}_p(2p'' - 2e + h - e) + \mathfrak{M}_d(p'' - e + 2h - 2e)] + \frac{l}{6 J_0}\mathfrak{M}_d \cdot 3(h - e) =$$

$$= \frac{p''}{2 J_1}[-P' e(p'' - 3e) + P'(p'' - e)(2p'' - 3e)] + \frac{h - p''}{2 J_1} P'(p'' - e)\, 3(p'' + h - 2e) +$$

$$+ \frac{l}{2 J_0} P'(p'' - e)(h - e) = \frac{P'}{6 J_1} p''^2 (3e - p'').$$

Přetvárné výminky nabudou dosazením stanovených hodnot tvaru

$$P'\frac{p''-e}{l}\cdot\frac{l^2(3h_0+l)}{3EJ_0}+\frac{M_I}{l}\cdot\frac{l^2(3h_0+l)}{3EJ_0}+\frac{M_{II}}{l}\cdot\frac{l^3}{6EJ_0}-P'\frac{lp''^2}{2EJ_1}=0,$$

$$P'\frac{p''-e}{l}\cdot\frac{l^3}{6EJ_0}+\frac{M_I}{l}\cdot\frac{l^3}{6EJ_0}+\frac{M_{II}}{l}\cdot\frac{l^2(3h_0+l)}{3EJ_0}=0,$$

$$H_b\cdot\frac{h^2h_0(h_0+2l)}{3EJ_0(2h_0+l)}=P'\frac{p''^2(3e-p'')}{6EJ_1}.$$

Z prvých dvou výminek plyne řešením po úpravě

$$\left.\begin{aligned}M_I&=-P'\left[p''-e-\frac{2h_0p''^2}{h(6h_0+l)}\left(1+\frac{h_0}{2h_0+l}\right)\right],\\ M_{II}&=-\frac{P'h_0lp''^2}{h(2h_0+l)(6h_0+l)}.\end{aligned}\right\}\qquad(303)$$

Z třetí výminky vypočteme, dosadíme-li za e ze vzorce (290^a), vodorovnou složku pravé reakce

$$H_b=\frac{P'p''^2}{2h^3}\left[h+(h-p'')\frac{2h_0+l}{h_0+2l}\right].\qquad(304^a)$$

Z rovnováhy vnějších sil plyne dále

$$H_a=H_b-P'\qquad(304^b)$$

a z momentové výminky rovnováhy k bodu a_1

$$M_I+P'(p''-e)-Bl-M_{II}=0$$

určíme

$$B=-A=P'\frac{p''-e}{l}-\frac{M_{II}-M_I}{l}=\frac{3P'h_0p''^2}{hl(6h_0+l)}.\qquad(305)$$

Tím je vyřízeno počtářské řešení reakcí.

Graficky lze stanoviti paprsky $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ výsledních reakcí. Seče-li paprsek $\mathfrak{B}$ osu X v bodě b_1' (obr. 117), jest

$$M_{II}=B\cdot\overline{b_1b_1'},$$

směřuje-li kladný úsek vpravo; pak jest, hledíc k rovnicím (294),

$$\overline{b_1b_1'}=\frac{M_{II}}{B}=-\frac{l^2}{3(2h_0+l)}=-b,\qquad(306^a)$$

tedy se bod b_1' ztotožňuje s bodem π_1. Dále určíme průsečík q paprsku $\mathfrak{B}$ s osou de z momentu reakce $\mathfrak{B}$ k bodu e, jejž lze psáti

$$M_e=M_{II}-H_b(h-e)=B\cdot\overline{eq},$$

pokládáme-li úsek eq vpravo za kladný; z toho plyne

$$\overline{qe}=-\overline{eq}=-\frac{M_{II}-H_b(h-e)}{B}=\frac{l}{2}+\frac{l(h-p'')(6h_0+l)}{6h(h_0+2l)}$$

nebo

$$\overline{qc}=\overline{qe}-\frac{l}{2}=\frac{l(h-p'')(6h_0+l)}{6h(h_0+2l)}.\qquad(306^b)$$

Užijme délky

$$\overline{c_1\pi_1} = \frac{c}{2} = \frac{l}{6}\cdot\frac{6h_0+l}{2h_0+l}$$

podle vzorce (294); pak platí

$$\overline{qc} = \frac{c}{2}\cdot\frac{(2h_0+l)(h-p'')}{(h_0+2l)h}.$$

Přenesme $\overline{c_1\pi_1} = \overline{c_0c_0'}$, $\overline{c_0g'} = h_0+\frac{1}{2}l$, $\overline{c_0g_2} = \frac{1}{2}h_0+l$ a veďme $g'c_0'' \parallel g_2c_0'$; dále přenesme $\overline{c_0c_0''} = \overline{c_0c_0'''}$ a spojme $c_0'''c$, čímž určíme na paprsku P' úsek

$$\overline{q'p'} = \overline{c_0'''c_0}\cdot\frac{h-p''}{h},$$

jenž úsekem

$$\overline{c_0'''c_0} = \overline{c_0''c_0} = \overline{c_0'c_0}\cdot\frac{\overline{c_0g'}}{\overline{c_0g_2}} = \frac{c}{2}\cdot\frac{h_0+\frac{1}{2}l}{\frac{1}{2}h_0+l}$$

nabude hodnoty

$$\overline{q'p'} = \frac{c}{2}\cdot\frac{2h_0+l}{h_0+2l}\cdot\frac{h-p''}{h} = \overline{qc}.$$

Body q, π_1 stanoví paprsek $\mathfrak{B}$, jenž seče paprsek P' v bodě p^+.

Paprsek $\mathfrak{A}$ jde bodem p^+ a seče spojnici ab v bodě a''; reakce $\mathfrak{A}$ má k bodu a moment

$$M_a = M_I + H_a e = -A\cdot\overline{aa''},$$

z něhož plyne vpravo kladný úsek

$$\overline{aa''} = -\frac{M_I+H_ae}{A}.$$

Dosazením hodnot M_I, H_a, A ze vzorců (303), (304), (305) vyjde

$$\overline{aa''} = -\frac{l(6h_0+l)}{6h_0}\left(\frac{2h-p''}{p''} - \frac{h-p''}{h}\cdot\frac{h_0+l}{h_0+2l}\right) + \frac{l}{2}$$

a z toho stanovíme

$$\overline{c_0a''} = \overline{aa''} - \overline{ac_0} = \overline{aa''} - \frac{l}{2} = -\frac{l(6h_0+l)}{6h_0}\left(\frac{2h-p''}{p''} - \frac{h-p''}{h}\cdot\frac{h_0+l}{h_0+2l}\right).$$

Spojnice $a''q$ seče osu X v bodě r, jenž má úsečku

$$\overline{c_1r} = \overline{cq}\cdot\frac{e}{h} + \overline{c_0a''}\cdot\frac{h-e}{h} = -\frac{l(6h_0+l)(2h-p'')}{6(2h_0+l)p''}; \qquad (306^c)$$

podle vzorce (294) lze psáti

$$\overline{c_1r} = -\frac{c}{2}\cdot\frac{2h-p''}{p''}.$$

Přenesme $\overline{p'\pi_1'} = \overline{c_1\pi_1} = \frac{1}{2}c$, $\overline{cc_2} = h$ a veďme $c_2r' \parallel c_0\pi_1'$; určíme tak úsek

$$\overline{p'r'} = \overline{p'c_2}\cdot\frac{\overline{p'\pi_1'}}{\overline{p'c_0}} = -\frac{c}{2}\cdot\frac{2h-p''}{p''} = \overline{c_1r}.$$

Takto sestrojíme bod r, spojnicí qr stanovíme bod a'' a přímka $a''p^+$ dává paprsek $\mathfrak{A}$.

Jsou-li paprsky $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ stanoveny, sestrojíme úseky reakcí složkovým obrazcem k rovnováhové soustavě sil P', $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; přeneseme $P' = \overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'}$ a vedeme $\overline{\mathfrak{o}\,\mathfrak{p}} \# \mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{p}'\,\mathfrak{o}} \# \mathfrak{B}$. Svislice $\mathfrak{o}\,\mathfrak{c}$ stanoví pak úseky složek $A = -B = \overline{\mathfrak{o}\,\mathfrak{c}}$, $H_a = \overline{\mathfrak{c}\,\mathfrak{p}}$, $H_b = \overline{\mathfrak{p}'\,\mathfrak{c}}$. Momenty k bodům svislé části $a\,d$ se určí součinem svislé reakce A a vodorovné úsečky od středu momentového k čáře $a''\,p^+\,q$; poněvadž je reakce A záporná, dají úsečky vlevo směřující (pod bodem a') záporné momenty, úsečky vpravo směřující (nad bodem a') kladné momenty. Pro ostatní části nosníku je výslednicí sil po pravé straně reakce $\mathfrak{B}$. Moment k libovolnému bodu části $d\,e$ je tedy dán součinem síly H_b a svislé pořadnice od středu momentového k paprsku $\mathfrak{B}$; moment k bodu v části $b\,e$ rovná se pak součinu síly B a vodorovné úsečky od středu momentového k paprsku $\mathfrak{B}$. Pořadnice vzhůru směřující a úsečky napravo od středu momentového dají tu kladné momenty; jsou tedy vlevo (vpravo) od bodu q a pod (nad) bodem b' momenty kladné (záporné).

C) Theorie tlaku hmot sypkých.

35. Základní pojmy. Při zemních pracích inženýrských se vyskytují *sypké hmoty* jako ornice, písek, hlína a štěrk přirozený (oblázek) nebo umělý (tlučený), jež se po stránce statické, tedy odporem proti působení vnějších sil, liší od pevných těles i kapalin. Skládají se z větších nebo menších úlomků pevných těles; snaží-li se pak vnější síly změniti vzájemnou polohu částic, staví se tomu na odpor *tření*, *soudržnost* a *přilnavost*.

Přilnavost bývá nepatrná nebo vůbec žádná a netřeba si jí vůbec všímati. Soudržnost je při hmotě čerstvě nasypané malá, zvětšuje se však pěchováním nebo dlouhým ležením; u čerstvého výkopu v ulehlé hmotě sypké může býti soudržnost dosti značná.

Nejdůležitější ze zmíněných sil je tření, jež působí mezi částicemi, a jímž se liší sypké hmoty od kapalin. U kapalin není tření mezi částicemi, a proto se může udržeti povrch kapalin v rovnováze jen tehdy, je-li kolmý na výslednice sil, které působí na povrchové částice; působí-li na kapalinu jen vlastní váha, je její povrch vodorovný. U sypké hmoty se může udržeti povrch v rovnováze také, není-li kolmý na výslednice vnějších sil, poněvadž tu působí tření mezi částicemi. Na částici m na povrchu sypké hmoty působí její váha P, již rozložíme ve složku kolmou k povrchu a složku rovnoběžnou s povrchem; svírá-li tečná rovina k povrchu sypké hmoty v bodě m s vodorovnou rovinou úhel ω, je složka kolmá k povrchu $P \cos \omega$, složka rovnoběžná s povrchem $P \sin \omega$. Poslední síla se snaží částici posouvati po povrchu; tomu se staví na odpor tření mezi částicemi, vyvozené složkou kolmou k povrchu. Je-li f *součinitel tření*, má tření hodnotu $f P \cos \omega$. Pokud je

$$P \sin \omega \leqq f P \cos \omega,$$

nenastane pohyb a povrch se udrží; znaménko rovnosti znamená mez rovnováhy, t. j. rovnováhu vratkou. Z poslední výminky plyne

$$\operatorname{tg} \omega \leqq f = \operatorname{tg} \varphi,$$

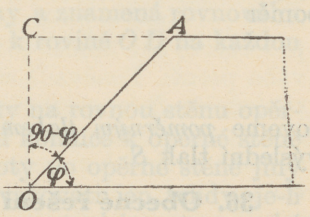
znamená-li φ *úhel třecí;* pak musí býti též

$$\omega \leqq \varphi.$$

Udrží se tedy sypká hmota v rovnováze, pokud její povrch svírá s vodorovnou úhel rovný nejvýše třecímu úhlu φ.

Rovinné omezení povrchu sypké hmoty se udrží, pokud jest odchylka povrchové roviny OA (obr. 118) od vodorovné rovna nejvýše úhlu φ; úhel φ slove též *přirozenou odchylkou*, doplněk jeho $90^\circ - \varphi$ *přirozeným sklonem* sypké hmoty. Úhel ten můžeme určiti funkcí

$$\operatorname{tg} (90^\circ - \varphi) = \operatorname{cotg} \varphi = \frac{\overline{CA}}{\overline{OC}},$$



Obr. 118.

jež slove *přirozenou sklonitostí*. Rovinu OA nazýváme *přirozenou skloninou*.

Přirozená odchylka φ, přirozená sklonitost $\operatorname{cotg} \varphi$ a měrná váha γ pro různé hmoty sypké jsou uvedeny v tabulce, v níž jsou ke srovnání tytéž hodnoty pro vodu.

Úhel φ lze vyšetřiti jako odchylku (od vodorovné) přirozené skloniny, t. j. roviny, v níž se nejvýše udrží rovinný povrch sypké hmoty v rovnováze.

Tabulka přirozených odchylek, přirozených sklonitostí a měrných vah.

Sypká hmota	φ	cotg φ	γ (kg/m³)
Ornice suchá (kyprá)	38° až 42°	1,3 až 1,1	1600
Ornice mokrá	30° „ 37°	1,7 „ 1,3	2000
Písek suchý	34° „ 37°	1,5 „ 1,3	1600
Písek mokrý	27° „ 30°	2,0 „ 1,7	2000
Hlína suchá	38° „ 42°	1,3 „ 1,1	1600
Hlína mokrá	20° „ 25°	2,7 „ 2,1	2000
Půda jílovitá suchá	40° „ 46°	1,2 „ 1,0	1500
Půda jílovitá mokrá	20° „ 25°	2,7 „ 2,1	1950
Štěrk přirozený vlhký	25° „ 30°	2,1 „ 1,7	1900
Štěrk tlučený	35° „ 40°	1,4 „ 1,2	1700
Voda	0°	∞	1000

Soudržností se udrží sypká hmota ve větší odchylce od vodorovné než v úhlu φ. Poněvadž se však soudržnost časem a různými příčinami, jako vlhkostí a p., může zmenšovati nebo i zrušiti, lze s ní počítati jen u zatímních a málo hlubokých výkopů; stěny takových výkopů mohou býti až svislé, pokud nehrozí nebezpečí. Jde-li o trvalou rovnováhu sypké hmoty, nedbáme vůbec soudržnosti a hledíme pouze k tření.

Je-li odchylka povrchu sypké hmoty od vodorovné větší než úhel φ, neudrží se sypká hmota sama v rovnováze; třeba ji podepříti *opěrnou stěnou*, jíž je buď rubová stěna *opěrné zdi* nebo dřevěná stěna (štětová). Opěrná stěna může býti *rovná* nebo *křivá*; rovná stěna je *ležatá*, má-li od vodorovné menší odchylku než 90°, a *převislá*, má-li odchylku větší než 90° (obr. 119); odchylku měříme tu od vodorovné roviny k opěrné stěně uvnitř sypké hmoty. Polohu rovné stěny opěrné $O\,A$ určujeme sklonem ε, t. j. úhlem, jejž svírá stěna se svislicí; úhel ε bereme za kladný u stěny převislé, tedy je-li svislice patou O stěny vedená uvnitř sypké hmoty.

Sypká hmota tlačí na opěrnou stěnu. Na část $A\,M$, jež má svislý rozměr x, připadne tlak S_x, obecně šikmý k opěrné stěně, neboť i mezi sypkou hmotou a opěrnou stěnou působí tření; kdyby tohoto tření nebylo, byl by ovšem *tlak sypké hmoty* kolmý k opěrné stěně. Zvětší-li se hloubka x o $\mathrm{d}x$, připadne na prvek $\mathrm{d}u$ opěrné stěny tlak $\mathrm{d}S_x$; poměr

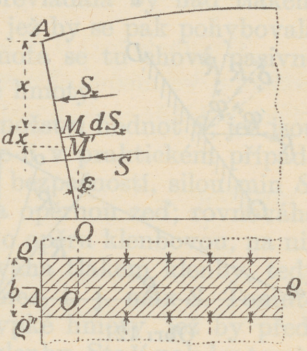
$$\frac{\mathrm{d}S_x}{\mathrm{d}u} = \sigma_x$$

zoveme *poměrným tlakem* sypké hmoty. Na celou opěrnou stěnu $O\,A$ působí pak výslední tlak S.

36. Obecné řešení velikosti a působiště tlaku na opěrnou stěnu. *α) Rovina nebezpečná.* Vyšetřování tlaku sypké hmoty[1]) na opěrnou stěnu založíme na předpokladu, že je sypká hmota stejnorodá a nesoudržná, takže dbáme jen

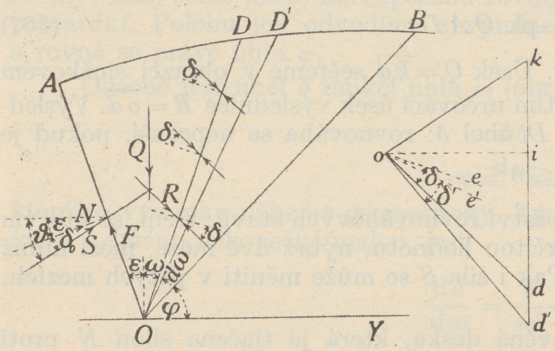
[1]) Theorie další pochází v podstatě od *Ch. A. Coulomba*, grafické řešení od *J. V. Ponceleta*; srovnej *Fr. Kötter* „Die Entwickelung der Lehre vom Erddruck" v Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, II. Bd. (Berlín 1893), str. 77 a d.

tření, a že je hmota omezena jen povrchem a opěrnou stěnou, jinak však je ve všech směrech neomezená; pak jsou stejné poměry ve všech stejně položených částech sypké hmoty. Povrch sypké hmoty mějž tvar válcové plochy, jejíž povrchové přímky jsou vodorovné a rovnoběžné s opěrnou rovinou OA (obr. 119). Svislá rovina ϱ' kolmá k opěrné stěně i k povrchu je rovinou souměrnosti sypké hmoty; hmota s obou stran roviny ϱ' působí proto navzájem silami kolmými k rovině ϱ', která je tedy *rovinou hlavní* jako dělicí rovina uvnitř pevného tělesa, k níž jsou vnitřní síly kolmé. K rovině $\varrho'' \parallel \varrho'$ má se sypká hmota úplně stejně, je-li kolmo k rovinám ϱ', ϱ'' neomezená. Na těleso mezi rovinami ϱ', ϱ'' působí okolní hmota silami kolmými k rovinám ϱ', ϱ'' a s obou stran stejnými a protivnými; tyto síly se ruší, i nemusíme uvažovati působení ostatní hmoty sypké na díl mezi rovinami ϱ', ϱ''. Rovina ϱ, jež půlí vzdálenost b rovin ϱ', ϱ'', je rovinou souměrnosti vytknutého dílu i všech jeho sil vnějších a tedy i vnitřních. Síly, jež působí v každých dvou bodech souměrných k rovině ϱ, jsou k této rovině souměrné a skládají se proto ve výslednici v rovině ϱ. Tak lze převésti vnější i vnitřní síly vytknutého dílu na soustavu rovinnou. V rovině ϱ působí ovšem též výslední tlaky sypké hmoty na opěrnou stěnu OA. V dalších obrazcích vyznačíme vždy jen řez tělesa omezeného rovinami ϱ', ϱ'' s rovinou souměrnosti ϱ tohoto dílu; půdorysu není třeba. Šířka b uvažovaného dílu sypké hmoty bývá rovna jednotce délkové.



Obr. 119.

Až do přirozené skloniny OB (obr. 120), jež svírá s vodorovnou osou Y úhel φ, udržela by se sypká hmota sama v rovnováze; je třeba tedy opěrnou stěnou pojistiti pouze část OAB mezi přirozenou skloninou a opěrnou stěnou. Veďme v této části libovolnou *dělicí rovinu* OD, jejíž poloha jest určena úhlem ω, jejž svírá rovina OD se svislicí. Podél roviny OD působí navzájem obě části sypké hmoty silami spojitě rozdělenými po rovině OD. Abychom si zjednodušili vyšetřování, předpokládejme, že elementární tlaky ve všech bodech téže dělicí roviny OD jsou rovnoběžné. Pak je sklon δ těchto elementárních tlaků k rovině OD stálý; týž sklon δ má i paprsek výslednice R tlaků na rovinu OD. Rovnováha je zajištěna, pokud je úhel $\delta \leqq \varphi$; znaménko rovnosti odpovídá mezi rovnováhy a znamená rovnováhu vratkou. Paprsek výslednice R se může odchylovati od kolmice k rovině OD na každou stranu nejvýše o úhel φ.



Obr. 120.

Podle přijatého předpokladu budou též elementární tlaky na rovnou stěnu opěrnou rovnoběžné. Výslednice jejich S smí se též odchylovati od kolmice k opěrné stěně nejvýše o úhel třecí. Obecně bude platit pro tření sypké hmoty po opěrné stěně jiný úhel třecí φ_0 než uvnitř sypké hmoty; úhel φ_0 třeba však uvažovati jen tehdy, je-li menší než úhel φ. Kdyby byl úhel φ_0 větší než φ, zadržela by se tenká vrstva sypké hmoty na opěrné stěně a posouvala by se sypká hmota po sypké hmotě; pak bylo by uvažovati úhel φ.

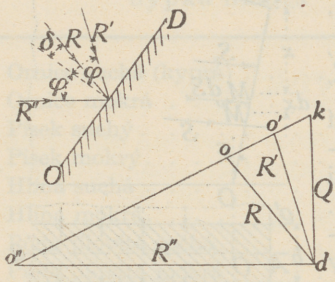
V různých dělicích rovinách bude též různý úhel δ; je tedy obecně úhel δ funkcí úhlu ω, jímž stanovíme polohu dělicí roviny OD. V jisté rovině dělicí, kterou nazveme

rovinou nebezpečnou, bude míti úhel δ největší hodnotu. Je-li tato hodnota max $\delta \leqq \varphi$, je pojištěna rovnováha celé sypké hmoty. Polohu nebezpečné roviny dále vyšetříme.

β) Meze tlaku. Sypká hmota působí na opěrnou stěnu OA výsledním tlakem S (obr. 120); za rovnováhy vzdoruje opěrná stěna rovnou a protivnou reakcí S, kterou lze nahraditi opěrnou stěnu. Reakce S má složku N kolmou k opěrné stěně, jež znamená vlastní reakci opěrné stěny, a složku F rovnoběžnou se stěnou, znamenající tření, pokud zde působí. Reakce S se odchyluje od vodorovnice o úhel ϑ, od kolmice ke stěně o úhel δ_0; z obrazce plyne

$$\vartheta = \delta_0 + \varepsilon ,$$

je-li ε sklon opěrné stěny, kladný u stěny převislé.



Obr. 121.

Uvažujme těleso $O\,A\,D$ omezené opěrnou stěnou, povrchem sypké hmoty a dělicí rovinou $O\,D$. Nahradíme-li působení opěrné stěny reakcí S a působení sypké hmoty vpravo od roviny $O\,D$ silami, jimiž sypká hmota vpravo od roviny $O\,D$ tlačí na hmotu vlevo od této roviny a jež mají výslednici R, musí býti síly R, S v rovnováze s vahou Q sypké hmoty $O\,A\,D$. Síly, jimiž sypká hmota napravo od roviny $O\,D$ tlačí na hmotu vlevo od této roviny, jsou v rovnováze se silami, jimiž sypká hmota nalevo od roviny $O\,D$ tlačí na hmotu vpravo od téže roviny; výslednice R tlaků sypké hmoty nalevo od roviny $O\,D$ je tedy rovna a protivna výslednici tlaků sypké hmoty napravo od roviny $O\,D$. Pak je patrně výslednice R tlaků sypké hmoty nalevo od roviny $O\,D$ totožná s výslednicí sil vnějších, jež působí nalevo od roviny $O\,D$, t. j. reakce S opěrné stěny a váhy Q sypké hmoty, jejímž průřezem jest $O\,A\,D$.

Pokládejme reakci S zatím za známou a přenesme její určovací úsek $S = \overline{o\,k}$ do obrazce složkového. Uvažujme pás sypké hmoty o šířce b (viz obr. 119) a vypočtěme váhu

$$Q = \gamma \cdot b \cdot \text{pl. } O\,A\,D, \tag{307}$$

znamená-li γ měrnou váhu sypké hmoty. Úsek $Q = \overline{k\,d}$ sečteme v obrazci složkovém geometricky s úsekem síly S a stanovíme tím určovací úsek výslednice $R = \overline{o\,d}$. Výslednice R svírá s kolmicí k dělicí rovině $O\,D$ úhel δ; rovnováha se neporuší, pokud je

$$-\varphi \leqq \delta \leqq \varphi .$$

V této výmince je zahrnuto nesčíslné množství rovnováhových stavů; tření, se kterým zde jedině počítáme, dává vždy nikoli určitou hodnotu, nýbrž dvě meze, mezi nimiž je nekonečně mnoho možných případů. Pak i síla S se může měniti v jistých mezích, jež si vyšetříme.

Mysleme si, že stěna opěrná je dřevěná deska, která je tlačena silou N proti sypké hmotě; k síle N přistupuje tření touto silou vyvozené, jež se s ní skládá ve výslednou sílu S, rovnou a protivnou tlaku sypké hmoty. Je-li v nebezpečné rovině úhel $\delta < \varphi$, je v celé sypké hmotě rovnováha stálá a sílu N (nebo S) lze zmenšovati, aniž se rovnováha poruší. Poněvadž se váha Q nemění, uvažujeme-li stále touž rovinu $O\,D$, blíží se výslednice R ke svislici a úhel δ roste (obr. 121). Zmenší-li se síla S tak, až v rovině nebezpečné vyjde úhel $\delta = \varphi$, je v této rovině rovnováha vratká, ve všech ostatních dělicích rovinách rovnováha stálá. Kdybychom dále sílu S zmenšovali, porušila by se rovnováha v nebezpečné rovině; tím dospíváme ke spodní mezi rovnováhy, dané nejmenší hodnotou síly S. Při menší hodnotě síly S převládal by tlak sypké hmoty nad odporem opěrné stěny; sypká hmota by vytlačila opěrnou stěnu a pohybovala by se po ní i po rovině nebezpečné dolů. Má se tu tedy sypká hmota aktivně, i nazýváme hodnotu $\min S = \overline{o'\,k}$, ke které jsme tak dospěli, *aktivním tlakem* sypké hmoty nebo tlakem sypké hmoty v užším smyslu.

Jestliže naopak zvětšujeme sílu S, blíží se paprsek výslednice R kolmici k dělicí rovině $O\,D$ a úhel δ se zmenšuje. Dalším zvětšováním síly S nabude úhel δ hodnoty záporné a může konečně dostoupiti v nebezpečné rovině hodnoty $\delta = -\varphi$; tak přicházíme k horní mezi rovnováhy, při níž má síla S největší hodnotu. Zvětšení síly S přes tuto mez vedlo by k porušení rovnováhy v nebezpečné rovině, v níž by úhel δ přestoupil hodnotu $-\varphi$. Poněvadž by tu byla síla S příliš veliká, převládala by nad tlakem sypké hmoty a opěrná stěna by tu vytlačila sypkou hmotu, jež by se pak pohybovala po opěrné stěně i po nebezpečné rovině vzhůru. Sypká hmota se tu chová pasivně a proto slove stanovené $\max S = \overline{o''\,k}$ *pasivním tlakem* sypké hmoty.

Rovnováha v sypké hmotě je možná za nesčíslných množství hodnot S, jež jsou v mezích daných krajními hodnotami $\max S$ a $\min S$. Jde-li v praktickém případě o skutečnou zeď opěrnou, stačí, vzdoruje-li, ovšem s jistou bezpečností, silou $\min S$, poněvadž se tu má skutečně sypká hmota aktivně, tlačí na opěrnou zeď; rovnováha je pojištěna již při odporu rovném $\min S$. Kdyby šlo na př. o opěru klenbovou, na niž s druhé strany tlačí násyp, a měla-li by se porušiti rovnováha tlakem klenby, tedy vytlačením sypké hmoty, musila by se přestoupiti horní mez, t. j. $\max S$. Tomuto porušení rovnováhy by však musilo předcházeti stlačení sypké hmoty, jež by předpokládalo takový pohyb opěry, že by již tím nastalo zřícení klenby. Stačí pak i v tomto případě uvažovati sílu $\min S$, za které je rovnováha v sypké hmotě. Pro uvedené případy nemá tedy síla $\max S$ praktického významu.

γ) ***Velikost tlaku.*** Má-li se sypká hmota udržeti v rovnováze, musí opěrná stěna vzdorovati tlaku sypké hmoty reakcí rovnou nejméně aktivnímu tlaku $\min S$. Předpokládejme, že reakce opěrné stěny má tuto hodnotu, a že známe směr síly S. Pak jsme na mezi rovnováhy vyznačené tím, že v rovině nebezpečné, kde jest úhel δ největší, platí

$$\max \delta = \varphi.$$

V této rovině by nastalo porušení rovnováhy posouváním sypké hmoty podél této roviny; nazýváme proto nebezpečnou rovinu na mezi rovnováhy *rovinou smyku* nebo *posouvání*. Polohu její odvodíme z výminek, že úhel δ je pro tuto rovinu největší a rovná se právě úhlu φ.

Obecně jest úhel δ funkcí úhlu ω (obr. 120); $\max \delta$ žádá, aby platilo

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\omega} = 0,$$

kteréžto výminky užijeme geometricky. Změní-li se úhel ω na ω', změní se δ na δ'; jde-li o změnu nekonečně malou, jest

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\delta' - \delta}{\omega' - \omega} = 0,$$

je-li rovina $O\,D$ rovinou nebezpečnou. Poněvadž jmenovatel $(\omega' - \omega)$ není nekonečný, plyne z toho $\delta' - \delta = 0$ nebo

$$\delta' = \delta;$$

to znamená, že nekonečně malou změnou úhlu ω, který přísluší nebezpečné rovině, nepřestává tato rovina býti nebezpečnou. Zvětšíme-li úhel ω o $\mathrm{d}\omega$, obdržíme rovinu $O\,D'$; k váze Q sypké hmoty, jež má průřez $O\,A\,D$, přibude váha

$$\mathrm{d}Q = \gamma \cdot b \cdot \text{pl. } O\,D\,D';$$

kterou znázorníme ve složkovém obrazci úsekem $\overline{d\,d'}$. Obdržíme tak výslednici $R' = \overline{o\,d'}$. Vedeme-li $o\,e \perp O\,D$, $o\,e' \perp O\,D'$, jest $\sphericalangle e\,o\,d = \delta$, $\sphericalangle e'\,o\,d' = \delta'$, tedy

$$\sphericalangle e\,o\,d = \sphericalangle e'\,o\,d',$$

má-li být rovina $O\,D$ rovinou nebezpečnou. Pak je též

$$\sphericalangle e o e' = \sphericalangle d o d';$$

avšak $\sphericalangle e o e' = \sphericalangle D O D' = \mathrm{d}\omega$, poněvadž jsou ramena obou úhlů k sobě kolmá. Z toho plyne

$$\sphericalangle d o d' = \sphericalangle D O D' = \mathrm{d}\omega.$$

Trojúhelník $O D D'$ má ve vrcholu O úhel $\mathrm{d}\omega$; jeho obsah lze počítati tak, že za základnu vezmeme oblouček délky $\overline{OD}\cdot\mathrm{d}\omega$, opsaný ze středu O poloměrem $\overline{OD}$, za výšku pokládáme pak poloměr $\overline{OD}$. Vyjde tedy

$$\text{pl. } O D D' = \tfrac{1}{2}\overline{OD}^2\cdot\mathrm{d}\omega$$

a obdobně

$$\text{pl. } o d d' = \tfrac{1}{2}\overline{od}^2\cdot\mathrm{d}\omega.$$

Obrazec složkový můžeme rýsovati v libovolném měřidle; mysleme si pro jednodušší řešení, že jest obrazec složkový rýsován v takovém měřidle, že platí $\overline{od} = \overline{OD}$. Pak jest

$$\text{pl. } O D D' = \text{pl. } o d d'.$$

Stanovme dále poměr

$$\frac{\text{pl. } o d d'}{\text{pl. } o k d} = \frac{\overline{d d'}}{\overline{k d}} = \frac{\mathrm{d}Q}{Q} = \frac{\text{pl. } O D D'}{\text{pl. } O A D};$$

trojúhelníky $o d d'$ a $o k d$ mají totiž společnou výšku $\overline{oi}$, i mají se k sobě jako základny. Poněvadž se čitatelé prvého a posledního zlomku rovnají, vychází z toho

$$\text{pl. } o k d = \text{pl. } O A D. \tag{308}$$

Tím jsme užili výminky, že úhel δ je maximální; položíme nyní toto $\max \delta = \varphi$. Poněvadž jest $o e \perp O D$, platí podle obr. 122

$$\sphericalangle D O Y + \sphericalangle i o e = 90^\circ;$$

nahradíme-li

$$\sphericalangle D O Y = \sphericalangle D O B + \varphi,$$
$$\sphericalangle i o e = \sphericalangle i o d - \delta,$$

dostaneme

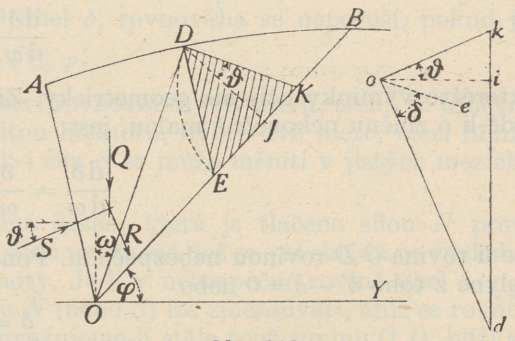
$$\sphericalangle D O B + \varphi + \sphericalangle i o d - \delta = 90^\circ.$$

Je-li pak $\delta = \varphi$, vyjde z toho

$$\sphericalangle D O B = 90^\circ - \sphericalangle i o d = \sphericalangle o d i.$$

Vedeme-li $D J \perp O B$, plyne z dokázané rovnosti úhlů a z rovnosti stran $\overline{OD} = \overline{od}$

$$\triangle O D J \cong \triangle d o i, \text{ tedy } \overline{DJ} = \overline{oi}.$$



Obr. 122.

Přeneseme-li od přímky $D J$ úhel $J D K = \vartheta = \sphericalangle i o k$, t. j. odchylku tlaku S od vodorovnice, je též

$$\triangle D J K \cong \triangle o i k \text{ a } \triangle O D K \cong \triangle d o k,$$

neboť každý z obou posledních trojúhelníků rovná se součtu dvou shodných trojúhelníků. Ze shodnosti plyne

$$\text{pl. } O D K = \text{pl. } o k d;$$

spojením s rovnicí (308) vychází pak **výminka nebezpečné roviny** ve tvaru rovnice

$$\text{pl.}\,OAD = \text{pl.}\,ODK. \tag{309}$$

Velikost tlaku S určíme dále z poměru

$$\frac{S}{Q} = \frac{\overline{ok}}{\overline{kd}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{OK}},$$

jak plyne ze shodnosti trojúhelníků dok a ODK. Přeneseme-li $\overline{DK} = \overline{EK}$, vyjde, hledíc k rovnici (309),

$$\frac{S}{Q} = \frac{\overline{EK}}{\overline{OK}} = \frac{\text{pl.}\,DEK}{\text{pl.}\,ODK} = \frac{\text{pl.}\,DEK}{\text{pl.}\,OAD}.$$

Použijeme-li rovnice (307), dostaneme

$$\frac{S}{\text{pl.}\,DEK} = \frac{Q}{\text{pl.}\,OAD} = \gamma \cdot b;$$

znamenáme-li

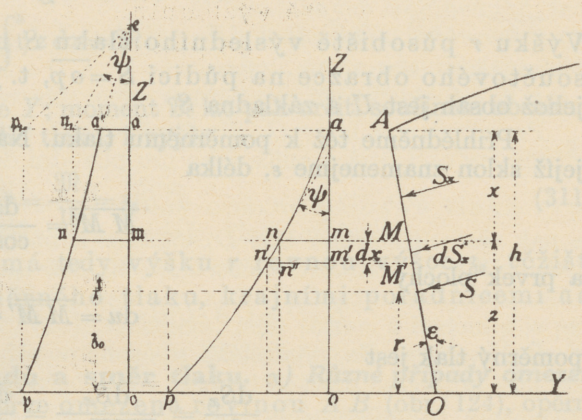
$$\text{pl.}\,DEK = V,$$

máme konečně

$$S = \gamma b V. \tag{310}$$

Je tedy tlak sypké hmoty S roven váze hranolu ze sypké hmoty, jehož základnou je trojúhelník DEK, výška pak se rovná šířce b uvažovaného dílu sypké hmoty.

δ) ***Působiště tlaku.*** Pokládejme směr tlaku S i dále za známý a vyšetřme polohu jeho působiště, jež závisí na tom, jak přibývá tlaku do hloubky. Jako tlak S na celou výšku opěrné stěny h (obr. 123) určili bychom i tlak S_x na libovolnou část AM opěrné stěny; hloubku bodu M pod bodem A znamenejme x, výška bodu M nad bodem O budiž z. Přenesme podle určitého měřidla od osy Z úseky $S = \overline{op}$ ve hloubce h a $S_x = \overline{mn}$ ve hloubce x pod bodem A. Měřickým místem bodu n je čára anp, jejíž vodorovná pořadnice v libovolném místě dává součet tlaků od bodu A až do hloubky, v níž je pořadnice vedena; čára anp slove tedy *součtovou čarou* tlaku sypké hmoty.



Obr. 123.

Hloubce x odpovídá tlak $S_x = \overline{mn}$; zvětšíme-li hloubku x o dx, tedy přejdeme-li od bodu M k sousednímu bodu M', dostaneme na hloubku $x + dx$ tlak

$$S_x + dS_x = \overline{m'n'}.$$

Přírůst tlaku na hloubku dx jest

$$dS_x = \overline{m'n'} - \overline{mn} = \overline{n''n'},$$

je-li $\overline{m'n''} = \overline{mn}$. Kdybychom rozdělili podobně celou stěnu opěrnou na samé proužky nekonečně úzké, působil by na každý proužek elementární tlak dS_x. O těchto tlacích

předpokládáme, že jsou rovnoběžné; pak mají tyto tlaky výslednici rovnou součtu složek, tedy

$$S = \int_0^h \mathrm{d}S_x .$$

Paprsek výslednice S určíme z výminky, že se moment výslednice k libovolnému bodu rovná součtu momentů složek k témuž bodu. Působiště výslednice na rovné stěně opěrné je pak statickým středem soustavy bodů stěny, v nichž působí elementární tlaky $\mathrm{d}S_x$. Paprsek výslednice S jde statickým středem za každého zaměření rovnoběžných sil $\mathrm{d}S_x$. Myslíme-li si paprsky všech sil vodorovné, má uvedená momentová výminka tvar

$$S \cdot r = \int_0^h z \cdot \mathrm{d}S_x ,$$

z něhož plyne výška působiště

$$r = \frac{\int_0^h z \cdot \mathrm{d}S_x}{S} . \tag{311}$$

Součin $z \cdot \mathrm{d}S_x = z \cdot \overline{n'' n'}$ znamená obsah proužku omezeného svislicemi bodů n, n', čarou součtovou a osou Y. Pak jest

$$\int_0^h z \cdot \mathrm{d}S_x = \text{pl. } a\,n\,p\,o = U$$

obsah obrazce součtového a z rovnice (311) vychází

$$r = \frac{U}{S} . \tag{311a}$$

Výšku r působiště výsledního tlaku S určíme tedy, uvedeme-li obsah U součtového obrazce na půdici $S = \overline{o\,p}$, t. j. výška r se rovná výšce obdélníka, jehož obsah jest U a základna S.

Přihlédněme též k poměrnému tlaku. Na hloubku $\mathrm{d}x$ připadá v opěrné stěně, jejíž sklon znamenejme ε, délka

$$\overline{M\,M'} = \frac{\mathrm{d}x}{\cos \varepsilon}$$

a prvek plochy

$$\mathrm{d}u = \overline{M\,M'} \cdot b ;$$

poměrný tlak jest

$$\frac{\mathrm{d}S_x}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}S_x}{\overline{M\,M'} \cdot b} = \frac{\mathrm{d}S_x}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\cos \varepsilon}{b} .$$

Mění-li se úsečka x, mění se pouze poměr

$$\frac{\mathrm{d}S_x}{\mathrm{d}x} = \sigma_x , \tag{312a}$$

jejž nazývejme poměrným tlakem v užším smyslu. Znamená poměr dvou délek a lze jej vyjádřiti ve tvaru

$$\sigma_x = \frac{\eta}{e} . \tag{312b}$$

je-li η proměnná pořadnice a e stálý úsek. Pak jest

$$\eta = e\,\sigma_x = e \cdot \frac{\mathrm{d}S_x}{\mathrm{d}x} = e \cdot \operatorname{tg}\psi\,,$$

znamená-li ψ odchylku tečny nn' k součtové čáře od osy Z, neboť tu platí $\frac{\mathrm{d}S_x}{\mathrm{d}x} = \operatorname{tg}\psi$. Přeneseme-li (obr. 123) $e = \overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{e}}$ a vedeme-li $\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}_1 \parallel nn'$, sestrojíme úsek

$$\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{n}_1} = \overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{e}} \cdot \operatorname{tg}\psi = e \cdot \operatorname{tg}\psi = \eta\,.$$

Pořadnici η přeneseme v hloubce x od osy Z' jakožto pořadnici $\overline{\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}} = \eta = \overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{n}_1}$; měřickým místem bodů $\mathfrak{n}$ je *čára poměrného tlaku* $\mathfrak{a}'\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{p}$.

Z této čáry určíme též působiště výsledního tlaku S. Neboť lze psáti

$$S = \int_0^h \mathrm{d}S_x = \int_0^h \frac{\mathrm{d}S_x}{\mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{e}\int_0^h \eta\,\mathrm{d}x\,, \qquad S \cdot r = \int_0^h z \cdot \mathrm{d}S_x = \int_0^h z \cdot \frac{\mathrm{d}S_x}{\mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{e}\int_0^h \eta\, z\,\mathrm{d}x\,;$$

dělením obou rovnic plyne

$$r = \frac{\int_0^h \eta\, z\,\mathrm{d}x}{\int_0^h \eta\,\mathrm{d}x}\,.$$

Zde jest

$$\int_0^h \eta\,\mathrm{d}x = \text{pl. } \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{o} = \mathfrak{U}$$

obsah obrazce poměrného tlaku a

$$\int_0^h \eta\, z\,\mathrm{d}x = \mathfrak{M}$$

statický moment tohoto obrazce k ose Y; moment $\mathfrak{M}$ lze pak určiti součinem obsahu $\mathfrak{U}$ a výšky z_0 těžiště t obrazce poměrného tlaku, i vyjde

$$r = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{U}} = z_0\,. \qquad (311^b)$$

Působiště výsledního tlaku S má tedy výšku r rovnou výšce z_0 těžiště obrazce omezeného čarou poměrného tlaku, krajními pořadnicemi $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{o}\,\mathfrak{p}$ a osou Z'.

37. Řešení zvláštních případů a směr tlaku. *α) Různé případy omezení povrchu.* Sypká hmota budiž nejprve omezena rovinou AB (obr. 124), opěrná stěna OA je též rovná. Nebezpečná rovina OD je stanovena výminkou (309)

$$\text{pl. } OAD = \text{pl. } ODK;$$

přímka DK se odchyluje od kolmice DJ k přirozené sklonině OB o úhel ϑ, jejž svírá výslední tlak S s vodorovnou. Připočteme na obou stranách poslední rovnice pl. ODB; vyjde tím

$$\text{pl. } OAB = \text{pl. } ODK + \text{pl. } ODB.$$

Vyjádřeme obsahy trojúhelníků, berouce základny v přímce OB a výšky k nim kolmé; je-li $AJ' \perp OB$, vyjde

$$\tfrac{1}{2}\overline{OB} \cdot \overline{AJ'} = \tfrac{1}{2}\overline{OK} \cdot \overline{DJ} + \tfrac{1}{2}\overline{OB} \cdot \overline{DJ}$$

nebo

$$\overline{OB}\cdot\overline{AJ'}=\overline{DJ}\,(\overline{OK}+\overline{OB}).$$

Z toho plyne

$$\frac{\overline{OK}+\overline{OB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{AJ'}}{\overline{DJ}}.$$

Z obr. 124 určíme, je-li $AK'\parallel DK$,

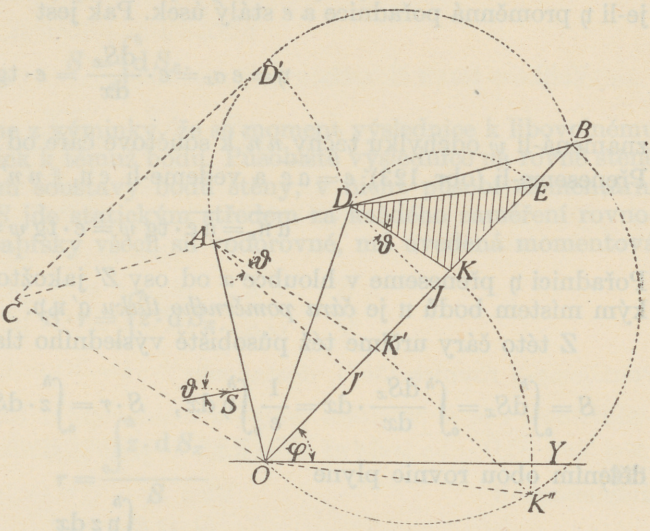
$$\frac{\overline{AJ'}}{\overline{DJ}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{K'B}}{\overline{KB}}=\frac{\overline{OB}-\overline{OK'}}{\overline{OB}-\overline{OK}};$$

pak jest

$$\frac{\overline{OK}+\overline{OB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OB}-\overline{OK'}}{\overline{OB}-\overline{OK}}$$

nebo

$$(\overline{OB}+\overline{OK})\,(\overline{OB}-\overline{OK})=$$
$$=\overline{OB}\,(\overline{OB}-\overline{OK'}).$$



Obr. 124.

Výminka nebezpečné roviny vychází tedy ve tvaru

$$\overline{OK}^2=\overline{OB}\cdot\overline{OK'}. \qquad (313^a)$$

Podle toho sestrojíme bod K, určíme-li bod K' přímkou AK', jež se odchyluje od přímky $AJ'\perp OB$ o úhel ϑ. Pak opíšeme polokružnici nad průměrem $\overline{OB}$ a vedeme $K'K''\perp OB$, i vyjde

$$\overline{OK''}^2=\overline{OB}\cdot\overline{OK'}=\overline{OK}^2$$

nebo $\overline{OK''}=\overline{OK}$. Vedeme-li dále přímku $KD\parallel K'A$, jest OD nebezpečná rovina. Velikost tlaku stanovíme, přeneseme-li $\overline{KD}=\overline{KE}$ na přímku OB; znamenáme-li pl. $DEK=V$, je tlak S na opěrnou stěnu dán rovnicí (310).

Promítneme-li body O, K', K přímkami $OC\parallel K'A\parallel KD$ na přímku AB, platí pro průměty obdobná rovnice jako pro původní délky, to jest

$$\overline{CD}^2=\overline{CA}\cdot\overline{CB}. \qquad (313^b)$$

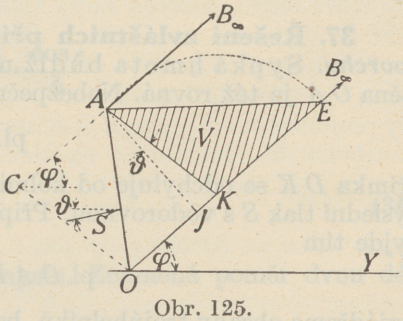
Lze pak sestrojiti přímo bod D, opíšeme-li na př. polokružnici nad průměrem $\overline{AB}$ a vedeme-li k ní z bodu C tečnu CD'; tu jest

$$\overline{CD'}^2=\overline{CA}\cdot\overline{CB}=\overline{CD}^2 \quad\text{nebo}\quad \overline{CD'}=\overline{CD}.$$

Řešíme-li podle předešlého způsobu v případě, kdy je povrch omezen rovinou rovnoběžnou s přirozenou skloninou (obr. 125), vyjde bod B v nekonečnu a rovnice (313^b) dá

$$\overline{CD}^2=\overline{CA}\cdot\overline{CB}=\infty,$$

je tedy i bod D úběžným bodem povrchu. Nebezpečná rovina OD splývá tu s přirozenou skloninou. Kdybychom si zde myslili bod D kdekoli na povrchu sypké hmoty, měl by všude od přirozené skloniny stejnou vzdálenost a trojúhelník V, jenž stanoví podle rovnice (310) velikost tlaku S, vyšel by všude týž. Můžeme tedy sestrojiti trojúhelník V na př. u bodu A: vedeme přímku AK v odchylce ϑ od přímky $AJ\perp OK$, přeneseme $\overline{KA}=\overline{KE}$ do přirozené skloniny a pl. $AKE=V$.



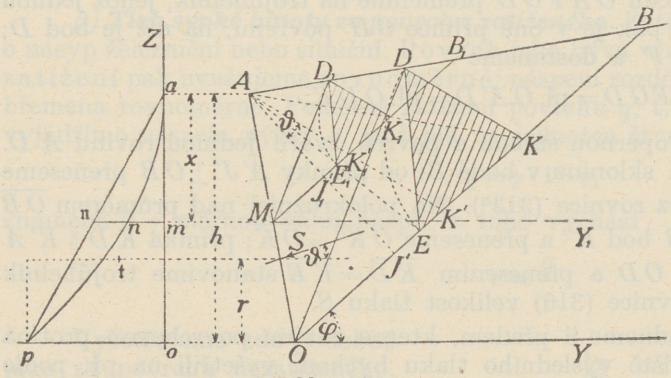
Obr. 125.

Působiště výsledního tlaku určíme z čáry součtové nebo z čáry poměrného tlaku. Jak jsme určili tlak S na celou výšku stěny OA, určíme i tlak S_x na část AM (obr. 126). Pro tlak na celou výšku OA vedeme bodem O přirozenou skloninu OB v odchylce φ od vodorovné osy Y, přeneseme od přímky $AJ' \perp OB$ úhel ϑ tlaku S s vodorovnou a sestrojíme bod K podle rovnice (313[a]); přímka $KD \parallel K'A$ určí nebezpečnou rovinu OD a přenesením $\overline{KD} = \overline{KE}$ plyne pl. $DEK = V$. Jde-li o tlak na část AM opěrné stěny, vedli bychom podobně bodem M přirozenou skloninu $MB_1 \parallel OB$, dále bodem A přímku $AJ_1' \perp MB_1$ a přímku AK_1' v odchylce ϑ od přímky AJ_1'; tu patrně splývá přímka AJ_1' s přímkou AJ' a přímka AK_1' s přímkou AK'. Podle rovnice (313[a]) platilo by nyní

$$\overline{MK_1}^2 = \overline{MK_1'} \cdot \overline{MB_1};$$

poněvadž jsou body M, K_1', B_1 na paprscích, spojujících body O, K', B s bodem A, vyjde i bod K_1 na paprsku AK. Obrazec pro část AM opěrné stěny a obrazec pro celou stěnu jsou podobny; středem podobnosti je bod A. Dále je též $K_1D_1 \parallel KD$ a vyjde $MD_1 \parallel OD$; spojnice AE určí na MB_1 bod E_1, pro nějž platí $\overline{K_1D_1} = \overline{K_1E_1}$. Znamenáme-li pl. $D_1E_1K_1 = V_1$, připadne na celou výšku h opěrné stěny tlak

$$S = \gamma b V,$$



Obr. 126.

na hloubku x, t. j. na část AM tlak

$$S_x = \gamma b V_1.$$

Z toho plyne poměr

$$\frac{S_x}{S} = \frac{V_1}{V} = \frac{x^2}{h^2},$$

neboť V_1, V jsou obsahy dvou podobných trojúhelníků, jež se mají k sobě jako čtverce kterýchkoli dvou sdružených úseků; platí tedy rovnice

$$S_x = \frac{S}{h^2} x^2, \qquad (314)$$

podle níž za rovného povrchu a rovné stěny opěrné přibývá tlaku sypké hmoty do hloubky v poměru čtverečném jako tlaku vodního.

V obrazci součtovém přeneseme úsek $S = \overline{op}$ na vodorovnici bodu O. Rovnice (314) ukazuje, že je součtovou čarou obyčejná parabola, jejíž vrchol je v počátku a, tečnou vrcholovou je pak osa Z (obr. 126); vrcholem, jeho tečnou a bodem p je parabola anp úplně stanovena. Na vodorovnici bodu M určuje pak součtová parabola pořadnici $\overline{mn} = S_x$.

Stanovíme též poměrný tlak definovaný rovnicemi (312)

$$\sigma_x = \frac{dS_x}{dx} = \frac{\eta}{e}.$$

Z rovnice (314) odvodíme

$$\frac{\eta}{e} = \frac{dS_x}{dx} = \frac{2S}{h^2} x;$$

zvolíme-li $e = \frac{1}{2}h$, vyjde

$$\eta = \frac{S}{h} x. \qquad (315)$$

Čarou poměrného tlaku je přímka, kterou určíme dvěma body: pro $x = 0$ vyjde $\mathfrak{y} = 0$, pro $x = h$ jest $\mathfrak{y} = S = \overline{op}$. Přímka ap je tedy čarou poměrného tlaku; na vodorovnici bodu M dá pořadnici $\overline{mn} = \mathfrak{y}$, jež stanoví poměrný tlak σ_x podle vzorce (312^b).

Obrazec součtový má obsah

$$U = \text{pl. } anpo = \tfrac{1}{3}\overline{op} \cdot \overline{oa} = \tfrac{1}{3} Sh;$$

ze vzorce (311^a) vyjde pak výška působiště výsledního tlaku

$$r = \frac{U}{S} = \tfrac{1}{3} h. \tag{316}$$

Totéž vychází podle vzorce (311^b) z obrazce poměrného tlaku, jenž má těžiště t ve výšce $\mathfrak{z}_0 = \frac{1}{3} h$ od základny op.

Povrch sypké hmoty $AFGH \ldots$ budiž dále lomený (obr. 127), tedy vytvořen soustavou rovin. Nebezpečná rovina OD musí vyhověti výmince (309), jíž třeba zde psáti

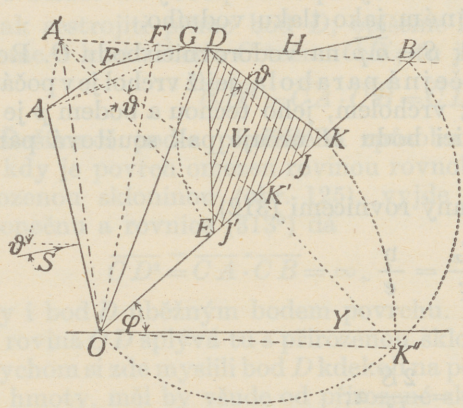
$$\text{pl. } OAFGD = \text{pl. } ODK;$$

přímka DK odchyluje se zase od přímky $DJ \perp OB$ o úhel ϑ, jejž svírá paprsek výsledního tlaku S s vodorovnou. Plochu $OAFGD$ přeměňme na trojúhelník, jehož jednou stranou jest OD, druhá strana pak je v oné přímce GH povrchu, na níž je bod D; tu vedeme $FF' \parallel AG$, $AA' \parallel OF'$ a dostaneme

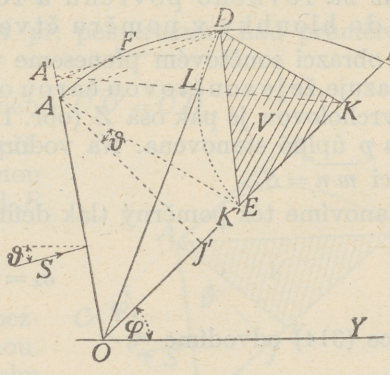
$$\text{pl. } OAFGD = \text{pl. } OA'D = \text{pl. } ODK.$$

Pak řešíme, jako by OA' byla opěrnou stěnou a povrch tvořil jedinou rovinu $A'D$. Přímka $A'D$ protne přirozenou skloninu v bodě B; od přímky $A'J' \perp OB$ přeneseme $\sphericalangle J'A'K' = \vartheta$ a určíme bod K z rovnice (313^a). Na polokružnici nad průměrem $\overline{OB}$ stanovíme přímkou $K'K'' \perp OB$ bod K'' a přeneseme $\overline{OK''} = \overline{OK}$; přímka $KD \parallel K'A$ určí bod D nebezpečné roviny OD a přenesením $\overline{KD} = \overline{KE}$ stanovíme trojúhelník $DEK = V$, jenž dává podle rovnice (310) velikost tlaku S.

Řešení lze provésti, odhadneme-li předem, kterou rovinu povrchovou protíná nebezpečná rovina OD. Působiště výsledního tlaku bychom vyšetřili na př. podle vzorce (311^a) z obrazce součtového, jejž bychom stanovili, kdybychom podle předešlého způsobu určili tlak na různé hloubky opěrné stěny.



Obr. 127.



Obr. 128.

Je-li sypká hmota omezena křivou plochou (obr. 128), řešíme zkusmo. Od přímky $AJ' \perp OB$ přeneseme $\sphericalangle J'AK' = \vartheta$ a zvolíme od oka polohu nebezpečné

roviny OD; správná poloha nebezpečné roviny musí hověti rovnici (309)

$$\text{pl.}\, OAFD = \text{pl.}\, ODK,$$

je-li $DK \parallel AK'$ a znamená-li $OAFD$ plochu omezenou opěrnou stěnou OA, povrchem sypké hmoty AFD a nebezpečnou rovinou OD. Plochu $OAFD$ převedeme na trojúhelník přímočarý; tětivou AD oddělíme úseč AFD, kterou pokládáme přibližně za parabolickou, a přeměníme ji na trojúhelník $AA'D$ téhož obsahu. Pak obdržíme

$$\text{pl.}\, OAFD = \text{pl.}\, OA'D = \text{pl.}\, ODK.$$

Trojúhelníky $OA'D$, ODK mají společnou stranu OD; jejich obsahy se pak rovnají, mají-li body A', K stejné vzdálenosti od roviny OD. Spojnice $A'K$ musí tu být půlena přímkou OD, t. j.

$$\overline{A'L} = \overline{LK}.$$

Nevyhovuje-li tomu zvolená poloha roviny OD, opravíme ji a přesvědčíme se znovu, platí-li pro opravenou polohu poslední rovnice. Velikost tlaku určíme zase ze vzorce (310), je-li $V = \text{pl.}\, DEK$ a $\overline{DK} = \overline{EK}$. Působiště výsledního tlaku stanovili bychom zase na př. z obrazce součtového, jejž bychom určili vyšetřením tlaků pro různé hloubky opěrné stěny podle způsobu právě odvozeného.

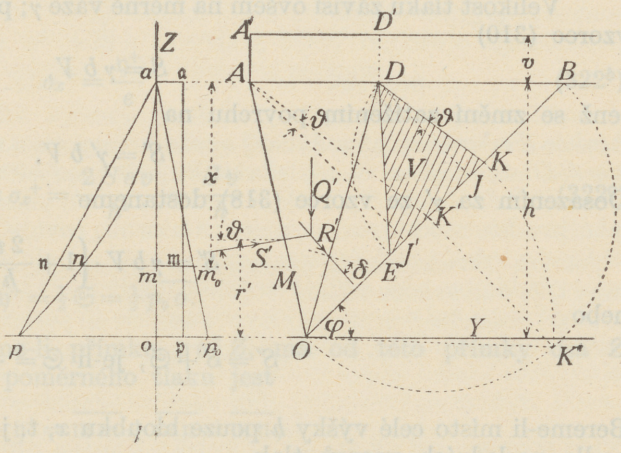
*β) **Tlak sypké hmoty za povrchu zatíženého.*** Zatížený povrch se vyskytuje, jde-li o násyp železniční nebo silniční. Povrch jeho bývá vodorovný, což předpokládejme, zatížení pak uvažujeme rovnoměrné; náspem rozdělují se v určité hloubce i osamělá břemena rovnoměrně. Poměrné zatížení povrchu q, t. j. zatížení čtverečné jednotky, vyjádříme náspem výšky v, jenž má na jednotce čtverečné váhu

$$q = \gamma \cdot 1^2 \cdot v,$$

znamená-li γ měrnou váhu náspu; z toho vychází

$$v = \frac{q}{\gamma}. \tag{317}$$

Vyšetřujeme zde podobně jako za povrchu nezatíženého. Opěrnou stěnu nahradíme reakcí S' a sypkou hmotu i se zatížením povrchu vlevo od dělicí roviny OD vahou Q'; obě síly se skládají ve výslednici R', jejíž paprsek svírá s kolmicí k rovině OD úhel δ (obr. 129). Úhel δ se mění, mění-li se dělicí rovina OD; v rovině nebezpečné jest úhel δ největší, a na mezi rovnováhy jest $\max \delta = \varphi$.



Obr. 129.

Mění-li se rovina OD, mění se při povrchu nezatíženém váha

$$Q = \gamma \cdot b \cdot \text{pl.}\, OAD,$$

jež jest úměrná k ploše OAD; závisí tedy vše na proměně plochy OAD. Za povrchu zatíženého obsahuje váha Q' také zatížení povrchu, jež je dáno náspem výšky v, a jest

$$Q' = \gamma \cdot b \cdot (\text{pl.}\, OAD + \text{pl.}\, AA'D'D) = \gamma \cdot b \cdot \text{pl.}\, OAD \left(1 + \frac{\text{pl.}\, AA'D'D}{\text{pl.}\, OAD}\right).$$

Z obr. 129 plyne, je-li povrch AB vodorovný,

$$\frac{\text{pl. } AA'D'D}{\text{pl. } OAD} = \frac{\overline{AD} \cdot v}{\frac{1}{2}\overline{AD} \cdot h} = \frac{2v}{h};$$

pak jest

$$Q' = \gamma \cdot b \cdot \text{pl. } OAD \cdot \left(1 + \frac{2v}{h}\right).$$

Mění-li se rovina OD, mění se pouze pl. OAD jako za povrchu nezatíženého; činitel

$$\gamma' = \gamma\left(1 + \frac{2v}{h}\right) \tag{318}$$

se vůbec nemění, a tímto označením vychází

$$Q' = \gamma' \cdot b \cdot \text{pl. } OAD. \tag{319}$$

Zatížení povrchu má tedy týž účinek, jako by se změnila pouze měrná váha γ ve váhu γ' podle vzorce (318); jinak zůstane vše jako za povrchu nezatíženého. Pokud výsledky, ke kterým jsme dospěli, neobsahují měrné váhy γ, platí i zde; ve výsledcích, které obsahují γ, nahradíme γ zvětšenou měrnou vahou γ'.

Rovina nebezpečná je stanovena rovnicí (309)

$$\text{pl. } OAD = \text{pl. } ODK,$$

v níž se γ nevyskytuje. Určí se tedy rovina nebezpečná za povrchu zatíženého jako za povrchu nezatíženého. Je-li $AJ' \perp OB$ a $\sphericalangle J'AK' = \vartheta$, určíme bod K z rovnice (313^a)

$$\overline{OK}^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OK'}$$

touž konstrukcí jako v obr. 124; přímka $KD \parallel K'A$ určí pak bod D nebezpečné roviny OD.

Velikost tlaku závisí ovšem na měrné váze γ; platí pro ni za povrchu nezatíženého vzorec (310)

$$S = \gamma b V,$$

jenž se změní zatížením povrchu na

$$S' = \gamma' b V.$$

Dosazením za γ' ze vzorce (318) dostaneme

$$S' = \gamma b V \cdot \left(1 + \frac{2v}{h}\right) \tag{320^a}$$

nebo

$$S' = S + \mathfrak{S}, \text{ je-li } \mathfrak{S} = \frac{2Sv}{h}. \tag{320^b}$$

Bereme-li místo celé výšky h pouze hloubku x, t. j. část AM opěrné stěny, obdržíme podle posledních vzorců tlak

$$S'_x = S_x + \mathfrak{S}_x, \ \mathfrak{S}_x = \frac{2S_x v}{x}. \tag{321^a}$$

Sestrojme součtový obrazec tak, že přeneseme vlevo od osy Z tlaky S_x, jež odpovídají povrchu nezatíženému, a vpravo od osy Z doplňky $\mathfrak{S}_x$ vyjadřující účinek zatížení povrchu. Tlak S_x za povrchu nezatíženého se mění podle rovnice (314); součto-

vou čarou je parabola $a\,n\,p$, jež má v bodě a vrchol, v něm svislou tečnu a jest určena pořadnicí $S = \overline{o\,p}$ (obr. 129). Dosadíme-li do vzorce pro $\mathfrak{S}_x$ za S_x ze vzorce (314), dostaneme *doplněk tlaku*

$$\mathfrak{S}_x = \frac{2\,S\,v}{h^2}\,x, \tag{321^b}$$

jenž se řídí zákonem přímky. Pro $x = 0$ vyjde $\mathfrak{S}_x = 0$, jde tedy přímka doplňku bodem a. Za $x = h$ určíme

$$\mathfrak{S} = \frac{2\,S\,v}{h};$$

přeneseme-li $\overline{o\,k} = 2\,v$ a vedeme-li $k\,p_0 \parallel a\,p$, sestrojíme úsek

$$\overline{o\,p_0} = \overline{o\,p} \cdot \frac{\overline{o\,k}}{\overline{o\,a}} = S \cdot \frac{2\,v}{h} = \mathfrak{S}.$$

Od přímky $p_0\,a$ k ose Z měříme vodorovně pořadnice doplňků $\mathfrak{S}_x = \overline{m_0\,m}$. Přistupuje tedy v obrazci součtovém k parabolickému obrazci $o\,a\,n\,p$ trojúhelník $o\,a\,p_0$.

Stanovme též poměrný tlak

$$\sigma'_x = \frac{\mathrm{d}\,S'_x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\,S_x}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{S}_x}{\mathrm{d}x} = \sigma_x + \sigma_x{}^+; \tag{322^a}$$

σ_x je poměrný tlak za povrchu nezatíženého, pro nějž platí

$$\sigma_x = \frac{\mathfrak{y}}{e}.$$

Volíme-li $e = \frac{1}{2}h$, jest $\mathfrak{y}$ vodorovnou pořadnicí $\overline{m\,\mathfrak{n}}$ přímky $a\,p$. *Doplněk poměrného tlaku* plyne ze vzorce (321^b) hodnotou

$$\sigma_x{}^+ = \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{S}_x}{\mathrm{d}x} = \frac{2\,S\,v}{h^2}$$

a je stálý. Znamenáme-li zase

$$\sigma_x{}^+ = \frac{\mathfrak{y}^+}{e} \tag{322^b}$$

a volíme-li $e = \frac{1}{2}h$, vyjde

$$\mathfrak{y}^+ = e\,\sigma_x{}^+ = \frac{2\,S\,e\,v}{h^2} = \frac{S\,v}{h}; \tag{322^c}$$

podle vzorce (320^b) platí

$$\mathfrak{y}^+ = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{S} = \tfrac{1}{2}\,\overline{p_0\,o}.$$

Učiníme-li tedy $\overline{p_0\,\mathfrak{p}} = \overline{\mathfrak{p}\,o}$ a vedeme-li přímku $\mathfrak{p}\,\mathfrak{a} \parallel Z$, má od této přímky osa Z vzdálenost $\mathfrak{y}^+$. Celková pořadnice poměrného tlaku jest

$$\mathfrak{y}' = \mathfrak{y} + \mathfrak{y}^+ = \overline{\mathfrak{m}\,m} + \overline{m\,\mathfrak{n}} = \overline{\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}};$$

zatížením povrchu přibude v obrazci poměrného tlaku k trojúhelníku $o\,a\,p$ obdélník $\mathfrak{a}\,a\,o\,\mathfrak{p}$.

Působiště výsledního tlaku S' má výšku r', pro niž platí obdobně ke vzorci (311^a) rovnice

$$r' = \frac{U'}{S'};$$

obsah U' součtového obrazce třeba uvésti na půdici S'. Určíme obsah

$$U' = \text{pl.}\, a\, n\, p\, p_0 = \text{pl.}\, a\, n\, p\, o + \text{pl.}\, a\, o\, p_0 = \tfrac{1}{3} S h + \tfrac{1}{2} \mathfrak{S} h;$$

dosazením za $\mathfrak{S}$ ze vzorce (320^b) vyjde

$$U' = \tfrac{1}{3} S h + S v = \tfrac{1}{3} S (h + 3 v).$$

Dále jest

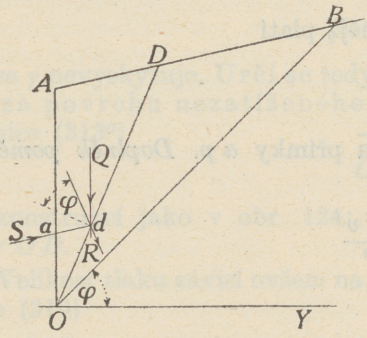
$$S' = S + \mathfrak{S} = S + \frac{2 S v}{h} = \frac{S}{h} (h + 2 v)$$

a tedy

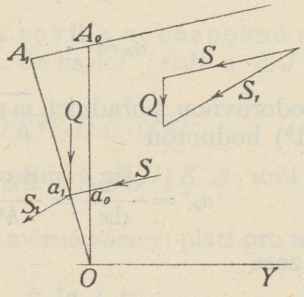
$$r' = \frac{U'}{S'} = \frac{h}{3} \cdot \frac{h + 3 v}{h + 2 v}. \tag{323}$$

Obtížením povrchu se posune působiště výsledního tlaku do výše, neboť jest $r' > \tfrac{1}{3} h$. K téže hodnotě r' bychom dospěli z obrazce poměrného tlaku.

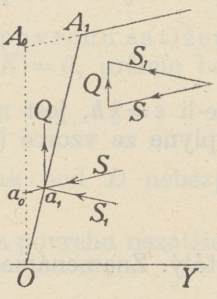
γ) ***Směr tlaku*** sypké hmoty na opěrnou stěnu plyne určitě z odvozené theorie, je-li sypká hmota omezena svrchu rovinou. Vyjděme od opěrné stěny OA svislé (obr. 130). Odvodili jsme, že za rovného povrchu přibývá tlaku na opěrnou stěnu do hloubky v poměru čtverečném a působiště a výsledního tlaku S je ve výšce $\overline{Oa} = \tfrac{1}{3} \overline{OA}$.



Obr. 130.



Obr. 131.



Obr. 132.

Reakce S opěrné stěny a váha Q sypké hmoty mezi opěrnou stěnou a nebezpečnou rovinou OD skládají se ve výslednici R, jejíž paprsek svírá na mezi rovnováhy s kolmicí k rovině OD úhel φ. Týž zákon rozdělení tlaku jako pro libovolnou stěnu opěrnou platí také pro kteroukoli rovinu dělicí; tlaku na rovinu OD přibývá tedy do hloubky též v poměru čtverečném a působiště d výslednice R je ve výšce $\overline{Od} = \tfrac{1}{3} \overline{OD}$. Paprsek váhy Q je dán svislou tížnicí trojúhelníka OAD i jde také bodem d. Síla R je výslednicí sil S, Q; procházejí proto paprsky všech tří sil jedním bodem, t. j. patrně bodem d, jímž jdou již paprsky sil Q, R. Paprsek S spojuje tedy body a, d; poněvadž pak platí

$$\overline{Oa} : \overline{OA} = \overline{Od} : \overline{OD} = 1 : 3,$$

vyjde spojnice $ad \parallel AD$. Je-li sypká hmota omezena svrchu rovinou, působí podle toho na svislou stěnu opěrnou tlakem rovnoběžným s povrchem.

Z tlaku na svislou stěnu opěrnou vyšetříme snadno tlak na opěrnou stěnu sklonitou. Je-li opěrná stěna OA_1 převislá (obr. 131), vedeme její patou svislou rovinu OA_0 a určíme tlak S na tuto rovinu, jenž je rovnoběžný s povrchem a působí v bodě a_0 ve výši $\overline{Oa_0} = \tfrac{1}{3} \overline{OA_0}$. Známe-li směr tlaku S, vyšetřili bychom jeho velikost podle obr. 124. Tlakem S lze nahraditi sypkou hmotu napravo od roviny OA_0; tlak S_1

na rovinu OA_1 je pak výslednicí tlaku S a váhy Q sypké hmoty mezi rovinami OA_0, OA_1. Paprsek S rovnoběžný s povrchem protne rovinu OA_1 v bodě a_1, pro nějž platí

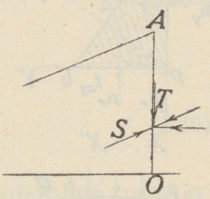
$$\overline{Oa_1} : \overline{OA_1} = \overline{Oa_0} : \overline{OA_0} = 1 : 3,$$

týmž bodem a_1 jde též paprsek Q, jenž je tížnicí trojúhelníka OA_0A_1. Paprsek výslednice S_1 jde průsečíkem a_1 paprsků složek S, Q a je rovnoběžný s úsekem, jejž určíme v obrazci složkovém, sečteme-li geometricky úseky sil S, Q.

U ležaté stěny opěrné OA_1 (obr. 132) řešíme podobně. Vedeme patou opěrné stěny svislou rovinu OA_0 a myslíme si sypkou hmotu prodlouženou až k této rovině. Tlak S na svislou rovinu OA_0 je rovnoběžný s povrchem a působí v bodě a_0 ve výšce $\overline{Oa_0} = \frac{1}{3}\overline{OA_0}$; velikost tlaku S dovedeme již určiti. Tlak S_1 na stěnu OA_1 liší se od tlaku S tím, že odpadá sypká hmota mezi rovinami OA_0, OA_1; váhu Q této sypké hmoty tedy zrušíme, t. j. složíme tlak S se silou $-Q$ a stanovíme tím tlak S_1. Paprsky S, Q jdou bodem a_1 ve výši $\overline{Oa_1} = \frac{1}{3}\overline{OA_1}$; týmž bodem a_1 jde též paprsek S_1.

Podobně bychom mohli řešiti, kdyby byla opěrná stěna lomená, nikoli rovná.

U sypké hmoty omezené svrchu rovinou podává tedy odvozená theorie v každém případě zcela určitě směr tlaku. Na svislou stěnu opěrnou působí tu vždy tlak rovnoběžně s povrchem. Klesá-li povrch sypké hmoty od opěrné stěny svislé OA (obr. 133), vyjde podle toho tlak S sypké hmoty vzhůru působící; reakce opěrné stěny působí směrem protivným, její složka T rovnoběžná s opěrnou stěnou směřuje tedy dolů. Složka T reakce opěrné stěny znamená tření, pokud zde působí, a tření působí vždy proti možnému pohybu. Vyšetřujeme stále aktivní tlak min S, jenž odpovídá spodní mezi rovnováhy; na této mezi by nastalo porušení rovnováhy převahou tlaku sypké hmoty nad odporem opěrné stěny, a sypká hmota by se posouvala, vytlačujíc opěrnou stěnu, po opěrné stěně dolů. Týmž směrem vyšla však i složka T reakce opěrné stěny, jež má působiti, znamenajíc tření, proti možnému pohybu, tedy vzhůru. Směr tlaku S odporuje proto v tomto případě pojmu spodní meze rovnováhy. Z toho plyne, že theorie, kterou jsme odvodili, nemůže přesně platiti. Theorie ta se zakládala na předpokladu, že elementární tlaky ve všech bodech libovolné dělicí roviny jsou rovnoběžné; poněvadž vede ve zvláštním případě k výsledku, který odporuje skutečnosti, znamená to, že uvedený předpoklad nemůže míti obecnou platnost.



Obr. 133.

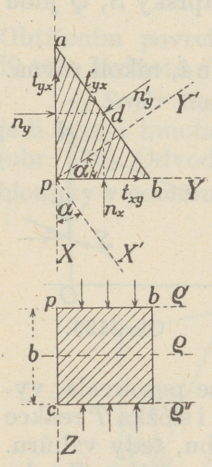
38. Tlaky uvnitř neomezené hmoty sypké. *α) Proměna tlaku v libovolném bodě.* Uvažujme sypkou hmotu omezenou pouze povrchem[1]), jenž tvoří obecně válcovou plochu s povrchovými přímkami vodorovnými; jinak budiž sypká hmota ve směru povrchových přímek i ve směrech kolmých neomezena. Poměrné tlaky uvnitř takovéto sypké hmoty můžeme vyšetřovati podobně jako napětí uvnitř pevného tělesa. Vedeme-li bodem m v pevném tělese plochu Φ, připadne na prvek této plochy v bodě m napětí σ, jež může působiti v kterémkoli paprsku jdoucím bodem m a rozkládá se na složku normálnou ν a tangenciálnou τ. Podobně obdržíme uvnitř sypké hmoty v bodě m na libovolnou plochu dělicí poměrný tlak σ, jenž bude míti složku normálnou a tangenciálnou. V pevném tělese platí pro napětí zákon Hookův, uvnitř sypké hmoty nastupuje místo toho zákon tření, který je též lineární; nebude tedy podstatných rozdílů. Povahou sypké hmoty jsou ovšem vyloučeny tahy uvnitř sypké hmoty, kde se vyskytují pouze tlaky.

Napjatost uvnitř neomezené hmoty sypké vyšetříme z rovnováhy trojbokého hranolu, jejž omezíme dvěma svislými rovinami ϱ', ϱ'' kolmými k povrchovým přímkám válcové plochy, jež tvoří povrch sypké hmoty; ostatně budiž hranol omezen rovinami,

[1]) Tlaky uvnitř neomezené hmoty sypké vyšetřoval prvý obecněji *J. M. Rankine* (ve Philosophical Transactions of the London Royal Society 1856—57) a *M. Lévy* (v Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paříž 1869, 1870).

které jdou kolmo k předešlým, a to osami X, Y a přímkou ab (obr. 134). Rovina ϱ' os X, Y je rovinou souměrnosti neomezené hmoty sypké, tedy je rovinou hlavní; totéž platí o každé rovině rovnoběžné. Na roviny ϱ', ϱ'' působí tedy okolní sypká hmota silami kolmými k těmto rovinám, jež se vzájemně ruší. Zbývají pak jen síly v prostřední rovině ϱ, jež je rovinou souměrnosti hranolu i sil naň působících (srovnej obr. 119). Délku hranolu ve směru osy Z znamenejme $\overline{pc} = b$; ostatní rozměry poznačíme $\overline{pa} = \mathrm{d}x$, $\overline{pb} = \mathrm{d}y$, $\overline{ab} = \mathrm{d}s$. Přímka ab budiž rovnoběžná s osou X', která svírá s osou X kladný úhel α, vytvořený ve smyslu nejkratšího točení od kladné osy X do kladné osy Y; k ose X' veďme kolmo osu Y'.

Na roviny pa, pb, ab budou působiti obecně síly šikmé, jež rozložíme na složky kolmé k těmto rovinám a složky působící v těchto rovinách samotných. Složky normálné pokládejme zde za kladné, jsou-li tlaky, poněvadž se zde budou vyskytovati výhradně tlaky; složky tangenciálné pak nechť jsou kladné, působí-li ve směru kladné (záporné) osy rovnoběžné, odnímáme-li hmotu po kladné (záporné) straně osy kolmé k rovině, na niž síla působí. Všechny síly naznačíme kladně. Sypkou hmotu na spodní straně roviny pb nahradíme tedy normálnou silou n_x, jež působí vzhůru, je-li tlakem, a tangenciálnou silou t_{xy}, jež má směr kladné osy Y, poněvadž jsme odňali hmotu po kladné straně osy X položenou. Hmotu vlevo od roviny pa nahradíme normálnou silou n_y vpravo (jako tlak) působící a tangenciálnou silou t_{yx} ve směru záporné osy X, poněvadž odnímáme hmotu po záporné straně osy Y. Hmotu po pravé straně roviny ab nahradíme pak normálným tlakem n'_y a tangenciálnou silou t'_{yx} ve směru kladné osy X', poněvadž jsme odňali hmotu po kladné straně osy Y'. Vlastní váhy hranolu nemusíme dbáti, poněvadž je proti ostatním silám nekonečně malou vyššího řádu. Poněvadž pak jde o plochy nekonečně malé, můžeme si mysliti, že normálné síly působí ve středech ploch.



Obr. 134.

Všechny uvedené síly působí v rovině souměrnosti ϱ vytknutého hranolu a jsou v rovnováze; platí pro ně tři výminky rovnováhy. Píšeme-li je pro složky rovnoběžné s osami Y', X' a pro momenty k bodu d, dostaneme rovnice

$$n'_y - n_y \cos\alpha - n_x \sin\alpha - t_{xy}\cos\alpha - t_{yx}\sin\alpha = 0,$$
$$t'_{yx} + n_y \sin\alpha - n_x \cos\alpha + t_{xy}\sin\alpha - t_{yx}\cos\alpha = 0,$$
$$t_{yx} \cdot \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}y - t_{xy} \cdot \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Vyjádřeme všechny vnitřní síly poměrnými silami (napětími), a to normálnými ν_x, ν_y, ν'_y a tangenciálnými τ_{xy}, τ_{yx} a τ'_{yx}; tu se každá síla rovná součinu z poměrné síly a plochy, tedy

$$n_x = \nu_x\, b\,\mathrm{d}y\,, \quad n_y = \nu_y\, b\,\mathrm{d}x\,, \quad n'_y = \nu'_y\, b\,\mathrm{d}s,$$
$$t_{xy} = \tau_{xy}\, b\,\mathrm{d}y,\ t_{yx} = \tau_{yx}\, b\,\mathrm{d}x,\ t'_{yx} = \tau'_{yx}\, b\,\mathrm{d}s.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do třetí výminky rovnováhy, dostaneme rovnici

$$\tfrac{1}{2}\,\tau_{yx}\, b\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \tfrac{1}{2}\,\tau_{xy}\, b\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 0;$$

z toho plyne

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}\,. \tag{324}$$

Tím je dokázána známá věta o vzájemnosti napětí (poměrných sil) tangenciálných;[1]) znamenejme krátce

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau\,.$$

[1]) Viz *Jos. Šolín* „Základy technické nauky o pružnost a pevnosti“ (Praha 1904), str. 7.

Rovnice (324) platí pro každé dvě pravoúhlé osy, i je též

$$\tau'_{xy} = \tau'_{yx} = \tau'.$$

Dosaďme též do prvých dvou výminek rovnováhy za vnitřní síly stanovené hodnoty, dbajíce uvedeného kratšího označení napětí (poměrných sil) tangenciálných; dospějeme tím k rovnicím

$$\nu'_y\, b\, ds - \nu_y\, b\, dx \cos\alpha - \nu_x\, b\, dy \sin\alpha - \tau\, b\, dy \cos\alpha - \tau\, b\, dx \sin\alpha = 0,$$
$$\tau'\, b\, ds + \nu_y\, b\, dx \sin\alpha - \nu_x\, b\, dy \cos\alpha + \tau\, b\, dy \sin\alpha - \tau\, b\, dx \cos\alpha = 0.$$

Dělme obě rovnice délkou ds a dosaďme podle obr. 134

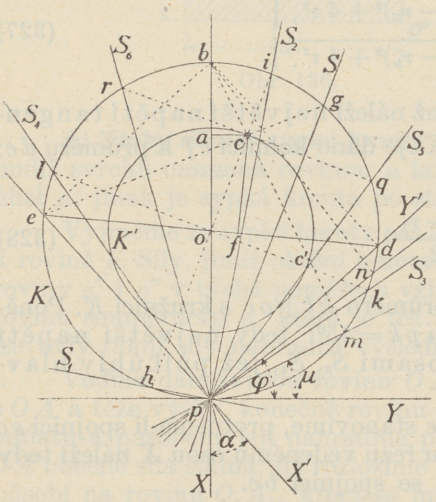
$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha;$$

obdržíme tak vzorce

$$\nu'_y = \nu_y \cos^2\alpha + \nu_x \sin^2\alpha + \tau \sin 2\alpha, \qquad (325^a)$$
$$\tau' = (\nu_x - \nu_y) \sin\alpha \cos\alpha + \tau\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

nebo

$$\tau' = \frac{\nu_x - \nu_y}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha. \qquad (326)$$



Obr. 135.

Vzorce (325^a), (326) jsou obdobné transposičním vzorcům pro momenty setrvačnosti a deviační k osám kosoúhlým.[1]) Pak lze napětí ν'_y, τ' stanoviti z napětí ν_x, ν_y, τ zrovna tak, jak se určí momenty J'_y, D' z momentů J_x, J_y, D. Přenesme tedy (obr. 135) $\nu_x = \overline{pa}$, $\nu_y = \overline{ab}$ ve směru záporné osy X, poněvadž jsme brali tlaky za kladné; připojme dále $\tau = \overline{ac}$ na rovnoběžku s osou Y a to v kladném (záporném) směru osy Y, je-li τ kladné (záporné). Opíšeme pak kružnici K nad průměrem $\overline{pb} = \nu_x + \nu_y$ a protneme s ní osy X', Y' v bodech d, e; spojnice těchto bodů jde středem o kružnice K. Spustíme-li s bodu c kolmici cf na průměr de, vyjde

$$\nu'_y = \overline{ef}, \quad \tau' = \overline{fc}.$$

Z obr. 135 plyne totiž

$$\sphericalangle pbd = \sphericalangle ped = \alpha, \quad \sphericalangle pod = \sphericalangle acf = 2 \cdot \sphericalangle ped = 2\alpha, \quad \overline{eb} = \overline{pb} \cdot \sin\alpha = (\nu_x + \nu_y) \sin\alpha.$$

Délka $\overline{ef}$ je průmětem lomené čáry $ebac$ do osy de, tedy

$$\overline{ef} = \overline{eb} \cdot \sin\alpha + \overline{ba} \cdot \cos 2\alpha + \overline{ac} \cdot \sin 2\alpha = (\nu_x + \nu_y) \sin^2\alpha + \nu_y\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \tau \sin 2\alpha = \nu'_y.$$

Obdobně by bylo

$$\nu'_x = \overline{fd},$$

je-li

$$\nu'_x = \nu_x \cos^2\alpha + \nu_y \sin^2\alpha - \tau \sin 2\alpha. \qquad (325^b)$$

[1]) Viz prvý díl tohoto spisu (4. vyd. 1946), str. 56.

Dále jest $\overline{fc}$ průmětem lomené čáry $ebac$ do směru fc; z toho plyne

$$\overline{fc} = \overline{eb} \cdot \cos\alpha - \overline{ba} \cdot \sin 2\alpha + \overline{ac} \cdot \cos 2\alpha = (\nu_x + \nu_y) \sin\alpha \cos\alpha - \nu_y \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha = \tau'.$$

Složkami $\nu'_y = \overline{ef}$, $\tau' = \overline{fc}$ je stanoveno výsledné napětí $\sigma' = \overline{ec}$, příslušné k prvku řezu vedeného osou X' kolmo k nákresně; paprsek tohoto napětí σ' svírá s kolmicí k ose X' úhel $cef = \sphericalangle gpd$, tedy $pg \equiv S$ je paprsek napětí σ' příslušného k řezu vedenému osou X'.

Točí-li se osa X' kolem bodu p, mění se napětí ν'_y jako úsek $\overline{ef}$ průměru ed, který se točí kolem bodu o. Tento úsek má nejmenší hodnotu ci a největší hodnotu $\overline{hc}$, prochází-li průměr de bodem c. Kolmo k ose pi, tedy v ose $S_1 \equiv ph$ působí pak v bodě p nejmenší napětí $\nu_1 = \overline{ci}$ a v ose $S_2 \equiv pi$ působí největší napětí $\nu_2 = \overline{hc}$. Napětí ν_1, ν_2 jsou *napětí hlavní*, jejich paprsky S_1, S_2 jsou *hlavní osy* v bodě p; hlavními osami jdou *hlavní roviny* kolmé k rovině os X, Y, v nichž není napětí tangenciálných, jak ukazuje obr. 135, z něhož určíme též hodnoty hlavních napětí. Je totiž

$$\overline{ci} = \overline{oi} - \overline{oc}, \quad \overline{hc} = \overline{ho} + \overline{oc}, \quad \overline{ho} = \overline{oi} = \tfrac{1}{2}\overline{pb} = \tfrac{1}{2}(\nu_x + \nu_y),$$

$$\overline{oa} = \overline{ob} - \overline{ab} = \tfrac{1}{2}(\nu_x + \nu_y) - \nu_y = \tfrac{1}{2}(\nu_x - \nu_y), \quad \overline{oc} = \sqrt{\overline{oa}^2 + \overline{ac}^2} = \sqrt{\left(\frac{\nu_x - \nu_y}{2}\right)^2 + \tau^2},$$

tedy

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 &= \overline{ci} = \tfrac{1}{2}(\nu_x + \nu_y) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(\nu_x - \nu_y)^2 + 4\tau^2}, \\ \nu_2 &= \overline{hc} = \tfrac{1}{2}(\nu_x + \nu_y) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\nu_x - \nu_y)^2 + 4\tau^2}. \end{aligned}\right\} \tag{327}$$

Z obr. 135 odvodíme snadno též roviny, k nimž náleží největší napětí tangenciálné. Napětí tangenciálné pro řez vedený osou X' je dáno kolmicí $\overline{cf}$ k průměru de; největší délka kolmice jest

$$\max \tau = \overline{oc} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} \tag{328}$$

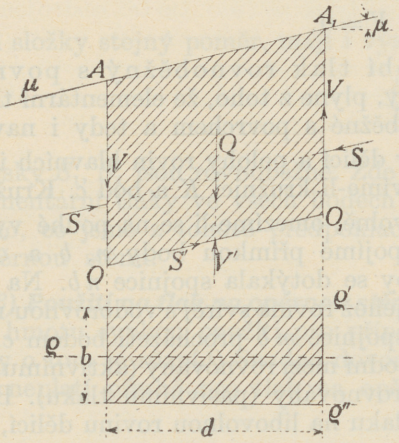
a náleží k rovinám, které jsou dány průsečíky k, l průměru $kl \perp oc$ s kružnicí K. Poněvadž je však $\operatorname{arc} li = \operatorname{arc} ik$, je též $\sphericalangle lpi = \sphericalangle ipk = 45^0$; tedy největší napětí tangenciálná působí v rovinách jdoucích osami S_3, S_4, jež půlí úhly hlavních os S_1, S_2.

Směr napětí S k řezu vedenému osou $X' \equiv pe$ stanovíme, protneme-li spojnici ec s kružnicí K v bodě g; pak jest $S \equiv pg$. Ke svislému řezu vedenému osou X náleží tedy směr napětí pm daný průsečíkem m kružnice K se spojnicí bc.

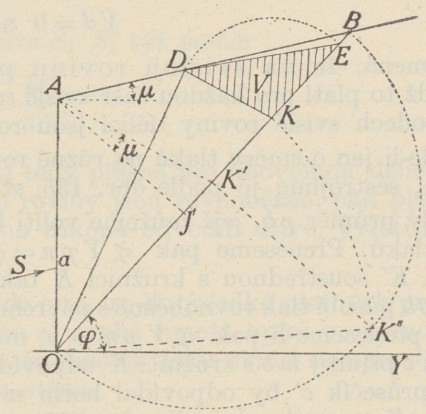
Tětiva $qr \perp oc$ určuje osy $S_5 \equiv pq$, $S_6 \equiv pr$, jež mají tu vlastnost, že dávají dělicí roviny, pro které jsou výsledná napětí nejvíce odchýlena od kolmice k dělicí rovině, poněvadž je $\overline{qr}$ nejkratší z tětiv kružnice K jdoucích bodem c, tedy úhel osy S_5 a příslušného směru napětí S_6 je tu nejmenší. Osami S_5, S_6 jdou patrně roviny nebezpečné. V krajním případě (na mezi rovnováhy) svírá tlak na rovinu nebezpečnou s kolmicí k této rovině třecí úhel φ; na mezi rovnováhy je tedy $\sphericalangle qpr = 90^0 - \varphi$. Opíšeme-li poloměrem $\overline{oc}$ kružnici K', je tětiva qr její tečnou. Na každé tečně kružnice K' omezuje kružnice K touž délku; ke každé té tečně náleží tedy týž úhel obvodový. Je-li bn tečnou kružnice K', je proto $\sphericalangle bpn = \sphericalangle rpq = 90^0 - \varphi$ a $\sphericalangle npY = \varphi$; tím je kružnice K' určena. Nebezpečné roviny svírají s hlavní rovinou S_2 úhly

$$\sphericalangle qpi = \sphericalangle ipr = \frac{1}{2}(90^0 - \varphi) = 45^0 - \frac{\varphi}{2}.$$

Odvozené vzorce a sestrojení platí též pro napětí uvnitř pevného tělesa.[1]) Kdybychom přenesli velikost výsledního napětí podle určitého měřidla od bodu p na paprsek napětí, vytvořily by koncové body *elipsu tlakovou*. Dělicí rovina a směr tlaku souvisí spolu jako sdružené paprsky v involuci paprskové, jak ukazuje obr. 135, a dávají sdružené průměry *elipsy směrové;* hyperboly směrové jsou u sypké hmoty vyloučeny, poněvadž zde jsou normálné složky jen tlaky.[2]) Proměnu napětí i jejich směrů řeší ovšem jednodušeji a dokonale též obr. 135.



Obr. 136.



Obr. 137.

*β) **Tlaky uvnitř sypké hmoty omezené svrchu rovinou.*** Stejnorodá hmota sypká budiž svrchu omezena rovinou μ kolmou k nákresně, jež svírá s vodorovnou rovinou úhel μ; jinak je sypká hmota po stranách i kolmo k nákresně neomezena (obr. 136).

Vyjměme ze sypké hmoty pás šířky b, omezený svislými rovinami ϱ', ϱ'', kolmými k rovině μ. Síly, jimiž okolní hmota sypká působí na tento pás, ruší se, poněvadž jsou roviny ϱ' i ϱ'' v týchž poměrech vzhledem k neomezené hmotě sypké. Vyňatý pás má rovinu souměrnosti ϱ, která je též rovinou souměrnosti jeho sil vnějších i vnitřních; lze tedy obojí síly nahraditi výslednicemi v rovině ϱ.

Veďme dále svislou rovinu OA kolmou k rovině ϱ a rovinu O_1A_1 rovnoběžnou s OA a téže výšky, konečně rovinu $OO_1 \parallel \mu$; hmotu mimo těleso OAA_1O_1 si mysleme odňatu a působení její nahraďme příslušnými silami. S levé strany působí na rovinu OA obecně síla šikmá, již rozložíme na složku $S \parallel \mu$ a svislou složku V. S pravé strany působí na rovinu O_1A_1, která se má docela stejně jako rovina OA, tytéž síly S, V, avšak v protivných směrech; síla S u roviny OA i O_1A_1 má ovšem týž paprsek. Sypkou hmotu pod rovinou OO_1 nahradíme silou, jež má obecně svislou složku V' a šikmou složku S' v rovině OO_1. Všechny prvky roviny OO_1 jsou rovnoběžné s povrchem sypké hmoty, pod nímž mají stejnou hloubku; jsou tedy všechny části roviny OO_1 v týchž poměrech a tlaky na rovinu OO_1 se proto rozdělují rovnoměrně. Výslednice těchto tlaků působí pak uprostřed roviny OO_1, paprsek V' půlí tedy šířku d. Těleso OAA_1O_1 sypké hmoty má váhu Q, jež působí také uprostřed šířky d.

Uvedené síly působí vesměs v rovině souměrnosti ϱ a jsou v rovnováze. Všechny síly jsme již rozložili na složky rovnoběžné s povrchem a složky svislé. Součet složek

[1]) Srovnej spisovatelovo pojednání „Příspěvky k theorii hrází zděných“ (v „Rozpravách České Akademie“, II. tř., r. 1915, č. 15), str. 25 a d. Pro sypké hmoty odvodil toto sestrojení *J. J. Weyrauch* (viz „Allgemeine Bauzeitung“ r. 1880, str. 64).

[2]) Viz *Jos. Šolín* „Základy technické nauky o pružnosti a pevnosti“ (Praha 1904), str. 9 a d.

rovnoběžných s povrchem a součet sil svislých dají výminky

$$S - S + S' = 0, \quad V + Q - V - V' = 0.$$

Z toho plyne $S' = 0$, $V' = Q$, působí tedy na rovinu rovnoběžnou s povrchem svislý tlak V' rovný váze Q sypké hmoty, jejíž základnou je tlačená plocha a jež sahá až k povrchu. Uvažujme ještě momentovou výminku rovnováhy k bodu O_1; tu odpadají síly S, jež působí v téže přímce a ruší se, rovněž se ruší síly V' a Q. Zbývá jen výminka

$$Vd = 0 \text{ nebo } V = 0,$$

jež znamená, že na svislou rovinu působí tlak rovnoběžný s povrchem. Poněvadž to platí pro každou část svislé roviny, plyne z toho, že elementární tlaky ve všech bodech svislé roviny dělicí jsou rovnoběžné s povrchem a tedy i navzájem.

Jde-li jen o směry tlaků na různé roviny dělicí a polohy rovin hlavních i nebezpečných, sestrojíme je podle obr. 135, stanovíme-li kružnici K a bod c. Kružnice K má svislý průměr $\overline{pb}$, jejž můžeme voliti libovolně, omezíme-li se na pouhé vyšetření směrů tlaků. Přeneseme pak $\sphericalangle Y p n = \varphi$, spojíme přímkou body n, b a opíšeme kružnici K' soustřednou s kružnicí K tak, aby se dotýkala spojnice nb. Na svislou rovinu pb působí tlak rovnoběžně s povrchem, jehož rovina svírej s vodorovnou rovinou úhel μ; přeneseme-li pak $\sphericalangle Y p m = \mu$, musí spojnice mb procházeti bodem c. Horní průsečík c přímky mb s kružnicí K' odpovídá spodní mezi rovnováhy (aktivnímu tlaku), spodní průsečík c' by odpovídal horní mezi rovnováhy (pasivnímu tlaku). Bod c a kružnice K stanoví pak podle obr. 135 směr tlaku na libovolnou rovinu dělicí, roviny hlavní i roviny nebezpečné.[1])

Kdyby šlo též o velikost napětí, stanovili bychom k obr. 135 měřidlo, kdybychom určili na př. $\nu_y = \overline{ab}$ jakožto poměrný tlak normálný na svislou rovinu dělicí v bodě p. Normálný tlak poměrný určíme snadno z výsledního tlaku poměrného, jejž stanovíme podle obr. 126 z výsledního tlaku S na libovolnou část svislé roviny dělicí OA. Velikost tlaku S můžeme určiti, poněvadž známe jeho směr, způsobem, jejž jsme odvodili pro tlak na opěrnou stěnu. Na svislou rovinu OA uvnitř sypké hmoty omezené svrchu rovinou (obr. 137) působí tlak S rovnoběžně s povrchem; jeho paprsek svírá tedy s vodorovnicí úhel $\vartheta = \mu$; od přímky $AJ' \perp OB$ přeneseme $\sphericalangle J'AK' = \mu$ a sestrojíme délku $\overline{OK}$ jakožto střední měřickou úměrnou úseků $\overline{OK'}$, $\overline{OB}$. Bodem K vedeme pak přímku $KD \parallel K'A$ a určíme tím nebezpečnou rovinu OD. Přeneseme-li $\overline{DK} = \overline{KE}$ a znamenáme-li pl. $DEK = V$, je podle vzorce (310) tlak

$$S = \gamma b V$$

a působí ve vzdálenosti $\overline{Oa} = \frac{1}{3}\overline{OA}$ od bodu O.

Známe-li tlak S na svislou rovinu OA_0, určili bychom tlak S_1 na šikmou rovinu OA_1 (viz obr. 131), kdybychom tlak S na svislou rovinu OA_0 složili s vahou Q sypké hmoty mezi rovinami OA_0, OA_1 a povrchem; paprsky všech tří sil jdou bodem a_1 na rovině OA_1 ve vzdálenosti $\overline{Oa_1} = \frac{1}{3}\overline{OA_1}$. Na hloubku $\overline{OA_0} = h$ připadly by síly S a Q, jež by se složily ve výslednici S_1; na hloubku h' obdrželi bychom podobně síly S' a Q', jež by daly výslednici S_1'. Tlaku na svislou rovinu přibývá do hloubky v poměru čtverečném, jak jsme dokázali, vyšetřujíce tlak na opěrnou stěnu v tomto případě; platí tedy

$$\frac{S}{S'} = \frac{h^2}{h'^2}.$$

[1]) Toto sestrojení směrů odvodil ryze měřicky *Jos. Šolín* v pojednání „Bemerkungen zur Theorie des Erddruckes“ (v „Allgemeine Bauzeitung“ r. 1887, str. 53).

Váhy Q, Q' jsou úměrné plochám OA_0A_1, jež jsou při různých hloubkách podobné, jsou-li šikmé roviny OA_1 vždy rovnoběžné; pak je též

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{h^2}{h'^2}.$$

Z toho plyne

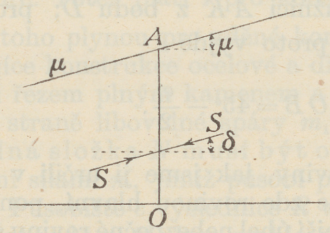
$$\frac{S}{S'} = \frac{Q}{Q'} = \frac{h^2}{h'^2};$$

mají-li složky stejný poměr, mají i výslednice S_1, S_1' týž poměr

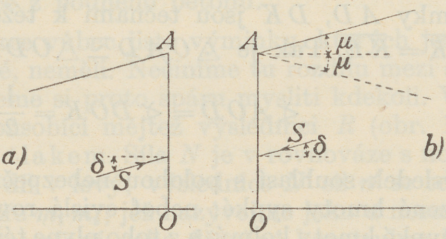
$$\frac{S_1}{S_1'} = \frac{h^2}{h'^2},$$

a paprsky S_1, S_1' jsou rovnoběžné. Zde platí tedy přesně pro libovolnou dělicí rovinu, že elementární tlaky ve všech bodech této roviny jsou rovnoběžné; pak platí tu též všechno, co jsme z tohoto předpokládaného zákona odvodili dříve, vyšetřujíce tlak na opěrnou stěnu.

β) ***Použití na tlak na opěrnou stěnu.*** Jde o to, lze-li výsledků platných pro neomezenou hmotu sypkou použíti pro případ, že se sypká hmota opírá o opěrnou stěnu. Názory o tom se různí.[1]) Snadno dovodíme, že theorie tlaku uvnitř neomezené hmoty sypké neplatí přesně pro tlak na opěrnou stěnu.



Obr. 138.



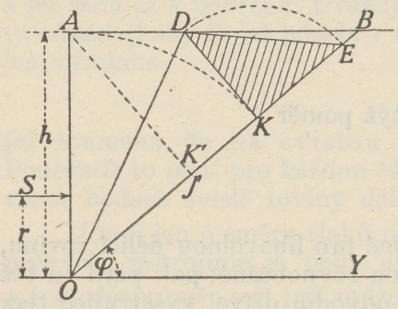
Obr. 139.

Myslíme-li si uvnitř sypké hmoty omezené svrchu rovinou μ (obr. 138) svislou rovinu dělicí OA, působí na ni s obou stran rovné a protivné tlaky S v paprsku rovnoběžném s povrchem, tedy ve sklonu $\delta = \mu$ k rovině OA. Nahradíme-li dělicí rovinu OA opěrnou stěnou a uvažujeme-li zvlášť levou (obr. 139*a*) i pravou část sypké hmoty (obr. 139*b*), měli bychom dostati v obou případech týž tlak S rovnoběžný s povrchem, kdyby zde platilo totéž, co u neomezené hmoty sypké. To by znamenalo, že u pravé části sypké hmoty (obr. 139*b*) neměla by hmota, omezená rovinami svírajícími úhly $\mp\mu$ s vodorovnou, vůbec vlivu na velikost tlaku S. Lze však souditi, že u pravé části (obr. 139*b*) bude tlak sypké hmoty větší než v neomezené hmotě sypké (obr. 138) a tento tlak opět větší než u levé části (obr. 139*a*). Mimo to se u levé části (obr. 139*a*) příčí směr tlaku rovnoběžný s povrchem pojmu spodní meze rovnováhy, jak jsme již dovodili (viz obr. 133). Podle toho by měl být u pravé části (obr. 139*b*) sklon tlaku $\delta_1 < \delta$ a u levé části (obr. 139*a*) měli bychom bráti sklon $\delta_2 = 0$ nebo úhel δ_2 kladný, aby svislá složka tlaku S směřovala dolů. Z toho plyne, že theorie neomezené hmoty sypké neplatí přesně pro případ opěrné stěny. Neplatí tu však přesně také theorie tlaku na opěrnou stěnu, kterou jsme dříve vyvinuli, neboť tato theorie dává týž směr tlaku jako v neomezené hmotě sypké. Volíme-li jiný směr tlaku, příčí se to oné theorii a není ovšem správné, stanovíme-li velikost tlaku podle theorie, která vede

[1]) Srovnej *Fr. Kötter* „Die Entwickelung der Lehre vom Erddruck", str. 116 a d.

k jinému směru tlaku, než jaký předem volíme. Příčina těchto rozporů je ta, že tu neplatí přesně předpoklad o rovnoběžnosti elementárních tlaků ve všech bodech téže dělicí roviny, na němž jsme celou theorii založili.[1])

Jde-li o svislou stěnu a vodorovný povrch (obr. 140), tedy případ prakticky nejčastější, není žádného rozporu, užijeme-li theorie platné pro neomezenou hmotu sypkou na tlak na opěrnou stěnu. Neboť rozdělíme-li při vodorovném povrchu sypkou hmotu svislou dělicí rovinou na dvě části, jsou obě části úplně stejné a vyjde u obou týž tlak. Pak lze též sestrojení velmi zjednodušiti a velikost tlaku snadno určiti počtem. Poněvadž tu je tlak S vodorovný, vyjde úhel $\vartheta = 0$ a bod K' splyne s bodem J', vedeme-li $AJ' \perp OB$. Určíme pak bod K podle rovnice (313[a])



Obr. 140.

$$\overline{OK}^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OK'};$$

v pravoúhlém trojúhelníku OAB platí však

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OK'}$$

i jest $\overline{OA} = \overline{OK}$. Přímka $KD \parallel K'A$ určí nebezpečnou rovinu OD. Přenesením $\overline{DK} = \overline{KE}$ do přirozené skloniny OB stanovíme pl. $DEK = V$; velikost tlaku dá pak vzorec (310)

$$S = \gamma b V.$$

Přímky AD, DK jsou tečnami k téže kružnici AK z bodu D; proto platí $\overline{AD} = \overline{DK} = \overline{KE}$. Pak je $\triangle OAD \cong \triangle ODK$ a proto vyjde

$$\sphericalangle AOD = \sphericalangle DOK = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB = 45^0 - \frac{\varphi}{2}.$$

Tento výsledek souhlasí s polohou nebezpečné roviny, jak jsme ji určili v obr. 135 u neomezené hmoty sypké; neboť svislá rovina je zde rovinou hlavní, poněvadž je k ní tlak sypké hmoty kolmý, a z toho plyne též hořejší úhel nebezpečné roviny s rovinou svislou. Nyní lze určiti

$$\overline{DK} = \overline{KE} = \overline{AD} = h \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right),$$

je-li $h = \overline{OA}$ výška opěrné stěny; dále plyne z obr. 140

$$V = \frac{1}{2} \overline{DK} \cdot \overline{KE} = \frac{1}{2} \overline{DK}^2 = \frac{1}{2} h^2 \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)$$

a tedy

$$S = \frac{1}{2} \gamma b h^2 \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right). \tag{329}$$

Výslední tlak S působí pak, jak jsme dříve dovodili, ve výši $r = \frac{1}{3} h$ nad patou O opěrné stěny.

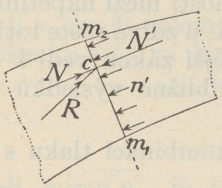
---

[1]) Předpoklad tento není nezbytný; lze i bez něho odvoditi tlak sypké hmoty na opěrnou stěnu, jak ukázali *J. Boussinesq* a *J. Résal*. Srovnej o tom *J. Résal* „Poussée des terres", I. a II. (Paříž 1903, 1910).

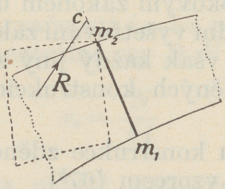
D) Konstrukce zděné.

39. Výminky rovnováhy konstrukcí zděných. Konstrukce zděné z kamene nebo cihel chovají se poněkud jinak než konstrukce dřevěné nebo ocelové. Tyto konstrukce bývají celé z jediného kusu; jsou-li složeny z dílů, musí býti tyto díly tak spojeny, aby konstrukce ocelová nebo dřevěná působila jako jediný celek. Konstrukce zděná skládá se však z kamenů, jejichž spojení není dokonalé, poněvadž malta, jež vyplňuje *spáry* mezi kameny a jež bývá jediným pojidlem, nemá, pokud je čerstvá, vůbec žádné pevnosti v tahu; i po zatvrdnutí je pevnost malty v tahu nepatrná. Proto pokládáme maltu při statickém vyšetřování za pouhý prostředek vyrovnávací, jenž podporuje jedině rozdělení tlaku po spáře. Konstrukci zděnou myslíme si pak složenu z kamenů, jež nejsou vzájemně vůbec spojeny. Malta nesnese vůbec tahu nebo jen nepatrný. Také pevnost kamene v tahu bývá malá a velmi proměnlivá i u téhož druhu kamene. Proto předpokládáme, vyšetřujíce zděné konstrukce staticky, že nejen ve spáře, nýbrž i v řezu plným kamenem může vzniknouti pouze tlak; tah tedy vylučujeme. Totéž platí i pro konstrukce z pouhého betonu.

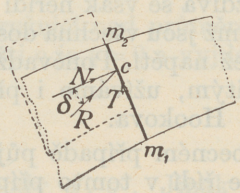
Z toho plynou pro zděné konstrukce vůbec jisté výminky, kterých jsme dosud, vyšetřujíce konstrukce ocelové a dřevěné, neměli. Nečiníme tu rozdílu mezi skutečnou sparou i řezem plným kamenem a můžeme si proto spáru mysliti kdekoli. Vnější síly po levé straně libovolné spáry $m_1 m_2$ působící mějtež výslednici R (obr. 141), jejíž normálná složka N musí být ovšem tlakem. Síla N je v rovnováze s normálnými vnitřními silami n', jimiž působí pravý díl v levý; výslednice N' sil n' se tedy ruší se silou N. Působiště c výslednice R ve spáře $m_1 m_2$, jež nazývejme jako u nosníků obloukových středem tlaku, mohlo míti u ocelové nebo dřevěné konstrukce libovolnou polohu, poněvadž tu byl připuštěn bez rozdílu tah i tlak v libovolném průřezu. Vyloučíme-li však u zděné konstrukce tah, je tím poloha středu tlaku c omezena. Kdyby bod c vyšel mimo spáru $m_1 m_2$ (obr. 142), vznikl by na opačné straně spáry tah, jemuž zděná konstrukce vzdorovati nemůže; proto by nastalo točení levého dílu kolem hrany m_2, jež by porušilo rovnováhu. Nemá-li nastati porušení rovnováhy točením, musí býti střed tlaku c uvnitř spáry; to je nová výminka rovnováhy, jíž jsme u konstrukcí ocelových a dřevěných neměli. Výminka ta platí pro každou spáru skutečnou i myšlenou, tedy pro kterýkoli řez konstrukcí; pak čára tlaková, jež spojuje středy tlaku v jednotlivých sparách, nesmí vystoupiti z konstrukce.



Obr. 141.



Obr. 142.



Obr. 143.

Tangenciálná složka T výslednice R (obr. 143) vyvodila by v řezu plným kamenem napětí tangenciálná. Ve spáře nevznikne takové napětí, poněvadž předpoklá-

dáme, že kameny k sobě beze všeho spojení prostě přiléhají. Síle T, která se snaží posunouti levý díl po pravém, vzdoruje pak jen tření, které je vyvozeno normálnou silou N a má hodnotu

$$F = fN, \tag{330}$$

znamená-li f součinitele tření. Kdyby byla síla $T > F$, porušila by se rovnováha a levý díl by se posouval po pravém; je-li $T = F$, je právě rovnováha vratká. Nemáli se porušiti rovnováha posouváním, musí být síla

$$T \leqq F; \tag{331a}$$

tím docházíme zase k nové výmince rovnováhy, kterou vyjádříme v jiném tvaru, zavedeme-li úhly. Součinitele f lze vyjádřiti třecím úhlem φ ve tvaru

$$f = \operatorname{tg} \varphi .$$

Z obr. 143 plynou, je-li δ sklon výslednice R ke spáře $m_1 m_2$, složky

$$N = R \cos \delta, \quad T = R \sin \delta;$$

dosazením do rovnic (330), (331a) dostáváme výminku

$$R \sin \delta \leqq \operatorname{tg} \varphi \cdot R \cos \delta$$

nebo

$$\operatorname{tg} \delta \leqq \operatorname{tg} \varphi, \text{ t. j. } \delta \leqq \varphi. \tag{331b}$$

Výminka rovnováhy v posouvání žádá tedy, aby sklon výslednice ke spáře nepřestoupil úhel třecí. V případě rovnosti úhlů δ a φ vyšla by rovnováha vratká.

Třecí úhel φ závisí na druhu kamene, jeho zpracování a míře zatvrdnutí malty. Při čerstvé maltě jest úhel φ velmi malý; může-li tu nastati posouvání kamenů, na př. jde-li o klenbu, zamezíme je jen tím, že sestavujeme konstrukci na pevném lešení (skruží), na němž konstrukce spočívá, až malta dosti zatvrdne. Tvrdnutím malty roste úhel φ rychle a záhy dosahuje hodnoty $\varphi = 20$ až 24°; obyčejně se brává pro čerstvé zdivo

$$\varphi = 20^\circ, \quad \operatorname{tg} \varphi = 0{,}36.$$

Po úplném zatvrdnutí malty, tedy u vyschlého zdiva, jest asi

$$\varphi = 37^\circ, \quad \operatorname{tg} \varphi = 0{,}75.$$

Vedle uvedených dvou zvláštních výminek pro zděné konstrukce platí ještě výminka bezpečné pevnosti jako u všech jiných konstrukcí; tato výminka žádá, aby bylo

$$\max \nu \leqq k'', \tag{332}$$

je-li k'' součinitel bezpečné pevnosti (dovolené namáhání) zdiva v tlaku. Napětí u zdiva se však neřídí Hookovým zákonem úměrnosti mezi napětím a roztažením, na němž jsou všechna dosavadní vyšetřování založena; u zdiva roste totiž roztažení rychleji než napětí. Poněvadž by však každý jiný složitější zákon vedl k výsledkům příliš složitým, užíváme i při zděných konstrukcích přibližně výsledků plynoucích ze zákona Hookova.

V obecném případě půjde u konstrukce zděné o kombinaci tlaku s ohybem;[1]) napětí ν se řídí v tomto případě vzorcem (67b)

$$\nu = \frac{N}{U}\left(1 + \frac{c_\delta^2}{i^2}\right),$$

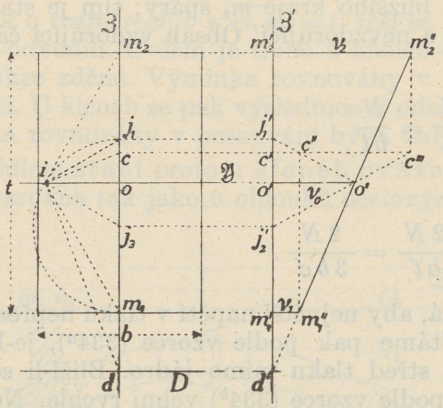
[1]) Srovnej prvý díl tohoto spisu (4. vyd. 1946), str. 72 a d.

k němuž jsme dospěli u nosníků obloukových. Zděná konstrukce bude míti pravidlem průřez obdélníkový (obr. 144) o šířce b a výšce (tloušťce) t, pro něž jest

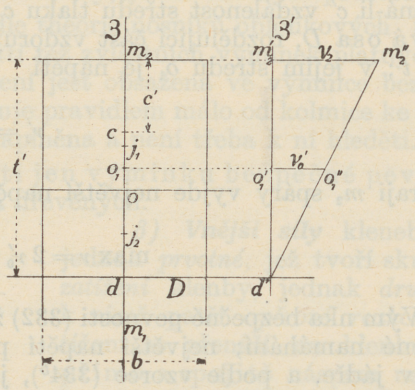
$$U = b\,t, \quad J = \frac{1}{12} b\,t^3, \quad i^2 = \frac{J}{U} = \frac{1}{12} t^2;$$

pak jest

$$\nu = \frac{N}{b\,t}\left(1 + \frac{12\,c\,\mathfrak{z}}{t^2}\right). \tag{333}$$



Obr. 144.



Obr. 145.

Tento vzorec platí jen tehdy, vzdoruje-li celý průřez, zde ovšem tlakem; pak musí býti střed tlaku uvnitř jádrového úseku $\overline{j_1 j_2}$, jehož krajní body mají od těžiště vzdálenosti

$$\overline{o\,j_1} = \overline{j_2\,o} = \frac{i^2}{e} = \frac{t}{6};$$

obsahuje tedy jádrový úsek vnitřní třetinu spáry. Největší napětí vzniká tu v krajním bodě m_2 na té straně těžiště, na níž je střed tlaku c. Jeho hodnota plyne ze vzorce (333) dosazením $\mathfrak{z} = e = \frac{1}{2} t$; tím vyjde

$$\max \nu = \frac{N}{b\,t}\left(1 + \frac{6\,c}{t}\right). \tag{334a}$$

Čarou napětí je přímka $m_1'' m_2''$, jež seče osu $\mathfrak{Z}'$ v bodě d' na neutrálné ose D; úsečka $\overline{o\,d} = d$ plyne podle vzorce (333) dosazením $\nu = 0$, $\mathfrak{z} = d$ z rovnice

$$1 + \frac{12\,c\,d}{t^2} = 0 \text{ nebo } c\,d = -\frac{t^2}{12} = -i^2.$$

Sestrojíme-li v ose $\mathfrak{y}$ poloměr setrvačnosti $i = \overline{o\,i}$ polokružnicí nad průměrem $\overline{m_1 j_1} = \frac{2}{3} t$, dá přímka $i\,d \perp c\,i$ bod d neutrálné osy D. V těžišti o je $\mathfrak{z} = 0$ a vyjde tu napětí

$$\nu_0 = \frac{N}{b\,t};$$

přeneseme-li $\nu_0 = \overline{o'\,o''}$, je přímka napětí stanovena body d', o''. Jinak lze přímo sestrojiti krajní napětí; tu promítneme krajní body jádrové j_1, j_2 na osu $\mathfrak{Z}'$ rovnoběžně s osou $\mathfrak{y}$ a spojnice $j_1' o''$, $j_2' o''$ protneme v bodech c'', c''' s přímkou $c\,c''' \parallel \mathfrak{y}$. Pak jest

$$\nu_1 = \overline{m_1' m_1''} = \overline{c'\,c''}, \quad \nu_2 = \overline{m_2' m_2''} = \overline{c'\,c'''}.$$

Vyjde-li střed tlaku c mimo jádrový úsek $\overline{j_1 j_2}$ (obr. 145), protínala by neutrálná osa průřez a na té straně osy neutrálné, jež neobsahuje bodu c, měl by vzniknouti tah. Poněvadž, jak předpokládáme, průřez tahu vůbec nevzdoruje, nebude tu část průřezu vůbec namáhána; po zbývající části průřezu rozděluje se pak napětí v tlaku podle přímky. Vzdorující část průřezu má se tu jako celý průřez v případě, kdy střed tlaku c padne do krajního bodu jádrového, jenž má od bližšího kraje spáry vzdálenost rovnou třetině tloušťky spáry. Má tedy vzdorující část průřezu výšku

$$t' = 3\,c',$$

znamená-li c' vzdálenost středu tlaku c od bližšího kraje m_2 spáry; tím je stanovena nulová osa D, rozdělující část vzdorující a nevzdorující. Obsah vzdorující části jest $U' = b\,t'$; v jejím středu o_1 je napětí

$$\nu_0' = \frac{N}{U'} = \frac{N}{b\,t}$$

a v kraji m_2 spáry vyjde největší napětí

$$\max \nu = 2\,\nu_0' = \frac{2\,N}{b\,t'} = \frac{2\,N}{3\,b\,c'}. \qquad (334^b)$$

Vým nka bezpečné pevnosti (332) žádá, aby největší napětí v tlaku nepřestoupilo dovolené namáhání; největší napětí počítáme pak podle vzorce (334^a), je-li střed tlaku v jádře, a podle vzorce (334^b), je-li střed tlaku mimo jádro. Blíží-li se střed tlaku ke kraji spáry, roste největší napětí podle vzorce (334^b) velmi rychle. Nejmenší vzdálenost c' středu tlaku od bližšího kraje spáry plyne z výminky

$$\max \nu = \frac{2\,N}{3\,b\,c'} = k'',$$

jež dá

$$\min c' = \frac{2\,N}{3\,b\,k''}. \qquad (335)$$

Žádá tedy výminka bezpečné pevnosti, aby střed tlaku měl nejméně tuto vzdálenost $\min c'$ od bližšího kraje spáry, i jest výminka bezpečné pevnosti užší než výminka rovnováhy v točení, jež připouští jakoukoli polohu středu tlaku uvnitř spáry. Je-li vyhověno výmince bezpečné pevnosti, je tím vyhověno také výmince rovnováhy v točení; zbývá tedy pro zděné konstrukce výminka rovnováhy v posouvání a výminka bezpečné pevnosti.

I. Theorie kleneb valených.

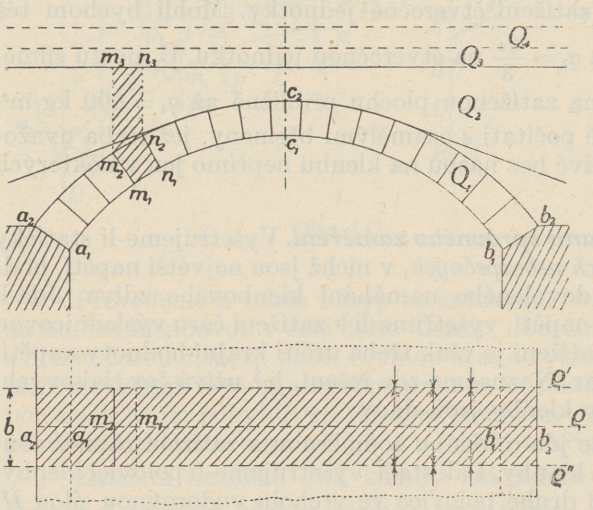
40. Statické vyšetřování kleneb. *α) Obecné úvahy.* Základem vyšetřování všech druhů kleneb je vyšetřování *kleneb valených* nebo *válcových*, jejichž lícná plocha je válcová; omezíme se jedině na tyto klenby. Vyšetřujíce tyto klenby předpokládejme, že vnější síly působí výhradně v rovinách normálných k ose klenby (lícné plochy) a že se rozdělují po délce klenby rovnoměrně; zároveň budeme si mysliti délku klenby omezenou. Jinak je klenba (obr. 146) omezena *lícnou plochou* $a_1\,c_1\,b_1$, *rubovou plochou* $a_2\,c_2\,b_2$ a *patními rovinami* $a_1\,a_2$, $b_1\,b_2$, jimiž přiléhá k *opěrám*.

Za uvedených předpokladů můžeme libovolnou normálnou rovinu ϱ' pokládati za rovinu souměrnosti klenby. Díly klenby po obou stranách roviny ϱ' působí proto navzájem silami kolmými k rovině ϱ', jež se ovšem ruší. K jiné normálné rovině ϱ'' se má klenba stejně jako k rovině ϱ', působí tedy s obou stran roviny ϱ'' tytéž síly jako u roviny ϱ'. Stačí pak uvažovati z klenby pouze pás mezi rovinami ϱ', ϱ'', jehož šířka b

se brává obyčejně rovna jednotce délkové. Ostatní klenba působí na tento pás silami kolmými k rovinám ϱ', ϱ'', jež se vzájemně ruší. Jsou-li vnější síly rozděleny po délce klenby rovnoměrně, lze uvažovati pás na kterémkoli místě klenby; jinak by bylo vyšetřovati pás, na nějž připadá největší zatížení. Vytknutý pás má rovinu souměrnosti ϱ, jež je také rovinou souměrnosti sil vnějších; pak jsou i vnitřní síly k rovině ϱ souměrné. V každých dvou bodech souměrných k rovině ϱ působí tedy vnější i vnitřní síly souměrně k rovině ϱ, i lze každé dvě souměrné síly nahraditi výslednicí v rovině ϱ. Tak převedeme původní prostorovou soustavu sil vnějších i vnitřních na soustavu sil působících v rovině ϱ.

Klenba se má pak jako zděný nosník obloukový, jehož obecným průřezem jest obdélník o rozměrech b a $\overline{m_1 m_2} = t$; řeší se podle theorie nosníků obloukových, kterou jsme si odvodili. Ovšem je třeba u kleneb dbáti též zvláštních výminek platných pro konstrukce zděné. Výminka rovnováhy v točení jest obsažena ve výmince bezpečné pevnosti. U kleneb se pak výslednice R odchyluje pravidlem málo od kolmice ke spáře; výminka rovnováhy v posouvání bývá tedy naplněna a není třeba k ní hleděti.

Pravidlem stačí proto u kleneb uvažovati jen výminku bezpečné pevnosti a řešiti zrovna tak jako u oblouků ocelových a dřevěných.



Obr. 146.

*β) **Vnější síly*** kleneb jsou jednak *prvotné*, jež tvoří skutečné *zatížení* klenby, jednak *druhotné*, k nimž patří *opěrové reakce*. Zatížení se přenáší na klenbu buď přímo a spojitě náspem nad celou klenbou zřízeným (obr. 146) nebo nepřímo jakožto osamělá břemena v určitých bodech pilířky nebo příčnými zdmi v těchto bodech o klenbu opřenými (viz obr. 158, tab. 3). Zatížení klenby je *stálé* a *pohyblivé*; stálé zatížení se skládá z vlastní váhy klenby, z váhy náspu nad klenbou a z váhy vrchní stavby.

K vlastní váze klenby se čítá i váha *nadezdívky (vyzdívky)*, kterou bývá klenba u patek opatřena a jež bývá svrchu omezena nejčastěji rovinami sklonitými (obr. 146) nebo i plochami válcovými. Díl klenby $m_1 m_2 n_2 n_1$, omezený dvěma sparami ať již skutečnými nebo myšlenými, má vlastní váhu Q_1, kterou vypočteme jako váhu tělesa o průřezu pl. $m_1 m_2 n_2 n_1 = U_1$ a měrné váze γ_1; bereme-li pás klenby o šířce b, vyjde

$$Q_1 = \gamma_1 b U_1.$$

Nad klenbou bývá násyp, jehož účelem je rozděliti zatížení na větší plochu klenby a zmírniti účinek případných nárazů. Není-li násyp vysoký, uvažujeme pouze jeho svislý účinek, tedy pouhou váhu, a přisuzujeme zvolenému dílu klenby část náspu omezenou svislými rovinami $m_2 m_3$, $n_2 n_3$, jdoucími rubovými body m_2, n_2; znamenáme-li pl. $m_2 m_3 n_3 n_2 = U_2$ a měrnou váhu náspu γ_2, je váha náspu

$$Q_2 = \gamma_2 b U_2.$$

U vysokých náspů bylo by uvažovati i vodorovnou složku tlaku náspu na klenbu; tu bychom určili tlak náspu podle theorie tlaku hmot sypkých.

Vrchní stavba je jiná na mostech železničních a jiná na mostech silničních. Na mostech železničních bývá to štěrkové lože s příčnými prahy a kolejnicemi; jeho

váha je rovnoměrně rozdělena po vodorovné rovině a lze ji bráti $q_3 = 1000$ kg/m². U mostů silničních je vrchní stavbou buď kamenná dlažba 15 až 20 cm silná nebo štěrková vozovka výšky 25 až 30 cm; její váha jest $q_3 = 500$ až 550 kg/m².

Zatížení pohyblivé je buď rovnoměrné, je-li to na př. váha lidí, nebo se skládá z osamělých břemen, jimiž jsou tlaky kol vozů po mostě jedoucích. Náspem, zvláště vyšším, rozdělují se osamělá břemena spojitě na větší plochu klenby; lze pak u vyššího náspu nahraditi osamělá břemena zatížením rovnoměrným. Jeho hodnotu bychom určili u mostů železničních, kdybychom rozpětím klenby l obsáhli co nejvíce a největších břemen; je-li R jejich součet, znamená

$$\frac{R}{l} = q_0$$

průměrné zatížení na 1 m délky mostu. Toto zatížení se pak rozděluje po šířce buď na délku příčných prahů 2,5 m a dá poměrné zatížení $q_4' = \frac{q_0}{2{,}5}$ na čtverečnou jednotku vodorovné roviny; nebo lze zatížení q_0 rozděliti na šířku celého mostu, jež bývá při jedné koleji 4 m, a vyjde $q_4'' = \frac{q_0}{4}$ jakožto zatížení čtverečné jednotky. Mohli bychom též počítati s přibližnou střední hodnotou $q_4 = \frac{q_0}{3}$ na čtverečnou jednotku. U mostů silničních vychází rozdělením váhy vozů na zatíženou plochu přibližně až $q_4 = 600$ kg/m².

U náspu malé výšky je na místě počítati s osamělými břemeny, jež třeba uvažovati také, přenáší-li se zatížení pohyblivé bez náspu na klenbu nepřímo jen v některých bodech (podle obr. 158).

*γ) **Čára tlaková při dělení sparami správného zaměření.*** Vyšetřujeme-li staticky klenbu, jest úlohou stanoviti ve *sparách nebezpečných*, v nichž jsou největší napětí, hodnoty napětí a zjistiti, nepřekročí-li dovoleného namáhání klenbového zdiva. Jde-li pouze o zatížení stálé, určíme největší napětí, vyšetříme-li k zatížení čáru výslednicovou nebo čáru tlakovou. Za pohyblivého zatížení je však třeba určiti krajní hodnoty napětí, a tu je nejlépe užívati příčinkových čar. Naznačme zde řešení, jež užívá čar tlakových, předpokládajíce, že zatížení i rozměry klenby jsou dány.

Pro jednoduchost si mysleme, že jde o klenbu souměrnou a zatížení rovněž souměrné ke svislé rovině jdoucí vrcholem klenby. Pak stačí, vyšetřujeme-li polovici klenby, na př. levou, a nahradíme-li působení druhé polovice ve vrcholu vodorovnou silou H, jak plyne ze souměrnosti; sílu H ve vrcholu pokládejme zatím za známou. Stálé zatížení klenby je spojité. Řešíme-li graficky, nahradíme je osamělými břemeny; rozdělíme totiž sparami správného zaměření, t. j. kolmými k lícné ploše, avšak v libovolných polohách zvolenými klenbu na díly (klenáky), jimž přisuzujeme zatížení dané vlastní vahou dílu a vahou nadezdívky, náspu atd., položeného svisle nad rubovou plochou každého dílu. U vysokého náspu bylo by ovšem uvažovati též vodorovné tlaky náspu, jež bychom vyšetřili podle theorie tlaku hmot sypkých.

Zatížení klenby se vztahuje k různým jednotkám: vlastní váha klenby Q_1 a váha náspu Q_2 k jednotce krychlové, váha vrchní stavby Q_3 a zatížení pohyblivé rovnoměrné Q_4 k jednotce čtverečné. Převeďme nejprve všechno zatížení na jednotku krychlovou. Zatížení rovnoměrně rozdělené po vodorovné rovině, jež je dáno poměrným zatížením q na jednotku čtverečnou, můžeme vyjádřiti vahou náspu, jehož výška v' plyne ze vztahu

$$q = \gamma' \cdot 1^2 \cdot v'$$

hodnotou obdobnou vzorci (317)

$$v' = \frac{q}{\gamma'},$$

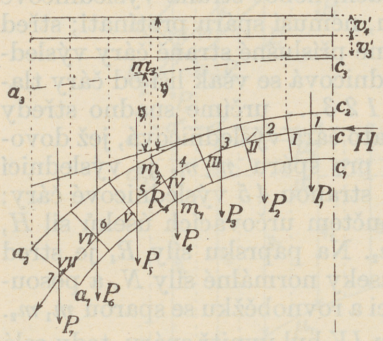
znamená-li γ' měrnou váhu náspu. Pro zatížení vrchní stavbou q_3 a zatížení pohyblivé q_4 stanovíme tak výšky

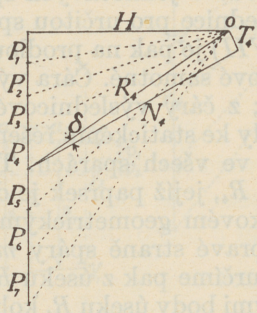
$$v_3' = \frac{q_3}{\gamma'}, \quad v_4' = \frac{q_4}{\gamma'}$$

a vyjádříme zatížení vrchní stavbou a zatížení pohyblivé obdélníky o výškách v_3', v_4', jež se přičítají k ploše náspu (obr. 147).

Nyní je již všechno zatížení vyjádřeno vahou hmoty, tedy vztaženo k jednotce krychlové; je tu však dvojí hmota: zdivo s měrnou vahou γ a násyp s měrnou vahou γ'. Převedeme násyp na hmotu klenbovou stejné váhy. Sloupec náspu o základně dx, výšce η', šířce b a měrné váze γ' má váhu

$$dQ = \gamma' b \eta' dx.$$





Obr. 147.

Nahraďme jej sloupcem zdiva o výšce η, ostatních rozměrech týchž a měrné váze γ; tu jest

$$dQ = \gamma b \eta dx.$$

Srovnáním plyne

$$\gamma' \eta' = \gamma \eta,$$

tedy *redukovaná výška* náspu jest

$$\eta = \eta' \frac{\gamma'}{\gamma}, \qquad (336)$$

Převedeme-li takto násyp se zatížením vrchní stavbou a zatížením pohyblivým na hmotu klenbovou v celé délce klenby, obdržíme *srovnávací čáru* $a_3 m_3 c_3$, jež omezuje s lícnou čarou $a_1 m_1 c_1$, patní rovinou $a_1 a_2$ a svislicemi krajních bodů $a_2 a_3$, $c_1 c_3$ *určovací plochu* zatížení. Srovnávací čáru určíme, násobíme-li pořadnice η' náspu (s vrchní stavbou a zatížením pohyblivým) stálým poměrem γ'/γ; proto je srovnávací čára mezi dvěma přímkami přímá a mezi přímkou a křivkou křivá.

Zatížení každého dílu klenby nahradíme osamělým břemenem P_1, P_2, P_3, ... Určovací paprsky těchto břemen jsou tížnice dílů určovací plochy; určovací úseky znamenají ve zvoleném měřidle váhy dílů. Je-li u_r obsah obecného dílu určovací plochy a uvažujeme-li obecně pás klenby o šířce b, odpovídá tomuto dílu váha

$$P_r = \gamma b u_r.$$

Díly určovací plochy uveďme na touž půdici e; pro díl u_r obdržíme tím určovací úsek z_r, i jest

$$u_r = e z_r, \quad P_r = \gamma b e z_r.$$

Znamenáme-li stálého činitele

$$\gamma b e = \varepsilon, \qquad (337^a)$$

dostaneme

$$P_r = \varepsilon z_r. \qquad (337^b)$$

Vypočteme-li skutečné váhy P_1, P_2, P_3, ... podle vzorce (337^b) a přeneseme-li je do obrazce složkového podle příhodného měřidla sil, musíme podle téhož měřidla

přenésti vodorovnou sílu H. Jinak můžeme bráti úseky $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ za určovací úseky sil $P_1, P_2, P_3, \ldots$; pak musíme však místo vodorovné síly H přenésti úsek[1])

$$\zeta_0 = \frac{H}{\varepsilon} = \frac{H}{\gamma b e}$$

Druhý způsob je jednodušší, a obyčejně se tak postupuje; velikosti sil obdržíme pak, násobíme-li podle vzorce (337^b) úseky, odměřené z obrazce složkového v měřidle délek, stálým činitelem $\varepsilon = \gamma b e$.

Skládáme-li nyní sílu H ve vrcholu postupně s břemeny $P_1, P_2, P_3, \ldots$ t. j. rýsujeme-li *výslednicovou čáru* $c\,1\,2\,3\ldots$ k silám $P_1, P_2, P_3, \ldots$ z pólu o tak, aby první stranou byl paprsek síly H ve vrcholu, obdržíme výslednice vnějších sil po jedné straně každé zvolené spáry. Tato výslednicová čára se může lišiti od *čáry tlakové*, jež obsahuje středy tlaku c, I, II, $III, \ldots$ v jednotlivých sparách, neboť strana výslednicové čáry, jež znamená paprsek výslednice pro určitou spáru, nemusí spáru protínati; střed tlaku v příslušné spáře (na př. VII) je pak na prodloužené příslušné straně čáry výslednicové, nikoli na čáře výslednicové samotné. Čára výslednicová se však liší od čáry tlakové nejvýše jen poblíž patky; z čáry výslednicové $c\,1\,2\,3\ldots$ určíme snadno středy tlaku ve všech sparách, stačí tedy ke statickému řešení tato čára výslednicová, jež dovoluje posouditi stabilitu klenby ve všech sparách. Tak pro spáru $m_1 m_2$ je výslednicí vnějších sil po pravé straně síla R_4, jejíž paprsek je dán stranou $4\,5$ výslednicové čáry; její úsek je dán v obrazci složkovém geometrickým součtem určovacích úseků sil H, P_1, P_2, P_3, P_4, jež působí po pravé straně spáry $m_1 m_2$. Na paprsku síly R_4 je střed tlaku IV; v obrazci složkovém určíme pak z úseku R_4 úseky normálné síly N_4 a posouvající síly T_4, vedeme-li koncovými body úseku R_4 kolmici a rovnoběžku se sparou $m_1 m_2$.

Výminka rovnováhy v točení žádá, aby střed tlaku IV byl uvnitř spáry, tedy celá čára výslednicová uvnitř klenby; nemusíme k ní však hleděti, poněvadž jest obsažena ve výmince bezpečné pevnosti. Výminka rovnováhy v posouvání je naplněna, je-li sklon δ výslednice R_4 ke spáře, tedy úhel, jejž svírají úseky R_4 a N_4 v obrazci složkovém, menší než třecí úhel φ pro zdivo. U kleneb bývá této výmince vyhověno, neboť má-li býti celá výslednicová čára uvnitř klenby, nemohou se výslednice odchylovati mnoho od kolmic ke sparám. Výminka bezpečné pevnosti žádá konečně, aby největší napětí nepřestoupilo dovoleného namáhání. Největší napětí počítáme pak podle vzorce (334^a), je-li střed tlaku ve vnitřní třetině spáry, a podle vzorce (334^b), vyjde-li střed tlaku mimo vnitřní třetinu spáry; vzdálenost c středu tlaku od středu spáry nebo vzdálenost c' středu tlaku od bližšího kraje spáry odměříme z výkresu.

Přenášíme-li do obrazce složkového místo sil P určovací úseky ζ, jež souvisí se silami P podle vzorce (337^b), dostaneme v obrazci složkovém pro normálnou sílu N a posouvající sílu T určovací úseky ζ_N, ζ_T, jež znamenají délky; odměříme je tedy v měřidle délkovém a vypočteme pak příslušné síly podle vzorce (337^b), totiž

$$N = \varepsilon \zeta_N, \quad T = \varepsilon \zeta_T.$$

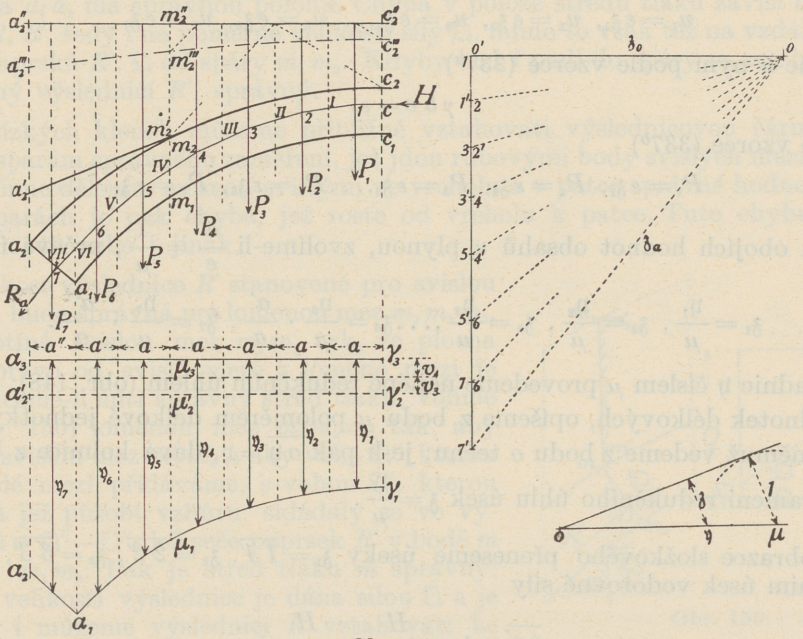
δ) Čára tlaková při dělení mezemi svislými. Skutečné řešení klenby podle obr. 147 bylo by zdlouhavé; zejména by bylo obtížné stanovení paprsků sil P jakožto tížnic proužků lomených. Je výhodné a také možné děliti určovací plochu na proužky *mezemi svislými*; z výslednicové čáry pro toto dělení určené stanovíme snadno výslednice pro spáry správného zaměření, kolmého k lícné ploše klenby.

Rozdělme, počínajíce od vrcholu, klenbu i násyp na úzké proužky mezemi svislými; proužky budou míti tvar lichoběžníků a jejich svislé tížnice budou velmi přibližně uprostřed šířky, přenášíme tedy polovici šířky proužku a, abychom měli hned i tížnice (obr. 148). Před patním bodem a_1 a nad patní sparou $a_1 a_2$ vyjdou ovšem proužky jiné

[1]) Při skutečném řešení nebývá třeba této redukce síly H, neboť na př. z její příčinkové čáry určíme velikost síly H přímo v měřidle sil.

šířky a', a''. Určovací plochu zatížení znázorníme přehledně zvláštním obrazcem. Tu převedeme zatížení Q_3, Q_4 přímo na hmotu klenbovou, tedy vypočteme výšky

$$v_4 = \frac{q_4}{\gamma}, \quad v_3 = \frac{q_3}{\gamma}$$



Obr. 148.

a přeneseme je postupně od vodorovné osy $\alpha_3 \gamma_3$. Pak převedeme na hmotu klenbovou též násyp; k tomu použijeme provedeného dělení na proužky, zaokrouhlíme-li poměr $\gamma' : \gamma$ měrné váhy náspu a zdiva na jednoduchý zlomek (na př. 3 : 4 jako v obr. 148 nebo jiný poměr podobný). Nad přímkou $a_2' m_2'$, která omezuje nadezdívku, potřebujeme pro srovnávací čáru pouze jediný bod m_2''', poněvadž je tu srovnávací čarou přímka $a_2''' m_2'''$, jež prochází průsečíkem přímky $a_2' m_2'$ s přímkou $a_2'' m_2''$, tvořící vrchní omezení náspu. Nad křivou plochou rubovou je srovnávací čára ovšem křivá a určila by se několika body. Pořadnice mezi čarou srovnávací a čarou lícnou přeneseme pak do určovací plochy veškerého zatížení, na př. $\overline{a_2''' a_2} = \overline{\alpha_2' \alpha_2}$, $\overline{m_2''' m_1} = \overline{\mu_2' \mu_1}$, $\overline{c_2''' c_1} = \overline{\gamma_2' \gamma_1}$; dostaneme tím čáru $\alpha_2 \alpha_1 \mu_1 \gamma_1$, jež s přímkou $\alpha_3 \gamma_3$ omezuje určovací plochu veškerého zatížení. Takto rýsovaná plocha určovací má tu výhodu, že lze z ní snadno vynechati na př. zatížení pohyblivé.

V tížnicích, tedy přibližně uprostřed proužků určovací plochy měříme pořadnice $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$, jež dají obsahy proužků

$$u_1 = a\,\eta_1, \quad u_2 = a\,\eta_2, \quad u_3 = a\,\eta_3, \ldots, \quad u_6 = a'\,\eta_6, \quad u_7 = a''\,\eta_7.$$

Uvažujeme-li pás klenby o šířce b, vyjdou pak zatížení proužků podle vzorce

$$P = \gamma\, b\, u;$$

znamenejme krátce

$$\gamma\, a\, b = \varepsilon' \qquad (338^a)$$

a máme

$$P_1 = \varepsilon'\,\eta_1, \quad P_2 = \varepsilon'\,\eta_2, \quad P_3 = \varepsilon'\,\eta_3, \ldots P_6 = \varepsilon'\,\eta_6 \cdot \frac{a'}{a}, \quad P_7 = \varepsilon'\,\eta_7 \frac{a''}{a}. \qquad (338^b)$$

Kdybychom vypočetli podle těchto vzorců síly P, mohli bychom je přenášeti do obrazce složkového podle zvoleného měřidla sil. Jinak bychom mohli pokládati η_1, η_2, $\eta_3, \ldots \eta_6 \frac{a'}{a}$, $\eta_7 \frac{a''}{a}$ za určovací úseky sil P_1, P_2, $P_3, \ldots P_6$, P_7; poněvadž by však součet úseků byl příliš veliký, uvedeme obsahy proužků na půdici e a dostaneme tak

$$u_1 = e\,\zeta_1,\ u_2 = e\,\zeta_2,\ u_3 = e\,\zeta_3, \ldots u_6 = e\,\zeta_6,\ u_7 = e\,\zeta_7.$$

Znamenáme-li nyní podle vzorce (337^a)

$$\gamma\, b\, e = \varepsilon,$$

platí podle vzorce (337^b)

$$P_1 = \varepsilon\,\zeta_1,\ P_2 = \varepsilon\,\zeta_2,\ P_3 = \varepsilon\,\zeta_3, \ldots P_6 = \varepsilon\,\zeta_6,\ P_7 = \varepsilon\,\zeta_7.$$

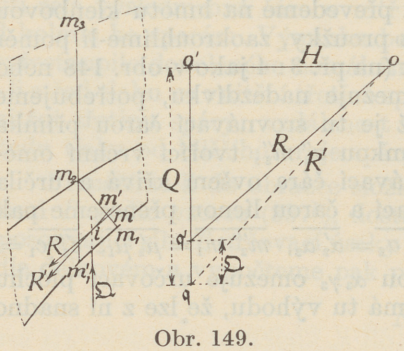
Srovnáním obojích hodnot obsahů u plynou, zvolíme-li $\frac{a}{e} = \frac{1}{\mu}$, určovací úseky

$$\zeta_1 = \frac{\eta_1}{\mu},\ \zeta_2 = \frac{\eta_2}{\mu},\ \zeta_3 = \frac{\eta_3}{\mu}, \ldots \zeta_6 = \frac{\eta_6}{\mu} \cdot \frac{a'}{a},\ \zeta_7 = \frac{\eta_7}{\mu} \cdot \frac{a''}{a}.$$

Dělení pořadnic η číslem μ provedeme nejlépe redukčním úhlem (obr. 148): přeneseme $\overline{o\,\mu} = \mu$ jednotek délkových, opíšeme z bodu μ poloměrem délkové jednotky kruhový oblouk, k němuž vedeme z bodu o tečnu; je-li pak $\overline{o\,\eta} = \eta$, dává kolmice z bodu η ke druhému rameni redukčního úhlu úsek $\zeta = \frac{\eta}{\mu}$.

Do obrazce složkového přeneseme úseky $\zeta_1 = \overline{1\,1'}$, $\zeta_2 = \overline{2\,2'}$, $\zeta_3 = \overline{3\,3'}$, ... a připojíme k nim úsek vodorovné síly

$$\overline{o\,o'} = \zeta_0 = \frac{H}{\varepsilon} = \frac{H}{\gamma\, b\, e};$$



Obr. 149.

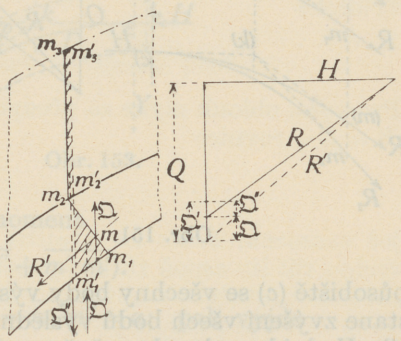
předpokládejme zase, že jde o klenbu souměrnou a souměrně zatíženou, jejíž pravou polovici nahradíme pak ve vrcholu vodorovnou silou H. Sílu H skládáme postupně se silami $P_1, P_2, P_3, \ldots$ rýsujíce výslednicovou čáru $c\,1\,2\,3 \ldots$, jejíž první strana je v paprsku H. Spojitému zatížení odpovídala by přesně křivka výslednicová, jež by se dotýkala stran rýsované lomené čáry výslednicové v bodech $I, II, III, \ldots$ na svislých mezích proužkových. Volíme-li proužky dosti úzké, stačí ovšem lomená čára výslednicová.

Z výslednicové čáry $c\,1\,2\,3 \ldots$ můžeme určiti správnou výslednici pro kteroukoli spáru kolmou k lícné ploše. Veďme na př. spáru $m_1 m_2$ rubovým bodem m_2 některé svislé meze $m'_1 m_3$ (obr. 149). Dělíce na proužky mezemi svislými určili jsme složením síly H ve vrcholu a váhy Q od vrcholu až po svislou mez $m'_1 m_3$ výslednici R', jejíž paprsek je dán stranou výslednicové čáry protínající mez $m'_1 m_3$ a úsek se rovná geometrickému součtu úseků sil H, Q. Výslednici R, která náleží ke spáře $m_1 m_2$, sestrojíme, složíme-li sílu H ve vrcholu pouze se zatížením až k lomené mezi $m_1 m_2 m_3$. Od výslednice R' třeba tedy odečísti váhu Ω zdiva v trojúhelníku $m'_1 m_2 m_1$, abychom dostali správnou výslednici R. Síla Ω působí v tížnici trojúhelníka $m'_1 m_2 m_1$; její úsek snadno určíme, vypočteme-li váhu zdiva v trojúhelníku $m'_1 m_2 m_1$ a převedeme-li ji na měřidlo složkového obrazce. Sílu R' složíme pak se silou Ω vzhůru působící ve výslednici R, jejíž paprsek seče spáru $m_1 m_2$ ve správném středu tlaku m.

Kdybychom výslednici R' pro dělení mezemi svislými vztahovali ke spáře $m_1 m_2$, dopouštěli bychom se chyby ve velikosti výslednice i v poloze středu tlaku. Chyba ve velikosti výslednice je dána silou $\mathfrak{Q}$, která závisí na obsahu trojúhelníka $m'_1 m_2 m_1$. Ve vrcholu je myšlená spára svislá, tam tedy není chyby; od vrcholu k patce roste obsah $\triangle m'_1 m_2 m_1$, tedy roste i chyba, pro patní spáru máme však správnou výslednici, poněvadž spára $a_1 a_2$ má správnou polohu. Chyba v poloze středu tlaku závisí na odchylce paprsků R, R', tedy i na poměrné velikosti síly $\mathfrak{Q}$, mimo to však též na vzdálenosti průsečíku i paprsků R', $\mathfrak{Q}$ od spáry $m_1 m_2$. Kdyby bod i padl do spáry $m_1 m_2$, byl by střed tlaku, daný výslednicí R', správný.

U nízkých kleneb můžeme přibližně vztahovati výslednicovou čáru pro svislé dělení ke sparám správného zaměření, jež jdou rubovými body svislých mezí. U vyšších kleneb určíme dělením mezemi svislými ve vrcholu a v patce správné hodnoty, v mezilehlých sparách je pak chyba, jež roste od vrcholu k patce. Tuto chybu opravíme podle obr. 149 nebo i jinak.

Velikost výslednice R' stanovené pro svislou mez $m'_1 m'_3$ bude správná pro lomenou mez $m_1 m_2 m_3$, která protíná svislou mez $m'_1 m'_3$ tak, že plocha vlevo i vpravo od svislé meze k lomené mezi je stejná. Chceme-li míti správný střed tlaku, volíme opět (obr. 150) lomenou mez $m_1 m_2 m_3$ tak, aby protínala svislou mez $m'_1 m'_3$ a aby váha $\mathfrak{Q}''$, kterou proti svislé mezi přidáváme, s vahou $\mathfrak{Q}'$, kterou ubíráme a jež působí vzhůru, skládaly se ve výslednici $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}' - \mathfrak{Q}''$, jež seče paprsek R' v bodě m na spáře $m_1 m_2$. Pak je střed tlaku m správný; chyba ve velikosti výslednice je dána silou $\mathfrak{Q}$ a je nepatrná, i můžeme výslednici R' vztahovati ke spáře $m_1 m_2$.



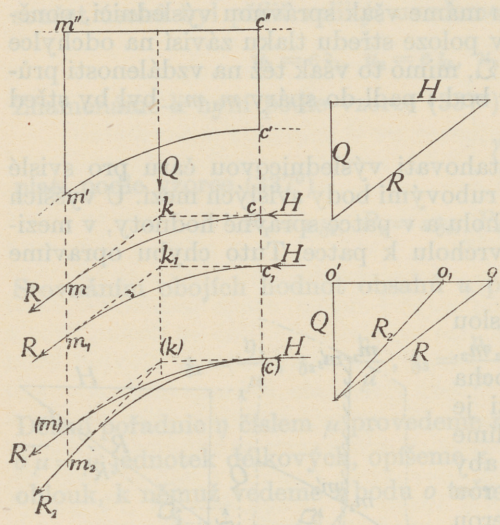
Obr. 150.

ε) ***Stanovení vodorovné síly ve vrcholu.*** Dříve se užívalo k řešení kleneb různých způsobů přibližných, při nichž se pokládala klenba obyčejně za konstrukci nestlačitelnou, a tlaková čára se stanovila z předpokladů více méně libovolných. Tyto způsoby řešení kleneb jsou nesprávné a nepodávají ani přibližného obrazu skutečného stavu. Neboť ve skutečnosti je zdivo jako každá látka aspoň do jisté míry pružné, a zákon jeho přetvoření stačí úplně k řešení úlohy. Lze ovšem namítnouti, že se obyčejné řešení oblouků zakládá podstatně na zákoně Hookově, jenž pro zdivo neplatí. Tu by však bylo jedině správné odvoditi zkouškami skutečnou souvislost napětí s roztažením u zdiva a na základě této souvislosti vyšetřovati klenbu jako pružný oblouk. Takový přesný zákon byl by příliš složitý a nehodil by se pro praktické upotřebení, i nezbývá, než užívati jednoduchých výsledků, ke kterým dospíváme ze zákona Hookova. Výsledky ty jsou pro zdivo sice jen přibližné, avšak jsou přece jen mnohem spolehlivější než starší způsoby řešení, jež postrádají správných základů vědeckých.

Klenby řešíme tedy jako pružné oblouky; není-li kloubů, jest oblouk trojnásob staticky neurčitý, a podle toho je též stanovení reakcí při oblouku bez kloubů úlohou třikrát staticky neurčitou. Vycházeli jsme dosud od vodorovné síly ve vrcholu, předpokládajíce oblouk souměrný a zatížení jeho rovněž souměrné ke svislé rovině jdoucí vrcholem. Můžeme ovšem stejně vycházeti od kterékoli spáry, známe-li výslednici vnějších sil pro tuto spáru; při oblouku nebo zatížení nesouměrném vycházeli bychom od spáry patní, pro kterou je výslednicí vnějších sil po jedné straně příslušná reakce opěrová.

Pro jednoduchost mysleme si i dále klenbu i zatížení souměrné k myšlené spáře vrcholové; pak můžeme nahraditi pravou polovici klenby ve vrcholu vodorovnou silou H. Určovací plocha zatížení budiž omezena přímkou $c'' m''$ a křivkou $c' m'$ (obr. 151).

Stanovme výslednici R vnějších sil od vrcholu až po svislou mez $m'm''$; tu nahradíme určovací plochu $c'c''m''m'$ výsledním břemenem Q, jež působí v tížnici této plochy, a složíme břímě Q se silou H ve vrcholu. Paprsek výslednice R prochází průsečíkem k paprsků H, Q a určuje na prodloužené svislé mezi $m'm''$ bod m; k zatížení spojitému náleží křivka výslednicová, jež by se dotýkala paprsku H v bodě c na spáře vrcholové a paprsku R v bodě m. Mysleme si, že se velikost síly H nezmění, působiště její se však posune z bodu c do c_1. Pak vyjde výslednice R téže velikosti a téhož směru, působící v paprsku $k_1 m_1 \parallel km$. To platí o každé tečně křivky výslednicové a je též $\overline{cc_1} = \overline{kk_1} = \overline{mm_1}$; z toho plyne, že mění-li se pouze střed tlaku c ve spáře vrcholové, velikost síly H však zůstává stálou, posouvá se výslednicová čára, aniž mění tvaru, ve všech bodech o týž svislý úsek.



Obr. 151.

Zůstane-li naopak působiště (c) a změní-li se velikost síly $H = \overline{oo'}$ na $H_1 = \overline{o_1 o'}$, vyjde místo výslednice R a bodu (m) výslednice R_2 a bod m_2. Vepíšeme-li do lomených čar $(c)(k)(m)$ a $(c)(k)m_2$ křivky výslednicové, vidíme, že zmenšením síly H beze změny působiště (c) se všechny body výslednicové čáry snižují, a naopak zvětšením síly H nastane zvýšení všech bodů výslednicové čáry. Mění-li se současně střed tlaku c i velikost síly H, dojdeme k nekonečně mnoha výslednicovým čarám, jež náleží k danému zatížení Q a tedy k dané klenbě. Všechny tyto čáry výslednicové jsou *možné; skutečná* je jediná z těchto nekonečně mnoha výslednicových čar. Skutečnou čáru výslednicovou určíme pak pokládajíce klenbu za pružný oblouk bez kloubů.

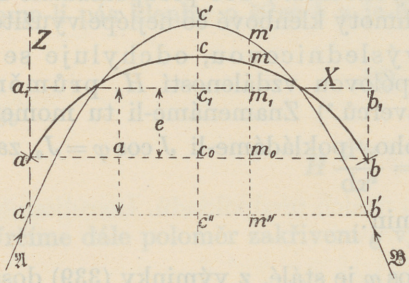
U parabolického oblouku o třech kloubech, zatíženého v celé délce rovnoměrně (viz obr. 48), ztotožnila se výslednicová čára se střednicí; pak je v každém průřezu oblouk prostě tlačen, a tedy pevnosti hmoty všude co nejlépe využito. U nízkého parabolického oblouku o dvou kloubech za plného zatížení rovnoměrného (viz obr. 81) se čára výslednicová odchyluje od střednice, avšak celkem málo; nedbáme-li tu účinku normálné síly, což je přípustné u oblouku vyššího, ztotožní se i zde výslednicová čára se střednicí. Také u nízkého parabolického oblouku bez kloubů s plným zatížením rovnoměrným (viz obr. 110) se čára výslednicová málo odchyluje od střednice a ztotožní se s ní, nedbáme-li účinku normálné síly, jenž se jeví zkrácením střednice. Tedy u parabolického oblouku, na nějž působí plné zatížení rovnoměrné, ztotožní se vždy výslednicová čára se střednicí, nedbáme-li účinku normálné síly.

Lze dokázati, že ke každému jinému tvaru oblouku náleží určité spojité zatížení a ke každému zatížení určitý tvar střednice, při němž se skutečná čára výslednicová ztotožňuje se střednicí, nedbáme-li účinku normálné síly. Stačí na př., je-li zatížení dáno, zvoliti střednici tak, aby byla jednou z možných výslednicových čar k zatížení; je-li tomu tak, je střednice skutečnou čarou výslednicovou, nedbáme-li účinku normálné síly.

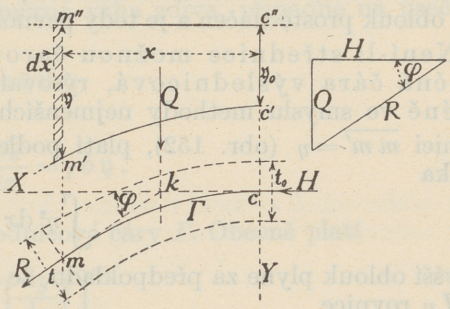
Pro důkaz této věty mysleme si střednici i zatížení souměrné ke svislici vrcholu c (obr. 152). Střednice $a\,c\,b$ budiž možnou výslednicovou čarou k danému zatížení oblouku; příslušná vzdálenost pólová jest F. Skutečná čára výslednicová $a'c'b'$, jejímiž krajními stranami jsou paprsky reakcí $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, rýsuje se pólovou vzdáleností H; za souměrného oblouku i zatížení je též výslednicová čára $a'c'b'$ souměrná ke svislici bodu c

a tětiva $a'b'$ je tedy vodorovná. Předpokládejme, že jde o oblouk vyšší, u něhož můžeme nedbati účinku normálné síly, a vztahujme oblouk k vodorovné ose X ve výši e nad tětivou $a\,b$ a ke svislé ose Z jdoucí bodem a. Nedbejme účinku normálné síly a pokládejme, jak jsme učinili při vyšším oblouku, $J\cos\varphi = J_0$ za stálé. Vynecháme-li vedlejší účinky, mají přetvárné výminky podle rovnic (171) tvar, rozumějí-li se dále všechny integrály v mezích celého oblouku,

$$\int M x'\,dx = 0, \quad \int M x\,dx = 0, \quad \int M z\,dx = 0.$$



Obr. 152.



Obr. 153.

V obecném bodě m střednice je podle obr. 152 moment

$$M = H \cdot \overline{m\,m'} = H\,(\overline{m\,m_1} + \overline{m_1 m''} + \overline{m''\,m'}).$$

Znamenejme $\overline{m_1 m} = z$, $\overline{m\,m'} = \eta$, $\overline{m''\,m'} = \eta'$, $\overline{a_1 a'} = \overline{m_1 m''} = a$; pak vyjde

$$M = H\,(a - z + \eta') = H\,(a - z) + H\,\eta'.$$

Součin $H\,\eta' = H \cdot \overline{m''\,m'}$ znamená moment prostého nosníku přímého $a\,b$ v bodě m_0 za daného zatížení. Poněvadž je též střednice možnou čarou výslednicovou, rýsovanou pólovou vzdáleností F, lze uvedený moment psáti

$$H\,\eta' = F \cdot \overline{m_0\,m} = F\,(e + z)$$

a vychází

$$M = H\,(a - z) + F\,(e + z) = H\,a + F\,e + (F - H)\,z.$$

Sečtením prvých dvou výminek přetvárných dostáváme

$$\int M\,(x + x')\,dx = l \int M\,dx = 0 \quad \text{nebo} \quad \int M\,dx = 0. \tag{339}$$

Dosazením stanovené hodnoty M do této a třetí výminky přetvárné plyne

$$(H\,a + F\,e) \int dx + (F - H) \int z\,dx = 0, \qquad (H\,a + F\,e) \int z\,dx + (F - H) \int z^2\,dx = 0.$$

Osu X volme jako u vyššího oblouku tak, aby vyhověla rovnici (173)

$$\int z\,dx = 0.$$

Druhá rovnice přetvárná dá pak

$$(F - H) \int z^2\,dx = 0;$$

poněvadž je $\int z^2\,dx > 0$ jakožto součet kladných čísel, musí být

$$F - H = 0 \quad \text{nebo} \quad F = H.$$

Z prvé rovnice, v níž je $\int dx = l > 0$, plyne nyní

$$H\,a + F\,e = 0;$$

AKADEMICKÁ KNIHOVNA SSM V PRAZE

poněvadž je $F = H$, vychází konečně

$$a = -e,$$

t. j. $\overline{a_1 a'} = \overline{a_1 a}$ nebo $a' \equiv a$ a obdobně $b' \equiv b$. Skutečná čára výslednicová je rýsována touž vzdáleností pólovou $H = F$ jako střednice a má s ní dva body společné, tedy se s ní ztotožňuje.

Po stránce statické je výhodné, je-li střednice výslednicovou čarou k zatížení. Také se často volí za střednici výslednicová čára ke stálému zatížení a současnému plnému nebo polovičnímu rovnoměrnému zatížení pohyblivému.[1]) Pro předpokládané zatížení je pak oblouk prostě tlačen a je tedy pevnosti hmoty klenbové co nejlépe využito.

Není-li střednice možnou čarou výslednicovou, odchyluje se od ní skutečná čára výslednicová, rýsovaná pólovou vzdáleností H, průměrně co nejméně ve smyslu methody nejmenších čtverců.[2]) Znamenáme-li tu momentovou pořadnici $\overline{m m'} = \eta$ (obr. 152), platí podle toho, pokládáme-li $J \cos \varphi = J_0$ za stálé, výminka

$$\int_0^l \eta^2 \, dx = \min. \tag{340}$$

Pro vyšší oblouk plyne za předpokladu, že $J \cos \varphi$ je stálé, z výminky (339) dosazením $M = H \eta$ rovnice

$$\int_0^l \eta \, dx = 0, \tag{341}$$

jež znamená, že se tu kladná a záporná plocha momentová rovnají. Podle těchto vět lze aspoň zhruba posouditi, je-li v daném případě výslednicová čára správně určena. Skutečné stanovení výslednicové čáry provedeme vždy podle způsobů odvozených dříve pro oblouky.

41. Tloušťka kleneb. *α) Tloušťka ve vrcholu.* Jednoduchý vzorec pro tloušťku klenby odvodíme z předpokladu, že jde o klenbu i zatížení souměrné k vrcholové svislici, a že střednice je možnou a tedy, nebáme-li účinku normálné síly, také skutečnou čarou výslednicovou. Odvoďme nejprve rovnici střednice jakožto výslednicové čáry ke spojitému zatížení danému určovací plochou $c' c'' m'' m'$ (obr. 153). Pravou polovici klenby nahradíme vodorovnou silou H ve vrcholu, kterou složíme s výslednicí Q zatížení daného plochou $c' c'' m'' m'$; paprsek Q je tížnicí této určovací plochy. Síly H, Q se skládají ve výslednici R, jejíž paprsek jde průsečíkem k paprsků obou složek. Ke spojitému zatížení náleží výslednicová křivka, jež se dotýká paprsků H, R v bodech c, m na svislicích mezí zatížení Q. Vztahujme tuto křivku k vodorovné ose X a svislé ose Y, jež jdou bodem c a jsou kladné vlevo a dolů.

Tečna R výslednicové čáry svírá s osou X úhel φ, pro nějž platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx};$$

z obrazce složkového plyne

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{H},$$

srovnáním obou hodnot tg φ pak určíme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H} \text{ nebo } H \frac{dy}{dx} = Q. \tag{342}$$

[1]) Jak se tu vyšetří výslednicová čára, jest uvedeno na př. ve spisovatelově „Theorii čar příčinkových“, č. III. (Praha 1912), str. 223.

[2]) Tuto větu odvodil obecně *E. Winkler* v pojednání „Beitrag zur Theorie der Bogenträger“ (Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover r. 1879, str. 210).

Tím jsme dospěli ke známé diferenciální rovnici výslednicové čáry ke spojitému zatížení; mohli bychom z ní řešiti jak výslednicovou čáru k danému zatížení, tak i zatížení příslušné k dané čáře výslednicové.[1])

Derivujme rovnici (342) ještě jednou podle x; tu vyjde

$$H\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}.$$

Zvětšíme-li úsečku x o $\mathrm{d}x$, zvětší se určovací plocha zatížení o proužek obsahu $\mathfrak{y}\,\mathrm{d}x$; uvažujeme-li pás klenby o šířce b a je-li γ měrná váha zdiva, připadne na úsečku $\mathrm{d}x$ břímě

$$\mathrm{d}Q=\gamma b\,\mathfrak{y}\,\mathrm{d}x.$$

Pak jest

$$H\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=\gamma b\,\mathfrak{y}. \tag{343}$$

Určíme dále poloměr zakřivení ϱ výslednicové čáry Γ. Obecně platí

$$\varrho=\pm\frac{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}};$$

čitatel má hodnotu

$$\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}=\left(1+\mathrm{tg}^2\,\varphi\right)^{3/2}=\left(\sec^2\varphi\right)^{3/2}=\sec^3\varphi=\frac{1}{\cos^3\varphi},$$

jmenovatel vychází z rovnice (343) hodnotou

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\gamma b\,\mathfrak{y}}{H},$$

i jest v obecném bodě m

$$\varrho=\frac{H}{\gamma b\,\mathfrak{y}\cos^3\varphi}. \tag{344}$$

Jdeme-li od bodu k bodu, mění se ϱ, $\mathfrak{y}$, φ a stálými zůstávají γ, b, H. Ve vrcholu jest $\varphi=0$, $\cos\varphi=1$ a $\mathfrak{y}=\mathfrak{y}_0$; z posledního vzorce určíme tu poloměr zakřivení ve vrcholu

$$\varrho_0=\frac{H}{\gamma b\,\mathfrak{y}_0}, \tag{344a}$$

z něhož odvodíme tloušťku klenby.

Předpokládáme, že se výslednicová čára Γ ztotožňuje se střednicí; pak je klenba namáhána v každé spáře prostým tlakem a výslednice R působí kolmo ke spáře, myslíme-li si spáry kolmé ke střednici. Vznikne tedy v obecné spáře napětí

$$\nu=\frac{R}{bt},$$

jež se smí rovnati nejvýše dovolenému namáhání zdiva k, t. j.

$$\frac{R}{bt}=k \quad \text{nebo} \quad R=bkt.$$

[1]) Viz druhý díl tohoto spisu, 3. vydání (1946), str. 60.

Tloušťku t klenby měňme tak, aby se napětí ve všech sparách rovnalo dovolenému namáhání k; podle poslední rovnice platí pak pro spáru vrcholovou

$$H = b\,k\,t_0.$$

Dělením obou posledních rovnic plyne

$$\frac{R}{H} = \frac{t}{t_0};$$

z obrazce složkového vychází

$$\frac{R}{H} = \frac{1}{\cos\varphi},$$

i jest

$$t = \frac{t_0}{\cos\varphi} \tag{345}$$

zákon, podle něhož se mění tloušťka klenby za našich předpokladů. Dosadíme-li stanovenou hodnotu H do vzorce (344^a), dostaneme rovnici

$$\varrho_0\,\mathfrak{y}_0 = \frac{H}{\gamma\,b} = \frac{k\,t_0}{\gamma}. \tag{346}$$

Výška určovací plochy zatížení ve vrcholu jest

$$\mathfrak{y}_0 = t_0 + v, \tag{347^a}$$

znamená-li v celkovou výšku náspu, zatížení vrchní stavbou i zatížení pohyblivého převedenou na hmotu klenbovou. Je-li v' skutečná výška náspu, γ' jeho měrná váha a q poměrné zatížení vrchní stavbou i pohyblivé dohromady, platí

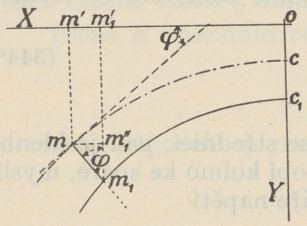
$$v = v'\frac{\gamma'}{\gamma} + \frac{q}{\gamma}. \tag{347^b}$$

Poloměr zakřivení střednice ve vrcholu ϱ_0 můžeme stanoviti z poloměru r lícné čáry ve vrcholu. Kdyby byla tloušťka t klenby stálá a čarou lícnou i rubovou a tedy i střednicí kružnice, byly by to čáry soustředné a vyšlo by

$$\varrho_0 = r + \tfrac{1}{2}t_0.$$

Zesilujeme-li klenbu podle vzorce (345), vyjde

$$\varrho_0 > r + \tfrac{1}{2}t_0.$$



Obr. 154.

Je-li[1]) (obr. 154) $c\,m$ střednice, $c_1 m_1$ oblouk lícný a $m\,m_1$ kolmice ke střednici, má délka $\overline{m\,m_1} = \frac{1}{2}t$ svislý průmět

$$\overline{m_1'' m_1} = \overline{m\,m_1}\cdot\cos\varphi = \tfrac{1}{2}t\cos\varphi = \tfrac{1}{2}t_0 = \overline{c\,c_1},$$

jak plyne ze vzorce (345). V soustavě os X, Y, vedených počátkem o na svislici bodu c, má bod m_1 lícné plochy souřadnice $x = \overline{o\,m'_1}$, $y = \overline{m'_1 m_1}$ a bod m střednice souřadnice

$$\xi = \overline{o\,m'} = x + \tfrac{1}{2}t_0\cdot\operatorname{tg}\varphi, \qquad \eta = \overline{m'\,m} = y - \tfrac{1}{2}t_0;$$

dále jest

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}.$$

[1]) Viz pojednání *G. Tolkmitta* „Das Entwerfen und die Berechnung der Brückengewölbe“ v „Zeitschrift für Bauwesen“ r. 1885, str. 279.

Znamenejme kratčeji

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = \eta', \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y';$$

tu vyjde

$$\eta' = y' \cdot \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi},$$

Ze vzorců pro souřadnice ξ, η odvodíme

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi} = 1 - \frac{1}{2} t_0 \cdot \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\mathrm{d}\xi} = 1 - \frac{1}{2} t_0 \cdot \frac{\mathrm{d}\eta'}{\mathrm{d}\xi} = 1 - \frac{1}{2} t_0 \eta'',$$

znamenáme-li

$$\eta'' = \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\xi^2} = \frac{\mathrm{d}\eta'}{\mathrm{d}\xi}.$$

Dosazením plyne

$$\eta' = y'(1 - \tfrac{1}{2} t_0 \eta'') \quad \text{nebo} \quad \frac{\eta'}{1 - \frac{1}{2} t_0 \eta''} = y'.$$

Derivujme tuto rovnici znovu podle ξ; vyjde tak

$$\frac{(1 - \frac{1}{2} t_0 \eta'')\eta'' + \frac{1}{2} t_0 \eta' \eta'''}{(1 - \frac{1}{2} t_0 \eta'')^2} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi} = y''(1 - \tfrac{1}{2} t_0 \eta'').$$

Z poslední rovnice vypočteme

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{(1 - \frac{1}{2} t_0 \eta'')\eta'' + \frac{1}{2} t_0 \eta' \eta'''}{(1 - \frac{1}{2} t_0 \eta'')^3}.$$

Ve vrcholu oblouku jest $y'_0 = 0$, $\eta'_0 = 0$ a vyjde tu

$$y''_0 = \frac{\eta''_0}{(1 - \frac{1}{2} t_0 \eta''_0)^2}, \tag{348}$$

jsou-li y''_0, η''_0 hodnoty těchto derivací ve vrcholu. Poloměr zakřivení střednice v obecném bodě jest

$$\varrho = \frac{(1 + \eta'^2)^{3/2}}{\eta''}$$

a ve vrcholu

$$\varrho_0 = \frac{(1 + \eta'^2_0)^{3/2}}{\eta''_0} = \frac{1}{\eta''_0};$$

poloměr zakřivení lícné plochy ve vrcholu má hodnotu

$$r = \frac{(1 + y'^2_0)^{3/2}}{y''_0} = \frac{1}{y''_0}.$$

Dosazením hodnoty y''_0 dané vzorcem (348) a poslední hodnoty ϱ_0 plyne

$$r = \frac{\left(1 - \frac{t_0}{2\varrho_0}\right)^2}{\frac{1}{\varrho_0}} = \varrho_0 \left(1 - \frac{t_0}{2\varrho_0}\right)^2 = \varrho_0 - t_0 \left(1 - \frac{t_0}{4\varrho_0}\right).$$

Poněvadž je t_0 proti $4\varrho_0$ nepatrné, lze je vynechati a vyjde přibližně

$$\varrho_0 \doteq r + t_0. \tag{349}$$

Hodnotou ϱ_0 podle vzorce (349) a η_0 podle vzorce (347^a) vychází z rovnice (346)

$$(r + t_0)(t_0 + v) = \frac{k\, t_0}{\gamma}. \tag{350}$$

Tato rovnice je vzhledem k t_0 druhého stupně; budeme ji řešiti jen přibližně, poněvadž je celé vyšetřování pouze přibližné. Poslední rovnici lze psáti

$$\left(\frac{k}{\gamma} - r - v - t_0\right) t_0 = r\, v;$$

vynecháme-li na levé straně v závorce t_0 proti $r + v$, dostaneme vzorec

$$t_0 \doteq \frac{r\, v}{\dfrac{k}{\gamma} - r - v}.$$

Z tohoto vzorce vycházela by pro $v = 0$, tedy klenbu nezatíženou, tloušťka $t_0 = 0$. Poněvadž však každá hmota klenbová žádá i pro klenbu, jež nese pouze vlastní váhu, určité nejmenší tloušťky c, musíme poslední vzorec upraviti tak, aby pro $v = 0$ dal $t_0 = c$; tomu vyhovíme, připočteme-li c na pravé straně. Tak dospíváme k *Winklerovu vzorci* pro tloušťku klenby ve vrcholu

$$t_0 = c + \frac{r\, v}{\dfrac{k}{\gamma} - r - v}. \tag{351}$$

Stálé hodnoty γ, c, k a k/γ udává Winkler, jak je uvedeno v tabulce.

Hmota klenbová	γ (t/m²)	c (m)	Mosty železniční		Mosty silniční	
			k (t/m²)	$\frac{k}{\gamma}$	k (t/m²)	$\frac{k}{\gamma}$
Cihly	1,8	0,5	56	32	70	40
Kámen lomový	2,4	0,5	68	30	85	37
Kvádry střední pevnosti . .	2,3	0,4	74	32	92	40
Kvádry velké pevnosti . . .	2,6	0,3	80	32	100	40

V tabulce jsou síly vyjádřeny v tunách, délky v metrech, tedy dovolené namáhání k v t/m²; chceme-li převésti na kg/cm², musíme k v t/m² násobiti $\frac{1000}{100^2} = \frac{1}{10}$, tedy na př. 56 t/m² = 5,6 kg/cm². Podíl k/γ má jistý význam statický. Mysleme si hranol z klenbové hmoty o základně U a výšce h; jeho váha $Q = \gamma\, h\, U$ vyvodí v základně napětí

$$\nu = \frac{Q}{U} = \gamma\, h;$$

dosáhne-li toto napětí hodnoty $k = \gamma\, h$, vyjde

$$h = \frac{k}{\gamma}. \tag{352}$$

Hořejší tabulka platí pro nižší náspy; pro vysoké náspy lze bráti k i k/γ větší, než je v tabulce uvedeno, neboť se vyšším náspem rozděluje pohyblivé zatížení na větší plochu a zmírní nebezpečný účinek nárazů a otřesů. Je-li v_1 skutečná výška náspu, můžeme klásti místo k/γ pro silniční mosty hodnotu

$$0{,}86\,\frac{k}{\gamma}\cdot\frac{1+\frac{v_1}{5}}{1+\frac{v_1}{20}}$$

a pro železniční mosty

$$0{,}86\,\frac{k}{\gamma}\cdot\frac{1+\frac{v_1}{5}}{1+\frac{v_1}{25}},$$

dosazujeme-li za k/γ hodnotu v tabulce uvedenou, jež odpovídá u mostů silničních výšce náspu 1,15 m, u mostů železničních výšce náspu 1,05 m.

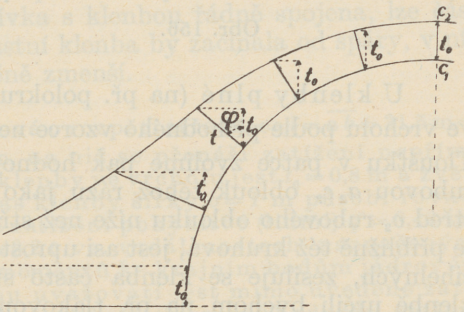
Pro velké světlosti a tudíž velké poloměry lícné plochy r vede vzorec (351) k záporným tloušťkám, užíváme-li hodnot v tabulce uvedených. Také je-li rozdíl $\frac{k}{\gamma}-r-v$ malý, nehodí se vzorec (351), poněvadž by dával velké tloušťky. Příčina toho je mimo jiné v tom, že dovolené namáhání k podle tabulky je příliš malé (nejvýše 10 kg/cm²) a nezávislé na rozpětí; pro větší rozpětí by se mělo připustiti jako u ocelových mostů větší dovolené namáhání, poněvadž tu je poměr zatížení pohyblivého ke stálému malý a tedy se napětí málo mění.

Vedle vzorce Winklerova je řada vzorců, jež mají empirický základ.[1]) Správné řešení tloušťky kleneb by se mělo opírati o největší napětí při zatížení nejen stálém, nýbrž i pohyblivém v nejúčinnější poloze.[2])

*β) **Zesilování kleneb.*** Tloušťka klenby se od vrcholu k patkám obyčejně zvětšuje, poněvadž také výslednice vnějších sil od vrcholu k patkám roste. Pro toto zesilování klenby užíváme nejčastěji vzorce (345), jenž určuje z tloušťky t_0 ve vrcholu tloušťku t v libovolné spáře; z tohoto vzorce plyne

$$t_0 = t\cos\varphi.$$

Spáry v klenbě jsou kolmé k lícné ploše; nebývají tedy přesně kolmé ke střednici, rozdíl je však tak malý, že můžeme úhel φ, rovný odchylce tečny ke střednici od vodorovné, bráti též za úhel spáry se svislicí. Pak znamená poslední rovnice, že je svislý průmět tloušťky spáry t stálý, rovnaje se tloušťce t_0 ve vrcholu. Podle toho určíme snadno (obr. 155) tloušťku klenby v libovolné spáře, známe-li její tloušťku t_0 ve vrcholu. Tloušťka klenby podle tohoto zákona od vrcholu k patkám roste. Kdybychom chtěli takto zesilovati klenbu plnou (na př. polokruhovou), vyšla by ve vodorovné spáře



Obr. 155

[1]) Uvádí je přehledně *Fr. Klokner* v „Technickém průvodci", seš. 4. (6. vyd. 1946), str. 393 a d.

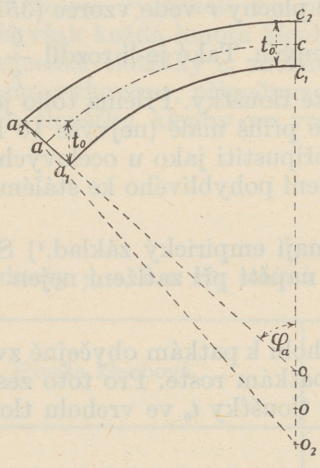
[2]) Na tomto správném základě odvodil vzorec pro tloušťku segmentové klenby *V. Janák* v pojednání „Příspěvek ku statickému vyšetřování nízkých kleneb segmentových" v „Technickém obzoru" r. 1906, str. 41 a d.

patní nekonečná tloušťka; nelze tedy tohoto způsobu zesilování kleneb u plných oblouků použíti. Příčinou toho je, že vzorec (345) předpokládá, že je střednice výslednicovou čarou k zatížení; u plného oblouku nelze toho dosíci, neboť by to žádalo u patek nekonečně velikého zatížení.

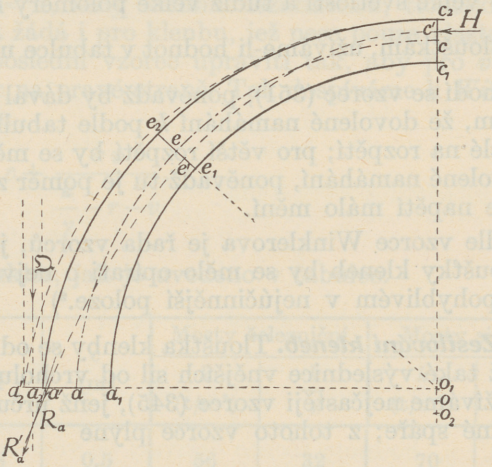
Způsobem právě odvozeným můžeme postupovati u klenby segmentové (obr. 156), pro niž bychom určili podle vzorce (351) nebo podle jiného vzorce tloušťku t_0 ve vrcholu a podle vzorce (345) bychom stanovili tloušťku patní spáry

$$\overline{a_1 a_2} = t_a = \frac{t_0}{\cos \varphi_a}.$$

Volíme-li za lícný oblouk $a_1 c_1$ kružnici, jež má střed o_1, zvolíme též za rubový oblouk $a_2 c_2$ kružnici o středu o_2; střednicí bude tu přibližně též kruhový oblouk stanovený středy a, c spáry patní a vrcholové, jeho střed o je pak asi uprostřed mezi středy o_1, o_2. Známe-li rozměry klenby, řešíme ji jako oblouk bez kloubů a stanovíme zejména krajní hodnoty napětí ve spáře patní a vrcholové, po případě i v některých sparách mezilehlých; tím se přesvědčíme, je-li vyhověno výminkám rovnováhy ve všech sparách.



Obr. 156.



Obr. 157.

U klenby plné (na př. polokruhové, obr. 157) určili bychom tloušťku $t_0 = \overline{c_1 c_2}$ ve vrcholu podle příhodného vzorce nebo bychom ji zvolili podle provedených kleneb. Tloušťku v patce zvolíme pak hodnotou $\overline{a_1 a_2} = t_a = 1{,}5\, t_0$ až $2\, t_0$ a zvolíme za čáru rubovou $a_2 c_2$ oblouk téhož rázu jako oblouk lícný; jde-li o oblouky kruhové, bude střed o_2 rubového oblouku níže než střed o_1 oblouku lícného a střed o střednice, která je přibližně též kruhová, jest asi uprostřed mezi body o_1, o_2. U menších kleneb, zejména cihelných, zesiluje se klenba často stupňovitě. Při souměrné a souměrně zatížené klenbě určili bychom na př. tlakovou čáru $c' e' a'$ vycházející od vodorovné síly H ve vrcholu; obyčejně vyjde tu ve vrcholu tlaková čára nad střednicí, pak klesá pod střednici, blíží se nejvíce k lícné ploše v nebezpečné spáře $e_1 e_2$ asi uprostřed výšky klenby, protne znovu střednici a v patce se blíží ploše rubové. Tento průběh tlakové čáry plyne již z výminky (340). Napětí nabývá tu největších hodnot ve sparách, v nichž se střed tlaku nejvíce blíží některému kraji spáry, tedy ve spáře vrcholové, patní a nebezpečné; v těchto sparách bychom se především přesvědčili, nepřestupuje-li největší napětí dovoleného namáhání. Stane-li se, že v patce vyjde střed tlaku a' mimo vnitřní třetinu spáry a největší napětí, počítané podle vzorce (334^b), překročí dovolené namá-

hání zdiva v tlaku, musíme klenbu v patce zesíliti. Poněvadž i po zesílení bude asi střed tlaku mimo jádro, vyjde

$$\max \nu = \frac{2N}{3bc'} \leqq k,$$

plyne tedy

$$c' \geqq \frac{2N}{3bk}; \tag{353}$$

tím je dána vzdálenost $\overline{a'a'_2} = c'$ středu tlaku od rubového kraje spáry. Zesílením klenby přibude zatížení $\mathfrak{Q}$ nad úsečkou $\overline{a_2 a'_2}$, jež zvětší normálnou sílu N a složí se s výslednicí R_a ve výslednici R'_a, jež dá střed tlaku blíže k rubovému bodu; proto musíme voliti zesílení větší, než by dávalo znaménko rovnosti v posledním vzorci.

42. Příklad k řešení kleneb. Přesné vyšetřování kleneb, na něž působí též zatížení pohyblivé, provedeme ovšem příčinkovými čarami, jež stanovíme jako u nosníků obloukových. Půjde vždy o napětí v krajních vláknech, jež se řeší nejlépe z momentů ke krajním bodům jádrovým. Určili bychom tedy příčinkové čáry momentů ke krajním bodům jádrovým ve spáře vrcholové, patní a jedné neb i několika sparách mezilehlých; z těchto čar bychom vypočetli krajní hodnoty momentů k bodům jádrovým a z nich krajní hodnoty napětí v krajních vláknech.

Skutečné řešení se provede podle toho, jak je klenba zřízena. Lze totiž klenbu jako oblouk ocelový opatřiti *klouby* buď ocelovými nebo kamennými v různém provedení. Má-li klenba tři klouby, je staticky určitá; popuštění opěr a změna teploty nemá tu na napětí v klenbě účinku a klenba se řeší jako oblouk o třech kloubech. Klenba se dvěma klouby by byla jednoduše neurčitá, klenba bez kloubů je pak trojnásobně staticky neurčitá; v těchto případech jest uvažovati též popuštění opěr a změnu teploty, jejichž vliv může býti dosti značný.

U patek bývá klenba opatřena *nadezdívkou*, je-li nad klenbou zřízen násyp v celé délce (viz obr. 146); nadezdívka přibližuje již svou vahou tlakovou čáru u patek k líci klenby a pojišťuje klenbu pro případy mimořádné, jako jest odskružení, otřásání při pohyblivém zatížení a j. V těchto mimořádných případech, pro něž klenba nebyla řešena, mohla by tlaková čára vyjíti i z klenby, a porušení by nemusilo nastati, kdyby čára zůstala aspoň v nadezdívce. Je-li nadezdívka s klenbou řádně spojena, lze část opatřenou nadezdívkou počítati i k opěře, a vlastní klenba by začínala od spáry, v níž přestává vyzdívka; tím se rozpětí klenby značně zmenší.

Příklad 14. Je dána kruhová klenba betonová o rozpětí střednice $l = \overline{ab} = 31{,}5\,\text{m} = 14 \cdot 2{,}25\,\text{m}$ a vzepětí střednice $h = \overline{c_0 c} = 6{,}5$ m, na niž se přenáší zatížení nepřímo sloupky ve vzdálenostech $a = 2{,}25$ m; tloušťka klenby ve vrcholu jest $t_0 = 0{,}8$ m a zvětšuje se k patce podle zákona $t = t_0 : \cos\varphi$. Na pás klenby šířky $b = 1$ m působí rovnoměrné zatížení stálé $q_0 = 4{,}23$ t/m, rovnoměrné zatížení pohyblivé (lidmi) $q' = 0{,}46$ t/m a parní válec, jenž dává tlaky $P_1 = 4\,t$, $P_2 = 3{,}2\,t$ ve vzdálenostech naznačených v obr. 158 (tab. 3). Jest určiti krajní hodnoty momentů ke krajním bodům jádrovým ve vrcholu, v patce a ve svislici bodu *3*; k tomu uvažovati jest mimo uvedené zatížení též změnu teploty $\delta = \pm 15^0$ C. Konečně jest vypočísti krajní hodnoty snížení vrcholu klenby, vycházející z daného zatížení i změny teploty.

Klenbu budeme řešiti přibližně jako kruhový oblouk stálého průřezu; řešení provedeme příčinkovými čarami, jež vyšetříme počtem. Stanovíme nejprve příčinkové čáry H, M_I, M_{II} podle vzorců (186), ($242^{a,b}$), (243^a) a (244^a), totiž

$$H = P\frac{n}{n_0}, \tag{a}$$

$$n = r\,[(\alpha \sin^2\alpha - \sin^2\beta) - 2\sin\alpha\,(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha - \beta\sin\beta - \cos\beta)] \tag{b}$$

$$n_0 = 2r\,[\alpha\,(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - 2\sin^2\alpha], \tag{c}$$

$$M_{I,II} = -\frac{Pr}{2}\left[\frac{\alpha \sin\alpha + \cos\alpha - \beta\sin\beta - \cos\beta}{\alpha} \pm \frac{\sin\alpha\,(\beta + \sin\beta\cos\beta) - \sin\beta\,(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}\right]. \quad (d)$$

Poloměr kruhové střednice určíme podle věty, že úsek $\overline{a\,c_0} = \frac{1}{2}l$, kolmý ke svislému průměru, je střední měřickou úměrnou mezi oběma úseky h a $(2r - h)$ tohoto průměru, tedy

$$\left(\tfrac{1}{2}l\right)^2 = h\left(2r - h\right); \quad (e)$$

z toho plyne

$$r = \frac{1}{2h}\left(\frac{l^2}{4} + h^2\right) = \frac{15{,}75^2 + 6{,}50^2}{2\,.\,6{,}50} = 22{,}332\ \text{m}.$$

Pak jest

$$\cos\alpha = \frac{r - h}{r} = \frac{15{,}832}{22{,}332} = 0{,}708\,938;$$

tomu odpovídá v míře stupňové úhel $\alpha^0 = 44^0\,51{,}09'$ a v míře obloukové

$$\alpha = \frac{\pi}{180}\,\alpha^0 = 0{,}782\,806.$$

Pro tento úhel jest

$$\sin\alpha = 0{,}705\,271;$$

pak lze vypočísti

$$\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 1{,}282\,799,\quad \alpha - \sin\alpha\cos\alpha = 0{,}282\,813,$$

$$\frac{n_0}{2r} = \alpha\,(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - 2\sin^2\alpha = 0{,}009\,369,\quad \alpha\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}261\,028.$$

Pro jednotlivé styčné body střednice určíme odchylku β jejich poloměru od svislice středu z rovnice

$$\sin\beta = \frac{c - x}{r}, \quad (f)$$

v níž znamená $c = \frac{1}{2}l$ a x jest úsečka bodu od svislice levého bodu opěrového a. Ze $\sin\beta$ určíme podle tabulek v míře stupňové úhel β^0 a z toho v míře obloukové

$$\beta = \frac{\pi}{180}\,\beta^0. \quad (g)$$

Pak lze počítati příčinkové pořadnice H, M_I, M_{II} uvedené v číselné tabulce I., jež obsahuje též některé hodnoty k výpočtu potřebné. Úsečky $c - x$ jsou v tabulce vyjádřeny v metrech. Tabulka I. obsahuje pouze hodnoty pro levou polovici klenby, jež však stačí, poněvadž je čára H souměrná ke svislici středu a čáry M_I, M_{II} jsou souměrné k téže svislici, tedy příčinkové pořadnice M_I pro body na levé polovici rovnají se příčinkovým pořadnicím M_{II} v souměrných bodech pravé polovice. Podle vypočtených hodnot jsou příčinkové čáry H, M_I, M_{II} narýsovány v obr. 158. Příčinkové pořadnice síly H jsou pouhá čísla, příčinkové pořadnice veškerých momentů znamenají délky; v obr. 158 bylo pro ně zvoleno jiné měřidlo než pro hlavní obrazec.

Polohu osy X stanovíme podle vzorce (239^b) úsečkou

$$e = r\,\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha} = 22{,}332 \cdot \frac{0{,}150\,310}{0{,}782\,806} = 4{,}288\ \text{m}.$$

Největší napětí v krajních vláknech průřezu patního, vrcholového a ve styčném bodě *3* určíme z momentů ke krajním bodům jádrovým; tyto body stanovíme úsečkami i pořadnicemi k osám X, Z. V průřezu patním jsou jádrové body a', a'' v třetinách tloušťky průřezu a mají úsečky

$$x'_a = -x''_a = \frac{1}{6}\,t_0\,\text{tg}\,\alpha = \frac{t_0}{6}\cdot\frac{c}{r - h} = 0{,}133\ \text{m}$$

a pořadnice

$$z'_a = -e - \tfrac{1}{6}t_0 = -4{,}288 - 0{,}133 = -4{,}421\ \text{m},$$

$$z''_a = -e + \tfrac{1}{6}t_0 = -4{,}288 + 0{,}133 = -4{,}155\ \text{m},$$

neboť svislý průmět tloušťky patního průřezu je roven t_0.

Ve styčném bodě *3* berme pro zjednodušení výpočtu krajní body jádrové ve svislém řezu; jejich společná úsečka jest $x_3 = 3\,a = 6{,}75$ m, pořadnice jsou pak

$$z_3 = r(\cos\beta_3 - \cos\alpha) - e \mp \frac{t_0}{6\cos^2\beta_3}.$$

Dosadíme tu

$$r(\cos\beta_3 - \cos\alpha) = 22{,}332\,.\,0{,}206\,257 = 4{,}606 \text{ m}, \quad e = 4{,}288 \text{ m},$$

$$\frac{t_0}{6\cos^2\beta_3} = \frac{0{,}8}{6\,.\,0{,}915\,195^2} = 0{,}159 \text{ m}$$

a určíme

$$z_3' = 4{,}606 - 4{,}288 - 0{,}159 = 0{,}159 \text{ m},$$
$$z_3'' = 4{,}606 - 4{,}288 + 0{,}159 = 0{,}477 \text{ m}.$$

Ve vrcholu je průřez svislý a jeho úsečka jest $x = c = \frac{1}{2}l$; pořadnice krajních bodů jádrových vyjdou tu

$$z_7' = h - e - \tfrac{1}{6}t_0 = 2{,}079 \text{ m}, \quad z_7'' = h - e + \tfrac{1}{6}t_0 = 2{,}345 \text{ m}.$$

Příčinkové čáry momentů ke krajním bodům jádrovým řešíme podle vzorce (172)

$$M = \mathfrak{M} + M' - H z, \tag{h'}$$

je-li

$$M' = \frac{M_I(l-x) + M_{II}x}{l}. \tag{h''}$$

Příčinkové čáry H, M_I, M_{II} jsme již určili. Příčinkové pořadnice momentu $\mathfrak{M}$ vlevo od průřezu x, o který jde, plynou z rovnice

$$\mathfrak{M} = \frac{P(l-x)}{l}p \tag{i'}$$

a vpravo od průřezu z rovnice

$$\mathfrak{M} = \frac{Px}{l}p', \tag{i''}$$

jsou-li p, p' vzdálenosti od svislic bodů a, b působiště břemene P, jež si myslíme postupně ve všech styčných bodech. Podle toho stanovíme příčinkové pořadnice momentů ke všem bodům jádrovým. Všechny čáry musíme řešiti po celém oblouku, vyjma čáry M_7', M_7'', jež jsou souměrné ke svislici středu oblouku a pro něž stačí řešení na polovici oblouku.

Pro bod a' určujeme příčinkové pořadnice $\mathfrak{M}$ pro všechny pravé body styčné podle vzorce (i'') z rovnice

$$\mathfrak{M} = \frac{Px_a'}{l}p';$$

v bodě a je pro tento moment příčinková pořadnice $\mathfrak{M} = 0$. Pro bod a'' řešíme podobně z rovnice

$$\mathfrak{M} = \frac{Px_a''}{l}p'$$

pro všechny body styčné, i pro bod a, v němž je $p' = l$ a vyjde příčinková pořadnice

$$\frac{\mathfrak{M}}{P} = x_a'' = -0{,}133.$$

Všechny ostatní veličiny mají v bodě a nulovou pořadnici příčinkovou, rovná se tedy stanovená pořadnice $\mathfrak{M}$ též pořadnici momentu M_a''.

Výpočet příčinkových pořadnic podle těchto pravidel je proveden v číselné tabulce II. pro momenty k jádrovým bodům a', a'', $3'$, $3''$ a v tabulce III. pro momenty k jádrovým bodům $7'$, $7''$; v obou tabulkách jsou uvedeny hodnoty příslušných veličin pro břímě $P = 1$.

Tabulka I.

Bod	1	2	3	4	5	6	7
$c - x$	13,50	11,25	9,00	6,75	4,50	2,25	0
$\sin \beta$	0,604 514	0,503 761	0,403 009	0,302 257	0,201 505	0,100 752	0
β^0	37° 11,63′	30° 14,95′	23° 45,99′	17° 35,59′	11° 37,50′	5° 46,95′	0
β	0,649 155	0,527 947	0,414 804	0,307 058	0,202 894	0,100 923	0
$\cos \beta$	0,796 595	0,863 843	0,915 195	0,953 227	0,979 487	0,994 911	1
$\alpha (\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta)$	0,103 307	0,190 717	0,262 233	0,317 857	0,357 588	0,381 427	0,389 373
$\beta \sin \beta + \cos \beta$	1,189 018	1,129 802	1,082 365	1,046 037	1,020 371	1,005 079	1
$2 \sin \alpha (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - \beta \sin \beta - \cos \beta)$	0,101 573	0,185 100	0,252 012	0,303 254	0,339 457	0,361 027	0,368 191
$\frac{n}{r}$	0,001 734	0,005 617	0,010 221	0,014 603	0,018 131	0,020 400	0,021 182
$\frac{H}{P} = \frac{n}{n_0}$	0,0925	0,2998	0,5455	0,7793	0,9676	1,0887	1,1304
$\frac{\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - \beta \sin \beta - \cos \beta}{\alpha}$	0,091 990	0,167 635	0,228 234	0,274 641	0,307 429	0,326 964	0,333 452
$\beta + \sin \beta \cos \beta$	1,130 708	0,963 117	0,783 636	0,595 178	0,400 266	0,201 162	0
$\sin \alpha (\beta + \sin \beta \cos \beta)$	0,797 456	0,679 258	0,552 676	0,419 762	0,282 296	0,141 874	0
$\sin \beta (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha)$	0,775 470	0,646 224	0,516 980	0,387 735	0,258 490	0,129 245	0
$\frac{M_I}{P}$	— 1,8952	— 3,1761	— 3,9578	— 4,3311	— 4,3727	— 4,1495	— 3,7233
$\frac{M_{II}}{P}$	— 0,1591	— 0,5676	— 1,1391	— 1,8022	— 2,4928	— 3,1523	— 3,7233

Tabulka II.

Styčný bod		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Bod a'	$\mathfrak{M}$	+ 0,123	+ 0,114	+ 0,104	+ 0,095	+ 0,085	+ 0,076	+ 0,066	+ 0,057	+ 0,047	+ 0,038	+ 0,028	+ 0,019	+ 0,009
	M'	− 1,888	− 3,165	− 3,946	− 4,321	− 4,364	− 4,145	− 3,724	− 3,156	− 2,500	− 1,813	− 1,151	− 0,578	− 0,166
	$-Hz$	+ 0,409	+ 1,326	+ 2,412	+ 3,446	+ 4,278	+ 4,814	+ 4,998	+ 4,814	+ 4,278	+ 3,446	+ 2,412	+ 1,326	+ 0,409
	M	− 1,356	− 1,725	− 1,430	− 0,780	− 0,001	+ 0,745	+ 1,340	+ 1,715	+ 1,825	+ 1,671	+ 1,289	+ 0,771	+ 0,252
Bod a''	$\mathfrak{M}$	− 0,123	− 0,114	− 0,104	− 0,095	− 0,085	− 0,076	− 0,066	− 0,057	− 0,047	− 0,038	− 0,028	− 0,019	− 0,009
	M'	− 1,902	− 3,187	− 3,969	− 4,341	− 4,381	− 4,154	− 3,723	− 3,149	− 2,485	− 1,792	− 1,127	− 0,557	− 0,152
	$-Hz$	+ 0,384	+ 1,246	+ 2,266	+ 3,238	+ 4,020	+ 4,523	+ 4,697	+ 4,523	+ 4,020	+ 3,238	+ 2,266	+ 1,246	+ 0,384
	M	− 1,741	− 2,055	− 1,807	− 1,198	− 0,446	+ 0,293	+ 0,908	+ 1,317	+ 1,488	+ 1,408	+ 1,111	+ 0,670	+ 0,223
Bod $3'$	$\mathfrak{M}$	+ 1,768	+ 3,536	+ 5,304	+ 4,821	+ 4,339	+ 3,857	+ 3,375	+ 2,893	+ 2,411	+ 1,928	+ 1,446	+ 0,964	+ 0,482
	M'	− 1,523	− 2,618	− 3,354	− 3,789	− 3,970	− 3,935	− 3,723	− 3,367	− 2,896	− 2,344	− 1,743	− 1,127	− 0,531
	$-Hz$	− 0,015	− 0,048	− 0,087	− 0,124	− 0,154	− 0,173	− 0,179	− 0,173	− 0,154	− 0,124	− 0,087	− 0,048	− 0,015
	M	+ 0,230	+ 0,870	+ 1,863	+ 0,908	+ 0,215	− 0,251	− 0,527	− 0,647	− 0,639	− 0,540	− 0,384	− 0,211	− 0,064
Bod $3''$	$\mathfrak{M} + M'$	+ 0,245	+ 0,918	+ 1,950	+ 1,032	+ 0,369	− 0,078	− 0,348	− 0,474	− 0,485	− 0,416	− 0,297	− 0,163	− 0,049
	$-Hz$	− 0,044	− 0,143	− 0,260	− 0,372	− 0,463	− 0,520	− 0,539	− 0,520	− 0,463	− 0,372	− 0,260	− 0,143	− 0,044
	M	+ 0,201	+ 0,775	+ 1,690	+ 0,660	− 0,094	− 0,598	− 0,887	− 0,994	− 0,948	− 0,788	− 0,557	− 0,306	− 0,093

Tabulka III.

Styčný bod		1	2	3	4	5	6	7
Bod 7′	$\mathfrak{M}$	+ 1,125	+ 2,250	+ 3,375	+ 4,500	+ 5,625	+ 6,750	+ 7,875
	M'	− 1,027	− 1,872	− 2,548	− 3,067	− 3,432	− 3,651	− 3,723
	$-Hz$	− 0,192	− 0,623	− 1,134	− 1,620	− 2,011	− 2,263	− 2,350
	M	− 0,094	− 0,245	− 0,307	− 0,187	+ 0,182	+ 0,836	+ 1,802
Bod 7″	$\mathfrak{M} + M'$	+ 0,098	+ 0,378	+ 0,827	+ 1,433	+ 2,193	+ 3,099	+ 4,152
	$-Hz$	− 0,217	− 0,703	− 1,279	− 1,828	− 2,269	− 2,553	− 2,651
	M	− 0,119	− 0,325	− 0,452	− 0,395	− 0,076	+ 0,546	+ 1,501

Z příčinkových čar určíme momenty k bodům jádrovým, a to nejprve pro stálé zatížení $q_0 = 4{,}23$ t/m hodnotou

$$M_0 = q_0 \, \mathfrak{U}. \tag{k}$$

Vypočteme celkové plochy příčinkové podle vzorce

$$\mathfrak{U} = a \, \Sigma \eta, \tag{l}$$

v němž znamená $a = 2{,}25$ m délku oddílu a η příčinkové pořadnice v bodech styčných, uvedené v tab. II. a III. Ve svislicích opěrových bodů a, b mají všechny příčinkové čáry pořadnice nulové, pouze pro moment M_a' platí pořadnice − 0,133, jak jsme dříve vyšetřili; z této pořadnice počítáme pouze polovici, končí-li příčinkový obrazec M_a'' ve svislici bodu a, t. j. končí-li tu vozovka opřená o klenbu. Tak vyjde pro moment:

M_a' plocha $\mathfrak{U} = 2{,}25 \,.\, (9{,}608 - 5{,}292) = 9{,}711$ m², $q_0 \, \mathfrak{U} = 41{,}077$ mt,
M_a'' „ $\mathfrak{U} = 2{,}25 \,.\, (7{,}418 - 7{,}313) = 0{,}236$ m², $q_0 \, \mathfrak{U} = 0{,}998$ mt,
M_3' „ $\mathfrak{U} = 2{,}25 \,.\, (4{,}086 - 3{,}263) = 1{,}852$ m², $q_0 \, \mathfrak{U} = 7{,}834$ mt,
M_3'' „ $\mathfrak{U} = 2{,}25 \,.\, (3{,}326 - 5{,}265) = -4{,}363$ m², $q_0 \, \mathfrak{U} = -18{,}455$ mt,
M_7' „ $\mathfrak{U} = 2{,}25 \,.\, (3{,}838 - 1{,}666) = 4{,}887$ m², $q_0 \, \mathfrak{U} = 20{,}672$ mt,
M_7'' „ $\mathfrak{U} = 2{,}25 \,.\, (2{,}593 - 2{,}734) = -0{,}317$ m², $q_0 \, \mathfrak{U} = -1{,}341$ mt.

Pro pohyblivé zatížení rovnoměrné (lidmi) i osamělými břemeny (parním válcem) stanovíme z příčinkových obrazců nejúčinnější polohy zatížení a určíme pak krajní hodnoty momentů k bodům jádrovým podle vzorce

$$M = \Sigma P \, \eta + q' (\mathfrak{U}' + \mathfrak{U}''), \tag{m}$$

jsou-li $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{U}''$ příčinkové plochy v mezích zatížení rovnoměrného vlevo a vpravo od osamělých břemen a η příčinkové pořadnice v paprscích břemen. Nejúčinnější polohu zatížení určíme podle kriteria [1])

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z} = q' (\eta' - \eta'') + \Sigma P \,.\, \mathrm{tg}\, \varphi \gtrless 0, \tag{n}$$

v němž znamená η', η'' příčinkové pořadnice na kraji zatížení rovnoměrného u břemene P_1, P_2 a φ odchylky od vodorovné osy tečen k čáře příčinkové v průsečících s paprsky břemen P. Některé z obou břemen P_1, P_2 umístíme do styčného bodu; zvolená poloha zatížení vyvodí max M nebo min M, obrací-li se v této poloze znaménko $\mathrm{d}M/\mathrm{d}z$. Podle posledního vzorce určíme $\mathrm{d}M/\mathrm{d}z$, přeneseme-li do vodorovné čáry složkové úseky břemen $P_1 = \overline{1\,1'}$, $P_2 = \overline{2\,2'}$ a v počátečním bodě P_1 přeneseme na svislici úsek $q' (\eta' - \eta'') = \overline{1\,1''}$ ve smyslu kladných (záporných) pořadnic příčinkových, vyjde-li tento úsek kladný (záporný); pořadnice η', η'' znamenají zde délky a odměřujeme je na měřidle délek hlavního obrazce, výsledek přenášíme pak podle měřidla sil P. Dále rýsujeme lomenou čáru, jejíž strany v délce úseku P_1, P_2 jsou rovnoběžné se stranami lomené čáry příčinkové, platnými v působišti příslušného břemene. Pro břímě, jež působí ve vrcholu příčinkové čáry (styčném bodě) obdržíme dvě různé strany v příčinkovém obrazci a tím dvě různé hodnoty $\mathrm{d}M/\mathrm{d}z$, jež se liší znaménkem, jsou-li koncové body po obou stranách složkové čáry břemen P_1, P_2; pak je poloha zatížení správná. Za této polohy odměříme příčinkové pořadnice η_1, η_2 v paprscích břemen P_1, P_2 a určíme příčinkové plochy $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{U}''$ po obou stranách osamělých břemen v části přičiňující týmž znaménkem; plochu na té straně, kde je břímě P_1 (P_2), znamenejme $\mathfrak{U}'$ ($\mathfrak{U}''$).

[1]) Viz druhý díl tohoto spisu (3. vyd. 1946), str. 142.

Podle předešlého popisu stanovíme nejúčinnější polohy zatížení, naznačené v příčinkových obrazcích (obr. 158, tab. 3.); v tomto případě vychází pro jádrové body v témž průřezu (nebo v téže svislici) táž poloha válce pro max M' i max M'' a táž poloha válce pro min M' i min M''. Pro max M'_a vyjde

$$\eta_1 = 1{,}765\text{ m}, \quad \eta_2 = 1{,}671\text{ m}, \quad \mathfrak{U}' = 5{,}30\text{ m}^2, \quad \mathfrak{U}'' = 5{,}81\text{ m}^2;$$

pak jest

$$\max M'_a = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + q'(\mathfrak{U}' + \mathfrak{U}'') = 4{,}0 \cdot 1{,}765 + 3{,}2 \cdot 1{,}671 + 0{,}46 \cdot (5{,}30 + 5{,}81) = 17{,}52\text{ mt}.$$

Stejně určíme v mt

$$\begin{aligned}
\min M'_a &= -4{,}0 \cdot 1{,}572 - 3{,}2 \cdot 1{,}356 - 0{,}46 \cdot (3{,}19 + 0{,}63) = -12{,}39;\\
\max M''_a &= \;\;4{,}0 \cdot 1{,}392 + 3{,}2 \cdot 1{,}302 + 0{,}46 \cdot (3{,}08 + 5{,}01) = 13{,}46,\\
\min M''_a &= -4{,}0 \cdot 1{,}916 - 3{,}2 \cdot 1{,}741 - 0{,}46 \cdot (4{,}16 + 0{,}94) = -15{,}58;\\
\max M'_3 &= \;\;4{,}0 \cdot 1{,}863 + 3{,}2 \cdot 0{,}425 + 0{,}46 \cdot (1{,}82 + 0{,}31) = 9{,}79,\\
\min M'_3 &= -4{,}0 \cdot 0{,}647 - 3{,}2 \cdot 0{,}584 - 0{,}46 \cdot (1{,}27 + 2{,}20) = -6{,}06;\\
\max M''_3 &= \;\;4{,}0 \cdot 1{,}690 + 3{,}2 \cdot 0{,}456 + 0{,}46 \cdot (0{,}99 + 0{,}27) = 8{,}80,\\
\min M''_3 &= -4{,}0 \cdot 0{,}994 - 3{,}2 \cdot 0{,}868 - 0{,}46 \cdot (2{,}87 + 3{,}20) = -9{,}55;\\
\max M'_7 &= \;\;4{,}0 \cdot 1{,}802 + 3{,}2 \cdot 0{,}472 + 0{,}46 \cdot (1{,}67 + 0{,}15) = 9{,}55,\\
\min M'_7 &= -4{,}0 \cdot 0{,}275 - 3{,}2 \cdot 0{,}187 - 0{,}46 \cdot (0{,}22 + 0{,}01 + 1{,}76) = -2{,}62;\\
\max M''_7 &= \;\;4{,}0 \cdot 1{,}501 + 3{,}2 \cdot 0{,}213 + 0{,}46 \cdot 0{,}85 = 7{,}07,\\
\min M''_7 &= -4{,}0 \cdot 0{,}381 - 3{,}2 \cdot 0{,}395 - 0{,}46 \cdot (0{,}40 + 0{,}27 + 3{,}00) = -4{,}47.
\end{aligned}$$

Příčinkové obrazce momentů M'_7, M''_7 mají dva díly záporně přičiňující, souměrné ke svislici středu; jeden díl zatížíme osamělými břemeny a zatížením rovnoměrným, pokud se tam vejde, druhý díl zatížíme celý rovnoměrně. Pak jsou rovnoměrně zatíženy tři díly nosníku: vlevo od břemene P_1 až ke svislici bodu a, vpravo od břemene P_2 až k prvé poloze obojetné a od druhé polohy obojetné ke svislici bodu b. Podle toho jsou určeny hodnoty min M'_7, min M''_7.

Vyšetřme dále účinek změny teploty, jež vyvodí podle vzorců (241[a]), (242[b]) pouze vodorovnou sílu

$$H_t = \frac{2EJ\delta\varepsilon\alpha\sin\alpha}{r^2[\alpha(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - 2\sin^2\alpha]}, \tag{o}$$

působící v ose X. Dosadíme zde pro beton[1]) $E = 140\,000\text{ kg/cm}^2 = 1\,400\,000\text{ t/m}^2$, $\varepsilon = 0{,}000012$; dále jest $\delta = \pm 15^0$ C, $\alpha\sin\alpha = 0{,}552\,090$. Průřez klenby se mění; přibližně můžeme bráti za střední hodnotu tloušťku průřezu, jehož těžiště je v průsečíku střednice s osou X. Pro tento průřez jest

$$\cos\varphi = \frac{r - h + e}{r}, \quad t = \frac{t_0}{\cos\varphi} = \frac{r\,t_0}{r - h + e} = \frac{22{,}332 \cdot 0{,}8}{20{,}120} = 0{,}888\text{ m};$$

brali jsme $b = 1$ m, tedy vyjde

$$J = \frac{1}{12}bt^3 = \frac{1}{12}1 \cdot 0{,}888^3 = 0{,}058\,35\text{ m}^4.$$

Ostatní hodnoty jsme již dříve určili; dosazením jich vypočteme

$$H_t = \pm\frac{2 \cdot 1\,400\,000 \cdot 0{,}058\,35 \cdot 15 \cdot 0{,}000\,012 \cdot 0{,}552\,090}{22{,}332^2 \cdot 0{,}009\,369} = \pm 3{,}48\text{ t}.$$

Z této síly, jež působí v ose X, určíme momenty k bodům jádrovým podle vzorce

$$M_t = -H_t z; \tag{p}$$

pořadnice z pro body jádrové byly dříve určeny.

Hodnoty momentů, počítané podle posledního vzorce, jsou uvedeny v číselné tabulce IV., v níž jsou sestaveny též vypočtené již hodnoty momentů ze zatížení stálého i pohyblivého. Celkové krajní hodnoty momentů vypočteme součtem hodnoty M_0 ze zatížení stálého, krajní hodnoty M' ze zatížení pohyblivého a kladné nebo záporné hodnoty M_t ze změny teploty podle vzorců

$$\left.\begin{aligned}\max M &= M_0 + \max M' + M_t,\\ \min M &= M_0 + \min M' - M_t.\end{aligned}\right\} \tag{q}$$

Tak byly určeny výslední hodnoty v tab. IV., v níž jsou všechny momenty vyjádřeny v mt.

[1]) Podle nového mostního řádu (ČSN 1230-1937) bylo by dosaditi $E = 210\,000\text{ kg/cm}^2$.

Z výsledních krajních hodnot momentů k bodům jádrovým bychom určili krajní hodnoty napětí ν' v horním vlákně a ν'' ve spodním vlákně podle vzorců

$$\nu' = -\frac{M' e'}{J}, \quad \nu'' = \frac{M'' e''}{J}, \tag{r}$$

v nichž znamená M' (M'') moment k spodnímu (hornímu) bodu jádrovému, e' (e'') vzdálenost horního (spodního) vlákna od těžiště průřezu a J moment setrvačnosti průřezu k vodorovné ose centrálné. Vyjde-li z posledních vzorců napětí kladné (záporné), znamená tah (tlak). Shledáme-li pak, že nestačí průřezy, které jsme předpokládali, provedeme jejich opravy přibližně podle vypočtených momentů. Změnou průřezů se mění též jádrové body, i měl by se výpočet opakovati tak, jak byl proveden; jsou-li odchylky v poloze jádrových bodů malé, nebude nového výpočtu třeba.

Snížení vrcholu klenby budeme řešiti příčinkovou čarou, pro kterou jsme odvodili vzorec (261)

$$\eta_c = \frac{r^3}{4EJ\alpha}\Big[\alpha(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - \beta - \sin\beta\cos\beta) + 2(1-\cos\alpha)(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha - \beta\sin\beta - \cos\beta) - 2\alpha(\sin\alpha - \sin\beta) - 2H\frac{n}{r}\Big], \tag{s}$$

v němž znamená H vodorovnou sílu, vyvozenou břemenem $P = 1$, jež působí ve vrcholu klenby c; hodnoty $\frac{n}{r}$ jsou uvedeny v tab. I. Podle tab. I. vyvodí břímě $P = 1$ v bodě c působící vodorovnou sílu $H = 1{,}1304$. Přetvoření řešme z předpokladu stálého průřezu jako vše, co předchází; použijeme z části hodnot již stanovených. Dosadíme $E = 1\,400\,000\ \mathrm{t/m^2}$ a $J = 0{,}058\,35\ \mathrm{m^4}$ jako při řešení účinku změny teploty; pak jest

$$\frac{r^3}{4EJ\alpha} = \frac{22{,}332^3}{4 \cdot 1\,400\,000 \cdot 0{,}058\,35 \cdot 0{,}782\,806} = 0{,}043\,541\ \mathrm{m/t}.$$

Další výsledky řešení jsou v číselné tabulce V.

Ze stanovené příčinkové čáry, jež je podle výpočtu narýsována v obr. 158, stanovíme nejprve průhyb vrcholu klenby při stálém zatížení podle vzorce

$$y_{c,0} = q_0\,\mathfrak{U},$$

je-li

$$\mathfrak{U} = a\,\Sigma\eta_c.$$

Stanovené hodnoty η_c dají pro celou klenbu

$$\Sigma\eta_c = -0{,}000\,3804 + 0{,}000\,5598 = 0{,}000\,1794\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{t}},$$

$$\mathfrak{U} = a\,\Sigma\eta_c = 2{,}25 \,.\, 0{,}000\,1794 = 0{,}000\,404\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{t}},$$

$$y_{c,0} = q_0\,\mathfrak{U} = 4{,}23 \,.\, 0{,}000\,404 = 0{,}0017\ \mathrm{m} = 1{,}7\ \mathrm{mm}.$$

Pro pohyblivé zatížení určíme max y'_c a min y'_c, jak jsme vyšetřili z příčinkových čar max M', min M'. Pro max y'_c užijeme zatížení vyznačeného v obr. 158, jehož správná poloha je v obrazci graficky kontrolována, a stanovíme pak

$$\max y'_c = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + q'(\mathfrak{U}' + \mathfrak{U}'') = 4{,}0 \,.\, 0{,}000\,155 + 3{,}2 \,.\, 0{,}000\,137 + 0{,}46 \,.\, (0{,}000\,160 + 0{,}000\,160) = 0{,}00120\ \mathrm{m} = 1{,}2\ \mathrm{mm}.$$

Záporně přičiňující části jsou dvě; vlevé zatížíme osamělými břemeny a na zbývající části rovnoměrně, celou pravou část pak zatížíme rovnoměrně a vypočteme

$$\min y'_c = -4{,}0 \,.\, 0{,}000\,067 - 3{,}2 \,.\, 0{,}000\,044 - 0{,}46 \,.\, (0{,}000\,049 + 0{,}000\,014 + 0{,}000\,413) = -0{,}000\,63\ \mathrm{m} = -0{,}63\ \mathrm{mm}.$$

Změna teploty vyvodí ohybovou čáru, jež má podle vzorce (262) pořadnice

$$\eta_t = \eta' + \eta''_t, \tag{t}$$

je-li

$$\eta' = -2\,\delta\,\varepsilon\frac{n}{n_0}r\sin\alpha, \quad \eta''_t = -\delta\,\varepsilon\,r(\cos\beta - \cos\alpha). \tag{u}$$

Tabulka IV.

Moment		M'_a	M''_a	M'_3	M''_3	M'_7	M''_7
Zatížení stálé (M_0)		+ 41,08	+ 1,00	+ 7,83	− 18,46	+ 20,67	− 1,34
Zatížení pohyblivé (M')	max	+ 17,52	+ 13,46	+ 9,79	+ 8,80	+ 9,55	+ 7,07
	min	− 12,39	− 15,58	− 6,06	− 9,55	− 2,62	− 4,47
Změna teploty (M_t) ±		15,38	14,48	0,55	1,66	7,24	8,17
Celkem	max M	+ 73,98	+ 28,94	+ 18,17	− 8,00	+ 37,46	+ 13,90
	min M	+ 13,31	− 29,06	+ 1,22	− 29,67	+ 10,81	− 13,98

Tabulka V.

Styčný bod	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
$\alpha(\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\beta-\sin\beta\cos\beta)$	0,119 057	0,250 249	0,390 748	0,538 274	0,690 852	0,846 712	1,004 183
$2(1-\cos\alpha)(\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-\beta\sin\beta-\cos\beta)$	0,041 919	0,076 390	0,104 004	0,125 151	0,140 092	0,148 994	0,151 951
$-2\alpha(\sin\alpha-\sin\beta)$	− 0,157 746	− 0,315 486	− 0,473 225	− 0,630 964	− 0,788 702	− 0,946 442	− 1,104 181
$-2H\frac{n}{r}$	− 0,003 920	− 0,012 699	− 0,023 108	− 0,033 014	− 0,040 991	− 0,046 120	− 0,047 888
$\eta_c\cdot\frac{4EJ\alpha}{r^3}$	− 0,000 690	− 0,001 546	− 0,001 581	− 0,000 553	+ 0,001 251	+ 0,003 144	+ 0,004 065
η_c	− 0,000 0300	− 0,000 0673	− 0,000 0688	− 0,000 0241	+ 0,000 0545	+ 0,000 1369	+ 0,000 1770

Tabulka VI.

Styčný bod	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
$\frac{n}{r}$	0,001 734	0,005 617	0,010 221	0,014 603	0,018 130	0,020 400	0,021 182
$\eta'_t=\mp$	0,000 52	0,001 70	0,003 09	0,004 42	0,005 49	0,006 17	0,006 41
$\cos\beta-\cos\alpha$	0,087 657	0,154 905	0,206 257	0,244 289	0,270 549	0,285 973	0,291 062
$\eta''_t=\mp$	0,000 35	0,000 62	0,000 83	0,000 98	0,001 09	0,001 15	0,001 17
$\eta_t=\mp$	0,000 87	0,002 32	0,003 92	0,005 40	0,006 58	0,007 32	0,007 58

Uvažujeme změnu teploty $\delta = \pm 15^0\,\mathrm{C}$; pro beton jest $\varepsilon = 0{,}000\,012$. Určili jsme již

$$\frac{n_0}{2r} = 0{,}009\,369,$$

$$r = 22{,}332\ \mathrm{m},\ \sin\alpha = 0{,}705\,271;$$

pak vychází

$$\delta\varepsilon r = \pm\,0{,}004\,020,\quad \frac{2\,\delta\varepsilon r^2 \sin\alpha}{n_0} = \pm\,0{,}302\,596.$$

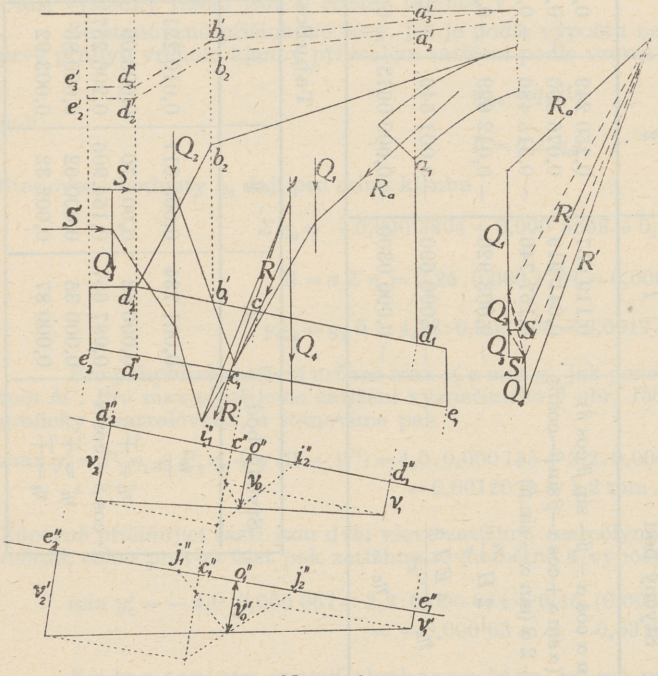
Hodnoty $\frac{n}{r}$ a cos β pro všechny styčné body vezmeme z tab. I., ostatní jsou uvedeny v tab. VI.; počítáme podle předchozích vzorců a vychází η_t', η_t'' i η_t v metrech.

Část ohybové čáry, jež odpovídá pořadnicím η_t', má týž tvar jako příčinková čára H; pořadnice η_t'' jsou pak úměrné pořadnicím střednice měřeným od tětivy $a\,b$, neboť tyto pořadnice mají hodnotu $r\,(\cos\beta - \cos\alpha)$.

II. Opěry klenbové.

43. Opěry silné. *α) Řešení grafické.* Klenba se opírá o *opěry*, jež rozeznáváme *silné* a *slabé*. Silnými opěrami neb *opěrnými pilíři* nazýváme opěry, do nichž je zaklenuta klenba jen s jedné strany, tedy *pilíře krajní*, anebo takové, jež mají klenbu s obou stran, jsou však s to, aby vzdorovaly i tlaku jedné klenby; takové jsou z *vnitřních pilířů* t. zv. *pilíře skupinové*, silnější než obyčejné pilíře vnitřní. Opěry slabé nebo *pilíře podporové* mohou vzdorovati pouze současnému tlaku kleneb s obou stran; patří k nim obyčejné pilíře vnitřní u klenutého mostu.

Předpokládejme nejprve, že jsou rozměry silné opěry dány nebo zvoleny; šlo by o jejich statické posouzení. Musíme se přesvědčiti, je-li všude vyhověno výminkám rovnováhy pro konstrukce zděné, z nichž stačí uvažovati výminku bezpečné pevnosti a výminku rovnováhy v posouvání. Opěra měj obecně libovolný tvar a budiž ukončena na př. šikmou sparou $d_1 d_2$ (obr. 159). Největší napětí v opěře vznikne ve spodní spáře $d_1 d_2$, a to v krajním bodě d_2 na té straně, kde není klenby, neboť výslednice sil, jež působí na opěru, odchýlí se tlakem klenby od středu spáry k bodu d_2. Napětí v bodě d_2 by se počítalo z momentu k pravému bodu jádrovému ve spáře $d_1 d_2$; největší napětí plyne z největšího momentu k tomuto jádrovému bodu, největší moment pak vyvodíme přibližně, zatížíme-li pohyblivým zatížením, jež předpokládejme rovnoměrné, plně klenbu i opěru až ke svislici bodu d_2. Násyp nad klenbou i opěrou převedeme na hmotu klenbovou a sestrojíme srovnávací čáru $d_2' b_2' a_2' \ldots$; k tomu připočteme výšku pohyblivého zatížení (a vrchní stavby), převedeného rovněž na hmotu klenbovou $\overline{d_2' d_3'} =$

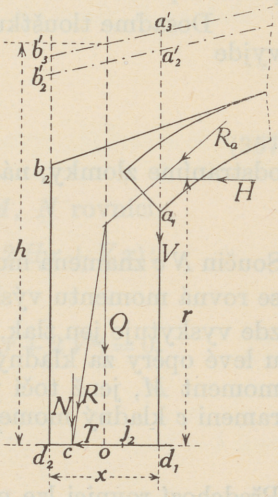


Obr. 159.

$= \overline{b_2' b_3'} = \overline{a_2' a_3'}$, a můžeme pak bráti násyp i pohyblivé zatížení se zdivem opěry dohromady.

Na spodní spáru opěry $d_1 d_2$ působí tlak klenby R_a, váhy Q_1 a Q_2 částí opěry s náspem a zatížením pohyblivým mezi svislými rovinami $d_1 a_3'$, $b_1' b_3'$ a $d_2 d_3'$, s levé strany pak tlak S sypké hmoty na svislou rovinu $d_2 d_3'$. Pro zjednodušení bereme klenbu pouze ke svislé rovině opěry $d_1 a_3'$; její tlak R_a při souměrné klenbě i zatížení bude tedy výslednicí vodorovné síly ve vrcholu klenby a všeho zatížení od vrcholu až po rovinu $a_1 a_3'$. Síly R_a, Q_1, Q_2 a S, jež dovedeme určiti, složíme ve výslednici R, jejíž paprsek seče spáru $d_1 d_2$ ve středu tlaku c. Obrazec napětí ve spáře $d_1 d_2$ určíme pak graficky podle obr. 144, je-li střed tlaku ve vnitřní třetině spáry, a podle obr. 145, vyjde-li bod c mimo vnitřní třetinu spáry. Jde-li na př. o případ prvý, přeneseme ve středu o spáry pořadnici $r_0 = \frac{N}{U}$, znamená-li N složku výslednice R kolmou ke spáře a U obsah spáry; krajní napětí r_1, r_2 sestrojíme pak podle obr. 144, jak je naznačeno v obr. 159. Největší napětí r_2 nesmí přestoupiti dovolené namáhání k zdiva v tlaku, aby opěra vyhovovala. Výminka rovnováhy v posouvání žádá, aby sklon δ výslednice R ke spáře, t. j. úhel síly R s kolmicí ke spáře, nepřestupoval třecí úhel φ pro zdivo.

β) ***Řešení počtářské.*** Nejsou-li rozměry opěry dány, můžeme je zvoliti a přesvědčiti se pak, jak bylo vyloženo, vyhovují-li. Počtářské řešení se hodí v tom jednoduchém případě, kdy je opěra omezena svislými rovinami (obr. 160). Tlak sypké hmoty tu můžeme přibližně zanedbati; je na prospěch stability, poněvadž přichyluje výslednici R ke středu spáry, a může vůbec i chyběti, je-li klenba i opěra provedena, násyp nad nimi však nikoli. Kdyby ovšem tlak sypké hmoty převládal, vynechali bychom tlak klenby a počítali bychom opěru na pouhý tlak sypké hmoty jako zeď opěrnou, jak bude dále uvedeno.



Obr. 160.

Výslednici pro libovolnou spáru bychom určili, kdybychom složili tlak klenby R_a s vahou opěry nad uvažovanou sparou i s náspem a zatížením pohyblivým. Jde o to, ve které spáře máme tloušťku opěry x vyšetřovati. Čím níže je vodorovná spára, tím větší je normálná síla na spáru působící; střed tlaku se pak blíží rubové ploše tím více, čím hlouběji jdeme. Z obou příčin roste do hloubky největší napětí, jež vzniká v rubovém bodě spáry. Z toho plyne, že je nebezpečnou spodní spára $d_1 d_2$, jde-li o pevnost. Jinak se má věc, hledíme-li k posouvání. Jsou-li v opěře vodorovné spáry, je tu nebezpečnou spára horní, jdoucí počátkem klenby a_1, neboť nad touto sparou je nejmenší váha opěry a největší odchylka výslednice od svislice. Podle toho určíme tedy tloušťku opěry x z výminky bezpečné pevnosti ve spodní spáře a přesvědčíme se dodatečně, je-li v horní spáře vyhověno výmince rovnováhy v posouvání.

Má-li vzniknouti v levém kraji spáry $d_1 d_2$ největší napětí, musíme zatížiti klenbu a opěru pohyblivým zatížením tak, aby vznikl největší moment k pravému krajnímu bodu jádrovému j_2. Přesné nejúčinnější zatížení bychom odvodili z příčinkové čáry momentu k bodu j_2. Tuto čáru bychom vyšetřili, pokud jde o zatížení na klenbě, podobně jako příčinkové čáry momentů k bodům mezi opěrovými svislicemi; zatížení na opěře působící přenáší se přímo svisle, i bylo by snadno stanoviti pro ně příčinkovou čáru momentu k bodu j_2. Postačí však, předpokládáme-li jakožto nejúčinnější zatížení přibližně plné zatížení klenby i opěry; zatížení pohyblivé můžeme tu bráti jako rovnoměrně rozdělené.

Na opěru působí pak opěrový tlak klenby R_a, určený za plného zatížení pohyblivého, a uprostřed opěry vlastní váha Q opěry s náspem i plným zatížením pohyblivým; klenbu uvažujeme zde pouze po svislou rovinu $a_1 a_3'$, ostatek čítáme k opěře, která končí ve svislé rovině $d_2 b_3'$. Síly R_a, Q dají výslednici R, jejíž paprsek seče spáru $d_1 d_2$ ve středu tlaku c; výslednice R má v bodě c svislou (normálnou) složku N a vodorovnou (tangenciálnou) složku T. Tloušťku opěry vyšetříme z výminky bezpečné pevnosti (332)

$$\max \nu \leqq k.$$

Pro největší napětí platí, je-li střed tlaku v jádře, vzorec (334^c)

$$\max \nu = \frac{N}{b\,t}\left(1 + \frac{6\,c}{t}\right),$$

a je-li střed tlaku mimo jádro, vzorec (334^b)

$$\max \nu = \frac{2\,N}{3\,b\,c'};$$

poněvadž nevíme předem, padne-li střed tlaku do jádra nebo mimo jádro, musíme počítati podle obou vzorců.

Dosaďme tloušťku opěry $t = x$ a položme $\max \nu = k$. Je-li střed tlaku v jádře, vyjde

$$\max \nu = \frac{N}{b\,x}\left(1 + \frac{6\,c}{x}\right) = k;$$

odstraníme zlomky, násobíme-li $b\,x^2$, a dostaneme rovnici

$$N\,x + 6\,N\,c = b\,k\,x^2.$$

Součin $N\,c$ znamená moment síly N ke středu spáry o, neboť jest $c = \overline{o\,c}$; tento moment se rovná momentu výslednice R k bodu o, t. j. momentu ohybovému M. Poněvadž se zde vyskytuje jen tlak, berme sílu N za kladnou, je-li tlakem; úsek $\overline{o\,c} = c$ pokládejme u levé opěry za kladný, směřuje-li vlevo. Znamenáme-li pak kladně v tomto případě moment M, jenž točí proti ručičkám hodinovým, vyvodí kladná síla N na kladném rameni c kladný moment M a platí algebraicky

$$N\,c = M. \tag{354}$$

Předchozí rovnici lze nyní psáti

$$N\,x + 6\,M = b\,k\,x^2. \tag{355}$$

Vyjde-li střed tlaku mimo jádro, bude

$$\max \nu = \frac{2\,N}{3\,b\,c'} = k$$

nebo

$$2\,N = 3\,b\,k\,c' = 3\,b\,k\left(\frac{x}{2} - c\right);$$

násobíme-li obě strany rovnice $2\,N$, obdržíme

$$4\,N^2 = 3\,b\,k\,(N\,x - 2\,N\,c)$$

nebo s použitím vzorce (354)

$$4\,N^2 = 3\,b\,k\,(N\,x - 2\,M). \tag{356}$$

Vyjádříme nyní M, N silami, které zde působí, a rozměry opěry. Tlak klenby R_a rozložíme ve vodorovnou složku H a svislou složku V v bodě, v němž seče paprsek R_a líc opěry $d_1 a_1$. Síla N jakožto svislá složka výslednice R se rovná součtu svislých složek sil R_a, Q, tedy

$$N = V + Q.$$

Znamenejme h střední výšku v opěře od spáry $d_1 d_2$ až ke srovnávací čáře $a_2' b_2'$ pro zatížení pohyblivé; tu jest

$$Q = \gamma b h x$$

a tedy

$$N = V + \gamma b h x,$$

je-li γ měrná váha zdiva, b šířka pásu, který z klenby a opěry uvažujeme (obyčejně $b = 1$). Moment M jakožto moment výslednice R k bodu o rovná se součtu momentů složek H, V, Q k bodu o, totiž

$$M = H r - \tfrac{1}{2} V x.$$

Dosaďme za M a N stanovené hodnoty do rovnice (355); dostaneme rovnici

$$V x + \gamma b h x^2 + 6 H r - 3 V x = b k x^2,$$

již lze upraviti na tvar

$$b (k - \gamma h) x^2 + 2 V x - 6 H r = 0.$$

Řešením vychází kladný kořen

$$x = \frac{- V + \sqrt{V^2 + 6 b (k - \gamma h) H r}}{b (k - \gamma h)}. \tag{357}$$

Rovnice (356) dá po dosazení stanovených hodnot za M, N rovnici

$$4 (V^2 + 2 \gamma b h V x + \gamma^2 b^2 h^2 x^2) = 3 b k (V x + \gamma b h x^2 - 2 H r + V x);$$

úpravou dostaneme

$$\gamma b^2 h (3 k - 4 \gamma h) x^2 + 2 b (3 k - 4 \gamma h) V x - 2 (3 b k H r + 2 V^2) = 0$$

nebo

$$\gamma b^2 h x^2 + 2 b V x - 2 \frac{3 b k H r + 2 V^2}{3 k - 4 \gamma h} = 0.$$

Řešením této rovnice plyne kladný kořen

$$x = \frac{1}{\gamma b^2 h} \left(- b V + \sqrt{b^2 V^2 + 2 \gamma b^2 h \frac{3 b k H r + 2 V^2}{3 k - 4 \gamma h}} \right)$$

nebo

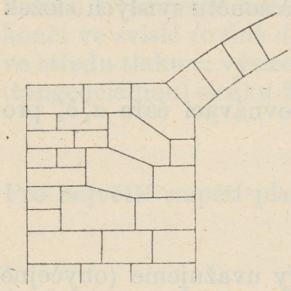
$$x = \frac{1}{\gamma b h} \left[- V + \sqrt{\frac{3 k}{3 k - 4 \gamma h} (2 \gamma b h H r + V^2)} \right]. \tag{358}$$

Z hodnot x daných vzorci (357), (358) zvolíme ovšem větší.

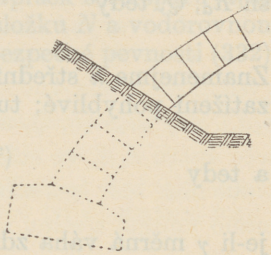
Je-li takto určena tloušťka opěry x, třeba se ještě přesvědčiti, není-li nebezpečí porušení rovnováhy posouváním, a to ve spáře jdoucí patním bodem lícným a_1. Největší sklon δ výslednice ke spáře dostaneme zde, je-li tlak klenby R_a největší, t. j. klenba plně zatížena, a váha opěry Q_a nad příslušnou sparou nejmenší, tedy opěra nezatížena. Síly R_a, Q_a by daly výslednici R_a', jejíž paprsek svírá, je-li spára vodorovná, se svislicí úhel δ, jenž musí vyhověti výmince $\delta \leqq \varphi$, aby nenastalo posouvání.

Není-li této výmince vyhověno, zvětšíme váhu Q_a umělým zatížením nebo rozšířením opěry; poslední opatření je však málo hospodárné. Jinak si pomůžeme, aniž opěru

zesílíme, volíme-li zaměření spar v opěře tak, aby znenáhla přecházelo ze šikmého směru patní spáry klenby do vodorovného směru spar v opěře (obr. 161); tím se zmenší v horních sparách opěry velmi značně sklon výslednice ke spáře. Nutnost takového opatření se může naskytnouti jen u nižších kleneb segmentových; u vyšších kleneb má patní spára klenby sama již malou odchylku od vodorovné roviny. Je-li výška opěry malá, může klenba sama pokračovati až do základů (obr. 162); vzniknou tím *opěry klenuté* (*ztracené*). Tento způsob je zvláště vhodný pro velké klenby.

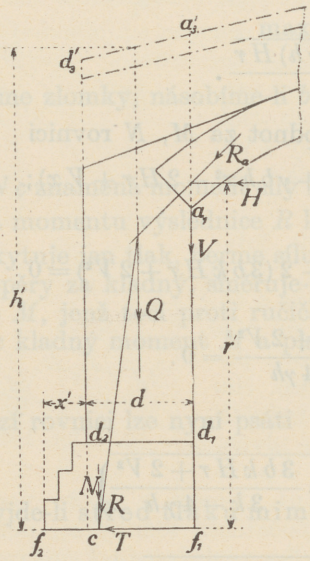


Obr. 161.

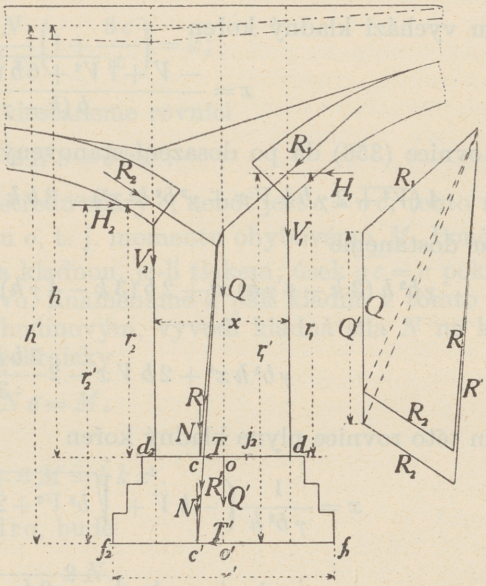


Obr. 162.

*γ) **Základy opěry*** bývá třeba proti opěře samé rozšířiti, aby se zmenšilo největší napětí, jež tu nesmí přestoupiti ani dovolené namáhání zdiva ani dovolené namáhání základové půdy. Obyčejně je dovolené namáhání pro základovou půdu $k = 2$ až 5 kg/cm² (podle druhu půdy) značně menší než dovolené namáhání zdiva, a rozhoduje tedy dovolené namáhání základové půdy. V obecném případě (obr. 159) stanovili bychom zase výslednici R' všech sil, jež působí nad základní sparou $e_1 e_2$; k silám R_a, Q_1, Q_2, jež jsme



Obr. 163.



Obr. 164.

měli již pro spodní spáru opěry $d_1 d_2$, přistoupí váha Q_3 náspu a pohyblivého zatížení nad rozšířenou částí základů, váha Q_4 základů samotných a tlak S' sypké hmoty na svislou rovinu $e_2 e_3'$. Nepatrný tlak sypké hmoty, jenž by mohl působiti po pravé straně na základy i část roviny $d_1 a_1$ (až k povrchu půdy), lze vynechati. Všechny tyto síly složíme ve výslednici R' a stanovíme pak známým způsobem obrazec napětí ve spáře $e_1 e_2$; největší napětí ν_2' v této spáře nesmí přestoupiti dovolené namáhání základové půdy.

Rozšíření základů vyšetříme snadno počtem, je-li opěra omezena svislými rovinami (obr. 163). Základy se tu rozšiřují obyčejně ve stupních, jež mívají výšku rovnou dvojnásobné šířce; celkové rozšíření v základech bývá rovno čtvrtině až třetině tloušťky opěry. Hloubka základů se řídí hloubkou únosné půdy základové. Kdybychom zvolili

rozšíření základů x', bylo by snadno určiti všechny síly, jež na opěru i se základy působí. Počítáme-li rozšíření základů x', vynecháme pro zjednodušení tlak sypké hmoty s levé strany, jenž působí na prospěch stability, a tlak sypké hmoty s pravé strany na výšku $d_1 f_1$ i váhu rozšířené části základů a náspů nad nimi: obě poslední síly budou proti ostatním pravidlem nepatrné. Uvažujeme tedy pouze tlak klenby R_a a váhu Q opěry i se základy v šířce opěry d; obě tyto síly dají výslednici R, jejíž paprsek seče spodní spáru základu $f_1 f_2$ ve středu tlaku c, položeném zde obyčejně mimo jádro. Za tohoto předpokladu platí

$$\max \nu = \frac{2N}{3bc'} \leqq k_1,$$

znamená-li k_1 dovolené namáhání základové půdy. Tlak klenby R_a rozložme na svislou složku V a vodorovnou složku H v bodě, v němž seče paprsek R_a lícnou rovinu opěry $d_1 a_1$; výška tohoto bodu nad sparou $f_1 f_2$ budiž r'. Střední výšku v opěře od spáry $f_1 f_2$ ke srovnávací čáře $d_3' a_3'$ pro zatížení pohyblivé znamenejme h'; pak je váha opěry

$$Q = \gamma b d h'. \tag{359}$$

Výslednice R má svislou vložku

$$N = V + Q,$$

i vyjde z hořejší výminky bezpečné pevnosti

$$c' \geqq \frac{2N}{3bk_1} = \frac{2(V+Q)}{3bk_1}. \tag{360}$$

Známe-li vzdálenost c' středu tlaku c od bližšího kraje spáry, užijeme k stanovení rozměru x' věty, že se součet momentů složek H, Q, V rovná momentu výslednice R; je-li bod c středem momentovým, platí rovnice

$$Hr' - Q(\tfrac{1}{2}d + x' - c') - V(d + x' - c') = 0.$$

Z toho plyne rozšíření základů

$$x' = \frac{Hr' - Q(\tfrac{1}{2}d - c') - V(d - c')}{V + Q}; \tag{361}$$

váhu Q vypočteme ze vzorce (359). Základy mají pak celkovou šířku $d + x'$. Jsou-li rozměry základů takto určeny, můžeme se přesvědčiti, jak bylo prve vyloženo (podle obr. 159), vyhovují-li skutečně výmince bezpečné pevnosti.

44. Opěry slabé. *α) Řešení grafické.* Slabá opěra je společná opěra dvou kleneb, jež má takové rozměry, že může vzdorovati pouze současnému tlaku obou kleneb. Jsou-li obě klenby souměrné k ose opěry a souměrně zatíženy, působí na opěru tlaky souměrnými k ose opěry, jež se skládají ve svislou výslednici v ose opěry, v níž působí také její váha; opěra je pak namáhána prostým tlakem.

Předpokládejme obecně klenby nesouměrné (obr. 164). Rozměry i tvar opěry buďtež dány; chceme se přesvědčiti, vyhovují-li. Celková výslednice se odchyluje od středu spáry $d_1 d_2$ na tu stranu, na níž je klenba působící menším tlakem. Abychom dostali případ nejnepříznivější, zatížíme přibližně pohyblivým zatížením plně opěru a onu klenbu, jež působí nepříznivěji na opěru. Největší napětí vznikne v kraji d_2 spodní spáry, k němuž se celková výslednice blíží. Nejúčinnějším je pak zatížení, jež by vyvodilo největší moment k jádrovému bodu j_2; přesně by se vyšetřilo z příčinkové čáry momentu k bodu j_2, přibližně je to zatížení uvedené. Klenby čítáme zde pouze ke svislým rovinám jdoucím jejich patními body lícnými a určíme jejich tlaky R_1, R_2 na opěru. Síly R_1, R_2 složíme s vahou opěry Q, do níž počítáme také násyp a pohyblivé zatížení nad opěrou. Celková výslednice R má svislou složku N, vodorovnou T; paprsek R seče

spodní spáru opěry $d_1 d_2$ ve středu tlaku c, jenž vyjde obyčejně uvnitř jádra. Největší napětí sestrojíme pak podle obr. 144 nebo vypočteme podle vzorce (334^a) a přesvědčíme se, nepřestupuje-li dovolené namáhání. Týmž způsobem řešíme, nechť je tvar opěry jakýkoli.

β) Řešení počtářské. Neznámou tloušťku opěry x vypočteme snadno, je-li opěra omezena svislými rovinami (obr. 164). Poněvadž je zde střed tlaku c obyčejně v jádře, můžeme přímo vyjíti z rovnice (355), jež platí pro ten případ; musíme se ovšem na konec přesvědčiti, je-li střed tlaku skutečně v jádře.

Nebezpečnou je zde zase spodní spára $d_1 d_2$; největší napětí vznikne přibližně, je-li plně zatížena pohyblivým zatížením rovnoměrným opěra a ona klenba, jež působí nepříznivěji, tedy obyčejně klenba větší. Klenby působí na opěru tlaky R_1, R_2, jež rozložíme na vodorovné složky H_1, H_2 a svislé složky V_1, V_2; rozkládáme v průsečících paprsků R_1, R_2 se svislými rovinami, jež omezují opěru. Svislá složka výslednice R jest

$$N = V_1 + V_2 + Q;$$

znamenejme krátce

$$V_1 + V_2 = V \tag{362}$$

a stanovme si váhu opěry

$$Q = \gamma b h x,$$

je-li h střední výška opěry od spáry $d_1 d_2$ ke srovnávací čáře pro pohyblivé zatížení. Platí tedy

$$N = V + \gamma b h x.$$

Dále jest za označení podle obr. 164 moment všech složek k bodu o

$$M = H_1 r_1 - H_2 r_2 - \tfrac{1}{2}(V_1 - V_2) x.$$

Nejsou-li obě klenby značně rozdílné, bude $(V_1 - V_2)$ dosti malé, poněvadž pohyblivé zatížení je proti stálému nepatrné. Zjednodušíme si řešení tím, že vynecháme proti ostatním člen $\frac{1}{2}(V_1 - V_2) x$, položíme tedy přibližně

$$M \doteq H_1 r_1 - H_2 r_2; \tag{363}$$

součiny $H_1 r_1$, $H_2 r_2$ se mohou značněji lišiti, neboť bude $H_1 > H_2$, po případě i $r_1 > r_2$. Moment M lze vypočísti z posledního vzorce; pokládejme jej za známý.

Dosaďme za N stanovenou hodnotu do rovnice (355); obdržíme tak rovnici

$$V x + \gamma b h x^2 + 6 M = b k x^3$$

nebo

$$b(k - \gamma h) x^2 - V x - 6 M = 0.$$

Řešením plyne kladný kořen

$$x = \frac{V + \sqrt{V^2 + 24 b (k - \gamma h) M}}{2 b (k - \gamma h)}. \tag{364}$$

Předpokládali jsme, že je střed tlaku ve vnitřní třetině spáry, t. j.

$$c \leqq \tfrac{1}{6} x \quad \text{nebo} \quad 6 N c \leqq N x;$$

hledíce ke vzorci (354) můžeme psáti

$$6 M \leqq N x.$$

Zároveň platí rovnice (355)

$$N x + 6 M = b k x^3.$$

Sečteme-li obě poslední rovnice, dostaneme

$$b\,k\,x^2 \geqq 12\,M;$$

z toho plyne nová hodnota tloušťky opěry

$$x \geqq \sqrt{\frac{12\,M}{b\,k}}. \tag{365}$$

Z hodnot x daných vzorci (364), (365) užijeme pak hodnoty větší.

γ) ***Základy*** opěry slabé se rozšiřují na obě strany; rozšíření lze voliti podle zkušenosti a pak se přesvědčíme, vyhovuje-li, vyšetřením největšího napětí.

Chceme-li řešiti počtem, uvažujeme tlaky R_1, R_2 obou kleneb a váhu opěry i základů v šířce opěry x, jež má hodnotu

$$Q' = \gamma\,b\,h'\,x;$$

podle obr. 164 znamená h' střední výšku od spodní spáry základů $f_1 f_2$ ke srovnávací čáře pro zatížení pohyblivé, jež si myslíme na opěře a oné klenbě, která působí nepříznivěji; váhy rozšířené části základů můžeme nedbati. Uvedené síly se skládají ve výslednici R', jejíž paprsek protne spáru $f_1 f_2$ ve středu tlaku položeném pravidlem uvnitř jádra; pak platí podle rovnice (355)

$$N'\,x' + 6\,M' = b\,k_1\,x'^2,$$

je-li k_1 dovolené namáhání základové půdy a x' šířka základů. Tlaky kleneb R_1, R_2 rozložme jako prve ve vodorovné složky H_1, H_2 a svislé složky V_1, V_2; pak jest

$$N' = V_1 + V_2 + Q' = V + Q', \tag{366}$$

znamená-li V podle vzorce (362) svislý tlak obou kleneb. Rozšíření základů budiž souměrné, tedy střed o' spáry $f_1 f_2$ na paprsku Q'; pak platí za označení podle obr. 164

$$M' = H_1 r'_1 - H_2 r'_2 - \tfrac{1}{2}(V_1 - V_2)\,x. \tag{367}$$

Nezávisí tedy M', N' na x' a lze obě veličiny předem vypočísti. Pro x' máme rovnici

$$b\,k_1\,x'^2 - N'\,x' - 6\,M' = 0,$$

z níž bereme pouze kladný kořen

$$x' = \frac{N' + \sqrt{N'^2 + 24\,b\,k_1\,M'}}{2\,b\,k_1}, \tag{368}$$

Předpokládali jsme střed tlaku v jádře, tedy podle vzorce (354)

$$c = \frac{M'}{N'} \leqq \frac{x'}{6};$$

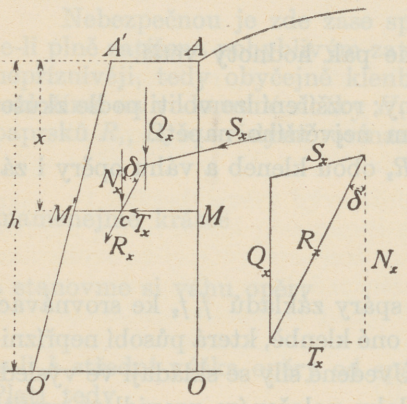
platí proto též

$$x' \geqq \frac{6\,M'}{N'} \tag{369}$$

Z obou výsledků volíme větší.

III. Zdi opěrné.

45. Zeď průřezu lichoběžníkového. *α) Řešení grafické.* Opěrná zeď vzdoruje tlaku sypké hmoty; její *rubová rovina* OA budiž svislá, *lícná* $O'A'$ sklonitá (obr. 165). Průřezem lichoběžníkovým se proti obdélníkovému ušetří na hmotě při stejné bezpečnosti; při stejné hmotě je pak bezpečnost zdi průřezu lichoběžníkového větší.



Obr. 165.

Známe-li rozměry opěrné zdi, posoudíme snadno, je-li vyhověno výminkám rovnováhy v libovolné spáře MM'. Nad touto sparou působí na část AM rubové roviny sypká hmota tlakem S_x; část zdi nad sparou MM' má váhu

$$Q_x = \gamma \cdot b \cdot \text{pl.}\, AA'M'M,$$

jejíž paprsek je v tížnici plochy $AA'M'M$. Uvažujeme zde jako u sypkých hmot a kleneb část zdi o šířce b; obyčejně se bere $b = 1$. Síly S_x, Q_x dají výslednici R_x, jež má složku normálnou (svislou) N_x a tangenciálnou (vodorovnou) T_x; paprsek R_x seče spáru MM' ve středu tlaku c. Nyní se přesvědčíme, je-li vyhověno všem výminkám rovnováhy pro zděné konstrukce. Výminka rovnováhy v točení jest obsažena ve výmince bezpečné pevnosti, jež žádá, aby bylo

$$\max \nu \leqq k.$$

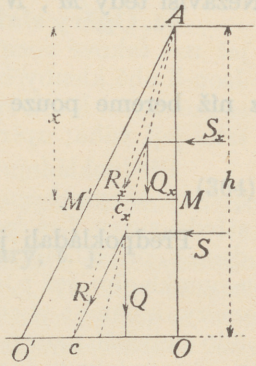
Největší napětí sestrojíme podle obr. 144 nebo 145, je-li střed tlaku v jádře nebo mimo ně; počítali bychom je podle vzorce (334^a) nebo (334^b) v uvedených případech. Výminka rovnováhy v posouvání vyžaduje, aby sklon δ výslednice R_x ke spáře byl menší než třecí úhel φ pro zdivo.

Řešení opěrné zdi tímto způsobem je jen přibližné. Přesným vyšetřováním se ukazuje, že normálná napětí v krajních bodech vodorovných spar nejsou největšími (hlavními) napětími ve zdi, mění-li se její tloušťka. Správně bylo by pak stanoviti skutečná největší (hlavní) napětí, jež nesmějí přestoupiti dovolené namáhání.[1]) Stejně jako opěrné zdi řešíme též *zděné hráze*, na něž místo tlaku sypké hmoty působí tlak vodní. U zděných hrází se však klade obyčejně též podmínka, že střed tlaku nemá vystoupiti v žádné spáře z vnitřní třetiny, aby byl celý průřez tlačen a aby nevznikly tahem trhliny, do nichž by voda vnikala a hráz poškozovala.

β) Řešení počtářské. Neznáme-li rozměry opěrné zdi a chceme-li je vyšetřiti počtem, musíme nejprve určiti, která spára je nebezpečná, kde tedy máme počítati. Mysleme si nejprve zeď průřezu trojúhelníkového OAO' (obr. 166); rubová rovina budiž svislá a povrch sypké hmoty vodorovný. Na hloubku $x = \overline{AM}$ připadne tlak sypké hmoty S_x, jehož paprsek je vodorovný a má nad bodem M výšku $\frac{1}{3}x$; nad vodorovnou sparou MM' působí též váha zdi

$$Q_x = \gamma \cdot b \cdot \text{pl.}\, AMM'$$

v těžišti trojúhelníka AMM', jímž jde též paprsek S_x. Síly S_x, Q_x se skládají ve výslednici R_x, jejíž paprsek seče spáru MM' ve středu tlaku c_x. Na celou výšku $h = \overline{AO}$



Obr. 166.

[1]) Přesné řešení zdí proměnné tloušťky uveřejnil prvý *M. Lévy* v „Comptes rendus de l'Académie des Sciences" (Paříž 1895 a 1898) a v „Annales des Ponts et Chaussées" (Paříž 1897). Viz spisovatelovy „Příspěvky k theorii hrází zděných" (uveřejněné v „Rozpravách České Akademie", II. tř., r. 1915, č. 15).

působí vodorovný tlak S sypké hmoty ve výšce $\frac{1}{3}h$ nad bodem O; váha celé zdi jest

$$Q = \gamma \,.\, b \,.\, \text{pl} \,.\, AOO'$$

a působí v těžišti trojúhelníka AOO', jímž jde také paprsek S. Síly S, Q dají výslednici R, jejíž paprsek seče spáru OO' ve středu tlaku c.

Tlaku sypké hmoty přibývá podle vzorce (314) do hloubky v poměru čtverečném, tedy

$$\frac{S_x}{S} = \frac{x^2}{h^2} \,;$$

dále je poměr

$$\frac{Q_x}{Q} = \frac{\text{pl} \,.\, AMM'}{\text{pl} \,.\, AOO'} = \frac{x^2}{h^2} \,,$$

neboť obě plochy jsou podobny. Z toho plyne

$$\frac{S_x}{S} = \frac{Q_x}{Q} \quad \text{nebo} \quad \frac{S_x}{Q_x} = \frac{S}{Q}$$

Mají-li složky týž poměr, musí býti paprsky výslednic R_x, R rovnoběžné; pak jsou středy tlaku c_x, c na přímce, jež jde bodem A. V točení i posouvání je tedy ve všech sparách stejná bezpečnost.

Největší napětí určujeme ze vzorce (334^a)

$$\max \nu = \frac{N}{b\,t}\left(1 + \frac{6\,c}{t}\right),$$

je-li střed tlaku v jádře. Poněvadž jsou body A, c_x, c na přímce, platí

$$\frac{c_x}{t_x} = \frac{c}{t} \,;$$

prvý poměr se vztahuje ke spáře MM', druhý ke spáře OO'. Normálné síly mají hodnoty $N_x = Q_x$, $N = Q$ a poměr

$$\frac{N_x}{N} = \frac{Q_x}{Q} = \frac{x^2}{h^2} \,,$$

pro tloušťky spar platí pak

$$\frac{t_x}{t} = \frac{\overline{MM'}}{\overline{OO'}} = \frac{x}{h} \,;$$

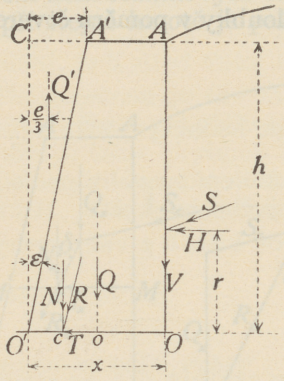
z toho vychází

$$\frac{N_x}{t_x} : \frac{N}{t} = x : h \,.$$

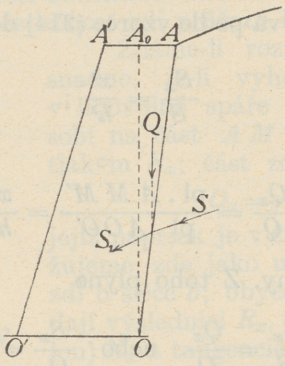
Ostatní činitelé b a $\frac{c}{t}$ nezávisí na hloubce, pročež $\max \nu$ vzrůstá v přímém poměru s hloubkou. K témuž výsledku vede i vzorec (334^b), z něhož počítáme největší napětí, je-li střed tlaku mimo jádro. Z toho plyne, že v pevnosti je nebezpečnou spodní spára.

Průřez lichoběžníkový má ve všech sparách větší tloušťku než průřez trojúhelníkový, vyjma spodní spáru. Proto je u průřezu lichoběžníkového spodní spára nebezpečnou hledíc k točení, posouvání i pevnosti. Lze předpokládati, že to platí nejen pro vodorovné, nýbrž pro jakékoli omezení sypké hmoty.

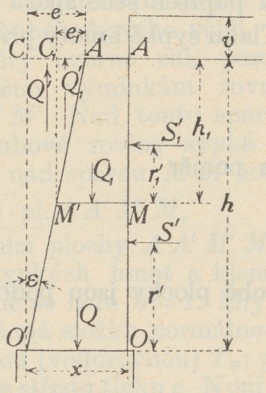
Tloušťku zdi vyšetřujeme pak ve spodní spáře OO' (obr. 167). Nad touto sparou působí váha zdi a tlak S sypké hmoty, jenž má vodorovnou složku H, svislou V a působiště ve výši r. Průřez zdi doplňme do obdélníka $OO'CA$, od něhož se odčítá



Obr. 167.



Obr. 168.



Obr. 169.

trojúhelník $O'A'C$. Váha Q tělesa, jehož průřezem jest obdélník $OO'CA$, působí uprostřed šířky x; váha Q' tělesa o průřezu $O'A'C$ bude působiti vzhůru, a to v tížnici trojúhelníka $O'A'C$. Předem lze určiti úsek

$$\overline{CA'} = e = h \cdot \operatorname{tg} \varepsilon$$

a váhu

$$Q' = \tfrac{1}{2} \gamma b e h .$$

Váha

$$Q = \gamma b h x$$

závisí na neznámé tloušťce x. Síly S, Q, Q' dají výslednici R, jejíž paprsek seče spáru OO' ve středu tlaku c; výslednice R má normálnou (svislou) složku N a tangenciálnou (vodorovnou) složku T.

Tloušťku x určujeme z výminky bezpečné pevnosti $\max \sigma = k$, z níž jsme odvodili již při opěrách klenbových rovnici (355) pro případ, že je střed tlaku v jádře, a rovnici (356) předpokládající střed tlaku mimo jádro. Obě rovnice platí i zde. Svislá složka výslednice R má hodnotu

$$N = V + Q - Q' = V - Q' + \gamma b h x$$

a moment výslednice R k bodu o jest

$$M = H r - \tfrac{1}{2} V x - Q' (\tfrac{1}{2} x - \tfrac{1}{3} e) = H r + \tfrac{1}{3} Q' e - \tfrac{1}{2} (V + Q') x,$$

je-li tu zase kladným moment, jenž točí proti ručičkám hodinovým. Dosadíme-li za M, N stanovené hodnoty do rovnice (355), dostaneme rovnici

$$(V - Q') x + \gamma b h x^2 + 6 H r + 2 Q' e - 3 (V + Q') x = b k x^2,$$

kterou upravíme na tvar

$$b (k - \gamma h) x^2 + 2 (V + 2 Q') x - 2 (3 H r + Q' e) = 0. \qquad (370)$$

Poslední rovnici, která předpokládá střed tlaku v jádře, řešíme podle x; statickou platnost má ovšem jen kladný kořen.

Podobně dosadíme za M, N do rovnice (356), jež platí, je-li střed tlaku mimo jádro; pak vyjde

$$4\,[(V-Q')^2+2\gamma b h\,(V-Q')\,x+\gamma^2 b^2 h^2 x^2] =$$
$$=3\,b\,k\,[(V-Q')\,x+\gamma b h x^2-2\,(H r+\tfrac{1}{3}Q' e)+(V+Q')\,x].$$

Tuto rovnici lze upraviti na tvar

$$\gamma b^2 h\,(3k-4\gamma h)\,x^2+2b\,[(3k-4\gamma h)\,V+4\gamma h Q']\,x-$$
$$-2\,[b k\,(3Hr+Q' e)+2\,(V-Q')^2]=0. \qquad (371)$$

Také zde neřešíme obecně, nýbrž dosadíme číselné hodnoty a řešíme teprve číselnou rovnici; platí zase staticky jen kladný kořen.

Konečně je třeba hleděti i k výmince rovnováhy v posouvání, kterou lze psáti

$$T \leqq f N,$$

je-li f součinitel tření pro zdivo. Dosadíme-li za N hodnotu již určenou a $T=H$, vyjde

$$N=V-Q'+\gamma b h x \geqq \frac{H}{f};$$

z toho plyne

$$x \geqq \frac{\frac{H}{f}-V+Q'}{\gamma b h}. \qquad (372)$$

Z hodnot x, jež plynou z rovnic (370), (371) a (372), zvolíme hodnotu největší za skutečnou tloušťku opěrné zdi.

Základy opěrné zdi bychom řešili podobně jako základy opěr klenbových.

Je-li rubová rovina OA sklonitá (obr. 168), vedeme její patou O svislou rovinu OA_0 a s tlakem S sypké hmoty na rovinu OA složíme váhu Q zdiva, jež má průřez OA_0A; tak určíme výslednici S_1, kterou lze nahraditi vše, co je vpravo od svislé roviny OA_0. Pak řešíme podle vzorců, které jsme odvodili pro zeď průřezu lichoběžníkového.

Příklad 15. O opěrnou zeď výšky $h=8$ m opírá se násyp železniční. Zeď má průřez lichoběžníkový; rubová rovina je svislá, lícná sklonitá, její sklonitost je $\operatorname{tg}\varepsilon=\frac{1}{5}$. Jest určiti tlak sypké hmoty na zeď a její tloušťku ve spodní spáře (obr. 169).

Pohyblivé zatížení vlakem podle normy *I.* mostního řádu z r. 1904, jenž se pohybuje po náspu, počítejme přibližně jako zatížení rovnoměrné, poněvadž se rozděluje pražci, štěrkovým ložem a náspem na velkou plochu. Počítejme, že se váha lokomotivy $5\cdot 16=80$ t rozděluje na délku lokomotivy 10,6 m a na šířku 4 m, jež se rovná vzdálenosti os dvou rovnoběžných kolejí; pak vyjde zatížení povrchu

$$q=\frac{80}{10{,}6\cdot 4}\doteq 1{,}9\ \text{t/m}^2.$$

Měrná váha náspu ze suché hlíny budiž $\gamma_1=1600\ \text{kg/m}^3=1{,}6\ \text{t/m}^3$, úhel třecí v sypké hmotě $\varphi_1=40^0$. Převedeme-li zatížení povrchu na měrnou váhu náspu, obdržíme výšku

$$v=\frac{q}{\gamma_1}=\frac{1{,}9}{1{,}6}=1{,}19\,\text{m}.$$

Pro výpočet tlaku sypké hmoty stanovíme, jelikož je povrch zatížen, podle vzorce (318)

$$\gamma_1'=\gamma_1\left(1+\frac{2v}{h}\right)=1{,}6\cdot\left(1+\frac{2\cdot 1{,}19}{8}\right)=2{,}08\ \text{t/m}^3.$$

Povrch sypké hmoty je vodorovný, opěrná stěna svislá; pak je tlak sypké hmoty vodorovný a má podle vzorce (329) za povrchu zatíženého hodnotu

$$S'=\frac{1}{2}\gamma_1' b h^2 \operatorname{tg}^2\left(45^0-\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2{,}08\cdot 1\cdot 8^2\cdot 0{,}4663^2=14{,}5\ \text{t};$$

uvažujeme pás sypké hmoty i opěrné zdi o šířce $b = 1$ m. Působiště tlaku S' je podle vzorce (323) ve výšce

$$r = \frac{h}{3} \cdot \frac{h + 3v}{h + 2v} = \frac{8}{3} \cdot \frac{8 + 3 \cdot 1{,}19}{8 + 2 \cdot 1{,}19} = 2{,}97\,\text{m}.$$

Zeď budiž ze strojových cihel na obyčejnou maltu; jejich měrná váha jest $\gamma = 1{,}7\,\text{t/m}^3$ a dovolené namáhání zvolíme $k = 10\,\text{kg/cm}^2 = 100\,\text{t/m}^2$. Pro výpočet tloušťky x potřebujeme podle vzorců (370), 371) hodnoty

$$\gamma h = 1{,}7 \cdot 8 = 13{,}6\,\text{t/m}^2, \quad k - \gamma h = 100 - 13{,}6 = 86{,}4\,\text{t/m}^2,$$
$$e = h \operatorname{tg} \varepsilon = 8 \cdot \tfrac{1}{5} = 1{,}6\,\text{m}, \quad Q = \tfrac{1}{2} \gamma b e h = \tfrac{1}{2} 1{,}7 \cdot 1 \cdot 1{,}6 \cdot 8 = 10{,}9\,\text{t},$$
$$V = 0, \quad H = S' = 14{,}5\,\text{t}, \quad V + 2Q' = 2Q' = 21{,}8\,\text{t},$$
$$3Hr + Q'e = 3 \cdot 14{,}5 \cdot 2{,}97 + 10{,}9 \cdot 1{,}6 = 146{,}5\,\text{mt}, \quad V - Q' = -10{,}9\,\text{t},$$
$$3k - 4\gamma h = 3 \cdot 100 - 4 \cdot 13{,}6 = 245{,}6\,\text{t/m}^2.$$

Pro tloušťku x platí především rovnice (370) odvozená z výminky bezpečné pevnosti za předpokladu, že je střed tlaku v jádře; zní obecně

$$b(k - \gamma h)x^2 + 2(V + 2Q')x - 2(3Hr + Q'e) = 0.$$

Stanovenými číselnými hodnotami součinitelů dostaneme rovnici

$$86{,}4\,x^2 + 2 \cdot 21{,}8\,x - 2 \cdot 146{,}5 = 0,$$

jejíž kladný kořen jest

$$x_1 = \frac{-21{,}8 + \sqrt{21{,}8^2 + 86{,}4 \cdot 2 \cdot 146{,}5}}{86{,}4} = \frac{-21{,}8 + 160{,}6}{86{,}4} = 1{,}61\,\text{m}.$$

Druhá rovnice pro tloušťku x plyne rovněž z výminky bezpečné pevnosti, předpokládá však, že je střed tlaku mimo jádro; je to rovnice (371)

$$\gamma b^2 h(3k - 4\gamma h)x^2 + 2b[(3k - 4\gamma h)V + 4\gamma h Q']x - 2[bk(3Hr + Q'e) + 2(V - Q')^2] = 0.$$

Číselnými hodnotami součinitelů nabude tato rovnice tvaru

$$13{,}6 \cdot 245{,}6\,x^2 + 2 \cdot 4 \cdot 13{,}6 \cdot 10{,}9\,x - 2 \cdot (100 \cdot 146{,}5 + 2 \cdot 10{,}9^2) = 0$$

nebo

$$245{,}6\,x^2 + 2 \cdot 43{,}6\,x - 2189{,}3 = 0.$$

Řešením této rovnice vypočteme kladný kořen

$$x_2 = \frac{-43{,}6 + \sqrt{43{,}6^2 + 245{,}6 \cdot 2189{,}3}}{245{,}6} = \frac{-43{,}6 + 734{,}6}{245{,}6} = 2{,}81\,\text{m}.$$

Z výminky rovnováhy v posouvání vychází konečně podle vzorce (372)

$$x_3 \geqq \frac{\frac{H}{f} - V + Q'}{\gamma b h}.$$

Součinitel tření pro zdivo jest $f = 0{,}6$ i vyjde

$$x_3 \geqq \frac{\frac{14{,}5}{0{,}6} + 10{,}9}{13{,}6} = 2{,}58\,\text{m}.$$

Z vypočtených hodnot x_1, x_2, x_3 užijeme jakožto tloušťky zdi největší hodnoty $x = 2{,}81$ m, kterou bychom mohli i zaokrouhliti; je-li skutečná tloušťka x rovna přesně vypočtené hodnotě, vyjde největší napětí ve spodní spáře rovno k. Tloušťka zdi ve vrcholu jest $x - e = 2{,}81 - 1{,}60 = 1{,}21$ m.

Známe-li rozměry opěrné zdi, přesvědčíme se snadno, jak je vyhověno všem výminkám rovnováhy v každé spáře; není ovšem pochybnosti, že bude všem výminkám ve všech sparách vyhověno, je-li jim vyhověno ve spodní spáře, poněvadž je v tomto případě spodní spára nebezpečnou pro všechny výminky rovnováhy. Pro libovolnou spáru bychom určili výslednici tlaku sypké hmoty a známé váhy zdi na horní straně spáry, z výslednice bychom pak stanovili největší napětí. Grafické řešení je snadné, rovněž počtem lze jednoduše řešiti.

Zvolme na př. spáru $M M'$ ve hloubce $h_1 = \frac{1}{2} h = 4$ m pod vrcholem zdi (obr. 169). V této hloubce má zeď tloušťku $t = x - \frac{1}{2} e = 2{,}01$ m. Pro tlak S_1' sypké hmoty za povrchu zatíženého určíme podle vzorce (318)

$$\gamma_1'' = \gamma_1 \left(1 + \frac{2v}{h_1}\right) = 1{,}6 \left(1 + \frac{2 \cdot 1{,}19}{4}\right) = 2{,}55 \text{ t/m}^3;$$

pak je podle vzorce (329), nahradíme-li měrnou váhu sypké hmoty hodnotou γ_1'',

$$S_1' = \frac{1}{2} \gamma_1'' b h_1^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2} 2{,}55 \cdot 1 \cdot 4^2 \cdot 0{,}4663^2 = 4{,}4 \text{ t}.$$

Tato vodorovná síla působí nad sparou $M M'$ podle vzorce (323) ve výšce

$$r_1' = \frac{h_1}{3} \cdot \frac{h_1 + 3v}{h_1 + 2v} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4 + 3 \cdot 1{,}19}{4 + 2 \cdot 1{,}19} = 1{,}58 \text{ m}.$$

Doplníme-li průřez $A A' M' M$ do obdélníka $A C_1 M' M$, odpovídá mu váha

$$Q_1 = \gamma b h_1 t = 1{,}7 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2{,}01 = 13{,}7 \text{ t},$$

jež působí uprostřed tloušťky $t = \overline{M M'}$. Váhu zdiva o průřezu trojúhelníka $A' C_1 M'$

$$Q_1' = \frac{1}{2} \gamma b e_1 h_1 = \frac{1}{2} 1{,}7 \cdot 1 \cdot 0{,}8 \cdot 4 = 2{,}7 \text{ t}$$

zrušíme, dáme-li jí působiti vzhůru v tížnici trojúhelníka $A' C_1 M'$, jehož vodorovná základna jest $\overline{A' C_1} = e_1 = \frac{1}{2} e = 0{,}8$ m. Pak zbývá na spáru $M M'$ normálný tlak

$$N_1 = Q_1 - Q_1' = 11{,}0 \text{ t}.$$

Síly S_1', Q_1, Q_2' dají k těžišti spáry $M M'$ moment

$$M_1 = S_1' r_1' - Q_1' \left(\frac{t}{2} - \frac{e_1}{3}\right) = 4{,}4 \cdot 1{,}58 - 2{,}7 \left(\frac{2{,}01}{2} - \frac{0{,}8}{3}\right) = 4{,}96 \text{ mt}.$$

Střed tlaku ve spáře $M M'$ má od jejího těžiště vzdálenost

$$c_1 = \frac{M_1}{N_1} = \frac{4{,}96}{11{,}0} = 0{,}451 \text{ m},$$

jež je větší než $\frac{1}{6} t = 0{,}335$ m; je tu tedy střed tlaku mimo jádro a má od bližšího kraje spáry vzdálenost $c_1' = \frac{1}{2} t - c_1 = 0{,}554$ m. Podle vzorce (334^b) vypočteme největší napětí

$$\max \sigma = \frac{2 N_1}{3 b c_1'} = \frac{2 \cdot 11{,}0}{3 \cdot 1 \cdot 0{,}554} = 13{,}2 \text{ t/m}^2 = 1{,}32 \text{ kg/cm}^2;$$

toto napětí je nepatrné proti dovolenému namáhání $k = 10$ kg/cm^2.

Přesvědčíme se též, jak je vyhověno ve spáře $M M'$ výmince rovnováhy v posouvání. Tu na př. vypočteme tření

$$f N_1 = 0{,}6 \cdot 11{,}0 = 6{,}6 \text{ t};$$

výslednice všech sil, jež zde působí, má vodorovnou složku

$$T = S_1' = 4{,}4 \text{ t}$$

značně menší než tření, vyhovuje tedy zeď ve spáře $M M'$ výmince rovnováhy v posouvání.

Přehled literatury.

V soustavnou nauku uvedl různé poznatky stavebně-mechanické do té doby známé *L. Navier*; ve spise „Résumé des leçons données à l'Ecole des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines" (Paříž 1826) shrnul všechny dosavadní výsledky a doplnil je mnohými dodatky zejména v theorii ohybu. Třetí vydání tohoto spisu obstaral (r. 1864) *Barré de Saint-Venant*; přidal tu v poznámkách obsáhlé vlastní doplňky, zvláště v theorii ohybu, smyku, kroucení a j., v úvodě pak vylíčil velmi podrobně historický vývoj stavebné mechaniky (s naukou o pružnosti a pevnosti) od prvých počátků ve středověku až do r. 1860.

Nejdůležitější pokroky stavebné mechaniky po Navierovi a Saint-Venantovi byly: použití vět o práci k řešení úloh stavebné mechaniky (*Clapeyron* 1833); řešení spojitých nosníků (*Bertot* 1855); vyšetřování tlaku uvnitř neomezené hmoty sypké (*Rankine* 1856, *Lévy* 1870); v theorii přetvoření soustav prutových věta o vzájemnosti posunutí (*Maxwell* 1864); příčinkové čáry (*Mohr* a *Winkler* 1868); grafické řešení ohybové čáry plnostěnných nosníků (*Mohr* 1868); použití věty o virtuálných pracích k řešení soustav prutových (*Mohr* 1874); řešení nosníků a jejich přetvoření z přetvárné práce (*Castigliano* 1876); použití kinematiky k řešení soustav prutových (*Müller-Breslau* 1887); přesná theorie zdí proměnného průřezu (*Lévy* 1895). Původní prameny těchto i jiných pokroků byly uvedeny na svých místech v tomto spisu. Dějiny stavebné mechaniky vylíčil též až po nejnovější dobu *Mehrtens* v knize dále zmíněné. O ruské literatuře technické pojednal spisovatel v Novém Atheneu, sv. I. (1919—20), str. 188 a d.

Větší a význačnější souborná díla o stavebné mechanice v cizích literaturách jsou:

L. Bass, Résistance des matériaux, I. (Brusel 1930—1934).

B. de Fontviolant, Résistance d. matériaux analytique et graphique (Paříž), I. (1923), II. (1927), III. (1935).

M. Lévy, La statique graphique et ses applications aux constructions (2. vyd. Paříž), I. (1886), II. (1886), III. (1887), IV. (1888).

G. Pigeaud, Résistance des matériaux et élasticité I., II. (2. vyd. Paříž 1934).

J. Résal, Résistance des matériaux (Paříž 1898).

J. Résal, Stabilité des constructions (Paříž 1901).

A. Vierendeel, Cours de stabilité des constructions (Louvain—Paříž), I. (1906), II. (1905), III. (1901), IV. (1911), V. (2. vyd. 1903), VI. (1907), VII. (1907), VIII. 1. (1912), VIII. 2. (1914).

E. S. Andrews, The Theory and Design of Structures (3. vyd. Londýn 1913).

E. S. Andrews, Further Problems in the Theory and Design of Structures (Londýn 1913).

J. B. Johnson-C. W. Bryan-F. E. Turneaure, The Theory and Practice of Modern Framed Structures (9. vyd. New York), I. (1910), II. (1911), III. (1917).

D. A. Molitor, Kinetic Theory of Engineering Structures (New York 1911).

E. H. Salmon, The Theory and Design of Structures (Londýn 1938).

Н. Н. Мимнскій, Строительная механика (neúplné, ve 3 sešitech, Petrohrad 1905, 1907, 1908).

Л. Проскуряков, Строительная механика, I. (7. vyd. 1928), II. (6. vyd. 1926).

С. П. Тимошенко, Сопрстивленіе матеріаловъ (1. vyd. Kyjev 1911, 7. vyd. Leningrad 1928).

Ф. С. Ясинскій, Собраніе сочиненій (Petrohrad), I. (1902), II. (1902), III. (1904).

K. Beyer, Die Statik im Eisenbetonbau (2. vyd. Berlín), I. (1933), II. (1934).
C. Culmann, Die graphische Statik (2. vyd. Curych 1875).
Aug. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik (Lipsko), I. (1898), II. (1900), III. (1897), IV. (1899), V. (1907), VI. (1910).
L. Henneberg, Die graphische Statik der starren Systeme (Lipsko 1911).
W. Kaufmann, Statik der Tragwerke (2. vyd. Berlín 1930).
G. Ch. Mehrtens, Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre (Lipsko), I. (1903), II. (1904), III. (1905).
O. Mohr, Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik (2. vyd. Berlín 1913).
H. F. B. Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen (4. vyd. Lipsko 1913).
H. F. B. Müller-Breslau, Die graphische Statik der Baukonstruktionen, I. (5. vyd. Lipsko 1913), II. 1. (4. vyd. Stuttgart 1907), II. 2. (Lipsko 1908).
A. Ostenfeld (přeložil z dánštiny *D. Skouge*), Technische Statik (Lipsko 1904).
W. Ritter, Anwendungen der graphischen Statik (Curych), I. (1888), II. (1890), III. (1900), IV. (1906).

Česká literatura o stavebné mechanice vyvíjela se znenáhla a obsahovala nejprve pojednání ve Zprávách Spolku architektů a inženýrů v král. Českém, jež dala též počátky názvosloví. Záhy však zásluhou *J. Šolína* vyšla i znamenitá původní díla, jež položila pevné základy k dalšímu rozvoji. Práce Šolínovy daly české literatuře o stavebné mechanice dokonalé názvosloví a přispěly také svým obsahem vydatně k pokroku theorie. Podrobnější rozbor těchto prací uveřejnil spisovatel v Technickém obzoru r. 1911, str. 47 a d. Přehled českých prací z oboru stavebné mechaniky je ve spisovatelově pojednání „Vývoj teorie inženýrských staveb" (v almanachu SIA „70 let technické práce" 1935 a doplněné v „Průvodci světem techniky" 1938).

Obsáhlejší a význačnější pojednání v časopisech i samostatné spisy, roztříděné podle oborů, jsou v časovém pořadí:

1. Přímé nosníky plnostěnné:

J. Šolín, Geometrická theorie trámů spojitých (Zprávy Spolku arch. a inž. v král Českém 1873, 10; 1874, 20).
J. Šolín, K theorii zevnitřních sil trámu přímého (Zprávy Spolku arch. a inž. v král. Českém 1877, 15).
J. Záhorský, Grafické určení neutrálné polohy břemene ve příčině momentu a síly posouvající spojitého nosníku nepřímo zatíženého (Zprávy Spolku arch. a inž. v král. Českém 1898, 1).
J. Bašta, Vyšetřování momentů setrvačnosti útvarů rovinných (Zprávy Spolku arch. a inž. v král. Českém 1900, 45).
Ed. Viktora, Průhyb plnostěnných nosníků řešený na základě deformační práce (Techn. obzor 1913, 46).
K. Fifka, Řešení staticky neurčitých přímých nosníků plnostěnných (Techn. obzor 1913, 188).
L. Záruba, Příspěvek k řešení nosníků spojitých o dvou polích, s konci dokonale vetknutými (Techn. obzor 1915, 57, 203).
Bř. Čech, Nová methoda řešení spojitých nosníků příčinkovými čarami (Techn. obzor 1919, 178).
K. Hruban, Řešení přímých nosníků pomocí čáry ohybové (Techn. obzor 1920, 79).
Bř. Čech, Návrh syntetické teorie spojitých soustav o přímé střednici (Techn. obzor 1920, 161).
L. Záruba, Příspěvek k řešení nosníků vetknutých proměnného průřezu (Zprávy veř. služby techn. 1920, 502).
V. Janák—A. Brebera, Tabulky k výpočtu vodorovně vetknutého nosníku a k výpočtu spojitých nosníků o stejně dlouhých polích při částečném rovnoměrně rozděleném zatížení (Zprávy veř. služby techn. 1924, 238).
V. Dašek, Určování polohy jádrových bodů (Techn. obzor 1927, 324).
A. Kovář, Spojité nosníky (Techn. obzor 1931, 458).
N. Zelený, Stanovení průhybu železničních trámových mostů s hlavními nosníky plnostěnnými (Zprávy veř. služby techn. 1934, 413).

L. Záruba, Nosník na obou koncích dokonale vetknutý, zatížený ohybovým momentem (Zprávy veř. služby techn. 1936, 157).

J. Kazda, Řešení spojitých nosníků metodou rozdělování momentů (Techn. obzor 1939, 66).

J. Kazda, Čára modulů průřezových a výpočet souřadnic obrazce jádra průřezového (Techn obzor 1940, 359).

M. Hampl, Reakce a namáhání spojitého nosníku (Techn. zprávy Škod. závodů 1942, seš. 1).

N. Zelený, Obecné kriterium pro max T při nepřímém zatížení (Techn. obzor 1943, 49).

2. Soustavy prutové:

V. Bukovský, O grafickém určení deformace zatížených konstrukcí příhrádkových (Zprávy Spolku arch. a inž. v král. Českém 1880, 4).

A. V. Velflík, Stavitelství mostní, II. (Praha 1896—1905).

Fr. Klokner, Grafické řešení zavětrování při kř vých pásech hlavních nosníků (Techn. obzor 1902, 83).

Fr. Klokner, O tvarové a statické určitosti prostorových soustav prutových (Techn. obzor 1904, 9; 1905, 141; 1906, 107; 1907, 181; 1917, 47).

Zd. Bažant, Přímopásové nosníky dvojnásobné soustavy pravoúhlé (Techn. obzor 1904, 227).

Zd. Bažant, Staticky určité spojité nosníky příhradové (Rozpravy II. třídy České akademie věd 1905, č. 27).

Zd. Bažant, Nové tvary staticky určitých spojitých nosníků příhradových (Rozpravy II. třídy České akademie věd 1906, č. 43).

Fr. Klokner, Řešení nosníků příhradových o přímých pásech (Techn. obzor 1907, 283).

Zd. Bažant, Obecné řešení staticky neurčitých soustav prutových (Techn. obzor 1909, 115).

K. Šimek, Stanovení nadvýšení hlavního nosníku silničního mostu přes Labe u Obříství (Techn. obzor 1915, 177).

K. Šimek, Grafické řešení reakcí a osových sil u zvláštních rovinných soustav prutových (Rozpravy II. třídy České akademie věd 1931, č. 43).

J. Kolář, Trojboké nosníky (Techn. obzor 1933, 85).

K. Šimek, Grafické řešení reakcí u spojitých nosníků kloubových, jakož i osových sil u prostých prutových nosníků, u nichž není dvojných styčníků (Sborník české vys. školy techn. v Brně, sp. 28, 1933).

R. Husák, Bezpečnost konstrukcí proti účinkům větru (Zprávy veř. služby techn. 1941, 454).

Zd. Bažant, Stabilita tlačeného horního pásu mostu bez horního ztužení (Techn. obzor 1942, 359).

A. Tomášek, Stabilita mostů (Techn. obzor 1943, 369).

N. Zelený, Stanovení ohybové čáry prutových soustav metodou diferencí (Sborník České akademie techn. 1943, seš. 9).

3. Plnostěnné nosníky obloukové:

J. Šolín, Příspěvek ku theorii nosníků obloukových (Rozpravy II. třídy České akademie věd 1891, č. 1).

J. Šolín, Theorie plnostěnných nosníků obloukových o dvou opěrách (Praha 1892).

J. Šolín, Nová konstrukce sečnice při plnostěnném nosníku obloukovém o dvou kloubech (Rozpravy II. třídy České akademie věd 1903, č. 3).

J. Gröger, Grafické vyšetření tlakových čar u oblouků a kleneb na rubu volných (Techn. obzor 1910, 81).

K. Spála, Grafické stanovení pevnosti prutů křivých (Techn. obzor 1912, 71).

J. Činčera, Tabelární tvar příčinkových čar staticky neurčitých veličin vetknutého oblouku (Zprávy veř. služby techn. 1924, 425).

L. Záruba, Vetknutý parabolický oblouk za vodorovného obtížení (Zprávy veř. služby techn. 1925, 472).

L. Záruba, Statické řešení oblouků a mostních kleneb za působení větru a příčných sil vodorovných (Sborník české vys. školy techn. v Brně, sp. 5, 1927).

L. Záruba, Statické řešení vetknutého oblouku za působení vodorovných sil podélných (Sborník české vys. školy techn. v Brně, sp. 11, 1928).

L. Záruba, Statické řešení oblouku o jednom a o dvou kloubech (Sborník české vys. školy techn. v Brně, sp. 15, 1929).

F. Faltus, Vzpěrná pevnost spojitých oblouků (Techn. obzor 1929, 8).

L. Záruba, Statické řešení oblouků vetknutých za působení sil svislých (Sborník české vys. školy techn. v Brně, sp. 17, 1930).

V. Dašek, Příčinkové čáry sil posouvajících a normálných (Techn. obzor 1930, 68).
L. Záruba, Statické řešení oblouků vetknutých za působení sil vodorovných (Sborník české vys. školy techn. v Brně, sp. 24, 1931).
L. Záruba, Působení vnějších momentů ohybových na oblouk vetknutý (Zprávy veř. služby techn. 1942, 368).
L. Záruba, Působení vnějších momentů na oblouk o dvou kloubech (Techn. obzor 1943, 33).

4. Nosníky složené z částí plnostěnných a prutů kloubově připojených:

V. Bukovský, O vzpěradlech a věšadlech (Zprávy Spolku arch. a inž. v král. Českém 1879, 41).
V. Janák, O dvojitých souměrných věšadlech a vzpěradlech po stránce theoretické (Techn. obzor 1904, 28).
Zd. Bažant, Volný řetěz a oblouk vyztužený trámem (Techn. obzor 1906, 163).
V. Janák, Dvojitá věšadla střešních konstrukcí (Techn. obzor 1907, 203).
Bř. Čech, Syntetická teorie trámových nosníků, II. Nosníky kombinované (Techn. obzor 1921, 37).
Bř. Čech, Nová teorie souměrných několikanásobných vzpěradel a věšadel (Zprávy veř. služby techn. 1921, 341).
T. Vyhnánek, Přesné řešení třikrát staticky neurčitých vzpěradel a věšadel (Techn. obzor 1929, 181).
F. Schumandl, Mostní obloukové nosníky s táhly jako trámy ztužené obloukovými nosníky (Zprávy veř. služby techn. 1932, Beton 3).
J. Valenta, Nosník vyztužený obloukem (Techn. obzor 1933, 103).

5. Soustavy rámové:

K. Válek, Grafické řešení rámových konstrukcí o několika polích a několika patrech (Cement, železo a beton 1913, 3).
K. Válek, Grafické řešení rámových konstrukcí o několika polích a několika patrech při proměnném průřezu (Techn. obzor 1914, 101).
Zd. Bažant, Nosník lomený (Techn. obzor 1916, 107).
St. Bechyně, Výpočty rámových konstrukcí (Praha 1917, 2. vyd. 1926).
J. Polívka, Řešení spojitých nosníků na pružně poddajných opěrách na základě elipsy pružnosti (Techn. obzor 1917, 67).
J. Polívka, Grafické řešení vetknutého rámu na základě elipsy pružnosti (Techn. obzor 1918, 171).
M. Kasal, Řešení obecných rámů sdružených rozkladem na jednoduché rámy (Techn. obzor 1918, 160; 1919, 131).
J. Polívka, Grafické řešení uzavřeného rámu obdélníkového na základě elipsy pružnosti (Techn. obzor 1919, 128).
V. Dašek, Výpočet staticky neurčitých rámových konstrukcí s pruty přímými (Techn. obzor 1919, 213).
V. Dašek, Výpočet staticky neurčitých rovinných konstrukcí rámových s pruty zakřivenými (Techn. obzor 1922, 43).
V. Dašek, Grafické řešení staticky neurčitých rámových konstrukcí (Techn. obzor 1922, 372).
V. Dašek, Výpočet staticky neurčitých konstrukcí pomocí tensorů (Techn. obzor 1923, 247).
V. Dašek, Nové metody pro výpočet staticky neurčitých konstrukcí (Techn. obzor 1925, 347).
L. Záruba, Řešení sdružených rámů o dvou polích (Techn. obzor 1926, 309).
J. Rieger, Statika železbetových konstrukcí staticky neurčitých (Brno), I. (1926), II. (1929).
J. Rieger, Příspěvek k řešení rámových konstrukcí (Zprávy veř. služby techn. 1927, 14).
A. Kovář, Uzavřený rám obdélníkový (Techn. obzor 1930, 336).
J. Klír, Stanovení základních bodů rámových konstrukcí s použitím nomogramů (Techn. obzor 1932, 294).
A. Kovář, Řešení rámů rovnicí čtyřmomentovou (Stavitelské listy 1932, 393).
Zd. Bažant, Spojitý nosník proměnného průřezu, vetknutý do pružných pilířů (Techn. obzor 1932, 405).
L. Záruba, Statické řešení patrových rámů o jednom poli (Zprávy veř. služby techn. 1934, 54).
J. Polívka, Řešení složitých rámových konstrukcí základními přímkami nosníkových dvojic (Techn. obzor 1934, 132).

F. Čížek, Řešení patrových rámů metodou deformační (Hradec Král. 1935).
L. Záruba, Výpočty rámových konstrukcí v pozemním stavitelství (Sborník české vys. školy techn. v Brně, sp. 34, 1935).
V. Landkammer, Řešení rámových konstrukcí proměnného průřezu metodou jednotkových pootočení (Zprávy veř. služby techn. 1935, 177; 1936, 762).
C. Klouček, Využití tuhosti v deformačních metodách (Techn. obzor 1938, 129).
J. Rieger, Příspěvek k teorii rámových konstrukcí patrových (Sborník české vys. školy techn. v Brně, sp. 52, 1939).
K. Hruban, Zvláštní konstrukce betonové, I. Nosné kostry budov (Brno 1939).
K. Hruban, Momentové tabulky pro patrové rámy (Praha 1939).
K. Havelka, Statické řešení mnohopatrových konstrukcí rámových za účinku vodorovných sil (Brno 1939).
M. Mencl, K řešení spojitých a rámových mostních konstrukcí (Techn. obzor 1939, 129).
Vl. Valenta, Použití metody Takabeyovy na rámy s křivými pruty (Techn. obzor 1939, 292).
J. Wünsch, Příspěvek k řešení patrových rámů metodou základních bodů (Zprávy veř. služby techn. 1939, II, 22).
C. Klouček, Princip deformačního rozvodu (Zprávy veř. služby techn. 1939, II, 247).
O. Novák, Význam tuhosti a měr vetknutí v rámových konstrukcích (Techn. obzor 1939, 305; 1940, 73).
C. Klouček, Rozvod deformace jako podklad nové početní metody (Praha 1940).
J. Rieger, Rámové konstrukce patrové, řešené metodou fiktivních momentů (Zprávy veř. služby techn. 1940, 43).
F. Bäumelt, Metoda základních bodů a metody z ní vyplývající (Techn. obzor 1940, 241).
L. Záruba, Spojité nosníky pružně upnuté do krajních rámových stojek (Techn. obzor 1940, 276).
V. Dašek, Výpočet rámových konstrukcí metodou rozdělování momentů (Techn. obzor 1940, 324).
V. Dašek, Řešení patrových rámů vodorovně zatížených metodou rozdělování sil a momentů (Techn. obzor 1940, 353).
L. Záruba, Spojité nosníky s pružně upnutými konci v rámových stojkách (Zprávy veř. služby techn. 1940, 360).
L. Záruba, Spojitý rám o dvou polích s vnitřní volnou podporou (Zprávy veř. služby techn. 1941, 67).
F. Bäumelt, Momentová metoda (Techn. obzor 1941, 83, 287).
O. Novák, Zkrácené řešení patrového rámu vodorovně zatíženého (Techn. obzor 1941, 148).
O. Novák, Rozvod deformace ze stavu posuvnosti styčníků (Techn. obzor 1941, 257).
C. Klouček, Vyřešení patrových výkyvů z rozvodu deformace (Techn. obzor 1941, 321).
C. Klouček, Rozbory a srovnávací výpočty základních deformačních hodnot (Praha 1942).
C. Klouček, Rozvod deformace při posuvných styčnících (Zprávy veř. služby techn. 1942, 61).
Zd. Jiroušek, Řešení patrových rámů postupným uvolňováním (Techn. obzor 1942, 103).
L. Záruba, Působení vodorovných sil na rámové konstrukce (Techn. obzor 1942, 231).
A. Tomášek, Příspěvek k výpočtu stability rámů (Strojn. obzor 1942, 313).
Vl. Koloušek, Kmitání patrových rámů (Techn. obzor 1942, 327).
V. Dašek, Příklady řešení rámových konstrukcí rozdělováním sil a momentů (Zprávy veř. služby techn. 1942, 336).
O. Novák, Rozvod deformace za stavu posuvnosti styčníků u patrových rámů o několika patrech (Techn. obzor 1942, 343).
O. Novák, Zákony deformačního a momentového rozvodu za kroucení soustavy (Techn. obzor 1943, 61, 214).
Zd. Bažant, Vzpěrná pevnost rámových soustav (Techn. obzor 1943, 97, 255).
Vl. Koloušek, O vztahu mezi kmitáním a vzpěrností rámů (Techn. obzor 1943, 374).
R. Genttner, Nový způsob výpočtu příčinkových čar rámových konstrukcí (Techn. obzor 1944, 65).

6. Tlak hmot sypkých:

J. Ševčík, Vliv směru výslednice zemního tlaku na jeho velikost (Techn. obzor 1917, 119).
M. Neumann, Příspěvek k theorii zemního tlaku (Techn. obzor 1919, 175; 1920, 188).
J. Bašta—E. Bartoň, O modifikaci normálních stavebních method při stavbě různých objektů v železničním spodku provozovaných železnic (Zprávy veř. služby techn. 1921, 151).

7. Zděné stavby a základy:

A. Rytíř, Příspěvek ku statice kleneb (Zprávy Spolku arch. a inž. v král. Českém 1881, 86).

Fr. Klokner, O stabilitě komínů továrních (Techn. obzor 1902, 253).

Fr. Klokner-E. Zimmler, Návod k statickému výpočtu, návrhu a stavbě továrních komínů (Praha 1904).

V. Janák, Příspěvek ku statickému vyšetřování nízkých kleneb segmentových (Techn. obzor 1906, 41).

F. Stupecký, Statická bezpečnost zděných nádržných hrází (Techn. obzor 1906, 281).

J. Gröger, Příspěvek ke statice zděných základů (Techn. obzor 1909, 1).

F. Stupecký, Stavba vodních nádrží (Praha 1909).

K. Válek, O statickém řešení plavidlových zdí (Cement, železo a beton 1911, 151).

J. Gröger, Vzorce pro posouzení vlivu osových tlaků, změn teploty a jednostranného zatížení kleneb (Techn. obzor 1911, 79).

F. Stupecký, Poznámky k bezpečnosti zděných hrází nádržných (Techn. obzor 1912, 17).

Zd. Bažant, Příspěvky k theorii hrází zděných (Rozpravy II. třídy České akademie věd 1915, č. 15).

E. Mašík, O stabilitě opěrných a tunelových zdí (Techn. obzor 1916, 173).

M. Klement, Vyšetření kubatury továrních komínů z dané stability proti překocení větrem (Techn. obzor 1917, 142).

M. Klement, Vyšetření kubatury továrních komínů z daného napětí zdiva (Techn. obzor 1918, 150).

J. Bašta-E. Bartoň, O modifikaci normálních stavebních method při stavbě různých objektů v železničním spodku provozovaných železnic (Zprávy veř. služby techn. 1921, 151).

V. Pícha, Příspěvek k výpočtu napětí v základovém stupni (Zprávy veř. služby techn. 1922, 473).

F. Müller, Theorie lomených základů (Techn. obzor 1924, 135; 1926, 34).

Zd. Bažant, Vývoj teorie klenbových hrází (Techn. obzor 1929, 401).

A. Jilek, Hráze. Údolní přehrady (Techn. slovník naučný V, 1930, 340).

A. Jilek, Počtářské a grafické určení napětí v tělese gravitační hráze nádržné (Techn. obzor 1931, 1).

J. Blažek, Průběh napětí ve velkých betonových hmotách (Zprávy veř. služby techn. 1932, Beton 41).

St. Bechyně, Stavitelství mostů kamenných a betonových I., 2. (Praha 1932).

J. Laciný, Vyšetřování únosnosti základové půdy na staveništi (Praha 1932).

Zd. Bažant ml., Zkoumání základové půdy a výpočet dovoleného namáhání pro návrh plochy tuhých základů (Techn. obzor 1933, 261).

Th. Ježdík, Statické řešení zděných přehrad (litogr., Praha 1935).

K. Hruban, Ssedání základů, tlaky v půdě a výpočet základních desek (Praha 1936).

K. Válek, Výpočet komínového dříku (Techn. obzor 1936, 38).

B. Tolman, Zakládání staveb II., 4. (Praha 1937).

L. Záruba, Výpočet opěrných zdí (Zprávy veř. služby techn. 1937, 43).

Zd. Bažant ml., Proudění podzemní vody a jeho vliv na navrhování základů staveb, zvláště jezů (Praha 1938).

Zd. Bažant ml., Teorie prolomení základové půdy (Zprávy veř. služby techn. 1939, II, 2).

K. Válek, Koeficient bezpečnosti a bezpečnost. Případ kominářský (Techn. obzor 1939, 252).

Zd. Bažant ml., Prolomení základové půdy pod štětovou stěnou (Techn. obzor 1940, 132).

St. Bechyně, Vyšetření účinku tlaku větru na obloukové mosty (Techn. obzor 1943, 241).

J. Kunštátský, Početní způsob návrhu lichoběžníkových opěrných zdí (Techn. obzor 1943, 58).

Souborná česká díla o stavebné mechanice jsou:

J. Šolín, Theorie zevnitřních sil trámů přímých (Praha), I. (1878), II. (1879), III. (1885).

J. Šolín, Základy technické nauky o pružnosti a pevnosti (Praha 1904, 2. vyd. 1911).

Zd. Bažant, Theorie čar příčinkových (Praha), I. (1909), II. (1910), III. (1912).

Zd. Bažant-Fr. Klokner-J. Kolář-K. Hruban, Statika stavebních konstrukcí (Technický průvodce, s. 4, Praha 1917, 6. vyd. 1946).

Fr. Klokner, Železné stavby pozemní (litogr., Praha, 2. vyd. 1921).

L. Vávra, Stavebná mechanika (České Budějovice), I. (1921), II. 1. (1933), II. 2. (1946).

R. Kukač, Statika pozemních staveb I. (Praha 1946).

Seznam věcný.

(Čísla značí stránky.)

Bod jádrový krajní 94, 291
— patní 293, 321
— základní 62, 79, 200, 255
body základní lomeného nosníku 255
— — oblouku bez kloubů 200, 207
— — příhradového oblouku bez kloubů 79
— — spojitého nosníku příhradového 61
břímě ideálné 20, 22, 26, 50, 102, 113
— osamělé svislé 20, 99, 103, 132, 140, 154, 164, 177, 193, 200, 223, 241, 256, 258
— vodorovné 149, 157, 171, 180, 184, 212, 231, 245, 261.

Čára napětí normálného: přesná 92, přibližná 94
— ohybová jakožto čára výslednicová 100, účinek momentu 101, účinek normálné síly 102, účinek změny teploty 102
— — kruhového oblouku bez kloubů při změně teploty 238
— — — — o dvou kloubech při změně teploty 162
— — nízkého parabolického oblouku bez kloubů při změně teploty 251
— — — — — o dvou kloubech při změně teploty 175
— — nosníku oblouk. 99
— — — spojitého o dvou polích 127
— — oblouku bez kloubů 202
— — — o dvou kloubech při změně teploty 148
— — — o třech kloubech 112
— — přímého prutu 102
— — soustavy prutové 20, 36, 40, 42, 49, 65, 75, 85
— — změnou teploty pro klenbu 316
— poměrného tlaku 273, pro povrch rovný 276, pro povrch zatížený 279
— příčinková momentu u nízkého parabolického oblouku o dvou kloubech 167
— — — u oblouku o dvou kloubech 138
— — — — — o třech kloubech 109
— — normálné síly u oblouku o dvou kloubech 139
— — — — — — o třech kloubech 111
— — osové síly zbytného prutu 20, 22, řešení přesné 33, řešení přibližné 26
čára příčinková otočení tečny ke střednici 126
— — posouvající síly u nízkého parabolického oblouku o dvou kloubech 168
— — — — u oblouku o dvou kloubech 139
— — — — — — o třech kloubech 110
— — posunutí libovolného bodu nosníku 126
— — průhybu oblouku o třech kloubech 113
— — — středu kruhového oblouku o dvou kloubech: řešení grafické 161, řešení počtářské 160
— — — — nízkého parabolického oblouku bez kloubů 248
— — — — — — — o dvou kloubech 173
— — — — oblouku o dvou kloubech 147
— — — — příhradového oblouku s táhlem 36
— — — vrcholu kruhového oblouku bez kloubů 237
— — snížení vrcholu klenby 316
— — vodorovné síly kruhového oblouku bez kloubů: řešení počtářské 309
— — — — kruhového oblouku o dvou kloubech při svislém břemeni 156
— — — — nízkého parabolického oblouku bez kloubů 242
— — — — — — — o dvou kloubech 167
— — — — oblouku o dvou kloubech 135, 141, 142, 145, 153
— — — — příhradového oblouku o dvou kloubech 40
— — vodorovných složek reakcí pro oblouk o dvou kloubech s vodorovným břemenem: oblouk obecný 151, oblouk kruhový 158
— součtová tlaku sypké hmoty 271, pro povrch rovný 275, pro povrch zatížený 278
— srovnávací 295
— tlaková 94, 289, 294
— — v klenbě při dělení mezemi svislými 296
— — — — — — sparami správného zaměření 294
— výslednicová 96, 296
— — ke spojité soustavě silové 100
— — možná 300
— — skutečná 300, 302
čáry jádrové krajní 94
— příčinkové momentů ke krajním bodům jádrovým 143, pro klenbu 310

čáry příčinkové momentů pro kruhový oblouk bez kloubů 229
— — — pro polokruhový oblouk bez kloubů 231
— — opěrových reakcí oblouku o třech kloubech 108
— — osových sil prutů příhradového oblouku o dvou kloubech 41
— — — — — — soustavy jednoduše neurčité 20
— — podporových momentů spojitého nosníku příhradového 62
— — podporových reakcí soustavy neurčité 20
— — přibližné osových sil prutů soustavy čtyrnásobné 11
— — — — — — — složené 8
— — pro lomený nosník bez kloubů: momenty 255, vodorovná síla 257
— — pro vyšší oblouk bez kloubů: moment 197, momenty M_I, M_{II}, M_0 193, 197, průhyb středu 203, reakce svislé 196, síla normálná 199, síla posouvající 198, složky reakcí při vodorovném břemeni 215, vodorovná síla 196
— — reakcí podporových a osových sil prutů příhradového nosníku spojitého 42
— — — pro kruhový oblouk bez kloubů: břímě svislé 229, břímě vodorovné 232
— — — pro polokruhový oblouk bez kloubů při vodorovném břemeni 236
— — u příhradového oblouku s táhlem 22
— — u soustavy dvojnásob neurčité 57
— — — — několikrát neurčité 48
část nevzdorující 292
— vzdorující 292.

Dělení klenby mezemi svislými 296
— — sparami správného zaměření 294
délka nesprávná zbytného prutu 17, 47
— správná zbytného prutu 17, 47
doplněk poměrného tlaku 279
— tlaku 279.

Elipsa směrová 285
— tlaková 285.

Hmota sypká 265
— — neomezená 281
hodnoty krajní momentu při oblouku o třech kloubech za pohyblivého zatížení 112
— — momentů ke krajním bodům jádrovým při klenbě 315
— — — — — — — při oblouku o dvou kloubech 145
— — — pro nízký oblouk parabolický o dvou kloubech 169
— — napětí v krajních vláknech klenby 309, 316
— — — — — — u oblouku o dvou kloubech 145
— — osových sil prutů soustavy jednoduše neurčité 30
hodnoty krajní průhybu středu oblouku o dvou kloubech 148
— — snížení vrcholu klenby 316
hráz zděná 326
hypothesa o přetvoření nosníku obloukového 90.

Chyba v poloze středu tlaku a ve výslednici při dělení klenby mezemi svislými 299.

Klenba plná 308
— segmentová 308
— valená (válcová) 292
kloub 98
— opěrový 39, 103, 130
— střední, vrcholový 103
— v klenbě 309
konstrukce zděné 289
kontroly při soustavě jednoduše neurčité 22, 29, 35, 38, 40
— — — několikrát neurčité 48.

Meze tlaku sypké hmoty 268
modul pružnosti 17
moment ke krajnímu bodu jádrovému 95, 98, 143, 310
— ohybový 88, 97
momenty ke krajním bodům jádrovým pro klenbu 310
— podporové spojitého nosníku příhradového 59.

Nadezdívka (vyzdívka) 293, 309
namáhání dovolené: základové půdy 323, zdiva 292, 306
napětí hlavní 284, 326
— — ideálné 95
— krajní 95, 291
— největší 291, 294, 326
— normálné 89, 282, 290
— průměrné 94
— tangenciálné 95, 282
— — největší 284
— v sypké hmotě 282
napjatost v neomezené hmotě sypké 281
násyp 293
neurčitost statická 5
— — nosníků obloukových 98, 186
nosník lomený 176, 252
— — bez kloubů: břímě vodorovné 261, čáry příčinkové 256, grafické řešení reakcí 258, zatížení svislé 254
— — — — obecného tvaru 252
— — o dvou kloubech: břímě svislé 179, břímě vodorovné 180, zvláštní případy 178
— — — — — obecného tvaru 176
— mřížovaný 10
— obloukový 87
— — ocelový nýtovaný 142

nosník obloukový se dvěma klouby 99
— — s jedním kloubem 98
— — s třemi klouby 99
— příhradový dvojnásob neurčitý 49
— — spojitý 12, 41, 59
— — — s třetím (visutým) pasem 82
— přímopasový soustavy kosoúhlé čtyrnásobné 10
— — — — dvojnásobné 10
— — soustavy složené 5
— spojitý 118
— — o dvou polích 127
— — pevně spojený se svislým prutem 121
— — s kloubem 120, 129
— základní 117.

Oblouk bez kloubů 99, 185
— — — : reakce opěrové 185
— — — kruhový: břímě svislé 223, břímě vodorovné 231, přetvoření 236
— — nesouměrný 210
— — — nízký parabolický: břímě svislé 239, břímě vodorovné 245, přetvoření 248, zatížení rovnoměrné svislé 245
— — polokruhový: břímě svislé 230, břímě vodorovné 236
— — — stálého průřezu 204, 220
— — vyšší: břímě vodorovné 212, čáry příčinkové 193, grafické řešení reakcí 200, ohybová čára 202, složky reakcí 189
— — — stálého průřezu 204
— o dvou kloubech 99, 130
— — — kruhový stálého průřezu: břímě svislé 154, břímě vodorovné 157, přetvoření 160
— — — nízký parabolický: břímě svislé 164, břímě vodorovné 171, částečné zatížení rovnoměrné 169, plné zatížení rovnoměrné 168, přetvoření 173
— — — polokruhový: břímě svislé 157, břímě vodorovné 160
— — — s klouby v různé výši 151
— — — vyšší proměnného průřezu 140, řešení počtářské 142
— — — stálého průřezu 132
— — — — — s vodorovným břemenem 149
— o třech kloubech 99, 103
— — — s klouby v různé výši 107
— příhradový bez kloubů 73
— — o dvou kloubech 39
— — s táhlem 22
obrazec momentový 97
— momentu k bodu jádrovému 98
— poměrného tlaku 273, 276, 279
— součtový 271, 276, 279
— translokační 19, 40
odchylka přirozená 265
— tečny k ohybové čáře prostého nosníku 128
omezení povrchu sypké hmoty 273
opěra 13, 96, 292
— klenbová 318
— klenutá (ztracená) 322
— silná 318
— slabá 318, 323
oprava výslednice při dělení klenby mezemi svislými 299
osa hlavní 284
— neutrálná 94, 291
— nosníku 87
— nulová 292
otočení tečny ke střednici 125.

Paprsek výsledního napětí v sypké hmotě 284
paprsky reakcí u lomeného nosníku bez kloubů: břímě svislé 258, břímě vodorovné 262, plné zatížení rovnoměrné 260, soustava břemen 259
— — u kruhového oblouku bez kloubů: břímě svislé 230, břímě vodorovné 235
— — u nízkého parabolického oblouku bez kloubů: břímě svislé 244, břímě vodorovné 248, plné zatížení rovnoměrné 245
— — — — — o dvou kloubech: břímě svislé 167, břímě vodorovné 173, částečné zatížení rovnoměrné 169, plné zatížení rovnoměrné 168
— — u oblouku o dvou kloubech: břímě svislé 135, břímě vodorovné 151
— — u vyššího oblouku bez kloubů: břímě svislé 200, břímě vodorovné 218, soustava břemen 201
pás jádrový 94
— třetí 82
— visutý 82
pasy jakožto výslednicové čáry 25
patka klenby 293, 309
pilíř krajní 318
— opěrný 318
— podporový 318
— skupinový 318
— vnitřní 318
plocha lícná 292
— příčinková 30, kladná 30, záporná 30
— rubová 292
— určovací 295
počátek klenby 319
podpora pevná 5
— posouvatelná 5
poloha nejúčinnější složeného zatížení pohyblivého 314
— — soustavy osamělých břemen 112, 144
— obojetná (neutrálná) 43, 109

poloha obojetná (neutrálná) pro moment: u nízkého parabolického oblouku o dvou kloubech 168, u oblouku o dvou kloubech 139, u oblouku o třech kloubech 109
— — pro posouvající sílu: u nízkého parabolického oblouku o dvou kloubech 168, u oblouku o dvou kloubech 139, u oblouku o třech kloubech 110
— — pro průhyb středu nízkého parabolického oblouku bez kloubů 250
— přechodná pro posouvající sílu u oblouku o dvou kloubech 139
poloměr zakřivení střednice 90, 303
pootočení v kloubu spojitého nosníku s kloubem 129
popuštění opěr 13, 17, 39, 42, 46, 135, 146, 187, 191
— podpor 12, 119
pořadnice ohybová 99
— — u spojitého nosníku o dvou polích 128, největší 128
porušení rovnováhy zděné konstrukce posouváním 290
— — — — točením 289
posouzení statické opěrné zdi 326
— — opěry: silné 318, slabé 323
povrch zatížený 277
— sypké hmoty 265, křivý 276, lomený 276, rovný 273, vodorovný 277, 288
práce přetvárná nosníku plnostěnného 116
— — soustavy prutové 13
— virtuálná momentu 125
— — u nosníku plnostěnného 123
proměna tlaku v libovolném bodě uvnitř sypké hmoty 281
— tloušťky klenby 304, 307
průhyb středu kruhového oblouku o dvou kloubech 160
— — nízkého parabolického oblouku bez kloubů 248
— — — — — o dvou kloubech 173
— — oblouku bez kloubů 203
— — — o dvou kloubech 147
— — — příhradového s táhlem 36
— vrcholu kruhového oblouku bez kloubů 237
průřez nosníku obloukového 87
prut křivý 87
— nutný 5, 12
— zbytný 5, 12
přechod od svislé meze ke spáře správného zaměření 298
přenášení břemen na nosník obloukový 98
přetvoření kruhového oblouku bez kloubů 236, změnou teploty 238
— — — o dvou kloubech 160, změnou teploty 162
— nízkého parabolického oblouku bez kloubů 248, změnou teploty 251
přetvoření nízkého parabolického oblouku o dvou kloubech 173, změnou teploty 175
— nosníků plnostěnných 123
— oblouku o dvou kloubech změnou teploty 148
— soustavy neurčité 21, 36
přilnavost 265
přímka napětí 94
půda základová 322
působiště výsledního tlaku sypké hmoty 271, 276, 279.

Reakce lomeného nosníku bez kloubů: břímě svislé 255, 258, břímě vodorovné 262, zatížení svislé 254, 258, plné zatížení rovnoměrné 260, řešení grafické 258, 262, soustava břemen 259
— kruhového oblouku bez kloubů: břímě svislé 230, břímě vodorovné 235
— nízkého parabolického oblouku bez kloubů: břímě svislé 244, břímě vodorovné 248, svislé zatížení rovnoměrné 245
— oblouku bez kloubů při svislém břemeni 185, 200, 209
— — — — při vodorovném břemeni: grafické řešení 215, 220, paprsky reakcí 219, 223, vzorce 213
— opěrové lomeného nosníku o dvou kloubech: břímě svislé 179, 183, břímě vodorovné 180, 184
— — klenby 293
— — kruhového oblouku o dvou kloubech 159
— — nízkého parabolického oblouku o dvou kloubech: břímě svislé 167, břímě vodorovné 172, částečné zatížení rovnoměrné 169
— — nosníku obloukového 96
— — oblouku o dvou kloubech: břímě vodorovné 151, zatížení svislé 131
— — — o třech kloubech, řešení grafické: břemena libovolného směru 103, břímě svislé 103, soustava břemen svislých 104, zatížení souměrné 107
— — — — — —, řešení početářské: břímě svislé 104, soustava břemen svislých 104, zatížení rovnoměrné 106
— polokruhového oblouku bez kloubů: břímě svislé 230, břímě vodorovné 236
— podporové staticky neurčité 12, 39, 41, 45, 49, 121, 131, 186
rovina dělicí 267
— hlavní 267, 284
— lícná 326
— nebezpečná 268, 284
— opěrná 266
— patní 292
— rubová 326, sklonitá 329
— sil vnějších 87
— smyku n. posouvání 269
rovnice třímomentová 120
— — pro příhradový nosník spojitý 60
— virtuálných prací 21, 123

rozšíření základů opěry silné 322
— — — slabé 325
roztažení prutu 13, 15
— střednice poměrné 91.

Řešení grafické soustavy jednoduše neurčité 18
— — — několikrát neurčité 47
— klenby počtem 309
— počtářské soustavy několikrát neurčité 47
— přesné neurčité soustavy prutové 12, 33
— přibližné neurčité soustavy prutové 5, 20, 26
— soustavy jednoduše neurčité 16.

Sečnice 99
— kruhového oblouku o dvou kloubech pro vodorovná břemena 159
— lomeného nosníku o dvou kloubech 183
— nízkého parabolického oblouku bez kloubů 243
— — — — o dvou kloubech: břemena svislá 167, břemena vodorovná 172
— oblouku bez kloubů 186, 201
— — o dvou kloubech: břemena svislá 135, břemena vodorovná 151
— — o třech kloubech 103
— polokruhového oblouku o dvou kloubech 157
síla normálná 88, 98, 289, 293
— — lomeného nosníku bez kloubů 258
— — — — o dvou kloubech 184
— — oblouku bez kloubů 199
— — — o dvou kloubech 139
— — — o třech kloubech 111
— osová obecného prutu v soustavě jednoduše neurčité 14
— — — — v soustavě několikrát neurčité 44
— — zbytného prutu 16
— poměrná v sypké hmotě 282
— posouvající (tangenciálná) 88, 98, 289, 296
— — lomeného nosníku bez kloubů 257
— — — — o dvou kloubech 184
— — nízkého parabolického oblouku o dvou kloubech 168
— — oblouku bez kloubů 199
— — — o dvou kloubech 139
— — — o třech kloubech 110
— vodorovná kruhového oblouku bez kloubů 227
— — — — o dvou kloubech 155
— — lomeného nosníku bez kloubů 255
— — — — o dvou kloubech 177
— — nízkého parabolického oblouku bez kloubů 242
— — — — — o dvou kloubech 165
— — obecného oblouku o dvou kloubech: břímě svislé 133, částečné zatížení rovnoměrné 137, řešení počtářské 142, soustava břemen 137, zatížení obecné 131, zatížení souměrné 137
síla vodorovná oblouku 96
— — — bez kloubů 185
— — — o třech kloubech 104
— — — příhradového 39
síly vnější 87, druhotné 96, 293, prvotné 96, 293
— vnitřní 88, normálné 88, tangenciálné 88
sklon 268
— přirozený 265
sklonina přirozená 265
sklonitost přirozená 265
složky reakcí opěrových 97
— výslednice vnějších sil 96, 105
směr tlaku sypké hmoty 280
snížení vrcholu klenby 316
součinitel bezpečné pevnosti 290
— roztažnosti tepelné 15, 17
— tření 265, 290
soudržnost 265
soustava dvojnásobná 9
— — kosoúhlá 10
— — pravoúhlá 9
— jednoduchá 5
— — kosoúhlá 10
— — pravoúhlá 5, 9
— jednoduše neurčitá 12
— kosoúhlá čtyrnásobná 10
— násobná 9
— několikrát neurčitá 44
— osamělých břemen 96, 104, 137, 140, 200, 201, 259
— — — pohyblivá 112, 140, 144, 200
— prutová staticky neurčitá 5
— se dvěma pevnými opěrami 39
— se zbytným prutem 12, 19, 21, 25
— silová spojitá 100
— složená 5
— vícenásobná 10
— základní 5, 12, 44
— — staticky neurčitá 81
souvislost momentu, normálné síly a reakce s veličinami staticky neurčitými 117
spára 289
— nebezpečná 294, 308, 319, 324, 327
— patní 296, 299, 308, 322
— spodní 319, 322, 324, 327
— vrcholová 308
— základní 322
srovnání řešení přibližného a přesného u soustavy jednoduše neurčité 35
stanovení vodorovné síly ve vrcholu klenby 299
stavba vrchní 293
stěna opěrná 266, křivá 266, ležatá 266, 281, lomená 281, převislá 266, 280, rovná 266, sklonitá 280, svislá 280
strana základní čáry ohybové 103

střed napětí 80
— tlaku 94, 289
střednice 87
— jakožto čára výslednicová 300, 302.

Šířka základů slabé opěry 325.

Táhlo 22
tečnice 99
— nízkého parabolického oblouku bez kloubů 244
— oblouku bez kloubů 186, 201
teplota základní 17
tlak elementární 267
— poměrný 266, 279
— sypké hmoty 266
— — — aktivní 268, 286
— — — na rovinu rovnoběžnou s povrchem 286
— — — — — svislou 286
— — — — — při povrchu vodorovném 288, 329
— — — pasivní 269, 286
tlaky opěrové nosníku obloukového 96
— uvnitř sypké hmoty neomezené 281
— — — — omezené svrchu rovinou 285
tloušťka nejmenší 306
— klenby 302
— — ve vrcholu 302
— — v patce 308
— opěry silné 321
— — slabé 324
— zdi opěrné 328
tření 265, 290
tvar nosníku příhradového 25, 50.

Účinek momentu ohybového na čáru ohybovou 101
— nesprávné délky zbytného prutu 18, 47
— popuštění opěr 17, 40, 42, 46, 135, 146, 166, 191, 242
— rovnoměrného zatížení pohyblivého z příčinkové čáry 30
— — — stálého z příčinkové čáry 30
— síly normálné 148, 164, 169, 189, 239, 245, 250
— — — na čáru ohybovou 102
— zatížení 16, 30, 40, 42, 47, 135, 166, 191
— změny teploty 16, 35, 40, 47, 74, 135, 146, 163, 166, 175, 192, 227, 238, 242, 251, 255, 315
— — — na čáru ohybovou 102
účinky vedlejší 16, 40, 47, 135, 146, 166, 191, 227
úhel třecí 265, 290
určitost statická nosníků obloukových 98
úsek jádrový 94, 291.

Váha měrná: náspu 293, sypké hmoty 266, zdiva 306
váha náspu 293
— vlastní 293
— vrchní stavby 293
veličiny staticky neurčité 117
— — — u oblouku bez kloubů 186
velikost tlaku sypké hmoty 271, 288
věta Castiglianova o derivaci přetvárné práce 126
— — o nejmenší práci přetvárné: pro nosník plnostěnný 118, pro soustavu prutovou 15, 46
— Clapeyronova: pro nosník plnostěnný 126, pro soustavu prutovou 14
— o virtuálných pracích pro nosníky plnostěnné 124
— o vzájemnosti napětí tangenciálných 282
— — — posunutí (Maxwellova) 126
vliv síly posouvající na přetvárnou práci 116
vrchol klenby 294, 296, 299, 302, 308, 311, 316,
výminka bezpečné pevnosti 290
— nebezpečné roviny 271
— podporová 5
— — nutná 5
— — zbytná 5, 13
— přetvárná 5, 13, 99
— — příhradového oblouku o dvou kloubech 39
— — pro nízký oblouk o dvou kloubech 164
— — pro oblouk o dvou kloubech 132
— — — — — — — vyšší proměnného průřezu 140
— — — — — — — — stálého průřezu 133, 149
— — soustavy jednoduše neurčité 12
— — spojitého nosníku 120
— — — příhradového 49, 60
— — — s kloubem 121
— rovnováhy statická 5, 98
— — v posouvání 290, 321, 329
— — v točení 289
— statická zvláštní 98
výminky přetvárné pro nízký parabolický oblouk bez kloubů 240, 245
— — pro oblouk bez kloubů 187, 211, 213
— — — — vyšší bez kloubů stálého průřezu 220
— — pro soustavu dvojnásob neurčitou 49
— — — — několikrát neurčitou 46, 47, 48
— rovnováhy konstrukcí zděných 289
— — sil vnějších a vnitřních 88
výpočet tloušťky opěry: silné 319, slabé 324
výslednice vnějších sil 88, 96
vyšetřování statické kleneb 292
výška působiště tlaku sypké hmoty 272, 279
— redukovaná 295
vyzdívka 293
vzdálenost nejmenší středu tlaku od kraje spáry 292
vzorec Winklerův pro tloušťku klenby 306.

Základy opěry: silné 322, slabé 325
zákon normálného napětí u nosníku obloukového: přesný 92, přibližný 93
zatížení 93
— klenby: přímé 293, nepřímé 293, 309
— nejúčinnější 112, 140, 144, 200, 315, 319, 324
— pohyblivé 8, 20, 31, 108, 112, 140, 144, 199, 251, 293, 314, 319, 324, 329
— — složené 314
— povrchu sypké hmoty 277, 329
— rovnoměrné částečné 137, 140, 169, 200
— — plné 106, 120, 121, 127, 129, 168, 175, 184, 215, 251, 280
— — pohyblivé 33, 112, 169, 200, 251, 294
— souměrné 107, 137, 294, 299, 300, 302
— spojité 100, 200, 293
— stálé 31, 103, 144, 293, 314
zeď opěrná 266, 326
— — průřezu lichoběžníkového 326
zeď opěrná průřezu trojúhelníkového 326
zesilování kleneb 307
změna teploty 15, 35, 40, 47, 135, 146, 162, 166, 175, 192, 227, 238, 242, 251, 255, 315
změna úhlu poměrná 91
změny souřadnic bodů styčných 5
znaménka vnitřních sil v sypké hmotě 282
znaménko krajního napětí 95
— momentu ohybového 88, 105
— — u nosníku lomeného bez kloubů 260
— — — — — o dvou kloubech 183
— popuštění opěr u oblouku bez kloubů 188
— pořadnice momentové u oblouku o třech kloubech 105
— síly normálné 88
— — posouvající 88
— složek reakcí u oblouku bez kloubů 185
— složky svislé 97
— — vodorovné 97.

Seznam jmenný.

(Čísla znamenají stránky.)

Andrews E. S. 333

Baes L. 333
Bartoň E. 337, 338
Bašta J. 334, 337, 338
Bäumelt F. 337
Bažant Zd. 335, 336, 338
Bažant Zd. ml. 338
Bechyně St. 336, 338
Bernoulli Jacques 90
Bertot 333
Beyer K. 334
Blažek J. 338
Boussinesq J. 288
Brebera A. 334
Bryan C. W. 333
Bukovský V. 335, 336

Castigliano A. 15, 46, 126, 333
Clapeyron B. P. E. 14, 126, 127, 333
Coulomb Ch. A. 266
Culmann C. 334

Čech Bř. 334, 336
Činčera J. 335
Čížek F. 337

Dašek V. 334, 336, 337

Faltus F. 335
Fifka K. 334
Fontviolant, B. de 333
Föppl Aug. 334
Fränkel W. 99

Genttner R. 337
Gröger Jar. 132, 335, 337

Hampl M. 335
Havelka K. 337
Henneberg L. 334
Hooke 91, 281 290, 299
Hruban K. 334. 337. 338
Husák R. 335

Janák V. 249, 307, 334, 336, 338
Ježdík Th. 338
Jilek A. 338
Jiroušek Z l. 337
Johnson J. B. 333

Kasal M. 336
Kaufmann W. 334
Kazda J. 335
Klement M. 338
Klír J. 336
Klokner Fr. 307, 335, 338
Klouček C. 337
Kolář J. 335, 338
Kolouš k Vl. 337
Kötter Fr. 266, 287
Kovář A. 334, 336
Kukač R. 338
Kunštátský J. 338

Laciný J. 338
Landkammer V. 337
Lévy M. 281, 326, 333

Mašík E. 338
Maxwell J. Cl. 126, 333
Mehrtens G. Ch. 333, 334
Menabrea 15
Mencl M. 337
Mohr O. 14, 333, 334
Molitor D. A. 333
Müller F. 338
Müller-Breslau H. F. B. 11, 20, 25, 78, 333, 334

Navier L. 90, 333
Neumann M. 337
Novák O. 337

Ostenfeld A. 334

Pigeaud G. 333
Pícha V. 338
Polívka J. 336
Poncelet J. V. 266

Rankine J. M. 281, 333
Résal J. 288, 333
Rieger J. 336, 337
Ritter W. 334
Rytíř A. 338

Saint-Venant, Barré de 90, 333
Salmon E. H. 333
Schumandl F. 336
Skouge D. 334
Spála K. 335
Stupecký F. 338

Ševčík J. 337
Šimek K. 335
Šolín Jos. 3, 87, 94, 95, 96, 116, 129, 132, 143, 154, 155, 157, 169, 175, 230, 244, 249, 282, 285, 286, 334, 335, 338

Tolkmitt G. 304
Tolman B. 338
Tomášek A. 335, 337
Turneaure F. E. 333

Válek K. 336, 338
Valenta J. 336
Valenta Vl. 337
Vávra L. 338
Velflík A. V. 9, 10, 335
Vierendeel A. 333
Viktora E. 334
Vyhnánek T. 336

Weyrauch J. J. 285
Winkler E. 99, 302, 306, 333
Wünsch J. 337

Záhorský J. 334
Záruba L. 334, 335, 336, 337, 338
Zelený N. 334, 335
Zimmler E. 338
Zschetzsche A. F. 9, 20

Митинскій Н. Н. 333
Проскуряков Л. 333
Тимошенко С. П. 333
Ясинскій Ф. С. 333

Seznam značek.

(Obsahuje značky častěji užívané.)

a délka oddílu; šířka proužku

a, b body podporové

b šířka uvažovaného pásu sypké hmoty n. klenby

c délka horního pasu; přidružený střed momentový pro horní pás; vzdálenost středu tlaku od těžiště průřezu; kloub vrcholový; vrchol oblouku

c, c' vzdálenosti bodu c od svislic opěrových

c_1, c_2 vzdálenosti středu tlaku od krajních bodů jádrových j_1, j_2

c' vzdálenost středu tlaku od bližšího kraje spáry

d délka spodního pasu; přidružený střed momentový pro spodní pás; vzdálenost neutrálné osy od těžiště průřezu

ds délka prvku střednice

ds_m délka prvku vlákna v bodě m

du prvek průřezu

e délka příčky; půdice; výška osy X nad spojnicí $a\,b$ u oblouku bez kloubů

e_1, e_2 krajní body průřezu; vzdálenosti krajních bodů od těžiště

f vzdálenost pólová, součinitel tření

h výška oblouku; výška nosníku lomeného; výška opěrné stěny; výška opěry

h_0 redukovaná výška nosníku lomeného

i poloměr setrvačnosti

j_1, j_2 krajní body jádrové

k, k_1 dovolené namáhání

l délka pole; rozpětí nosníku

$l_1, l_2 \ldots$ délky polí spojitého nosníku

m příčinková pořadnice; obecný bod střednice; momentová pořadnice

n stálý dělitel příčinkových pořadnic; vnitřní síla normálná; příčinková pořadnice H u oblouku bez kloubů

n_0 stálý dělitel příčinkových pořadnic H

o těžiště průřezu; pól

p působiště břemene

p, p' vzdálenosti bodu p od svislic opěrových

p'' svislá pořadnice bodu p

q zatížení poměrné

q_0 poměrné zatížení stálé

q' poměrné zatížení pohyblivé

r rámě prutu k přidruženému středu momentovému; poloměr zakřivení střednice; poloměr zakřivení lícné plochy; výška působiště tlaku sypké hmoty

r' výška působiště tlaku sypké hmoty za povrchu zatíženého

s délka prutu; délka oblouku

s_i délka prutu nutného

s', s'', s''' délka prutu zbytného

s^+ nesprávná délka prutu zbytného

t vnitřní síla tangenciálná; tloušťka klenby

t_a tloušťka klenby v patce

t_0 tloušťka klenby ve vrcholu

u obsah proužku určovací plochy

v výška nosníku přímopasového; délka svislice; příčinková pořadnice reakce A; redukovaná výška zatížení povrchu sypké hmoty n. náspu

x úsečka styčného bodu; hloubka obecného bodu opěrné stěny; tloušťka opěry; tloušťka opěrné zdi

x' šířka základů opěry

x, z souřadnice bodu střednice

y, z pořadnice styčného bodu

z výška obecného bodu opěrné stěny.

$A_0, A_1, A_2 \ldots$ reakce spojitého nosníku

A, B svislé reakce v podporách a, b; vnější síly

C osová síla v horním pase

D osová síla ve spodním pase; osa neutrálná; osa nulová

E modul pružnosti v tahu n. tlaku

E, F osové síly v příčkách

F tření

F, F_1, F' vzdálenost pólová

G modul pružnosti v posouvání

H vodorovná síla oblouku

H_a, H_b vodorovné složky reakcí v bodech a, b

H_t vodorovná síla vyvozená změnou teploty

J moment setrvačnosti průřezu

J_0 stálá hodnota momentu setrvačnosti

K veličina obdobná momentu setrvačnosti u nosníků obloukových

M moment ohybový

(M) moment vyvozený pomocnými silami vnějšími (P)

M_0 moment od zatížení stálého; moment u přímého nosníku na obou koncích vetknutého

M_1, M_2 momenty ke krajním bodům jádrovým j_1, j_2

M_I, M_{II} momenty výsledních reakcí $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ k bodům a_1, b_1 u oblouku bez kloubů

M' moment od zatížení pohyblivého

M_m moment ohybový k bodu m

M_r moment v podpoře a_r spojitého nosníku

M_t moment vyvozený změnou teploty

N síla normálná

(N) síla normálná vyvozená pomocnými silami vnějšími (P)

(P) pomocná síla vnější

P_1, P_2, . . . břemena ve styčných bodech (spodních)

P' vodorovné břímě

P'_1, P'_2 . . . břemena v horních bodech styčných

Q výslednice zatížení (klenby); váha sypké hmoty

$(Q_{ac})_a$ statický moment zatížení Q_{ac} k bodu a

R výslednice vnějších sil

R_a tlak klenby v patce

S osová síla prutu; tlak sypké hmoty

S_i osová síla nutného prutu

S_x tlak sypké hmoty o hloubce x

S' tlak sypké hmoty za povrchu zatíženého

S', S'', . . . osové síly zbytných prutů

$S'_{(a)}$ osová síla zbytného prutu vyvozená popuštěním opěr

S'_t osová síla zbytného prutu vyvozená změnou teploty

(S) osová síla vyvozená pomocnými silami vnějšími (P)

T síla posouvající

U obsah průřezový; obsah součtového obrazce tlaku sypké hmoty

V osová síla ve svislici; svislá složka výslednice vnějších sil; svislá složka tlaku klenby; svislá složka tlaku sypké hmoty; obsah trojúhelníka určujícího velikost tlaku sypké hmoty

V_0 osová síla v krajní svislici

X', X'', . . . staticky neurčité veličiny

X, Y staticky neurčité veličiny

X, Y, Z osy souřadné.

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ . . . nové polohy bodů a, b, c . . . v obrazci translokačním

$\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$ určovací úseky sil $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$

$\mathfrak{c}$ základní bod složkového obrazce

$\overline{pp'}$, $\overline{rr'}$ určovací úseky sil P, R

u obsah proužku určovací plochy

ξ, ξ' úsečky bodu sečnice pro vodorovná břemena

η příčinková pořadnice síly $\mathfrak{S}$; pořadnice určovací plochy spojité soustavy silové; momentová pořadnice prostého nosníku; určovací úsek poměrného tlaku sypké hmoty

η, ζ souřadnice bodu v průřezu nosníku obloukového

ζ pořadnice sečnice; určovací úsek síly.

$\mathfrak{A}$ reakce podporová základní soustavy při daném zatížení

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ výslední (šikmé) reakce

$\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ podporové reakce (svislé) prostého nosníku

$\mathfrak{M}$ moment prostého nosníku; moment v základním nosníku při daném zatížení

$\mathfrak{N}$ normálná síla v základním nosníku při daném zatížení

$\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ funkce zatížení prostého nosníku

$\mathfrak{P}$ ideálné břímě

$\mathfrak{S}$ doplněk tlaku sypké hmoty

$\mathfrak{S}_i$ osová síla nutného prutu v základní soustavě při daném zatížení

$\mathfrak{T}$ posouvající síla prostého nosníku

$\mathfrak{U}$ obsah příčinkového obrazce; obsah určovací plochy

$\mathfrak{U}_+$, $\mathfrak{U}_-$ obsahy kladné a záporné části příčinkového obrazce

$\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ centrálné osy průřezu oblouku.

α odchylka tečny k ohybové čáře; poloviční úhel středový u oblouku kruhového; číselný součinitel vyjadřující účinek normálné síly

α_1 počet podpor posouvatelných

α_2 počet podpor pevných

α_i reakce v podpoře a_i při zatížení $S' = -1$

α', α'' reakce základní soustavy vyvozené zatížením $S' = -1$, $S'' = -1$

β počet styčných bodů; roztažení prutu s silou $S = 1$; odchylka průvodiče bodu p; součinitel závislý na tvaru průřezu

γ odchylka osy horního pasu od vodorovnice; poměrné posunutí; úhel průřezů opěrových; měrná váha

δ změna teploty; odchylka osy spodního pasu od vodorovnice; sklon výslednice ke spáře n. dělicí rovině

ε odchylka osy příčky od vodorovnice; součinitel roztažnosti tepelné; sklon opěrné stěny

η příčinková pořadnice; ohybová pořadnice

$\eta_{m,n}$ posunutí bodu m ve směru P_m účinkem břemene $P_n = 1$

$\eta_{m,I}$ posunutí bodu m ve směru P_m při zatížení $S' = -1$

$\eta_{I,II}$ změna vzdálenosti bodů v základní soustavě, jež spojoval zbytný prut s', při zatížení $S'' = -1\frac{1}{2}$

ϑ odchylka tlaku sypké hmoty od vodorovnice

λ poměrné roztažení

μ číslo; povrchová rovina sypké hmoty; odchylka povrchové roviny od vodorovnice

ν napětí normálné

ν_1, ν_2 krajní napětí; hlavní napětí

ν_x, ν_y normálná napětí ve směru osy X, Y

ξ, ξ' rovina průřezu

π počet prutů v soustavě prutové

ϱ poloměr zakřivení střednice

σ délka obloučku; poměrný tlak sypké hmoty

σ_i osová síla nutného prutu při zatížení $S' = -1$

σ', σ'' osové síly vyvozené v základní soustavě zatížením $S' = -1$, $S'' = -1$

σ^+ doplněk poměrného tlaku sypké hmoty

τ napětí tangenciálné

φ odchylka tečny ke střednici od vodorovnice; odchylka průvodiče bodu m; úhel třecí

ω poměrná změna úhlu křivosti; odchylka dělicí roviny.

Δa popuštění opěry

Δh_b svislé popuštění v opěře b

Δl vodorovné popuštění opěr u oblouku

Δp posunutí styčného bodu ve směru břemene P

Δs roztažení prutu

Δx konečný dílek vodorovný

$\Delta y'$ změna souměrnosti v průřezech opěrových u oblouku bez kloubů

$\Delta \varphi_m$ změna úhlu φ_m

Θ_a, Θ_b levá a pravá tečnice

Π skutečná práce přetvárná; sečnice pro břemena svislá

Π' přetvárná práce doplněná členy vyjadřujícími účinek změny teploty a popuštění opěr; sečnice pro břemena vodorovná.

Obsah.

Strana

Předmluva k prvému vydání 3
Předmluva k druhému vydání 4

A) Staticky neurčité soustavy prutové.

1. Statická neurčitost 5

I. Řešení přibližné.

2. Soustava složená 5
3. Soustavy násobné:
   α) Soustava dvojnásobná 9
   β) Soustavy vícenásobné 10

II. Řešení přesné.

a) Soustavy jednoduše neurčité.

4. Obecná výminka přetvárná a přetvárná práce:
   α) Výminka přetvárná 12
   β) Přetvárná práce a věta o nejmenší práci přetvárné 13
5. Obecné řešení soustavy jednoduše neurčité:
   α) Obecný vzorec pro osovou sílu zbytného prutu 16
   β) Účinky vedlejší 16
   γ) Řešení grafické 18
   Příklad 1 19
   δ) Zatížení pohyblivé 20
   ε) Řešení přibližné 20
   ζ) Přetvoření 21
6. Příklady:
   α) Soustava se zbytným prutem 21
   Příklad 2 25
   β) Soustava se dvěma pevnými opěrami 39
   γ) Spojitý nosník příhradový o dvou polích 41

b) Soustavy několikrát neurčité.

7. Obecné řešení:
   α) Osová síla obecného prutu 44
   β) Výminky přetvárné a věta o nejmenší práci přetvárné 45
   γ) Řešení počtářské 47
   δ) Řešení grafické 47
   ε) Zatížení pohyblivé 48
8. Praktické použití obecného řešení:
   Příklad 3 49

9. Spojitý nosník příhradový: Strana
α) Obecné vztahy . . . 59
β) Základní body . . . 61
γ) Příčinkové čáry . . . 62
Příklad 4 . . . 64
10. Příhradový oblouk bez kloubů . . . 73
11. Staticky neurčitá soustava základní . . . 81
Příklad 5 . . . 82

B) Theorie plnostěnných nosníků obloukových.

I. Úvod.

12. Základní pojmy . . . 87
13. Síly vnitřní:
α) Výminky rovnováhy sil vnějších a vnitřních . . . 88
β) Napětí normálná . . . 89
γ) Napětí tangenciálná . . . 95
14. Síly vnější:
α) Zatížení libovolné . . . 96
β) Statická určitost . . . 98
γ) Jediné osamělé břímě . . . 99
15. Ohybová čára nosníků obloukových . . . 99

II. Oblouk o třech kloubech.

16. Zatížení stálé:
α) Jediné osamělé břímě svislé . . . 103
β) Soustava svislých břemen . . . 104
γ) Břemena libovolného směru . . . 105
δ) Zatížení rovnoměrné . . . 106
ε) Zatížení souměrné . . . 107
ζ) Opěrové klouby v různé výši . . . 107
17. Zatížení pohyblivé:
α) Příčinkové čáry reakcí opěrových . . . 108
β) Příčinkové čáry momentu, síly posouvající a síly normálné . . . 109
18. Ohybová čára oblouku o třech kloubech . . . 112
Příklad 6 . . . 113

III. Staticky neurčité nosníky obloukové.

a) Obecné výminky přetvárné a přetvoření.

19. Věta o nejmenší práci přetvárné . . . 114
Příklad 7, 8, 9 . . . 118
20. Přetvoření nosníků plnostěnných:
α) Věta o virtuálných pracích . . . 123
β) Věta Castiglianova . . . 125
γ) Věta o vzájemnosti posunutí (Maxwellova) . . . 126
δ) Věta Clapeyronova . . . 126
ε) Příklady:
Příklad 10, 11, 12 . . . 127

b) Oblouk o dvou kloubech.

21. Výminka přetvárná . . . 130
22. Vyšší oblouk stálého průřezu za svislého zatížení:
α) Vodorovná síla . . . 132
β) Sečnice . . . 135
γ) Stanovení reakcí pro různá zatížení . . . 136
δ) Příčinkové čáry momentu, síly posouvající a síly normálné . . . 138

Strana

23. Vyšší oblouk proměnného průřezu 140
Příklad 13. 142
24. Vyšší oblouk stálého průřezu s vodorovným břemenem 149
25. Oblouk s opěrovými klouby v různé výši 151
26. Kruhový oblouk stálého průřezu:
α) Břímě svislé 154
β) Břímě vodorovné 157
γ) Přetvoření 160
27. Nízký oblouk parabolický:
α) Břímě svislé 164
β) Svislé zatížení rovnoměrné 168
γ) Břímě vodorovné 171
δ) Přetvoření 173
28. Nosník lomený:
α) Nosník obecného tvaru 176
β) Zvláštní případy 178

c) Oblouk bez kloubů.

29. Obecné řešení pro svislé zatížení:
α) Opěrové reakce 185
β) Přetvárné výminky 187
30. Obecný oblouk vyšší za svislého zatížení:
α) Vzorce pro složky reakcí 189
β) Příčinkové čáry 193
γ) Grafické řešení reakcí 200
δ) Ohybová čára 202
ε) Oblouk stálého průřezu 204
ζ) Oblouk nesouměrný 210
31. Vyšší oblouk s vodorovným břemenem:
α) Počtářské řešení 212
β) Grafické řešení 215
γ) Oblouk stálého průřezu 220
32. Kruhový oblouk stálého průřezu:
α) Břímě svislé 223
β) Břímě vodorovné 231
γ) Přetvoření 236
33. Nízký oblouk parabolický:
α) Břímě svislé 239
β) Svislé zatížení rovnoměrné 245
γ) Břímě vodorovné 245
δ) Přetvoření 248
34. Nosník lomený:
α) Obecný nosník 252
β) Vzorce pro svislé zatížení 254
γ) Příčinkové čáry 256
δ) Grafické řešení reakcí 258
ε) Vodorovné břímě 261

C) Theorie tlaku hmot sypkých.

35. Základní pojmy 265
36. Obecné řešení velikosti a působiště tlaku na opěrnou stěnu:
α) Rovina nebezpečná 266
β) Meze tlaku 268
γ) Velikost tlaku 269
δ) Působiště tlaku 271

37. Řešení zvláštních případů a směr tlaku: Strana
α) Různé případy omezení povrchu 273
β) Tlak sypké hmoty za povrchu zatíženého 277
γ) Směr tlaku 280
38. Tlaky uvnitř neomezené hmoty sypké:
α) Proměna tlaku v libovolném bodě 281
β) Tlaky uvnitř sypké hmoty omezené svrchu rovinou 285
γ) Použití na tlak na opěrnou stěnu 287

D) Konstrukce zděné.

39. Výminky rovnováhy konstrukcí zděných 289

I. Theorie kleneb valených.

40. Statické vyšetřování kleneb:
α) Obecné úvahy 292
β) Vnější síly 293
γ) Čára tlaková při dělení sparami správného zaměření 294
δ) Čára tlaková při dělení mezemi svislými 296
ε) Stanovení vodorovné síly ve vrcholu 299
41. Tloušťka kleneb:
α) Tloušťka ve vrcholu 302
β) Zesilování kleneb 307
42. Příklad k řešení kleneb 309
Příklad 14 309

II. Opěry klenbové.

43. Opěry silné:
α) Řešení grafické 318
β) Řešení počtářské 319
γ) Základy opěry 322
44. Opěry slabé:
α) Řešení grafické 323
β) Řešení počtářské 324
γ) Základy 325

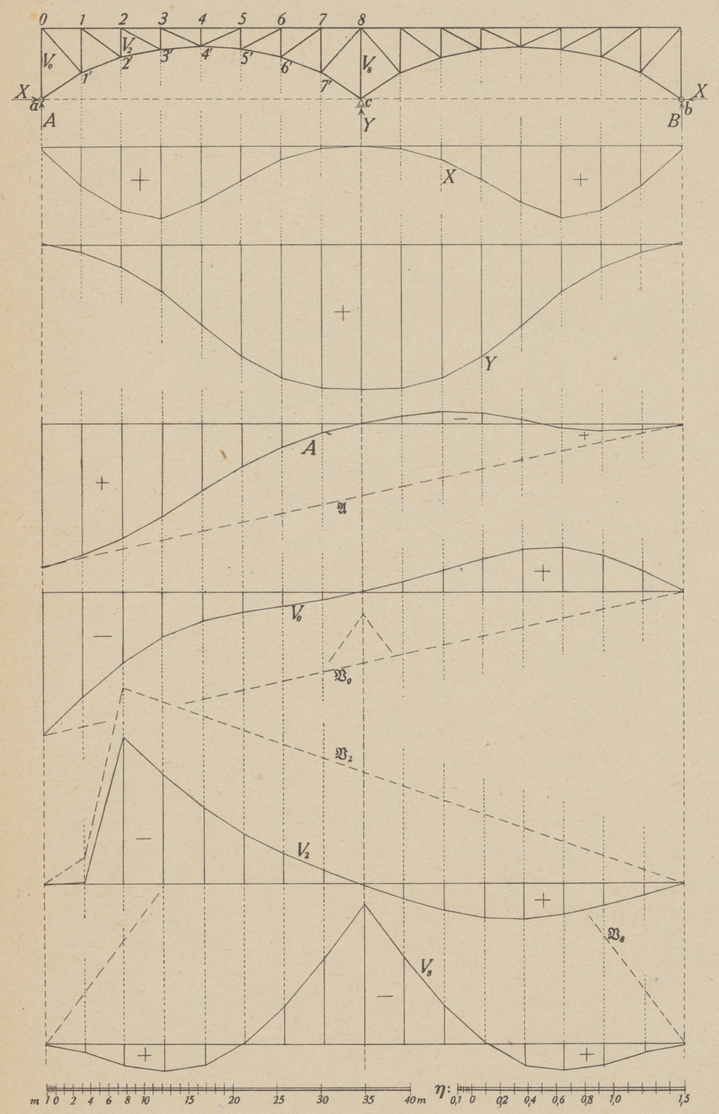
III. Zdi opěrné.

45. Zeď průřezu lichoběžníkového:
α) Řešení grafické 326
β) Řešení počtářské 326
Příklad 15 329

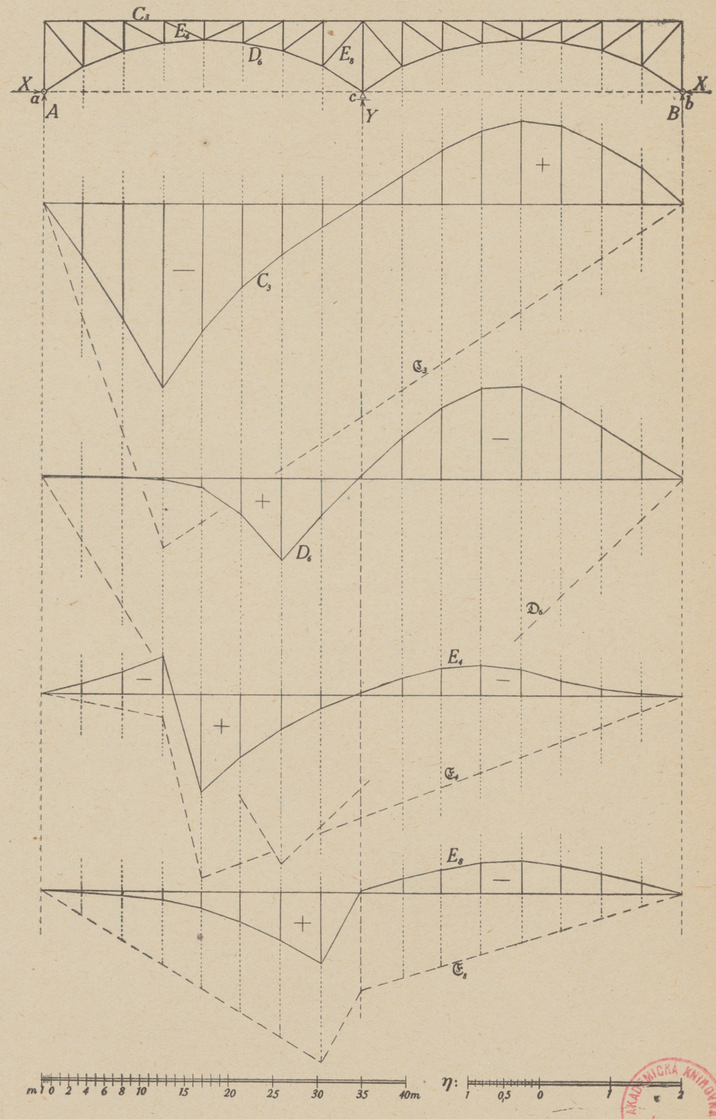
Přehled literatury 333
Seznam věcný 339
Seznam jmenný 346
Seznam značek 348
Obsah 351

AKADEMICKÁ KNIHOVNA SSM
Jednota
V PRAZE

Autor	Prof. Dr. Ing. Zdeněk Bažant
Název díla	Stavebná mechanika, díl III.
Vydala	Česká matice technická
Roku	1946
Vytiskla	Práce, Praha
Vydání	druhé
Cena	Kčs ~~285~~,— 231.- nár.
Počet výtisků	3000

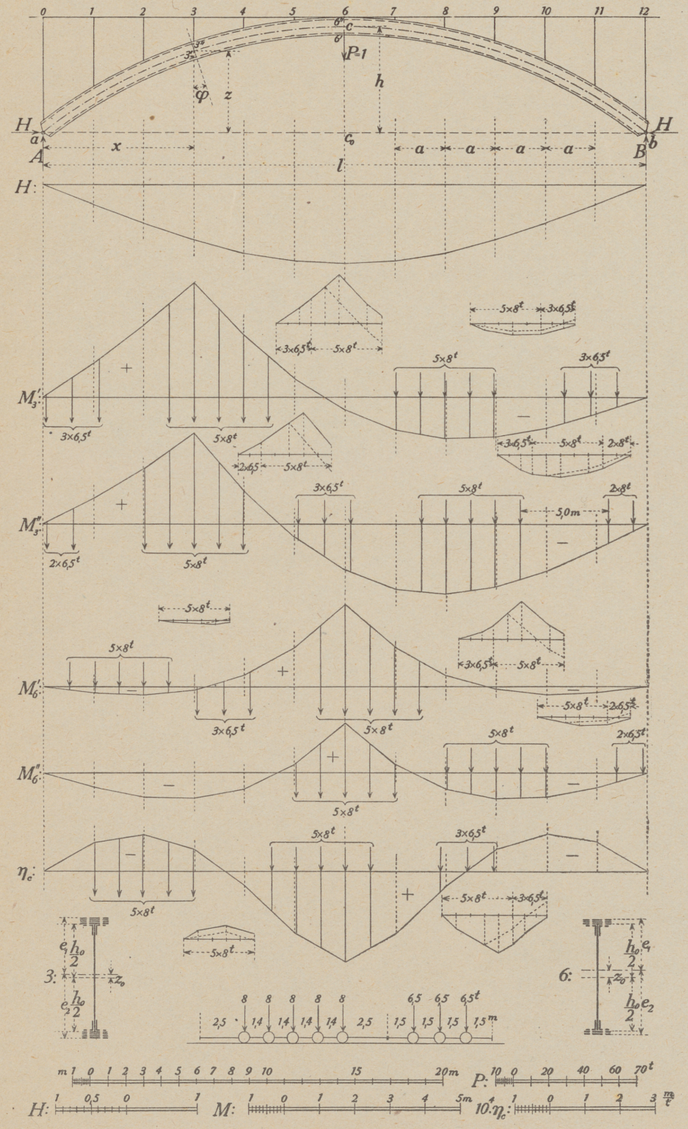


Obr. 19.

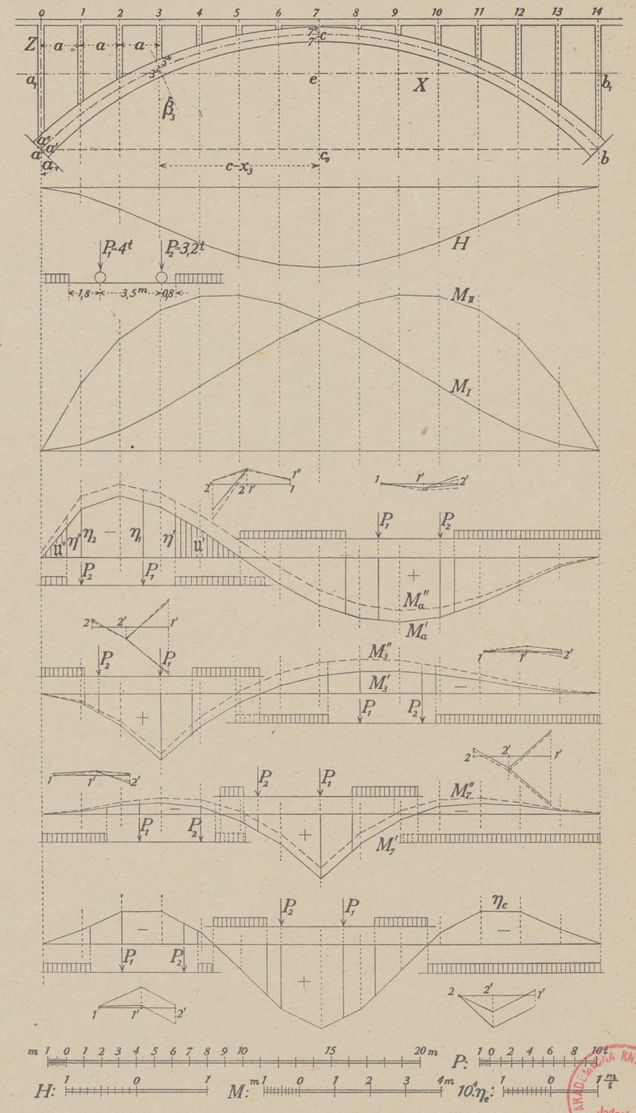


Obr. 20.

AKADEMICKÁ KNIHOVNA ČSAV Jednota V PRAZE



Obr. 71.



Obr. 158.

KNIHOVNA STAV. FAKULTY ČVUT V PRAZE Jednota

Bažant

Stavebná mechanika

III.